



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 2
--------	--------------	---------	---	----------	------	--------	--------

Neiva, 17 de enero del 2025



Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad de Neiva

El (Los) suscrito(s):

David Stiven Oliveros Charry _____, con C.C. No. 1075317464 _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o _____

Titulado Calculo de las sombras en agujeros negros acústico y fantasma presentado y aprobado en el año 2024 como requisito para optar al título de físico.

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permite la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 2
--------	--------------	---------	---	----------	------	--------	--------

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: David Oliveros

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____



SC 7384-I SA-CERIE 98726 OS CER 98755



Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 3

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Calculo de las Sombras en Agujeros Negros Acústico y Fantasma

AUTOR O AUTORES: David Stiven Oliveros Charry

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Oliveros Charry	David Stiven

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física

CIUDAD: Neiva AÑO DE PRESENTACIÓN: 2024 NÚMERO DE PÁGINAS: 66

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas Fotografías Grabaciones en discos Ilustraciones en general Grabados
Láminas Litografías Mapas Música impresa Planos Retratos Sin ilustraciones Tablas o Cuadros

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: LATEX

MATERIAL ANEXO:

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 3



PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. <u>Analogía acústica</u>	<u>Acoustic analogy</u>	6. <u>Agujero negro</u>	<u>Black hole</u>
2. <u>Sombras de agujero negro</u>	<u>Shadows of black holes</u>	7. <u>Python</u>	<u>Python</u>
3. <u>Espacio-tiempo</u>	<u>Space-time</u>	8. <u>Horizonte de eventos</u>	<u>Event horizon</u>
4. <u>Algoritmo de Newman-Janis</u>	<u>Newman-Janis algorithm</u>	9. <u>Relatividad general</u>	<u>General relativity</u>
5. <u>Energía potencial</u>	<u>Potential energy</u>	10. <u>Partículas de prueba</u>	<u>Test particle</u>

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se estudió el modelo teórico de analogía acústica para explorar la formación de sombras de agujeros negros en un espacio-tiempo estático. Se empleó el algoritmo de Newman-Janis con el objetivo de extender las soluciones a espacios-tiempo rotatorios, analizando cómo la rotación afecta las propiedades geométricas de los agujeros negros acústicos.

Para llevar a cabo esta investigación, se utilizó la discusión de curvas de energía potencial con el fin de modelar la trayectoria de partículas de prueba dentro de la sombra proyectada por los agujeros negros rotantes. Este análisis se realizó tanto para los agujeros negros acústicos como para una extensión teórica de agujeros negros con carga y rotación.

Es así, que las simulaciones y visualizaciones de las sombras fueron implementadas mediante el uso del lenguaje de programación Python, permitiendo comparar las características de las sombras generadas en ambos tipos de agujeros negros, considerando cómo la rotación y la carga afectan la forma y el tamaño de las mismas. Finalmente, cuando se observa la imagen de un agujero negro lo que realmente estamos observando no es el agujero negro en sí mismo, sino las consecuencias que este genera en su contorno, es decir, su sombra el cual representa de forma indirecta el horizonte de eventos del objeto compacto, comprobando una vez más la teoría de la relatividad general de Einstein donde los resultados tienen una diferencia en la forma y el tamaño que dependen de la fuente que genera la curvatura del espacio-tiempo.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 3

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work, the theoretical model of acoustic analogy was studied to explore the formation of black hole shadows in a static space-time. The Newman-Janis algorithm was employed with the aim of extending the solutions to rotating spacetimes, analyzing how rotation affects the geometrical properties of acoustic black holes.

To carry out this investigation, the discussion of potential energy curves was used in order to model the trajectory of test particles within the shadow cast by rotating black holes. This analysis was performed both for acoustic black holes and for a theoretical extension of charged and rotating black holes.

Thus, the simulations and visualizations of the shadows were implemented using the Python programming language, allowing us to compare the characteristics of the shadows generated in both types of black holes, considering how rotation and charge affect the shape and size of the shadows. Finally, when observing the image of a black hole what we are really observing is not the black hole itself, but the consequences that it generates in its contour, that is, its shadow which indirectly represents the event horizon of the compact object, proving once again Einstein's theory of general relativity where the results have a difference in shape and size that depends on the source that generalizes the curvature of space-time.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: *Diego A. Rasero E.*

Nombre Jurado: Hernando Gonzales Sierra

Firma: *Hernando González*

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES PROGRAMA DE FÍSICA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

Presentado por:
David Stiven Oliveros Charry
Código: 20162152472

Firma:

Director: PhD. Pedro Mario Cañate Casseres

Firma:

Área: Relatividad General

Estudio Comparativo de las Sombras en Agujeros
Negros Acústico y Fantasma

Neiva-Huila
21 de Octubre del 2024

*El negro acústico, canción sin fin,
Espejo del cosmos en un rumor sutil.
Mientras el fantasma, etérea visión,
Cubre lo invisible en su propia prisión.*

AGRADECIMIENTOS

Aprecio y agradezco mucho el amor y respaldo de mi familia, entre ellos mis padres, Blanca y Wilmer, como también el de mi tío Germán por su compresión y apoyo laboral brindado durante este proceso académico. De igual manera agradezco el afecto de mi novia María, por su apoyo fundamental en este proceso y por sus valiosas e intuitivas sugerencias.

Le doy mis más sinceros agradecimientos a mi asesor, el Dr. Pedro Cañate, por compartir sus conocimientos y su tiempo durante el desarrollo de mi trabajo de grado. Agradezco profundamente su paciencia y su apoyo para ayudarme a mejorar.

Finalmente expreso mi gratitud a los jurados: Dr. Hernando González, Dr. Diego Rasero, por tomarse la disposición de revisar y aceptar este trabajo de grado.

RESUMEN

En este trabajo se estudió el modelo teórico de analogía acústica para explorar la formación de sombras de agujeros negros en un espacio-tiempo estático. Se empleó el algoritmo de Newman-Janis con el objetivo de extender las soluciones a espacios-tiempo rotatorios, analizando cómo la rotación afecta las propiedades geométricas de los agujeros negros acústicos.

Para llevar a cabo esta investigación, se utilizó la discusión de curvas de energía potencial con el fin de modelar la trayectoria de partículas de prueba dentro de la sombra proyectada por los agujeros negros rotantes. Este análisis se realizó tanto para los agujeros negros acústicos como para una extensión teórica de agujeros negros con carga y rotación.

Es así, que las simulaciones y visualizaciones de las sombras fueron implementadas mediante el uso del lenguaje de programación Python, permitiendo comparar las características de las sombras generadas en ambos tipos de agujeros negros, considerando cómo la rotación y la carga afectan la forma y el tamaño de las mismas. Finalmente, cuando se observa la imagen de un agujero negro lo que realmente estamos observando no es el agujero negro en sí mismo, sino las consecuencias que este genera en su contorno, es decir, su sombra el cual representa de forma indirecta el horizonte de eventos del objeto compacto, comprobando una vez más la teoría de la relatividad general de Einstein donde los resultados tienen una diferencia en la forma y el tamaño que dependen de la fuente que general la curvatura del espacio-tiempo.

ABSTRACT

In this work, the theoretical model of acoustic analogy was studied to explore the formation of black hole shadows in a static space-time. The Newman-Janis algorithm was employed with the aim of extending the solutions to rotating spacetimes, analyzing how rotation affects the geometrical properties of acoustic black holes.

To carry out this investigation, the discussion of potential energy curves was used in order to model the trajectory of test particles within the shadow cast by rotating black holes. This analysis was performed both for acoustic black holes and for a theoretical extension of charged and rotating black holes.

Thus, the simulations and visualizations of the shadows were implemented using the Python programming language, allowing us to compare the characteristics of the shadows generated in both types of black holes, considering how rotation and charge affect the shape and size of the shadows. Finally, when observing the image of a black hole what we are really observing is not the black hole itself, but the consequences that it generates in its contour, that is, its shadow which indirectly represents the event horizon of the compact object, proving once again Einstein's theory of general relativity where the results have a difference in shape and size that depends on the source that generalizes the curvature of space-time.

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	2
Abstract	3
1 Introducción	7
1.1 Objetivo del Trabajo de Grado	8
1.2 Objetivo General	8
1.3 Objetivos Específicos	8
2 Marco Teórico	9
2.1 Espacio-tiempo y Relatividad Especial	9
2.2 Relatividad General	11
2.3 Métrica del Espacio-tiempo	11
2.4 Variedad Diferencial	12
2.4.1 Vectores	12
2.4.2 Tensores	13
2.5 Curvatura	14
2.6 Ecuaciones de Einstein en Vacío	14
2.7 Agujero Negro de Reissner-Nordström	14
2.7.1 Métrica	15
2.7.2 Horizonte de Eventos	20
2.8 Analogía Acústica de Agujero Negro Canónico	20
2.8.1 Geometría Análoga Acústica	20
2.8.2 Métrica Análoga Acústica	23
2.8.3 Radio Análogo Acústico	24
2.8.4 Horizonte de Eventos Análogo Acústico	24
2.8.5 Comportamiento de las Geodésicas Nulas y Sección Transversal de Captura	24
2.8.6 Esfera de Partículas de Prueba	27
2.9 Agujero Negro de Kerr-Newman	29
2.9.1 Métrica	29
2.9.2 Horizonte de Eventos	30
2.9.3 Ergosfera	30
2.9.4 Límite Estacionario	30
2.10 Analogía Acústica de Agujero Negro Rotante	31
2.10.1 Métrica	31
2.10.2 Horizonte de Eventos	32

2.10.3 Ergosfera	32
2.10.4 Límite Estacionario	32
3 Metodología	33
3.1 Algoritmo de Newman-Janis empleado a las Métricas de Reissner-Nordström y Analogía Acústica Canónica para encontrar Soluciones Rotantes	33
3.1.1 Caso 1: Agujero Negro Acústico Canónico	33
3.1.2 Caso 2: Agujero Negro de Reissner-Nordström	36
3.2 Comportamiento de las Geodésicas Nulas y Sección Transversal de Captura para Partículas de Prueba en Geometrías de Agujeros Negros Rotantes	38
3.2.1 Caso 1: Agujero Negro Acústico	40
3.2.2 Caso 2: Agujero Negro Fantasma	43
3.3 Ecuaciones de Movimiento Geodésico	47
3.3.1 Dinámica de las Partículas de Prueba	49
4 Resultados	52
4.1 Modelado Computacional para la Graficación de las Sombras	52
4.1.1 Caso 1: Sombra de Agujero Negro Acústico	56
4.1.2 Caso 2: Hipotético Agujero Negro Astrofísico	57
4.1.3 Comparación de las sombras	58
5 Conclusiones	60

Índice de figuras

2.1 Espacio y tiempo absoluto, donde q y p representan dos eventos diferentes ocurriendo simultáneamente	9
2.2 Dos observadores espectando un evento simultáneo.	10
2.3 Estructura causal del espacio-tiempo.	10
2.4 Diagrama de la estructura causal espacio-tiempo.	11
2.5 Distancia ds^2 entre los eventos E1 y E2 en un espacio-tiempo plano, suave e infinito.	11
2.6 Plano tangente en el punto \vec{p} de una esfera.	13
2.7 Representación gráfica de las componentes del tensor en una base ortogonal.	13
2.8 Curva de energía potencial.	27
2.9 Si se tiene una partícula de prueba C que provenga del infinito puede ser capturado por el radio máximo que corresponde a la región esférica de partículas.	28
2.10 Estructura de Agujero Negro Rotante con dos horizontes de eventos debido a la curvatura (2.87)	31
3.1 Curvas de energía potencial efectiva.	43
3.2 Curvas de energía potencial efectiva.	47
3.3 Representación de las Coordenadas Celestes.	51

4.1 Sombra de Agujero Negro Acústico de curvatura Δ_1	56
4.2 Sombra del Agujero Negro Fantasma con curvatura Δ_3	57
4.3 Comparación de las Sombras	58

Capítulo 1

Introducción

Algunas décadas después de que Einstein postulara su teoría de la relatividad general en 1915, se desarrolló una rama de estudios en las analogías de gravedad, entre ellas, las analogías acústicas de agujeros negros. El análogo acústico de gravedad es un modelo teórico, que dentro de otras amplias aplicaciones, puede simular los efectos gravitatorios que se producen constantemente en un agujero negro real estático o rotatorio que dependa de la masa, momento angular y carga. La analogía acústica emplea sistemas hidrodinámicos y acústicos que permiten estudiar teóricamente las consecuencias que este genera [1]. Precisamente, la elección de este tipo de análogo acústico ha permitido entender fenómenos relativistas a partir de la mecánica de fluidos y la física acústica. La magnitud de este problema radica en la complejidad de tener una equivalencia entre estos dos fenómenos físicos, tanto por la pléthora de ecuaciones matemáticas involucradas, como por sus variables extremadamente intrincadas (no sólo en cuanto a manejo, sino también en cuanto a la resolución analítica altamente compleja). A pesar de estos cuellos de botella, actualmente, el desarrollo de un análogo acústico de agujero negro es una rama de estudios muy activa, y además, muy prometedora para la física en general, ya que abre las puertas para estudiar de manera análoga los fenómenos relativistas que se generan como consecuencia de los agujeros negros, entre ellos, las ondas gravitacionales, radiación de Hawking y su sombra [2].

1.1. Objetivo del Trabajo de Grado

- Se espera con este trabajo poder proporcionar una comprensión profunda de las sombras proyectadas, comparando específicamente los agujeros negros acústicos con aquellos con campo fantasma y rotación. A través de este análisis se espera lograr una mejor comprensión e interpretación sobre los efectos de la rotación y la carga en la geometría del espacio-tiempo, así como sobre la formación de sombras.

Además, se pretende que las simulaciones y los modelos desarrollados en Python no sólo validen los resultados teóricos obtenidos, sino que también ofrezcan una plataforma computacional para explorar cómo las partículas de prueba se comportan en estos sistemas. Con ello, se espera identificar nuevas propiedades teóricas en los agujeros negros rotatorios que podrían ser relevantes en estudios futuros de la gravedad cuántica, la gravitación numérica o incluso las analogías de laboratorio.

1.2. Objetivo General

- Estudiar y comparar las sombras de agujeros negros acústicos y agujeros negros fantasma, utilizando el algoritmo de Newman-Janis para encontrar soluciones con rotación. Además, modelar las trayectorias de partículas de prueba dentro de las sombras, con simulaciones implementadas en Python.

1.3. Objetivos Específicos

- Resolver el modelo teórico de analogía acústica para agujeros negros estáticos y rotatorios.
- Desarrollar un código en el lenguaje de programación Python para modelar la trayectoria de partículas de prueba para los casos de agujero acústico rotante y un agujero negro rotatorio con campo fantasma.

Capítulo 2

Marco Teórico

Para este trabajo se empleará el concepto de física acústica a través de un fluido en movimiento [2] [3], la teoría de campos clásica, y las ecuaciones de la relatividad general de Einstein en vacío [4]. Para ello, usaremos la signatura $(- +++)$, cuya teoría matemática se denomina Geometría Diferencial.

2.1. Espacio-tiempo y Relatividad Especial

Los físicos en un principio definían los conceptos de espacio y tiempo de manera separada. El espacio estaba compuesto por tres dimensiones en un marco de referencia absoluto que modelaban los sucesos, mientras que el tiempo se definía independiente, absoluto e inmutable para cada observador, el cual transcurría en dirección positiva como se muestra en la siguiente figura:

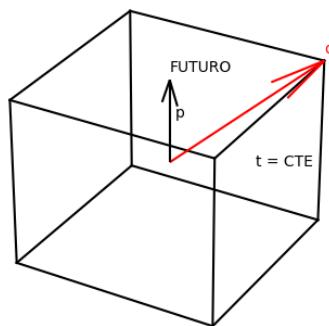


Figura 2.1: Espacio y tiempo absoluto, donde q y p representan dos eventos diferentes ocurriendo simultáneamente.

En 1905, Albert Einstein introdujo la Teoría de la Relatividad Especial, la cual redefine nuestro entendimiento del espacio y el tiempo. Según esta teoría, el espacio-tiempo es una entidad de cuatro dimensiones que combina tres dimensiones espaciales y una dimensión

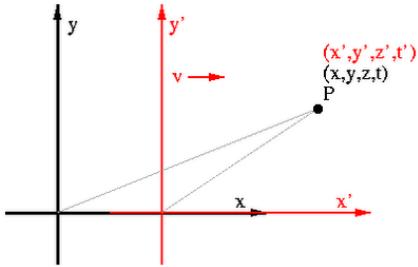


Figura 2.2: Dos observadores espectando un evento simultáneo.

temporal en una única estructura. Esto contrasta con la visión clásica de espacio y tiempo como entidades separadas [4].

Supongamos tener dos observadores inerciales como en la figura [2.2], sea el observador δ en un evento O con coordenadas $\delta(t, x, y, z)$ y sea otro observador δ' que se desplaza con velocidad v en dirección \vec{x}' , pasando por el observador δ : Entonces, se pueden escribir las coordenadas de δ' a partir de las transformadas de Lorentz:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v/c^2}} \quad (2.1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v/c^2}} \quad (2.2)$$

La transformación de Lorentz describe cómo las coordenadas espacio-temporales de un evento cambian cuando este se observa desde diferentes sistemas inerciales. Esto incluye cómo el tiempo y el espacio se entrelazan y se modifican para diferentes observadores moviéndose a velocidades relativas. En la figura [2.3] se ilustra la estructura causal según [4]:

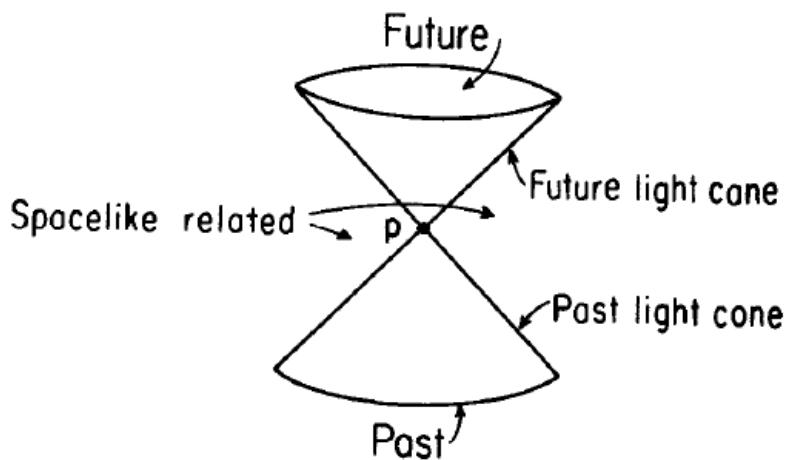


Figura 2.3: Estructura causal del espacio-tiempo.

La luz se desplaza sobre la superficie del cono, es decir sobre 45° , las partículas con masa se podrán desplazar dentro del cono un ángulo menor a 45° y las trayectorias fuera

del cono se consideran inalcanzables para cualquier partícula ya que esta debe tener una velocidad superior a la de la luz.

2.2. Relatividad General

Años más tarde, Einstein desarrolla una nueva teoría que extiende la Relatividad Especial y transforma la comprensión de la gravedad, antes concebida como una fuerza, pero ahora entendida como la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría se fundamenta en el principio de equivalencia, donde un observador en caída libre debido a la gravedad no puede distinguir entre su aceleración y la influencia del campo gravitatorio. Este enfoque lleva a reconsiderar la noción de fuerza como algo negativo, reemplazándola por la presencia de una curvatura en el espacio-tiempo.

Este marco referencial se define como una variedad diferenciable, infinita y suave, que localmente parece plana, compuesta por eventos que representan la posición de objetos en el espacio-tiempo.

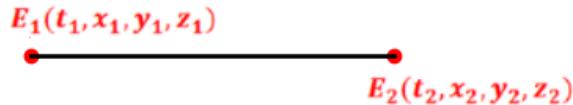


Figura 2.4: Diagrama de la estructura causal espacio-tiempo.

Si E1 y E2 son eventos en el espacio-tiempo que indican la posición de un objeto como se ilustra en la figura [2.4], y el objeto se mueve de E1 a E2, se puede deducir que E1 es el pasado de E2. Por otro lado, si el observador se desplaza de E2 a E1, entonces E1 se puede considerar el futuro de E2 [4].

2.3. Métrica del Espacio-tiempo

Las trayectorias en el espacio-tiempo pueden compararse de manera análoga con una distancia euclíadiana, similar al Teorema de Pitágoras. Esta métrica describe la geometría intrínseca del espacio-tiempo y se ajusta según la presencia de masa y energía en el universo.

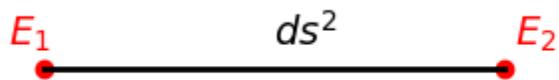


Figura 2.5: Distancia ds^2 entre los eventos E1 y E2 en un espacio-tiempo plano, suave e infinito.

Esta métrica se define como una herramienta para medir la distancia entre dos eventos en una variable diferencial conocida como espacio-tiempo como se muestra en la figura [2.5]. Cuando no hay curvatura en esta variable, la geometría del espacio-tiempo puede describirse mediante una única métrica, denominada métrica de Minkowsky,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

Este espacio-tiempo puede ser curvado por la materia, por lo que Einstein vincula esa curvatura con el tensor energía-momento. Manteniendo el principio de invariancia, este tensor puede transformarse a coordenadas esféricas y expresarse como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.4)$$

Se aclara que ds^2 es una variedad pseudoriemanniana, por lo tanto no siempre es positivo y existen tres posibles casos según [4]:

- Si $ds^2 > 0$ se define como intervalo espacial.
- Si $ds^2 < 0$ se define como intervalo temporal.
- Si $ds^2 = 0$ se define como intervalo nulo, el cual corresponde a la trayectoria seguida por un rayo de luz.

2.4. Variedad Diferencial

En Relatividad General, se define esta variedad diferencial como un espacio topológico, acotado bajo propiedades; siendo este un conjunto no vacío de puntos continuos, que además posee una estructura suave o diferenciable, permitiéndolo analizar geométricamente, y representar posiciones y dinámicas entre un evento y otro [4].

2.4.1. Vectores

El concepto de vector se abarca como una herramienta matemática que define la dirección y magnitud a variables físicas, y pueden ser tratados bajo transformaciones de coordenadas conservando el Principio de Isomorfismo, lo que permite describir el movimiento o posición de la partícula en el espacio[4].

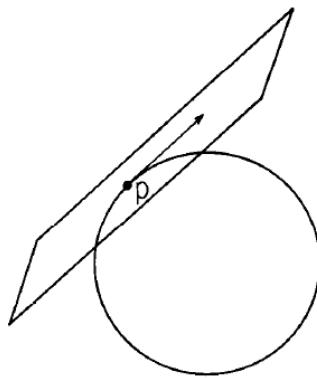


Figura 2.6: Plano tangente en el punto \vec{p} de una esfera.

Para una variedad diferencial, un vector es un elemento del plano tangencial de una región específica de la variedad que ayuda a describir la geometría local como se puede ver en la figura [2.6] según [4], y define además conceptos de derivación, velocidad y aceleración.

2.4.2. Tensores

Es una herramienta algebraica que describe una relación multilineal entre conjuntos de objetos algebraicos relacionados con un espacio vectorial. También pueden mapearse entre diferentes objetos, como vectores, escalares, e incluso otros tensores.

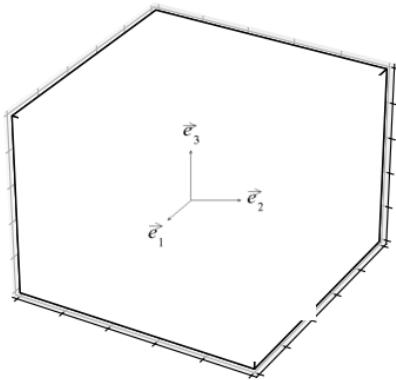


Figura 2.7: Representación gráfica de las componentes del tensor en una base ortogonal.

El tensor métrico se representa como un matriz 4×4 que contiene la forma espacio-temporal entre un evento y otro como en la figura [2.7]; este modela la geometría de la curvatura del espacio-tiempo generada por las ecuaciones de campo de Einstein de masa o energía. De acuerdo con [4], el tensor métrico puede ser descrito como,

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.5)$$

2.5. Curvatura

En la teoría de la Relatividad General, el concepto de deformación del espacio-tiempo debido a la masa o energía es fundamental, ya que transforma nuestra comprensión de la gravedad y permite modelar las trayectorias de las partículas entre eventos. A partir de esta idea, se desarrolla un tensor que encapsula toda la información sobre la curvatura de esta variedad diferencial [4].

2.6. Ecuaciones de Einstein en Vacío

Esta teoría se fundamenta en las ecuaciones de campo de Einstein, que explican cómo la presencia de masa y energía provoca una deformación en el espacio-tiempo, afectando así las trayectorias de las partículas y la luz. Matemáticamente, estas ecuaciones se expresan de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Aquí, G es la constante gravitacional de Newton, que por simplificación puede tomarse como 1. El término $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento que describe la distribución de masa y energía en el espacio-tiempo, mientras que $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein que representa la curvatura del espacio-tiempo. Este tensor se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.7)$$

Donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica, una función que describe la distancia entre dos eventos en el espacio-tiempo. El escalar de curvatura R mide la cantidad total de curvatura en un punto del espacio-tiempo. Por su parte, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci que describe cómo se distribuye la curvatura en el espacio-tiempo. Este tensor se obtiene a partir del tensor de curvatura de Riemann, que se define según [5] como,

$$R_{\mu\nu}^{\gamma} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\mu}^{\delta}\Gamma_{\beta\delta}^{\gamma} - \Gamma_{\mu\beta}^{\delta}\Gamma_{\nu\delta}^{\gamma} \quad (2.8)$$

2.7. Agujero Negro de Reissner-Nordström

Después de que Einstein postulara su teoría de la relatividad general en 1915, vinieron soluciones a sus ecuaciones desarrolladas por diferentes matemáticos y físicos. En esta sección estudiaremos la solución de agujero de Reissner-Nordström, la cual depende de los parámetros de masa M y carga Q de acuerdo con [6].

2.7.1. Métrica

La solución para este tipo de agujero negro fue desarrollada de manera independiente por el matemático Hans Reissner en 1916 y el físico teórico Gunnar Nordström en 1918 [7] [8]. Este caso difiere de la solución de Schwarzschild de acuerdo con [6] debido a que presenta la existencia de un campo electrostático provocado por la carga Q . Esto implica que además de las ecuaciones de campo de Einstein, se deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell. A esta solución se le conoce como la métrica de Reissner-Nordström, y es una solución estática con simetría esférica para las ecuaciones Einstein-Maxwell. A continuación se presenta en coordenadas esféricas con la siguiente notación,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.6)$$

Donde r_s es el radio de Schwarzschild del objeto, dado por $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ y $r_Q^2 = \frac{kq^2G}{c^4}$. En estas ecuaciones, k es la constante de Coulomb, G es la constante gravitatoria y c es la velocidad de la luz. Para simplificar los cálculos de aquí en adelante se hará uso de las unidades naturales $G = c = k = 1$, por lo que la métrica se reduce a,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.7)$$

A continuación deduciremos la métrica (2.7) siguiendo a [9].

Partimos de la Gravedad de Einstein acoplada linealmente a electrodinámica (GR-ED). Ahora, nos enfocamos en obtener las ecuaciones de movimiento relevantes de la teoría de la relatividad general acoplada linealmente a la electrodinámica para una geometría de espaciotiempo estática y simétricamente esférica. La acción gravitacional para GR-ED está dada por:

$$S[g_{ab}, A_a] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 4\eta\mathcal{F}] \quad (2.8)$$

donde R denota el escalar de Ricci, $\mathcal{L} = \eta\mathcal{F}$ es una función que representa la densidad Lagrangiana para el campo electromagnético, siendo \mathcal{F} un cantidad conocida como invariante de campo electromagnético definida como $\mathcal{F} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, siendo $F_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ los componentes del tensor del campo electromagnético, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta$, con A_α los componentes del potencial electromagnético.

Usando la notación $\mathcal{L}_F^n = (\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{F}})^n$, las ecuaciones de campo GR-ED obtenidas de la variación de la ecuación (2.8) son

$$G_\alpha^\beta = 8\pi (T_\alpha^\beta)_{ED} \quad (2.9)$$

Donde $G_\alpha^\beta = R_\alpha^\beta - \frac{R}{2}\delta_\alpha^\beta$ son los componentes del tensor de Einstein. Mientras que

$$4\pi (T_\alpha^\beta)_{ED} = \eta(F_{\alpha\mu}F^{\beta\mu} - \mathcal{F}\delta_\alpha^\beta) \quad (2.10)$$

Son los componentes del tensor de momento-energía de la electrodinámica (Maxwell), con tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ que cumple con las ecuaciones de Maxwell modificadas sin fuente.

$$\nabla_\nu (F^{\mu\nu}) = 0 = d\mathbf{F} \quad (2.11)$$

El ansatz métrico para describir un espaciotiempo de agujero de negro estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano en coordenadas estándar (t, r, θ, ϕ) , también conocidas como coordenadas tipo Schwarzschild, está dado por

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2d\Omega^2 \quad (2.12)$$

Donde $\Phi(r)$ y $b(r)$ son funciones suaves, conocidas respectivamente como la función de corrimiento al rojo (ya que esto da una medida del corrimiento gravitacional al rojo) y la función de forma (ya que esto determina la configuración topológica del espaciotiempo). Aquí, para simplificar la notación, usamos $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ como el elemento lineal de una esfera bidimensional de radio r .

Ahora estamos interesados en describir las ecuaciones GR-ED para una geometría estática y simétricamente esférica de agujero negro. Para la geometría del espaciotiempo (2.12), los componentes no nulos del tensor de Einstein son,

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{b'}{r^2} \quad ; \quad G_r^r = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)\Phi' - \frac{b}{r^3} \quad ; \\ G_\theta^\theta &= G_\varphi^\varphi = \left(1 - \frac{b}{r}\right)(\Phi'^2 + \Phi'') + \frac{2r-b-rb'}{2r^2}\Phi' - \frac{b'}{2r^2} + \frac{b}{2r^3} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Respecto al tensor del campo electromagnético, dado que la métrica del espaciotiempo (2.12) es estática y simétricamente esférica, los únicos términos no nulos son los componentes eléctricos F_{tr} y magnéticos $F_{\theta\varphi}$, de tal manera que

$$F_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha^t\delta_\beta^r - \delta_\alpha^r\delta_\beta^t)F_{tr} + (\delta_\alpha^\theta\delta_\beta^\varphi - \delta_\alpha^\varphi\delta_\beta^\theta)F_{\theta\varphi} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, los componentes no nulos de $(T_\alpha^\beta)_{ED}$ obtenidos de la métrica dada en la ecuación (2.12), con el tensor del campo electromagnético en la ecuación (2.14), están dados por

$$\begin{aligned} 8\pi(T_t^t)_{ED} &= 8\pi(T_r^r)_{ED} = 2\eta(F_{tr}F^{tr} - \mathcal{F}) \\ 8\pi(T_\theta^\theta)_{ED} &= 8\pi(T_\varphi^\varphi)_{ED} = 2\eta(F_{\theta\varphi}F^{\theta\varphi} - \mathcal{F}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Escribiendo $\partial_\alpha(\sqrt{-g}\eta F^{\alpha\beta}) = 0 = d(F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta)$, se deduce que

$$F^{rt} = \frac{q_\varepsilon}{r^2 \sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}, \quad ; \quad F^{\theta\varphi} = \frac{q_B}{r^4 \sin \theta} \quad (2.16)$$

Donde q_ε y q_B son las cargas eléctricas y magnéticas del espacio-tiempo, respectivamente. Por lo tanto, los componentes no nulos de $F_{\alpha\beta}$ y el invariante \mathcal{F} para la geometría genérica estática y simétricamente esférica del espacio-tiempo ecuación (2.12), están dados por

$$\begin{aligned} F_{rt} &= \frac{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}q_\varepsilon}{r^2} \quad ; \quad F_{\theta\varphi} = q_B \sin \theta \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{2r^4} (q_B^2 - q_\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por lo tanto, las ecuaciones GR-ED en el formalismo Lagrangiano [*GR – Maxwell*] para un espaciotiempo estático y simétrico esféricamente en general son

$$C_t^t = 0 \Rightarrow \frac{b'}{r^2} + \frac{2\eta q_\varepsilon^2}{r^4} + 2\eta \mathcal{F} = 0 \quad (2.18)$$

$$C_r^r = 0 \Rightarrow \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' - \frac{b}{r^3} + \frac{2\eta q_\varepsilon^2}{r^4} + 2\eta \mathcal{F} = 0 \quad (2.19)$$

y los componentes C_a^a , con $a = \{\theta, \varphi\}$, se reducen a,

$$C_a^a = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\Phi'^2 + \Phi'') + \frac{2r - b - rb'}{2r^2} \Phi' - \frac{b'}{2r^2} + \frac{b}{2r^3} - \frac{2\eta q_B^2}{r^4} + 2\eta \mathcal{F} = 0 \quad (2.20)$$

Se define el sistema de ecuaciones, donde $\mathcal{F} = \frac{(q_B^2 - q_\varepsilon^2)}{2r^4}$:

$$\frac{b'}{r^2} + \frac{2\eta q_\varepsilon^2}{r^4} + \frac{2\eta(q_B^2 - q_\varepsilon^2)}{2r^4} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' - \frac{b}{r^3} + \frac{2\eta q_\varepsilon^2}{r^4} + \frac{2\eta(q_B^2 - q_\varepsilon^2)}{2r^4} = 0 \quad (2.22)$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) (\Phi'^2 + \Phi'') + \frac{2r - b - rb'}{2r^2} \Phi' - \frac{b'}{2r^2} + \frac{b}{2r^3} - \frac{2q_B^2 \eta}{r^4} + \frac{2\eta(q_B^2 - q_\varepsilon^2)}{2r^4} = 0 \quad (2.23)$$

Hacemos la siguiente operación $\Rightarrow - (2.21) + (2.22)$ nos queda

$$\frac{b'}{r^2} - \frac{b}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{b'}{r} - \frac{b}{r^2}\right) + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' = 0 \quad (2.25)$$

Donde $\left(\frac{b'}{r} - \frac{b}{r^2}\right)' = -\left(1 - \frac{b}{r^2}\right)'$, por lo tanto queda

$$-\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)' + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' = 0 \quad (2.26)$$

Despejando $2\Phi'$ tenemos,

$$2\Phi' = \frac{\left(1 - \frac{b}{r}\right)'}{1 - \frac{b}{r}} \quad (2.27)$$

Sea $Z = 1 - \frac{b}{r} \Rightarrow (\ln Z)' = \frac{Z'}{Z}$, Volviendo a la ecuación (2.26) tenemos,

$$(2\Phi)' = \left[\ln \left(1 - \frac{b}{r}\right)\right]' \quad (2.28)$$

Integramos a ambos lados para encontrar la función,

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \gamma \quad (2.29)$$

Donde $\gamma = cte$ de integración. Aplicamos exponencial a la ecuación anterior

$$e^{2\Phi(r)} = e^{\ln(1 - \frac{b}{r}) + \gamma} = e^\gamma \left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (2.30)$$

Por lo tanto se define una nueva coordenada temporal $\tilde{t} = \sqrt{e^\gamma} t$ para la ecuación de la métrica (2.12)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.31)$$

Sea $\tilde{t} \Rightarrow t$, se reescribe la ecuación anterior como,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.32)$$

Ahora reemplazos la ecuación (2.29) en (2.23), hacemos las respectivas derivadas, expandimos la expresión e integramos. Luego se organiza la expresión algebraica para encontrar la siguiente función,

$$b(r) = c_1 r + c_2 - \frac{\eta(q_B^2 + q_\varepsilon^2)}{r} \quad (2.33)$$

Se sustituye la ecuación (2.33) en (2.32) quedando de la siguiente forma,

$$ds_{Mx}^2 = - \left[1 - \left(c_1 + \frac{c_2}{r} - \frac{\eta(q_B^2 + q_\varepsilon^2)}{r^2} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \left(c_1 + \frac{c_2}{r} - \frac{\eta(q_B^2 + q_\varepsilon^2)}{r^2} \right) \right]} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.34)$$

$$ds_{Mx}^2 = - \left(1 - c_1 - \frac{c_2}{r} + \frac{\eta(q_B^2 + q_\varepsilon^2)}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - c_1 - \frac{c_2}{r} + \frac{\eta(q_B^2 + q_\varepsilon^2)}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.35)$$

Para que esta métrica sea físicamente relevante se debe de imponer lo siguiente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds_{Mx}^2 \sim ds_{Sch}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.36)$$

Donde:

$$c_1 = 0 \quad ; \quad c_2 = 2M \quad ; \quad Q^2 = q_B^2 + q_\varepsilon^2 \quad (2.37)$$

Reescribimos (2.35) como:

$$ds_{Mx}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 \eta}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 \eta}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.38)$$

Para la ecuación (2.38) se consideran los siguientes casos según [10]:

- Cuando $\eta = 1$ ese trata de una fuente electromagnética convencional del tipo Maxwell el cual representa la solución de Reissner-Nordström.

$$ds_{RN}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.39)$$

- Cuando $\eta = 0$ significa que no hay ninguna fuente electromagnética presente. Por lo tanto representara la solución de Schwarzschild.

$$ds_{Sch}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.40)$$

- Cuando $\eta = -1$ representa la contribución negativa de la energía electromagnética a la acción total, lo cual introduce un campo electromagnético fantasma o de fuente exótica.

$$ds_{PRN}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.41)$$

2.7.2. Horizonte de Eventos

Para este caso tendremos un horizonte de evento interno (Cauchy) y externo, cuando $f(r) = 0$ el coeficiente $g_{rr} \rightarrow \infty$. Se evalúa la condición anterior de $f(r) = 0$ y se define un r asociado a la región de no retorno para los fotones [6]:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.42)$$

2.8. Analogía Acústica de Agujero Negro Canónico

En la actualidad no es posible estudiar directamente un agujero negro [6], por esta razón, el análogo acústico es un modelo teórico que pretende probar y proponer algunos comportamientos o consecuencias que generan los agujeros negros empleando conceptos de la física acústica y mecánica de fluidos según [2]. Esto teniendo en cuenta que dicha analogía representa una similitud entre el comportamiento de ondas supersónicas (fonón) en un fluido como medio, y las ondas de la luz (fotón) en un espacio-tiempo generado por un agujero negro. De esta manera, consideramos un fluido con velocidad supersónica donde las ondas sonoras pueden estar dispersadas, ser absorbidas o reflejadas de manera similar a como le suceden a los fotones en el espacio-tiempo curvo. Además, con base en esta analogía se sugiere que el horizonte de sucesos del agujero negro llegue a compararse con el horizonte de sucesos acústico estudiado, donde las ondas supersónicas llegan a ser retenidas sobre dicha región y se roban su energía, exponiendo así la estrecha relación entre este suceso y la métrica acústica para el flujo del fluido que rodea un sumidero puntual [11].

2.8.1. Geometría Análoga Acústica

Para la construcción del modelo se parte de la ecuación fundamental para la dinámica de un fluido según [1],

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.43)$$

Y la ecuación de Euler,

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho [\partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = f \quad (2.44)$$

Donde ρ es la densidad del fluido y v velocidad. Así, se asume que el fluido tiene viscosidad cero. Por lo tanto, las únicas fuerzas presentes son aquellas debidas a la presión del fluido; en otras palabras, la densidad de fuerza es,

$$f = -\nabla p \quad (2.45)$$

La ecuación de Euler puede reducirse a una nueva versión de la ecuación de Bernoulli,

$$-\partial_t \varphi + h + \frac{1}{2} \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.46)$$

Esta reducción surge a través de asumir que el fluido es irrotacional, por el cual se introduce el potencial de velocidades φ , tal que $\vec{v} = -\nabla \varphi$, y también se asume que el fluido es barotrópico, lo que significa que la densidad solo está en función de la velocidad, además de poder definir una entalpía específica de la forma,

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} \Leftrightarrow \nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.47)$$

Para el caso diferente del astrofísico, sucede que tanto el fondo como el campo cuantizado viene del mismo ente, es decir, del propio fluido. Se asumirá así, que el fondo esta caracterizado por (ρ_0, p_0, φ_0) , de tal forma que deberá hacer fluctuaciones de las variables del fluido a varias ordenes de magnitud,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + O(\epsilon^2) \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2) \\ \varphi &= \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

A partir de la analogía con el sonido, se habla de cómo diferenciar una onda acústica (fonón) y una ráfaga de viento (fluctuación del medio) de acuerdo con [12], porque ambas podrían modelarse según la ecuación (2.48); estas se diferenciarán mediante una convención: aquellas perturbaciones con frecuencias del orden de las fluctuaciones promedio del fluido son de frecuencias bajas y se consideran como ráfagas de viento, mientras que las perturbaciones de frecuencias más altas son consideradas como sonido. Se linealiza la ecuación (2.43) para llegar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_0 + \nabla(\rho_0 \vec{v}_0) &= 0 \\ \partial_t \rho_1 + \nabla(\rho_1 \vec{v}_1) &= 0\end{aligned}\tag{2.49}$$

A partir de la ecuación (2.7), se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}-\partial_t \varphi_0 + h + \frac{1}{2}(\nabla^2 \varphi_0) &= 0 \\ -\partial_t \varphi_1 + h + \frac{1}{2}(\nabla^2 \varphi_1) &= 0\end{aligned}\tag{2.50}$$

De la ecuación barotrópica tenemos que,

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \varphi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi_1)\tag{2.51}$$

Manipulando estas ecuaciones se llega a la expresión,

$$-\partial_t \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \varphi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi_1) \right] + \nabla \left[\rho_0 \nabla \varphi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \vec{v}_0 (\partial_t \varphi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi_1) \right] = 0\tag{2.52}$$

Esta ecuación de onda describe la propagación del potencial escalar φ_1 , es decir, de la perturbación acústica. Se simplifica la ecuación anterior al identificar la velocidad del sonido local definida por,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2\tag{2.53}$$

Ahora construimos la matriz simétrica 4x4 identificada como nuestra métrica acústica inversa,

$$g^{\alpha\beta}(t, x) = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^i \\ -v_0^i & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}\tag{2.54}$$

Así la ecuación (2.52) se puede escribir como,

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi)\tag{2.55}$$

Ahora podemos encontrar la matriz acústica covariante,

$$g_{\alpha\beta}(t, x) = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} (c^2 - v_0^2) & -v_0^i \\ -v_0^i & \delta^{ij} \end{pmatrix}\tag{2.56}$$

y así se define el elemento de línea acústico según [2],

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)] \quad (2.57)$$

Se aclara que la métrica acústica tiene más restricciones (3 grados de libertad: ρ , φ y c , y la ecuación de continuidad los reduce a 2) en comparación con la métrica de un espacio curvo en (3+1)D, que posee 6 grados de libertad. Esto implica que la métrica acústica solo puede reproducir, en el mejor de los casos, un subconjunto limitado de las métricas relevantes en relatividad general.

Ademas el flujo puede formar una ergosfera, que es la región donde la velocidad del fluido se vuelve supersónica $v > c$, similar al caso de un agujero negro, en el cual la esfera de fotones es la región donde el espacio se mueve a velocidades superlumínicas [5]. Se define una superficie atrapada (interior o exterior, si el flujo es entrante o saliente, respectivamente) bajo la condición de que la componente normal del flujo sobre esta sea mayor o igual a la velocidad local del sonido. A la región formada por las superficies atrapadas se le denomina región atrapada según [2] [3].

2.8.2. Métrica Análoga Acústica

En este capítulo veremos las consecuencias que generan los agujeros negros acústicos estáticos. Si empezamos por suponer incompresibilidad y simetría esférica, entonces, como ρ es independiente de la posición, la ecuación de continuidad implica $v \propto 1/r^2$. Pero si ρ es independiente de la posición, entonces (debido a la suposición barotrópica) también lo es la presión, y por tanto, también la velocidad del sonido. Así, podemos definir una constante de normalización $r_0 = \mu^{1/4}$ y establecer,

$$v = c \frac{\mu^{1/2}}{r^2} \quad (2.58)$$

Por tanto, la métrica acústica depende de un factor irrelevante independiente de la posición,

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \left(dr \pm c \frac{\mu^{1/2}}{r^2} dt \right)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.59)$$

Hacemos un cambio de variable en la ecuación anterior,

$$d\tau = dt + \frac{\mu^{1/2}}{c \left(1 - \frac{\mu}{r^4} \right)} dr \quad (2.60)$$

Reemplazando la ecuación (2.60) en la ecuación (2.59), nos queda la métrica acústica canónica según [2],

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mu}{r^4} \right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\mu}{r^4} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.61)$$

Donde $\mu = r_0^4$, este elemento de línea describe un agujero negro acústico $(3+1)$ -dimensional con horizonte de sucesos acústico.

Podemos reescribir la métrica (2.61) de forma general como,

$$ds^2 = -f'(r)dt^2 + \frac{1}{g'(r)}dr^2 + h'(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.62)$$

Esta solución ha sido ampliamente estudiada, así como sus propiedades, entre ellas los modos cuasinormales [13], y la dispersión del sonido [14].

2.8.3. Radio Análogo Acústico

Se define r_s como el radio análogo de Schwarzschild, que representa la distancia desde el centro de la burbuja hasta el punto donde la pared separa el fluido supersónico determinando la región de no retorno. Este radio se obtiene a partir de la indeterminación presentada en $r^4 = \mu$. Por el contrario, en el caso donde $r^4 = 0$, se consideraría la singularidad análoga donde el espacio-tiempo análogo tiende a infinito y las trayectorias de los fonones se anulan [2].

2.8.4. Horizonte de Eventos Análogo Acústico

El horizonte de eventos caracteriza la naturaleza del agujero negro análogo según su hidrodinámica y dinámica de las ondas sonoras por lo tanto se define como la frontera de no retorno o región atrapada en la que los fonones no pueden escapar. También se define el horizonte aparente acústico, el cual es una superficie en donde la componente normal de la velocidad del fluido es supersónica [12].

2.8.5. Comportamiento de las Geodésicas Nulas y Sección Transversal de Captura

En esta parte estudiaremos el comportamiento de las geodésicas en un espacio-tiempo estático, empleando como guía el equivalente al problema de potencial cuadrado [15]. Usando la métrica (2.61), se plantea una densidad Lagrangiana que representa el movimiento de la trayectoria y se define como,

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta \quad (2.63)$$

Se define un parámetro afín λ de geodésica, por lo que se reescribe la ecuación anterior,

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \frac{dX^\beta}{d\lambda} \quad (2.64)$$

Reescribimos la anterior ecuación para la métrica (2.61),

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (2.65)$$

La ecuación de movimiento de las geodésicas se puede describir con la ecuación de Euler-Lagrange siguiendo a [4],

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\mathcal{L}}{dP^\alpha} \right) = 0 \quad (2.66)$$

Donde P^α representa la coordenada generalizada y se define como,

$$P^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \quad (2.67)$$

Por otra parte, el movimiento de las geodésicas para los fonones están condicionadas para $\mathcal{L}(X^\alpha, P^\alpha) = 0$; reescribimos la ecuación (2.65) y donde está $\tau \rightarrow t$,

$$-c^2 \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.68)$$

Sea A una coordenada y λ un parámetro afín de geodésica. Se utilizara la siguiente notación:

$$\frac{dA}{d\lambda} = \dot{A} \quad (2.69)$$

De la ecuación (2.65) se pueden definir las coordenadas cíclicas como aquellas que no tienen dependencia del lagrangiano, es decir, son aquellas que representan las cantidades conservadas y por ende se definen como (t, ϕ) ,

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{t}} = E \quad (2.70)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = L \quad (2.71)$$

Solucionando las derivadas anteriores del lagrangiano obtenemos la energía y momento angular, luego despejamos términos por conveniencia para definir;

$$\dot{t} = \frac{E}{-2c^2(1 - \frac{\mu}{r^4})} \quad (2.72)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.73)$$

Ahora reemplazamos \dot{t} y $\dot{\phi}$ en la ecuación (2.68),

$$-c^2 \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \left(\frac{E}{-2c^2(1 - \frac{\mu}{r^4})}\right)^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \left(\frac{L}{2r^2 \sin^2 \theta}\right)^2 = 0 \quad (2.74)$$

Operamos algunos términos,

$$-\frac{E^2}{\left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)} + \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (2.75)$$

Analizamos el problema del plano ecuatorial debido a su simetría esférica, descubriendo que este no pierde su formalidad en las trayectorias; por ende, se fija $\theta = \pi/2$, lo que implica que $d\theta/d\tau = 0$ y $\sin(\pi/2) = 1$. La ecuación anterior queda de la siguiente forma,

$$-\frac{E^2}{\left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)} + \frac{L^2}{4r^2} = 0 \quad (2.76)$$

Dividimos la ecuación anterior por $\left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right)$ y despejamos,

$$\frac{E^2}{4c^2} = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \frac{L^2}{4r^2} \quad (2.77)$$

Ahora podemos definir U_{eff}^2 , definido como potencial efectivo

$$U_{eff}^2 = \frac{L^2}{4r^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \quad (2.78)$$

Organizamos los términos de manera conveniente en la ecuación (2.78),

$$2U_{eff}^2 = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\mu L^2}{2r^6} = \frac{L^2}{2r^6} (r^4 - \mu) \quad (2.79)$$

Computando el potencial efectivo, encontramos todas las trayectorias de los fonones, para lo cual su curva tendrá mínimos y máximos. Esto último implica que en esta región la pendiente equivale a cero $\frac{dU_{eff}^2}{dr} = 0$. Además, para identificar de manera teórica si la curva representa un mínimo o un máximo, se aplicará la segunda derivada al potencial

efectivo, y según el signo de su resultado se definirá (+) para mínimo y (-) para un máximo.

$$\frac{d^2}{dr^2} (2U_{eff}^2) = \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2r^2} - \frac{\mu L^2}{2r^6} \right) \right] = \frac{3L^2}{r^4} - \frac{21L^2\mu}{r^6} \quad (2.80)$$

De la figura 2.81 se puede observar un máximo para $r_{ph} = \sqrt[4]{3}r_0$, que evaluando en la ecuación anterior nos da,

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[2U_{eff}^2 \left(r_{ph} = \sqrt[4]{3}r_0 \right) \right] = -\frac{4L^2}{(\sqrt[4]{3}r_0)^4} \quad (2.81)$$

En la discusión sobre las curvas clásicas de energía potencial se establecía una posición de equilibrio para una trayectoria circular con radio fijo. Además, dado que el fonón se encuentra en un máximo de energía potencial efectiva, su órbita será inestable. Si el fonón experimenta un pequeño desplazamiento desde su posición de reposo, una fuerza actuará sobre él, llevándolo aún más lejos de su posición inicial. La figura [2.8] es valida si $\mu > 0$, recordamos que $r_0^4 = \mu$ [16].

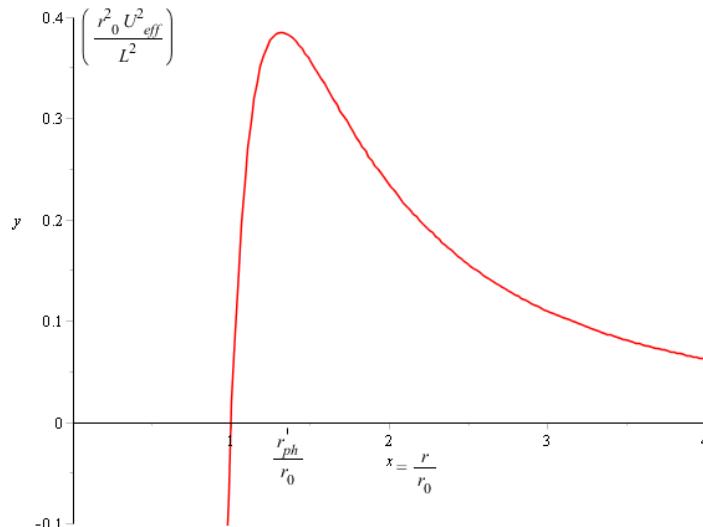


Figura 2.8: Curva de energía potencial.

2.8.6. Esfera de Partículas de Prueba

Analizamos que en el espacio-tiempo de geometría (2.61) puede ser factible que algunos fonones tomen órbitas circulares, según [17]; esto es, para $r = \sqrt[4]{3}r_0$, como se mostró en la 2.8. La esfera de partículas de prueba se define como la última región en donde los partículas pueden quedar orbitando; por otra parte, se define el parámetro de impacto como sigue,

$$b = L / \sqrt{U_{eff}^{Max}} \quad (2.82)$$

que aparece a partir de la discusión de dispersión de una partícula bajo la acción de una fuerza central siguiendo a [17] y [4]. Para hallar este parámetro, primero encontramos el potencial máximo,

$$U_{eff}^{Max} = 2U_{eff}^2 \quad (2.83)$$

y organizamos la ecuación (2.79) de la siguiente forma para calcular (2.82),

$$2U_{eff}^2 = \frac{2L^2}{4r^6} (r^4 - \mu) \Rightarrow U_{eff}^{Max} = \frac{L^2}{r^2} \left(r^4 - \frac{\mu}{r^4} \right) \quad (2.84)$$

como $r = \sqrt[4]{3\mu^{\frac{1}{4}}}$, reemplazamos en la ecuación anterior para encontrar el parámetro de impacto,

$$b = \frac{L}{\sqrt{\frac{L^2}{\sqrt{3}\mu} \left(\frac{2}{3}\right)}} \rightarrow b = \frac{\sqrt[4]{3^3}\mu}{\sqrt{2}} \quad (2.85)$$

De esta manera, b corresponde exactamente al radio de la sombra del análogo acústico de agujero negro en el espacio-tiempo descrito por (2.61) para un observador situado en el infinito como se ilustra en la figura [2.9]. Además, se observa que el radio de la esfera de fonones es mayor que el radio de la sombra.

La sombra de un agujero negro corresponde a la región oscura que se observa en el centro del disco de acreción. Esta es una característica clave, ya que es lo que puede verse desde la Tierra, como se ha mostrado en las imágenes del agujero negro supermasivo M87 [18]. El análisis de estas sombras proporcionan evidencia de la existencia de un objeto compacto, que se logra analizar de manera teórica con este modelo acústico, y que se podría comprobar de manera experimental en el laboratorio, con condensados de Einstein-Rosen [19].

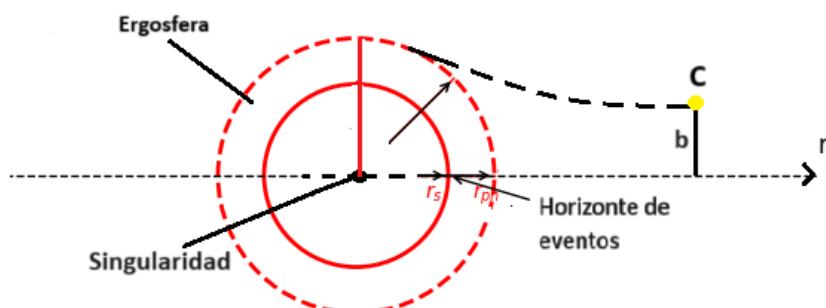


Figura 2.9: Si se tiene una partícula de prueba C que provenga del infinito puede ser capturado por el radio máximo que corresponde a la región esférica de partículas.

2.9. Agujero Negro de Kerr-Newman

En la secciones 2.6 y 2.7 estudiamos las geometrías del espacio-tiempo estático para el agujero negro Reissner-Nordström, y el análogo acústico de un agujero negro canónico, donde se analizó en 2.7 la trayectoria de una partícula de prueba en presencia de un campo gravitacional análogo generado por un vórtice [2], simulando la trayectoria de un fotón en presencia de un campo gravitacional en un agujero negro astrofísico.

Los agujeros negros rotantes se forman por el colapso gravitacional de una estrella masiva con rotación, o por el colapso de una colección de estrellas o gas con un momento angular total distinto de cero. Como la mayoría de las estrellas giran, se espera que la mayor parte de los agujeros en la naturaleza sean agujeros negros en rotación por la conservación del momento angular [20].

2.9.1. Métrica

La métrica de Kerr-Newman es una solución a las ecuaciones de campo en relatividad general que describe la geometría del espacio-tiempo en la región exterior de un agujero negro cargado, rotante, y con masa.

La solución obtenida por Newman y colaboradores en el 1965 [21] representa una solución estacionaria, axialmente simétrica, asintóticamente plana y generalizada de las ecuaciones de campo en presencia de un campo electromagnético en cuatro dimensiones. A continuación, se presenta la métrica en coordenadas generalizadas de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \frac{\Delta_2}{\rho} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} [(r^2 + a^2) d\phi - adt]^2 + \frac{\rho}{\Delta_2} dr^2 + \rho d\theta^2 \quad (2.86)$$

Donde,

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad ; \quad \Delta_2 = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (2.87)$$

La ecuación 2.47 va a depender de los parámetros como la rotación a , la masa M , el radio r , y la carga Q^2 ; con las unidades geométricas $C = G = 1$. Realizando algunos cálculos, encontramos los siguientes coeficientes,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \left(\frac{\Delta_2 + a^2}{\rho^2} \right) \\ g_{t\phi} &= \left(\frac{2a[\Delta_2 - (r^2 + a^2)]}{\rho^2} \right) \\ g_{\phi\phi} &= \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta_2}{\rho^2} \right) \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta_2} \end{aligned} \quad (2.88)$$

2.9.2. Horizonte de Eventos

Una característica intrínseca de un agujero negro rotante representado por esta métrica 2.47, es el horizonte de eventos. Cuando $\Delta_2 = 0$, el coeficiente es $g^{rr} \rightarrow \infty$. Se evalúa la condición anterior de $\Delta_2 = 0$, y se define un r asociado a la región de no retorno para los fotones [4],

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (2.89)$$

Donde r_{\pm} es la distancia de cada horizonte de eventos, siendo el valor r_+ la región para el horizonte de eventos externo, y el valor de r_- para el horizonte de eventos interno.

2.9.3. Ergosfera

Esta región es de gran importancia para el agujero negro de Kerr-Newman, ya que su rotación no coincide con región de eventos del agujero negro de Reissner-Nordström, por lo tanto, esta zona se extiende desde el horizonte de eventos hasta el límite estático, según [21]. En esta zona las partículas de prueba no pueden permanecer estáticas, por lo que son capturadas por la rotación del espacio-tiempo, y además, dentro de esta esfera existen estados de energía negativa que permiten que una partícula extraiga energía y escape hacia un observador en el infinito [22].

2.9.4. Límite Estacionario

Se define como aquella zona en la que un observador ubicado en el exterior del horizonte de eventos logra permanecer estático en referencia a un marco inercial. Esta condición esta descrita en,

$$g_{tt} = - \left(\frac{\Delta_2 + a^2}{\rho^2} \right) = 0 \quad (2.90)$$

En esta región la componente métrica temporal se anula. A continuación, veremos la estructura en la figura [2.10] según [23], que se genera a partir de lo dicho anteriormente,

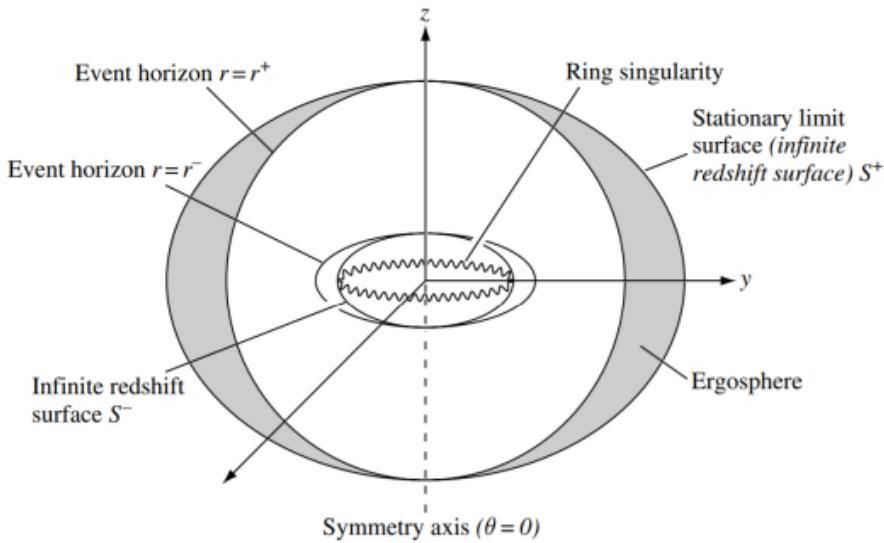


Figura 2.10: Estructura de Agujero Negro Rotante con dos horizontes de eventos debido a la curvatura (2.87)

2.10. Analogía Acústica de Agujero Negro Rotante

En esta sección se obtuvo la métrica rotante de agujero negro acústico aplicando el algoritmo de Newman-Janis a la ecuación (2.61) para introducir el parámetro de rotación a . Este nuevo parámetro a representa el momento angular de la fuente, lo cual nos genera efectos análogos al espacio-tiempo de Kerr [2].

2.10.1. Métrica

A continuación, se presenta la métrica en coordenadas generalizadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = \frac{\Delta_1}{\rho} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} [(r^2 + a^2) d\phi - adt]^2 + \frac{\rho}{\Delta_1} dr^2 + \rho d\theta^2 \quad (2.91)$$

Donde,

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad ; \quad \Delta_1 = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^2} \quad (2.92)$$

La ecuación (2.91) va a depender de la rotación a , el radio r , y la velocidad de flujo en el vórtice μ ; con las unidades geométricas $C = 1$ (velocidad del sonido en el fluido). Realizando algunos cálculos encontramos los siguientes coeficientes,

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= -\left(\frac{\Delta_1 + a^2}{\rho^2}\right) \\
 g_{t\phi} &= \left(\frac{2a[\Delta_1 - (r^2 + a^2)]}{\rho^2}\right) \\
 g_{\phi\phi} &= \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta_1}{\rho^2}\right) \\
 g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta_1}
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

2.10.2. Horizonte de Eventos

Una característica intrínseca de un agujero negro rotante representado por la métrica (2.91), es el horizonte de eventos. Cuando $\Delta_1 = 0$ el coeficiente $g^{rr} \rightarrow \infty$. Se evalúa la condición anterior de $\Delta_1 = 0$, y se define un r asociado a la región de no retorno para las partículas de prueba [12],

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{-a^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^4 + 4\mu}{2}} \tag{2.94}$$

Donde r_{\pm} es la distancia de cada horizonte de eventos generado por la velocidad de flujo del vórtice.

2.10.3. Ergosfera

Esta región es de gran importancia para el agujero negro acústico rotante, ya que su rotación no coincide con la región de eventos del agujero negro acústico canónico, por lo tanto, esta zona se extiende desde el horizonte de eventos hasta el límite estático según [12]. En esta zona los partículas de prueba no pueden permanecer estáticas, por lo que son capturadas por la rotación del espacio-tiempo, y además, dentro de la esfera existen estados de energía negativa que permiten que las partículas extraigan energía y escapen hacia un observador en el infinito [11].

2.10.4. Límite Estacionario

Se define como aquella zona en la que un observador ubicado en el exterior del horizonte de eventos logra permanecer estático con referencia a un marco inercial. Esta condición está descrita en,

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta_1 + a^2}{\rho^2}\right) = 0 \tag{2.95}$$

En esta región la componente métrica temporal se anula.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Algoritmo de Newman-Janis empleado a las Métricas de Reissner-Nordström y Analogía Acústica Canónica para encontrar Soluciones Rotantes

El Algoritmo Newman-Janis se desarrolla en 1965 al poco tiempo de presentarse la solución de agujero negro tipo Kerr-Newman [24].

3.1.1. Caso 1: Agujero Negro Acústico Canónico

Se utilizó esta técnica para obtener la solución análoga acústica de agujero negro rotante a partir de la métrica asociada al análogo acústico canónico que se definió en la ecuación (2.61) siguiendo a [24]. A continuación, se presenta la métrica (2.62) para aplicarle el algoritmo de Newman-Janis

$$ds^2 = -f'(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g'(r)} + h'(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

El primer paso del algoritmo consiste en escribir la métrica anterior en las coordenadas nulas avanzadas (Eddington-Finkelstein) (u, r, θ, ϕ) mediante la siguiente transformación,

$$du = dt - \frac{dr}{\sqrt{f'g'}} \quad (3.2)$$

La métrica en las coordenadas nulas de avance pasa a ser,

$$ds^2 = -f'(r)du^2 - 2\sqrt{\frac{f'}{g'}}dudr + h'(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

El segundo paso consiste en expresar la métrica inversa g^{uv} , utilizando una tétrada nula $Z_\alpha^\mu = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ en la forma,

$$g^{uv} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu \quad (3.4)$$

donde \bar{m}^μ es el conjugado complejo de m^μ , y los vectores de la tétrada satisfacen las siguientes relaciones,

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 \quad (3.5)$$

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = -1 \quad (3.6)$$

Los vectores de la tétrada que satisfacen las relaciones anteriores son los siguientes,

$$l^\mu = \delta_r^\mu \quad ; \quad n^\mu = \sqrt{\frac{g'}{f'}} \delta_u^\mu - \frac{g'}{2} \delta_r^\mu \quad ; \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2h'}} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^\mu \right) \quad (3.7)$$

El tercer paso es una transformación compleja en el plano $r - u$ dada por,

$$r \rightarrow r' = r + a \cos\theta \quad ; \quad u \rightarrow u' = u - i a \cos\theta \quad (3.8)$$

junto con la complejización de las funciones métricas $f'(r)$, $g'(r)$ y $h'(r)$. Tras la transformación, los nuevos vectores de la tétrada pasan a ser,

$$l'^\mu = \delta_r^\mu \quad ; \quad n'^\mu = \sqrt{\frac{G'(r, \theta)}{F'(r, \theta)}} \delta_u^\mu - \frac{G'(r, \theta)}{2} \delta_r^\mu \quad (3.9)$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2H'(r, \theta)}} \left(ia \sin\theta (\delta_u^\mu - \delta_r^\mu) + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^\mu \right) \quad (3.10)$$

donde $F'(r, \theta)$, $G'(r, \theta)$ y $H'(r, \theta)$ son, respectivamente, la forma acomplejada de $f'(r)$, $g'(r)$ y $h'(r)$. Utilizando la nueva tétrada, encontramos la nueva métrica inversa utilizando,

$$g^{uv} = -l'^\mu n'^\nu - l'^\nu n'^\mu + m'^\mu \bar{m}'^\nu + m'^\nu \bar{m}'^\mu \quad (3.11)$$

La nueva métrica en las coordenadas nulas de avance pasa a ser,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -F' du^2 - 2\sqrt{\frac{F'}{G'}} dudr + 2a \sin^2 \theta \left(F' - \sqrt{\frac{F'}{G'}} \right) dud\phi + 2a \sqrt{\frac{F'}{G'}} \sin^2 \theta drd\phi \\ & + H' d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[H' + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{F'}{G'}} - F' \right) \right] d\phi^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

El último paso del algoritmo consiste en escribir la métrica en forma Boyer-Lindquist (donde el único término no nulo es $g_{t\phi}$) utilizando las transformaciones de coordenadas,

$$du = dt' + \chi_1(r)dr, \quad d\phi = d\phi' + \chi_2(r)dr. \quad (3.13)$$

Insertando las transformaciones de coordenadas anteriores en la métrica (3.12), y fijando $g_{t'r}$ y $g_{r\phi'}$ a cero, obtenemos,

$$\chi_1(r) = -\frac{\sqrt{\frac{G'(r,\theta)}{F'(r,\theta)}}H'(r,\theta) + a^2 \sin^2 \theta}{G'(r,\theta)H'(r,\theta) + a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.14)$$

$$\chi_2(r) = -\frac{a}{G'(r,\theta)H'(r,\theta) + a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.15)$$

Nótese que la transformación en (3.13) sólo es posible cuando χ_1 y χ_2 dependen sólo de r . Si los lados derechos de las ecuaciones (3.14) y (3.15) dependen también de θ , entonces no podemos realizar una transformación global de coordenadas de la forma (3.13) según [25]. Aunque no siempre es posible encontrar una complejización adecuada de las funciones de forma que χ_1 y χ_2 sean independientes de θ , en muchos casos sí lo es. Sin embargo, esto implica una cierta arbitrariedad y un elemento de conjetura. Existen muchas formas de complejizar, algunas son:

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1'}{r} + \frac{1}{r'} \right) = \frac{r}{\rho^2}, \quad r^2 \rightarrow r'r' = \rho^2 \quad (3.16)$$

Donde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Finalmente, una vez permitida la transformación global de coordenadas (3.13), la métrica en la coordenada Boyer-Lindquist se convierte en,

$$ds^2 = -F'dt^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\sqrt{\frac{F'}{G'}} - F' \right) dt d\phi + \frac{H'}{G'H' + a^2 \sin^2 \theta} dr^2 + H'd\theta^2 \\ + \sin^2 \theta \left[H' + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{F'}{G'}} - F' \right) \right] d\phi^2 \quad (3.17)$$

Organizando los términos de la ecuación anterior, se obtiene la transformación de la métrica (2.62), encontrando la métrica análoga acústica rotante en coordenadas Boyer-Lindquist descrita en (2.91):

$$ds^2 = \frac{\Delta_1}{\rho} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} [(r^2 + a^2) d\phi - adt]^2 + \frac{\rho}{\Delta_1} dr^2 + \rho d\theta^2 \quad (3.18)$$

Donde

$$\Delta_1 = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^2} \quad (3.19)$$

3.1.2. Caso 2: Agujero Negro de Reissner-Nordström

Aquí se utilizará nuevamente el algoritmo de Newman-Janis para obtener la métrica de Kerr-Newman (2.86) a partir de la métrica de Reissner-Nordström definida en la ecuación (2.39). Se presenta la métrica (2.39) de forma general siguiendo a [24],

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.20)$$

El primer paso del algoritmo consiste en escribir la métrica anterior en las coordenadas nulas avanzadas (Eddington-Finkelstein) (u, r, θ, ϕ) mediante la siguiente transformación,

$$du = dt - \frac{dr}{\sqrt{fg}} \quad (3.21)$$

La métrica en las coordenadas nulas de avance pasa a ser,

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2\sqrt{\frac{f}{g}}dudr + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.22)$$

El segundo paso consiste en expresar la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ utilizando una tétrada nula $Z_\alpha^\mu = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ en la forma,

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu \quad (3.23)$$

donde \bar{m}^μ es el conjugado complejo de m^μ , y los vectores de la tétrada satisfacen las siguientes relaciones,

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 \quad (3.24)$$

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = -1 \quad (3.25)$$

Los vectores de la tétrada que satisfacen las relaciones anteriores son los siguientes,

$$l^\mu = \delta_r^\mu \quad ; \quad n^\mu = \sqrt{\frac{g}{f}}\delta_u^\mu - \frac{g}{2}\delta_r^\mu \quad ; \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2h}}\left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_\phi^\mu\right) \quad (3.26)$$

El tercer paso es una transformación compleja en el plano $r - u$ dada por,

$$r \rightarrow r' = r + a\cos\theta \quad ; \quad u \rightarrow u' = u - i\cos\theta \quad (3.27)$$

junto con la complejización de las funciones métricas $f(r)$, $g(r)$ y $h(r)$. Tras la transformación, los nuevos vectores de la tétrada pasan a ser,

$$l'^\mu = \delta_r^\mu ; \quad n'^\mu = \sqrt{\frac{G(r, \theta)}{F(r, \theta)}} \delta_u^\mu - \frac{G(r, \theta)}{2} \delta_r^\mu \quad (3.28)$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2H(r, \theta)}} \left(ia \sin\theta (\delta_u^\mu - \delta_r^\mu) + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^\mu \right) \quad (3.29)$$

donde $F(r, \theta)$, $G(r, \theta)$ y $H(r, \theta)$ son, respectivamente, la forma acomplejada de $f(r)$, $g(r)$ y $h(r)$. Utilizando la nueva tétrada, encontramos la nueva métrica inversa utilizando,

$$g^{\mu\nu} = -l'^\mu n'^\nu - l'^\nu n'^\mu + m'^\mu \bar{m}'^\nu + m'^\nu \bar{m}'^\mu \quad (3.30)$$

La nueva métrica en las coordenadas nulas de avance pasa a ser,

$$ds^2 = -Fdu^2 - 2\sqrt{\frac{F}{G}}dudr + 2a \sin^2 \theta \left(F - \sqrt{\frac{F}{G}} \right) dud\phi + 2a\sqrt{\frac{F}{G}} \sin^2 \theta drd\phi \\ + Hd\theta^2 + \sin^2 \theta \left[H + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) \right] d\phi^2 \quad (3.31)$$

El último paso del algoritmo consiste en escribir la métrica en forma Boyer-Lindquist (donde el único término no nulo es $g_{t\phi}$) utilizando las transformaciones de coordenadas,

$$du = dt' + \chi_1(r)dr, \quad d\phi = d\phi' + \chi_2(r)dr. \quad (3.32)$$

Insertando las transformaciones de coordenadas anteriores en la métrica (3.31) y fijando $g_{t'r}$ y $g_{r\phi'}$ a cero, obtenemos,

$$\chi_1(r) = -\frac{\sqrt{\frac{G(r, \theta)}{F(r, \theta)}} H(r, \theta) + a^2 \sin^2 \theta}{G(r, \theta) H(r, \theta) + a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.33)$$

$$\chi_2(r) = -\frac{a}{G(r, \theta) H(r, \theta) + a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.34)$$

Nótese que la transformación en (3.32) sólo es posible cuando χ_1 y χ_2 dependen sólo de r . Si los lados derechos de las ecuaciones (3.33) y (3.34) dependen también de θ , entonces no podemos realizar una transformación global de coordenadas de la forma (3.32) según [25]. Aunque no siempre es posible encontrar una complejización adecuada de las funciones de forma que χ_1 y χ_2 sean independientes de θ , en muchos casos sí lo es. Sin embargo, esto implica una cierta arbitrariedad y un elemento de conjetaura. Hay muchas formas de complejizar. Algunas son,

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1'}{r} + \frac{1}{r'} \right) = \frac{r}{\rho^2}, \quad r^2 \rightarrow r' r' = \rho^2 \quad (3.35)$$

donde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Finalmente, una vez permitida la transformación global de coordenadas (3.32), la métrica en la coordenada Boyer-Lindquist se convierte en,

$$ds^2 = -F dt^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) dt d\phi + \frac{H}{GH + a^2 \sin^2 \theta} dr^2 + H d\theta^2 \\ + \sin^2 \theta \left[H + a^2 \sin^2 \theta \left(2\sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) \right] d\phi^2 \quad (3.36)$$

Organizando la expresión anterior queda hecha la transformación a la métrica (2.39), obteniendo como resultado la métrica descrita en (2.86):

$$ds^2 = \frac{\Delta_2}{\rho} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} [(r^2 + a^2) d\phi - adt]^2 + \frac{\rho}{\Delta_2} dr^2 + \rho d\theta^2 \quad (3.37)$$

Donde

$$\Delta_2 = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (3.38)$$

3.2. Comportamiento de las Geodésicas Nulas y Sección Transversal de Captura para Partículas de Prueba en Geometrías de Agujeros Negros Rotantes

Para esta sección estudiamos el comportamiento de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo de geometría rotante. Sin perder originalidad debido a la simetría esférica, se analizan las trayectorias en el plano ecuatorial, es decir, cuando $\theta = 1/2$. A partir de las métricas obtenidas en (3.18) y (3.37), se define una ecuación general de métrica rotante:

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta + a^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{2a [\Delta - (r^2 + a^2)]}{r^2} dt d\phi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^2} d\phi^2 \quad (3.39)$$

La métrica anterior dependera de la curvatura que se este trabajando:

- Si usamos $\Delta_1 = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^2}$ sera para el agujero negro acústico.
- Si usamos $\Delta_2 = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$ sera para el agujero negro de Kerr-Newman.

Usamos como guía la similitud al problema del potencial cuadrado, por lo tanto, se plantea una densidad lagrangiana que representa el movimiento de la trayectoria y se define como,

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \quad (3.40)$$

Se define un parámetro afín λ de geodésica, por lo que se reescribe la ecuación anterior,

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \frac{dX^\beta}{d\lambda} \quad (3.41)$$

Se Reescribe la ecuación anterior para la métrica (3.39)

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & - \left(\frac{\Delta+a^2}{r^2} \right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{2a[\Delta-(r^2+a^2)]}{r^2} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) \\ & + \frac{r^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{(r^2+a^2)^2-a^2\Delta}{r^2} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

La ecuación de movimiento de las geodésicas se puede describir con la ecuación de Euler-Lagrange siguiendo a [4],

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\mathcal{L}}{dP^\alpha} \right) = 0 \quad (3.43)$$

Donde P^α representa la coordenada generalizada y se define como,

$$P^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \quad (3.44)$$

Por otra parte el movimiento de las geodésicas para las partículas de prueba están condicionadas para $\mathcal{L}(X^\alpha, P^\alpha) = 0$. Se reescribe la ecuación (3.42) como,

$$2\mathcal{L} = -g_{tt}\dot{t}^2 + g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0 \quad (3.45)$$

Sea B una coordenada y λ un parámetro afín de geodésica. Se utilizara la siguiente notación:

$$\frac{dB}{d\lambda} = \dot{B} \quad (3.46)$$

3.2.1. Caso 1: Agujero Negro Acústico

Recordamos que para este caso la curvatura es $\Delta_1 = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^2}$. Se definen las componentes métricas de la ecuación (3.45),

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2}\right) \\ g_{t\phi} &= \frac{-2(\mu/r^2)a}{r^2} \\ g_{rr} &= \frac{r^2}{r^2 + a^2 - (\mu/r^2)} \\ g_{\phi\phi} &= \frac{r^4 + r^2 a^2 + a^2 (\mu/r^2)}{r^2} \end{aligned} \tag{3.47}$$

De la ecuación (3.45) se pueden definir las coordenadas cíclicas como aquellas que no tienen dependencia del lagrangiano, es decir, que no representan las cantidades conservadas y por ende se definen como (t, ϕ) ,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = E \tag{3.48}$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = L \tag{3.49}$$

Se desarrollan las respectivas derivadas de las ecuaciones (3.48) y (3.49) se despeja la energía y momento angular,

$$\begin{aligned} E &= -2\left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2}\right)\dot{t} - \frac{2a(\mu/r^2)}{r^2}\dot{\phi} \\ L &= -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2}\dot{t} + \frac{2(r^4 + r^2 a^2 + a^2 (\mu/r^2))}{r^2}\dot{\phi} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones (3.50) como uno matricial,

$$\begin{bmatrix} -2\left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2}\right) & -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \\ -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2 a^2 + a^2 (\mu/r^2))}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Se emplea la regla de Cramer para encontrar las variables \dot{t} y $\dot{\phi}$ con las siguientes expresiones,

$$\dot{t} = \frac{\det A_i}{\det A} \tag{3.52}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\det A_{\dot{\phi}}}{\det A} \quad (3.53)$$

Sea A una matriz, y su determinante,

$$A = \begin{bmatrix} -2 \left(-1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2} \right) & -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \\ -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2))}{r^2} \end{bmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} -2 \left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2} \right) & -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \\ -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2))}{r^2} \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

Solucionamos el determinante de A de la siguiente manera,

$$\det A = \left[-2 \left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2} \right) \left(\frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2))}{r^2} \right) \right] - \left[\left(-\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \right) \left(-\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \right) \right] \quad (3.55)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{(r^2 - (\mu/r^2))(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2)) + (\mu/r^2)^2a^2}{r^4} \right] \quad (3.56)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{r^6 + r^4a^2 + a^2(\mu/r^2)r^2 - r^4(\mu/r^2) - a^2(\mu/r^2)r^2 - a^2(\mu/r^2)^2 + a^2(\mu/r^2)^2}{r^4} \right] \quad (3.57)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{r^4(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))}{r^4} \right] = -4(r^2 + a^2 - (\mu/r^2)) \quad (3.58)$$

Ahora se definen las matrices modificadas A_i y $A_{\dot{\phi}}$ para desarrollar sus determinantes,

$$A_i = \begin{bmatrix} E & -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \\ L & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2))}{r^2} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$A_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} -2 \left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2} \right) & E \\ -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} & L \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\det A_i = \begin{bmatrix} E & -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \\ L & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2))}{r^2} \end{bmatrix} = 2 \left[\frac{Er^4 + Er^2a^2 + Ea^2(\mu/r^2) + aL(\mu/r^2)}{r^2} \right] \quad (3.61)$$

$$\det A_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} -2 \left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2} \right) & E \\ -\frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} & L \end{bmatrix} = -2 \left[\frac{Lr^2 - L(\mu/r^2) - Ea(\mu/r^2)}{r^2} \right] \quad (3.62)$$

Sustituimos los determinantes de las matrices A , A_i y $A_{\dot{\phi}}$ en las ecuaciones (3.52) y (3.53),

$$\dot{t} = -\frac{[Er^4 + Er^2a^2 + Ea^2(\mu/r^2) + aL(\mu/r^2)]}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \quad (3.63)$$

$$\dot{\phi} = \frac{Lr^2 - L(\mu/r^2) - Ea(\mu/r^2)}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \quad (3.64)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (3.63) y (3.64) en la ecuación (3.45),

$$\begin{aligned} & -\left(1 - \frac{(\mu/r^2)}{r^2}\right) \left[-\frac{[Er^4 + Er^2a^2 + E(\mu/r^2)a^2 + (\mu/r^2)aL]}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \right]^2 + \frac{r^2}{r^2 + a^2 - (\mu/r^2)} \dot{r}^2 \\ & - \frac{2a(\mu/r^2)}{r^2} \left[-\frac{[Er^4 + Er^2a^2 + E(\mu/r^2)a^2 + (\mu/r^2)aL]}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \right] \left[\frac{Lr^2 - L(\mu/r^2) - Ea(\mu/r^2)}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \right] \\ & + \frac{r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2)}{r^2} \left[\frac{Lr^2 - L(\mu/r^2) - Ea(\mu/r^2)}{2r^2(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))} \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Se operan algunos términos y reescribimos la ecuación como,

$$\begin{aligned} & -\frac{(r^2 - (\mu/r^2)) [Er^4 + Er^2a^2 + E(\mu/r^2)a^2 + (\mu/r^2)aL]^2}{4r^6(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))^2} + \frac{g_{rr}\dot{r}^2}{4} \\ & + \frac{2a(\mu/r^2) [Er^4 + Er^2a^2 + E(\mu/r^2)a^2 + (\mu/r^2)aL] [Lr^2 - L(\mu/r^2) - E(\mu/r^2)a]}{4r^6(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))^2} \\ & + \frac{[r^4 + r^2a^2 + a^2(\mu/r^2)][Lr^2 - L(\mu/r^2) - Ea(\mu/r^2)]^2}{4r^6(r^2 + a^2 - (\mu/r^2))^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dividimos por g_{rr} , acomodamos términos de manera conveniente y reescribimos la ecuación anterior como,

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 + \frac{1}{4} \left[-\frac{E^2(\mu/r^2)a^2r^2 + E^2r^2a^2 + E^2r^6 - 2E(\mu/r^2)r^2aL + L^2(\mu/r^2)r^2 - L^2r^2}{r^6} \right] = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{E^2(\mu/r^2)a^2}{4r^4} - \frac{E^2a^2}{4r^4} - \frac{E^2}{4} + \frac{E(\mu/r^2)aL}{2r^4} - \frac{L^2(\mu/r^2)}{4r^4} + \frac{L^2}{4r^2} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{(\mu/r^2)}{4r^4} [E^2a^2 + L^2 - 2EaL] + \frac{L^2}{4r^2} - \frac{E^2a^2}{4r^4} = \frac{E^2}{4} \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{(\mu/r^2)}{4r^4} (L - aE)^2 - \frac{E^2a^2}{4r^4} + \frac{L^2}{4r^2} = \frac{E^2}{4} \quad (3.70)$$

Ahora se define el potencial efectivo como,

$$U_{eff}^2 = \frac{L^2}{4r^2} - \frac{\mu}{4r^6} (L - aE)^2 - \frac{E^2 a^2}{4r^4} \quad (3.71)$$

Se puede verificar el anterior potencial efectivo haciendo que la rotación sea $a = 0$, por lo tanto se recupera el potencial para el espacio-tiempo estático descrito en la ecuación (2.78),

$$U_{eff}^2 = \frac{L^2}{4r^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^4}\right) \quad (3.72)$$

A continuación, computamos el potencial obtenido en la ecuación (3.71),

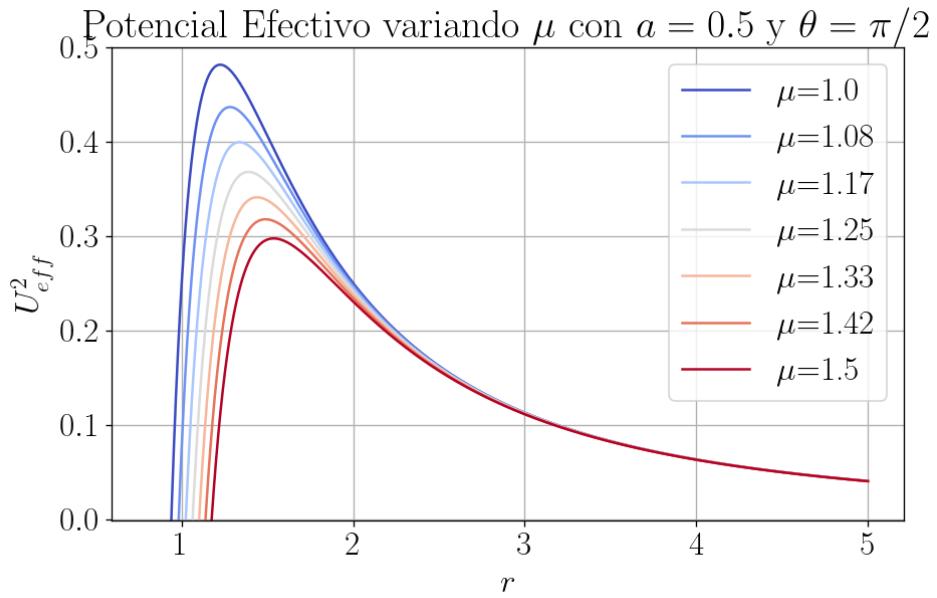


Figura 3.1: Curvas de energía potencial efectiva.

3.2.2. Caso 2: Agujero Negro Fantasma

En esta sección recordamos que la curvatura para este caso es $\Delta_2 = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$ el cual representa la solución de Kerr-Newman en la métrica general obtenida en (3.45).

En el contexto de la teoría Einstein-Maxwell, recordamos que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , que unifica la gravitación con el electromagnetismo, se definió en la ecuación (2.8) como:

$$\mathcal{L} = R + \eta F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.73)$$

Donde:

- R es la curvatura escalar de Einstein, que describe la geometría del espacio-tiempo y los efectos de la gravedad.
- $F_{\alpha\beta}$ es el tensor de Faraday, que describe el campo electromagnético.
- $\eta = -1$ representa la contribución negativa de la energía electromagnética a la acción total, lo cual introduce un campo electromagnético fantasma o exótico .

A partir de ahora se considera el término exótico $\eta = -1$, es decir; que corresponderá a una energía electromagnética con una contribución negativa a la métrica (2.86) con curvatura Δ_2 , desafiando las características estándar de la energía electromagnética convencional [10]. Además la curvatura Δ_2 del espacio (2.86) es tal que no habrá presencia de masa por lo tanto $M = 0$. A continuación se presenta la nueva curvatura denota Δ_3 ,

$$\Delta_3 = r^2 + a^2 - Q^2 \quad (3.74)$$

Este caso astrofísico hipotético se define como Agujero Negro Fantasma con densidad de carga negativa, asociado a una fuente exótica. Se definen las componentes métricas de la solución (3.45),

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) \\ g_{t\phi} &= \frac{-2Q^2a}{r^2} \\ g_{rr} &= \frac{r^2}{r^2 + a^2 - Q^2} \\ g_{\phi\phi} &= \frac{r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2}{r^2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

De la ecuación (3.45) se pueden definir las coordenadas cíclicas como aquellas que no tienen dependencia del lagrangiano, es decir, que no representan las cantidades conservadas, y por ende se definen como (t, ϕ) ,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = E \quad (3.76)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = L \quad (3.77)$$

Se desarrollan las respectivas derivadas de las ecuaciones (3.76) y (3.77) se despeja la energía y momento angular,

$$\begin{aligned} E &= -2\left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right)\dot{t} - \frac{2Q^2a}{r^2}\dot{\phi} \\ L &= -\frac{2Q^2a}{r^2}\dot{t} + \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2}\dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Escribimos el sistema de ecuaciones (3.78) como uno matricial,

$$\begin{bmatrix} -2 \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) & -\frac{2Q^2a}{r^2} \\ -\frac{2Q^2a}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Se emplea la regla de Cramer para encontrar las variables t y $\dot{\phi}$ con las siguientes expresiones,

$$t = \frac{\det A_t}{\det A} \quad (3.80)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\det A_{\dot{\phi}}}{\det A} \quad (3.81)$$

Sea A una matriz, y su determinante,

$$A = \begin{bmatrix} -2 \left(-1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) & -\frac{2Q^2a}{r^2} \\ -\frac{2Q^2a}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2} \end{bmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} -2 \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) & -\frac{2Q^2a}{r^2} \\ -\frac{2Q^2a}{r^2} & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2} \end{vmatrix} \quad (3.82)$$

Solucionamos el determinante de A de la siguiente manera,

$$\det A = \left[-2 \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2} \right) \right] - \left[\left(-\frac{2Q^2a}{r^2} \right) \left(-\frac{2Q^2a}{r^2} \right) \right] \quad (3.83)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{(r^2 - Q^2)(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2) + Q^4a^2}{r^4} \right] \quad (3.84)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{r^6 + r^4a^2 + a^2Q^2r^2 - r^4Q^2 - a^2Q^2r^2 - a^2Q^4 + a^2Q^4}{r^4} \right] \quad (3.85)$$

$$\det A = -4 \left[\frac{r^4(r^2 + a^2 - Q^2)}{r^4} \right] = -4(r^2 + a^2 - Q^2) \quad (3.86)$$

Ahora se definen las matrices modificadas A_t y $A_{\dot{\phi}}$ para desarrollar sus determinantes,

$$A_t = \begin{bmatrix} E & -\frac{2aQ^2}{r^2} \\ L & \frac{2(r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2)}{r^2} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$A_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} -2 \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) & E \\ -\frac{2aQ^2}{r^2} & L \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\det A_t = \begin{bmatrix} E & -\frac{2Q^2a}{r^2} \\ L & \frac{2(r^4+r^2a^2+a^2Q^2)}{r^2} \end{bmatrix} = 2 \left[\frac{Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL}{r^2} \right] \quad (3.89)$$

$$\det A_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} -2 \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) & E \\ -\frac{2Q^2a}{r^2} & L \end{bmatrix} = -2 \left[\frac{Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a}{r^2} \right] \quad (3.90)$$

Sustituimos los determinantes de las matrices A , A_t y $A_{\dot{\phi}}$ en las ecuaciones (3.80) y (3.81),

$$\dot{t} = - \frac{[Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL]}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \quad (3.91)$$

$$\dot{\phi} = \frac{Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \quad (3.92)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (3.91) y (3.92) en la ecuación (3.45),

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) \left[- \frac{[Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL]}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \right]^2 + \frac{r^2}{r^2 + a^2 - Q^2} \dot{r}^2 \\ & - \frac{2Q^2a}{r^2} \left[- \frac{[Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL]}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \right] \left[\frac{Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \right] \\ & + \frac{r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2}{r^2} \left[\frac{Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a}{2r^2(r^2 + a^2 - Q^2)} \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

Se operan algunos términos y reescribimos la ecuación como,

$$\begin{aligned} & - \frac{(r^2 - Q^2)[Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL]^2}{4r^6(r^2 + a^2 - Q^2)^2} + \frac{g_{rr}\dot{r}^2}{4} \\ & + \frac{2Q^2a[Er^4 + Er^2a^2 + EQ^2a^2 + Q^2aL][Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a]}{4r^6(r^2 + a^2 - Q^2)^2} \\ & + \frac{[r^4 + r^2a^2 + a^2Q^2][Lr^2 - LQ^2 - EQ^2a]^2}{4r^6(r^2 + a^2 - Q^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Dividimos por g_{rr} , acomodamos términos de manera conveniente y reescribimos la ecuación anterior como,

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 + \frac{1}{4} \left[-\frac{E^2Q^2a^2r^2 + E^2r^2a^2 + E^2r^6 - 2EQ^2r^2aL + L^2Q^2r^2 - L^2r^2}{r^6} \right] = 0 \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{E^2Q^2a^2}{4r^4} - \frac{E^2a^2}{4r^4} - \frac{E^2}{4} + \frac{EQ^2aL}{2r^4} - \frac{L^2Q^2}{4r^4} + \frac{L^2}{4r^2} = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{Q^2}{4r^4} [E^2a^2 + L^2 - 2EaL] + \frac{L^2}{4r^2} - \frac{E^2a^2}{4r^4} = \frac{E^2}{4} \quad (3.97)$$

$$\frac{1}{4}g_{rr}\dot{r}^2 - \frac{Q^2}{4r^4} (L - aE)^2 - \frac{E^2a^2}{4r^4} + \frac{L^2}{4r^2} = \frac{E^2}{4} \quad (3.98)$$

Ahora se define el potencial efectivo como,

$$U_{eff}^2 = \frac{L^2}{4r^2} - \frac{Q^2}{4r^4} (L - aE)^2 - \frac{E^2a^2}{4r^4} \quad (3.99)$$

A continuación computamos el potencial obtenido en la ecuación anterior,

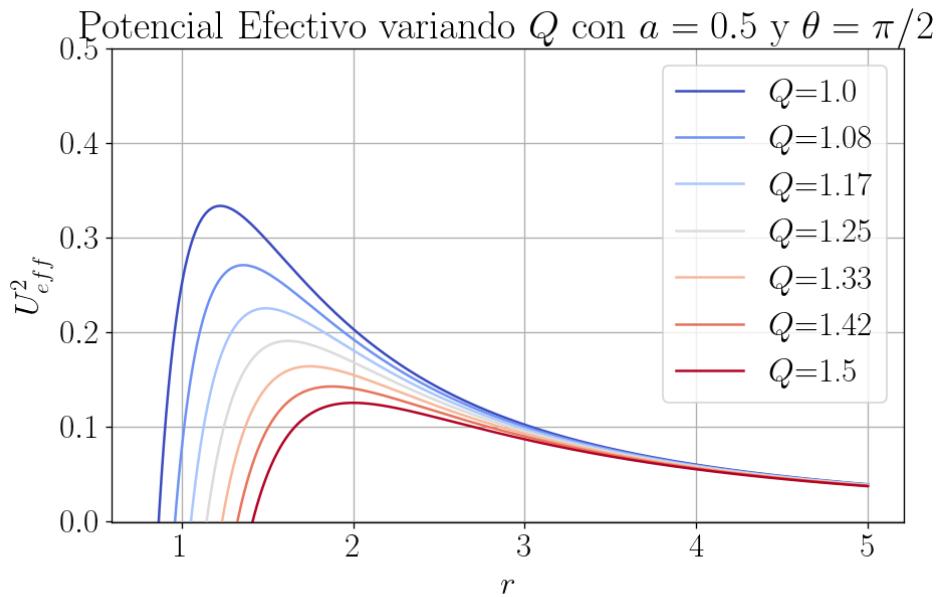


Figura 3.2: Curvas de energía potencial efectiva.

3.3. Ecuaciones de Movimiento Geodésico

Vemos que en el espacio-tiempo de geometría (3.39) es posible que algunas partículas de prueba sigan órbitas circulares, además se ilustra en la figura 2.10 que debido a la rotación del agujero negro se pierde la simetría esférica en sus regiones externas. A partir de lo anterior, se estudiará el movimiento geodésico mediante la teoría de Hamilton-Jacobi, siendo así que se puede describir la evolución dinámica de una partícula de prueba

interactuando con el campo gravitacional en el exterior del agujero negro. Dada la métrica general (3.39), el movimiento geodésico en un espacio-tiempo con métrica $g^{\mu\nu}$ en su forma contravariante es,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \quad (3.100)$$

Conociendo la métrica, se propone que la función principal de Hamilton S sea de la siguiente forma,

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (3.101)$$

Esta forma de escribir S incluye la información de que las coordenadas t y ϕ son cíclicas, es decir, hay una constante de movimiento asociada a cada una.

Considerando el ansatz de S se obtiene,

$$2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} = g^{00} E^2 - 2g^{0\phi} EL + g^{\phi\phi} L^2 + g^{rr} \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 \quad (3.102)$$

Sustituyendo los componentes de la métrica,

$$g^{00}, g^{rr}, g^{\theta\theta}, g^{\phi\phi}, g^{t\phi} \quad (3.103)$$

con los valores,

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{\rho^2 \Delta} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] \\ g^{rr} &= \frac{\Delta}{\rho^2} \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho^2} \\ g^{t\phi} &= \frac{a}{\rho^2 \Delta} (\Delta - r^2 - a^2) \\ g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.104)$$

y se obtiene,

$$m^2 \rho^2 = \frac{1}{\Delta} ((r^2 + a^2) E - aL)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (a \sin^2 \theta E - L)^2 - \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.105)$$

La ecuación es separable, pero antes de obtener las dos ecuaciones, usamos la siguiente identidad,

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} (a \sin^2 \theta E - L)^2 = \left(\frac{L^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta + (L - aE)^2 \quad (3.106)$$

Tras separar la ecuación (3.105), obtenemos las siguientes dos ecuaciones;

$$\Delta \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - m^2 r^2 - [K + (L - aE)^2] \quad (3.107)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = K - (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - m^2 a^2 \cos^2 \theta \quad (3.108)$$

Donde la constante de separación K es la constante de Cárter,

$$K = \Delta - (L - aE)^2 \quad (3.109)$$

Ahora se definen las siguientes funciones,

$$R = [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Delta [m^2 r^2 + K + (L - aE)^2] \quad (3.110)$$

$$\Theta = K + \cos^2 \theta [a^2 (E^2 - m^2) - L^2 \csc^2 \theta] \quad (3.111)$$

La solución de la función principal de Hamilton (3.102) es,

$$S = -\frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{\mathcal{R}(r)}}{\Delta} dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta \quad (3.112)$$

La forma integral de las ecuaciones geodésicas pueden obtenerse a partir de las derivadas parciales de Jacobi respecto a las cantidades E , L , K y m , que son constantes representativas del valor inicial de las coordenadas, con lo cual llegamos a las ecuaciones de movimiento para la luz,

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta] E - 2Mr aL \\ \rho^2 \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{R} \\ \rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} &= \sqrt{\theta} \\ \rho^2 \frac{d\Phi}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} [2MarE + (\Sigma - 2Mr) \csc^2 \theta L] \end{aligned} \quad (3.113)$$

3.3.1. Dinámica de las Partículas de Prueba

Teniendo las ecuaciones de movimiento geodésico, podemos ahora calcular las trayectorias de las partículas de prueba haciendo que la masa de la partícula de prueba $m = 0$. Es conveniente redefinir parámetros $\xi = \frac{L}{E}$ y $\eta = \frac{K}{E^2}$, con estos cambios ahora R y Θ son,

$$R = [r^2 + a^2 - a\xi]^2 - \Delta [\eta + (\xi - a)^2] \quad (3.114)$$

$$\Theta = \eta + \cos^2 \theta (a^2 - \xi^2 \csc^2 \theta) = \eta + (a - \xi)^2 - (a \sin \theta - \xi \csc \theta)^2 \quad (3.115)$$

Las propagaciones de las partículas de prueba que nos interesan son aquellas que se encuentran en la órbita inestable del potencial R , por lo que la condición que deben cumplir las trayectorias que observaremos como el contorno de la sombra del agujero negro es,

$$R = \frac{dR}{dr} = 0 \quad (3.116)$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones (3.114) y (3.115) encontramos las dos formas de la función de ξ y dos de η de las partículas que observamos. Solo una de las dos soluciones es la que realmente describe cómo es que estas llegan al observador desde el infinito.

$$\xi = \frac{(a^2 + r^2)\Delta' - 4r\Delta}{a\Delta'} \quad (3.117)$$

$$\eta = r^2 \frac{16\Delta(a - \Delta) + 8r\Delta\Delta' - r^2\Delta'^2}{a^2\Delta'^2} \quad (3.118)$$

Los parámetros α y β son coordenadas sobre la bóveda celeste de las partículas que llegan al observador desde el infinito, y dependen de las cantidades conservadas M , L , K y E , las cuales están parametrizadas en función de r . Al variar el parámetro r , obtenemos $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ que describen una región en el espacio (α, β) , lo cual corresponde a las órbitas inestables de fotones o fonones,

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta_0} \quad (3.119)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \xi^2 \cot^2 \theta_0} \quad (3.120)$$

Con estas funciones podemos graficar el contorno de la sombra de un agujero negro, donde $\Delta(r)$ es una función que depende del tipo de métrica empleada para describir la clase de agujero negro. Cada partícula de prueba que perciba el observador será un punto en el marco referencial (α, β) [26].

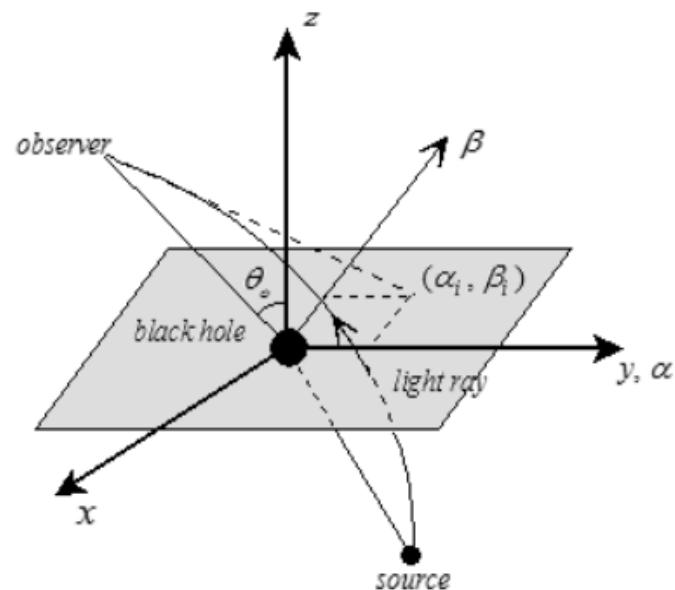


Figura 3.3: Representación de las Coordenadas Celestes.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Modelado Computacional para la Graficación de las Sombras

Para la construcción gráfica de las sombras se empleó el lenguaje de programación Python. A continuación, mostramos la estructura del código y sus funciones.

Importación de Librerías: Para la modelación de las trayectorias de las partículas de prueba se utilizaron las siguientes librerías:

```
# Black Hole "Acustic"
# Definicion de las librerias usadas
import numpy as np
import scipy as sc
from scipy import optimize
import matplotlib.cm as mplcm
import matplotlib.colors as colorsmpl
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.cm import get_cmap
# Configuracion de los parametros de Matplotlib
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "DejaVu Sans",
    "font.size": 20,
    'figure.autolayout': True})
```

Donde;

- Numpy: Librería empleada para los cálculos numéricos.
- Scipy: Librería empleada para los cálculos; también se usó la sublibrería optimize para resolver ecuaciones no lineales (encontrar raíces de funciones) con el método de la secante.

- Matplotlib: Librería usada para visualizar los resultados de las funciones α y β . Se usaron varias sublibrerías (cm, colorsmpl, pyplot) para personalizar los colores, estilos y gráficos de las sombras.

Definición de Funciones: Una vez que se han definido las librerías necesarias, se establecen las funciones para la graficación:

```
# Definicion de funciones \Delta_1
def Delta(r, a, mu):
    return r**2 + a**2 - mu**2/r**2

# Derivada de la funcion \Delta_1
def dDelta(r, a, mu):
    return 2*r + 2*mu/r**3

# Definicion de otras funciones
def xi(r, a, mu):
    if a == 0:
        return 0
    return ((a**2 + r**2) * dDelta(r, a, mu=mu) - 4*r*Delta(r, a, mu=mu)) / (a * dDelta(r, a, mu=mu))

def eta(r, a, mu):
    if a == 0:
        return 0
    return r**2 * (16 * Delta(r, a, mu=mu) * (a**2 - Delta(r, a, mu=mu)) + 8*r*Delta(r, a, mu=mu)*dDelta(r, a, mu=mu) - r**2*dDelta(r, a, mu=mu)**2) / (a**2 * dDelta(r, a, mu=mu)**2)

def alpha(r, a, theta_0, mu):
    return -xi(r, a, mu=mu) / np.sin(theta_0)

def beta(r, a, theta_0, mu):
    return np.sqrt(eta(r, a, mu=mu) + a**2 * np.cos(theta_0)**2 - xi(r, a, mu=mu)**2) / np.tan(theta_0)**2

# Definicion de la funcion beta^2
def betasq(r, a, theta_0, mu):
    return eta(r, a, mu=mu) + a**2 * np.cos(theta_0)**2 - xi(r, a, mu=mu)**2 / np.tan(theta_0)**2
```

Donde;

- $\Delta(r, a, \mu)$ nos proporciona el tipo de curvatura que estemos tratando, y dependerá del radio r , el momento angular a y la velocidad de flujo del vórtice μ para el sistema acustico.

- $d\Delta(r, a, \mu)$ Calcula la derivada de la función delta respecto al radio r .
- $\eta(a, r, \mu)$ y $\xi(a, r, \mu)$ son los parámetros utilizados que dependen de la curvatura $\Delta(r, a, \mu)$ y su derivada $d\Delta(r, a, \mu)$.
- $\beta(r, a, \theta_0, \mu)$ y $\alpha(r, a, \theta_0, \mu)$ se definen y están relacionados con las coordenadas angulares del contorno de la sombra. El parámetro θ_0 esta relacionado con el ángulo de observación.
- $\beta^2(r, a, \theta_0, \mu)$ se establece para resolver las ecuaciones y encontrar los límites de r donde la función no es válida.

Gráfica de Variación de Parámetro: Esta función genera gráficos que representa el comportamiento de las funciones α y β dependiendo el parámetro variable. Nos permite analizar cómo los valores de a , μ , y θ_0 afectan la forma de las curvas en la sombra.

```
# Funcion para graficar parametros
def graf_var(param, vals, mu=1, theta_0=np.pi/2, a=0.5, title = "",
             x00=1.01, x10=2, v0=None, r0=None):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=[8,5.5], dpi=120)

    cNorm = colorsmpl.Normalize(vmin=min(vals), vmax=max(vals))
    cm = plt.get_cmap('coolwarm')
    scalarMap = mplcm.ScalarMappable(norm=cNorm, cmap=cm)

    if param == "theta_0":
        param = "\\\theta_0"

    for i in range(len(vals)):
        if param == "a":
            a = vals[i]
        elif param == "\\\theta_0":
            theta_0 = vals[i]
        elif param == "mu":
            mu = vals[i]

    # Calculo numerico de los limites del parametro r
    r1 = sc.optimize.root_scalar(betasq, args=(a, theta_0, mu),
                                 method="secant", x0=x00, x1=x10)
    r2 = sc.optimize.root_scalar(betasq, args=(a, theta_0, mu),
                                 method="secant", x0=3, x1=5)

    # Arreglo de r (dominio de las funciones alpha y beta)
    r = np.linspace(r1.root, r2.root, 100001)
```

```
ax.plot(alpha(r, a, theta_0, mu=mu), beta(r, a,
    theta_0, mu=mu), color=scalarMap.to_rgba(vals[i]),
    label=rf"${param} = {round(vals[i],2)}")
ax.plot(alpha(r, a, theta_0, mu=mu), -beta(r, a,
    theta_0, mu=mu), color=scalarMap.to_rgba(vals[i]))
    # Rama negativa

ax.set_xlim([-2.5, 6])
ax.set_aspect('equal', 'box')
ax.set_xlabel(r"\alpha")
ax.set_ylabel(r"\beta")
if title != "":
    ax.set_title(title)
ax.grid()
ax.legend(loc=7)
plt.show()

# 'Sombra' variando a
graf_var("a", np.linspace(0.15, 0.86, 7), title=r"Variacion
de $a$ con $\theta_0=\pi/2$, $\mu=1.2$", x10=1.1, v0=None,
r0=None)
```

Graficación de la Sombra: Se empezó definiendo la función, que depende de las variables a, θ, μ . Después se normalizaron los valores para no tener problemas con la sombra dimension del gráfico.

Luego se planteo el ciclo para pasar los valores de uno de los argumentos a la función para poder calcular cada uno de los valores dentro del array. Se empleo el método de la secante para calcular numéricamente los límites de r , es decir, su optimización.

Tambien se le hizo un arreglo al dominio de las funciones α y β para la región negativa del gráfico. Con la ayuda de la librería matplotlib se le asignaron las características al gráfico como las leyendas de los ejes, su acotación y su impresión.

Finalmente el uso de esta función permitió graficar las curvas de las sombras para el agujero negro acústico y fantasma.

```
graf_var("a", np.linspace(0.15, 0.86, 7), q=1.2, title=r"
Variacion de $a$ con $\theta_0=\pi/2$, $q=1.2$", x10=1.1,
v0=None, r0=None)
```

4.1.1. Caso 1: Sombra de Agujero Negro Acústico

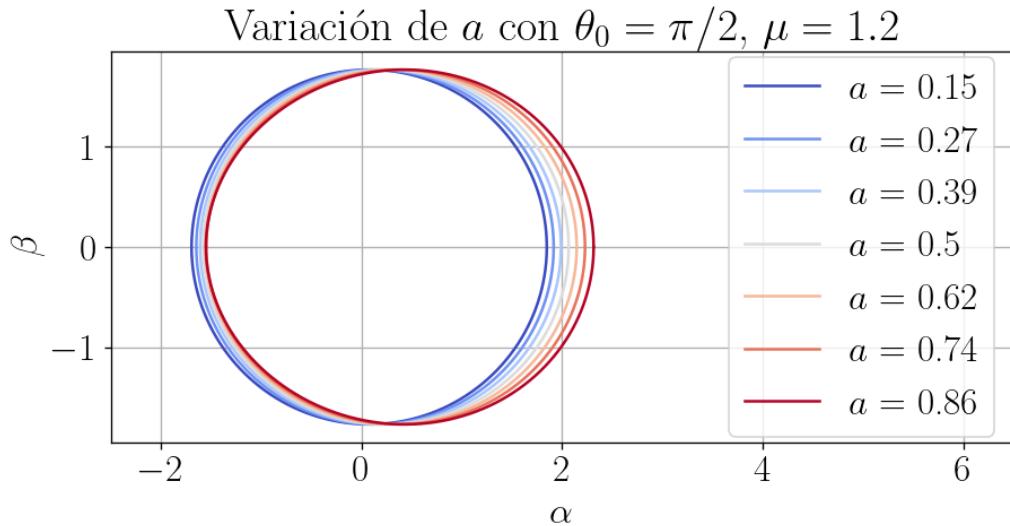


Figura 4.1: Sombra de Agujero Negro Acústico de curvatura Δ_1 .

Se obtuvo una ecuación que modela el contorno de la sombra de un agujero negro en rotación, utilizando el formalismo de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica. Esta ecuación permite determinar los parámetros de impacto (ξ, η) , los cuales se expresan como funciones radiales. Una vez definidos estos parámetros, se traza la curva correspondiente en el plano (α, β) , que representa el contorno o límite de la sombra proyectada por el agujero negro acústico.

4.1.2. Caso 2: Hipotético Agujero Negro Astrofísico

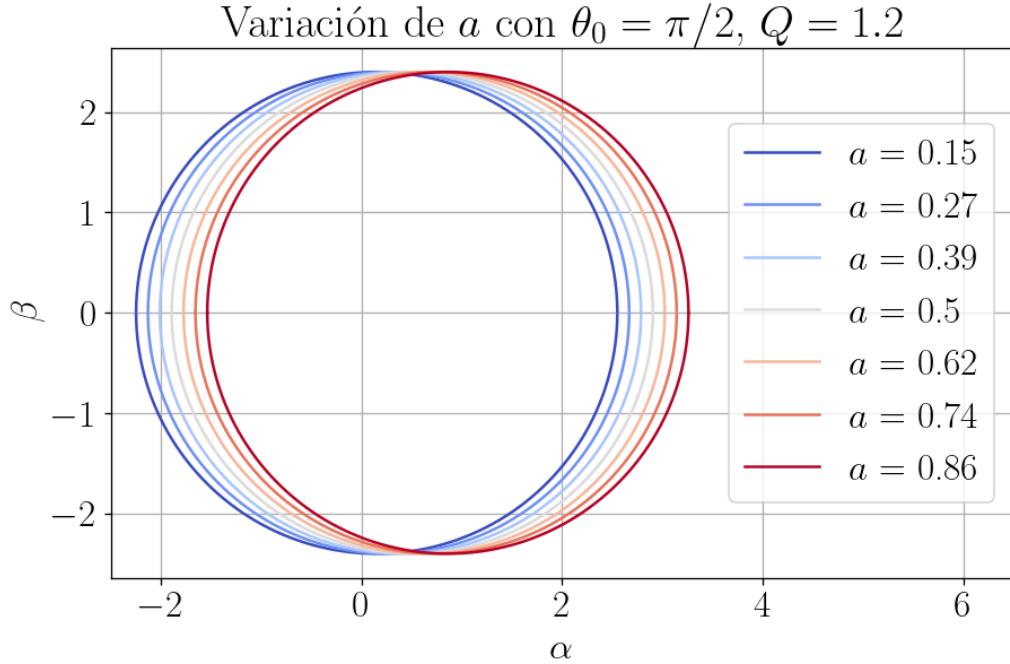


Figura 4.2: Sombra del Agujero Negro Fantasma con curvatura Δ_3

Se obtuvo una ecuación que modela el contorno de la sombra de un agujero negro en rotación, utilizando el formalismo de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica. Esta ecuación permite determinar los parámetros de impacto (ξ, η) , los cuales se expresan como funciones radiales. Una vez definidos estos parámetros, se traza la curva correspondiente en el plano (α, β) , que representa el contorno o límite de la sombra proyectada por el agujero negro fantasma.

4.1.3. Comparación de las sombras

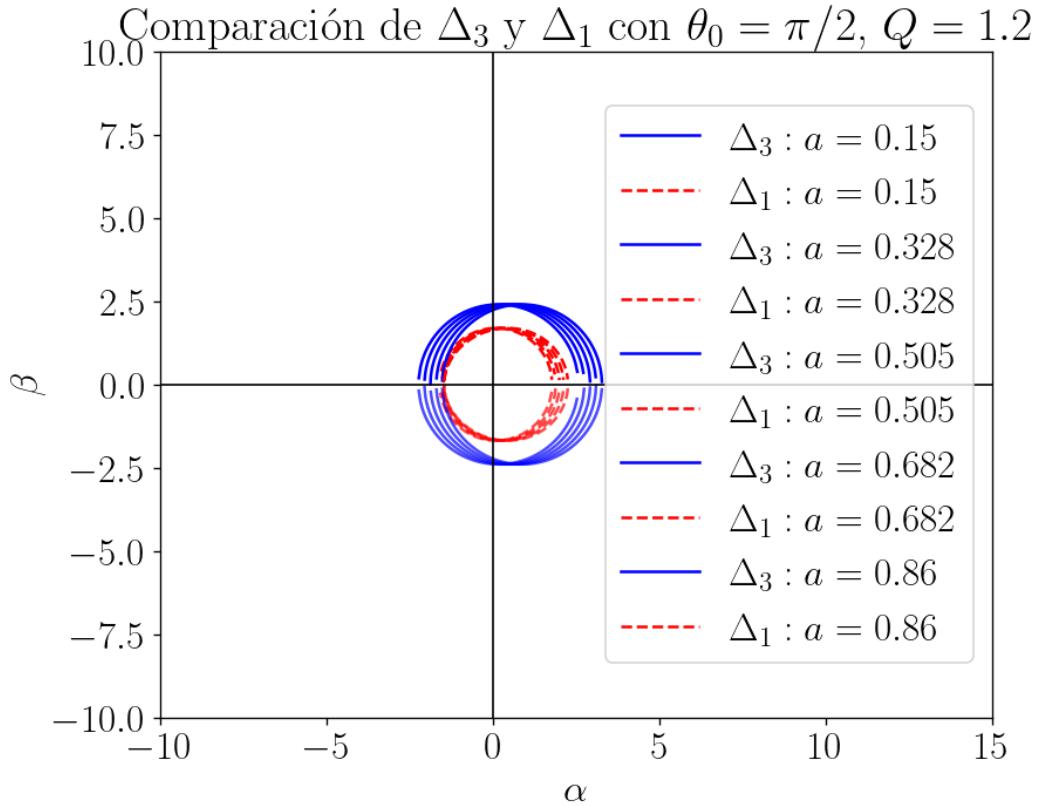


Figura 4.3: Comparación de las Sombras

Se comparan dos aspectos importantes para la construcción teórica de las dos sombras:

- **Origen Físico**

Caso 1: La sombra se genera por el comportamiento de las ondas de sonido en un fluido con rotación. Estas ondas no pueden escapar del horizonte acústico debido a que la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de propagación de las ondas. La analogía con los agujeros negros se encuentra en la dinámica del horizonte, recreando comportamientos equivalentes pero no se involucra la gravedad.

Caso 2: La sombra es generada por la interacción entre la luz y el espacio-tiempo deformado por la fuente exótica. Aquí, la gravedad es el factor dominante generando el horizonte de eventos y la sombra, afectando de manera teórica la geometría.

- **Tamaño y Forma**

Caso 1: Esta sombra es afectada por la configuración del fluido y la velocidad de flujo del vórtice μ lo cual implica que su forma se asemeja a una elipse y pierda su

simetría esférica. Esta representación gráfica representa la región donde ondas sonoras quedan capturadas para después caer al vórtice del fluido, simulando un comportamiento geométrico comparable al de los fotones en un agujero negro gravitacional.

Caso 2: Esta sombra es afectada por el parámetro de rotación a y tiende a distorsionar la sombra cuando aumenta, haciendo que se pierda la simetría esférica. El impacto de la carga es un poco complejo de interpretar físicamente, pero se observa que para este caso astrofísico hipotético es importante considerarla, ya que sin ella no sería suficiente para la generación de trayectoria de fotones, haciendo la sombra aún más exótica.

Capítulo 5

Conclusiones

- Un sistema análogo de gravedad con simetría esférica representa un espacio-tiempo de agujero negro estático, o no rotatorio, cuya métrica es equivalente con las soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío. Además esta métrica proporciona con precisión el campo gravitacional en el exterior del agujero negro de Schwarzschild.
- Los partículas de prueba pueden encontrar una órbita estable circular, denominada esfera de partículas de prueba. Esto da como resultado una sombra esférica y simétrica para un observador desde el infinito. Además, se reafirma que la sombra no es un fenómeno intrínseco del agujero negro, si no por el contrario, se trata de una consecuencia que se genera en la zona exterior ocasionado por el campo gravitacional del objeto compacto para el caso 2 o un vórtice de fluido supersónico para el caso 1, y por tal motivo, obliga a orbitar a las partículas de prueba dicha región.
- Aunque los mecanismos físicos detrás de la formación de las sombras para el caso 1 y el caso 2 son diferentes, ambas representan ciertas similitudes. Tanto el agujero negro acústico como el agujero negro fantasma experimentan una deformación en la forma de su sombra cuando rotan, perdiendo su simetría esférica y a medida que la rotación aumenta, se genera un leve alargamiento de la sombra en la dirección del eje de rotación.
- Es importante recordar que el modelo teórico de agujero negro acústico es un sistema simplificado y no captura toda la complejidad de un agujero negro real astrofísico. Debido a esto se notó como el tamaño de la sombra para el caso 1 es levemente mas pequeña que para el caso 2 mostrándonos las diferencias de escala para cada fenómeno.

- Comparar las sombras de un agujero negro acústico rotante y un agujero negro con carga negativa rotante es complejo debido a las diferencias en sus orígenes físicos. Un agujero negro acústico ofrece una analogía experimental de la sombra de un agujero negro real, mientras que un agujero negro fantasma es una construcción teórica sin una interpretación física clara hasta el momento. El agujero negro acústico se usa para estudiar fenómenos clásicos en un contexto controlado, mientras que el agujero negro fantasma está más alineado con experimentos matemáticos o en teorías de gravedad compleja donde se plantea presencia de una fuente exótica.
- Aunque actualmente los agujeros negros fantasma solo existen en el marco teórico debido a su dependencia de fuente exótica, futuros avances en centros de detección de materia oscura podrían permitir la creación de pequeñas cantidades de fuente exótica en los laboratorios permitiendo abrir la puerta para la simulación o recreación de este tipo de fenómenos.

Bibliografía

- [1] W. Unruh, “Experimental black hole evaporation?” *Phys.Rev.*, 1981. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.1351>
- [2] M. Visser, “Acoustic black holes: horizons, ergospheres and hawking radiation,” *Class Quantu*, 1998. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/6/024>
- [3] M. Visser., “Acoustic propagation in fluids,” *Class Quantum*, 2005. [Online]. Available: <http://arXiv.org/abs/gr-qc/9311028>.
- [4] M. W. Roberth, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [5] A. E. Broderick, R. Narayan, J. Kormendy, E. S. Perlman, and S. S. D. Marcia J. Rieke, “The event horizon of m87,” *The Astrophysical Journal*, 2015. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/805/2/179>
- [6] S. M. Carroll, *Spacetime and Geomtry*. Addison Wesley, 2003.
- [7] H. Reissner, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie,” *Annalen der Physik*, vol. 355, no. 9, pp. 106–120, jan 1916. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1916AnP...355..106R>
- [8] G. Nordström, “On the energy of the gravitation field in einstein’s theory,” *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings*, 1918. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:209925023>
- [9] P. Cañate, “Traversable wormholes with electric and magnetic charges in general relativity theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 110, p. 084030, Oct 2024. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.084030>
- [10] H. Quevedo, M. N. Quevedo, and A. Sánchez, “Einstein-maxwell-dilaton phantom black holes: Thermodynamics and geometrothermodynamics,” *Physical Review D*, vol. 94, no. 2, Jul. 2016. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.024057>
- [11] D. Ma, E. Solano, C. Jia, and L. C. Céleri, “Analogue penrose process in rotating acoustic black hole,” 2022. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2205.01454>
- [12] S. L. Carlos Barcelo and M. Visser, “Analogue gravity,” *Living Reviews in Relativity*, 2005. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2005-12>

- [13] Xin-Zhou and L. Xi, “Quasinormal modes and late-time tails of canonical acoustic black holes,” *International Journal of Modern Physics D*, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1142/S0218271807010687>
- [14] S. R. Dolan, E. S. Oliveira, Crispino, and L. C. B., “Scattering of sound waves by a canonical acoustic hole,” *Physical Review D*, 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064014>
- [15] F. Alonso, M., “Physics,” *Addison-Wesley*, 1970.
- [16] S. V. G. Ellis, Clarissa C., “The geometry of photon surfaces,” *Journal of Mathematical Physics*, 2001. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1308507>
- [17] P. Cañate, J. Sultana, and D. Kazanas, “Gravitational analog of the canonical acoustic black hole in einstein–scalar–gauss–bonnet theory,” *Classical and Quantum Gravity*, 2021. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/abf97f>
- [18] K. Akiyama, J. C. Algaba, A. Alberdi, W. Alef, R. Anantua, K. Asada, R. Azulay, A.-K. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, B. A. Benson, D. Bintley, L. Blackburn, R. Blundell, W. Boland, K. L. Bouman, G. C. Bower, H. Boyce, M. Bremer, C. D. Brinkerink, R. Brissenden, S. Britzen, A. E. Broderick, D. Broguiere, T. Bronzwaer, D.-Y. Byun, J. E. Carlstrom, A. Chael, C.-k. Chan, S. Chatterjee, K. Chatterjee, M.-T. Chen, Y. hen , P. M. Chesler, I. Cho, P. Christian, J. E. Conway, J. M. Cordes, T. M. Crawford, G. B. Crew, A. Cruz-Osorio, Y. Cui, J. Davelaar, M. De Laurentis, R. Deane, J. Dempsey, G. Desvignes, J. Dexter, S. S. Doeleman, R. P. Eatough, H. Falcke, J. Farah, V. L. Fish, E. Fomalont, H. A. Ford, R. Fraga-Encinas, P. Friberg, C. M. Fromm, A. Fuentes, P. Galison, C. F. Gammie, R. García, Z. Gelles, O. Gentaz, B. Georgiev, C. Goddi, R. Gold, J. L. Gómez, A. I. Gómez-Ruiz, M. u , M. Gurwell, K. Hada, D. Haggard, M. H. Hecht, R. Hesper, E. Himwich, L. C. o , P. Ho, M. Honma, C.-W. L. Huang, L. uang , D. H. Hughes, S. Ikeda, M. Inoue, S. Issaoun, D. J. James, B. T. Jannuzzi, M. Janssen, B. Jeter, W. iang , A. Jimenez-Rosales, M. D. Johnson, S. Jorstad, T. Jung, M. Karami, R. Karuppusamy, T. Kawashima, G. K. Keating, M. Kettenis, D.-J. Kim, J.-Y. Kim, J. Kim, J. Kim, M. Kino, J. Y. Koay, Y. Kofuji, P. M. Koch, S. Koyama, M. Kramer, C. Kramer, T. P. Krichbaum, C.-Y. Kuo, T. R. Lauer, S.-S. Lee, A. Levis, Y.-R. i , Z. i , M. Lindqvist, R. Lico, G. Lindahl, J. iu , K. Liu, E. Liuzzo, W.-P. Lo, A. P. Lobanov, L. Loinard, C. Lonsdale, R.-S. u , N. R. MacDonald, J. ao , N. Marchili, S. Markoff, D. P. Marrone, A. P. Marscher, I. Martí-Vidal, S. Matsushita, L. D. Matthews, L. Medeiros, K. M. Menten, I. Mizuno, Y. Mizuno, J. M. Moran, K. Moriyama, M. Moscibrodzka, C. Müller, G. Musoke, A. M. Mejías, D. Michalik, A. Nadolski, H. Nagai, N. M. Nagar, M. Nakamura, R. Narayan, G. Narayanan, I. Natarajan, A. Nathanael, J. Neilsen, R. Neri, C. Ni, A. Noutsos, M. A. Nowak, H. Okino, H. Olivares, G. N. Ortiz-León, T. Oyama, F. Özel, D. C. M. Palumbo, J. Park, N. Patel, U.-L. Pen, D. W. Pesce, V. Piétu, R. Plambeck, A. PopStefanija, O. Porth, F. M. Pötzl, B. Prather, J. A. Preciado-López, D. Psaltis, H.-Y. Pu, V. Ramakrishnan, R. Rao, M. G. Rawlings, A. W. Raymond, L. Rezzolla, A. Ricarte, B. Ripperda, F. Roelofs, A. Rogers, E. Ros, M. Rose, A. Roshanineshat, H. Rottmann, A. L. Roy, C. Ruszczyk, K. L. J. Rygl, S. Sánchez, D. Sánchez-Arguelles, M. Sasada,

- T. Savolainen, F. P. Schloerb, K.-F. Schuster, L. Shao, Z. hen , D. Small, B. W. Sohn, J. SooHoo, H. un , F. Tazaki, A. J. Tetarenko, P. Tiede, R. P. J. Tilanus, M. Titus, K. Toma, P. Torne, T. Trent, E. Traianou, S. Trippe, I. v. Bemmel, H. J. van Langevelde, D. R. van Rossum, J. Wagner, D. Ward-Thompson, J. Wardle, J. Weintraub, N. Wex, R. Wharton, M. Wielgus, G. N. Wong, Q. u , D. Yoon, A. Young, K. Young, Z. Younsi, F. uan , Y.-F. uan , J. A. Zensus, G.-Y. Zhao, and S.-S. Zhao, “First m87 event horizon telescope results,” *The Astrophysical Journal Letters*, pp. 2–15, 2019. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/1906.11243>
- [19] O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, S. Rinott, A. Zayats, and J. Steinhauer, “Realization of a sonic black hole analog in a bose-einstein condensate,” *Physical Review Letters*, vol. 105, no. 24, 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.240401>
- [20] N. Tsukamoto, “Black hole shadow in an asymptotically flat, stationary, and axisymmetric spacetime: The kerr-newman and rotating regular black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, p. 064021, Mar 2018. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.064021>
- [21] E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, “Metric of a rotating, charged mass.” *Journal of Mathematical Physics*, 1965. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1704351>
- [22] M. Bhat, S. Dhurandhar, and Dadhich, “Energetics of the kerr-newman black hole by the penrose process.” *Astrophys. Astr*, 1985.
- [23] M. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, “General relativity: An introduction for physicists,” *Cambridge University Press*, p. 325, 2006.
- [24] E. T. Newman and A. I. Janis, “Note on the Kerr spinning particle metric,” *J. Math. Phys.*, vol. 6, pp. 915–917, 1965.
- [25] C. Bambi and L. Modesto, “Rotating regular black holes,” *Physics Letters B*, vol. 721, no. 4–5, p. 329–334, Apr. 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2013.03.025>
- [26] S. Vázquez and E. Esteban, “Strong-field gravitational lensing by a kerr black hole,” *Il Nuovo Cimento B*, vol. 119, no. 5, p. 489–519, Dec 2004. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1393/ncb/i2004-10121-y>