



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

CARTA DE AUTORIZACIÓN



CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 08/11/2024

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Julián Andrés Gómez Aroca, con C.C. No. 1003952924

, con C.C. No. \_\_\_\_\_

, con C.C. No. \_\_\_\_\_

, con C.C. No. \_\_\_\_\_

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o \_\_\_\_\_

titulado Aplicaciones de los teoremas de conservación de Noether

presentado y aprobado en el año 2024 como requisito para optar al título de

Físico ;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

CARTA DE AUTORIZACIÓN



CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Julian Andrés Gómez Aroca

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_





UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 3

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: APLICACIONES DE LOS TEOREMAS DE CONSERVACIÓN DE NOETHER

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gómez Aroca	Julián Andrés

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: FÍSICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: FÍSICA

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2024

NÚMERO DE PÁGINAS: 22

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas ☒ Fotografías\_\_\_ Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general ☒ Grabados\_\_\_ Láminas\_\_\_  
Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas o  
Cuadros\_\_\_

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno.

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*): Ninguno

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. <u>Simetrías</u>	<u>Symmetries</u>	6. <u>Transformación</u>	<u>Transformation</u>
2. <u>Grupos</u>	<u>Groups</u>	7. <u>Leyes de conservación</u>	<u>Conservation laws</u>
3. <u>Lagrangiano</u>	<u>Lagrangian</u>	8. <u>Acción</u>	<u>Action</u>
4. <u>Cálculo de variaciones</u>	<u>Calculus of variations</u>	9. <u>Invariancia</u>	<u>Invariance</u>
5. <u>Noether</u>	<u>Noether</u>	10. <u>Euler-Lagrange</u>	<u>Euler-Lagrange</u>

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se plantean las simetrías que posee una teoría física bajo determinadas transformaciones en sus coordenadas (dependientes y/o independientes) como el punto de partida para llevar a cabo el estudio de las cantidades que se conservan en dicha teoría. Se presentará este enfoque por medio de la aplicación de los teoremas de Noether a dos teorías físicas. Gran parte del razonamiento que se presenta en este trabajo está basado en el artículo de 1918 de la física y matemática alemana Emmy Noether titulado "Invariante variationsprobleme" (Problemas de variacional invariante) en el que se combinan la teoría de grupos de Lie con los métodos del cálculo de variaciones.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

In this work, the symmetries of a physical theory under certain transformations of its coordinates (dependent and/or independent) are proposed as the starting point for studying the conserved quantities within the theory. This approach will be illustrated through the application of Noether's theorems to two physical theories. Much of the reasoning presented is based on Emmy Noether's 1918 paper "Invariante Variationsprobleme" (Invariant Variational Problems), which combines Lie group theory with methods of the calculus of variations.





UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 3

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: German Fabian Escobar Fiesco

Firma:

Nombre Jurado: Diego Alejandro Racero Causil

Firma:

Diego A. Racero C.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



## Programa de Física

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

# APLICACIONES DE LOS TEOREMAS DE CONSERVACIÓN DE NOETHER

*Proyecto de Grado*

Autor:

Julián Andrés Gómez Aroca

Dirigido por:

Dr. Pedro Mario Cañate Casseres

Neiva-Huila

Octubre 2024

# 1. Objetivos

## 1.1. Objetivo general

Aplicar el teorema de Noether por medio de ejemplos en las teorías del electromagnetismo y la mecánica clásica.

## 1.2. Objetivos específicos

- Derivar el primer teorema de Noether a partir del problema variacional de Noether.
- Explicar por medio de las simetrías en la acción de un sistema físico bajo transformaciones específicas cómo esta invariancia se corresponde con una ley de conservación asociada a dicha simetría.
- Aplicar el primer teorema de Noether para encontrar una determinada ley de conservación en las teorías del electromagnetismo y la mecánica clásica.

# 2. Resumen

En este trabajo se plantean las simetrías que posee una teoría física bajo determinadas transformaciones en sus coordenadas (dependientes y/o independientes) como el punto de partida para llevar a cabo el estudio de las cantidades que se conservan en dicha teoría. Se presentará este enfoque por medio de la aplicación de los teoremas de Noether a dos teorías físicas. Gran parte del razonamiento que se presenta en este trabajo está basado en el artículo de 1918 de la física y matemática alemana Emmy Noether titulado “Invariantenprobleme” (Problemas de variacional invariante) en el que se combinan la teoría de grupos de Lie con los métodos del cálculo de variaciones.

# 3. Introducción

Los teoremas de Noether, establecen una conexión fundamental entre las simetrías de un sistema físico y sus respectivas leyes de conservación. Este teorema ha tenido un impacto profundo en áreas como la mecánica clásica, la teoría cuántica de campos, la mecánica de fluidos, entre otras, ofreciendo una visión unificadora de cómo las simetrías subyacen en las leyes fundamentales de la naturaleza. Asimismo, en este trabajo se incorpora la influencia de Sophus Lie, quien desarrolló la teoría de los grupos de Lie para estudiar simetrías continuas. Lie estableció las bases para el uso de simetrías en la resolución de ecuaciones diferenciales mediante la introducción de transformaciones que simplifican su forma. Esta teoría proporcionó una herramienta clave para entender cómo las simetrías se relacionan con la conservación de cantidades físicas, y sentó las bases matemáticas que Emmy Noether utilizó para demostrar los teoremas que llevan su nombre.

## 4. Marco teórico

### 4.1. Cálculo de variaciones

En física, la solución de un problema generalmente implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, que, si bien varían según el problema y el modelo matemático en cuestión, pueden obtenerse a partir de un principio variacional al que se le puede aplicar de manera sistemática un procedimiento que en última instancia desemboque en una ley de conservación que brinde información que ayude a conocer las relaciones que cumple el sistema de ecuaciones diferenciales (Pitter). En este orden de ideas, antes de examinar el principio variacional que conduce a las ecuaciones del movimiento <sup>1</sup> es importante definir algunos elementos de la teoría del cálculo de variaciones (también llamado calculo variacional).

De acuerdo con Van Brunt (2004), el cálculo de variaciones puede ser considerado como una rama de la optimización puesto que se ocupa de encontrar puntos críticos. Por lo que de manera análoga al caso de variables finitas en el que para una función  $f$  que depende de  $n$  variables  $(y^1, \dots, y^n)$  definidas en un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , se busca el punto (o los puntos)  $(y^{*1}, \dots, y^{*n})$  para el cual  $f(y^{*1}, \dots, y^{*n})$  tiene un punto crítico. En el cálculo de variaciones también se busca un punto crítico pese a que, en lugar de funciones, las cantidades que se estudian son funcionales, que son una correspondencia  $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna un número real para cada elemento del espacio de funciones  $Y$ . De manera general, los funcionales se pueden escribir como integrales definidas, por ejemplo;  $J = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$  es un funcional definido en el espacio de todas las funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con primera derivada continua en el intervalo  $I = [a, b]$ , denotado como  $C_1[a, b]$ . El espacio de funciones a considerar será un subconjunto de  $Y$  que se irá reduciendo a medida que el integrando  $F$  considere más variables dependientes (e independientes), las derivadas sean de orden superior o las funciones deben cumplir ciertas condiciones de frontera dadas  $y(a) = y_a$  y  $y(b) = y_b$ , por lo que es importante indicar cuál es el espacio de funciones  $S \subseteq Y$  que se considerará en cada problema. Por otro lado, para determinar la distancia entre dos elementos de  $Y$  se introduce la norma  $\|\cdot\|$  para una función con  $n$  derivadas continuas en  $I = [a, b]$  dada por

$$\|y\|_n = \sum_{i=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y^{(i)}(x)|$$

Donde  $y^{(i)}(x) = \frac{d^i y}{dx^i}$  y  $y^{(0)}(x)$  denota la función  $f(x)$ . Así mismo, es natural hablar de continuidad una vez que se ha dado la norma ya que se espera que un pequeño cambio en la función  $y(x)$  denotado por  $\hat{y}(x)$  provoque una pequeña modificación en el valor del funcional  $J[y]$ , esto es, un funcional  $J[y]$  es continuo en la función  $y$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta$  tal que  $|J[\hat{y}] - J[y]| < \varepsilon$  siempre que  $\|y - \hat{y}\|_n < \delta$  (Gelfand & Fomin, 2000), por lo que de ahora en adelante se considerarán solamente funcionales continuos. Estas definiciones de distancia y continuidad para funcionales serán fundamentales a la hora de considerar el intervalo de radio  $\varepsilon$  en el que se encuentra la solución de las ecuaciones del movimiento  $y(x)$  puesto que dados dos elementos del espacio de funciones  $Y$ ,  $y(x)$  y  $\hat{y}(x)$ , la relación  $\|\hat{y} - y\|_n < \varepsilon$  implica

$$|\hat{y}(x) - y(x)| < \varepsilon, \dots, |\hat{y}^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)| < \varepsilon$$

Específicamente, cualquier función  $\hat{y}(x)$  puede ser vista como una perturbación  $y(x) + \varepsilon \eta(x) + O(\varepsilon^2)$  <sup>2</sup> de la solución  $y(x)$  para algún  $\eta(x) \in Y$  con  $\|\eta\|_n < 1$  y una constante  $\varepsilon > 0$ .

El hecho de que la relación  $\|y - \hat{y}\|_n < \varepsilon$  se deba cumplir para todo  $\hat{y}(x)$  sugiere que la perturbación se puede hacer arbitrariamente pequeña.

A continuación, se presenta lo que se entiende por un punto crítico de un funcional, la definición que se va a manejar acá es la de Gelfand y Fomin (2000). Sea  $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional definido en un espacio de

<sup>1</sup>Se habla de ecuaciones de movimiento a pesar de que las variables del sistema de ecuaciones diferenciales no representen necesariamente un desplazamiento.

<sup>2</sup> $O(\varepsilon^2)$  representa los términos de orden mayor o igual a 2 con respecto a  $\varepsilon$  en la perturbación  $\hat{y}$ .



funciones  $(Y, \|\cdot\|)$  y sea  $S \subseteq Y$ . El funcional  $J$  tiene un punto crítico (máximo o mínimo) local en  $S$  en la función  $y \in S$  si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $J(\hat{y}) - J(y)$  no cambia de signo (negativo si es un máximo y positivo si es un mínimo) para todo  $\hat{y} \in S$  tal que  $\|\hat{y} - y\|_n < \varepsilon$ .

Otra definición importante es la de la variación de un funcional; considere la diferencia

$$\Delta J[y] = J[\hat{y}] - J[y]$$

Para un punto crítico  $y \in S$  con una perturbación  $\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) + O(\varepsilon^2)$ , si el valor absoluto de  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño, todas las funciones  $\hat{y}(x)$  pertenecen a el intervalo arbitrariamente pequeño en el que se encuentra un punto crítico  $y(x)$  (Courant & Hilbert, 1989) y se pueden despreciar los términos de orden superior tal que  $\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ .  $\Delta J[y]$  es en general un funcional no lineal en la cantidad  $\varepsilon$ . No obstante, esta se puede descomponer en su parte lineal  $\Lambda[\varepsilon] = \varepsilon \delta J$  y no lineal  $O[\varepsilon^2]$  tal que  $\Delta J[y] = \varepsilon \delta J + O[\varepsilon^2]$ . Se escoge que el funcional  $\delta J$  sea la variación (o el primer variacional) de  $J$ . Nótese que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  el signo de  $\Delta J[y]$  está dado por  $\delta J$  debido a que  $O[\varepsilon^2]$  es de orden mayor con respecto a  $\varepsilon$  y cae de manera más rápida cuando este tiende a cero.

Como ya se dijo anteriormente, el espacio de funciones  $S \subseteq Y$  que comprende cada problema debe hacerse explícito con el fin de que todas las expresiones que se explicaron anteriormente estén bien definidas. De manera genérica, considere un funcional  $J : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{qP(n)} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p$  variables independientes  $x^i = (x^1, \dots, x^p)$ ,  $q$  variables dependientes  $y^j = (y^1, \dots, y^q)$  y que tome las derivadas de las variables dependientes hasta un orden  $n$ , esto se denota  $\partial_K y^j = \frac{\partial^s y^j}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}$ <sup>3</sup>, en donde  $qP(n) = q \binom{p+n}{n}$  (Olver, 1993) es la dimensión del espacio que contiene todas las posibles derivadas de  $y^j$  hasta un orden  $n$  y  $K = (k_1, \dots, k_s)$  es la tupla de  $s$  números enteros para  $1 \leq k_s \leq p$  con  $0 \leq s \leq n$  ( $s = 0$  denota la componente  $y^j$  sin derivar), el orden de la tupla resulta intrascendente siempre que cada componente  $y^j$  sea continuo en todas sus derivadas  $\partial_K y^j$  (Olver, 1993). Como es de esperarse, existe un paralelismo entre el cálculo de variables finitas y el cálculo de variaciones cuando se tiene un punto crítico; en el primero, la condición necesaria para tener un punto extremo es que el valor del gradiente se haga cero en ese punto. De manera similar, en el cálculo de variaciones se va a tener que la condición necesaria para que el funcional  $J$  tenga un punto crítico en  $y(x)$  es que la variación  $\delta J[y]$  sea cero. Para demostrar esto, se toma el funcional genérico  $J[y^j] = \int_{\Omega \subseteq \mathbb{R}^p} F(x^i, \partial_K y^j) d^p x$  cuando presente un valor crítico en la función  $y^j$  y se sigue un razonamiento similar al usado por Olver (1993) al considerar la función  $\Phi(\varepsilon)$  dada por

$$\Phi(\varepsilon) = J[y^j + \varepsilon \eta^j(x^i)]$$

Para cualquier función arbitraria  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  que tiene componentes  $\eta^j(x^i)$  con soporte compacto en el dominio  $\Omega$ . Esta función representa una perturbación del valor del funcional, que por hipótesis posee un punto crítico cuando  $\varepsilon = 0$ . La función  $\eta^j(x^i)$  tiene soporte compacto con el fin de que se preserven las condiciones de frontera (de la forma  $y^j(x^i)|_{x^i=\partial\Omega} = c^j$ ) que se imponen en el problema. Ahora que se ha establecido una conexión entre el punto crítico de un funcional y una función de una sola variable, se puede utilizar la ya mencionada condición necesaria para la existencia de un punto crítico, es decir, que su primera derivada sea cero

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Aplicando la definición de derivada ordinaria

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\varepsilon + \varepsilon) - \Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(0)}{\varepsilon}$$

---

<sup>3</sup>Para una exposición completa de la función prolongación véase Olver (1993).

Es importante resaltar que  $\Phi(\varepsilon)$  es una función que no depende de las variables  $x^i = (x^1, \dots, x^p)$  ni de  $y^j = (y^1, \dots, y^q)$  ya que solo se está teniendo en cuenta la función  $y^j$  que tiene un punto crítico cuando se evalúa en el funcional  $J$ .

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J[y^j + \varepsilon \eta^j(x^i)] - J[y^j]}{\varepsilon}$$

El numerador del lado derecho de la ecuación puede expresarse en términos de la variación de  $J$  dado que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, en virtud de las propiedades de los límites; el límite de la suma es igual a la suma de los límites

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta J[y^j] \varepsilon}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O[\varepsilon^2]}{\varepsilon}$$

El primer límite tiende a  $\delta J[y^j]$  a medida que  $\varepsilon$  tiende a cero. Por otro lado, el segundo límite tiende a cero puesto que  $O[\varepsilon^2]$  no tiene una dependencia lineal en  $\varepsilon$  sino que posee un orden mayor a uno en la cantidad  $\varepsilon$ , esto provoca que el numerador decaiga mucho más rápido que el denominador y este límite sea cero.

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \delta J[y^j] = 0$$

De acá se concluye que si  $y^j = (y^1, \dots, y^q)$  es un punto crítico del funcional  $J[y^j]$  entonces la variación  $\delta J[y^j]$  (evaluada en  $y^j$ ) es cero y se dice que el funcional  $J$  es estacionario en ese punto. En este orden de ideas, a partir del funcional continuo  $J : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{qP^{(n)}} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por la integral  $J[y^j] = \int_{\Omega \subseteq \mathbb{R}^p} F(x^i, \partial_k y^j) d^p x$  se busca una expresión para la variación  $\delta J$  en su punto crítico  $y^j$ .

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{dJ[y^j + \varepsilon \eta^j(x^i)]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

Reemplazando  $J[y^j + \varepsilon \eta^j(x^i)]$ :

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} F(x^i, \partial_k (y^j + \varepsilon \eta^j)) d^p x$$

Suponiendo que  $F$  es una función continua en cada una de sus variables, se puede intercambiar el orden de la derivada y la integral

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} F(x^i, \partial_k (y^j + \varepsilon \eta^j)) d^p x = \int_{\Omega} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [F(x^i, \partial_k (y^j + \varepsilon \eta^j))] d^p x \quad (1)$$

A continuación se calcula la variación  $\delta J$  de dos formas; primero se calcula la derivada ordinaria para  $F$  evaluando en  $\varepsilon = 0$

$$\delta J = \int_{\Omega} \frac{F(x^i, \partial_k (y^j + \varepsilon \eta^j)) - F(x^i, \partial_k y^j)}{\varepsilon} d^p x$$

Usando la definición de la variación para  $F$  y despreciando los términos de orden superior se obtiene

$$\delta J = \int_{\Omega} \delta F d^p x$$

Lo que expresa la variación de  $J$  en función de la variación del integrando  $F(x^i, \partial_K y^j)$ .

Para calcular la variación de  $J$  de la segunda manera se deriva en (1) el integrando con respecto a  $\varepsilon$  utilizando la regla de la cadena (nótese que  $x$  no depende de  $\varepsilon$ ). Posteriormente se evalúa en  $\varepsilon = 0$

$$\delta J = \int_{\Omega} \sum_K \frac{\partial F}{\partial (\partial_K y^j)} \partial_K \eta^j(x^i) \, d^p x$$

En donde se ha introducido la notación  $\partial_K y^j \equiv y_K^j$  (recuerde que  $K$  no es un número sino una tupla) y se usa el convenio de Einstein para indicar la sumatoria en una expresión que tenga índices repetidos, este convenio<sup>4</sup> se va a usar en la mayoría de las ecuaciones de este trabajo salvo en ocasiones en las que se considere que hacer explícita la sumatoria ayude a entender de manera más clara la expresión. Para deshacerse de todas las derivadas de  $\eta^j(x^i)$  se integra por partes  $n$  veces. De acuerdo con Bluman et al. (2009) la fórmula para esta integral es

$$\delta J = \int_{\Omega} \partial_{k_i} W^{k_i}[F; \eta] d^p x + \int_{\Omega} \sum_K \left[ (-D_K) \left( \frac{\partial F}{\partial y_K^j} \right) \eta^j(x^i) \right] d^p x \quad (2)$$

Donde

$$\begin{aligned} W^{k_i}[F; \eta] = & \eta^j \left[ \frac{\partial F}{\partial y_{k_i}^j} + \cdots + (-\partial_{k_1}) \cdots (-\partial_{k_{n-1}}) \frac{\partial F}{\partial y_{k_i k_1 \dots k_{n-1}}^j} \right] \\ & + \eta_{k_1}^j \left[ \frac{\partial F}{\partial y_{k_1 k_i}^j} + \cdots + (-\partial_{k_2}) \cdots (-\partial_{k_{n-1}}) \frac{\partial F}{\partial y_{k_1 k_i k_2 \dots k_{n-1}}^j} + \cdots + \eta_{k_1 \dots k_{n-1}}^j \frac{\partial F}{\partial y_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} k_i}^j} \right] \\ & + \cdots + \eta_{k_1 \dots k_{n-1}}^j \frac{\partial F}{\partial y_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} k_i}^j} \end{aligned} \quad (3)$$

La notación  $(-D)_K$  representa  $(-1)^s D_K = (-\partial_{k_1})(-\partial_{k_2}) \cdots (-\partial_{k_s})$ . Se debe tener en cuenta que  $\partial_{k_i}$  depende de  $x^{k_i}$  tanto de manera explícita como de manera implícita a través de  $y_K^j$ .

Nótese que el lado derecho de la ecuación (1) se puede dividir en dos contribuciones; el primer termino es la integral de la divergencia de  $W^{k_i}[F; \eta]$ , que por el teorema de la divergencia se puede escribir como la integral de superficie de  $W^{k_i}[F; \eta]$  evaluada en la frontera  $\partial\Omega$ , por este motivo a esta contribución se le conoce como la contribución de la frontera, mientras que el segundo término contiene las variaciones del funcional (con respecto a sus variables dependientes) en su punto critico a lo largo de todo el interior de su dominio, razón por la que a esta contribución se le llama contribución interna. Teniendo en cuenta que la contribución de la frontera evalúa el valor de  $W^{k_i}[F]$  en  $\partial\Omega$  y que el valor de  $\eta^j(x^i)$  y sus derivadas en la frontera  $\partial\Omega$  es cero ya que  $\eta$  tiene soporte compacto, este término se hace anula, resultando

$$\delta J = \int_{\Omega} \sum_j \left[ \sum_K (-D)_K \left( \frac{\partial F}{\partial y_K^j} \right) \right] \eta^j(x^i) d^p x \quad (4)$$

La ecuación (1) considera variaciones de las variables dependientes tanto en su interior como en su frontera. Lo que se hizo al no tomar variaciones en la frontera (al definir a  $\eta^j(x^i)$  como una función con soporte

<sup>4</sup>También se utiliza el convenio de los índices arriba para denotar una cantidad que se transforma de manera contravariante y los índices abajo para una cantidad que se transforma de manera covariante.

compacto) si bien parece que pueda limitar los resultados con respecto al caso más general, muestra que para cualquier perturbación  $\eta^j(x^i)$  la contribución interna de la variación  $\delta J$  se debe anular en un punto crítico. Así mismo, debido a que la variación  $\delta J$  es la suma de las contribuciones internas y de la frontera, la contribución de la frontera también debe hacerse cero para cualquier  $\eta^j(x^i)$  (tenga soporte compacto o no), lo que se conoce como las condiciones de frontera naturales (Van Brunt, 2004).

A continuación, se hace uso del lema fundamental del cálculo de variaciones según el cual (Giaquinta & Hildebrandt, 2013): Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en algún conjunto abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  para la que se cumple que

$$\int_{\Omega} f(x) \eta(x) d^n x = 0$$

para toda  $\eta(x) \in C_{\infty}(\Omega)$ , entonces  $f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$ . Este lema se puede utilizar de manera directa en la ecuación (3) para cada término de la sumatoria que corre en el índice  $j$  resultando en

$$\sum_{\kappa} (-D)_{\kappa} \left( \frac{\partial F}{\partial y_{\kappa}^j} \right) = 0$$

La expresión

$$E_j = \sum_{\kappa} (-D)_{\kappa} \left( \frac{\partial}{\partial y_{\kappa}^j} \right)$$

se conoce como el componente  $j$  del operador Euler, no obstante, en su artículo Noether se refiere a este como expresiones o términos de Lagrange. Al margen de esto, se acaba de mostrar que, si el funcional  $J$  se evalúa en un punto crítico  $F$ , todos sus componentes  $E_j$  se hacen cero y a la colección de todas estas ecuaciones ( $E_j = 0$  para  $j = 1, \dots, q$ ) se le llama las ecuaciones de Euler- Lagrange.

En las aplicaciones que se van a presentar en este trabajo las derivadas de las variables dependientes no van a tener un orden mayor a  $n = 1$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange van a tomar la forma

$$-\partial_{k_1} \left( \frac{\partial}{\partial y_{k_1}^j} \right) + \partial_0 \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_{k_1} y^j)} \right) = 0$$

En donde el valor de  $k_1$  varia entre las  $p$  variables independientes y el valor de  $j$  varía entre las  $q$  variables dependientes.

## 4.2. Coordenadas generalizadas

Considere un sistema tal que su evolución en el tiempo se puede representar en términos de  $N$  funciones  $y^i(t)$  (para  $i = 1, 2, \dots, N$ ), en donde para cada  $i$ ,  $y^i(t)$  es un componente del vector posición de una partícula del sistema para un tiempo  $t$ . El conjunto de componentes  $\{y^i\}_{i=1}^N$  se dice dependiente si existen relaciones de la forma <sup>5</sup>

$$f(y^s, y^k, \dots, y^j, t) = 0 \quad (6)$$

---

<sup>5</sup>Las relaciones de la forma (5) se conocen como ligaduras holónomas y son el único tipo de ligadura que se va a considerar que posee un conjunto  $\{y^i\}_{i=1}^N$  dependiente. Para más detalles sobre su significado y los tipos de ligaduras véase Golstein (1997).



Para algún conjunto  $\{y^s, y^k, \dots, y^j\}$ , en donde  $\{y^s, y^k, \dots, y^j\} \subset \{y^i\}_{i=1}^N$ . Si el conjunto no es dependiente, se dice que es independiente. Este tipo de relaciones indican una redundancia en el conjunto  $\{y^i\}_{i=1}^N$  puesto que dados  $y^s, \dots, y^j$  se tiene determinado el valor de  $y^k$ , de manera que esta coordenada no proporciona nueva información del sistema y puede escribirse en términos de otras por medio de la ecuación (6) por lo que se puede prescindir de ella. Por lo tanto, un sistema con  $N$  coordenadas y  $m$  ecuaciones de la forma (6) se puede representar por medio de un conjunto de coordenadas  $\{y^i\}_{i=1}^n$  con  $n = N - m$ , que no necesariamente se pueden asociar a las componentes del vector posición de una partícula, en donde es costumbre denotarlo  $\{q^i\}_{i=1}^n$  para indicar que es un conjunto de coordenadas independiente e invertible, donde se entiende por invertible que existen relaciones  $y^k = y^k(\{q^i\}_{i=1}^n)$  para  $k = 1, \dots, N$ . Así mismo, a las coordenadas  $\{q^i(t)\}$  se les llama coordenadas generalizadas y a  $n$  los grados de libertad del sistema.

Como ya se mencionó en la sección anterior, solo se van a considerar funcionales en donde las derivadas de las coordenadas generalizadas son de primer orden, el conjunto de las derivadas de las coordenadas generalizadas se define como la derivada de cada coordenada generalizada  $q^i(t)$  con respecto a la variable independiente y se denota como  $\{\dot{q}^i(t)\}_{i=1}^n$  (Doughty, 1990), es decir

$$\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}$$

### 4.3. Principio de Hamilton

El principio variacional del cual se derivan las ecuaciones de movimiento es el principio de Hamilton según el cual el movimiento de un sistema de partículas descrito por  $n$  coordenadas generalizadas desde una configuración inicial dada  $\{q^i(t_0)\}_{i=1}^n$  hasta una configuración final  $\{q^i(t_f)\}_{i=1}^n$  en un intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$  es tal que el funcional

$$S[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, q^i, \dot{q}^i) dt$$

Para  $i = 1, \dots, n$  es estacionario (Van Brunt, 2004).

Al funcional  $S$  se le conoce como la acción. Además, si  $S$  es estacionario, se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange (Doughty, 1990)

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$$

Nótese que el número de ecuaciones se corresponde con el número de coordenadas generalizadas y que el orden de las ecuaciones diferenciales es uno más que el orden de las variables dependientes; las coordenadas generalizadas  $q^i$  solo tienen primera derivada por lo que el orden de las ecuaciones de movimiento es dos.

En el caso cinemático, se tiene que para  $L = T - V$  (donde  $T$  es la energía cinética de las coordenadas generalizadas y  $V$  la energía potencial) el principio de Hamilton es consistente con la segunda ley de Newton, por este motivo, se estará refiriendo a las ecuaciones de Euler-Lagrange como las ecuaciones de movimiento y viceversa.

Un aspecto que destacar del principio de Hamilton es que se limita únicamente a la primera variación de la acción  $S$  para describir las ecuaciones de movimiento del sistema, es decir, para la diferencia  $\Delta S = \varepsilon \delta S + \varepsilon^2 \delta^2 S + \dots$ , no importa qué valor tenga  $\delta^2 S$  (negativo para un máximo o positivo para un mínimo) o cualquier otra variación de orden superior, la evolución física del sistema está determinada por  $\delta S = 0$ , lo que refleja el carácter lineal de este principio.

#### 4.4. Teoría de campos clásicos

En general, la función lagrangiana  $L(t, q^i, \dot{q}^i)$  es distinta dependiendo del problema físico en cuestión, por lo que no se considerará una expresión de esta a priori. Por otro lado, si bien un sistema físico discreto se puede describir en términos de la función lagrangiana donde el tiempo es la única variable independiente, esta descripción resulta insuficiente cuando el estudio del sistema requiere considerar no solo el tiempo como variable independiente, sino también las coordenadas espaciales (Edvardsson, 2016). De manera que se escribe  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) para denotar las coordenadas espaciotemporales (con  $x^0$  representando la coordenada temporal) y  $\Phi^i(x^\mu)$  para  $i = 1, \dots, n$  para los campos que describen las propiedades del sistema, en donde se ha asumido que el conjunto de  $n$  campos es independiente en el sentido explicado anteriormente. Puesto que el sistema físico puede tener un número arbitrario de grados de libertad, es oportuno describirlo en términos de la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  tal que  $L = \int_R \mathcal{L} d^3x$  para alguna región del espacio  $R \subseteq \mathbb{R}^3$ . De esta forma, la acción es la integral de la densidad lagrangiana sobre una región  $\mathcal{R}$  del espaciotiempo

$$S[\Phi^i] = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) d^4x \quad (7)$$

A partir de esta acción se puede hacer un procedimiento similar al de la sección 4.1. para encontrar las ecuaciones de campo por vía del principio de Hamilton, de acá se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \right) = 0 \quad (8)$$

#### 4.5. Simetrías e invariancias

La cuestión principal de la investigación de Noether no son las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange sino las simetrías de estas, pese a que en su artículo nunca se menciona la palabra “simetría”. En particular, se buscan cierto tipo de simetrías que manifiesten información relevante del sistema físico en cuestión. En un sentido matemático, las simetrías en este contexto son mapas (o funciones) que convierten las soluciones de las ecuaciones de movimiento en otras soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales (Brown, H. & Holland, P., 2004). Esta definición de simetría resulta demasiado general para el problema que nos atañe puesto que puede darse el caso en el que existan simetrías  $\mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  que cumplan con las ecuaciones de campo, pero cuya variación  $\delta \hat{S}$  no sea estacionaria ( $\delta \hat{S} \neq 0$ ), lo que contradice el principio de Hamilton, que es anterior a las ecuaciones de campo.<sup>6</sup> Por este motivo, Noether indaga cuáles son las relaciones que se deben satisfacer cuando se tiene un determinado tipo de transformaciones en las variables dependientes e independientes que dejan la acción  $S$  invariante (Branding K. & Brown H., 2003). En ocasiones se refiere a este problema como el problema variacional de Noether y a las transformaciones que dejan invariante a la acción como simetrías de Noether. Por lo tanto, el conjunto de todas las transformaciones que actúan sobre las coordenadas  $(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  convirtiéndolas en otras coordenadas  $(\hat{x}^\mu, \hat{\Phi}^i, \partial_{\hat{\mu}} \hat{\Phi}^i)$ , son simetrías de Noether si

$$\int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) d^4x = \int_{\hat{\mathcal{R}}} \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \hat{\Phi}^i, \partial_{\hat{\mu}} \hat{\Phi}^i) d^4\hat{x}$$

---

<sup>6</sup>Nótese que en la sección 4.1. se derivó la condición necesaria para la existencia de un punto crítico en el funcional  $S$ , es decir, que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan para  $\mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  (véase la ecuación (7)). No obstante, esta condición no es suficiente para la existencia de un punto crítico  $\delta S = 0$ , en otras palabras, todo funcional estacionario  $S$  cumple las ecuaciones de campo (8), pero no todas las soluciones  $\mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  de las ecuaciones de campo cumplen con el principio de Hamilton  $\delta S = 0$ .

## 4.6. Grupos de Lie

Para describir las transformaciones infinitesimales mencionadas en la sección anterior de una manera precisa se empieza por la definición de grupo. Un grupo  $G$  es un conjunto de elementos con una operación binaria ( $\circ$ ) que cumple las siguientes propiedades (Marlow & Feil, 2014):

- Sean  $g, h, k$  elementos cualesquiera de  $G$

$$(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$$

- Existe un elemento  $\epsilon$  en  $G$  tal que

$$g \circ \epsilon = \epsilon \circ g = g$$

- Para todo elemento  $g$  de  $G$  existe un elemento  $g^{-1}$  tal que

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \epsilon$$

Los grupos que se van a manejar son grupos de Lie, que como es bien sabido, son un tipo de grupos continuos, de manera que tienen la estructura topológica de una variedad y la estructura algebraica de los grupos (Gilmore, 2012). Ahora, para definir una variedad se utiliza el concepto de espacio topológico que se da en la topología de un conjunto de puntos según el cual un espacio topológico  $(T, \mathcal{P})$  es un conjunto de puntos en el que se sitúa una topología  $\mathcal{P}$ . La topología  $\mathcal{P}$  en el conjunto  $T$  es una colección de subconjuntos (también conocidos como conjuntos abiertos)  $S_1, S_2, \dots$  tal que (Munkres, 2013):

- El conjunto vacío  $\emptyset$  y  $T$  pertenecen a  $\mathcal{P}$ .
- La unión  $\bigcup_i S_i$  de cualquier subcolección (finita o infinita) de elementos de  $\mathcal{P}$  pertenece a  $\mathcal{P}$ .
- La intersección de elementos  $\bigcap_i S_i$  de cualquier subcolección finita de  $\mathcal{P}$  pertenece a  $\mathcal{P}$ .

Un espacio topológico es un espacio de Hausdorff si además de cumplir estos tres axiomas se tiene que para cada par de puntos  $p \in T$  y  $q \in T$ ,  $p \neq q$ , existen los conjuntos abiertos  $S_p \in \mathcal{P}$  y  $S_q \in \mathcal{P}$  tal que  $p \in S_p$ ,  $q \in S_q$  y  $S_p \cap S_q = \emptyset$ . Dada la definición anterior, una variedad  $M$  suave de dimensión  $m$  (Arvanitoyeorgos, 2003) es un espacio topológico de Hausdorff  $(T, \mathcal{P})$  con una colección de pares  $(S_i, \phi_i)$  donde  $S_i$  es un subconjunto abierto de  $T$  y  $\phi_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

1. Cada  $\phi_a$  es un homomorfismo de  $S_i$  a un subconjunto abierto  $V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ .
2.  $\bigcup_i S_i = T$ .
3. Para cada  $i$  y  $j$  la composición  $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(S_i \cap S_j) \rightarrow \phi_i(S_i \cap S_j)$  es suave, en el sentido de que este mapa es continuo e infinitamente diferenciable.
4. La familia  $\{(S_i, \phi_i)\}$  es máxima con respecto a las condiciones 2 y 3.

Sumado a esto, los axiomas establecidos para un grupo y para una variedad se combinan para definir un grupo continuo al imponer que la operación del grupo ( $\circ$ ) y la inversa ( $i$ ) para cada elemento sean mapas continuos. Sean  $\sigma$  y  $\tau$  elementos de un grupo continuo, la Figura 1 ilustra estas dos propiedades.

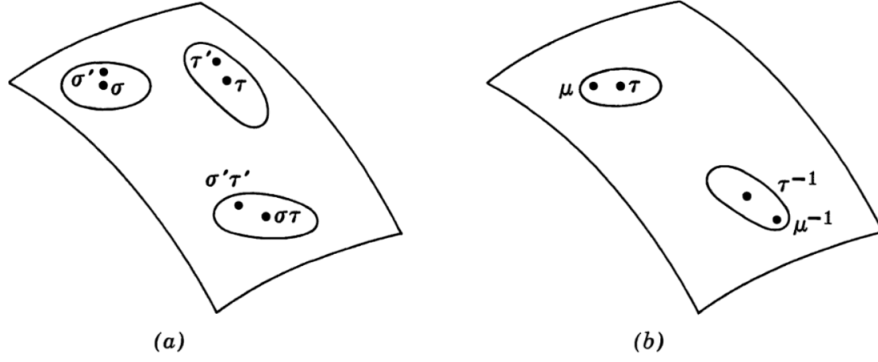


Figura 1: (a) La continuidad en la operación del grupo. La composición de un elemento  $\sigma'$  cerca a  $\sigma$  con otro elemento  $\tau'$  cerca a  $\tau$  produce un elemento  $\sigma' \circ \tau'$  en las proximidades de  $\sigma \circ \tau$ .  
(b) La continuidad para la inversa de cualquier elemento en  $G$ . La inversa de un elemento  $\mu$  en una vecindad del elemento  $\tau$  es un elemento  $\mu^{-1}$  cercano a  $\tau^{-1}$ .

El hecho de que dos elementos del grupo  $\sigma$  y  $\tau$  se operen para formar un elemento  $\sigma \circ \tau$  que pertenece también al grupo y que este tenga la estructura de una variedad suave implica (según el axioma 1 de las variedades) que los elementos  $\sigma$ ,  $\tau$  y  $\sigma \circ \tau$  representan cada uno un punto  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  (respectivamente) en la variedad  $M$  que se puede describir en términos de algún conjunto de coordenadas en  $\mathbb{R}^m$ . Por lo que la operación binaria se puede ver como un mapa que toma dos elementos del grupo  $p_1$  y  $p_2$  con coordenadas locales  $\phi_i^\mu(\sigma) = (\zeta^1(\sigma), \dots, \zeta^m(\sigma))$ ,  $\phi_j^\mu(\tau) = (\zeta^1(\tau), \dots, \zeta^m(\tau))$  y produce otro elemento  $\sigma \circ \tau = p_3$  con coordenadas  $\phi_k^\mu(p_3) = (\zeta^1(p_3), \dots, \zeta^m(p_3))$ <sup>7</sup>, de manera que la continuidad en la operación del grupo  $\circ : G \times G \rightarrow G$  y en la inversa  $i : G \rightarrow G$  para los elementos de un grupo continuo se puede entender por medio de la continuidad de una función en  $\mathbb{R}^m$ .

En ocasiones resulta útil escribir cualquier elemento  $g$  de un grupo  $G$  en función de un conjunto específico de elementos  $\{g_1, \dots, g_s\}$ . Para el tipo de consideraciones que se harán más adelante conviene que el grupo (continuo)  $G$  sea conexo, ósea, que dos puntos arbitrarios en la variedad  $M$  puedan ser unidos por una línea en la que todos los puntos de esa línea pertenezcan a la variedad<sup>8</sup> (Gilmore, 2012). Si bien no todos los grupos continuos son conexos, se puede restringir el grupo a una parte de él que sí lo sea. Evidentemente, esta parte conexa del grupo debe tener a la identidad  $\epsilon$  en ella puesto que debe ser en sí misma un grupo. Considere un elemento  $\beta$  que pertenece a este grupo conexo  $G$  y que por lo tanto se puede unir a la identidad través de una línea en la que cada punto de esta es un elemento del grupo, el conjunto de todos los puntos es  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\infty\}$  en donde  $\alpha_0 = \epsilon$  y  $\alpha_\infty = \beta$ . Siguiendo el análisis presentado por Gilmore (2012), al considerar el producto  $\beta = \alpha_0 \circ \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$ , que puede escribirse como

$$\beta = (\beta \circ \alpha_{n-1}^{-1}) \circ \dots \circ (\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}) \circ (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) \circ (\alpha_1 \circ \epsilon^{-1}) \circ \epsilon$$

dos observaciones importantes surgen a partir de esta ecuación: la primera es que para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$  los elementos  $\alpha_j$  y  $\alpha_{j+1}$  pertenecen a un conjunto abierto común a ambos elementos (ver Figura 2) y lo segundo a destacar es que debido a la continuidad de la función inversa para cualquier elemento  $\alpha_{j+1}$  (con inversa  $\alpha_{j+1}^{-1}$ ) la operación  $\alpha_{j+1} \circ \alpha_j^{-1}$  es un elemento que pertenece a un conjunto abierto que contiene a la identidad puesto que  $\alpha_{j+1}^{-1}$  y  $\alpha_j^{-1}$  son muy cercanos entre sí. El resultado de esto es que cualquier  $\beta$  en  $G$  es el producto de una cantidad de elementos aledaños a la identidad  $\epsilon$ .

<sup>7</sup>El motivo por el que se usa la variable  $\zeta$  en lugar de  $x$  para escribir las coordenadas locales de un punto en la variedad  $M$  es para que más adelante no se confundan con el espacio de las variables independientes  $x^\mu$ . Cada uno de los puntos en la variedad es un elemento del grupo, no las variables  $(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  sobre las que estos actúan.

<sup>8</sup>Nótese que esta definición excluye a los grupos de simetrías discretas como las reflexiones.



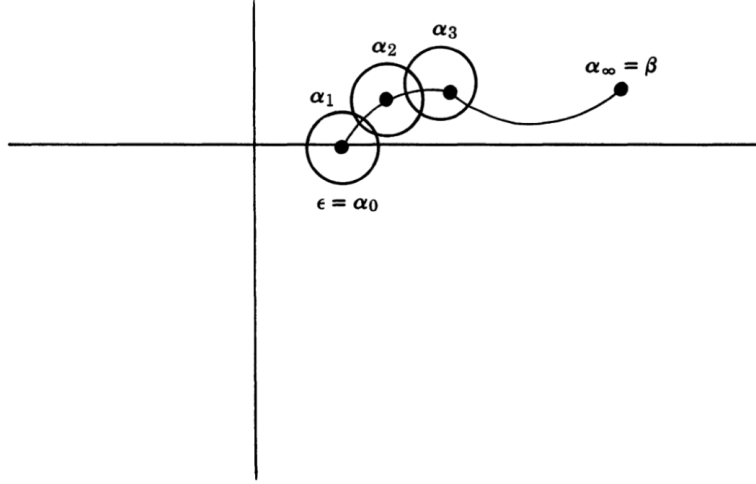


Figura 2: Grupo conexo. Un elemento  $\beta$  se puede escribir como el producto de una determinada cantidad de elementos en una vecindad de la identidad  $\epsilon$ .

A partir de lo anterior, un grupo de Lie se define como la componente conexa de un grupo continuo (Gilmore, 2012).

De acuerdo con Olver (1993) los grupos de Lie suelen aparecer como grupos de transformaciones que actúan en una variedad  $\mathcal{M}$ . Para los fines de este trabajo un grupo de transformaciones es un grupo cuyos elementos son transformaciones  $\Psi : G \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ <sup>9</sup> que actúan en la variedad  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^s$  y obedecen los postulados para los grupos continuos. Por ejemplo, el grupo  $SO(2)$  es el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  que para un elemento dado tiene una representación en función del parámetro  $\theta$  dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

que lo convierte en un grupo de Lie de transformaciones que actúa en  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$  y que depende de un parámetro. De esta guisa, siempre que se hable de un grupo de Lie en las siguientes secciones se referirá a un grupo de transformaciones en donde la transformación más general  $\Psi(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i; \zeta^k) = (\hat{x}^\mu, \hat{\Phi}^i, \partial_\mu \hat{\Phi}^i)$  depende de  $m$  parámetros  $\zeta^k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) linealmente independientes en el sentido de que no se puede representar los  $m$  parámetros como funciones de un número menor de parámetros (Noether, 1918), a este grupo de transformaciones Noether lo llama grupo continuo finito.

En muchos casos, es adecuado que la transformación identidad  $\Psi_\epsilon$  se corresponda con la elección de todos los parámetros  $\zeta^k = 0$ , esto se puede conseguir en cualquier caso definiendo un nuevo conjunto de parámetros. Por ejemplo, si la transformación que corresponde a la identidad  $\Psi_\epsilon$  ocurre cuando los parámetros toman los valores  $\zeta^k = a^k$  para una constante  $a^k \neq 0$ , se pueden definir<sup>10</sup> los nuevos parámetros  $\hat{\zeta}^k = \zeta^k - a^k$  para los que se cumple que la identidad del grupo de transformaciones se da cuando  $\hat{\zeta}^k = 0$  para  $k = 1, \dots, m$ . A partir de ahora se asumirá que se tiene esta parametrización.

<sup>9</sup>Nótese que acá se está considerando el caso en el que un grupo de transformaciones actúa sobre las coordenadas  $(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$ , por lo que  $\mathbb{R}^s = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \binom{5}{1} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{5n}$  como se enunció en la sección 4.1.

<sup>10</sup>En concordancia con el primer axioma de las variedades, el homeomorfismo  $\phi_a$  que define  $\mathbb{R}^m$  se escoge de manera arbitraria.

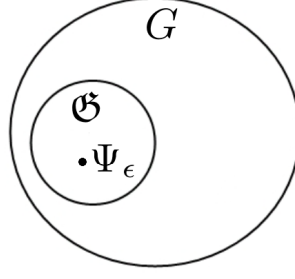


Figura 3: Grupo de transformaciones  $G$  con un grupo local  $\mathfrak{G}$  en las proximidades de la transformación identidad  $\Psi_\epsilon$ . Si el funcional  $\delta S$  de un sistema físico es invariante bajo la acción de  $G$ , también es invariante bajo la acción de  $\mathfrak{G}$ .

Por otra parte, considerando la linealidad del principio de Hamilton anteriormente mencionada en la sección 4.3, se busca sacar el mayor provecho a esta cualidad. En primer lugar, la transformación más general que puede tener un elemento del grupo  $G$  (que deja la acción  $S$  del sistema invariante) es

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu + \delta^2 x^\mu + \dots$$

$$\hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) = \Phi(x^\mu) + \delta\Phi^i + \delta^2\Phi^i + \dots$$

En donde se asume que las variaciones  $\delta x^\mu$  y  $\delta\Phi^i$  tienen una dependencia lineal con respecto a los parámetros  $\zeta^k$ <sup>11</sup>. En particular, para el grupo local  $\mathfrak{G}$  en el que la transformación más general que tiene un elemento está dada por

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) = \Phi(x^\mu) + \delta\Phi^i$$

la acción  $S$  del sistema también permanece invariante bajo este tipo de transformaciones infinitesimales de este grupo (Figura 3).

#### 4.7. Campos vectoriales invariantes

Sea  $C$  una curva conexa en la variedad  $M$  parametrizada por la función  $\lambda : I \rightarrow M$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $(\phi_k \circ \lambda)(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^m(t))$ , para cada punto  $p = \lambda(t) \in C$  la curva tiene un vector tangente dado por  $\dot{\lambda}_k(t) = (\dot{\lambda}_k^1(t), \dots, \dot{\lambda}_k^m(t))$  que se puede expandir en términos de una base que consiste en las combinaciones lineales de los operadores  $\partial/\partial\zeta^k$  (Chandrasekhar, 1998)

$$V|_p = \dot{\lambda}_k^1(t) \frac{\partial}{\partial\zeta^1} + \dots + \dot{\lambda}_k^m(t) \frac{\partial}{\partial\zeta^m}$$

La colección de todos los vectores tangentes a todas las posibles curvas que pasen por el punto  $p \in M$  generan un espacio vectorial de dimensión  $m$  en ese punto llamado espacio tangente de  $M$  en  $p$  que se denota como

<sup>11</sup>Esta suposición no limita la generalidad de los teoremas como lo demuestra Noether en la tercera y cuarta sección de su artículo.

$TM|_p$ . Un campo vectorial  $V$  en  $M$  asigna un vector tangente  $V|_p \in TM|_p$  a cada punto  $p \in M$  (Olver, 1993). En coordenadas locales un campo vectorial tiene la forma

$$V = \gamma^1(\zeta^1, \dots, \zeta^m) \frac{\partial}{\partial \zeta^1} + \dots + \gamma^m(\zeta^1, \dots, \zeta^m) \frac{\partial}{\partial \zeta^m}$$

Sea  $\Psi_\nu$  cualquier elemento fijo en  $\mathfrak{G}$ , considere la composición de las transformaciones dada por  $L_\nu(\Psi) = \Psi_\nu \circ \Psi$  donde  $\Psi$  es otro elemento de  $\mathfrak{G}$ . Esta composición se conoce como el mapa de traslaciones por la izquierda (Arvanitoyeorgos, 2003)  $L_\nu : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$  y puesto que tiene una inversa dada por  $(L_\nu)^{-1}$  es un difeomorfismo. Un campo vectorial  $V$  en  $\mathfrak{G}$  es invariante bajo la acción del mapa de traslaciones por la izquierda si se cumple que el diferencial  $dL_\nu : TM|_\Psi \rightarrow TM|_{\Psi_\nu \circ \Psi}$  es

$$dL_\nu(V|_\Psi) = V|_{\Psi_\nu \circ \Psi}$$

Esto quiere decir que el vector tangente  $V|_\Psi$  que la traslación por la izquierda envía a  $V|_{\Psi_\nu \circ \Psi}$  es un vector tangente que pertenece al mismo campo vectorial  $V$ .

Cualquier campo vectorial invariante por la izquierda se encuentra determinado de manera unívoca por su vector tangente evaluado en la identidad  $\Psi_\epsilon$  ya que  $V|_{\Psi_\nu} = dL_\nu|_{\Psi_\epsilon}$ . Así mismo, cualquier vector tangente a  $\mathfrak{G}$  evaluado en la identidad determina un campo vectorial invariante por la izquierda en  $\mathfrak{G}$  (Olver, 1993).

Por lo tanto, se define el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como el espacio vectorial de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda  $V_k$  y se puede referir al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{G}$  como el espacio tangente a  $\mathfrak{G}$  evaluado en la transformación identidad  $\Psi_\epsilon$ . La dimensión del álgebra de Lie es igual a la dimensión del grupo  $\mathfrak{G}$  y también al número de campos vectoriales invariantes por la izquierda  $V_k$  para  $k = 1, \dots, m$ , uno por cada parámetro  $\zeta^k$ .

$$\mathfrak{g} \simeq T\mathfrak{G}|_{\Psi_\epsilon}$$

Gracias a las suposiciones de localidad de la sección anterior, se pueden usar los campos vectoriales invariantes  $V_k$  en el álgebra de Lie para describir las transformaciones  $\Psi$  que pertenecen a  $\mathfrak{G}$  (De Azcárraga, J. & Izquierdo, J., 2011). Concretamente, para cada campo vectorial invariante  $V_k$  por la izquierda en  $\mathfrak{G}$  hay un campo vectorial inducido  $\mathcal{V}_k$  en  $\mathbb{R}^s$ , el espacio en el que se encuentran las variables independientes y dependientes, suponiendo que estas tienen como máximo derivadas de primer orden, este campo vectorial inducido  $\mathcal{V}_k$  está definido en las coordenadas  $(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$ .

Si se denota la acción de  $\mathfrak{G}$  sobre las variables independientes y dependientes como

$$\Psi(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i; \zeta^k) = (\Xi^\mu(x^\mu, \Phi^i; \zeta^k), \Theta^i(x^\mu, \Phi^i; \zeta^k), \Omega_\mu^i(x^\mu, \Phi^i; \zeta^k))$$

entonces por cada parámetro  $\zeta^k$  hay un campo vectorial  $\mathcal{V}_k$  (Struckmeier, J. & Riedel, C., 2002) <sup>12</sup>

$$\mathcal{V}_k = \frac{\partial \Xi^\mu}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Theta^i}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \frac{\partial}{\partial \Phi^i} + \frac{\partial \Omega_\mu^i}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)}$$

que produce una transformación infinitesimal  $\Psi_k$  en la dirección del parámetro  $\zeta^k$  cuando este se mueve en las cercanías de la identidad  $\Psi_\epsilon$  a lo largo de  $V_k$ . Es claro que la variación  $\delta \mathcal{L}$  que se tiene cuando se produce la transformación más general  $\Psi$  se puede entender como la superposición  $\sum_k \mathcal{V}_k$  de todos los campos vectoriales  $\mathcal{V}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) cuando se evalúa la función  $\mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$ .

<sup>12</sup>La cantidad  $\Omega(x^\mu, \Phi^i; \zeta_k)$  no depende de  $\partial_\mu \Phi^i$  ya que, como lo demuestran Struckmeier, J. y Riedel, C., viene dada por  $\Omega(x^\mu, \Phi^i; \zeta^k) = \partial_\mu \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \right) - \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\mu} \partial_\mu \left( \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \right)$ .

Por otra parte, para aplicar los teoremas de Noether se necesitan conocer las variaciones infinitesimales o de primer orden <sup>13</sup>  $\delta x^\mu$  y  $\delta \Phi^i$  que se producen cuando todos los parámetros se mueven de manera infinitesimal en la dirección de sus  $k$  campos vectoriales  $V_k$ . La variación  $\delta x^\mu$  se calcula a continuación según lo presentado por De Azcárraga, J. e Izquierdo, J. (2011):

$$\delta x^\mu = \hat{x}^\mu - x^\mu = \Xi^\mu(x^\mu, \Phi^i; \zeta^k) - \Xi^\mu(x^\mu, \Phi^i; 0)$$

$$\delta x^\mu = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Xi^\mu(x^\mu, \Phi^i)}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta^k=0} \zeta^k$$

Nótese que esto es consistente con la suposición de que  $\delta x^\mu$  es lineal en los parámetros  $\zeta_k$ . Para la variación de  $\delta \Phi^i$ :

$$\begin{aligned} \delta \Phi^i &= \hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) - \Phi^i(x^\mu) \\ \delta \Phi^i &= \hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) - \Phi^i(x^\mu) = \hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) + [\hat{\Phi}^i(x^\mu) - \Phi^i(x^\mu)] - \hat{\Phi}^i(x^\mu) \\ \delta \Phi^i &= \delta_0 \Phi^i(x^\mu) + [\hat{\Phi}^i(\hat{x}^\mu) - \hat{\Phi}^i(x^\mu)] \end{aligned}$$

En donde se ha introducido la variación  $\delta_0 \Phi^i(x^\mu) = \hat{\Phi}^i(x^\mu) - \Phi^i(x^\mu)$  que mantiene  $x^\mu$  fijo. La diferencia entre paréntesis de la ecuación anterior se expande hasta el primer orden en su serie de Taylor como  $\frac{\partial \hat{\Phi}^i}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$ , que a su vez puede también expresar en términos de la variable  $\Phi^i$  (sin transformar) gracias a que al tratarse de transformaciones infinitesimales, la cantidad  $\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \hat{\Phi}^i}{\partial x^\mu}$  es de orden no lineal.

$$\delta \Phi^i = \delta_0 \Phi^i(x^\mu) + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (9)$$

Ya que  $\delta \Phi^i$  y  $\delta x^\mu$  son lineales en los parámetros  $\zeta_k$ , se concluye que  $\delta_0 \Phi^i(x^\mu)$  también lo es.

## 5. Procedimiento

A continuación, se enuncian el primer y segundo teorema de Noether tal como se encuentran en el artículo (Noether, 1918) (salvando algunos aspectos en la notación):

1. Si la integral  $S$  es invariante con respecto a un grupo continuo finito  $\mathfrak{G}$  que depende de manera analítica en  $m$  parámetros, entonces existen  $m$  relaciones linealmente independientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se convierten en divergencias, de manera converso, se seguirá la invariancia de  $S$  con respecto a  $\mathfrak{G}$ . El teorema es válido incluso en el caso límite de una cantidad infinita (contable <sup>14</sup>) de parámetros.
2. Si la integral  $S$  es invariante con respecto a un grupo continuo infinito  $\mathfrak{G}$  que depende de  $m$  funciones arbitrarias y sus derivadas hasta un orden  $n$ , entonces hay  $m$  relaciones entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y sus derivadas hasta un orden  $q$ , en este caso la proposición inversa también se cumple.

<sup>13</sup>Debido a que se está considerando el grupo local  $\mathfrak{G}$ , el signo de igualdad se usa siempre que dos cantidades sean iguales únicamente en los términos de orden lineal.

<sup>14</sup>Un conjunto  $A$  es infinitamente contable si existe un mapa de  $A$  a los números naturales.



Si bien la estructura de ambas proposiciones es bicondicional. La proposición que se va a derivar en esta sección es la que afirma que si la integral  $S$  es invariante con respecto a un grupo continuo finito  $\mathfrak{G}$ , entonces existen  $m$  relaciones linealmente independientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se convierten en divergencias. Se presenta especial atención a esta proposición (cuando  $m$  es un número finito) y no a su inversa porque es la más práctica de comprobar a la hora de aplicar este teorema a una determinada teoría. Con respecto al segundo teorema, este no se va a utilizar para ninguna de las aplicaciones en este trabajo debido a que implica relaciones de la forma

$$\sum_{\lambda=1}^m \left[ (a_{\lambda}^i E_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_{\lambda}^i E_i) + \cdots + (-1)^q \frac{\partial}{\partial x^q} (c_{\lambda}^i E_i) \right] = 0$$

en donde a diferencia del primer teorema, no se presentan divergencias. Para un punto crítico esta ecuación es trivial y en la práctica, poco útil.

En la sección 4.1. se calculó la variación de un funcional cuando se consideran variaciones únicamente en la variables dependientes y sus derivadas. En ese caso, el resultado fue, por un lado, una contribución interna de las que surgían las ecuaciones de Euler-Lagrange y por el otro, un término que contenía las contribuciones de frontera en la forma de una divergencia. En esta ocasión, se va a calcular la variación de la acción  $S$  considerando variaciones de las variables dependientes (y sus derivadas) e independientes al mismo tiempo, lo que significa que esta vez no se tendrá un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  fijo, sino que se va a considerar una familia de dominios que cambian junto con los parámetros  $\zeta^k$ .

No se puede pasar por alto que la variación que se va a calcular a continuación (si bien es similar en la forma) tiene un significado completamente diferente a la de la sección 4.1. ya que en el primer caso se busca, entre todas las funciones  $\hat{\Phi}^i = \Phi^i(x^\mu) + \varepsilon \eta(x^\mu)$  que pertenecen a un intervalo de radio  $\varepsilon > 0$ , aquella que sea un punto crítico. Mientras que este caso, no importa qué transformación infinitesimal se induzca en las variables, todas son puntos críticos.

Se procede a demostrar la primera proposición del primer teorema de Noether. Sea  $\mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i)$  un funcional que depende de  $p$  variables independientes  $x^\mu$  y de  $q$  variables dependientes  $\Phi^i$  y sus derivadas  $\partial_K \Phi^i$  hasta un orden  $n$  y sea  $\mathfrak{G}$  el grupo de transformaciones infinitesimales en el que el mapa  $(x^\mu, \partial_K \Phi^i) \rightarrow (\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i)$  deja la variación  $\delta S = 0$ . Considere la variación

$$\delta S = \int_{\hat{\Omega}} \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i) d^p \hat{x} - \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i) d^p x$$

Para poder hacer la diferencia de ambas integrales se deben convertir las variables independientes a un sistema de coordenadas común a ambas, por ejemplo  $\hat{x}^\mu = \hat{x}^\mu(x^\mu)$ . Esto se consigue por medio del determinante de la matriz Jacobiana  $\frac{\partial(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)}$  puesto que se cumple que  $d^p \hat{x}^\mu = \frac{\partial(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)} d^p x^\mu$ .

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i) \frac{\partial(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)} - \mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i) \right] d^p x$$

Debido a que los componentes de la matriz Jacobiana son  $\frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu(\delta x^\mu)$ , donde  $\delta_\nu^\mu$  es la función delta de Kronecker. El único término lineal en el determinante de esta matriz es  $1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$  (Gelfand & Fomin, 2000). Por lo que hasta un orden lineal el Jacobiano es  $\frac{\partial(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)} = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$ .

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i) [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] - \mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i) \right] d^p x$$

Distribuyendo

$$\delta S = \int \left[ \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i) - \mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i) + \mathcal{L}(\hat{x}^\mu, \partial_{\hat{K}} \hat{\Phi}^i) \partial_\mu (\delta x^\mu) \right] d^4 x$$

La cantidad  $\mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) = \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) - \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu$  es igual en los términos de orden lineal a  $\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)$ .

$$\delta S = \int [\delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)] d^4 x$$

En el lado izquierdo, se tiene que la variación  $\delta S = 0$ . Mientras que en el lado derecho la integral  $\int \delta \mathcal{L} d^4 x$  es igual a la que se calculó en la sección 4.1. para  $\hat{\Phi}^i = \Phi^i + \varepsilon \delta_0 \Phi^i$  con algún número  $\varepsilon > 0$  por lo que se reemplaza la ecuación (2) y queda:

$$0 = \int [\partial_\mu W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i] + E_i \delta_0 \Phi^i + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)] d^4 x$$

Organizando los términos

$$0 = \int [\partial_\mu (W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i] + \mathcal{L} \delta x^\mu) + E_i \delta_0 \Phi^i] d^4 x$$

Ahora, debido a que esta relación en las integrales de ambos lados se satisface para cualquier dominio arbitrario, se debe cumplir que

$$0 = \partial_\mu (W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i] + \mathcal{L} \delta x^\mu) + E_i \delta_0 \Phi^i$$

Esto se reescribe como

$$E_i \delta_0 \Phi^i = -\partial_\mu (W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i] + \mathcal{L} \delta x^\mu) \quad (10)$$

Como se demostró anteriormente en la ecuación (9) la variación  $\delta_0 \Phi^i = \hat{\Phi}^i(x^\mu) - \Phi^i(x^\mu)$  (al igual que  $\delta x^\mu$ ) es lineal en los parámetros  $\zeta^k$ , por lo que sus también lo son (las derivadas y la variación  $\delta_0$  conmutan). Por este motivo, al hacer una rápida inspección a la ecuación (3) se comprueba que  $W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i]$  es lineal en los parámetros. En base a esto, se puede escribir ambos lados de la ecuación como

$$E_i \delta_0 \Phi^i = \partial_\mu B^\mu$$

donde  $\delta_0 \Phi^i = \alpha_k \zeta^k$  y  $B^\mu = j_k^\mu \zeta^k$  son combinaciones lineales de los  $m$  parámetros. Entonces, en virtud de la independencia lineal de los parámetros  $\zeta^k$  existen  $m$  ecuaciones

$$\alpha_k E_i = \partial_\mu j_k^\mu$$

por cada cada componente del operador Euler, que se convierten en divergencias cuando la acción  $S$  es invariante, tal como afirma el teorema.

Es importante resaltar que cuando se satisfacen las ecuaciones la divergencia  $\partial_\mu j_k^\mu$  se vuelve cero simplemente tomando combinaciones lineales de los componentes del operador Euler, de manera que existen combinaciones de estos que producen leyes de conservación, por ejemplo, como es bien sabido, el movimiento de un sistema masa-resorte viene dado por  $E_i = m\ddot{x} + \omega x = 0$ , que si se multiplica por  $\dot{x}$  (y se hacen unas pocas manipulaciones algebraicas) producen la ecuación  $\dot{x}E_i = \frac{d}{dt}(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}) = 0$ , que expresa la conservación de la energía para este sistema.

El primer teorema de Noether puede aplicarse en una teoría física por medio de leyes de conservación locales (Bluman et al., 2009) cuando se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange debido a que en ese caso la divergencia  $\partial_\mu j_k^\mu = 0$ . Integrando esta divergencia en una región del espacio  $R$  se obtiene

$$\int_R \partial_\mu j_k^\mu d^3x = \int_R \partial_0 j_k^0 d^3x + \int_R \partial_\nu j_k^\nu d^3x = 0$$

para  $\nu = 1, 2, 3$ . Usando el teorema de la divergencia para la segunda integral queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R j_k^0 d^3x + \int_S \hat{n}_\nu j_k^\nu dS$$

donde  $\hat{n}_\nu$  es la base del vector normal unitario de una superficie cerrada  $S$ . Si se toma que el dominio de la integral es todo el espacio y se asume que en el infinito los campos se hacen cero (Edvardsson, 2016)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R j_k^0 d^3x = 0$$

En otras palabras,

$$\int_R j_k^0 d^3x = Q_k$$

Para alguna constante  $Q_k$ . En la práctica, se puede comprobar fácilmente cuándo la acción  $S$  de un sistema es invariante bajo transformaciones infinitesimales simplemente al reemplazar de manera explícita para las coordenadas  $\mathcal{L}(x^\mu, \partial_K \Phi^i) \rightarrow \mathcal{L}(x^\mu + \delta x^\mu, \partial_K \Phi^i + \delta \Phi^i)$ . Una vez que se sabe que el sistema es invariante bajo una cierta simetría infinitesimal, una determinada ley de conservación es prácticamente inmediata a partir de la ecuación (10).

## 6. Resultados

En esta sección se presentan dos aplicaciones del primer teorema de Noether en base a lo expuesto anteriormente.

### 6.1. Mecánica clásica

Considere un sistema en el que la acción  $S$  es invariante bajo las transformaciones

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu \quad ; \quad \Phi^i \rightarrow \Phi^i$$

donde se asume que  $\mathcal{L}$  tiene orden uno en las derivadas de  $\Phi^i$ <sup>15</sup>, esto es,  $\mathcal{L}(x^\mu, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$ . Estas transformaciones representan una invariancia bajo traslaciones temporales y espaciales, dejando la coordenada generalizada  $\Phi^i$  fija. Evidentemente, las variaciones infinitesimales según la ecuación (9) son<sup>16</sup>

$$\delta x^\mu = \alpha_k \zeta^k = \delta_k^\mu \zeta^k \quad ; \quad \delta_0 \Phi^i = -\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\mu} \zeta^k$$

Si se reemplaza en la ecuación (10) y se usa (en este caso) únicamente el primer término de (3) para escribir  $W^\mu[\mathcal{L}; \delta_0 \Phi^i]$ , se llega a

$$\partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} \right] = 0$$

Cada variación dentro de la divergencia se expande en combinaciones lineales de los parámetros, donde se escribe el parámetro  $\zeta^k$  como  $\zeta^k = \eta^{k\mu} \zeta_\mu$  siendo  $\eta^{k\mu}$  el tensor métrico de Minkowsky y  $\zeta_\mu$  el covector del vector  $\zeta^\mu$ .

$$\partial_\mu j^k = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} - \eta^{k\mu} \mathcal{L} \right] \zeta_\mu = 0$$

La cantidad

$$j^{k\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} - \mathcal{L} \eta^{k\mu}$$

se define como el tensor energía-momento, que bajo las condiciones de frontera discutidas anteriormente, producen una ley de conservación dada por

$$P^\mu = \int_R j^{0\mu} d^3x$$

Para algún  $P^\mu$  constante. Por lo que si la acción  $S$  es invariante bajo traslaciones infinitesimales del tiempo ( $\mu = 0$ ), se conserva la energía y si la acción  $S$  es invariante bajo traslaciones infinitesimales espaciales ( $\mu = 1, 2, 3$ ), entonces se conserva el momento lineal.

<sup>15</sup>Esta suposición es razonable ya que las ecuaciones de movimiento o las ecuaciones de Newton tienen orden dos.

<sup>16</sup>Un caso particular para el que se cumpliría esta transformación sería cuando  $\mathcal{L}$  no depende de manera explícita en  $x^\mu$ . Sin embargo, se está considerando el caso en el que  $\mathcal{L}$  sí depende de manera explícita en  $x^\mu$  pero que al evaluar esta transformación la acción  $S$  es invariante.

## 6.2. Electromagnetismo clásico

Como aplicación para el electromagnetismo clásico se halla la ley de conservación asociada a la invariancia de la acción  $S$  bajo transformaciones infinitesimales del potencial  $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$  para una función  $\Lambda(x^\mu)$  con soporte compacto (Mieling, 2017). La densidad lagrangiana en el electromagnetismo clásico es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\epsilon_0\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor electromagnético en su forma covariante. La acción  $S$  es

$$S = - \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{1}{4\epsilon_0\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right] d^4x$$

Considere la recalibración  $\delta A_\mu = \hat{A}_\mu - A_\mu = \partial_\mu \Lambda$  para una función  $\Lambda(x^\mu)$  con soporte compacto. La variación de  $S$  es

$$\delta S = - \int_{\mathcal{R}} \delta \mathcal{L} d^4x = - \int_{\mathcal{R}} (\partial_\mu \Lambda) J^\mu d^4x$$

Este integrando se puede escribir como

$$(\partial_\mu \Lambda) J^\mu = \partial_\mu (\Lambda J^\mu) - \Lambda (\partial_\mu J^\mu)$$

Luego,

$$\delta S = - \int_{\mathcal{R}} \partial_\mu (\Lambda J^\mu) d^4x + \int_{\mathcal{R}} \Lambda (\partial_\mu J^\mu) d^4x$$

La primer integral se puede resolver por el teorema de la divergencia, de la siguiente manera

$$\int_{\mathcal{R}} \partial_\mu (\Lambda J^\mu) d^4x = \int \Lambda J^\mu \hat{n}_\mu dS$$

donde  $\hat{n}_\mu$  es la base del vector unitario normal a una superficie cerrada  $\mathcal{S}$  de radio  $r \rightarrow \infty$ . Aplicado el lema fundamental del cálculo de variaciones esta integral es cero para cualquier  $\Lambda$  con soporte compacto. Por lo que la variación  $\delta S$  queda

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} \Lambda (\partial_\mu J^\mu) d^4x$$

Por otro lado, según la ecuación (2) la variación  $\delta S$  es

$$\int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] \delta A_\nu d^4x + \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu \right) d^4x$$

Debido a que se satisfacen las ecuaciones de campo la primera integral es cero. Para la segunda integral se utiliza nuevamente el teorema de la divergencia para una superficie de radio  $r \rightarrow \infty$  y queda

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu \right) d^4x = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\nu \Lambda) \hat{n}_\mu d\mathcal{S} = 0$$

Puesto que  $\Lambda$  tiene soporte compacto. Comparando las expresiones obtenidas para  $\delta S$  se llega a que

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} \Lambda (\partial_\mu J^\mu) d^4x = 0$$

Usando el lema fundamental del calculo de variaciones una vez más se concluye que

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Por lo tanto, la acción  $S$  es invariante con respecto a la recalibración  $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$  y la ecuación de continuidad asociada es  $\partial_\mu J^\mu = 0$  en todo el espaciotiempo  $\mathcal{R}$

$$\int_{r \rightarrow \infty} \partial_0 J^0 d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{r \rightarrow \infty} \rho(x^\mu) d^3x = 0$$

Lo que significa que la carga

$$Q = \int_{r \rightarrow \infty} \rho(x^\mu) d^3x$$

se conserva en el volumen de una esfera de radio  $r \rightarrow \infty$ .

## 7. Conclusiones

Los teoremas de Noether, específicamente su primer teorema, ha demostrado ser una herramienta poderosa para la comprensión de las relaciones entre simetrías y leyes de conservación en sistemas físicos. A través de su aplicación, se ha mostrado cómo las simetrías infinitesimales de un sistema permiten derivar leyes fundamentales que simplifican tanto la descripción como la solución de las ecuaciones de movimiento de dicho sistema. Esta conexión proporciona una forma sistemática de analizar sistemas físicos que, de otra manera, podrían parecer inabordables.

En particular, los ejemplos tratados en mecánica clásica han mostrado cómo el análisis de simetrías puede simplificar notablemente la resolución de problemas físicos, proporcionando un método claro y eficiente para obtener cantidades que se conservan. El uso de simetrías, derivado inicialmente de los desarrollos de Sophus Lie sobre la teoría de grupos de transformaciones, muestra cómo estos conceptos abstractos se convierten en herramientas prácticas para resolver ecuaciones diferenciales y comprender la dinámica de sistemas físicos.

## 8. Bibliografía

1. Noether, E. (1918). Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918, 235–257. <https://eudml.org/doc/59024>.
2. Noether, E., & Tavel, M. A. (2005). Invariant Variation Problems. En arXiv [physics.hist-ph]. <http://arxiv.org/abs/physics/0503066>.
3. Pitter, W. (s.f.). Introducción al estudio del primer y segundo teorema de Noether y de las leyes de conservación. Departamento de física. Universidad de Zulia.
4. Van Brunt, B. (2004). The calculus of variations. Springer. <https://doi.org/10.1007/b97436>.
5. Gelfand, I. M., & Fomin, S. V. (2000). Calculus of Variations. Dover Publications.
6. Courant, R., & Hilbert, D. (1989). Methods of mathematical physics: Volume 1. John Wiley & Sons.
7. Olver, P. J. (1993). Applications of lie groups to differential equations (2a ed.). Springer.
8. Bluman, G. W., Cheviakov, A. F., & Anco, S. C. (s/f). Construction of conservation laws: how the direct method generalizes Noether's theorem. Ubc.ca. <https://personal.math.ubc.ca/~bluman/cyprus%20proceedings%20paper.pdf>.
9. Giaquinta, M., & Hildebrandt, S. (2013). Calculus of Variations I (2004a ed.). Springer.
10. Goldstein, H. (1997). Classical mechanics, third edition by H. goldstein (3a ed.). Addison Wesley Publishing Company.
11. Doughty, N. A. (1990). Lagrangian interaction: An introduction to relativistic symmetry in electrodynamics and gravitation. Westview Press.
12. Edvardsson, E. (2016). The Noether theorem. <https://www.semanticscholar.org/paper/a2d7b9b2316d60a18f36dca3b7fda1f5791436e7>.
13. Brown, H. R., & Holland, P. (2004). Dynamical versus variational symmetries: understanding Noether's first theorem. Molecular Physics, 102(11–12), 1133–1139. <https://doi.org/10.1080/00268970410001728807>.
14. Brading, K., & Brown, H. R. (2003). Symmetries and Noether's theorems. En K. Brading & E. Castellani (Eds.), Symmetries in Physics (pp. 89–109). Cambridge University Press.
15. Anderson, M., & Feil, T. (2014). A first course in abstract algebra: Rings, groups, and fields, third edition (3a ed.). Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/b17673>.
16. Gilmore, R. (2012). Lie groups, lie algebras and some of their applications. Dover Publications.
17. Munkres, J. R. (2013). Topology: Pearson New International Edition (2a ed.). Pearson Education.
18. Arvanitoyeorgos, A. (2003). An introduction to lie groups and the geometry of homogeneous spaces.

American Mathematical Society.

19. Chandrasekhar, S. (1998). The mathematical theory of black holes. Clarendon Press.
20. De Azcarraga, J. A., & Izquierdo, J. M. (2011). Cambridge monographs on mathematical physics: Lie groups, lie algebras, cohomology and some applications in physics. Cambridge University Press.
21. Struckmeier, J., & Riedel, C. (2002). Noether's theorem and Lie symmetries for time-dependent Hamilton-Lagrange systems. Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 66(6 Pt 2), 066605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.066605>.