



	UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS					    <small>ISO 9001 ISO 14001 ISO 45001 COLNET</small>		
	CARTA DE AUTORIZACIÓN					<small>ISO 9001 ISO 14001 ISO 45001 COLNET</small>		
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 2	

Neiva, 12 de junio de 2024

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Andres David Galindo Mendez, con C.C. No.1003812165

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado Titulado **LA ESTRUCTURA DEL MODELO ESTANDAR COSMOLOGICO INFLACIONARIO** presentado y aprobado en el año 2024 como requisito para optar al título de **Físico**;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Andres David Galindo Mendez

Firma: Andres David Galindo Mendez

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: LA ESTRUCTURA DEL MODELO ESTANDAR COSMOLOGICO INFLACIONARIO.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Galindo Mendez	Andres David

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario



ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales.

PROGRAMA O POSGRADO: Programa Física

	UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS						
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 4

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2024 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 33

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas___Fotografías___ Grabaciones en discos_Ilustraciones en general_ X
Grabados___Láminas___Litografías___Mapas___Música impresa___Planos___
Retratos___Sin ilustraciones___Tablas o Cuadros___

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

No

MATERIAL ANEXO:

No



PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

- | | <u>Español</u> | <u>Inglés</u> |
|----|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. | <u>Cosmología</u> | <u>Cosmology</u> |
| 2. | <u>Inflación cósmica</u> | <u>Cosmic Inflation</u> |
| 3. | <u>Big Bang</u> | <u>Big Bang</u> |

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El modelo estándar cosmológico, también conocido como el modelo del Big Bang, es un marco teórico que describe la evolución y la estructura del universo a gran escala desde su origen hasta el presente. Se trata del paradigma dominante en la cosmología moderna, donde se apoya a través de las observaciones, lo cual nos brinda una comprensión de la evolución del universo. Sin embargo, a pesar de los éxitos del modelo estándar cosmológico para nuestra comprensión del universo, enfrenta una serie de problemas. En el presente trabajo se expondrán los principales problemas del modelo estándar cosmológico y, como una fase temprana de expansión exponencial, el modelo estándar cosmológico inflacionario, aborda estos problemas.

	UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS						
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 4

Para ello, se analizará el modelo Friedmann-Robertson-walker, así como las ecuaciones de campo inflacionario, detallando las características esenciales de la evolución de nuestro universo en esa etapa. Para realizar lo anterior, se examinará la métrica Robertson-Walker, donde derivamos las componentes geométricas de las ecuaciones de campo de Einstein para tener la parte de curvatura de las ecuaciones de campo. Posteriormente, empleamos el tensor energía-momento para un fluido perfecto con el fin de generar las ecuaciones de Friedmann, encontrando los problemas del modelo estándar cosmológico. Por último, se tiene en cuenta la dinámica del campo escalar, la cual describe las soluciones a los problemas del modelo estándar cosmológico.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The cosmological standard model, also known as the Big Bang model, is a theoretical framework that describes the evolution and structure of the large-scale universe from its origin to the present. It is the dominant paradigm in modern cosmology, where it is supported through observations, which gives us an understanding of the evolution of the universe. However, despite the successes of the standard cosmological model for our understanding of the universe, it faces a number of problems. In the present work the main problems of the cosmological standard model will be exposed and, as an early phase of exponential expansion, the inflationary cosmological standard model addresses these problems. To do this, the Friedmann-Robertson-walker model will be analyzed, as well as the inflationary field equations, detailing the essential characteristics of the evolution of our universe at that stage. To do the above, the Robertson-Walker metric will be examined, where we derive the geometric components of Einstein's field equations to have the curvature part of the field equations. Subsequently, we use the energy-momentum tensor for a perfect fluid in order to generate the Friedmann equations, finding the problems of the standard cosmological model. Finally, the dynamics of the scalar field is taken into account, which describes the solutions to the problems of the standard cosmological model.



APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre presidente Jurado: GONZALO PEDRAZA GUERRERO

Firma: 

Nombre Jurado: HERNANDO GONZALES SIERRA

Firma: 

Nombre Jurado: DUQUEMARIO LONDOÑO

Firma: 

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



**LA ESTRUCTURA DEL MODELO ESTÁNDAR
COSMOLÓGICO INFLACIONARIO**

Trabajo de Grado para optar al título de Físico(a)

Desarrollado por: Andrés David Galindo Méndez

Código: 20172162174

Firma: _____

Director: PhD. Pedro Mario Cañate Casseres

Firma: _____

Área: Física teórica

Neiva-Huila
12 de mayo de 2024

DEDICATORIA

A mi estimado amigo Ivan, quien llevo en mi memoria por cada momento compartido durante mi carrera universitaria, junto con mis amigos Brian y Germán, quienes para mí representaron una grata compañía en mi formación como estudiante y persona. A mi novia Vannessa, por brindarme su apoyo y confianza durante mi realización de tesis. A mi querida madre, Mayerly, que en el día a día, con su presencia, apoyo y afecto, me impulsaba para salir adelante. Le agradezco profundamente todo lo que has hecho por mí.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría expresar mi gratitud a mis padres por el apoyo que me han brindado durante mi carrera universitaria, la paciencia que han tenido conmigo, y a mis hermanas, quienes han sido parte de mi motivación por su compañía y amor. Asimismo, expreso mi gratitud a mis colegas de estudio, especialmente a mis amigos Brian, Germán y Duván, quienes me han brindado su valiosa comprensión y sincera amistad. En particular, a mi director de tesis, quien es un distinguido docente y asesor. Agradezco a todas las personas que han estado presentes durante mi trayecto de vida y durante el transcurso de esta magnífica carrera.

RESUMEN

El modelo estándar cosmológico, también conocido como el modelo del Big Bang, es un marco teórico que describe la evolución y la estructura del universo a gran escala desde su origen hasta el presente. Se trata del paradigma dominante en la cosmología moderna, donde se apoya a través de las observaciones, lo cual nos brinda una comprensión de la evolución del universo. Sin embargo, a pesar de los éxitos del modelo estándar cosmológico para nuestra comprensión del universo, enfrenta una serie de problemas. En el presente trabajo se expondrán los principales problemas del modelo estándar cosmológico y, como una fase temprana de expansión exponencial, el modelo estándar cosmológico inflacionario, aborda estos problemas. Para ello, se analizará el modelo Friedmann-Robertson-walker, así como las ecuaciones de campo inflacionario, detallando las características esenciales de la evolución de nuestro universo en esa etapa. Para realizar lo anterior, se examinará la métrica Robertson-Walker, donde derivamos las componentes geométricas de las ecuaciones de campo de Einstein para tener la parte de curvatura de las ecuaciones de campo. Posteriormente, empleamos el tensor energía-momento para un fluido perfecto con el fin de generar las ecuaciones de Friedmann, encontrando los problemas del modelo estándar cosmológico. Por último, se tiene en cuenta la dinámica del campo escalar, la cual describe las soluciones a los problemas del modelo estándar cosmológico.

ABSTRACT

The cosmological standard model, also known as the Big Bang model, is a theoretical framework that describes the evolution and structure of the large-scale universe from its origin to the present. It is the dominant paradigm in modern cosmology, where it is supported through observations, which gives us an understanding of the evolution of the universe. However, despite the successes of the standard cosmological model for our understanding of the universe, it faces a number of problems. In the present work the main problems of the cosmological standard model will be exposed and, as an early phase of exponential expansion, the inflationary cosmological standard model addresses these problems. To do this, the Friedmann-Robertson-walker model will be analyzed, as well as the inflationary field equations, detailing the essential characteristics of the evolution of our universe at that stage. To do the above, the Robertson-Walker metric will be examined, where we derive the geometric components of Einstein's field equations to have the curvature part of the field equations. Subsequently, we use the energy-momentum tensor for a perfect fluid in order to generate the Friedmann equations, finding the problems of the standard cosmological model. Finally, the dynamics of the scalar field is taken into account, which describes the solutions to the problems of the standard cosmological model.

Índice General

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivos del Trabajo de Grado	2
1.1.1. Objetivo General	2
1.1.2. Objetivos Específicos	2
1.2. Conceptos de la Teoría de la Relatividad de Einstein	2
1.2.1. Relatividad Especial	3
1.2.2. Postulados de la Relatividad Especial	3
1.2.3. Métrica Euclidiana	3
1.2.4. Métrica de Minkowski	4
1.2.5. Relatividad General	4
1.2.6. Símbolos de Christoffel	5
1.2.7. Tensor de Riemann	5
1.2.8. Tensor y escalar de Ricci	6
1.2.9. Tensor Energía-Momento	6
1.2.10. Soluciones Exactas de la ecuación de campo de Einstein	7
2. Modelo estándar cosmológico	8
2.1. Cosmología	8
2.1.1. Historia térmica del universo	8
2.1.2. Principio cosmológico	9
2.1.3. Ley de Hubble	10
2.1.4. Deducción de la métrica Robertson-Walker	11
2.2. Cosmología FRW	13
2.2.1. Dinámica del universo: Ecuaciones de Friedmann	15
2.3. Contenido del universo	18
2.3.1. Materia	18
2.3.2. Radiación	18
2.3.3. Energía Oscura	18
2.3.4. Universo compuesto	19
2.3.5. Tiempo conforme - Horizonte de partículas	21
2.4. Problemas de la cosmología estándar	24
2.4.1. Problema de Planitud	24
2.4.2. Problema del Horizonte	26
2.4.3. Problema de las Reliquias no deseadas	27

3. Modelo estándar cosmológico inflacionario	28
3.1. Inflación	28
3.1.1. Inflación generada por un campo escalar	28
3.1.2. Condiciones Slow-Roll	31
3.1.3. Cantidad de Inflación	33
3.2. Solución a los problemas del modelo estándar cosmológico	34
3.2.1. Solución del problema de la planitud	34
3.2.2. Solución del problema del horizonte	35
3.2.3. Solución del problema de las reliquias no deseadas	35
4. Conclusiones	36

Índice de Figuras

2.1. Ley de Hubble: velocidad de recesión trazada contra la distancia para una muestra de galaxias [1].	11
2.2. En un espacio-tiempo condicionado por la materia, el universo puede ser clasificado en hipersuperficies espaciales, planas, esféricas (curvadas positivamente), o hiperbólicas (curvadas negativamente) [2].	12
2.3. El ds medido para (a) un plano y (b) superficie de una esfera [3].	12

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La cosmología es una disciplina física que se centra en estudiar la dinámica y estructura del universo a través de la creación de bases matemáticas y observacionales, con el propósito de describir los modelos de nuestro universo, tanto de su origen como de su evolución. En este sentido, se fundamenta el principio cosmológico, el cual establece que el universo es homogéneo e isotrópico a gran escala, siguiendo estos principios de homogeneidad e isotropía estos modelos se fundamentan en la teoría de la relatividad general de Einstein, dado que se enfocan en la estructura del espacio-tiempo y su evolución con el tiempo, en adición, las observaciones son de suma importancia, puesto que nos permiten refinar los modelos matemáticos para el análisis de nuestro universo y su evolución, siendo fundamental la ley de Hubble.

Hubble observó que las galaxias se alejaban a gran velocidad, constatando que no existe un observador idóneo en el universo, puesto que el universo luce igual en todas direcciones, lo que provoca una isotropía. Pero si el universo es isotrópico desde cualquier punto de vista, quiere decir que es también homogéneo [4], el universo luce de la misma manera desde cualquier punto, hay homogeneidad, por otro lado, Alexander Friedmann, Robertson y Walker contribuyeron a elaborar una métrica que modelara el principio cosmológico, destacando Friedmann con su modelo de un universo en expansión, se destaca que en este universo de expansión se presentan tres tipos distintos de universos, tales como un universo sin curvatura (universo plano), un universo con curvatura positiva (universo esférico) y un universo con curvatura negativa (universo hiperbólica). Lo que Robertson-Walker hacen es presentar un modelo en expansión, mejorando la estructura de la métrica de nuestro universo, mediante la utilización de las ecuaciones de Einstein y Friedmann, logran establecer un modelo cosmológico, esto demuestra que la solución FRW es la única que describe un universo isotrópico y homogéneo. Esto se ha demostrado mediante el descubrimiento del fondo cósmico de microondas (en inglés, Cosmic Microwave Background o CMB) y experimentos como COBE, WMAP, PLANCK y LIGO constatan el importante avance teórico y experimental en la cosmología [5]. Se cree que esta radiación es la luz más antigua del universo, emitida hace unos 13,400 millones de años, cuando el universo primigenio estaba formado por una sopa caliente de protones, electrones y fotones [6]. Si detectamos fotones de baja energía, se trata de fotones fósiles que, a medida que el universo se expande, esta radiación se ha desplazado hacia las longitudes de onda de las microondas, lo cual equivale a una temperatura de 2.7 grados Kelvin. El mapa del CMB representa la temperatura debido a estos fotones microondas del espacio, que presentan fluctuaciones en la temperatura, algunas de las cuales son consecuencia de regiones que experimentaban una densidad de energía ligeramente diferente en los instantes cercanos al origen del Universo. No sabemos si hay un tiempo cero, se pueden derivar las ecuaciones que impulsan la expansión del universo y si se

extrapolan estas ecuaciones a un tiempo cero, se puede crear un punto singular en el que el espacio y el tiempo habrían tenido un comienzo, el cual sería el Big Bang. Aunque no se puede afirmar, porque no lo podemos observar, sin embargo, a partir de un momento que se puede denominar tiempo cero, se puede inferir que existe un campo de inflación cuántico, donde se cree que todas las estructuras, tales como estrellas y galaxias, adquirieron un origen cuántico, donde posteriormente fueron amplificadas por la gravedad. Por lo cual, a través del CMB tenemos datos observacionales indirectos sobre el comportamiento de la gravedad y la mecánica cuántica, los cuales conviene que sean analizados por una teoría de gravedad cuántica [6]. A partir de las observaciones y suponiendo que el universo se ha comportado igual durante toda su evolución, puede retrocederse hasta el “inicio del tiempo” $a(0)=0$ en el que todo el Universo se reduce a la singularidad del Big Bang [7]. Sin embargo, ciertos análisis teóricos presentan resultados que no cumplen con las predicciones del modelo estándar. Estos resultados se pueden identificar como problemas del modelo cosmológico estándar, tales como el problema de Planitud, problema del Horizonte y problema de las Reliquias no Deseadas. Con el fin de solventar estos problemas, resulta frecuente considerar una época de expansión acelerada en el universo temprano. En la década de los 80, Alan Guth presentó la teoría inflacionaria, un modelo cosmológico que solventaría estos problemas. El ámbito de la teoría inflacionaria ha cambiado desde entonces, moldeado principalmente con ayuda de la física de partículas, y aunque hoy en día no existe ninguna prueba contundente que apoye la teoría, actualmente es considerada como parte del modelo cosmológico del Big Bang, ya que tampoco hay alguna evidencia que la refute [8]. Este trabajo se enfoca en la investigación de los problemas de la cosmología estándar, la teoría inflacionaria y la solución que ofrece a cada uno de estos problemas.

1.1. Objetivos del Trabajo de Grado

1.1.1. Objetivo General

- Discutir los problemas de la cosmología estándar no inflacionaria y su solución mediante el campo inflacionario.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Entender en qué consiste el modelo estándar cosmológico inflacionario.
- Conocer el estudio de la cosmología en física y sus aportes de la comprensión del universo.

1.2. Conceptos de la Teoría de la Relatividad de Einstein

El modelo cosmológico estándar representa el modelo que mejora la comprensión de nuestro universo. En primera instancia, se llevará a cabo una revisión de los conceptos de la teoría de la Relatividad de Einstein, en la cual se presentará una breve explicación de la teoría especial de la Relatividad, donde se trata de dar un enfoque geométrico a la Relatividad Especial, incluyendo conceptos como la métrica euclidiana y la métrica de Minkowski. Posteriormente, se procede a la introducción de la teoría de la Relatividad General, en la cual se hará una revisión de los conceptos principales de la teoría de la Relatividad General, tales como los símbolos de Christoffel, el tensor de curvatura de Riemann y otros objetos matemáticos que son indispensables para establecer las ecuaciones de campo de Einstein.

1.2.1. Relatividad Especial

Desde el siglo XVII, Galileo introdujo el elemento clave para la Relatividad: el principio de Relatividad. En su versión, establece que todas las leyes físicas son las mismas en cualquier sistema, moviéndose con una velocidad uniforme con respecto a otro sistema en reposo absoluto [9] posteriormente, nos dirigimos a estos como sistemas inerciales. La mecánica de Newton se fundamentó con base en este principio, no obstante, la investigación de la electrodinámica y la capacidad de E y B para satisfacer la ecuación de onda en vacío, propicio un cambio paradigmático. Esto fue una evidente indicación de que la luz está gobernada por los campos E y B. Finalmente, estas ecuaciones de onda no son invariantes debido a las transformaciones que Galileo y Newton plantearon para establecer una relación entre los puntos de vista de observadores inerciales, siendo esto el fundamento para que Einstein formulara la teoría de la Relatividad Especial. La teoría Especial de la Relatividad, a través de los conceptos newtonianos de espacio-tiempo, la equivalencia de masa y energía que unen la conservación de materia y energía, constituyen uno de los descubrimientos más significativos de la Relatividad Especial, dado que se sostiene que la materia es una forma de energía.

1.2.2. Postulados de la Relatividad Especial

- La velocidad de la luz en el vacío es constante e independiente si el observador está en reposo o en movimiento.
- Las leyes de la física son las mismas para todos los sistemas inerciales.

La teoría Especial de la Relatividad no fue concebida hasta la aparición del matemático alemán Hermann Minkowski, quien desarrolló la estructura de la teoría Especial de la Relatividad, que incluía el cono de luz, la métrica y las transformaciones de Lorentz, que convirtió el espacio-tiempo de Einstein en un espacio-tiempo distinto al de Newton. En el cual se emplea la geometría Euclidiana como base para la descripción del espacio-tiempo de Minkowski.

1.2.3. Métrica Euclidiana

En la geometría Euclidiana, el concepto métrico es fundamental, ya que la geometría de un espacio se caracteriza por su métrica. Una métrica es una definición de la distancia que separa dos puntos cualesquiera infinitamente próximos entre sí en el espacio [10]. El concepto de distancia es no euclidiano y para ello, se acude al cálculo tensorial porque esta ofrece una herramienta que estudia formulaciones tanto euclidianas como no euclidianas [11]. En términos generales, una métrica es una forma matemática que nos indica como medir la distancia en un espacio o en un cuerpo geométrico. En coordenadas cartesianas el tensor métrico es igual al delta de Kronecker $g_{ij}=\delta_{ij}$ el cual tiene dos valores

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

En el espacio Euclidiano, en coordenadas cartesianas, el elemento de línea viene dado

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2)$$

En el cual, la métrica se puede escribir de manera general

$$ds^2 = \delta_{11}dx^1dx^1 + \delta_{22}dx^2dx^2 + \delta_{33}dx^3dx^3 \quad (1.3)$$

Quedando el elemento de línea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.4)$$

Donde (1.4) los valores $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$.

1.2.4. Métrica de Minkowski

En la métrica de Euclides, el espacio se caracteriza por ser tridimensional, mientras que, en la Relatividad Especial, se convierte en un espacio tetradimensional. Se conoce como métrica de Minkowski y se trata de una métrica que se aplica a un espacio-tiempo plano; El elemento de línea en coordenadas cartesianas en un espacio tetradimensional se indica mediante la expresión

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.5)$$

Asimismo, es común expresarla como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1.6)$$

Donde $\eta_{\mu\nu}$ puede extraerse como una matriz diagonal de 4x4, siendo $\eta_{00} = -1$ para la parte temporal y $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ para la parte espacial. Para el caso de coordenadas esféricas, se tiene

$$t = t \quad (1.7)$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (1.8)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (1.9)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.10)$$

Se lleva a cabo una transformación de coordenadas, obteniendo así la métrica de Minkowski (1.5) en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1.11)$$

En este trabajo asumiremos que la signatura del tensor métrico es $(-, +, +, +)$.

1.2.5. Relatividad General

A comienzos del siglo XX se publicó la teoría Especial de la Relatividad. Esta teoría se fundamentó en dos postulados importantes, los cuales son los postulados de Einstein. No obstante, Einstein comenzó a tratar de extender la Relatividad Especial a la Relatividad General, a través de la presencia de marcos acelerados o gravitatorios. Esto modificaría la comprensión de la estructura de la gravitación con la teoría General de la Relatividad. En este sentido, se sugiere que no se trata de marcos de referencia inerciales, sino de marcos que presentan una aceleración significativa en comparación con otros, donde se presentan conceptos como el principio de equivalencia, el principio de covarianza y la curvatura del espacio-tiempo. Asimismo, se

considera la gravedad como una representación de la geometría del espacio-tiempo generado por la materia, cuya interacción es a la velocidad de la luz. En términos generales, la Relatividad General busca una descripción geométrica del espacio-tiempo y de la gravitación. Se considera que el espacio-tiempo no necesariamente debe ser plano, sino que también puede ser curvo. Esa curvatura, del espacio-tiempo, produce efectos físicos sobre la materia; dichos efectos son generalmente asociados a un campo gravitacional. Por otro lado, la presencia de curvatura en el espacio-tiempo se relaciona con la presencia de la materia contenida en él mediante el tensor de energía-momento. De lo anterior se puede expresar como: la materia le indica al espacio-tiempo como curvarse y, a su vez, la geometría le dice a la materia como moverse. Esta relación se puede apreciar en las ecuaciones de campo de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tenso de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, R el escalar de Ricci, G es la constante de gravitación universal y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

1.2.6. Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (1.13)$$

Los símbolos $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ son simétricos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \quad (1.14)$$

La asignación de una métrica resulta difícil de discernir si el contenido de esta posee curvatura, ya que una variedad plana puede presentar una complejidad en diversos sistemas de coordenadas. Por consiguiente, se emplea la métrica para identificar la conexión, que es la manifestación de la curvatura en una variedad [3].

Los símbolos de Christoffel son de suma importancia para comprender el movimiento de partículas libres cayendo en un campo gravitatorio. Estas partículas siguen las trayectorias determinadas por las geodésicas

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0. \quad (1.15)$$

1.2.7. Tensor de Riemann

Se obtiene el tensor de curvatura de Riemann a partir de la conexión métrica, el cual reúne toda la información de la curvatura de una variedad en un punto cualquiera [3]. El tensor de Riemann viene dado

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\beta}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \quad (1.16)$$

En una variedad con geometría plana se tiene

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = 0 \quad (1.17)$$

Esto indica que el tensor de Riemann es un objeto matemático que está relacionado con la curvatura [12]. Las componentes del tensor de Riemann cumplen algunas condiciones de simetría

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = -R_{\lambda\nu\mu}^{\alpha} \quad (1.18)$$

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha} + R_{\nu\lambda\mu}^{\alpha} = 0 \quad (1.19)$$

$$R_{\beta\lambda\mu\nu} = -R_{\beta\lambda\nu\mu} \quad (1.20)$$

$$R_{\beta\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\beta\lambda} = R_{\nu\mu\lambda\beta} \quad (1.21)$$

Dado las simetrías, en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, el tensor de Riemann dispone de 20 componentes independientes de sus 256 componentes. Asimismo, las componentes del tensor de Riemann cumplen con la identidad de Bianchi

$$\nabla_{\beta}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} + \nabla_{\rho}R_{\mu\sigma\beta}^{\alpha} + \nabla_{\sigma}R_{\mu\beta\rho}^{\alpha} = 0 \quad (1.22)$$

1.2.8. Tensor y escalar de Ricci

El tensor de Riemann proporciona información específica acerca de la curvatura de una variedad, en la cual una forma simplificada de este tensor nos proporciona información relevante para describir la curvatura en términos de sus características más generales, específicamente el tensor de Ricci, el cual describe las curvaturas más específicas de la variedad. Al aplicar la contracción de dos índices del tensor de Riemann se obtiene las componentes del tensor de Ricci

$$R_{\lambda\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\lambda\nu} \quad (1.23)$$

El tensor de Ricci es simétrico

$$R_{\lambda\nu} = R_{\nu\lambda} \quad (1.24)$$

La traza del tensor de Ricci recibe el nombre de escalar de curvatura de Ricci R

$$R_{\lambda\nu}g^{\lambda\nu} = R_{\lambda}^{\lambda} = R \quad (1.25)$$

El escalar de curvatura de Ricci se define como una magnitud fija en cada punto de una variedad, lo que sugiere que este sea único en cualquier sistema de coordenadas [13].

1.2.9. Tensor Energía-Momento

En la teoría Newtoniana, la fuente del campo gravitatorio es la densidad de materia. En Relatividad General, para describir el flujo de energía y el momento lineal de una distribución continua de materia se utiliza el tensor de energía-momento [12]. A fin de estudiar la dinámica de la energía y materia que llenan el espacio, se pueden modelar como un fluido perfecto con 4-velocidad U^{μ} , densidad de energía o materia ρ y presión p en el sistema de referencia del propio fluido. De tal modo, es factible describir esta materia y energía a través del tensor energía-momento

$$T^\mu_\nu = (p + \rho) U^\mu U_\nu - p \delta^\mu_\nu \quad (1.26)$$

La 4-velocidad del fluido en el sistema de referencia estático del fluido será:

$$U^\mu = U_\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (1.27)$$

De modo que la traza del tensor energía-momento es

$$T = T^\mu_\mu = \rho - 3p \quad (1.28)$$

Utilizando la conservación del tensor energía-momento

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.29)$$

Se observa que la parte espacial es idénticamente 0 ($\nabla_\nu T^{i\nu} = 0$), pero de la parte temporal se obtiene la ecuación de continuidad

$$\nabla_\nu T^{0\nu} = \dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.30)$$

1.2.10. Soluciones Exactas de la ecuación de campo de Einstein

De la sección Relatividad General se puede observar que las ecuaciones de campo de Einstein (1.12), describen la curvatura del espacio-tiempo debido a la distribución de materia y energía presentes en el universo. Estas ecuaciones de campo no son lineales para la métrica, ya que se fundamentan en la concentración de materia y energía que deforman la geometría del espacio-tiempo. Además, las ecuaciones de campo son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales para las 10 ecuaciones que definen la métrica [14]. Para resolver estas ecuaciones, se emplean simetrías que dependan del modelo. Uno de los modelos que permiten la resolución de las ecuaciones de Einstein es el modelo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), el cual se examinara en el capítulo siguiente.

Capítulo 2

Modelo estándar cosmológico

Este capítulo presenta el modelo estándar cosmológico, en el cual se fundamenta en el marco de la Relatividad General y la métrica Friedmann-Robertson-Walker. A causa de que el modelo cosmológico estándar es el más aceptado en la actualidad, se considera fundamental que el espacio-tiempo a gran escala sea homogéneo e isotrópico, lo cual se traduce como el principio cosmológico. Esto se fundamenta en diversas evidencias observacionales, tales como la distribución de galaxias a gran escala y en el fondo cósmico de microondas (CMB). En primera instancia, esto posibilita una simplificación significativa en la descripción del universo, obteniendo que el universo pueda ser representado por el modelo FRW. Por consiguiente, se procederá una explicación de la métrica FRW, en la cual se considerarán las ecuaciones de campo, el contenido de materia del universo que puede ser representada por un fluido perfecto de densidad ρ y presión p , y posteriormente, se obtendrán las ecuaciones de Friedmann. A pesar de que el modelo cosmológico estándar otorga una explicación satisfactoria a diversas observaciones, aún existen inconvenientes difíciles de explicar dentro del modelo estándar, los cuales se conocen como los problemas de la cosmología estándar [8]. A través de las herramientas que se presentarán en este capítulo, se examinarán las causas de estos problemas.

2.1. Cosmología

2.1.1. Historia térmica del universo

En la actualidad, la comprensión de nuestro universo se fundamenta en el modelo cosmológico estándar, concretamente en la teoría del Big Bang, que explica la evolución del universo desde la primera fracción de segundo hasta la edad actual. De acuerdo con la teoría del Big Bang, se estima que la edad del universo es de 13.700 millones de años. En su etapa inicial, tenía un volumen ínfimo y se hallaba en un estado denso y caliente. A partir de entonces, ha estado expandiéndose y enfriándose, en un proceso que, a lo largo de miles de millones de años, ha dado lugar a los átomos, las estrellas y las galaxias que conforman el universo actual [15]. La presente teoría se fundamenta en la Relatividad General y en tres acontecimientos empíricos: la expansión del universo descubierto por Hubble, mediante la recesión de las galaxias a una velocidad proporcional a su distancia de nosotros; la abundancia relativa de elementos ligeros, explicados por Gamow, principalmente de hidrógeno, helio y litio, creados pocos minutos después de la expansión, y la existencia del Fondo cósmico de microondas (CMB). Esa radiación fue emitida en todos los puntos del espacio hace unos, 13.9 mil millones de años a temperatura de 3000k. En la actualidad, las observaciones realizadas se corroboran con gran precisión, lo cual contribuye

a establecer el Big Bang como un modelo para describir nuestro universo [15] [16].

La cosmología se conoce como la historia de aproximadamente 14 mil millones de años de evolución cósmica. En una época temprana, el universo experimentaba una temperatura caliente y densa, donde las interacciones entre partículas eran frecuentes y energéticas. La materia estaba compuesta por electrones libres y núcleos atómicos, donde los fotones se encontraban confinados, rebotando entre electrones y núcleos. Durante el proceso de enfriamiento del plasma, se produjo la formación de elementos ligeros, siendo esta la época de recombinación [16]. Al disminuir la energía suficiente para que los primeros átomos estables se originen, se produjo la expulsión de los fotones para propagarse por el espacio y atravesar grandes distancias. Después de miles de millones de años, la radiación aún continúa llegando hacia nosotros, siendo la luz más antigua que se puede observar. Antes de ser emitida, el universo en sus primeras fases era opaco, hasta que la temperatura descendió lo suficiente para permitir la propagación de los fotones de forma libre, lo que propicia un universo transparente. Esto supone que, en sus inicios, el universo podía ser considerado como un cuerpo negro ideal, generando radiación de cuerpo negro, la cual finalmente se emitió en la superficie de la última dispersión. Tal radiación de cuerpo negro fue detectada de manera accidental por Penzias y Wilson, y posteriormente fue examinada por diversos experimentos, tales como COBE, BOOMERANG, WMAP, PLANCK y BICEP2 [6].

2.1.2. Principio cosmológico

Un rasgo característico del universo radica en su elevada homogeneidad e isotropía espacial a grandes escalas [17]. En términos más precisos, el universo visible parece el mismo en todas las direcciones que nos rodean. La isotropía es mucho más precisa, la cual se evidencia por una amplia variedad de observaciones, tal como se ha mencionado anteriormente, cosmic microwave background (CMB), o radiación de fondo de microondas. Esta radiación que ha transitado hacia nosotros es la que nos confirma que el universo, a grandes distancias, es casi el mismo en todas las direcciones.

Las observaciones realizadas en este contexto corroboran las hipótesis que en la actualidad se han formulado como el principio cosmológico. La métrica del universo puede ser interpretada como un conjunto de hipersuperficies (superficies tridimensionales) espaciales, cada una homogénea e isótropa que representan el universo a un tiempo t constante, que describen la evolución en el tiempo. Por homogeneidad, comprendemos que todos los puntos de la superficie son iguales, no hay ningún punto privilegiado. La presente afirmación implica que la métrica de la superficie posee una simetría que permite establecer una conexión entre cualesquiera de los dos puntos de la superficie mediante una transformación de simetría. Por lo lado, la isotropía de la superficie implica que no existe ninguna dirección privilegiada, y que las superficies tienen el mismo aspecto en todas las direcciones. Esto significa que la métrica de la superficie es esféricamente simétrica [18].

No obstante, en las regiones cercanas del universo, no se presentan características uniformes o consistentes entre sí, con material agrupado en estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Se sostiene que estas estructuras han sido formadas a lo largo del tiempo mediante la atracción gravitacional, a partir de una distribución que en el pasado era más homogénea. Se estima que el universo en la actualidad es homogéneo e isotrópico a escalas superiores a los 100Mpc [16].

Una extensión del principio cosmológico se conoce como principio cosmológico perfecto que no solo aplicaría al espacio, sino también al tiempo: el universo es y siempre ha sido homogéneo e

isotrópico. El principio cosmológico perfecto se traduce en un modelo cosmológico denominado la teoría del estado estacionario como una alternativa a la teoría del Big Bang. Esta teoría describe un universo cuyas propiedades generales han sido siempre las mismas, constantes tanto en el espacio como en el tiempo. No obstante, con el descubrimiento del CMB, la teoría del universo estacionario se torna prácticamente descartada, ya que si el universo ha sido siempre el mismo, no existe ningún motivo para que se produzca una radiación de fondo con características térmicas [8].

2.1.3. Ley de Hubble

La evidencia observacional en cosmología indica que las galaxias se están alejando unas de otras [19] [20]. La velocidad a la que se alejan, conocida como velocidad recesión, se mide a través de lo que se conoce como corrimiento al rojo, que se produce por la expansión del espacio, el cual es el efecto Doppler a ondas de luz. Si una galaxia se aleja, las líneas características de su espectro electromagnético tienden a correrse al color rojo, lo cual se le conoce como corrimiento al rojo y, en ocasiones, hacia el azul, que es cuando una galaxia se aproxima. Para medir la velocidad a la que se alejan las galaxias, el corrimiento al rojo z viene dado por

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} \quad (2.1)$$

Donde λ_{em} y λ_{obs} son, respectivamente, las longitudes de onda de la radiación emitida y observada. Se puede describir un corrimiento azul si $z < 0$, y un corrimiento al rojo si $z > 0$. Para corrimiento al rojo pequeños, z se relaciona con la velocidad \vec{v} del objeto que se aleja mediante $\vec{v} = cz$.

Durante 1929, Edwin Hubble usó esta relación para calcular la velocidad de recesión de una muestra de galaxias cercanas. Tras examinar su distancia, una medida aún más compleja, elaboró una ley sencilla que describe la expansión del universo: la ley de Hubble, la cual establece que la velocidad de recesión aparente de una galaxia es proporcional a su distancia al observador [1].

$$\vec{v} = cz = H_0 \vec{r} \quad (2.2)$$

Donde la velocidad de recesión se puede escribir como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, y se mueve en la misma dirección que \vec{r} , de modo que podemos escribir la velocidad de recesión utilizando coordenadas comóviles $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{x} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$, quedando la expresión (2.2), en la que H_0 es la constante de Hubble [20]; no obstante, solo es constante en posición, más no en tiempo, debido a la dependencia temporal. Por lo tanto, podemos identificarla como parámetro de Hubble.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3)$$

La ley de Hubble es fundamental porque describe un universo en expansión.

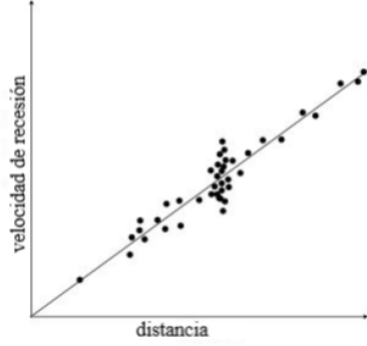


Figura 2.1: Ley de Hubble: velocidad de recesión trazada contra la distancia para una muestra de galaxias [1].

En la figura (2.1) se muestra un gráfico típico de la velocidad de recesión en frente a la distancia para una representación de las galaxias. El gradiente de la línea, es decir, la velocidad de recesión dividida por la distancia, proporciona el valor de la constante de Hubble, siendo H_0 la pendiente de la curva y el parámetro de Hubble (2.3). La estimación original de Hubble era $H_0 = 500 \text{ Kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. No obstante, subestimo la distancia de las galaxias a la Tierra. Las estimaciones recientes dan un valor $H_0 = 70,4 \text{ Kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [1].

2.1.4. Deducción de la métrica Robertson-Walker

Se puede observar una alteración en la apariencia de los objetos a distancias cosmológicas debido a la curvatura del espacio-tiempo que atraviesa la luz en su trayecto hacia la tierra. Como se ha podido apreciar con anterioridad, la teoría de la Relatividad General proporciona una descripción más detallada de las propiedades geométricas del universo (1.12).

La magnitud fundamental de la teoría de la Relatividad de Einstein es la métrica que indica la geometría del espacio-tiempo. Sí, nos referimos a un espacio tridimensional en un plano (1.4).

En un espacio tridimensional, se puede evaluar la distancia a lo largo de la trayectoria curva entre dos puntos a través de la métrica. Asimismo, para medir una trayectoria a lo largo de una línea curva que une dos eventos en el espacio-tiempo sin masa presente, se emplea la métrica para el espacio-tiempo plano (1.5).

La exploración del espacio-tiempo lleno de materia se logra mediante el principio cosmológico. A pesar de que la curvatura del espacio-tiempo puede variar con el transcurso del tiempo, debe tener el mismo valor en todas las partes en un momento específico desde el momento del Big Bang.

La curvatura en la superficie de una esfera se define como $K \equiv \frac{1}{R^2}$. Sin embargo, una forma más general de la curvatura en un espacio bidimensional es [21].

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{2\pi D - C}{D^3} \quad (2.4)$$

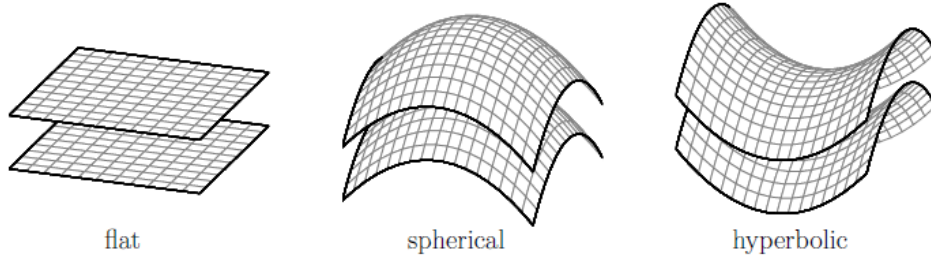


Figura 2.2: En un espacio-tiempo condicionado por la materia, el universo puede ser clasificado en hipersuperficies espaciales, planas, esféricas (curvadas positivamente), o hiperbólicas (curvadas negativamente) [2].

En la hipersuperficie plana, la circunferencia sería $C = 2\pi D$; en la hipersuperficie esférica, $C < 2\pi D$; en la hipersuperficie hiperbólica $C > 2\pi D$, respectivamente [21].

La distancia entre dos puntos, P_1 y P_2 , en la superficie de una esfera, está dada por

$$ds^2 = dD^2 + r^2 d\phi^2 = R^2 d\theta^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.5)$$

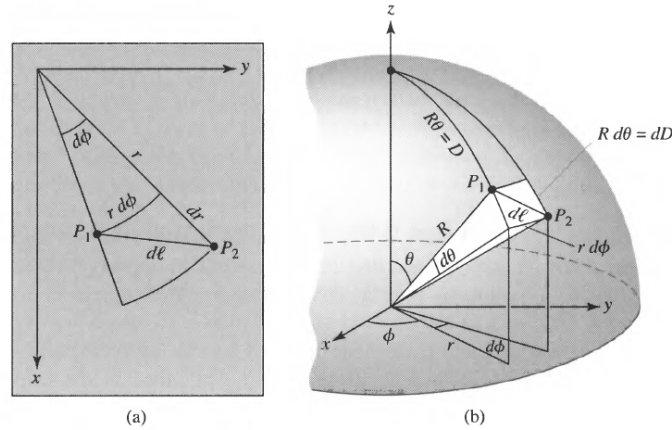


Figura 2.3: El ds medido para (a) un plano y (b) superficie de una esfera [3].

Donde $r = R \sin \theta$, entonces $dr = R \cos \theta d\theta$

$$R d\theta = \frac{dr}{\cos \theta} = \frac{R dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la distancia diferencial en la superficie de la esfera puede definirse como

$$ds^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \right)^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.7)$$

En relación con las coordenadas polares planas, la curvatura K de una superficie bidimensional es

$$ds^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (2.8)$$

Esto puede ampliarse a tres dimensiones, cambiando de coordenadas polares a esféricas [21].

$$ds^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.9)$$

Donde r es ahora la coordenada radial. La ecuación previamente mencionada exhibe el efecto de la curvatura de nuestro universo tridimensional en las distancias espaciales. El avance final hacia la métrica del espacio-tiempo proviene de la distancia entre dos eventos espacio-temporales que ocurren simultáneamente, según el observador. En un universo expansivo, las posiciones de dos puntos deben ser registradas simultáneamente con el fin de que su separación tenga un significado alguno. No existe ninguna razón para que el tiempo deba transcurrir a diferentes velocidades en diferentes lugares en un universo isotrópico y homogéneo; por consiguiente, el término temporal es $-cdt$. Entonces, la métrica se convierte [21].

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.10)$$

Ahora podemos cambiar nuestra coordenada radial a una coordenada comovil según

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{x} \quad (2.11)$$

Dado que la expansión del universo afecta a todas sus propiedades geométricas, incluida su curvatura, también es útil definir la curvatura es dependiente del tiempo en función del factor de escala $a(t)$ y de una constante K independiente del tiempo [21].

$$K(t) = \frac{k}{a^2(t)} \quad (2.12)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (2.13)$$

Donde, por un molesto cambio de notación, r indica ahora la distancia radial comovil. Robertson y Walker demostraron de forma independiente que esta es la métrica más general para describir un universo en expansión, teniendo en cuenta el principio cosmológico [21]. A continuación, se abordará el modelo cosmológico Friedmann-Robertson-Walker (FRW), en el cual se enmarcará el tema de la teoría inflacionaria.

2.2. Cosmología FRW

El modelo cosmológico FRW se fundamenta en el principio cosmológico, el cual nos indica que el universo a grandes escalas es homogéneo e isotrópico, describiendo un universo en expansión o contracción. Para ello, se emplea la métrica RW, la cual es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, además nos describe la dinámica del universo mediante las ecuaciones de Friedmann.

La métrica de Robertson-Walker puede ser escrita como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (2.14)$$

En donde esta forma de la métrica se expresa en términos de las coordenadas (t, r, θ, φ) , llamadas coordenadas comóviles, dado que el universo es altamente homogéneo e isotrópico, el factor de escala solo puede estar en función del tiempo. A medida que el universo se expande o contrae, las coordenadas permanecen constantes y la distancia física entre dos puntos comóviles cualesquiera en el espacio se escala proporcional a $a(t)$ [8]. El tiempo t , es el tiempo propio cosmológico o tiempo cósmico, el parámetro K está relacionado con la curvatura espacial, la cual puede ser elegido entre $K > 0$ para un espacio con curvatura positiva, un universo con este tipo de curvatura corresponde a un universo cerrado; $K < 0$ se trata de un universo abierto para una curvatura negativa o $K = 0$ para espacios con una curvatura cero y un universo plano. También debemos tener en cuenta que c es la velocidad de la luz en vacío. Por simplicidad, se procederá a tomar unidades en las cuales $c = 1$. Una vez que se conoce la métrica, es factible derivar los demás componentes geométricos de las ecuaciones de campo de Einstein. En primer lugar, se procede a identificar las componentes del tensor métrico covariante de la ecuación (2.14).

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Las componentes del tensor métrico contravariante, que están dadas por $(g_{\alpha\beta})^{-1}$, es decir, la matriz inversa

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Considerando la expresión (1.13), se calculan los símbolos de Christoffel no nulos.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{Kr}{1 - kr^2} & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta (1 - Kr^2) & \Gamma_{10}^1 &= \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{30}^3 &= \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{aligned}$$

Con base en nuestros símbolos de Christoffel calculados y haciendo uso de la expresión (1.16), es factible calcular el tensor de Riemann, y de este modo, el tensor de Ricci. Las componentes que no son nulos del tensor de Ricci (1.23) son:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\
R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
R_{33} &= r^2 \sin^2\theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)
\end{aligned}$$

Obteniendo los valores del tensor de Ricci, es factible llevar a cabo el cálculo del escalar de curvatura de Ricci, que se obtiene mediante el producto entre las componentes del tensor de Ricci y el tensor métrico contravariante, tal como se muestra en la expresión (1.25). Realizamos una sumatoria sobre las componentes no nulas del tensor de Ricci.

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad (2.17)$$

Desarrollamos la expresión (2.17) mediante el uso de las componentes de la métrica contravariante y los componentes del tensor de Ricci. Por lo tanto, obtenemos el escalar de curvatura de Ricci.

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (2.18)$$

Ahora que disponemos del tensor y el escalar de curvatura de Ricci, contamos con las herramientas necesarias para calcular las componentes del tensor de Einstein (1.12). En el que solo tomaremos la componente G_{00} .

$$G_{00} = 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \quad (2.19)$$

Se observa que la métrica RW se encuentra definida para cualquier comportamiento del factor de escala. Ahora, teniendo la parte geométrica de las ecuaciones de campo de Einstein, el siguiente paso es encontrar una de las ecuaciones más relevantes de la cosmología: las ecuaciones de Friedmann.

2.2.1. Dinámica del universo: Ecuaciones de Friedmann

Para saber la dinámica del universo y su estructura a gran escala se introduce las ecuaciones de campo de Einstein (1.12), obteniendo para la parte geométrica la expresión (2.19). Para la parte de materia, se considera la presencia de materia y energía del universo como un fluido perfecto. Considerando la expresión (1.26), las componentes del tensor energía-momento son

$$T^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (1.26). De tal modo, las componentes del tensor energía-momento se encuentran en la expresión (2.20). De esta forma, disponemos de todos los elementos que aparecen en las ecuaciones de campo de Einstein (1.12). Se obtienen dos ecuaciones independientes, la primera de ellas para las componentes tensoriales asociadas al tiempo, y la segunda como una traza de las ecuaciones. Por consiguiente, empleamos la ecuación de campo con el fin de obtener la primera ecuación de Friedmann.

Hacemos $\alpha = \beta = 0$. Quedando la expresión (1.12).

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \quad (2.21)$$

Se reemplazan las componentes del tensor de Einstein y del tensor energía-momento, mediante las expresiones (2.19) y (2.20), respectivamente, se obtiene

$$3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] = 8\pi G(\rho) \quad (2.22)$$

O bien de la manera más conocida

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \quad (2.23)$$

De este modo, hemos logrado la primera ecuación de Friedmann. Procederemos ahora a encontrar la segunda ecuación de Friedmann. Para ello, multiplicamos toda la expresión de las ecuaciones de campo (1.12) por el tensor métrico contravariante ($g^{\alpha\beta}$), con el fin de obtener una suma sobre las cantidades tensoriales con ambos índices iguales, es decir, una traza.

Entonces para la parte espacial tomamos los índices $\alpha\beta$ como ij .

$$g^{ij} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \right) \quad (2.24)$$

$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} g_{ij} = 8\pi G g^{ij} T_{ij} \quad (2.25)$$

Los productos $g^{ij} R_{ij}$ y $g^{ij} T_{ij}$ se corresponden a los escalares R y T . Los cuales vienen siendo el escalar de Ricci y la traza del tensor energía-momento. Así mismo, el resultado del tensor métrico y su inversa produce la suma de los elementos de la diagonal de la matriz identidad, por lo tanto, tenemos

$$R - \frac{1}{2} R \delta_i^i = 8\pi G T \quad (2.26)$$

Además,

$$g^{ij} g_{ij} = \delta_i^i = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4 \quad (2.27)$$

Quedando la expresión (2.24)

$$R = -8\pi G T \quad (2.28)$$

Ahora, multiplicamos por $-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}$ en (2.28)

$$-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}8\pi GT \quad (2.29)$$

Si a esto se le asignan la ecuación de campo (1.12), obtendremos

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right) \quad (2.30)$$

Hacemos $\alpha = \beta = 0$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(\rho - \frac{1}{2}(\rho - 3p) \right) \quad (2.31)$$

Al realizar el procedimiento algebraico, se logra llegar a la segunda ecuación de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.32)$$

En las ecuaciones (2.23) y (2.32), la primera y segunda derivada del factor de escala con respecto al tiempo, que se denotan como \dot{a} y \ddot{a} , se refieren a la velocidad y aceleración de la expansión del universo. Esto nos permitirá describir la dinámica del universo. Para esto, es conveniente tener en cuenta la ecuación de Friedmann (2.23) y la ecuación de continuidad (1.30).

Con el fin de resolver la ecuación (1.30), es factible incorporar la ecuación de estado, la cual establece una correlación entre ρ y p . Por ende, definimos la ecuación de estado como:

$$p = \omega\rho \quad (2.33)$$

Donde ω es una constante independiente del tiempo. Ahora que disponemos de la ecuación (2.33), podemos resolver (1.30). Tenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (2.34)$$

Se reemplaza (2.33) en la expresión (2.34), quedando una ecuación diferencial separable

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \omega) \quad (2.35)$$

Se puede integrar la expresión (2.35) respecto al tiempo, se obtiene

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)} \quad (2.36)$$

La expresión (2.36) nos indica como está relacionado la densidad de energía en términos del factor de escala a , y, para comprender como se comporta la densidad con respecto al factor de escala, podemos analizar diferentes valores para ω . Asimismo, los términos que poseen subíndices "0" serán denotados como tiempo actual.

2.3. Contenido del universo

2.3.1. Materia

En el contexto cosmológico, este término se refiere a cualquier forma de materia que cumpla con la condición de que su presión sea mucho menor que su densidad de energía o una presión cero. Se trata de un gas de partícula no relativista, en el cual la densidad de energía es dominante por la masa de las partículas, y se conoce como materia tipo polvo. Algunos ejemplos que pueden ser considerados como materia son la materia bariónica, la cual es la materia que están hechas las galaxias, estrellas, planetas y la materia oscura.

Así, el caso de materia sin presión corresponde $\omega = 0$, la ecuación de estado es entonces

$$p = 0 \quad (2.37)$$

Si se reemplaza $\omega = 0$ en la expresión (2.36), se puede comprender cómo se evoluciona en términos del factor de escala, la densidad de materia.

$$\rho_m = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.38)$$

Esto se interpreta como el decrecimiento en la densidad de partículas a medida que el universo se expande.

2.3.2. Radiación

En la cosmología, se emplea la radiación como un componente del universo cuya presión y densidad de energía se relacionan. En el caso de la presión de radiación $\omega = \frac{1}{3}$, la ecuación de estado para la radiación es

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (2.39)$$

Este es el caso de los gases de partículas relativistas. Como radiación consideramos fotones y neutrones. Reemplazando $\omega = \frac{1}{3}$ en la expresión (2.36), encontramos la evolución de la densidad de energía en términos de factor de escala.

$$\rho_r = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \quad (2.40)$$

La densidad de energía en la radiación disminuye un poco más rápidamente que en la materia. Esto se debe a la reducción del número de fotones en la radiación, a la vez que las partículas no relativistas experimentan una disminución significativa.

2.3.3. Energía Oscura

La mayor parte del universo parece estar dominada por esta componente, que es distinta a la materia y la radiación. En este caso, $\omega = -1$ o $p = -\rho$ que corresponde a la constante cosmológica Λ . Se agrega el término $\Lambda_{\mu\nu}$ al lado izquierdo de las ecuaciones de campo (1.12) al desarrollarlo se pasa al lado derecho como si fuera una componente más. Entonces, la ecuación de estado para la constante cosmológica es

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad (2.41)$$

También se tiene una importante relación entre la densidad de energía y la constante cosmológica

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.42)$$

Ahora, remplazamos $\omega = -1$ en la expresión (2.36), encontramos que la densidad de energía es constante.

$$\rho_\Lambda = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^0 \quad (2.43)$$

La densidad de energía oscura no cambia con respecto pasa el tiempo, sino que se mantendrá constante [22].

2.3.4. Universo compuesto

Podemos escribir de forma compacta los tres tipos de energía que conforman el universo.

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-3} & \text{materia tipo polvo} \\ a^{-4} & \text{materia relativista} \\ \rho_{0\Lambda} & \text{constante cosmológica} \end{cases} \quad (2.44)$$

Como se ha mencionado brevemente, las densidades son proporcionales a algún factor de escala $a(t)$ y son, respectivamente, proporcionales a a^{-3} , a^{-4} y a^0 . Por consiguiente, la densidad total de energía ρ_i está determinada por los tres tipos de densidades

$$\rho_i = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda \quad (2.45)$$

De esta manera, la ecuación de Friedmann (2.23) toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{K}{a^2} \quad (2.46)$$

O bien de la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{0m} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{0r} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{0\Lambda} \left(\frac{a_0}{a}\right)^0 \right] - \frac{K}{a^2} \quad (2.47)$$

Donde ρ_{0m} , ρ_{0r} y Λ son constantes. De este modo, se observa que, al expandirse el universo, es decir, el factor de escala aumenta, cada término se vuelve más dominante en ciertas etapas de la evolución del universo. Esto es, para el universo temprano (a pequeña), siendo la radiación la etapa dominante. De esta forma, a medida que el universo evoluciona, otros términos van contribuyendo en mayor o menor medida [16].

Se define la densidad crítica dada por

$$\rho_{0c} = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{-1} H_0^2 \quad (2.48)$$

Asimismo, se ha definido el parámetro de Hubble (2.3). La expresión (2.48) es la densidad de energía total requerida para un universo plano al tiempo actual. Además, definimos el parámetro de densidad Ω para cada componente como [22]

$$\Omega_0 = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}} \quad (2.49)$$

Por otro lado, La expresión (2.23) relaciona tres cantidades: la densidad de energía ρ , la curvatura del espacio $\frac{K}{a^2}$ y la tasa de expansión del universo H . Podemos reescribir la ecuación de Friedmann (2.23) despejando ρ .

$$\rho = \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^{-1} H_0^2 + \frac{3K}{8\pi G a_0^2} \quad (2.50)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.48), se obtiene

$$\rho = \rho_{0c} + \frac{3K}{8\pi G a_0^2} \quad (2.51)$$

La densidad crítica ρ_c cambia con el tiempo, a medida que evoluciona el parámetro de Hubble H . La densidad crítica en un momento dado depende de la tasa de expansión en ese momento. Sin embargo, si la densidad es mayor que ρ_c en cualquier momento, la gravedad eventualmente detendría la expansión y el universo volverá a colapsar. Este modelo se denomina modelo de universo cerrado. Si la densidad es menor que ρ_c , la fuerza gravitacional se volverá cada vez más débil y la tasa de expansión se aproximará asintóticamente a una constante, sin disminuir su velocidad debido a la gravedad. Este modelo es un universo abierto. Y si la densidad de energía es exactamente igual a la ρ_c , el universo se llama plano. En este caso el universo continúa expandiéndose eternamente, y la tasa de expansión se aproxima asintóticamente a cero [23].

Podemos leer la curvatura espacial K de forma compacta.

$$\begin{cases} \rho > \rho_c \Rightarrow K > 0 \\ \rho < \rho_c \Rightarrow K < 0 \\ \rho = \rho_c \Rightarrow K = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Retomando la ecuación de Friedmann (2.23) para el fluido perfecto

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.53)$$

Ahora, multiplicamos por $\frac{1}{H^2}$ en (2.53).

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.54)$$

Considerando las ecuaciones (2.49) y (2.48). La expresión (2.54) toma la forma

$$1 = \Omega - \frac{K}{a_0^2 H_0^2} = \sum_i \Omega_i + \Omega_K \quad (2.55)$$

Donde el parámetro de curvatura viene siendo

$$\Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.56)$$

Es el parámetro de densidad asociado al término de curvatura. Así, la expresión (2.47), se reescribe

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0r} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{0m} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{0\Lambda} + \Omega_K \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \quad (2.57)$$

Las observaciones más recientes efectuadas por el satélite Planck [24] [22] han demostrado que las abundancias actuales de especies que nuestro universo posee unos valores.

$$\Omega_{0m} = 0,3111 \pm 0,0056 \quad , \Omega_{0\Lambda} = 0,6889 \pm 0,0056 \quad (2.58)$$

Donde, aproximadamente, el parámetro de densidad de materia está en radiación $\Omega_{0r} \approx 5,38 \times 10^{-5}$, bariones $\Omega_{0b} \approx 0,0484$ y materia oscura $\Omega_{0DM} \approx 0,258$. El parámetro de curvatura obtenido en la actualidad

$$\Omega_K = 0,0007^{+0,0037}_{-0,0037} \quad (2.59)$$

Este valor es consistente con cero. Además, definimos la constante de Hubble como H_0 . Siendo el valor de la constante de Hubble $H_0 = 67,66 \pm 0,42 \text{Kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [22].

Por otro lado, podemos encontrar cómo evoluciona el factor de escala en cada época del universo. Remplazamos los valores de la expresión (2.44) en la ecuación de Friedmann (2.23) (con $K = 0$), de forma compacta, obtenemos

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3}} & \text{materia tipo polvo} \\ t^{\frac{1}{2}} & \text{materia relativista} \\ e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} & \text{constante cosmológica} \end{cases} \quad (2.60)$$

Podemos ver cómo evoluciona el factor de escala cuando el universo está dominado por materia, radiación y la constante cosmológica.

2.3.5. Tiempo conforme - Horizonte de partículas

Con el fin de determinar la distancia de las galaxias en un universo en expansión, se requiere la propagación de la luz. Para alcanzar esta meta, se procederá a examinar la luz de las galaxias. En primer lugar, será útil introducir el tiempo conforme η , el cual resulta útil para analizar las trayectorias de fotones. Definimos el tiempo conforme como

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.61)$$

En términos de esto, se puede reescribir la métrica (2.14).

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (2.62)$$

En particular, en el caso de que $K = 0$ se tiene un espacio-tiempo de Minkowski. Podemos reescribir la expresión (2.62) como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.63)$$

Donde hemos reemplazado la coordenada r por χ . Dado que estamos en coordenadas esféricas, $x^0 \rightarrow \eta$, $x^1 \rightarrow \chi$, $x^2 \rightarrow \theta$ y $x^3 \rightarrow \varphi$. Sí elegimos θ y φ constantes, entonces ($d\Omega = 0$)

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\chi^2 \right] = 0 \quad (2.64)$$

De este modo, obtenemos

$$d\chi = d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.65)$$

Por lo tanto, para medir distancias en un universo en expansión utilizamos la expresión

$$d\chi = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.66)$$

Integramos la expresión (2.66), obtendremos

$$\chi = \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.67)$$

Donde t_{em} es el tiempo en el que se emitió el haz de luz, y t_0 es la luz recibida en un tiempo actual.

Por otro lado, podemos reescribir la expresión del corrimiento al rojo (2.1), de la siguiente forma

$$1+z = \frac{1}{a(t)} \quad (2.68)$$

Podemos sacar el diferencial dz , derivamos la expresión (2.68).

$$dz = -\frac{\dot{a}}{a^2} dt = -\frac{1}{a} \frac{\dot{a}}{a} dt \quad (2.69)$$

Aparece el parámetro de Hubble (2.3). Despejamos el diferencial del tiempo, entonces

$$dt = -a \frac{dz}{H(z)} = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (2.70)$$

De esta manera, la expresión (2.67) queda.

$$\chi = - \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{1}{1+z} (1+z) \frac{dz}{H(z)} = \int_{t_0}^{t_{em}} \frac{dz}{H(z)} \quad (2.71)$$

Para los límites de integración tenemos que en la actualidad $t_0 \rightarrow 1+z=1$, entonces $z=0$

$$\chi = \int_0^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)} \quad (2.72)$$

De este modo, obtenemos la distancia comovil. La distancia comovil se encuentra determinada por el parámetro de Hubble $H(z)$, lo que significa que depende de las componentes del universo. De la expresión (2.57) tenemos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0r} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{0m} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{0\Lambda} + \Omega_K \right] \quad (2.73)$$

Tomando en cuenta que las densidades de energía (2.44) son proporcionales al factor de escala al que decaen. Podemos expresar el factor de escala en términos de $1+z$. Además, asumimos que no hay curvatura, quedando la expresión (2.73) de la forma

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{0r} (1+z)^4 + \Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_{0\Lambda} \right] \quad (2.74)$$

La cual puede ser entendida como la ecuación de Friedmann en función del corrimiento al rojo. Por lo tanto, la distancia comovil viene dado por

$$\chi(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{z_{em}} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{0r}(1+z)^4 + \Omega_{om}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (2.75)$$

La expresión (2.75) representa la distancia comovil, la cual es una medida de la distancia entre dos objetos en el universo, teniendo en cuenta la expansión del universo.

Para introducir el horizonte de partículas, necesitamos establecer la distancia propia d_p . Se trata de la distancia entre dos eventos simultáneos en un tiempo cosmológico t_0 medida por un observador inercial. La isotropía de la métrica RW (2.14) nos brinda la posibilidad de tener en cuenta cualquier dirección. Entonces, θ y φ serán constantes, y la homogeneidad nos permitirá considerar que el observador está en $r = 0$. Por lo tanto, mediante la definición de la distancia propia, donde $dt = 0$, tenemos para un tiempo dado t [25].

$$d_p = a(t) \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.76)$$

Donde R es la coordenada radial comovil del punto medido. Por otra parte, si consideramos rayos de luz $ds = 0$, tenemos de (2.14).

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.77)$$

Considerando la expresión (2.67).

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = - \int_{r_{em}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.78)$$

Como se muestra $r_0 = 0$. Mediante el uso de las dos ultimas ecuaciones, la distancia propia de $r = 0$ y $r = R$ en un momento dado t puede ser expresada como una distancia medida mediante la luz, queda.

$$d_p(t_{em}) = a(t) \int_{t_{em}}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.79)$$

La expresión (2.79) indica la distancia recorrida por la luz entre dos puntos del espacio-tiempo, pero teniendo en cuenta un universo en expansión a través del factor de escala [25].

Dado que la edad del universo y la velocidad de la luz poseen valores finitos, existe un horizonte de partículas H_p , el cual representa la distancia más larga desde la cual podemos recuperar información del pasado, lo que define el universo observable. Entonces, el horizonte de partículas H_p en el presente se encuentra determinado por la distancia propia medida por la luz proveniente de $t = 0$ (el origen del universo, donde se supone un Big Bang caliente, compatible con la ecuación de estado dominante) a t_0 , por lo tanto,

$$H_p = \lim_{t_{em} \rightarrow 0} d_p(t_{em}) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.80)$$

Tenemos en cuenta que el factor de escala esta relacionado con el corrimiento al rojo z a través de la expresión (2.68). Por consiguiente, se procede a aplicar la derivada en la expresión (2.68) y considerar la expresión (2.79) y el parámetro de Hubble (2.3), tenemos

$$d_p(z_{em}) = - \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dy}{H(y)} \quad (2.81)$$

Para los límites de integración $z(t_0) = 0$, entonces se deduce que la distancia propia se puede escribir

$$d_p(z_{em}) = \int_0^{z_{em}} \frac{dy}{H(y)} \quad (2.82)$$

Dado que la expresión (2.79) se encuentra determinada por el parámetro de Hubble, la cual se encuentra vinculado con las componentes del universo, es factible emplear la expresión (2.57), la cual se expresa en términos del corrimiento al rojo. Y asumimos que no hay curvatura ($\Omega = 1$) con materia no relativista, es decir, $\omega_m = 0$ y constante cosmológica $\omega_m = -1$, quedando

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 \Omega_{\Lambda 0}} \quad (2.83)$$

Al aplicar (2.80), (2.82), (2.83), y utilizando la condición de frontera $z \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$, Obtenemos la expresión del horizonte de partículas en el tiempo cósmico actual [25].

$$H_p = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+y)^3 \Omega_{\Lambda 0}}} \quad (2.84)$$

2.4. Problemas de la cosmología estándar

En la comprensión del modelo del Big Bang, el universo se encuentra dominado por la radiación en el universo temprano y por materia en el universo tardío, y se encuentra en una transición a la dominación de la energía oscura. El modelo resulta ser muy exitoso, en términos observacionales, ya que predice la expansión del universo, la existencia del CMB y la abundancia de elementos ligeros en el universo. Sin embargo, el modelo del Big Bang presenta diversos cabos sueltos, lo que evidencia la incapacidad del modelo para explicar satisfactoriamente ciertos problemas, vinculados en su mayoría con sus peculiares condiciones iniciales. A continuación, analizaremos dichos problemas.

2.4.1. Problema de Planitud

Uno de los principales problemas que presenta el modelo del Big Bang es que, en la actualidad, la densidad del universo es cercana al valor crítico, específicamente en una geometría espacial euclidiana, o, de otra manera, el parámetro de densidad actual $\Omega_0 \approx 1$ (2.49). El problema de planitud surge de la consideración de la ecuación de Friedmann (2.55) en un universo con materia y radiación, sin embargo, sin energía oscura, es decir

$$1 - \Omega(t) = - \frac{K}{a^2(t)H^2(t)} \quad (2.85)$$

En la actualidad, tenemos $t = t_0$ y $a(t) = 1$, por tanto, el parámetro de densidad (Ω_0), tendremos la expresión

$$1 - \Omega_0 = - \frac{K}{H_0^2} \quad (2.86)$$

Mediante la combinación de las ecuaciones (2.85) y (2.86), despejamos la parte del tiempo, obteniendo la expresión del parámetro de densidad en función del tiempo

$$1 - \Omega(t) = (1 - \Omega_0) \frac{H_0^2}{a^2(t)H^2(t)} \quad (2.87)$$

Se compara la evolución del parámetro $\Omega(t)$ con lo que se observa actualmente Ω_0 . Ahora, de la ecuación de Friedmann (2.23), podemos dividir con la ecuación de Friedmann en la actualidad. Por consiguiente, es factible definir la ecuación de Friedmann en un tiempo actual.

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 - \frac{K}{a^2} \quad (2.88)$$

Procedemos a dividir la expresión (2.23) con (2.88), obteniendo.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.89)$$

De la ecuación anterior, obtenemos $\frac{\rho}{\rho_0}$, lo que viene siendo el factor de escala. Recordemos la expresión (2.36), la cual es la relación de energía en términos del factor de escala, quedando la siguiente expresión.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = a^{-3(1+\omega)} \quad (2.90)$$

Ahora, podemos sustituir la ecuación anterior en la expresión (2.87) con el fin de escribirlo en términos del factor de escala (también, podemos escribirlo en términos del tiempo (2.60)); sin embargo, para poder sustituir invertimos la expresión (2.90) $\frac{H_0^2}{H^2} = a^{3(1+\omega)}$. Hecho esto, procedemos a efectuar la sustitución, quedando la expresión (2.87) de la forma.

$$1 - \Omega(t) = (1 - \Omega_0) a^{(1+3\omega)} \quad (2.91)$$

Recordemos la evolución del factor de escala (2.60). Por lo tanto, en términos del tiempo

$$1 - \Omega(t) = (1 - \Omega_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{(1+3\omega)} \quad (2.92)$$

En la evolución estándar establecida por el modelo del Big Bang, a medida que miramos hacia atrás, el factor de escala $a(t)$ se aproximara a cero y Ω se aproximara a uno. A medida que $a(t)$ aumenta, Ω se aleja de uno, siempre y cuando no sea exactamente igual a uno. Para calcular la desviación de 1 cuantitativamente, necesitamos conocer como depende $a(t)$ del tiempo. Para esto, se considera la expresión (2.60) [23]. Dependiendo de qué componente utilizamos, es factible calcular el valor de Ω en el universo temprano. En la dominación de radiación, la evolución del factor de escala (2.60) es $(a(t) \propto t^{\frac{1}{2}})$ con $\omega = \frac{1}{3}$. Quedando la expresión (2.92).

$$1 - \Omega(t) = (1 - \Omega_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}(1+3(\frac{1}{3}))} \quad (2.93)$$

Resultando

$$1 - \Omega(t) \propto t \quad (2.94)$$

Para la época de dominación de materia, con $(a(t) \propto t^{\frac{2}{3}})$ y $\omega = 0$, tenemos

$$1 - \Omega(t) = (1 - \Omega_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}(1+3(0))} \quad (2.95)$$

Obtenemos

$$1 - \Omega(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (2.96)$$

Ahora, mediante la expresión (2.92), podemos imaginarnos cuan cercano a 1 era el parámetro de densidad, utilizando para esto diferentes tiempos. Para el momento de nucleosíntesis, Big Bang Nucleosynthesis (BBN), $|\Omega(t_{\text{BBN}})| \leq 10^{-16}$, y para la época de Planck, $|\Omega(t_{\text{Planck}})| \leq 10^{-61}$ [16].

El número 10^{-61} , es un número muy pequeño. Nuestra misma existencia se debe al cercano balance que existe entre la densidad y la densidad que hubo en el universo temprano. Los valores de Ω , que son ligeramente menores o mayores a uno, crecerían a valores mucho mayores que uno o decrecerían rápidamente a valores mucho menores que 1. En conclusión, observamos que, a medida que retrocedemos en el tiempo, el parámetro de densidad se acerca cada vez más a uno [8].

2.4.2. Problema del Horizonte

Las observaciones del CMB revelan que los fotones provenientes de direcciones opuestas en el cielo observable parecen estar en equilibrio térmico a casi la misma temperatura. La explicación más probable es que el universo ha alcanzado un estado de equilibrio térmico mediante las interacciones entre las diferentes regiones del CMB. No obstante, esta explicación no es coherente con la teoría del modelo del Big Bang. No había suficiente tiempo para que esas regiones interactuaran antes de que los fotones fueran emitidos, lo cual se debe a que el horizonte de partículas es finito y, de hecho, se cumple qué [16] [26].

$$\int_0^{t_{\text{des}}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{\text{des}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.97)$$

Donde t_{des} es el tiempo de desacople. La desigualdad anterior se puede demostrar de la siguiente forma: A partir del Big Bang, a un tiempo t_{BB} , hasta la época de recombinación t_{rec} , el universo estuvo dominado por radiación, con $(a(t) \propto t^{\frac{1}{2}})$, entonces

$$H_{\text{Pr}} = \int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{\alpha t^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\alpha} (t_{\text{rec}}^{\frac{1}{2}} - t_{\text{BB}}^{\frac{1}{2}}) \quad (2.98)$$

Asimismo, asumiendo que el universo estuvo dominado por materia, con $(a(t) \propto t^{\frac{2}{3}})$, desde la época de recombinación t_{rec} hasta nuestros días t_0 , entonces

$$H_{\text{pm}} = \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{dt}{\beta t^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\beta} (t_0^{\frac{1}{3}} - t_{\text{rec}}^{\frac{1}{3}}) \quad (2.99)$$

Por continuidad para el factor de escala en t_{rec} , tenemos.

$$\alpha t_{\text{rec}}^{\frac{1}{2}} = \beta t_{\text{rec}}^{\frac{2}{3}} \quad (2.100)$$

Entonces

$$\frac{\alpha}{\beta} = t_{\text{rec}}^{\frac{1}{6}} \quad (2.101)$$

Para establecer un valor, consideramos que el Big Bang comienza con la singularidad inicial en $t_{\text{BB}} \sim 0$ y $\frac{t_0}{t_{\text{rec}}} \sim 10^5$. De esta manera, calculamos el cociente.

$$\frac{H_{\text{pm}}}{H_{\text{pr}}} = \frac{3}{2} t_{\text{rec}}^{\frac{1}{6}} \frac{(t_0^{\frac{1}{3}} - t_{\text{rec}}^{\frac{1}{3}})}{t_{\text{rec}}^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t_0}{t_{\text{rec}}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \sim 68 \quad (2.102)$$

Por consiguiente,

$$H_{\text{pr}} \ll H_{\text{pm}} \quad (2.103)$$

En términos físicos, la expresión (2.103) indica que la distancia que la luz pudo haber viajado antes que se formara el CMB es más pequeña que la distancia del horizonte de partículas actual. En realidad, las regiones separadas por más de 2 grados en el cielo no se encuentran en contacto causal durante la época de recombinación. No obstante, observacionalmente, se observan fotones que alcanzan el equilibrio térmico a la misma temperatura en todas las regiones del cielo de CMB. Este es el conocido problema de Horizonte. Como resultado, en la teoría del Big Bang resulta difícil concebir una explicación a la homogeneidad e isotropía, por lo que esta debería corresponder a una condición inicial [16] [26].

2.4.3. Problema de las Reliquias no deseadas

Este problema se debe a que, si el Big Bang comenzó a una temperatura muy alta, reliquias prohibidas por la observación, como los: gravitones, monopolos magnéticos, predichas por la teoría de la Gran Unificación o en sus siglas en inglés (GUT), hubiesen sobrevivido hasta el presente, pero estas reliquias son descartadas por las observaciones [6].

Capítulo 3

Modelo estándar cosmológico inflacionario

En el capítulo anterior, analizamos el modelo estándar de la cosmología, el cual se compone por dos modelos: el modelo del Big Bang y el modelo del universo en expansión (FRW). Dichos modelos han resultado ser muy exitosos, dado que las evidencias observacionales nos proporcionan explicaciones sobre la expansión del universo, la existencia del fondo cósmico de microondas y las abundancias de los elementos ligeros en el universo (nucleosíntesis). Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el modelo estándar presenta tres problemas: el problema de planitud, el problema de horizontes y reliquias no deseadas; aquí es donde se encaja el concepto de inflación cosmológica. El modelo inflacionario es una propuesta que trata esos problemas que no logra explicar el modelo estándar. Estos problemas podrían considerarse como las condiciones iniciales del universo. El objetivo del modelo estándar es describir y exponer su evolución general a partir de aquel momento. Se requiere una clara sintonía de dichas condiciones para hacer una predicción adecuada del universo actual a gran escala. Con el fin de prevenir la necesidad de las condiciones iniciales tan finamente sintonizadas se propuso el modelo inflacionario.

El modelo inflacionario (Guth 1981; Albrecht y Steinhardt 1982; Linde 1982, 1983) se basa en la introducción de una etapa inflacionaria con el fin de explicar dichos problemas mediante una expansión exponencial del universo en una época muy temprana. El modelo inflacionario no reemplaza la teoría del Big Bang, sino que la refuerza y pretende revelar que sucedió cuando el universo era muy joven. La definición de inflación se refiere a una época previa a la época dominada por radiación, pero posteriormente a la época de Planck, durante la cual el factor de escala del universo $a(t)$ está acelerando, es decir, tendremos inflación cuando $\ddot{a} > 0$. En el presente capítulo, se abordará el modelo de inflación cosmológica y la solución que esta le brinda a los problemas del modelo estándar [6] [8].

3.1. Inflación

3.1.1. Inflación generada por un campo escalar

Las ecuaciones Friedmann (2.23) y (2.32) relacionan el factor de escala con el contenido de materia en el universo. Teniendo en cuenta, que la aceleración durante la inflación debe ser positiva, $\ddot{a} > 0$, ya que el universo se expande exponencialmente. A partir de esto, analizamos la segunda ecuación de Friedmann (2.32).

Para que la expansión nos dé positiva, consideramos $\ddot{a} > 0$ y lo aplicamos en la expresión (2.32), surge que

$$\rho + 3p < 0 \quad (3.1)$$

Pasamos ρ al otro lado

$$3p < -\rho \quad (3.2)$$

Quedando

$$p < -\frac{\rho}{3} \quad (3.3)$$

Se observa que la inflación requiere una presión negativa para un periodo inflacionario. Debido a determinadas condiciones, un campo escalar $\phi(t, \vec{x})$, que denominaremos inflatón, puede satisfacer este requerimiento. En la cosmología inflacionaria, los campos escalares tienen la peculiar característica de una energía potencial que puede cambiar muy lentamente a medida que el universo se expande. Esto corresponde a la ecuación de estado (2.33) con presión negativa, que es justamente lo que necesitamos.

Se podría describir la dinámica de un campo escalar $\phi(t, \vec{x})$, acoplado mínimamente a la gravedad que viene dada por la acción.

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (3.4)$$

Para bajar el índice μ , aplicamos el tensor métrico $g^{\alpha\beta}$ y renombramos los índices como α y β , quedando la expresión (3.4) de la siguiente forma.

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \quad (3.5)$$

Donde $V(\phi)$ corresponde al potencial del campo $\phi(t, \vec{x})$. La variación de la acción de materia, en la expresión (3.5) en relación con la métrica, nos proporciona el tensor energía-momento asociado al campo escalar. Podrá escribirse cómo.

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m \quad (3.6)$$

Donde \mathcal{L}_m es la densidad lagrangeana, por lo tanto, el tensor energía-momento para un campo escalar viene siendo [6].

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (3.7)$$

Por consiguiente, al obtener el tensor energía-momento para un campo escalar y lo acoplamos al tensor energía-momento para un fluido perfecto (1.30), se puede encontrar la densidad, la presión y una ecuación de estado para un campo escalar. Para lograr tal objetivo, se considera un universo completamente homogéneo $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(t)$, entonces, el campo estará en función del tiempo $\phi = \phi(t)$, no dependerá de las coordenadas espaciales, por lo que el campo solo va a evolucionar en el tiempo. En consecuencia, se consideran las componentes de la expresión (1.30)

con (3.7), para obtener las componentes del tensor energía-momento para un campo escalar. Para la componente T_{00} , viene siendo.

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - g_{00} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (3.8)$$

Considerando la componente temporal de la expresión (2.16). Y derivando respecto al tiempo $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ en la expresión (3.8), obtenemos.

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \quad (3.9)$$

El segundo término es una suma de índices, si lo expandimos, queda

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} [g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g^{11} \partial_1 \phi \partial_1 \phi + g^{22} \partial_2 \phi \partial_2 \phi + g^{33} \partial_3 \phi \partial_3 \phi] + V(\phi) \quad (3.10)$$

Tengamos en cuenta que el campo escalar depende del tiempo $\phi = \phi(t)$, por lo tanto, los términos espaciales serían cero, lo que implica que la única componente que queda es la temporal, quedando la expresión (3.10), de esta manera

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + V(\phi) \quad (3.11)$$

Reemplazamos la componente del tensor métrico contravariante (2.16), y, además, procedemos a derivar respecto al tiempo, lo cual tenemos.

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) es la componente temporal del tensor energía-momento de un campo escalar. Por lo tanto, estableciendo una relación entre el tensor de energía-momento para un fluido perfecto ($T_{00} = \rho$) y el tensor energía-momento para un campo escalar ($T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$), entonces

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.13)$$

Donde el término corresponde a la densidad de energía cinética, mientras que el segundo es la densidad de energía potencial.

Ahora, para las componentes espaciales para el tensor energía-momento de un campo escalar, tomamos los índices $\mu\nu$ como ii , por lo que.

$$T_{ii} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.14)$$

La expresión (3.14) es la componente espacial del tensor energía-momento para un campo escalar, y si se relaciona con el tensor energía-momento para un fluido perfecto ($T_{ii} = p$), se obtiene.

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.15)$$

La expresión (3.15) representa la presión del campo escalar, lo cual es una diferencia de energía.

Dado que se trata de un fluido perfecto, podemos establecer una relación entre la presión del campo escalar (3.15), y la densidad de energía del campo escalar (3.13), mediante la ecuación de estado.

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.16)$$

Si se logra la condición $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, se obtiene la condición $p \approx -\rho$. Con esto, notamos que en un campo escalar, la densidad de energía es la dominante en el universo y la energía potencial domina sobre su término cinético, se produce una época inflacionaria [26].

Por otro lado, nos enfocaremos en la componente temporal de la ecuación de continuidad (1.30), en la cual sustituirán las expresiones (3.13) y (3.15). Sin embargo, antes, definimos la expresión (1.30) en términos de un campo escalar.

$$\dot{\rho}_\phi = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\phi + p_\phi) \quad (3.17)$$

Reemplazamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) &= 0 \\ \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dv(\phi)}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{dv(\phi)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

En donde $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$, obtenemos.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.18)$$

La expresión (3.18) se trata de la ecuación de movimiento para un campo escalar.

3.1.2. Condiciones Slow-Roll

Para que la inflación tenga lugar en el universo primitivo, es preciso establecer ciertas restricciones sobre el potencial y las condiciones iniciales del campo escalar. A estas restricciones se les conoce como condiciones de rodamiento lento (Slow-Roll), y se caracterizan de la siguiente forma: Si el potencial es lo suficientemente plano ($V \approx \text{cte} \Rightarrow V'(\phi) \approx 0$) y se satisface la condición $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ para algunos valores de $\dot{\phi}$, el campo escalar ‘rodará lentamente’ sobre su propio potencial, lo que provoca una expansión acelerada del universo [26]. Asimismo, dado que el potencial es plano, se puede suponer que $\ddot{\phi} \approx 0$. En consecuencia, las condiciones Slow-Roll son:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.19)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \quad (3.20)$$

Por otro lado, aplicando la condición (3.19) en la expresión (3.16), tenemos.

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{-V(\phi)}{V(\phi)} = -1 \quad (3.21)$$

Con la presencia de un universo gobernado por esta forma de energía, se confirman las condiciones de universo inflacionario $\omega_\phi = -1$. Con lo cual cumple la condición de expansión. Con el fin de obtener más información acerca de este campo escalar, se procederá a retomar la primera ecuación de Friedmann (2.23), con $K = 0$, es decir.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \quad (3.22)$$

Reemplazamos la expresión (3.13) en (3.22). Asimismo, consideramos que la componente de energía predominante en el universo inflacionario se origina del inflatón, entonces.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \quad (3.23)$$

Si aplicamos las condiciones de Slow-Roll a las expresiones (3.18) y (3.23), se obtendrán las ecuaciones de Slow-Roll. Por consiguiente, para la expresión (3.18), con $\ddot{\phi} \approx 0$, tenemos.

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.24)$$

Para la expresión (3.23)

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} V(\phi) = \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2} \quad (3.25)$$

Donde κ , en unidades naturales, es $\kappa = 8\pi G$. Y, M_{Pl} , es la masa reducida de Planck, la cual en unidades naturales es $M_{Pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} = 2,436 \times 10^{18} \text{Gev}$ [16].

Con el empleo de las ecuaciones de Slow-Roll en un universo en expansión, es útil recurrir a unos parámetros que nos pueden producir un acercamiento a la inflación. A continuación, se presentan los parámetros de Slow-Roll del potencial como:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (3.26)$$

$$\eta(\phi) = M_{Pl}^2 \left(\frac{V''}{V} \right) \quad (3.27)$$

Es importante destacar que estos parámetros son adimensionales (en unidades naturales $[\phi] = \text{energía}$). Los parámetros de Slow-Roll son muy útiles para cuantificar las predicciones inflacionarias; específicamente, el parámetro $\epsilon(\phi)$ mide la pendiente del potencial y el parámetro $\eta(\phi)$ mide la curvatura [16].

Las desigualdades (3.19) y (3.20) implican que $\epsilon \ll 1$ y $\eta \ll 1$. Las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $\eta \ll 1$ son necesarias, no obstante, no son suficientes para garantizar la aproximación Slow-Roll, ya que las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $\eta \ll 1$ son condiciones sobre la forma del potencial y son útiles para identificar una sección Slow-Roll, lo que implica que la aproximación Slow-Roll pueda ser válida. La ecuación de movimiento para el campo (3.18) es una ecuación de segundo orden, por lo que se aceptan condiciones iniciales arbitrarias de ϕ y $\dot{\phi}$. De este modo, (3.19) y (3.20)

podrían no alcanzarse inicialmente, aun si el potencial es lo suficientemente plano. No obstante, ocurre que la solución Slow-Roll de (3.24) y (3.25), es un atractor de las ecuaciones (3.18) y (3.23), lo que significa que la solución de las ecuaciones completas se aproxima rápidamente a la solución Slow-Roll, sin importar las condiciones iniciales. En realidad, siendo más precisos, no se trata de condiciones iniciales excesivamente arbitrarias; las condiciones iniciales deben estar dentro del rango de atracción, con el fin de que el atractor sea efectivo. La presencia de las condiciones iniciales en el rango de atracción implica que ϕ debe encontrarse en la sección Slow-Roll del potencial $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ [26].

La descripción entre atractor y región de atracción puede requerir un poco más detenimiento: Si el universo o una región de él está en el rango de atracción de la inflación Slow-Roll, es posible que exista una región en la que la curvatura es pequeña; el inflatón puede realizar una contribución significativa en la densidad total de energía; es suficientemente homogéneo, y se encuentra en la sección Slow-Roll del potencial. En consecuencia, esta región comienza a inflarse y se vuelve sumamente homogénea y plana. Se vuelven despreciables todas las contribuciones a la densidad de energía distintas a la del inflatón, y la inflación se describe por las soluciones de las ecuaciones Slow-Roll [26].

Por lo tanto, la inflación elimina la totalidad de la memoria de las condiciones iniciales, lo que nos permite predecir la evolución del universo únicamente mediante la forma $V(\phi)$ y la suposición de que ϕ comenzó lo bastante cerca de la parte Slow-Roll [26].

Con el fin de profundizar en la relación entre la aproximación Slow-Roll y la inflación, nos centraremos en el parámetro ϵ . Este parámetro puede ser empleado directamente para determinar cuando nos encontramos en una etapa inflacionaria. Considerando que la aproximación Slow-Roll es válida, se demuestra que $\frac{\dot{H}^2}{H^2} = \epsilon$, entonces.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \left(1 - \frac{\dot{H}}{H^2}\right) H^2 = (1 - \epsilon)H^2 \quad (3.28)$$

Por consiguiente, hemos llegado a la conclusión: $\epsilon < 1$ y $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ durante la inflación. A medida que ϕ se aproxima al mínimo del potencial, $\epsilon(\phi)$ se aproxima a la unidad. Cuando se cumple que $\epsilon(\phi) \approx 1$, generalmente se dice que la inflación ha alcanzado a su objetivo y es factible determinar el valor del campo ϕ al final de la inflación [26].

3.1.3. Cantidad de Inflación

Durante la inflación, el factor de escala $a(t)$ se incrementa de manera exponencial. Una vez que conocemos la forma explícita de $a(t)$, es posible cuantificar que tanto se ha expandido el universo, desde el momento en que la inflación termina t_{fi} , con su valor en cierto tiempo t , comprendido entre el tiempo en que la inflación inicia t_{ii} , es decir, $t \in (t_{ii}, t_{fi})$. Dado que este cociente es muy grande, se procede a tomar el logaritmo natural de dicho cociente, definiendo lo que se conoce como el número de **e-foldings**(N) [6].

$$N(t) = \ln \left(\frac{a(t_{fi})}{a(t)} \right) = \int_t^{t_{fi}} H(\tau) d\tau \quad (3.29)$$

La expresión (3.29), también, de forma general, lo definen en términos del parámetro de Hubble. Por definición, la función $N(t)$ decrece en el tiempo, volviéndose cero al final de la inflación.

3.2. Solución a los problemas del modelo estándar cosmológico

3.2.1. Solución del problema de la planitud

En primer lugar, consideramos la correlación existente entre la inflación y el problema de planitud. La expresión (2.85) muestra que el problema surge del hecho de que, al evolucionar $\Omega(t)$, siempre se aleja de 1 (lo que implica que $\Omega(t)$ se vuelva una cantidad mucho mayor que 1 o que se vuelva una cantidad mucho menor que 1). Para mirar esto de manera más detallada, tomemos el valor absoluto de la expresión (2.85) y, al derivando con respecto al tiempo, tenemos [26].

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a^2 H^2} \right) = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2} \right) = -\frac{2|K|}{\dot{a}^3} \ddot{a} \quad (3.30)$$

Si consideramos un universo expandido, en cuyo caso $\dot{a} > 0$ y, en consecuencia, $\dot{a}^{-3} > 0$, se pueden extraer dos situaciones [16]:

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) > 0 \Leftrightarrow \ddot{a} < 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \quad (3.32)$$

Como se muestra en la relación (3.31), el problema de planitud surge cuando la expansión del universo es desacelerada. La expresión (3.32) indica que, en caso de que tuviéramos una etapa temprana del universo, cuya expansión sea acelerada, entonces $|\Omega(t) - 1| \rightarrow 0$ rápidamente, para condiciones iniciales arbitrarias. En consecuencia, una vez Ω alcance un valor cercano a la unidad, la etapa inflacionaria concluirá y el universo seguirá su evolución a través del modelo estándar del Big Bang, con $\Omega(t) \approx 1$, en concordancia con los valores observacionales [27] [28] [29].

En consecuencia, la respuesta dada por la inflación se sustenta en que, en alguna época temprana del universo, experimento una acelerada expansión (como la que sería provocada por inflación; Slow-Roll), de manera que durante este tiempo $a(t) \sim e^{H_I t}$ siendo $H_I = 0,36 \times 10^{36} \text{s}^{-1}$. Por consiguiente, la expresión (2.85), durante el periodo inflacionario, podría ser escrita como [6]

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{a^2 H_I^2} \quad (3.33)$$

La expresión (3.33) indica que $\Omega(t)$ se aproxima a 1 a medida que t aumenta, desde el pasado hacia el presente. A partir de $\Omega(t)$, con una curvatura espacial cualquiera $K \neq 0$, y considerando que al comienzo de inflación $\Omega(t_{ii})$ difería de la unidad en un orden de magnitud, como, por ejemplo, $2 < \Omega(t_{ii}) < 10$, entonces

$$|\Omega(t_{ii}) - 1| = \frac{|K|}{a^2(t_{ii}) H_I^2} \approx \mathcal{O}(1) \quad (3.34)$$

Con el fin de lograr que, al final de la inflación, $\Omega(t_{fi})$ difiera de la unidad en una cantidad de 10^{-52} .

$$|\Omega(t_{\text{fi}}) - 1| = \frac{|K|}{a^2(t_{\text{fi}})H_I^2} \approx 10^{-52} \quad (3.35)$$

Sé requiere aumentar $a(t)$ por un factor de 10^{26} , es decir, $a(t_{\text{fi}}) \approx 10^{26}a(t_{\text{ii}})$ y, por ende, el número de **e-foldings** (3.29) [6].

$$N(t_{\text{ii}}) = \ln \left(\frac{a(t_{\text{fi}})}{a(t_{\text{ii}})} \right) = 26 \ln 10 \approx 60 \quad (3.36)$$

3.2.2. Solución del problema del horizonte

Si el universo atravesó una época primigenia de expansión acelerada, a diferencia de (2.97), se cumplirá la desigualdad

$$\int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{des}}} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_{\text{des}}}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.37)$$

La causa surge de analizar la integral del lado izquierdo, que puede ser extendida de la siguiente manera.

$$\int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{des}}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{fi}}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{\text{fi}}}^{t_{\text{des}}} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.38)$$

Dado los límites de integración de la primera integral del lado derecho, el factor de escala de su integrando será $a(t) \sim a_{\star} e^{H_I t}$, por lo tanto.

$$\int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{fi}}} \frac{dt}{a(t)} \approx -\frac{1}{H_I a_{\star}} e^{-H_I t} \Big|_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{fi}}} = \frac{1}{H_I a(t_{\text{ii}})} - \frac{1}{H_I a(t_{\text{fi}})} \quad (3.39)$$

Se ha constatado previamente que la solución de la planitud es necesaria $a(t_{\text{fi}}) \approx 10^{26}a(t_{\text{ii}})$, por lo tanto, el primer sumando, de la expresión (3.39) es ampliamente dominante frente al segundo. Por consiguiente, podemos aproximar.

$$\int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{fi}}} \frac{dt}{a(t)} \approx \frac{1}{H_I a(t_{\text{ii}})} \quad (3.40)$$

Por lo tanto, dado que $a(t_{\text{ii}}) \rightarrow 0$ vemos que; $\int_{t_{\text{ii}}}^{t_{\text{fi}}} \frac{dt}{a(t)} \rightarrow \infty$. Entonces, durante la inflación, una pequeña porción, causalmente conectada del universo, puede crecer significativamente, lo puede generar la isotropía de la temperatura del CMB que observamos [6].

3.2.3. Solución del problema de las reliquias no deseadas

La solución del problema de las reliquias es sencilla, la densidad de las reliquias se reduce de manera significativa debido a la expansión acelerada del universo, lo cual es factible debido a que la densidad de energía durante la inflación, $\rho_I \sim \text{constante}$, decae más lentamente que la densidad de partículas de las reliquias $\rho_m \sim \frac{1}{a^3}$. La solución otorgada por la inflación a este problema se logra si, tras la inflación, la densidad de energía del universo se convierte en materia ordinaria sin reconstruir reliquias no deseadas. Si garantizamos que, durante el proceso de recalentamiento, la temperatura no aumente significativamente (aproximadamente 10^{14} GeV), es probable que no haya recreación de reliquias. De esta manera, el recalentamiento solo producirá partículas observadas [6].

Capítulo 4

Conclusiones

En la presente tesis, se llevó a cabo un análisis del modelo estándar cosmológico a partir del modelo FRW. Este estudio nos ha llevado a una serie de problemas observacionales, como la planitud del universo, la uniformidad del CMB y las reliquias no deseadas, cuya solución es proporcionada por el modelo inflacionario, introduciendo una fase temprana de expansión acelerada del universo. El modelo inflacionario ofrece soluciones plausibles mediante un campo escalar, el inflatón. Estas soluciones nos brindan una mayor comprensión del origen y evolución del universo. Aunque, el modelo cosmológico inflacionario proporciona una explicación para los problemas del modelo estándar cosmológico, también ha generado un problema relevante: la falta de conocimiento acerca del mecanismo físico que provocó esta expansión acelerada. No obstante, los cosmólogos están elaborando diversos modelos de inflación que se basan en campos escalares o teoría de cuerdas con el propósito de abordar esta cuestión. A pesar de ello, el modelo inflacionario ha demostrado ser una parte esencial para comprender los primeros instantes de nuestro universo. La era de la cosmología de precisión tuvo inicio hace una década, y las mediciones futuras nos brindarán la posibilidad de aceptar o no el modelo cosmológico inflacionario.

Bibliografía

- [1] Peter Collier. A most incomprehensible thing: notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity. Incomprehensible Books, 2017.
- [2] Daniel Baumann. Cosmology. Cambridge University Press, 2022.
- [3] Sean M Carroll. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. Addison Wesley, 101:102, 2004.
- [4] Martín González Abaúnza et al. La explicación inflacionaria del problema del horizonte y las anisotropías de la radiación cósmica de fondo. 2023.
- [5] Leticia Pérez Sienes, Eduardo Follana Adin, and Vicente Azcoiti Pérez. Modelos cosmológicos no estándar.
- [6] Pedro Mario Cañate Casseres. Reducción de la función de onda en el contexto cosmologico y el surgimiento de la inhomogeneidades primordiales. UNAM, 2015.
- [7] Víctor García Muñoz et al. Introducción a la cosmología inflacionaria. 2021.
- [8] Jhoan Eduar Pérez Velásquez et al. La teoría inflacionaria y los problemas de la cosmología estándar. 2010.
- [9] Saúl Ramos-Sánchez. para futuros físicos.
- [10] Manuel Ovidio Aguirre. Introducción a la cosmología. 2008.
- [11] David C Kay. Cálculo tensorial. McGraw-Hill, 1989.
- [12] Mario Francisco Llerena Oña. Modelo cosmológico anisótropo con métrica bianchi tipo i axisimétrica en coordenadas esféricas con constante cosmológica distinta de cero. B.S. thesis, Quito, 2016., 2016.
- [13] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University Press, 2006.
- [14] Steven Weinberg. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.
- [15] D Figueroa and J García. Una ventana al primer instante del universo. Investigación y Ciencia, 435:69–75, 2012.
- [16] SAÚL AMBRIZ ARÉVALO. INFLACIÓN CÓSMICA MEDIANTE TEORÍAS $f(R)$. PhD thesis, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, 2023.

- [17] Guillermo Martínez Somonte et al. *Inflación cósmica: modelos inflacionarios con déficit de potencia a gran escala y comparación con observaciones*. 2016.
- [18] Janssen Bert. *Teoría general de la relatividad*. Granada: Universidad de Granada-España, Departamento de física teórica y del cosmos, 2013.
- [19] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [20] Carlos Alfredo Rico Olvera et al. *Estudio de la dinámica de un modelo friedmann-lemaître-robertson-walker de cosmología viscosa*. 2023.
- [21] Dale A Ostlie and Bradley W Carroll. *An introduction to modern astrophysics*. Addison-Wesley Reading, MA, USA, 2007.
- [22] Eladio Alonso Moreno Alcalá. *Fenomenología de un modelo de campo escalar de materia y energía oscura*. cinvestav, 2020.
- [23] Roberta Brawer. *Inflationary cosmology and horizon and flatness problems: the mutual constitution of explanation and questions*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [24] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [25] Berta Margalef-Bentabol, Juan Margalef-Bentabol, and Jordi Cepa. Evolution of the cosmological horizons in a concordance universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(12):035, 2012.
- [26] G León. *Caracterizaciones de los estados post-colapso del inflatón en el origen cuántico de las fluctuaciones cosmológicas primordiales*. PhD thesis, PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.
- [27] David H Lyth and Andrew R Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge university press, 2009.
- [28] F Schmidt and S Dodelson. *Modern cosmology*, 2021.
- [29] Daniel Baumann. Tasi lectures on inflation. arXiv preprint arXiv:0907.5424, 2009.