

	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS					  	
	CARTA DE AUTORIZACIÓN						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 1

Neiva, 15 de Febrero de 2016

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Lucero Serrano Perdomo, con C.C. No. 1.075.262.526,

Víctor Alejandro Burbano Andrade, con C.C. No. 1.075.255.174,

autores del trabajo de grado titulado Curvas Cíclicas presentado y aprobado en el año 2016 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

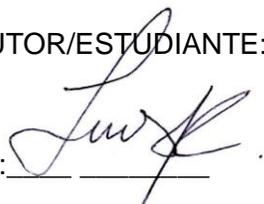
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

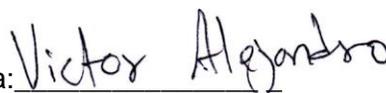
EL AUTOR/ESTUDIANTE:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



Firma:



	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS					  	
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 3

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Curvas Cíclicas

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Serrano Perdomo	Lucero
Burbano Andrade	Víctor Alejandro

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio
Alvis	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: de Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2016

NÚMERO DE PÁGINAS: 71

	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS					  	
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 3

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas___ Fotografías X Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general X Grabados___ Láminas___
Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros X

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: pdf

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. <u>Geometría</u>	<u>Geometry</u>	6. <u>Epitrocoide</u>	<u>Epitrochoid</u>
2. <u>Secciones cónicas</u>	<u>Conic sections</u>	7. <u>Epicicloide</u>	<u>Epicicloide</u>
3. <u>Curvas cíclicas</u>	<u>Cyclical curves</u>	8. <u>Hipotrocoide</u>	<u>Hypotrochoid</u>
4. <u>Trocoide</u>	<u>Trochoid</u>	9. <u>Hipocicloide</u>	<u>Hypocycloid</u>
5. <u>Cicloide</u>	<u>Cycloid</u>	10. <u>Aplicaciones</u>	<u>Applications</u>

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Capítulo 1. *Preliminares*: se hace una breve presentación al lector sobre algunos resultados importantes de la geometría analítica plana; como fórmulas, ecuaciones, transformaciones de coordenadas y coordenadas polares como sustento inicial para la lectura del trabajo.

Capítulo 2. *Las secciones cónicas*: comprende un estudio sobre la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola que contiene sus ecuaciones cartesianas, definiciones y aplicaciones de cada una de ellas.

Capítulo 3. *Las Curvas Cíclicas*: se estudia la trocoide de la cual se derivan otras curvas como la cicloide acortada, alargada y normal; la epitrocoide que facilita el estudio de la

	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS					  	
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 3

epicicloide corta, larga, la cardiode y la nefroide y la hipotrocoide de la cual se aborda la hipocicloide acortada, alargada, rectilínea, triangular o tricuspidal y cuadrangular o astroide.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Chapter 1. Preliminaries: a brief presentation is made to the reader about some important results of the analytical plane geometry; as formulas, equations, transformations and polar coordinates as initial support for reading the work.

Chapter 2. The conic sections: includes a study of the circle, parabola, ellipse and hyperbola containing its Cartesian equations, definitions and applications of each.

Chapter 3. Cyclic curves: the trochoid which other curves as shortened, elongated cycloid normal stem is studied; epitrochoid which facilitates the study of the epicycloid short, long, and nephroid cardioid and hypotrochoid which the shortened elongated rectilinear, triangular or quadrangular or tricuspidal hypocycloid astroid addresses.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Johnny Fernando Alvis

Firma: *Johnny Fernando Alvis P.*



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

Curvas Cíclicas

Lucero Serrano Perdomo
Victor Alejandro Burbano Andrade

Neiva, Huila
2016



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

Curvas Cíclicas

*Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciados en Matemáticas*

Lucero Serrano Perdomo

Cód. 2008277154

Victor Alejandro Burbano Andrade

Cód. 2009287612

Asesor:

Mag. Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2016

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Mag. Mauricio Penagos

Asesor

Mag. Mauricio Penagos

Segundo Lector

Mag. Johnny Fernando Alvis

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Febrero de 2016

AGRADECIMIENTOS

*L*a elaboración de este trabajo fue posible gracias a la contribución de las siguientes personas e instituciones. Sin ellos, el alcance de nuestras metas no se habría logrado.

Agradecemos primero que todo a DIOS por su maravillosa obra, por hacer de nosotros personas de bien y aguerridos luchadores.

A nuestras familias por su apoyo. Su constante motivación, por educarnos y orientarnos todos los días; por enseñarnos a obrar con rectitud, respeto y solidaridad.

A los profesores que nos vieron crecer tanto física como espiritual y emocionalmente. Fueron ellos quienes nos educaron, nos asistieron y estimularon nuestro deseo de conocimiento.

Por último al profesor *Mauricio Penagos*, nuestro asesor, quien más que un profesor es un amigo.

1.	PRELIMINARES	10
2.	CÓNICAS	15
2.1.	CIRCUNFERENCIA	16
2.1.1.	Ecuación de la circunferencia con centro en el origen	16
2.1.2.	Ecuación general de la circunferencia	17
2.1.3.	Recta tangente a una circunferencia	18
2.1.4.	Intersección de una circunferencia con una recta	20
2.2.	LA PARÁBOLA	23
2.3.	LA ELIPSE	31
2.4.	LA HIPÉRBOLA	38
2.5.	ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LAS CÓNICAS	45
3.	CURVAS CÍCLICAS	48
3.1.	LA TROCOIDE	48
3.1.1.	LA CICLOIDE	51
3.2.	LA EPITROCOIDE Y LA HIPOTROCOIDE	56
3.3.	LA EPITROCOIDE	57
3.3.1.	EPICICLOIDE	58
3.4.	LA HIPOTROCOIDE	63
3.4.1.	HIPOCICLOIDE	65
4.	CONCLUSIONES	70
5.	BIBLIOGRAFÍA	71

El presente trabajo se refiere al estudio de algunas curvas cíclicas estudiadas por matemáticos, físicos e ingenieros. De esta manera, el trabajo se ha dividido en tres partes:

Capítulo 1. *Preliminares*: se hace una breve presentación al lector sobre algunos resultados importantes de la geometría analítica plana; como fórmulas, ecuaciones, transformaciones de coordenadas y coordenadas polares como sustento inicial para la lectura del trabajo.

Capítulo 2. *Las secciones cónicas*: comprende un estudio sobre la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola que contiene sus ecuaciones cartesianas, definiciones y aplicaciones de cada una de ellas.

Capítulo 3. *Las Curvas Cíclicas*: se estudia la trocoide de la cual se derivan otras curvas como la cicloide acortada, alargada y normal; la epitrocoide que facilita el estudio de la epicicloide corta, larga, la cardiode y la nefroide y la hipotrocoide de la cual se aborda la hipocicloide acortada, alargada, rectilínea, triangular o tricuspidal y cuadrangular o astroide.

La principal motivación para abordar el tema del trabajo de grado fue facilitar el estudio de las curvas cíclicas, dándolas a conocer al lector con claridad y en forma simple ya que es poco común encontrarlas en textos.

El presente trabajo de grado puede ser leído por estudiantes de educación secundaria, media y universitarios que hayan tomado cursos de matemáticas básicas y tengan algún conocimiento de geometría analítica.

En cada capítulo del trabajo se presentan conceptos fundamentales ampliamente ilustrados, y con un desarrollo secuencial a lo largo del trabajo. Además aparecen varios ejercicios resueltos de cada tema que ilustran al lector en lo estudiado.

El primer capítulo contiene los conceptos de la geometría analítica plana básica que el lector debe dominar para poder estudiar las cónicas.

El segundo capítulo, las secciones cónicas que posiblemente ya hayan sido estudiadas por el lector, ya que en secundaria se trabaja de forma elemental con la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, sus ecuaciones y representación en el plano cartesiano y nuevamente se tratan al inicio de la licenciatura.

En el último capítulo se estudia en detalle algunas *curvas cíclicas* o también llamadas *curvas mecánicas*, o, *curvas clásicas*. Se deducen sus ecuaciones cartesianas, paramétricas y algunos resultados importantes y aplicaciones.

Este trabajo fue motivado por nuestro interés sobre el cálculo y la geometría analítica, la relación con estos dos cursos estudiados en la licenciatura en matemáticas y que despertaron en nosotros la curiosidad de estudiar estas interesantes curvas.

El trabajo pretende de alguna manera complementar conceptos estudiados en la formación básica donde usualmente no se presentan estos temas. De paso permite al lector el estudio un poco más profundo de estas curvas desde sus orígenes y algunas de sus aplicaciones.

Al profundizar en el estudio de la *trocoide*, *epitrocoide* y *hipotrocoide*, vemos con más claridad lo interesante y significativo de estas curvas cíclicas que son importantes en la matemática ya que dan solución a problemas como la *braquistocrona* y la *tautocrona*, que surgieron en 1696, por un reto del matemático Suizo Johann Bernoulli a sus colegas Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli y Guillaume de L'Hopital utilizadas en sus distintas aplicaciones de la física y la ingeniería.

Las curvas como la cicloide se han empleado en el diseño de los dientes de los engranajes; como en los mecanismos de relojería. En física se puede ver que un péndulo que tenga por límites una curva cicloide es isócrono y el centro de gravedad del péndulo describe a su vez una cicloide. También en el diseño de ciertos toboganes y en la industria aeronáutica se utilizan la cicloide como una forma apropiada de salir deslizándose desde un avión en caso de emergencia.

OBJETIVOS GENERALES

- Presentar los resultados de la indagación hecha a través de diversas fuentes sobre las curvas cíclicas: su definición, la deducción de sus ecuaciones cartesianas y paramétricas y algunos resultados importantes de algunas de ellas como el área encerrada por un arco de curva, la longitud de un arco, sus aplicaciones entre otras.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer un recorrido por las secciones cónicas: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, y presentar la parametrización de éstas.
- Definir las curvas cíclicas notables como la trocoide, la epitrocoide y la hipotrocoide, deducir la ecuación cartesiana y paramétrica de algunas de ellas.
- Resaltar a través de las aplicaciones, la importancia de las curvas cíclicas: trocoide, epitrocoide y la hipotrocoide en la vida cotidiana.

Introducción:

En este capítulo queremos dar un repaso de los conceptos y ecuaciones fundamentales que son esenciales para la manipulación de la geometría analítica.

ALGUNOS RESULTADOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

- La distancia d entre dos puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ está dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

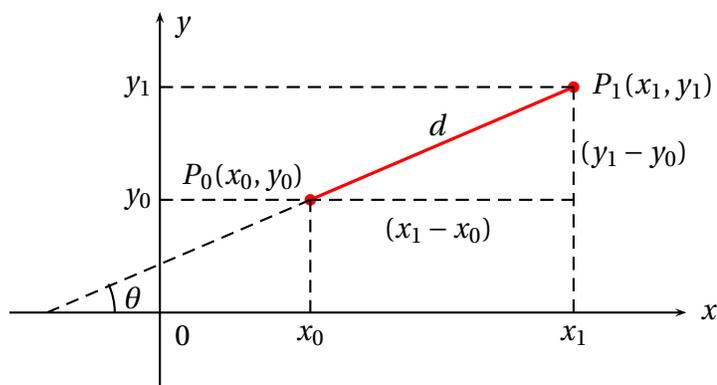


Figura 1.1: Distancia entre dos puntos P_0 y P_1

- La pendiente m de la recta que une los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ se obtiene mediante la fórmula

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan \theta, \quad \text{donde } x_0 \neq x_1$$

- La ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$ es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{o bien} \quad y = mx + b$$

donde $b = y_0 - mx_0$ es la *intersección* con el eje y .

- La ecuación de la recta cuya intersección con el eje X es $a \neq 0$ y con el eje Y es $b \neq 0$ está dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

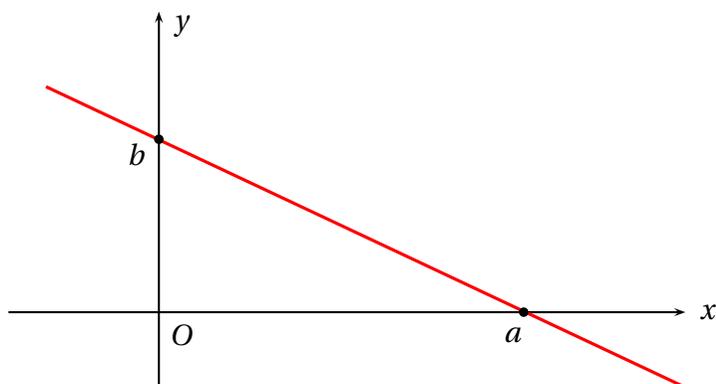


Figura 1.2: Intersección de una línea recta con los ejes, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

- La forma normal de la ecuación de una recta está dada por:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \delta$$

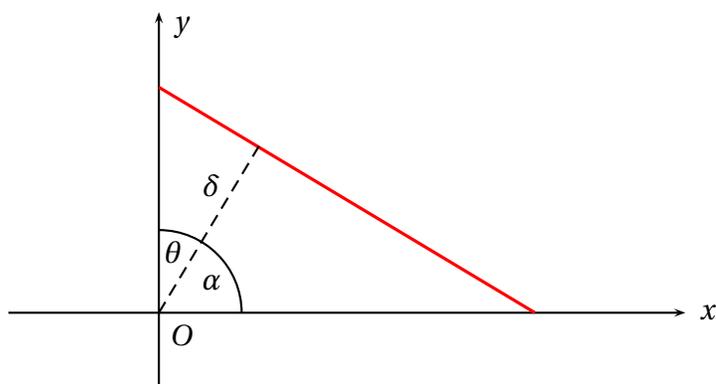


Figura 1.3: La normal de una línea recta

Donde δ es la distancia perpendicular desde el origen $O(0,0)$ hasta la recta dada y α es el ángulo que forma la perpendicular con la parte positiva del eje X .

- Ecuación general de una recta

$$Ax + By + C = 0$$

- La distancia D del punto (x_0, y_0) a la recta $Ax + By + C = 0$ esta dada por

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Donde el signo se escoge de tal manera que la distancia siempre sea positiva.

- El ángulo θ entre dos rectas cuyas pendientes son m_0 y m_1

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_0}{1 + m_0 m_1}$$

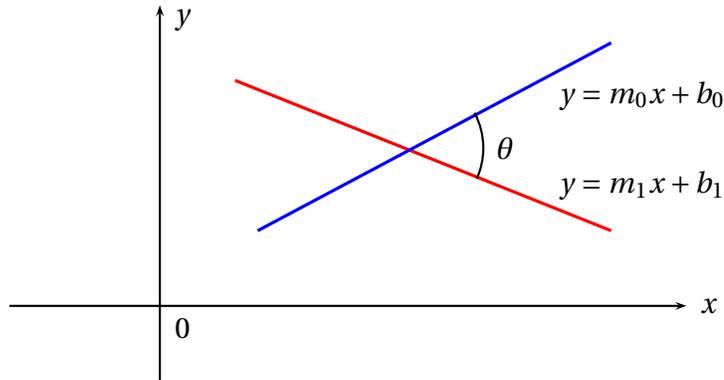


Figura 1.4: ángulo θ entre dos rectas

Las rectas coinciden o son paralelas si y sólo si $m_0 = m_1$, mientras que las rectas son mutuamente perpendiculares si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_0}$.

- Transformación de coordenadas por traslación:

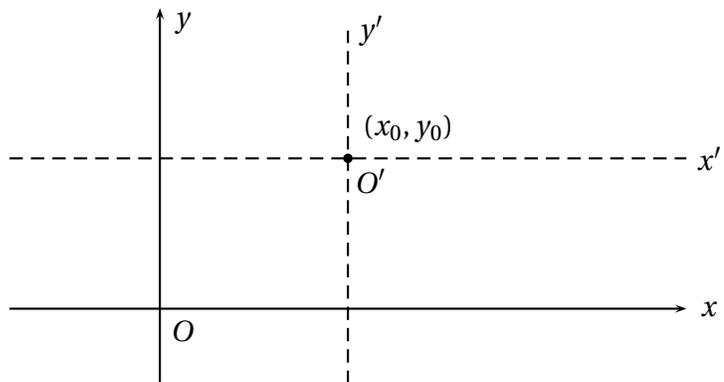


Figura 1.5: traslación de ejes

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Si (x, y) denotan las coordenadas primitivas (o sea, las coordenadas relativas al sistema xy); y (x', y') denotan las nuevas coordenadas (relativas al sistema $x'y'$), y (x_0, y_0) son las

coordenadas del nuevo origen O' con respecto al sistema primitivo de coordenadas xy .

- Transformación de coordenadas por rotación

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta \end{cases}$$

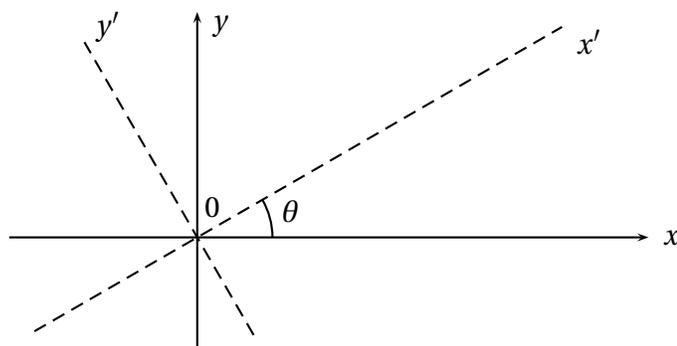


Figura 1.6: Rotación de ejes

Donde el origen del sistema inicial (xy) coincide con el del nuevo sistema de coordenadas $(x'y')$, pero el eje x' forma un ángulo θ con el eje positivo x .

- La transformación de coordenadas por traslación y rotación simultáneas son:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0 \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

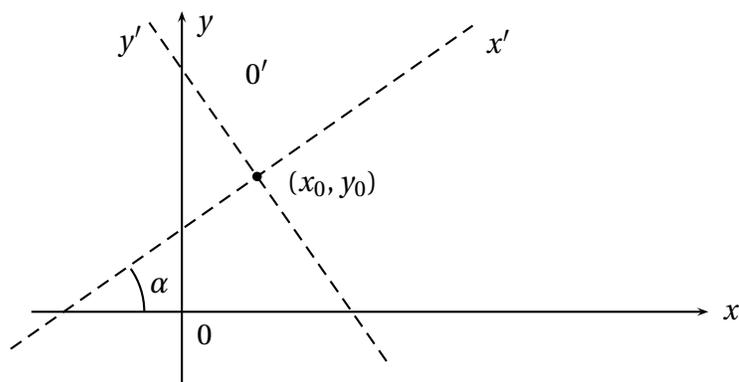


Figura 1.7: Traslación y rotación simultáneas de ejes

Donde las coordenadas del nuevo origen O' del sistema de coordenadas $x'y'$ son (x_0, y_0) en relación con el sistema primitivo de coordenadas xy , y además el eje x' forma un ángulo

α con el eje positivo x .

- Coordenadas polares (r, θ)

Un punto P se puede localizar por medio de coordenadas rectangulares (x, y) o por coordenadas polares (r, θ) . Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

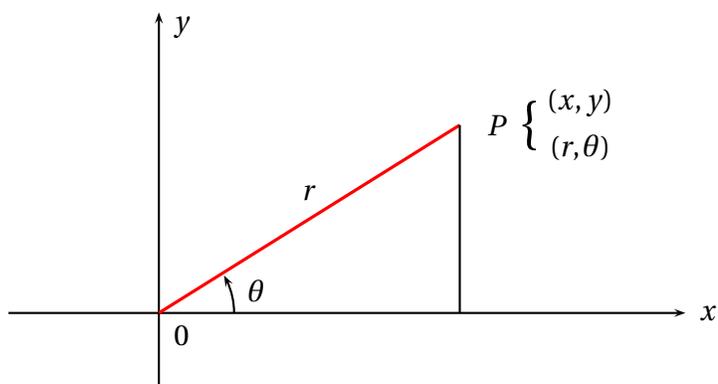


Figura 1.8: Coordenadas polares

Los resultados presentados anteriormente serán necesarios en el siguiente capítulo. Consideramos que se ha hecho un recuento básico, por lo cual el lector ya está listo para continuar con la lectura del capítulo 2.

Introducción:

En este capítulo se estudia las cónicas, sus conceptos, ecuaciones y aplicaciones. También la traslación de ejes (es decir cuando la cónica no están centradas en el origen).

La palabra *Cónica* se deriva de la palabra *cono*, que es una figura geométrica que puede construirse de la siguiente manera:

Sean L y R dos líneas rectas distintas que se intersectan en un punto V , si mantenemos fija la recta L y giramos la recta R alrededor de L manteniendo siempre el mismo ángulo entre ambas, al conjunto de puntos barridos (generados) por la recta R se llama **Cono circular recto**.

La línea fija L se llama **eje del cono**; el punto V se llama **vértice**; las líneas que pasan por V formando el mismo ángulo que forma L con R se llaman **generadores del cono**; así cada generador es una línea que se encuentra totalmente sobre el cono. El cono consiste en dos partes que se intersectan en el vértice.

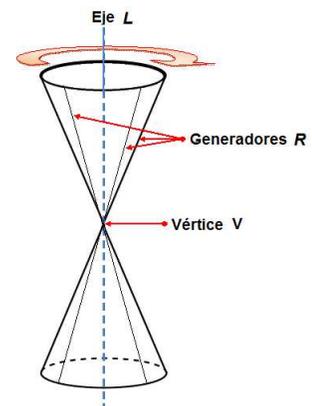


Figura 2.1: cono

Las **secciones cónicas** o simplemente **cónicas**, son curvas que se obtienen de la intersección de un cono circular recto con un plano. Las cónicas que estudiaremos surgen cuando el plano no contiene al vértice, como se muestra en la figura 2.2. Estas cónicas son **circunferencias** cuando el plano es perpendicular al eje del cono e intersecta dos generadores; son **elipses** cuando el plano está inclinado ligeramente, de manera que intersecta cada generador pero sólo una de las dos partes del cono; son **parábolas** cuando

el plano está aún mas inclinado de modo que es paralelo a un (y sólo un) generador e intersecta sólo una de las partes del cono; y son **hipérbolas** cuando el plano intersecta ambas partes del cono.

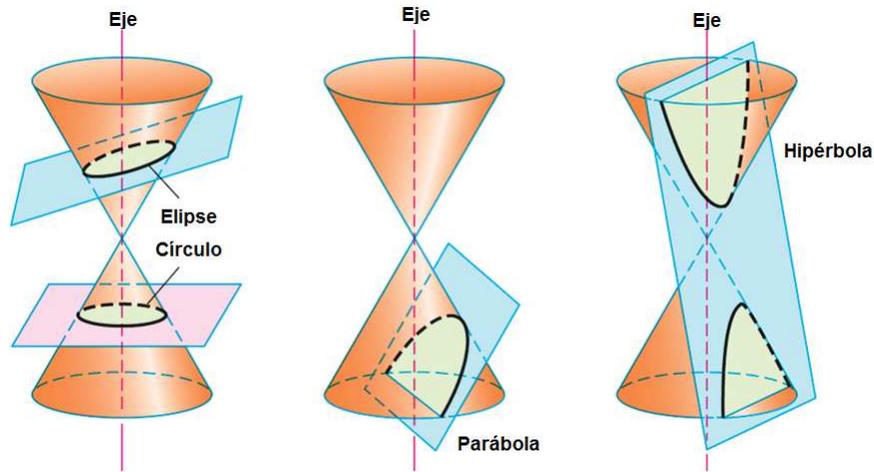


Figura 2.2: Secciones cónicas

Si el plano contiene al vértice, la intersección del plano y el cono es un punto, una línea o un par de líneas que se cortan. Éstas se llaman **cónicas degeneradas**

2.1. CIRCUNFERENCIA

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro*

2.1.1. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Deseamos encontrar la ecuación que satisfacen los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al origen $O(0, 0)$ sea igual a r , donde r cualquier número real positivo.

Dichos puntos deben satisfacer:

$$d(P, O) = r$$

Al sustituir las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos, se obtiene:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, llegamos finalmente a

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación de la circunferencia de radio r con centro en el origen.

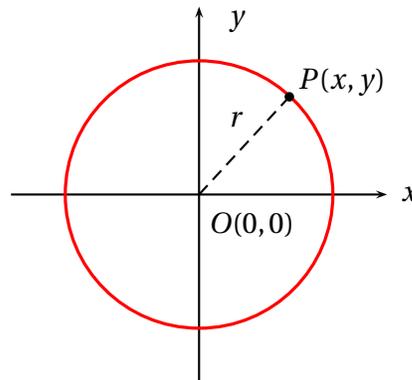


Figura 2.3: Cicunferencia con centro en el origen

2.1.2. Ecuación general de la circunferencia

Para encontrar la ecuación de una circunferencia cuyo centro sea un punto $C(a, b)$ distinto del origen, utilizamos la traslación de ejes. Para ello construimos un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ con centro en C y radio r , y así la ecuación de la circunferencia buscada es: $x'^2 + y'^2 = r^2$

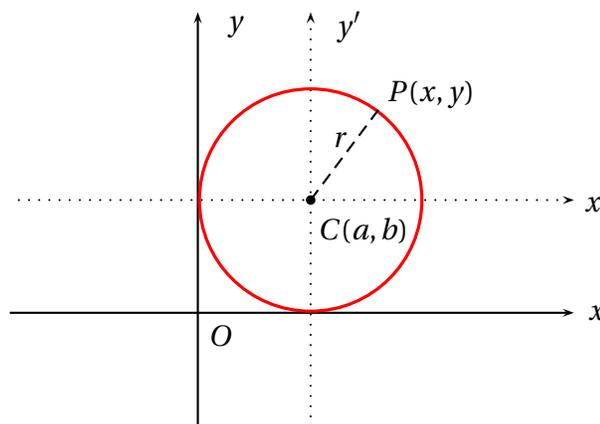


Figura 2.4: Circunferencia con centro distinto al origen

Ahora hacemos la sustitución $x' = x - a$ e $y' = y - b$

y se obtiene

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que es la ecuación *estandar* de la circunferencia de radio r con centro en $C(a, b)$.

Al desarrollar los cuadrados, llegamos a una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que se llama la *forma general* de la ecuación de la circunferencia.

La forma polar de la circunferencia con centro en (R, α) donde (r, θ) son las coordenadas polares de cualquier punto de la circunferencia y (R, α) son las coordenadas polares del centro, es $r = 2R \cos(\theta - \alpha)$.

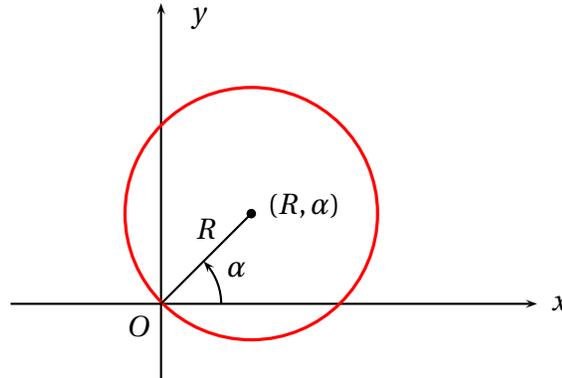


Figura 2.5: circunferencia con centro en (R, α) que pasa por el origen

2.1.3. Recta tangente a una circunferencia

Una recta es *tangente* a una circunferencia si toca a ésta en un solo punto. La recta tangente a una circunferencia tiene la propiedad de que es perpendicular al radio que une al punto de tangencia con el centro de la circunferencia, esta propiedad es la que nos permite encontrar su ecuación.

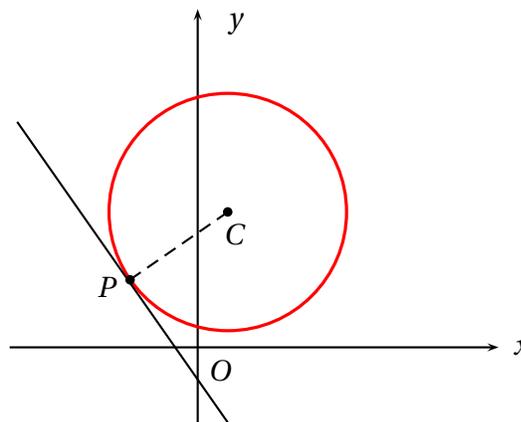


Figura 2.6: Recta tangente a una circunferencia

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la recta L que es tangente a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 100$ en el punto $P(-5, 6)$.

Solución:

Debemos encontrar primero la pendiente del radio que une a P con el punto centro de la circunferencia. Como el centro tiene coordenadas $(3, 12)$, la pendiente buscada es por tanto

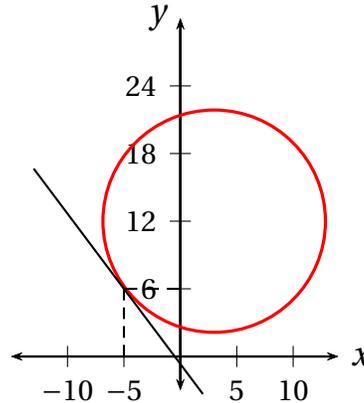
$$m = \frac{6 - 12}{-5 - 3} = \frac{3}{4},$$

así que la pendiente de la recta tangente a la circunferencia en P tiene pendiente $-\frac{4}{3}$, por lo tanto su ecuación es

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x + 5),$$

es decir,

$$4x + 3y + 2 = 0.$$



Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $x - 2y + 2 = 0$ en el punto $P(8, 5)$ y que pasa por $Q(12, 9)$.

Solución:

El centro $C(x_0, y_0)$ de la circunferencia debe estar en la recta perpendicular a la recta dada que pasa por P . Como la recta dada tiene pendiente $\frac{1}{2}$, su perpendicular tiene pendiente $m = -2$, por lo tanto, su ecuación es

$$y - 5 = -2(x - 8),$$

es decir

$$2x + y - 21 = 0,$$

por lo tanto, las coordenadas de C satisfacen

$$2x_0 + y_0 - 21 = 0, \quad (1)$$

como la distancia de C a P debe ser igual a la distancia de C a Q , se tiene

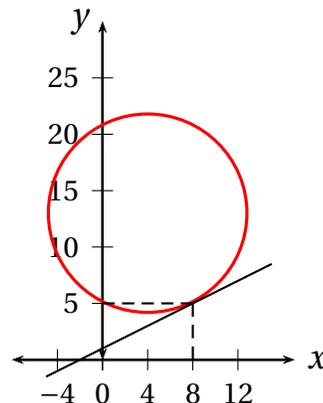
$$d(C, P) = d(C, Q),$$

es decir

$$\sqrt{(x_0 - 8)^2 + (y_0 - 5)^2} = \sqrt{(x_0 - 12)^2 + (y_0 - 9)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando las expresiones, se obtiene

$$x_0 + y_0 - 17 = 0 \quad (2)$$



Resolvemos simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) y encontramos que las coordenadas de C son $C(4, 13)$. El radio es la distancia de C a P es

$$r = \sqrt{(4-8)^2 + (13-5)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

así que la ecuación de la circunferencia buscada es

$$(x-4)^2 + (y-13)^2 = 80$$

o en la forma general

$$x^2 + y^2 - 8x - 26y + 105 = 0$$

2.1.4. Intersección de una circunferencia con una recta

De acuerdo a la siguiente figura, dadas una circunferencia y una recta, puede ocurrir que:

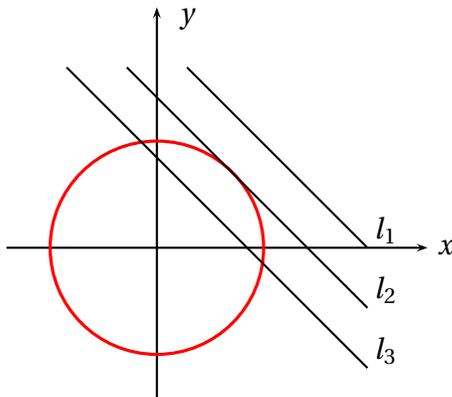


Figura 2.7: Intersección de una circunferencia con una recta

- No se corten,
- La recta es tangente a la circunferencia,
- La recta corta a la circunferencia en dos puntos.

Estas situaciones en términos algebraicos se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y de la circunferencia y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución cuando no se cortan,
- Hay una solución cuando la recta es tangente a la circunferencia,
- Hay dos soluciones cuando la recta corta a la circunferencia en dos puntos.

Ejemplos 1. Encontrar la intersección de la recta $x + y + 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

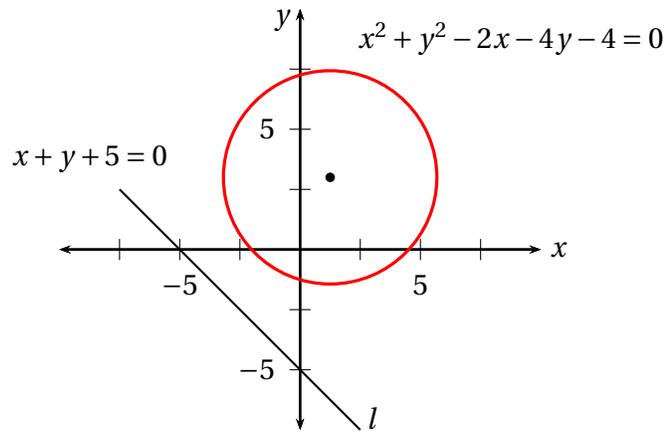


Figura 2.8: Ejemplo 1

Solución:

Debemos resolver simultáneamente el sistema las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

para ello, despejamos y de la ecuación de la recta, obtenemos

$$y = -x - 5$$

y la sustituimos en la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + (-x - 5)^2 - 2x - 4(-x - 5) - 4 = 0,$$

simplificamos

$$2x^2 + 12x + 41 = 0.$$

Aplicando la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado se obtiene

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - (4)(2)(41)}}{2(2)} = \frac{-12 \pm \sqrt{-184}}{4},$$

Y puesto que el discriminante, es negativo, la ecuación no tiene solución, lo que significa que la recta y la circunferencia no se cortan.

Ejemplo 2. Encontrar la intersección de la circunferencia $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$ con la recta $2x - y + 1 = 0$.

Solución:

Como en el ejemplo anterior debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases}$$

para esto, despejamos y de la ecuación de la recta y la sustituimos en la ecuación de la circunferencia para obtener

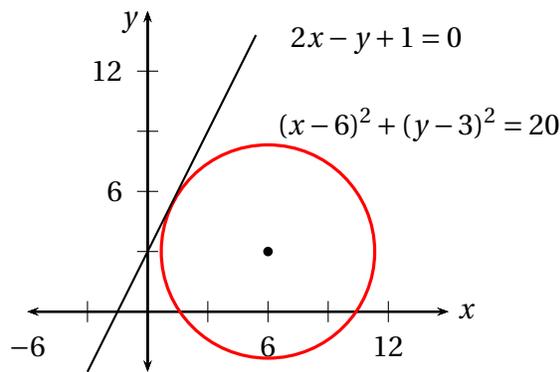


Figura 2.9: Ejemplo 2

$$(x-6)^2 + ((2x+1)-3)^2 = 20,$$

o bien,

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

es decir

$$(x-2)^2 = 0.$$

La única raíz de esta última ecuación es $x = 2$, sustituimos este valor en la ecuación de la recta y obtenemos $y = 5$, así que el único punto donde se cortan la recta y la circunferencia es $P(2, 5)$, esto significa que la recta es tangente a la circunferencia en este punto.

Ejemplo 3. Encontrar la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x - 2y + 2 = 0$.

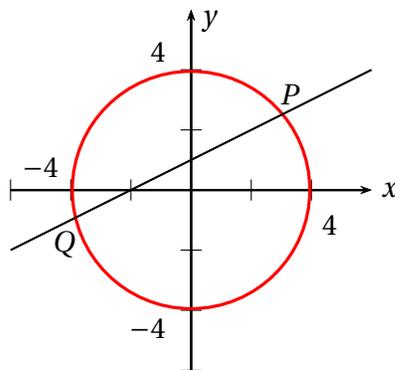


Figura 2.10: Ejemplo 3

Solución:

Con un análisis similar al de los dos ejemplos anteriores se sigue que

$$x = 2y - 2$$

es decir, los puntos donde se cortan la recta y la circunferencia son

$$P\left(\frac{-2+4\sqrt{19}}{5}, \frac{4+2\sqrt{19}}{5}\right) \quad \text{y} \quad Q\left(\frac{-2-4\sqrt{19}}{5}, \frac{4-2\sqrt{19}}{5}\right)$$

2.2. LA PARÁBOLA

Definición: Una **parábola** se define como el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo M y de una línea fija D . El punto F se llama **foco** de la parábola y la línea D es su **directriz**. Una parábola es entonces, el conjunto de puntos para los cuales

$$d(F, P) = d(P, D)$$

La figura 2.11 muestra una parábola. La línea que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz D se llama **eje de simetría** de la parábola. El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría se llama **vértice** V .

Puesto que el vértice V está sobre la parábola, debe satisfacer la ecuación $d(F, V) = d(V, D)$. Así, el vértice está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Llamaremos a a la distancia $d(F, V)$ de F a V .

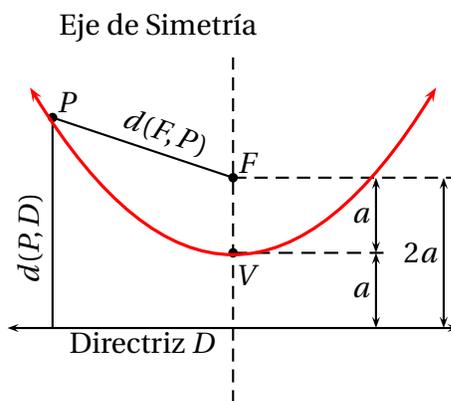


Figura 2.11: Parábola

En el cuadro 2.1 se dan las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y foco sobre un eje coordenado a una distancia a de $(0, 0)$; Sus gráficas se muestran en la figura 2.12. Observe que cada gráfica es simétrica respecto de su eje de simetría.

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(0,0)	(a,0)	$x = -a$	$y^2 = 4ax$ (1)	Parábola, el eje de simetría es el eje x , se abre hacia la derecha.
(0,0)	(-a,0)	$x = a$	$y^2 = -4ax$ (2)	Parábola, el eje de simetría es el eje x , se abre hacia la izquierda.
(0,0)	(0,a)	$y = -a$	$x^2 = 4ay$ (3)	Parábola, el eje de simetría es el eje y , se abre hacia arriba.
(0,0)	(0,-a)	$y = a$	$x^2 = -4ay$ (4)	Parábola, el eje de simetría es el eje y , se abre hacia abajo.

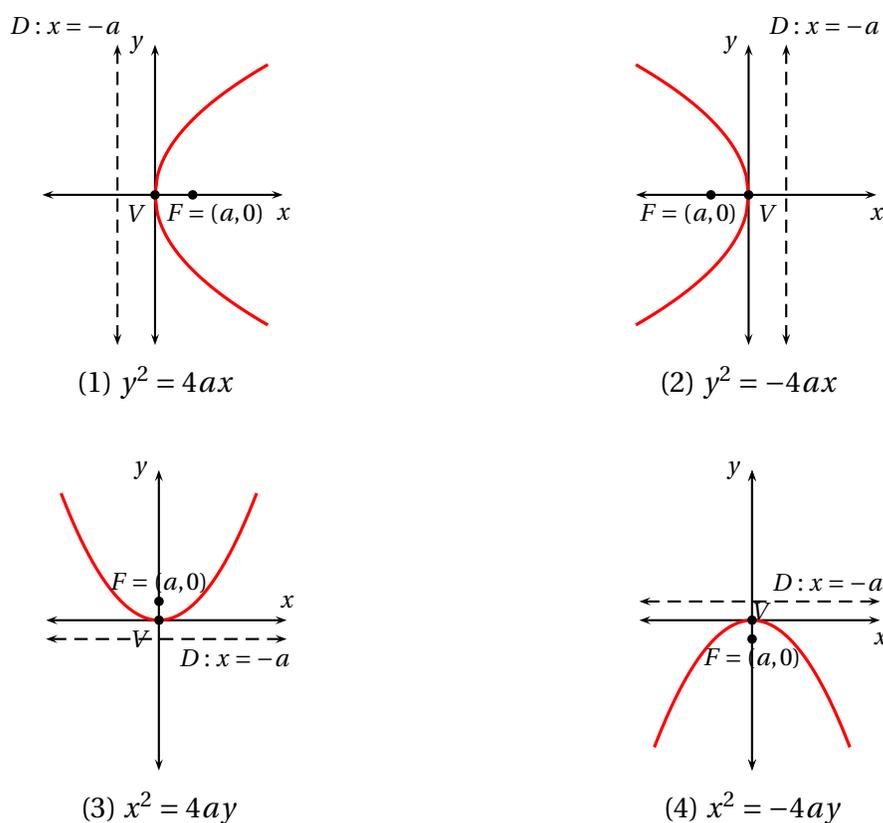
Cuadro 2.1: Ecuaciones de una parábola: Vértice en (0,0); foco sobre un eje; $a > 0$ 

Figura 2.12: Parábolas con vértice en (0,0)

Ejemplo 1. Encuentre la ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y foco en (3,0) y grafíquela.

Solución

La distancia del vértice (0,0) al foco (3,0) es $a = 3$. A partir de la ecuación (1) es claro que la ecuación de esta parábola es

$$y^2 = 12x$$

Para graficar esta parábola, es conveniente marcar los dos puntos de la gráfica situados arriba y abajo del foco. Para ello, hacemos que $x = 3$. Entonces,

$$y^2 = 12x = 36$$

$$y = \pm 6$$

Los puntos arriba y abajo del foco son $(3, 6)$ y $(3, -6)$. Ver la figura 2.13

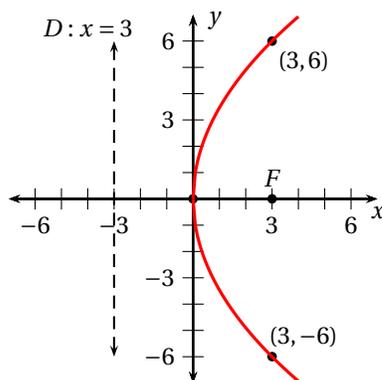


Figura 2.13: Ejemplo 1

En general, los puntos sobre una parábola $y^2 = 4ax$ que se encuentran arriba y abajo del foco $(a, 0)$, están cada uno a una distancia $2a$ de éste. Es claro que ello es así, pues si $x = a$, entonces $y^2 = 4ax = 4a^2$, o $y = \pm 2a$. El segmento de línea que une estos dos puntos se llama **lado recto**; y su longitud es $4a$

Ejemplo 2. Analice la ecuación: $x^2 = -12y$

Solución

La ecuación $x^2 = -12y$ es de la forma $x^2 = -4ay$, con $a = 3$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en $(0, -3)$ y cuya directriz es la línea $y = 3$. La parábola se abre hacia abajo y su eje de simetría es el eje y . Para obtener los puntos que definen el lado recto, hacemos que $y = -3$. Entonces, $x^2 = 36$, o $x = \pm 6$. Ver figura 2.14

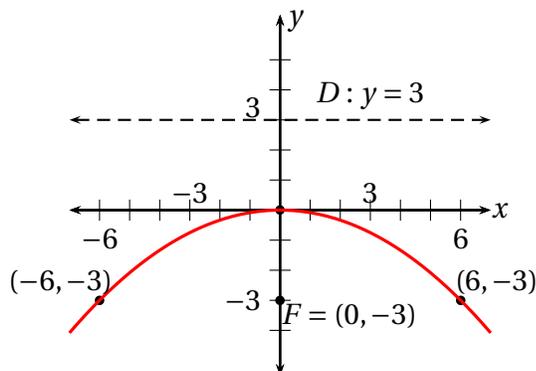


Figura 2.14: Ejemplo 2

PARÁBOLA CON VÉRTICE EN (h, k)

Si una parábola con vértice en el origen y eje de simetría a lo largo de un eje coordenado se desplaza h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado es una parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a un eje coordenado. Las ecuaciones de tales parábolas tienen la misma forma que las del cuadro 1.1, pero con x reemplazada por $x - h$ y y reemplazada por $y - k$. El cuadro 2.2 da las formas de las ecuaciones de tales parábolas. Las gráficas (a)-(d) ilustra las parábolas para $h > 0, k > 0$.

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRÍZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(h, k)	$(h + a, k)$	$x = -a + h$	$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x , se abre hacia la derecha.
(h, k)	$(h - a, k)$	$x = a + h$	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x , se abre hacia la izquierda.
(h, k)	$(h, k + a)$	$y = -a + k$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y , se abre hacia la arriba.
(h, k)	$(h, k - a)$	$y = a + k$	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y , se abre hacia la abajo.

Cuadro 2.2: Parábola con vértice en (h, k) , eje de simetría paralelo a un eje coordenado.

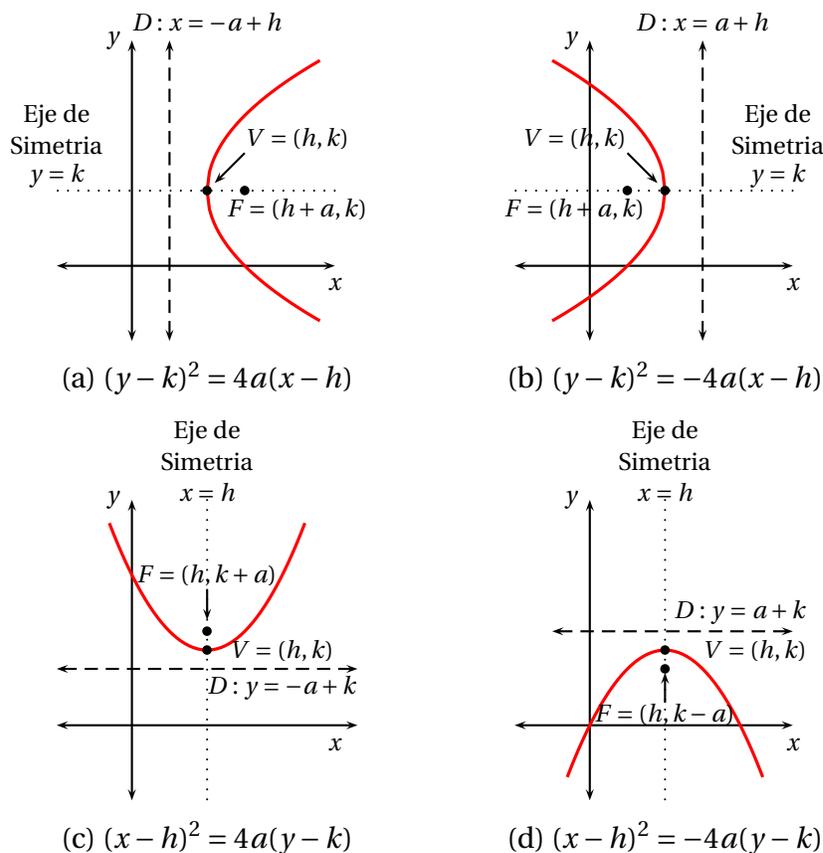


Figura 2.15: Parábolas con vértice en (h, k)

Ejemplo 3. Encuentre una ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 3)$ y foco en $(0, 3)$ y gráfiquela.

Solución

El vértice $(-2, 3)$ y el foco $(0, 3)$ están ambos sobre la línea horizontal $y = 3$ (el eje de simetría). La distancia a de $(-2, 3)$ a $(0, 3)$ es $a = 2$. Además, puesto que el foco está a la derecha del vértice, sabemos que la parábola se abre hacia la derecha. En consecuencia, la forma de la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

donde $(h, k) = (-2, 3)$ y $a = 2$. Por tanto, la ecuación es

$$(y - 3)^2 = 4 \cdot 2[x - (-2)]$$

$$(y - 3)^2 = 8(x + 2)$$

Si $x = 0$, entonces $(y - 3)^2 = 16$. Así, $y - 3 = \pm 4$ y $y = -1, y = 7$. Los puntos $(0, -1)$ y $(0, 7)$ definen el lado recto; la línea $x = -4$ es la directriz. Ver figura 2.16

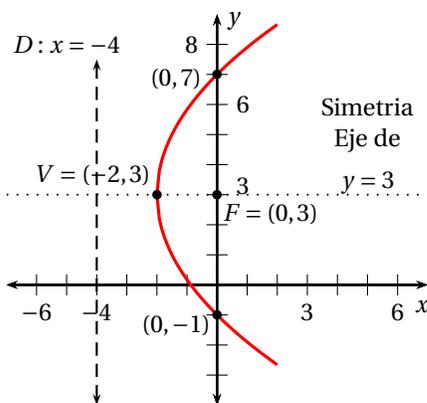


Figura 2.16: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Analice la ecuación: $x^2 + 4x - 4y = 0$

Solución

Si completamos el cuadrado de los términos en x , se obtiene:

$$x^2 + 4x - 4y = 0$$

$$x^2 + 4x = 4y$$

$$x^2 + 4x + 4 = 4y + 4$$

$$(x + 2)^2 = 4(y + 1)$$

Ésta ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, con $h = -2, k = -1$ y $a = 1$. La gráfica es una parábola con vértice en $(h, k) = (-2, -1)$ que se abre hacia arriba. El foco está en $(-2, 0)$ y la directriz es la línea $y = -2$. Ver figura 2.17

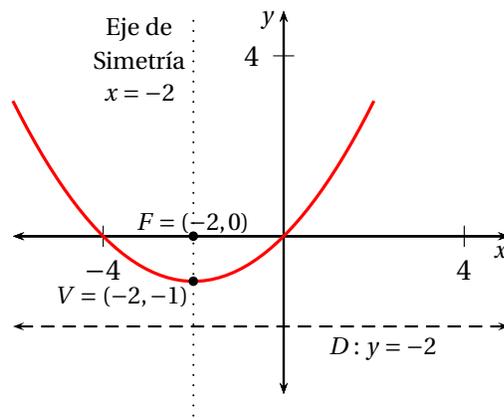


Figura 2.17: Ejemplo 4

APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

Las parábolas tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, los puentes colgantes tienen cables en forma de parábola. Otra propiedad de las parábolas empleadas en varios instrumentos, es su propiedad de reflexión.

PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA PARÁBOLA

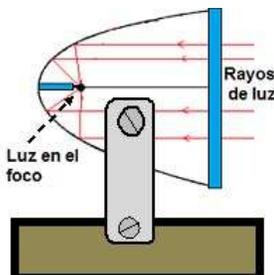


Figura 2.18: Reflector

Suponga que un espejo tiene la forma de un paraboloides de revolución, que es la superficie que se forma al girar una parábola sobre su eje de simetría. Si una fuente de luz (o cualquier otra fuente emisora) se coloca en el foco de la parábola, todos los rayos que emanen de ella se reflejarán en el espejo siguiendo líneas paralelas al eje de simetría. Este principio se usa en el diseño de reflectores, lámparas, cierto fanales de automóviles y otros dispositivos. Vea la figura 2.18

De manera inversa, suponga que de una fuente lejana emanan rayos de luz (u otras señales) prácticamente paralelos. Cuando estos rayos tocan la superficie de un espejo parabólico, cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, se reflejarán hacia un solo punto en el foco. Este principio se usa en el diseño de algunos dispositivos solares, antenas parabólicas y en los espejos usados en algunos tipos de telescopios. Vea la figura 2.19

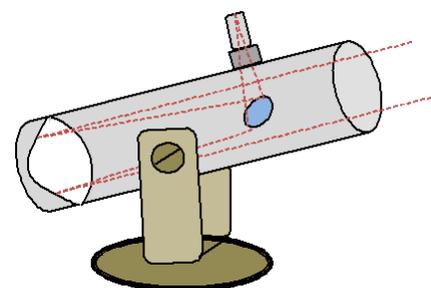


Figura 2.19: Telescopio

Ejemplo 5. Antena Parabólica

Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloides de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde está localizado el receptor. Si la antena tiene 8 pies de abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?

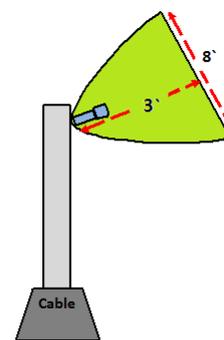


Figura 2.20: Antena

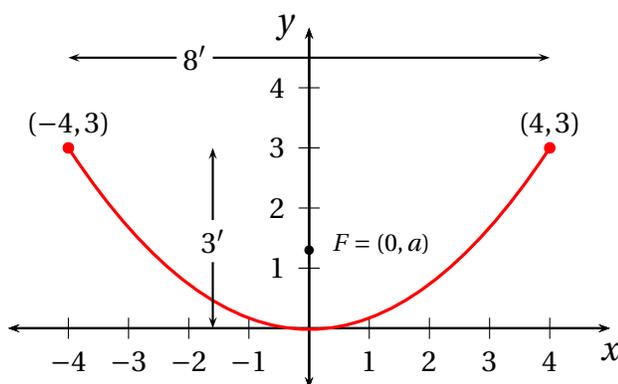


Figura 2.21: Ejemplo 5

Solución

La figura muestra la antena parabólica. Se dibuja la parábola usada para formar la antena sobre un sistema coordenado rectangular, de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su foco sobre el eje y positivo. Vea la figura 2.20. La forma de la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4ay$$

y su foco está en $(0, a)$. dado que $(4, 3)$ es un punto sobre la gráfica, tenemos que

$$\begin{aligned} 4^2 &= 4a(3) \\ a &= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Éste receptor debe localizarse a $1\frac{1}{3}$ pies de la base de la antena, a lo largo de su eje de simetría.

Ejemplo 6. *Puente de arco parabólico*

Se construye un puente con forma de arco parabólico. El puente tiene un claro de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Vea la figura. Escoja un sistema coordenado rectangular adecuado y encuentre la altura del arco a la distancia de 10, 30 y 50 pies del centro.

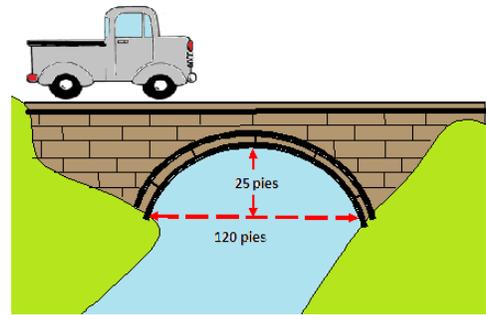


Figura 2.22: Puente de arco parabólico

Solución

De acuerdo a la figura 1.6, dibujamos la parábola en un sistema de coordenadas rectangular, para luego hallar la ecuación y después las alturas.

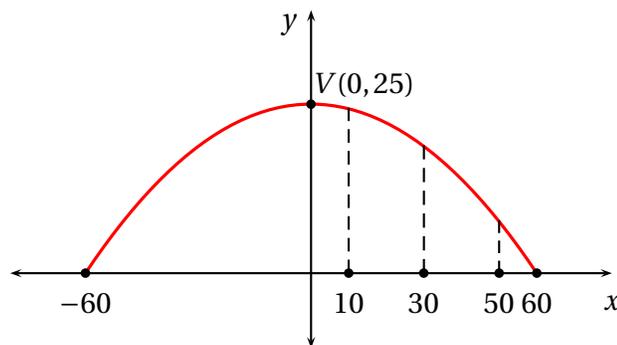


Figura 2.23: Ejemplo 6

La forma de la ecuación de la parábola es:

$$(x - h)^2 = -4a(y - k)$$

y su vértice es $(0, 25)$, entonces:

$$x^2 = -4a(y - 25)$$

$$-\frac{x^2}{4(y - 25)} = a$$

Dado que $(60, 0)$ es un punto sobre la parábola, tenemos que:

$$a = -\frac{3600}{4(-25)} = 36$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -4(36)(y - 25)$$

$$x^2 = -144y + 3600$$

Luego las alturas son:

- Si $x = 10$, entonces

$$(10)^2 = -144y + 3600$$

$$y = \frac{3500}{144} = \frac{875}{36}$$

- Si $x = 30$, entonces

$$(30)^2 = -144y + 3600$$

$$y = \frac{2700}{144} = \frac{75}{4}$$

- Si $x = 50$, entonces

$$(50)^2 = -144y + 3600$$

$$y = \frac{1100}{144} = \frac{275}{36}$$

2.3. LA ELIPSE

Definición: Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en el plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

¿Cómo dibujar una elipse?

La definición contiene en sí un procedimiento didáctico para dibujar una elipse. Para ello consiga una cuerda; (la longitud de la misma es la constante a la que se hace referencia en la definición). Coloque dos tachuelas o chinchetas (que corresponderán a los focos) sobre un pedazo de cartón, de manera que la distancia entre ellas sea menor que la longitud del cordel. Una los extremos del cordel a las tachuelas y, con la punta de un lápiz, jale el cordel hasta que quede tenso. Mueva el lápiz alrededor de las dos tachuelas. El lápiz describirá una elipse, como se muestra en la figura 2.24.

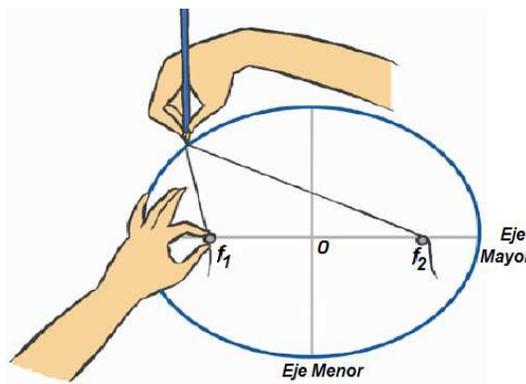


Figura 2.24: Elaboración de la elipse

De la figura F_1 y F_2 son los focos. La línea que contiene los focos se llama **eje mayor**. El punto medio del segmento de línea que une los focos se llama **centro** de la elipse. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor se llama **eje menor**.

Los dos puntos de intersección de la elipse con el eje mayor son los **vértices**, V_1 y V_2 , de la elipse. La distancia de un vértice al otro se llama **longitud del eje mayor**. La elipse es simétrica con respecto de su eje mayor y con respecto de su eje menor.

Con lo anterior estamos listos para encontrar la ecuación de una elipse en un sistema coordenado rectangular. Primero colocamos el centro de la elipse en el origen. Luego situamos la elipse de manera que su eje mayor coincida con su eje coordenado. Supongamos que el eje mayor coincide con el eje x , como se muestra en la figura 2.25

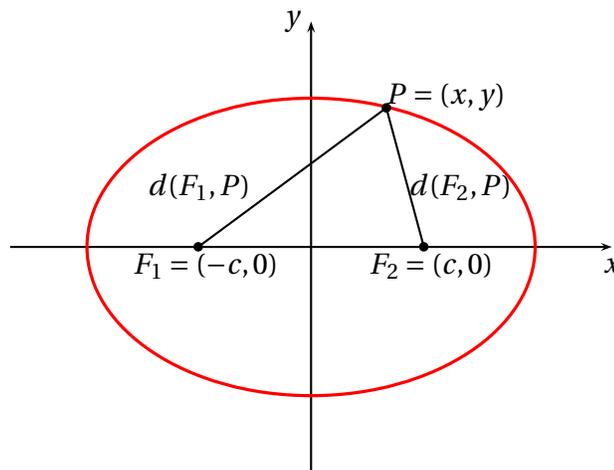


Figura 2.25: Elipse

Si c es la distancia del centro a un foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Como veremos, es conveniente que $2a$ denote la diferencia constante a que hace mención en la definición. Así, si $P = (x, y)$ es cualquier punto sobre la elipse, tenemos que:

$$d(F_1, p) + d(F_2, p) = 2a$$

es decir

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Al eliminar las raíces y simplificar se obtiene:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Para obtener puntos de la elipse fuera del eje x , deberá ocurrir que $a > c$. En consecuencia: $d(F_1, p) + d(F_2, p) > d(F_1, F_2)$, es decir $2a > 2c$, o bien $a > c$

Puesto que $a > c$, tenemos también que $a^2 > c^2$, por lo que $a^2 - c^2 > 0$. Sea $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$. Entonces $a > b$, la ecuación puede escribirse como:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

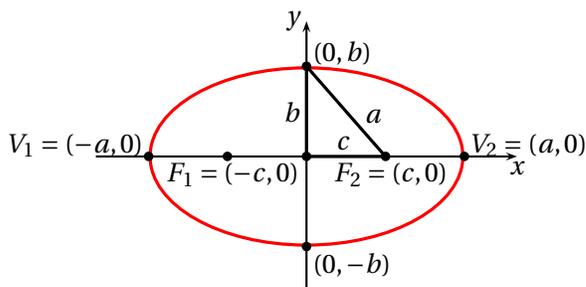
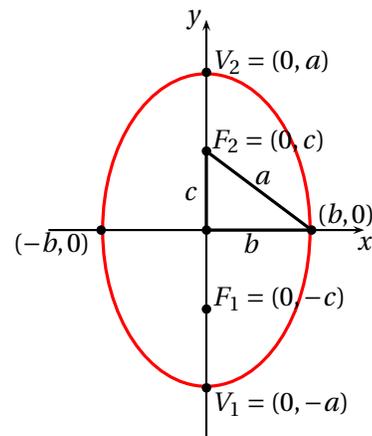
Ecuación de un elipse			
CENTRO	FOCOS	EJE MAYOR	ECUACIÓN
(0, 0)	($\pm c$, 0)	eje x	(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a > b > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$
(0, 0)	(0, $\pm c$)	eje y	(2) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ donde $a > b > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$

Cuadro 2.3: Ecuación de una elipse

Como se puede verificar, la elipse definida por la ecuación (1) es simétrica respecto del eje x , el eje y y el origen.

Para encontrar los vértices de la elipse definida por la ecuación (1) hacemos que $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $x^2/a^2 = 1$, cuyas soluciones son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la elipse dada por la ecuación (1) son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Los intersejos y de la elipse, encontrados al hacer $x = 0$, tienen coordenadas $(0, -b)$ y $(0, b)$. Estos cuatro intersejos, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$ se usa para graficar la elipse.

Observe la figura 2.26, el triángulo rectángulo formado con los puntos $(0, 0)$, $(c, 0)$ y $(0, b)$. Puesto que $b^2 = a^2 - c^2$ (o $b^2 + c^2 = a^2$), la distancia del foco en $(c, 0)$ al punto $(0, b)$ es a .

Figura 2.26: Elipse con focos en el eje X Figura 2.27: Elipse con focos en el eje Y

Para la ecuación (2) el eje mayor es el eje y ; los vértices están en $(0, -a)$ y $(0, a)$.

La figura 2.27 ilustra la elipse. Observe de nuevo el triángulo recto con los puntos en $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, c)$

Ejemplo 1. Encuentre la ecuación de una elipse con centro en el origen, un foco en $(3, 0)$ y un vértice en $(-4, 0)$. Grafique la ecuación.

Solución

La elipse tiene su centro en el origen y el eje mayor coincide con el eje x . Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, por lo que $c = 3$. Un vértice está en $(-a, 0) = (-4, 0)$, por lo que $a = 4$. De la ecuación (1), se sigue que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

Una ecuación de la elipse es, entonces,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

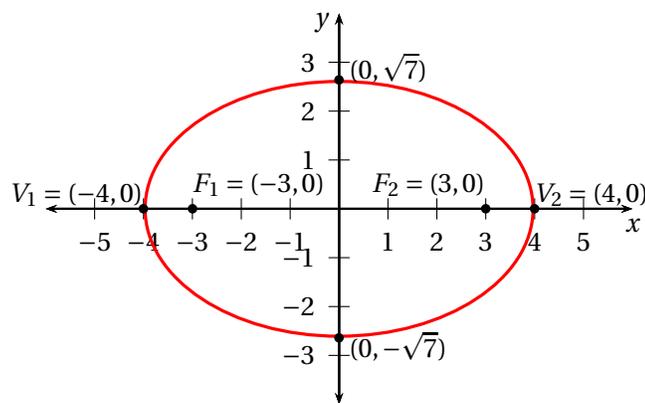


Figura 2.28: Ejemplo 1

Ejemplo 2. Analice la ecuación: $9x^2 + y^2 = 9$

Solución

Para escribir la ecuación en la forma apropiada, dividimos cada miembro entre 9:

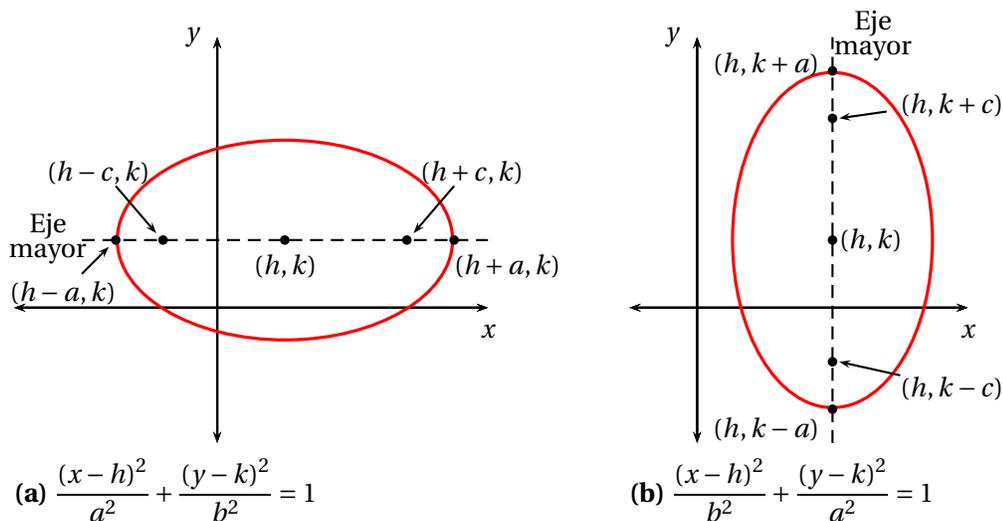
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

El número mayor, 9 está en el denominador del término con y^2 , por lo que, con base en la ecuación (2), se trata de la ecuación de una elipse con centro en el origen y eje mayor a lo largo del eje y . Además, concluimos que $a^2 = 9$, $b^2 = 1$ y $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 3)$ y los focos están en $(0, \pm c) = (0, \pm 2\sqrt{2})$.

ELIPSE CON CENTRO EN (h, k)

Si una elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con un eje coordenado se desplaza h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado es una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo a un eje coordenado. El cuadro 2.3 proporciona las formas de las ecuaciones de tales elipses y las gráficas se muestran a continuación.

CENTRO	EJE MAYOR	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h, \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, a > b \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, a > b \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$

Cuadro 2.4: Elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo a un eje coordenadoFigura 2.29: Elipse con centro en (h, k)

APLICACIONES DE LA ELIPSE

La elipse tiene muchas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas, con el sol en uno de sus focos.

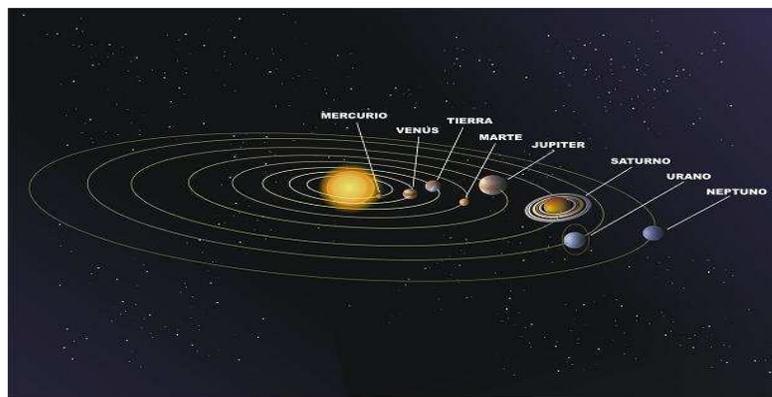


Figura 2.30: Sistema Solar

Los puentes de mampostería y concreto suelen tener la forma de un arco semielíptico. En la maquinaria se usan engranes elípticos cuando se requiere de una razón de movimiento variable.

La elipse también tienen una interesante propiedad de reflexión. Si una fuente de luz (o sonido) se coloca en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejarán en la elipse y se concentrarán en el otro foco. En este principio se basan las "galerías murmurantes", que son salones diseñados con techos elípticos. Una persona en uno de los focos puede murmurar algo que escucha otra persona en el otro foco, pues todas las ondas de sonido que llegan al techo se reflejan hacia ese punto.

Ejemplo 3. Galerías murmurantes

La figura 1.15 muestra las especificaciones para un techo elíptico en un salón diseñado como galería murmurante. En una galería murmurante, una persona situada en un foco de la elipse puede murmurar y ser oída por otra persona situada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo desde un foco se reflejan hacia el otro foco. ¿Dónde están localizados los focos en la galería?

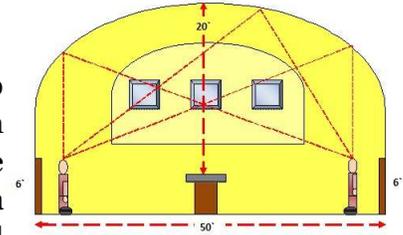


Figura 2.31: Galería

Solución

Establecemos un sistema coordenado rectangular de manera que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor a lo largo del eje x . Vea la figura 1.N. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

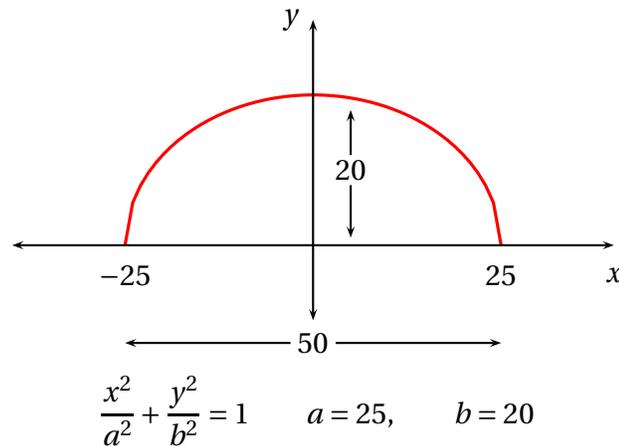


Figura 2.32: Ejemplo 3

donde $a = 25$ y $b = 20$. Puesto que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$$

tenemos que $c = 15$. Así, los focos están localizados a 15 pies del centro de la elipse a lo largo del eje mayor.

Ejemplo 4. *Puente de arco semielíptico*

Un arco con la forma de la parte superior de una elipse se usa para soportar un puente que salva un río de 20 metros de ancho. El centro del arco está a 6 metros arriba del centro del río (vea la figura).

Escriba una ecuación para la elipse en la que el eje x coincida con el nivel del agua y el eje y pase por el centro del arco.

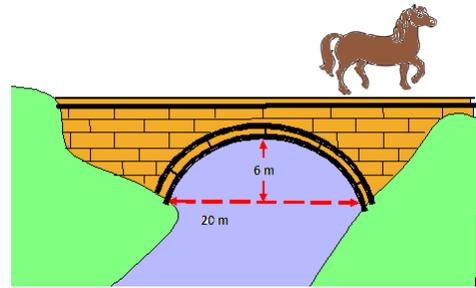


Figura 2.33: Puente de arco semielíptico

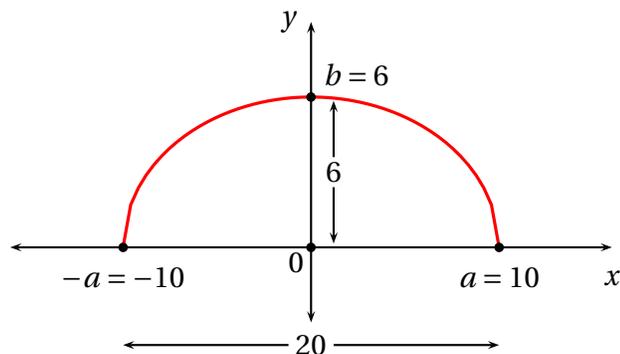


Figura 2.34: Ejemplo 4

Solución:

De la figura se sigue que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = 10, \quad b = 6$$

La elipse tiene su centro en el origen y el eje mayor coincide con el eje x . Sus vértices están en $(\pm 10, 0)$, por lo que $a = \pm 10$, y en $(0, \pm 6)$, por lo que $b = \pm 6$. Luego una ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{(10)^2} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Podemos decir que $c^2 = a^2 - b^2$ entonces, $c^2 = 100 - 36 = 64$; los focos están sobre el eje x en $(\pm 8, 0)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(1 - \frac{x^2}{100}\right) 36 \\ &= \frac{3600 - 36x^2}{100} \end{aligned}$$

La ecuación de la elipse es,

$$y = \frac{6}{10} \sqrt{100 - x^2}$$

2.4. LA HIPÉRBOLA

Definición: Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en el plano, tales que la diferencia de sus distancias desde dos puntos fijos, llamados **focos**, es una constante.

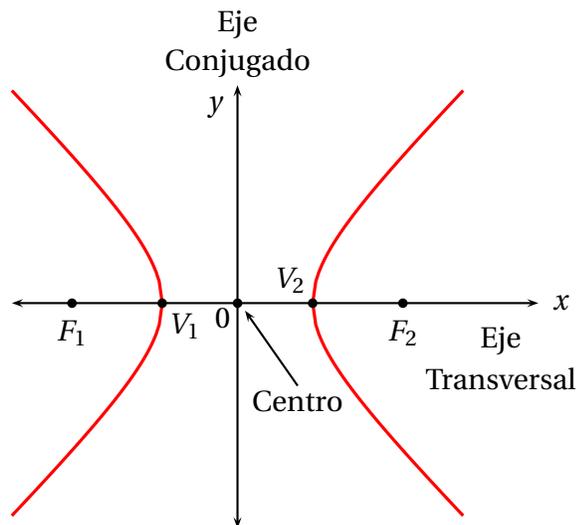


Figura 2.35: Hipérbola con $C(0,0)$

La gráfica 2.35 ilustra una hipérbola con focos F_1 y F_2 . La línea que contiene los focos se llama **eje transversal**. El punto medio del segmento de línea que une los focos se llama **centro** de la hipérbola. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal se llama **eje conjugado**. La hipérbola consiste en dos curvas separadas, llamadas **ramas**, que son simétricas respecto al eje transversal, eje conjugado y el centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola con el eje transversal son los **vértices**, V_1 y V_2 de la hipérbola.

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE TRANSVERSAL SOBRE EL EJE X

Primero colocamos el centro en el origen. Luego situamos la hipérbola de manera que su eje transversal coincida con un eje coordenado. Supongamos que el eje transversal coincide con el eje x como se muestra en la gráfica. Si c es la distancia del centro a un foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Ahora denotamos con $2a$ la diferencia constante de las distancias desde cualquier punto $P = (x, y)$ sobre la hipérbola a los focos F_1 y F_2 . (Si P está en la rama derecha, se usa el signo +; si P está sobre la rama izquierda, se usa el signo -). Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación.

$$\begin{aligned}
 d(F_1, p) - d(F_2, p) &= 2a \\
 \text{es decir, } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 cx - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 (cx - a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] \\
 c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

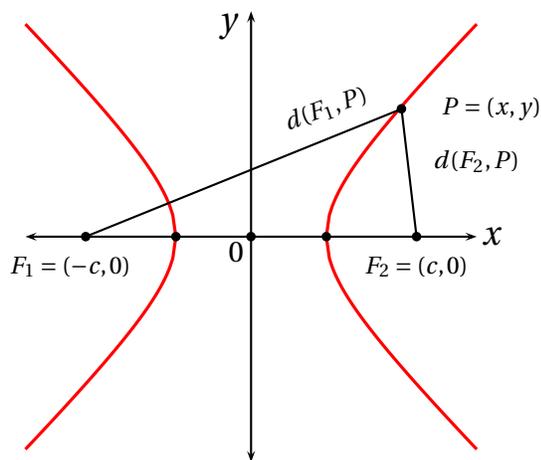


Figura 2.36: Distancia de un punto $P = (x, y)$ sobre la hipérbola a los focos

Para obtener puntos de la hipérbola fuera del eje X , se hace $a < c$.

$$\begin{aligned}
 d(F_1, P) &< d(F_2, P) + d(F_1, F_2) \\
 d(F_1, P) - d(F_2, P) &< d(F_1, F_2) \\
 2a &< 2c \\
 a &< c
 \end{aligned}$$

Puesto que $a < c$, tenemos también que $a^2 < c^2$, por lo que $c^2 - a^2 > 0$. Sea $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Entonces la ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

CENTRO	EJE TRASVERSAL	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN	ASÍNTOTAS
(0,0)	Paralelo al eje x	$(\pm c, 0)$	$(\pm a, 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$ $b^2 = c^2 - a^2$	$y = \pm \frac{b}{a}x$
(0,0)	Paralelo al eje y	$(0, \pm c)$	$(0, \pm a)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad (2)$ $b^2 = c^2 - a^2$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

Para encontrar los vértices de la hipérbola definida por la ecuación (1), hacemos que $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

cuyas soluciones son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la hipérbola son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$.

Esta hipérbola es simétrica con respecto al eje x , el eje y y el origen. Para encontrar los interceptos, y en caso de que existan, hacemos $x = 0$ en la ecuación (1). Esto da como resultado la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} = -1$$

La cual no tiene solución.

Concluimos que la hipérbola definida por la ecuación (1) no tiene interceptos y . De hecho, puesto que

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \geq 0$$

Se sigue que $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$. Así, no hay puntos sobre la gráfica para $-a < x < a$. Ver gráfica 2.37 de la ecuación (1).

Observe la diferencia en la forma de las ecuaciones (1) y (2). Cuando el término y^2 se resta del término x^2 y el eje transversal es el eje x . Cuando el término x^2 se resta del término y^2 , el eje transversal es el eje y .

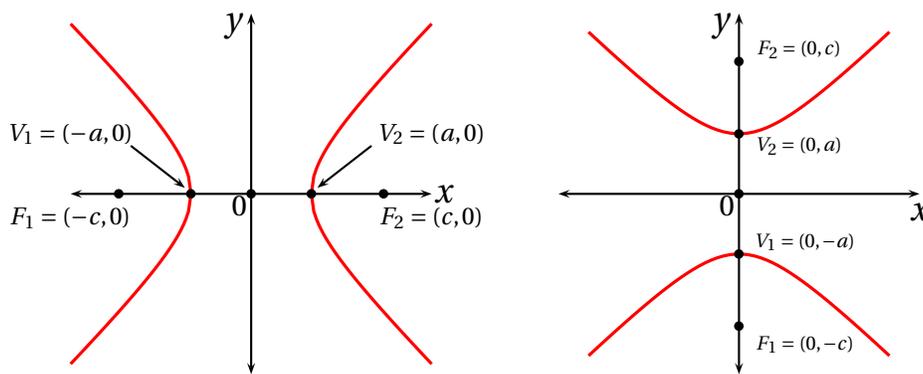


Figura 2.37: Hipérbola con centro en $O(0,0)$

Ejemplo 1. Analice la ecuación: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solución

La ecuación dada tiene la forma de la ecuación (1), con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. Así, la gráfica de la ecuación es una hipérbola con centro en $(0, 0)$ y eje transversal a lo largo del eje x . Además, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$ y los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$. la figura 2.38 muestra la gráfica.

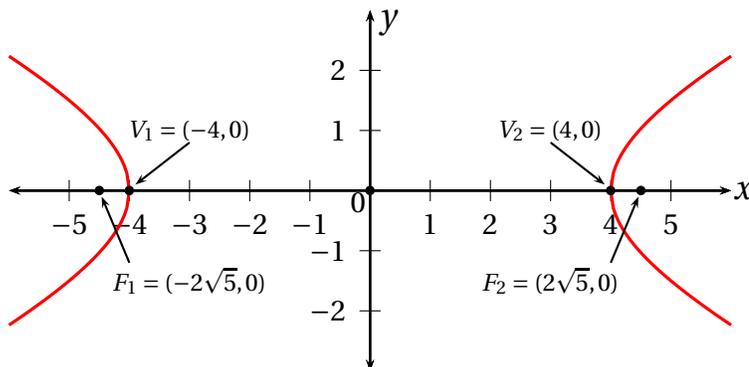


Figura 2.38: Ejemplo 1

Ejemplo 2 Encuentre la ecuación de una hipérbola que tiene un vértice en $(0, 2)$ y focos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$ y grafique la ecuación.

Solución

Puesto que los focos están en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, el centro de la hipérbola está en el origen. Además, el eje transversal está a lo largo del eje y . La información dada revela también que $c = 3$, $a = 2$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de la hipérbola está dada por la ecuación. Vea la figura 2.39.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

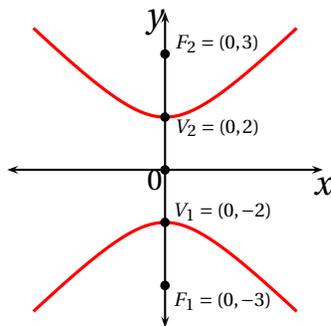


Figura 2.39: Ejemplo 2 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

ASÍNTOTAS

Una asíntota horizontal u oblicua de una gráfica es una línea con la propiedad de que la distancia de la línea a los puntos sobre la gráfica tiende a cero cuando $x \rightarrow -\infty$ o cuando $x \rightarrow \infty$.

★ La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

★ La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

Las asíntotas de una hipérbola no son parte de la hipérbola, pero sirven como guías para graficarla. Por ejemplo, suponga que queremos graficar la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Comenzamos por trazar los vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Luego marcamos los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ y usamos estos cuatro puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes b/a y $-b/a$, y sus prolongaciones son las asíntotas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ de la hipérbola.

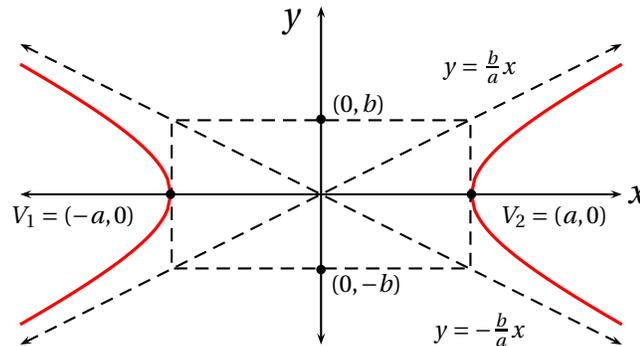
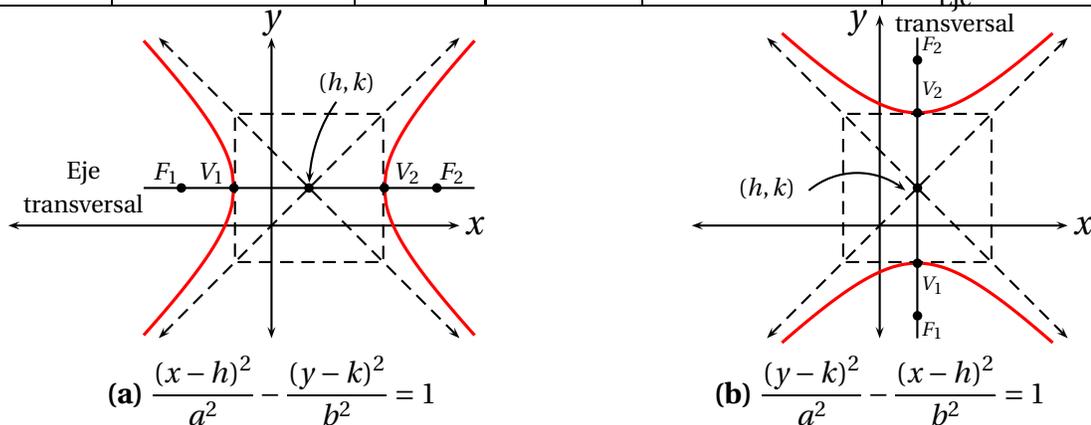


Figura 2.40: Asíntotas de una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN (h, k)

Si una hipérbola con centro en el origen y eje transversal coincidente con un eje coordenado se desplaza h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado es una hipérbola con centro en (h, k) y eje transversal paralelo a un eje coordenado. La tabla da las formas de las ecuaciones de tales hipérbolas.

CENTRO	EJE TRASVERSAL	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN	ASÍNTOTAS
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$ $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$ $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

Figura 2.41: Hipérbola con centro en (h, k)

Gráficamente:

Ejemplo 3. Analice la ecuación: $-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$

Solución:

Al completar los cuadrados en x e y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 &= 0 \\
 -(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) &= -11 \\
 -(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) &= -1 + 16 - 11 \\
 -(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 &= 4 \\
 (y - 2)^2 - \frac{(x + 1)^2}{4} &= 1
 \end{aligned}$$

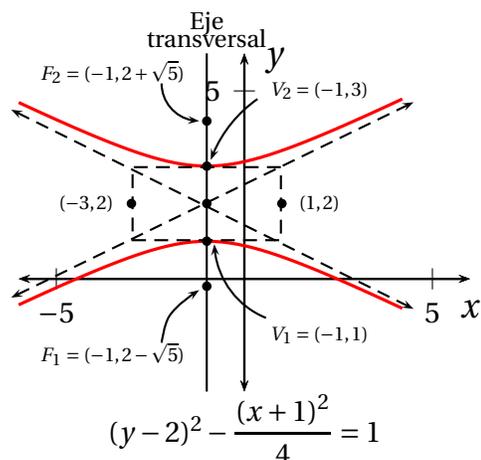


Figura 2.42: Ejemplo 3

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(-1, 2)$ y eje transversal paralelo al eje y . Además, $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por lo que $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (-1, 2 \pm 1)$, o $(-1, 1)$ y $(-1, 3)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (-1, 2 \pm \sqrt{5})$. Las asíntotas son $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$ y $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$.

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA

Al igual que las parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una interesante *propiedad de reflexión*. La luz que se dirige hacia un foco de un espejo hiperbólico se refleja hacia el otro foco. Esta propiedad se aprovecha para construir los telescopios del tipo Cassegrain. Se coloca un espejo hiperbólico dentro del tubo del telescopio, de tal modo que la luz reflejada por el reflector parabólico primario se dirija hacia un foco del espejo parabólico. Luego, la luz se reenfoca en un punto más accesible, atrás del reflector primario.

En el sistema de navegación LORAN (del inglés LONg RANge Navigation, navegación de gran alcance) se usan hipérbolas a bordo de un barco para localizarlo. Una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. (Vea figura 2.43).

Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales.

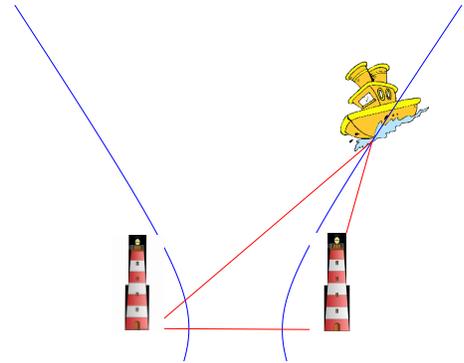


Figura 2.43: LORAN

En tanto que la diferencia de tiempo permanezcan constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante.

Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija en el tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyo focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Así, para cada diferencia de tiempo, se tendrá una hipérbola diferente, cada una de las cuales guía al barco a una posición diferente en la costa. Las cartas de navegación muestran las distintas trayectorias hiperbólicas correspondientes a las diversas diferencias de tiempo.

2.5. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LAS CÓNICAS

Ejemplo 1. Ecuaciones paramétricas del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ (fig. 2.44)

$$x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

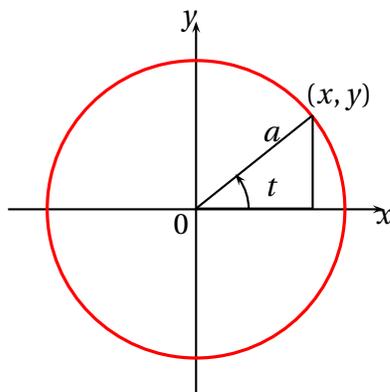


Figura 2.44: Círculo $x^2 + y^2 = a^2$

Ejemplo 2. Ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (fig. 2.45)

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

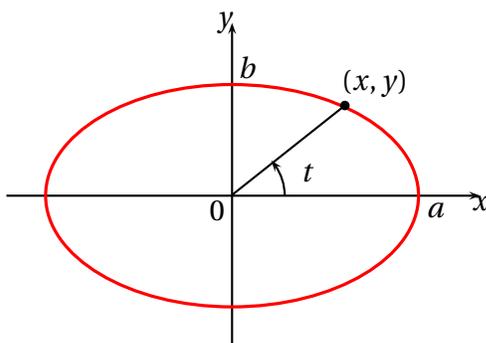


Figura 2.45: Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Para ver que se trata de las ecuaciones paramétricas de la elipse, sustituimos $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, en la ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$

Esto muestra que el punto $(a \cos t, b \sin t)$ pertenece a la elipse.

A continuación observamos que, cuando t crece de 0 a 2π , x varía continuamente desde a hasta $-a$ y nuevamente hasta a , e y varía continuamente de 0 a b , a 0, a $-b$ y de vuelta a 0. Así, el punto $(x, y) = (a \cos t, b \sin t)$ da una vuelta completa, trazando toda la elipse.

Ejemplo 3. Una rama de una hipérbola. Supóngase que las ecuaciones paramétricas de una curva son

$$x = \cosh \theta, y = \sinh \theta \quad (a)$$

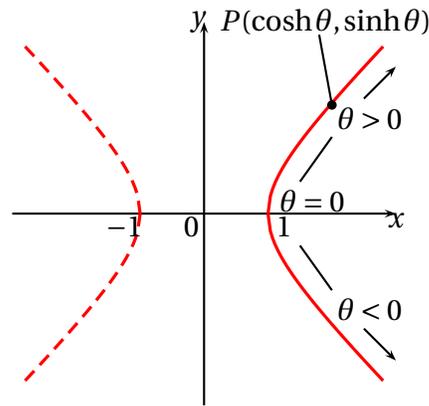


Figura 2.46: Una rama de una hipérbola

Entonces, la identidad hiperbólica

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (2)$$

nos permite eliminar θ y escribir

$$x^2 - y^2 = 1$$

como ecuación cartesiana de la curva. Sin embargo, un análisis minucioso muestra que la ecuación (b) *incluye demasiado*; para $x = \cosh \theta$ es siempre positiva, por lo que las ecuaciones paramétricas representan una curva situada en su totalidad a la derecha del eje y , mientras que la ecuación cartesiana (b) representa las dos ramas, izquierda y derecha, de la hipérbola (fig. 2.46). Se podría excluir la rama izquierda tomando solamente valores positivos de x . Esto es,

$$x = \sqrt{1 + y^2}$$

sí representa la curva dada en (a).

Ejemplo 4. *Un arco parabólico.*

Dibúje la curva trazada por el punto $P(x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones

$$x = \cos t, y = 1 - \cos 2t \quad (*)$$

Solución: Hallamos la ecuación cartesiana de la curva eliminando t :

$$y = 1 - \cos 2t = 1 - 2\cos^2 t + 1 = 2 - 2x^2.$$

así, todo punto de la gráfica de (*) pertenece a la parábola

$$y = 2 - 2x^2.$$

Sin embargo, las ecuaciones paramétricas (*) sólo describen la parte de la parábola (fig. 2.47) para la cual

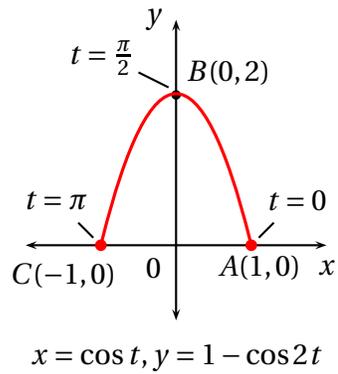


Figura 2.47: Un arco parabólico

$$-1 \leq x = \cos t \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y = 1 - \cos 2t \leq 2.$$

Según (*), el punto $P(x, y)$ comienza en $A(1, 0)$ cuando $t = 0$. Después al crecer t , se mueve hacia arriba y a la izquierda, llegando hasta $B(0, 2)$ cuando $t = \pi/2$. Continúa hasta $C(-1, 0)$ cuando t crece hasta π . Al pasar t de π a 2π , el punto vuelve a trazar el arco CBA retrocediendo hasta A . Como x e y son periódicas (x con periodo 2π e y con periodo π), cualquier variación de t produce nuevos trazos de parte del arco.

Con lo estudiado a lo largo del presente capítulo consideramos que el lector ya está listo para continuar con el tercer capítulo en el que se trata el estudio de *las curvas cíclicas*.

Introducción:

 continuación se estudian tres curvas cíclicas especiales como la trocoide, epitrocoide y hipotrocoide y algunas curvas derivadas de estas.

3.1. LA TROCOIDE**Historia:**

La estudio de esta curva no tiene una fecha, ni un personaje claro, parece que el matemático alemán Nicolás de Cusa (1401-1464) fue el primero en estudiar la cicloide, cuando estaba intentando encontrar el área de un círculo por integración.

El francés Marin Mersenne (1588-1648) dió la primera definición formal de la cicloide en 1599 y estableció propiedades tales como que la longitud de la base es igual a la circunferencia del círculo que rueda. Intentó encontrar el área bajo la curva por integración pero fracasó.

En 1599 el italiano Galileo Galilei dio nombre a esta curva. Trató de encontrar el área de dos formas: por comparación de esta área con la del círculo generador e introduciendo en la cicloide pedazos de metal, pero fallo.

Mersenne propuso el problema del área al francés Gilles Personne de Roberval (1602-1675) en 1628. Éste fue resuelto por *Roberval* en 1634. Si $a = b$ entonces el área bajo la curva de un arco es $3\pi b^2$. *Roberval* orgulloso de su resultado, le escribió a René Descartes (Francia 1596-Suecia 1650) dándoselo. Descartes replicó con orgullo que el resultado era bueno y retó a *Roberval* a encontrar un método para dibujar una tangente a la cicloide ya habiendo él descubierto uno. *Roberval* fracasó, pero el francés Pierre Fermat, quien estaba incluido en el reto, tuvo éxito.

También independiente, los matemáticos italianos: Evangelista Torricelli (1608-1647) descubrió el área de la cicloide; y Vincenzo Viviani (1622-1703) encontró un método para construir una tangente.

En 1658 el francés Blaise Pascal resolvió los problemas del área y el centro de gravedad de cualquier segmento de la cicloide. También resolvió los problemas del volumen y el área de la superficie del sólido de revolución formado por la rotación de la cicloide respecto al eje X . *Pascal* (bajo el nombre de *Dettonville*) publicó un reto por la solución de los dos problemas antes mencionados. El inglés John Wallis (1616-1703) y el francés Antoine de Lalouvière (1600-1664) se enteraron, trabajaron independientemente pero fracasaron.

René de Sluze (1622-1685), Michelangelo Ricci (1619-1682), *Huygens*, Christopher Wren (1632-1723) y *Fermat* comunicaron sus descubrimientos a *Pascal* sin estar enterados de la competencia. La contribución de *Wren* fue la más notable, encontró que la longitud de un arco es $8b$.

El físico holandés Huygens descubrió en 1659 que la cicloide es tautócrona (llamada también isócrona). En 1673 *Huygens* demostró que la cicloide es tautócrona, y determinó su evoluta.

En 1692 Jakob Bernoulli y Johann Bernoulli mostraron que la cicloide es la catacústica (cústica por reflexión) de un círculo cuando los rayos de luz provienen de un punto en la circunferencia. En junio de 1696 *Johann Bernoulli* retó a su hermano *Jakob Bernoulli* a resolver el problema de la braquistócrona. En diciembre de 1696 *Johann* repitió su reto en el Acta eruditorum, pidiendo le enviarán soluciones antes de la pascua de 1697. Él ya sabía que la cicloide era braquistócrona y publicó su solución en 1697. Además de *Johann* y *Jakob Bernoulli* también *Leibniz*, *Newton* y *L'Hôpital* resolvieron el problema. Éste fue uno de los primeros problemas variacionales y su investigación fue el punto de arranque para el desarrollo del cálculo de variaciones.

Definición: La trocoide es la curva descrita por un punto P situado a una distancia b del centro de una circunferencia de radio a cuando ésta rueda sin resbalar sobre el eje x .

- Si $b < a$, la curva tiene la forma que muestra la figura 3.1 y se le conoce con el nombre de **cicloide corta**.

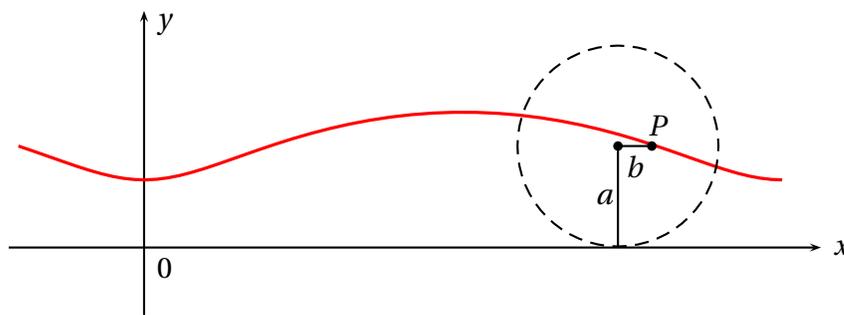


Figura 3.1: Cicloide corta. El punto P está situado en el interior de la circunferencia

- Si $b > a$, la curva tiene la forma que muestra la figura 3.2 y se le llama **cicloide larga**.

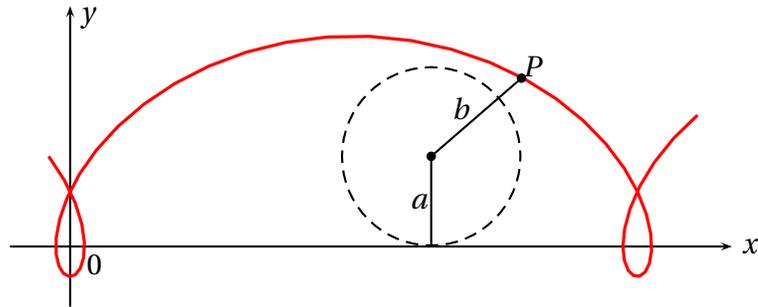


Figura 3.2: Cicloide larga. El punto P esta situado en el exterior de la circunferencia

- Si $b = a$, la curva es llamada cicloide.

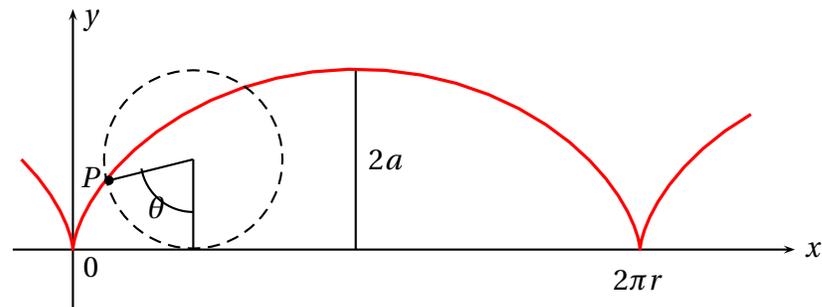


Figura 3.3: Cicloide normal. El punto P esta situado sobre la circunferencia

Ecuaciones paramétricas de la trocoide

Para obtener las ecuaciones paramétricas de la trocoide se utiliza el siguiente argumento. La trayectoria que sigue el punto cualquiera (x, y) de la trocoide es el resultado de sumar dos trayectorias paramétricas $h(t)$ y $c(t)$ este es:

$$(x, y) = r(t) = h(t) + c(t).$$

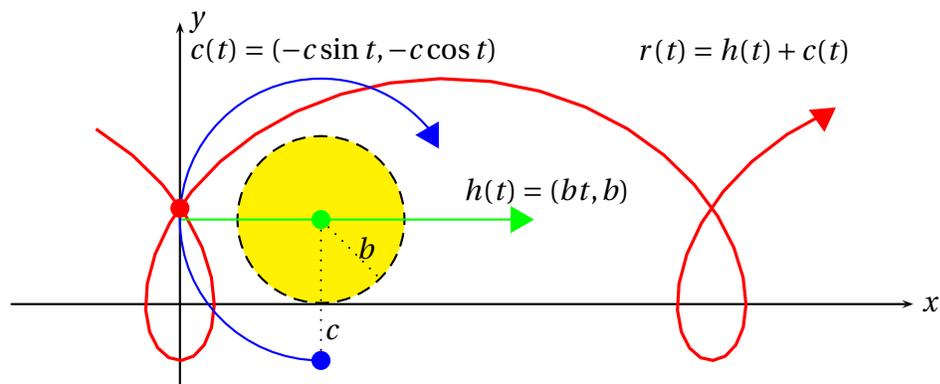


Figura 3.4: Parametrización de la trocoide.

El primer término de esta suma será como antes $h(t) = (bt, t)$. Por cada unidad de t , el punto se mueve bt , pues el círculo rueda sobre el eje x sin resbalarse. En la Figura 3.4 este

movimiento aparece representado en verde.

Por otro lado, el segundo término de la suma es $c(t) = (-c \sin t, c \cos t)$. y aparece en azul en la Figura y corresponde a la trayectoria que sigue un punto que se mueve en una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio c en el sentido de las manecillas del reloj empezando en el punto $(0, -c)$, cuando $t = 0$. De esta manera, las ecuaciones paramétricas de la trocoide son:

$$x = bt - c \sin t$$

$$y = b - c \cos t$$

3.1.1. LA CICLOIDE

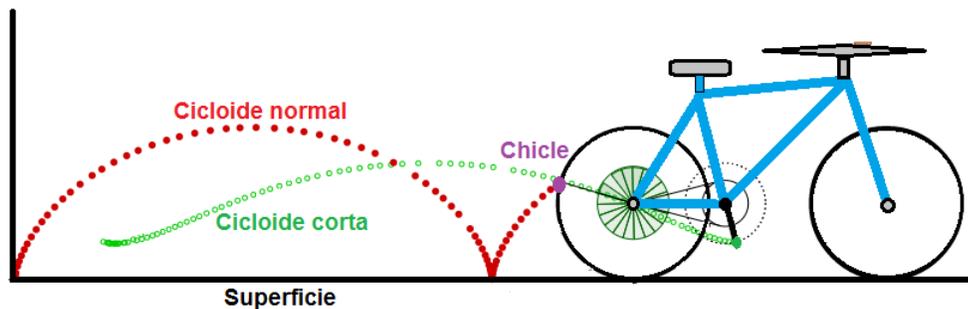


Figura 3.5: Cicloide normal y acortada

Miremos como se forma la cicloide normal por medio un chicle adherido a la rueda de una bicicleta, y la cicloide corta; por medio del eje de la biela y el pedal.

Tomemos unos ejes coordenados, el eje X como la superficie o la línea recta y el eje Y será la perpendicular a ella. Al mover la bicicleta y desde el momento en que el chicle se adhiere a la rueda la trayectoria que describe es una cicloide normal. Ver la figura 3.5. Lo mismo ocurre con el eje que incrusta el pedal a la biela de la bicicleta, este eje describe una cicloide corta.

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a cuando rueda sin resbalar sobre el eje x .

Ecuaciones paramétricas de la cicloide

Consideremos que el círculo rueda hacia la derecha sobre el eje x y que el punto que sirve para trazar la cicloide está situado inicialmente en el origen de las coordenadas. Escogemos como parámetro la medida t en radianes del ángulo $\angle PQR$, pues ésta corresponde al ángulo de rotación del círculo. Así que se reduce a expresar las coordenadas (x, y) del punto P en función de t , o, dicho de otro modo, hallar una función de trayectoria $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) = r(t)$.

Debe tenerse en cuenta que la medida del segmento de recta OR , en azul (Figura 3.6), es igual a la medida del arco \overline{PR} , también en azul, puesto que el círculo rueda sin resbalar.

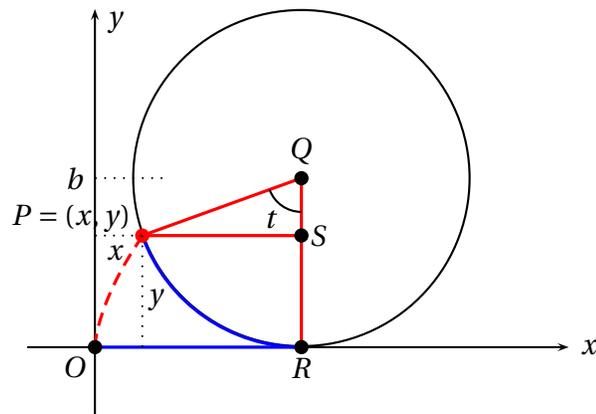


Figura 3.6: Parametrización de la cicloide.

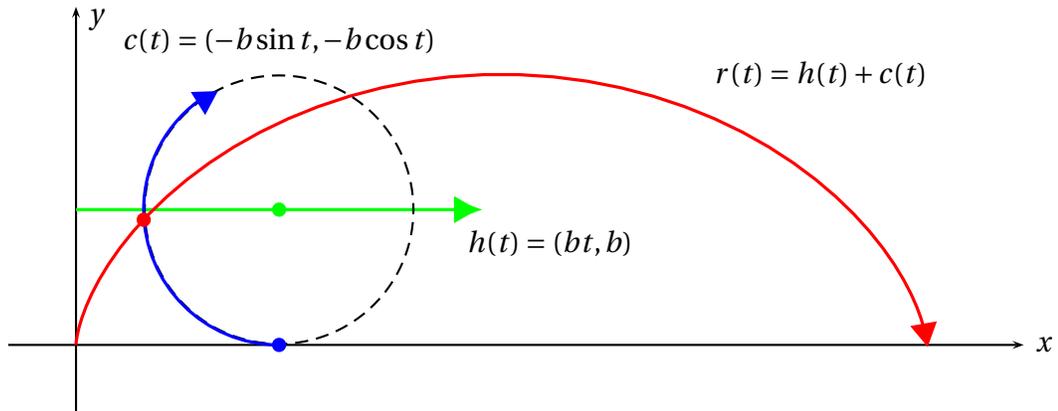


Figura 3.7: Dos trayectorias de la cicloide.

Ahora bien, la medida del arco \widehat{PR} es bt , de manera que:

$$|OR| = \widehat{PR} = bt$$

Ahora bien, $x = |OR| - |PS| = bt - b \sin t$, $y = |QR| - |QS| = b - b \cos t$, con lo que llegamos a las ecuaciones:

$$x(t) = bt - b \sin t = b(t - \sin t)$$

$$y(t) = b - b \cos t = b(1 - \cos t)$$

Estas ecuaciones pueden verse como el resultado de sumar dos parametrizaciones distintas, pues el punto (x, y) puede ponerse en la forma:

$$(x, y) = r(t) = (bt, b) + (-b \sin t, -b \cos t) = h(t) + c(t)$$

Es decir que $(x, y) = r(t) = h(t) + c(t)$ donde $h(t) = (bt, b)$ y $c(t) = (-b \sin t, -b \cos t)$. El primer término de esta suma es $h(t) = (bt, b)$. Aparece representado en verde en la Figura. Por cada unidad de t el punto se mueve bt hacia la derecha. Por otro lado, el segundo término de la suma es $c(t) = (-b \sin t, -b \cos t)$. Aparece en azul. Al sumarse estas dos trayectorias van produciendo la cicloide.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Algunos resultados importantes

• Área de una Cicloide

Procedemos a calcular el área bajo un arco de la cicloide. Es claro que el primer arco de la cicloide se produce cuando los valores de t varían, es decir cuando $0 \leq t \leq 2\pi$, ya que la rueda necesita dar una vuelta completa para trazarlo. Así pues, el área bajo un arco de la cicloide está dada por:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi b} y dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = \int_0^{2\pi} (b - b \cos t)(b - b \cos t) dt \\
 &= b^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = b^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \\
 &= b^2 \int_0^{2\pi} dt - 2b^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \\
 &= 2b^2 \pi - 2b^2 [\sin t]_0^{2\pi} + \frac{b^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2b^2 \pi + b^2 \pi = 3b^2 \pi
 \end{aligned}$$

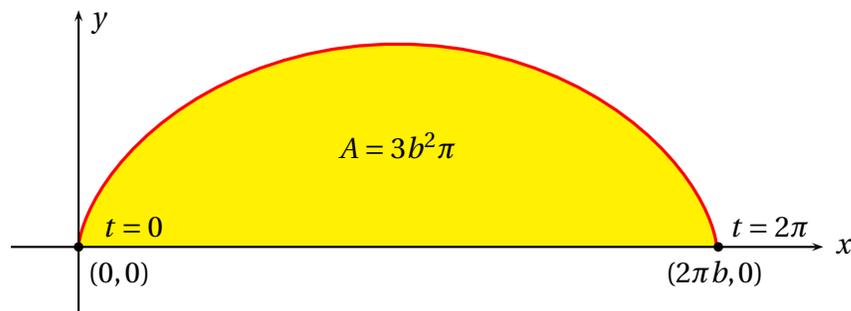


Figura 3.8: Área de la cicloide

Es interesante este resultado pues nos dice que el área bajo el arco de la cicloide es tres veces la del círculo que rueda para generar la cicloide. Fue Galileo (1564-1642) el primero que conjeturó que esto debía ser así, aunque no lo pudo demostrar, y fueron Roberval en Francia y Torricelli en Italia los que lo probaron por primera vez.

• Longitud de un arco completo de cicloide

La longitud de un arco completo de cicloide la obtenemos a partir de la integral:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t} dt \\
 &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = b \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\
 &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2(t/2)} dt = 2b \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 2b [-2 \cos(t/2)]_0^{2\pi} \\
 &= 2b(2 + 2) = 8b
 \end{aligned}$$

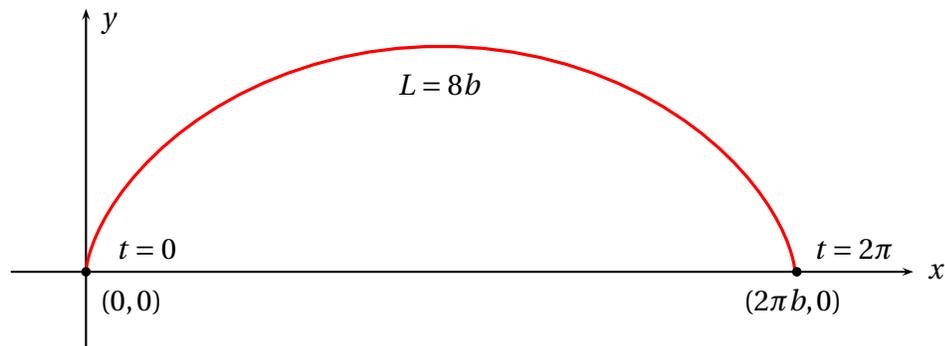


Figura 3.9: Longitud de un arco completo de cicloide.

Lo que indica que la Longitud de un arco completo de cicloide corresponde a ocho veces el radio de la circunferencia que la genera.

- **La cicloide es la curva del mínimo tiempo de descenso**

Si un punto A y otro punto B , a un nivel inferior que A como se muestra en la figura 3.10

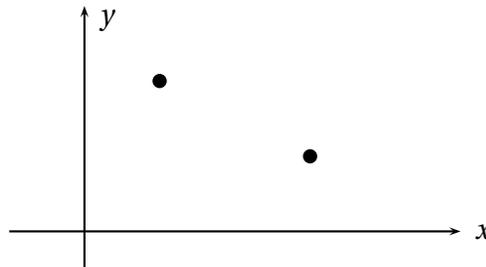


Figura 3.10: Dos puntos en el plano cartesiano.

Si queremos unir los dos puntos con una rampla y luego deslizar una esfera (sin fricción), ¿Qué forma debe tener la rampla para que el tiempo de descenso sea mínimo?

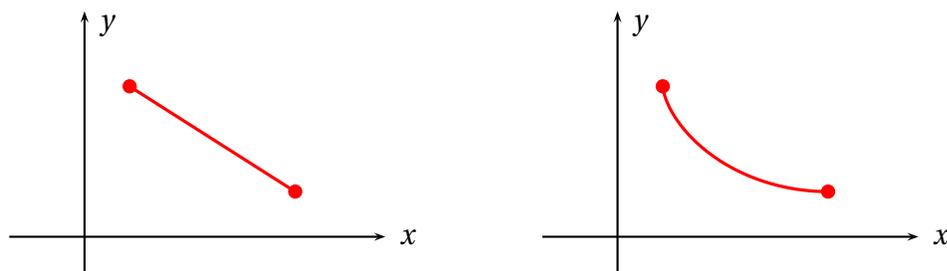


Figura 3.11: La unión de dos puntos.

Por lo general, tenemos la idea de que la rampla tenga la forma de línea recta; ya que es la distancia más corta entre dos puntos, pero la recta no es la curva más rápida. La forma de la rampla debe ser la de una *cicloide*. Si volteamos la figura 3.1, las ecuaciones siguen siendo útiles y la curva resultante cumple con dos propiedades (Braquistócrona, tautocrona) útiles en la física.

• El problema de Braquistócrona

Braquistócrona (de la palabra griega *brakhus*, “corto”; *Khronos*, “tiempo”) o curva de tiempo más corto para dos puntos.

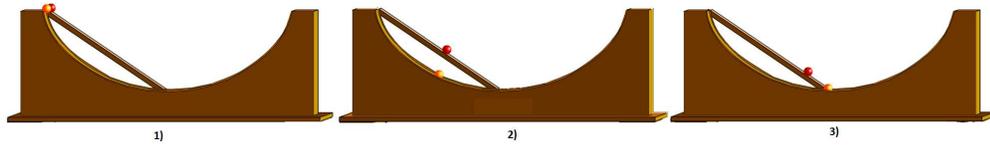


Figura 3.12: Curva de tiempo más corto

La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta, pero el recorrido más rápido es el descrito por una cicloide.

Este extraordinario descubrimiento se atribuye a muchos matemáticos famosos (incluido Johann Bernoulli y Blaise Pascal). Fue un paso importante en los inicios de la rama de las matemáticas conocida como *cálculo de variaciones*.

• Problema de la curva Tautócrona

Tautócrona (de la palabra griega *tauto*, “el mismo”; *Khronos*, “tiempo”) o curva con el mismo tiempo.

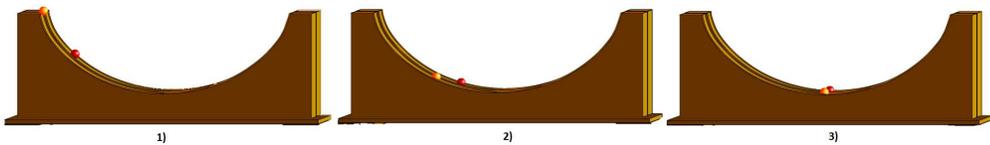


Figura 3.13: Curva con el mismo tiempo

Si varias esferas se colocan simultáneamente en varias posiciones sobre una cicloide invertida y empiezan a resbalar por ella, todas llegarán al mismo tiempo.

La propiedad tautócrona de la cicloide fue usada por el matemático, físico y astrónomo holandés Christian Huygens para construir un **reloj de péndulo** con una lentejuela que oscilaba a lo largo de una cicloide, suspendiéndola de un alambre delgado constreñido por dos placas en forma de cicloide. En un reloj de este tipo, el periodo del péndulo es independiente de su amplitud.



Figura 3.14: Reloj péndulo

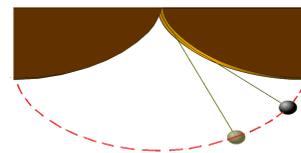


Figura 3.15: Péndulo

- **Ingeniería, arquitectura y diseño**

El arco de la cicloide es muy utilizada como por ejemplo:

a) En la mecánica, como engranajes.



Figura 3.16: motor

b) En la arquitectura como construcción de puentes.



Figura 3.17: Puente cicloidal.

c) En las guitarras de jazz y caja resonancia de violines.



Figura 3.18: Violín

3.2. LA EPITROCOIDE Y LA HIPOTROCOIDE

Historia:

Hay cuatro curvas estrechamente relacionadas entre si: la epicloide, la hipocicloide, la epitrocoide, y la hipotrocoide. Todas ellas son trazadas por un punto fijo P a distancia d del centro de un círculo de radio b el cual rueda en un círculo fijo de radio a .

Estas curvas fueron estudiadas por Alberto Durero (1471-1528 en alemán Albrecht Dürer) en 1525, Girard Desargues (1591-1661) en 1640, *Roemer* a quien se atribuye la invención

de estas curvas (1674), *Huygens* (1679), *Leibniz*, *Newton* (1686), *L'Hôpital* (1690), *Jakob Bernoulli* (1690), *La Hire* (1694), *Johann Bernoulli* (1695), *Daniel Bernoulli* (1725) y *Euler* (1745, 1781).

Apolonio de Perga (262-190 a.c.) geómetra griego tuvo la idea de describir los movimientos celestes como combinación de movimientos circulares. Fue Hiparco de Nicea (190-120 antes de J. C.) el más grande astrónomo de la Antigüedad, quien elaboró esta teoría en detalle (150 antes de J. C.). Los resultados llegaron a ser famosos (150 después de J. C.) por los libros del astrónomo griego Claudio Ptolomeo (85-165 después de J. C.). Se pensó en la Tierra colocada como centro celeste, alrededor del cual los otros cuerpos celestes rotan. La combinación de la rotación de la Tierra y la rotación de los planetas alrededor de ella forman una epicicloide. Esta teoría geocéntrica debió ser la teoría aceptada por casi 2000 años. La teoría heliocéntrica (como la construyó Nicolás Copérnico (1473- 1543)), también se discutió por los griegos.

Los astrónomos encuentran formas de las curvas cicloidales en varias coronas. También ocurren como cáusticas. La longitud de estas curvas fue dada por Newton.

3.3. LA EPITROCOIDE

La *epitrocoide* es la curva que traza un punto situado a una distancia c del centro de un círculo móvil de radio b que rueda sin resbalse por fuera de un círculo fijo de radio a .

En los casos en que $a = 2b$, $a = 3b$, $a = 4b$ y otros semejantes, se obtienen formas muy simpáticas y, por supuesto, cuando $b = c$ aparecen las características puntas de la cicloide por lo que se prefiere hablar en esta situación de *epicicloide*.

Ecuaciones paramétricas de la epitrocoide

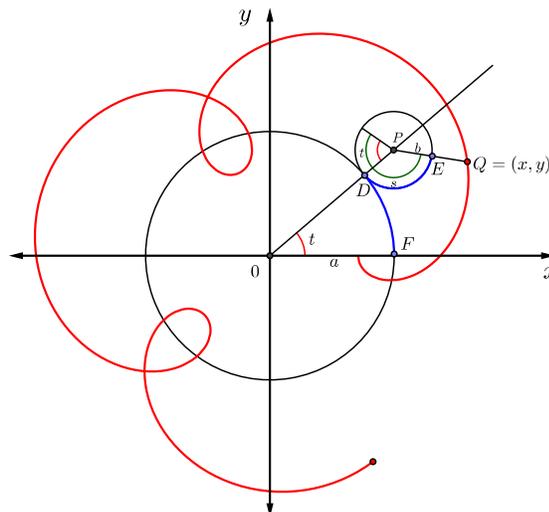


Figura 3.19: Epitrocoide

Para facilitar la deducción de las ecuaciones vamos a poner el origen de los ejes coordenados en el centro del círculo fijo, tal como se muestra en la Figura 3.19, en la que se representa la situación que se produce poco después de que el círculo móvil comienza a girar. La posición del punto $Q = (x, y)$ que se emplea para trazar la epitrocoide es el resultado de sumar la posición del centro P del círculo móvil respecto del origen de las coordenadas O , posición que está dada por el vector \overrightarrow{OP} y la posición del punto Q respecto del centro P del círculo pequeño, que está dada por el vector \overrightarrow{PQ} . De esta manera, tenemos: $(x, y) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.

Ahora bien, como en este caso el círculo móvil de radio b rueda por fuera del círculo fijo de radio a , entonces:

$$\overrightarrow{OP} = (x(a+b) \cos t, y(a+b) \sin t). \quad (1)$$

Consideremos en segundo lugar la posición del punto $Q = (x, y)$ en relación al centro P del círculo pequeño que rueda, es decir el vector \overrightarrow{PQ} . Como el punto Q está a una distancia c de P y como el ángulo está retrazado en π radianes, tenemos:

$$\overrightarrow{PQ} = (c \cos(s - \pi), c \sin(s - \pi)) = (-c \cos s, -c \sin s).$$

Busquemos ahora la relación entre los ángulos t y s . Como el círculo móvil rueda por fuera del círculo fijo sin resbalarse, tenemos que la medida del arco \widehat{DF} es igual a la medida del arco \widehat{DE} . Pero:

$$\begin{aligned} \widehat{DF} &= at \\ \widehat{DE} &= b(s - t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $at = b(s - t)$ y despejando s llegamos a:

$$s = \frac{a+b}{b}t$$

Luego

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-c \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), -c \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \right) \quad (2)$$

Después sumando componente a componente de (1) y (2) tenemos que:

$$x = (a+b) \cos t - c \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right),$$

$$y = (a+b) \sin t - c \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right).$$

3.3.1. EPICICLOIDE

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b cuando rueda sin resbalar por el exterior de otra cuyo radio es a . La cardioide y la nefroide son un caso especial de la epicicloide.

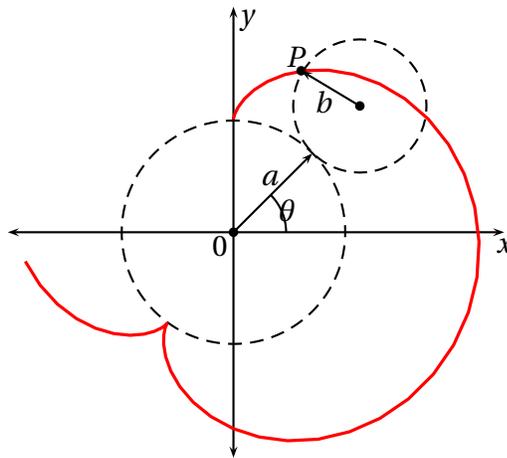


Figura 3.20: Epicicloide

Las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son:

$$\begin{cases} x = (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \\ y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \end{cases}$$

Epicicloide corta: el punto P está situado en el interior de la circunferencia.

Epicicloide larga: el punto P está situado en el exterior de la circunferencia.

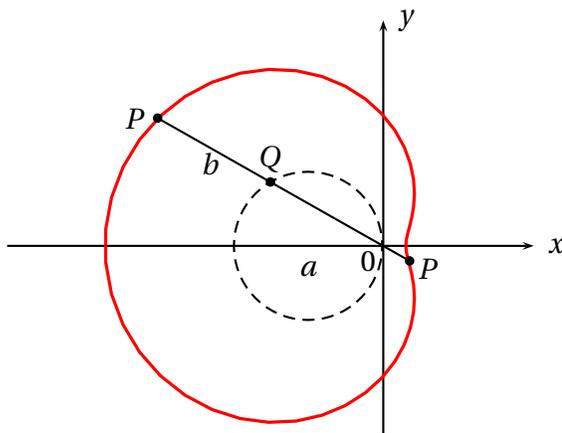


Figura 3.21: Epicicloide corta

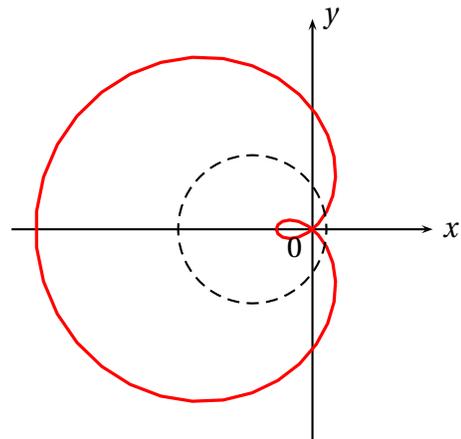


Figura 3.22: Epicicloide larga

• Cardioide

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a a medida que rueda por fuera de otra circunferencia fija de radio a . Esta curva es un caso especial del Caracol de Pascal.

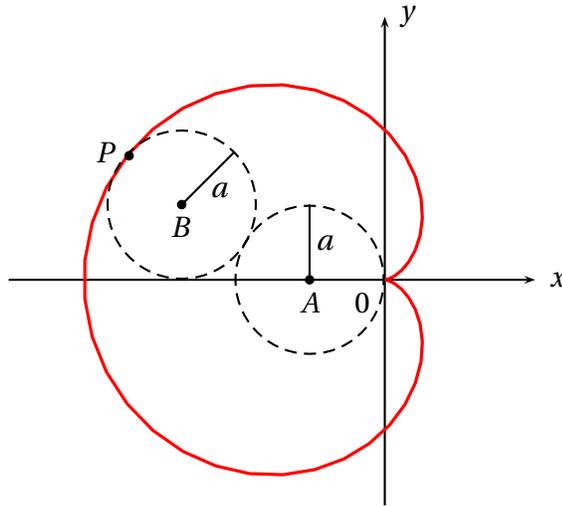


Figura 3.23: Cardioide

Su ecuación paramétrica es:

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

El área encerrada por la cardioide se obtiene a través de la integral

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta \\ A &= a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^2 d\theta \\ A &= \frac{3}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

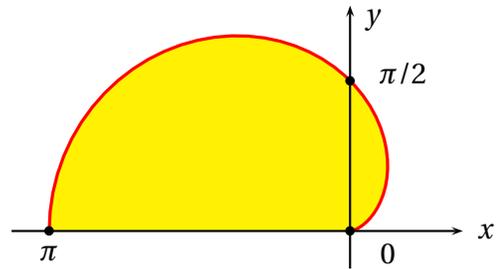


Figura 3.24: Área de la cardioide

La longitud de la cardioide es:

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(a + a\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta \end{aligned}$$

por la fórmula para la mitad de un ángulo tenemos que:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

así que $1 + \cos\theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ luego:

$$L = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = 8a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 8a$$

Luego, la longitud de la cardioide es $L = 8a$ donde a es el radio de la circunferencia que la genera.

• Nefroide

En la epicicloide, la nefroide es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ cuando rueda sin resbalar por el exterior de otra cuyo radio es a .

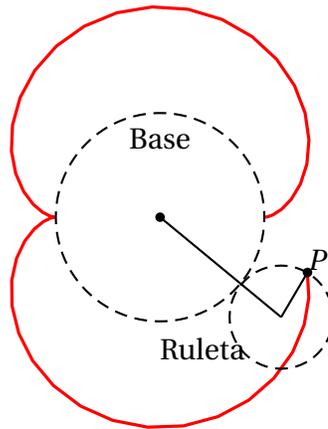


Figura 3.25: Nefroide

APLICACIONES DE LA EPICICLOIDE

Existen muchos mecanismos que generan en su movimiento epicicloides, algunos son:

- El movimiento de las ristras de bolas del rodamiento al girar sobre la pista de rodadura. Sus puntos generan epicicloide nefroides ya que el radio de las bolas es la mitad que el de la pista de rodadura.
- Caja de cambio automática (Cambio Ravigneaux)

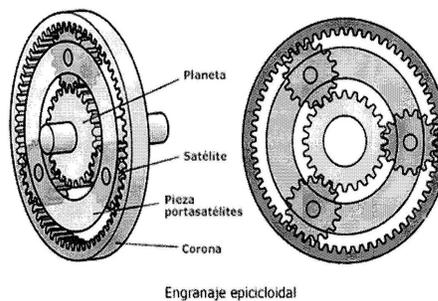


Figura 3.26: Caja de cambio

Las cajas de cambio automáticas están compuestas de una serie de elementos, los más importantes son los trenes epicicloidales; estos sustituyen a las parejas de

piñones que se emplean en cada velocidad de una caja de cambios manual. Este tren de engranajes tiene más capacidad y más relaciones de desmultiplicación, también pueden invertir su giro y no necesita que se interrumpa el giro para cambiar de marcha o velocidad. Si tenemos en cuenta un tren epicicloidal convencional, desde el interior al exterior contamos con: un planetario, tres satélites y una corona. Si tenemos en cuenta el número de dientes, el planetario es el más pequeño, seguido de la corona y por último el porta satélites, que sería el más grande de todos.

- c) Ante el hecho de que los planetas parecen acercarse o alejarse de la Tierra, los griegos tuvieron que analizar dos posibles explicaciones de ese fenómeno: o bien el planeta se movía en torno a la Tierra en un círculo excéntrico, lo que implicaba que ésta no era el centro del Universo, o lo hacía con velocidad constante describiendo un pequeño círculo llamado epiciclo, cuyo centro se desplazaba a su vez de manera uniforme sobre otra circunferencia de radio mayor conocida como deferente, la cual sí estaba centrada en la Tierra, (el aspecto matemático de esta teoría había sido rigurosamente elaborado por Apolonio de Perga).

Esta segunda opción fue la que adoptó Tolomeo, desarrollándola ampliamente en varios capítulos del *Almagesto*, lo que le permitió explicar los movimientos observados de los planetas, incluyendo sus estaciones y retrogradaciones. Para ello consideró que éstos se movían girando en epiciclos y deferentes. La combinación de esos dos movimientos circulares de velocidad uniforme produce una trayectoria con forma de bucle que técnicamente se llama epicicloide (figura 3.27).

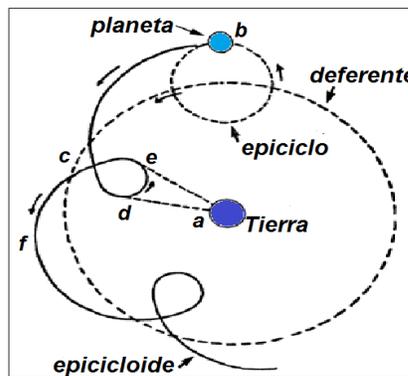


Figura 3.27: Movimiento Planetario

La relación que guardan los radios de la deferente y del epiciclo, así como la que guardan las velocidades relativas de uno y otro movimiento producen epicicloides con diversas curvaturas, así que ajustando adecuadamente tanto los radios de los círculos como la velocidad con la que se mueven fue posible reproducir razonablemente las órbitas planetarias.

Cuando un planeta se desplaza a lo largo del segmento *bcd* de la epicicloide avanza sin interrupción y se dice que tiene movimiento directo, pero al llegar al punto *d*

parece detenerse y quedar estacionario. Al moverse a lo largo del trayecto se va en dirección contraria a la original, razón por la cual un observador mirará que retrocede. Al llegar al punto e nuevamente queda estacionario, volviendo a avanzar cuando recorre el segmento ef de su trayectoria.

En esencia ésa fue la explicación geométrica que Tolomeo dio en el *Almagesto* sobre los cambios en los movimientos planetarios. Y como no modificó la idea del movimiento circular y uniforme tuvo gran aceptación, tanto en su época como durante la Edad Media y buena parte del Renacimiento.

Otras aplicaciones de la epicicloide son los rosetones románicos, las cuales son ventanas circulares con diseños decorativos.



Figura 3.28: Rosetón

3.4. LA HIPOTROCOIDE

La *hipotrocoide* es la curva que traza un punto situado a una distancia c del centro de un círculo móvil de radio b que rueda sin resbalarse dentro de un círculo más grande y fijo de radio a .

La forma particular de una hipotrocoide depende de los valores de estas constantes

En el caso $b = c$ el punto que traza la hipotrocoide está situado en el borde del círculo móvil que rueda dentro del círculo fijo y por lo tanto la curva presenta los picos característicos de una cicloide. En este caso la hipotrocoide es llamada *hipocicloide*.

Ecuaciones paramétricas de la hipotrocoide

Para obtener las ecuaciones paramétricas de la hipotrocoide comencemos por poner el origen de los ejes coordenados en el centro del círculo grande y fijo. La posición del punto que se emplea para trazar la trocoide es el resultado de sumar la posición del centro P del círculo pequeño y móvil respecto del origen de las coordenadas O , posición que está dada

por el vector \overrightarrow{OP} y la posición del punto Q respecto del centro P del círculo pequeño, que está dada por el vector \overrightarrow{PQ} . De esta manera, tenemos:

$$(x, y) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}.$$

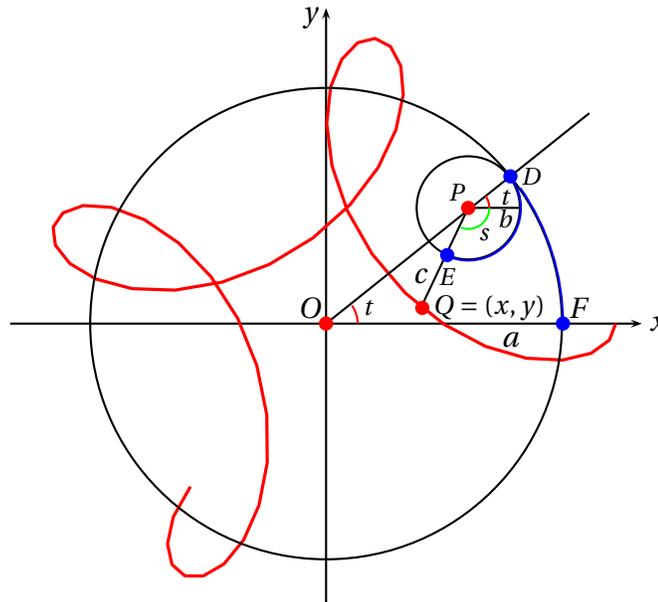


Figura 3.29: Hipotrocoide

Como el radio del círculo grande es a y el radio del círculo pequeño es b , entonces:

$$\overrightarrow{OP} = ((a - b) \cos t, (a - b) \sin t).$$

Consideremos en segundo lugar la posición del punto $Q = (x, y)$ en relación al centro del círculo pequeño que rueda. Como este punto está a una distancia c de P y como el sentido del movimiento es negativo, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = (c \cos(-s), c \sin(-s)) = (c \cos s, -c \sin s).$$

Busquemos ahora la relación entre los ángulos t y s . Como el círculo pequeño rueda dentro del grande sin resbalarse, tenemos que la medida del arco \widehat{DF} es igual a la medida del arco \widehat{DE} . Pero:

$$\begin{aligned} \widehat{DF} &= at \\ \widehat{DE} &= b(t + s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $at = b(t + s)$ y si despejamos s , tenemos:

$$s = \frac{a - b}{b} t$$

Combinando todo lo anterior, llegamos a las ecuaciones buscadas que son:

$$x = (a - b) \cos t + c \cos\left(\frac{a - b}{b} t\right)$$

$$y = (a - b) \sin t - c \sin\left(\frac{a - b}{b} t\right)$$

3.4.1. HIPOCICLOIDE

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b a medida a medida que ésta rueda sin resbalar por el interior de otra cuyo radio es a .

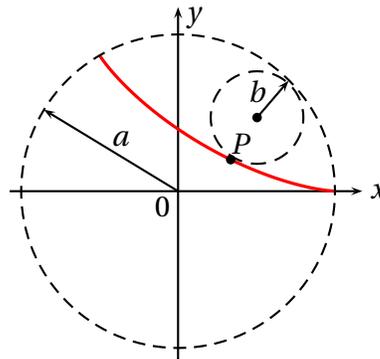


Figura 3.30: Hipocicloide

Las ecuaciones paramétricas de la Hipotrocoide son:

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \phi + b \cos\left(\frac{a - b}{b} \phi\right) \\ y = (a - b) \sin \phi - b \sin\left(\frac{a - b}{b} \phi\right) \end{cases}$$

Hay varios tipos de Hipocicloides, entre ellos tenemos:

Hipocicloide corta: el punto P está situado en el interior de la circunferencia.

Hipocicloide larga: el punto P está situado en el exterior de la circunferencia

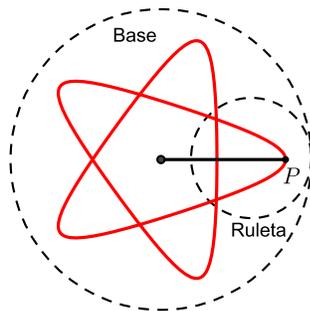


Figura 3.31: Hipocicloide corta

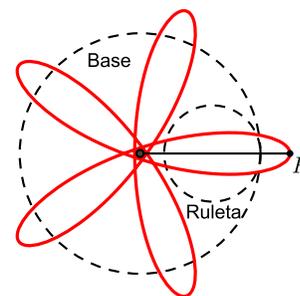
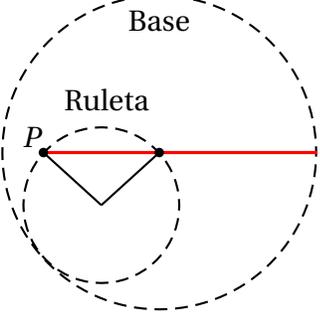
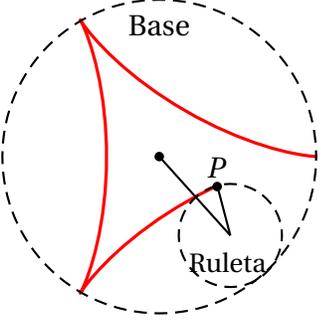
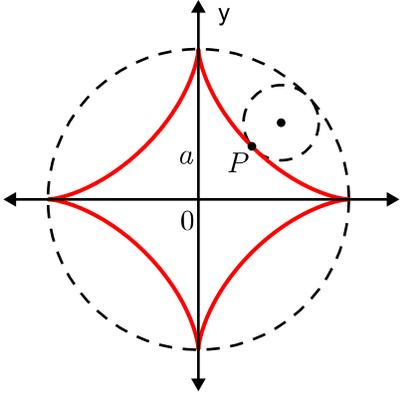


Figura 3.32: Hipocicloide larga

Casos particulares de la hipocicloide

Curvas Hipocicloides	Gráfica
<p>Rectilínea: Es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ cuando rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia cuyo radio es a.</p> <p>Ec. paramétricas $\begin{cases} x = a \cos \phi \\ y = 0 \end{cases}$</p>	
<p>Triangular o Tricuspidal: Es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio $\frac{a}{3}$ cuando rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia cuyo radio es a.</p> <p>Ec. paramétricas $\begin{cases} x = \frac{a}{3}(2 \cos \phi + \cos 2\phi) \\ y = \frac{a}{3}(2 \sin \phi - \sin 2\phi) \end{cases}$</p>	
<p>Cuadrangular o Astroide: Es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio $\frac{a}{4}$ cuando rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia cuyo radio es a.</p> <p>Ec. paramétricas $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$</p>	

Ejemplo 1. Longitud y área bajo la hipocicloide cuadrangular.

Área encerrada por la curva:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 \theta (-3a \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\
 &= -12a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (\sin^2 \theta)^2 d\theta \\
 &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
 &= 12a^2 \left[\frac{1}{16}\theta - \frac{1}{64}\sin 4\theta - \frac{\sin^3 2\theta}{48} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{32}\pi a^2 \\
 &= \frac{3}{8}\pi a^2
 \end{aligned}$$

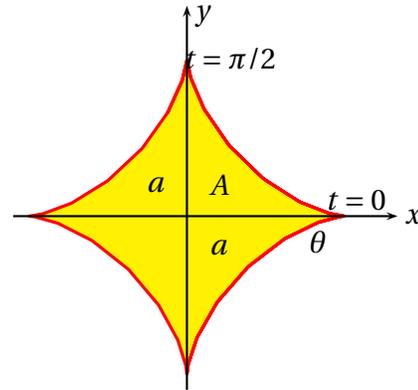


Figura 3.33: Área astroide

Longitud de la curva:

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(9a^2 \cos^4 t \sin^2 t) + (9a^2 \sin^4 t \cos^2 t)} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt \\
 &= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a(-2) = 6a
 \end{aligned}$$

APLICACIONES DE LA HIPOCICLOIDE

- a) El péndulo de Foucault: describe hipocicloides alargadas, éste es un péndulo esférico que puede oscilar libremente en cualquier plano vertical y capaz de oscilar durante mucho tiempo (horas); gracias a su peso y a la longitud del hilo que lo sostiene. Se utiliza para demostrar la rotación de la Tierra. Se llama así en honor de su inventor, *Léon Foucault*.



Figura 3.34: Péndulo de Foucault

- b) Bomba de cavidad progresiva: es una bomba de desplazamiento positivo compuesta por un rotor metálico móvil y una fase estacionaria (estator) que está recubierto internamente por elastómero de forma de doble hélice. La bomba está totalmente capacitada para levantar la producción petrolera nacional con una alta efectividad.

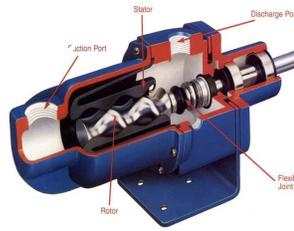


Figura 3.35: Bomba de cavidad progresiva

Al accionarse la bomba, el movimiento entre el rotor y el estator crea cavidades progresivas donde se desplaza el fluido. Este tipo de bombas se caracteriza por operar a baja velocidades y permitir manejar volúmenes de gas, sólidos en suspensión y cortes de agua.

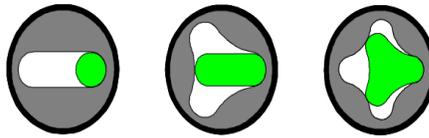


Figura 3.36: Movimiento de la bomba de cavidad

Las bombas de cavidad progresiva, utilizan un rotor de forma helicoidal de (n) número de lóbulos, el cual hace girar dentro de un estator en forma de helicoide de $(n + 1)$ número de lóbulos.

Las dimensiones de los dos elementos que componen la bomba (rotor y estator) generan una interferencia, la cual crea líneas de sellos que definen las cavidades. Al girar el rotor, estas cavidades se desplazan o progresan, en un movimiento combinado de traslación y rotación lo cual se manifiesta en un movimiento helicoidal de las cavidades desde la succión a la descarga de la bomba.

- c) Diseños arquitectónicos: La hipocicloide se utiliza en diseños relacionados con la circunferencia. como por ejemplo el rosetón decorativo utilizando dos astroides girados.



Figura 3.37: Rosetón

Con estas dos últimas aplicaciones queremos finalizar este capítulo, no sin antes mencionar la majestuosidad de las curvas estudiadas, y sus múltiples aplicaciones. Debemos aclarar además que para un estudio mas profundo se requiere de mucho mas esfuerzo por la dificultad evidente en los cálculos matemáticos que aparecen.

Concluimos de lo estudiado

1. Como resultado del trabajo ponemos en evidencia la importancia y majestuosidad de las llamadas curvas cíclicas.
2. La geometría analítica es una herramienta indispensable a la hora de estudiar las curvas clásicas y sus aplicaciones.
3. Toda curvas cíclicas se obtienen por el movimiento de un punto en una circunferencia o en una recta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia o sobre otra recta.
4. Las curvas cíclicas son utilizadas en la física mecánica y diseños arquitectónico.
5. Otra forma de trabajar las curvas cíclicas es utilizando el dibujo técnico para la construcción y deducción de las ecuaciones paramétricas.

- 1 Álvares C. Emiliano. (2008). Curvas Clásicas Enfoque geométrico, cartesiano y matemático, Medellín: Sello Editorial U.
- 2 Thomas, JR. y George B. (2006). Cálculo de varias variables. México: Editorial Pearson Educación.
- 3 Thomas Finney. (1987). Cálculo con geometría analítica. Editorial Addison Wesley Iberoamericana S.A.
- 4 Murray, R. Spiegel. (2005). Fórmulas y tablas de matemática aplicada. España: Editorial McGraw-Hill interamericana.
- 5 De Oteyza E. y Lam Osnaya E. (1994). Geometría analítica. Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A.
- 6 Cuadrado V. José A. Curvas Técnicas y Cíclicas.
- 7 Moreno Corral M. Arturo. (1997). La morada cósmica del hombre. Ideas e investigaciones sobre el lugar de la Tierra en el Universo. México: FCE.
- 8 <http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol024/MaterialDeApoyoEnMaple9.pdf>
- 9 <http://temasmaticos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/introduccion.htm>