Neiva, 11 de febrero de 2016

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

Los suscritos:

ELKIN ALEJANDRO OSORIO AMAYA, con C.C. No. 1075252453, JUAN CAMILO BONILLA BERNAL, con C.C. No. 1075238756, autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado "*Algunos resultados en la enseñanza de la geometría de Froebel a través del concepto de dimensión",* presentado y aprobado en el año 2016 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas, autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

ELKIN ALEJANDRO OSORIO AMAYA:

Firma: Elkin Alejandro Osorio
C.C. 1075 252 453 Neiva

JUAN CAMILO BONILLA BERNAL:

Firma:
C.C. 1075.238.756 Neiva-Huila

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Algunos resultados en la enseñanza de la geometría de Froebel a través del concepto de dimensión.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Osorio Amaya	Elkin Alejandro
Bonilla Bernal	Juan Camilo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Perdomo Díaz	María Liliana

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Perdomo Díaz	María Liliana

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2016 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 86

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Matemáticas	Mathematics	6. Dimensión	Dimension
2. Geometría	Geometry	7. Aprendizaje	Lerning
3. Enseñanza	Education		
4. Pedagogía	Pedagogy		
5. Didáctica	Didactic		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

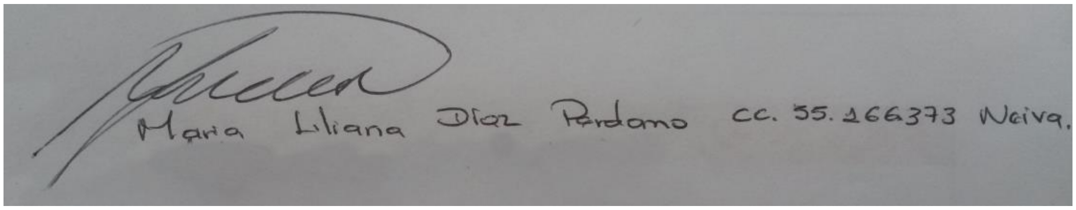
Al experimentar, mediante observación, apreciamos que vivimos en un mundo geométrico, lleno de diferentes formas, y que la naturaleza fue la que innegablemente nos proporcionó las primeras nociones de geometría. Luego, el ser humano empezó a clasificar todas estas formas geométricas que vio, y las utilizó a su conveniencia para crear toda clase de objetos; desde un pequeño ladrillo, pasando por la formación de un tornillo, hasta las más grandes construcciones como las pirámides de Egipto, el Golden Gate, etc.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

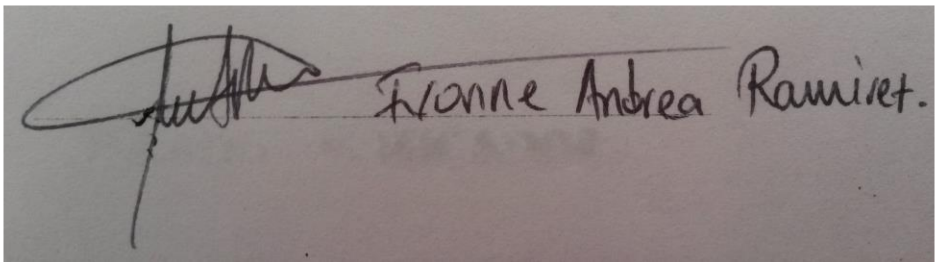
By experimenting, by observation, we appreciate that we live in a geometrical world full of different ways, and that nature was undeniably gave us the basics of geometry. Then the man began to classify all these geometric forms he saw, and used at your convenience to create all kinds of objects; from a small brick, through the formation of a screw, to larger buildings such as the pyramids of Egypt, the Golden Gate, etc.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: MARÍA LILIANA PERDOMO DÍAZ

Firma: 

Nombre Jurado: IVONNE ANDREA RAMIREZ OVIEDO

Firma: 

Algunos Resultados En La Enseñanza De La Geometría de Froebel, A Través Del Concepto De Dimensión

Presentado por:
Elkin Alejandro Osorio Amaya *Código: 2008172233*
Juan Camilo Bonilla Bernal *Código: 2010297253*

Asesora:
Magister María Liliana Perdomo Díaz

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)
Noviembre de 2015

Índice general

Índice de tablas

Agradecimientos

Queremos presentar nuestra gratitud a la profesora María Liliana Díaz Perdomo, quien con paciencia y dedicación nos acompañó durante el desarrollo de este trabajo.

A nuestro compañero Diego Mauricio Galindo Cortes, quien con su compromiso y entrega vivió con nosotros el desarrollo del presente documento.

A la Magister Ivonne Andrea Ramirez Oviedo, la cual, en poco tiempo y con actitud apacible, presentó adecuada y oportunamente sus inquietudes, pudiendo de esa manera consolidar nuestra tarea.

A los miembros del Consejo de Programa de Licenciatura en Matemáticas, encabezado por el Jefe de Programa Mauricio Penagos, quienes con su carácter, paciencia y sabiduría nos lograron traer de vuelta al camino correcto.

En general, queremos expresarles nuestros sentimientos de gratitud a todos aquellos que, de una u otra manera, ayudaron al desarrollo del presente documento.

Capítulo 1

Presentación

Al experimentar, mediante observación, apreciamos que vivimos en un mundo geométrico, lleno de diferentes formas, y que la naturaleza fue la que innegablemente nos proporcionó las primeras nociones de geometría. Luego, el ser humano empezó a clasificar todas estas formas geométricas que vio, y las utilizó a su conveniencia para crear toda clase de objetos; desde un pequeño ladrillo, pasando por la formación de un tornillo, hasta las más grandes construcciones como las pirámides de Egipto, el Golden Gate, etc.

La geometría resulta ser más antigua que el mismo arte de la escritura, porque para poder indagar acerca de nuestros antepasados, no es usual basarse en lo que hayan podido escribir, sino en sus dibujos, en sus objetos, en su ropa, hasta en la misma forma de sus cuerpos, en pocas palabras nos basamos en las formas, en lo que se puede ver y palpar, en lo real.

La geometría es usada por todos y para todo, hasta el tiempo posee su propia geometría, la cual podremos entender al hablar de la cuarta dimensión.

Pero aunque la geometría la estemos utilizando implícitamente para todo, es un campo poco trabajado en la educación. En los colegios generalmente se deja una hora semanal, y la mayoría de las veces no se alcanza a desarrollar, y cuando se desarrolla, solo se hace en el cuaderno del estudiante, manejando fórmulas que ellos aprenden mientras están en el curso y después no recuerdan, y esto sucede porque desde la temprana escuela no se le está enseñando al niño su mundo geométrico, no se le muestra la realidad, se le muestran simples dibujos en un tablero, que para el caso de una segunda dimensión, puede que sirva, pero para tratar la tercera dimensión, "nuestro mundo real", esto resulta insuficiente.

Aquí es donde vale la pena resaltar que no se hace geometría hasta que no se relacionen diferentes afirmaciones geométricas, se conjeturen resultados y estos se apliquen a diferentes situaciones.

Por esta razón es que nos interesa hacer una revisión bibliográfica basada en el artículo "Dimensión" de Thomas F. Banchoff, ya que en ese artículo Thomas da herramientas para hacer más provechoso el aprendizaje de las matemáticas, en especial de la geometría por medio del manejo de las diferentes dimensiones.

Se hará un análisis de las diferentes dimensiones que menciona el autor en el artículo, incluyendo la dimensión cero. Finalmente se tratará la dimensión fractal, haciendo una corta reseña de lo que es la geometría fractal y su participación natural en nuestro mundo.

Después de hacer las reflexiones frente a lo anterior, se analizará algunos temas matemáticos, a los cuales Thomas F. Banchoff hace referencia en su artículo, así como el método que utilizaba Friedrich Froebel para enseñar a sus estudiantes.

Además se realiza, anexo a este trabajo, una descripción de las intencionalidades de Froebel con la puesta en práctica de este enfoque metodológico, con los estudiantes de grado tercero (3°) de la institución educativa María Cristina Arango.

1.1. Descripción y formulación del problema

1.1.1. Descripción del problema

A través de observaciones, experiencias con docentes cuya vida han dado a la educación y reflexiones propias, hemos notado, que la educación matemática en Colombia ha sido afectada incontables veces con distintas reformas aplicadas sin estudios previos, ni análisis de contextos educativos especiales, apropiando enfoques metodológicos y teóricos de distintos países. A través de la historia de la educación matemática en Colombia se ha dejado de lado el estudio de la Geometría.

¿Por qué es importante estudiar geometría? La respuesta a esta pregunta lleva a reflexionar sobre el nacimiento de la geometría y en cómo el ser humano, a través de la percepción de las formas, del espacio que lo rodea y la necesidad de crear y transformar el mundo en el que vive, ha buscado una manera de explicar aquello que percibe a través de los sentidos. La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad[1].

Uno de los conceptos que se dejan de lado en el desarrollo de los contenidos de la "Geometría", como materia independiente, es el de "dimensión", el cual al ser abordado desde un enfoque de praxis, como el propuesto por Friederich Froebel, puede desarrollar en el estudiante el tan anhelado pensamiento Geométrico y Espacial que se menciona en los Estándares Básicos de Competencia establecidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, así mismo como el mismo pensamiento Matemático en general.

1.1.2. Formulación del problema

Las distintas observaciones de la realidad han dado paso al estudio de la geometría, que como su nombre lo indica, según la etimología griega de su palabra, Geo – Tierra (Espacio); Metría – Medida (Medición), es en sí mismo el análisis del entorno que rodea al estudiante.

El enfoque establecido por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, como lo define Carlos E. Vasco: "*Diseño instruccional de corte funcionalista*" (1985); pretende que el estudiante parta de conceptos abstractos ordenados en forma de algoritmos, para alcanzar una aprehensión del espacio circundante, lo cual está en contradicción con la misma concepción de la disciplina.

El enfoque basado en las observaciones de la realidad y la experimentación de situaciones y eventos que se presentan en su cotidianidad, pretende fomentar el proceso de abstracción del conocimiento del estudiante.

Esta estudio parte de la metodología de enseñanza empleada por el teórico Friederich Froebel, afamado educador, quien obtuvo resultados sobresalientes como la creación del Kindergarten, y el planteamiento de sus 10 principios de educación[2].

[1]The Van Hiele Model And The Teaching Of The Geometry, G. Vargas, Editorial UNA, Costa Rica, Introducción P. 1.

[2]http://soyeducadora.com/2013/01/27/froebel-hoy-algunos-principios-pedagogicos/ ; 05 de octubre 2015

1.2. Justificación

El desarrollo de un enfoque distinto de la orientación de la Geometría es vital para darle nuevamente ese papel crucial con el cual fue planteada en sus inicios. A saber, dentro de la educación colombiana, la Geometría es una materia tratada como disociada, tomada en muchos casos como una herramienta para representar "gráficamente" algunos temas de las Matemáticas. En la antigüedad fue considerada como un pilar para el desarrollo de las ciencias, del pensamiento; en este orden de ideas, lo planteado en el presente propone una perspectiva para el tratamiento pedagógico y didáctico de las Geometría.

Como propone Carlos Eduardo Vasco Uribe, en su artículo "*Algunas reflexiones sobre la pedagogía y didáctica*" (1989); "*La pedagogía es el saber teórico-práctico generado por los pedagogos a través de la reflexión personal y dialogal sobre su propia práctica*", dentro de la reflexión de la acción como docentes de Matemáticas es inherente tratar la Geometría; por lo anterior, esta empresa se inicia porque se desea hacer pedagogía.

Dentro de las políticas neoliberales de globalización las competencias estandarizadas generan objetivos precisos; en aras de facilitar y orientar el alcance de los anteriores, este esfuerzo es más que relevante, pues propone alternativas didácticas y pedagógicas poco comunes y con resultados prominentes.

Por otro lado, estos enfoques metodológicos alternativos ponen en escena una opción que podría tomarse en cuenta en la realización de un "estudio de clase", lo cual a su vez posibilita el desarrollo de clases innovadoras.

1.3. Alcances y límites

1.3.1. Alcances

Con el presente se pretende fundamentar un precedente en Colombia relacionado con el enfoque de las metodologías de enseñanza de la Geometría, dentro del contexto de la educación Matemática, más práctico, orientado por las técnicas del teórico Friederich Froebel.

Como alcance inmediato se busca promover la aplicación de este enfoque en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas para que sea llevado a cabo durante sus prácticas docentes pedagógicas.

Se proyecta sentar una propuesta base para la elaboración de un proyecto general de Educación de la Geometría en Colombia, durante la realización de estudios de posgrado de los que presentan la actual propuesta.

1.3.2. Límites

Teniendo en cuenta que el MEN (Ministerio de Educación Nacional) de Colombia tiene como estandarte el desarrollo de la autonomía institucional en cuanto al contenido programático de las distintas materias, existe una limitación relacionada con la aceptación por parte de las Instituciones Educativas de nuestra propuesta.

Más particularmente, el trabajo en el aula se ve limitado en parte por la accesibilidad de los materiales, sin embargo muchas cosas aquí planteadas pueden llevarse a cabo prácticamente sin instrumentos extras.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

- Analizar los aportes realizados por Friedrich Froebel frente a la enseñanza de la geometría teniendo en cuenta el concepto de dimensión de Banchoff, para que éstos se fundamenten como nuestras bases y así mejorar nuestra tarea docente.

1.4.2. Objetivos específicos

- Establecer la complejidad del concepto de "Dimensión" cuando se toma a través de los distintos campos como la Topología, Teoría de la Medida y el Álgebra Lineal mediante el análisis del documento "¿Qué es Dimensón?" de Thomas F. Banchoff, para luego presentarlo de manera intuitiva.

- Estudiar el concepto de dimensión aportado por Banchoff.

- Diferenciar la visualización, concepción y manejo de las dimensiones usuales: Dimensión 1, 2, 3, mediante el uso de experiencias propuestas por los teóricos de referencia y nosotros.

- Declarar la visualización, concepción y manejo de las dimensiones extrañas: Dimensión 0, Cuarta, Temporal o Hiperespecial, Fractal.

1.5. Referentes

1.5.1. Antecedentes

Realizando una indagación de material bibliográfico y webgráfico se encontró distintos trabajos que tienen relación con los objetivos de este proyecto.

Se encontró el libro titulado "La enseñanza de la geometría", publicado originalmente en 2008 por Silvia García y Olga Leticia López, del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación de México. En este material se hallaron respuestas a algunas preguntas que surgieron al iniciar la descripción del problema, tales como: ¿Qué tanto sabemos de geometría? ¿Qué tiene que ver la geometría con nuestra realidad? ¿Por qué hay que aprender geometría? ¿Es cierto que nuestros alumnos saben poco acerca de los contenidos geométricos? ¿Cómo enseñamos la geometría en la escuela primaria o en la escuela secundaria? ¿Existen otras estrategias didácticas para enseñar la geometría? ¿Qué debo no perder de vista al momento de diseñar las actividades para que mis alumnos aprendan geometría?

Como segundo antecedente tenemos el artículo del Dr. Miguel de Guzmán Ozámiz, de la Universidad Complutence de Madrid, España., "Tendencias innovadoras en educación matemática"publicado en la Facultad de Matemáticas de la mencionada universidad. Este artículo favoreció el desarrollo del proyecto por su posición particular frente a los cambios en los principios metodológicos para la enseñanza de las matemáticas, y el análisis que se realiza en el mismo sobre la heurística tomada como "problem solving".

Buscando de manera local (en Colombia) se estableció como antecedente el trabajo "Apoyo al currículo de matemáticas, en el componente geométrico", de Héctor Mario Hernández y Juan Carlos Gaviria C, presentado en la Universidad de Antioquia, Medellín, para su maestría en enseñanza de las matemáticas. En éste se apreció el análisis hecho a la aplicación de estrategias didácticas nuevas, enfatizando la preparación docente a los cambios de enfoque metodológico.

Otro antecedente relacionado es la tesis de Wuyndy Elizabeth Vera Flórez, quien fue orientada por el Dr. Élgar Gualdron Pinto, presentada en el 2014 en la Universidad de Pamplona, la cual lleva como título "Introducción a la geometría: una propuesta para su enseñanza". De este documento se tomaron algunas observaciones sobre la percepción de la geometría como materia a enseñar.

1.5.2. Referentes conceptuales y teóricos necesarios para asumir el proceso de indagación

Conceptos claves

Para lograr que el trabajo contextualice al lector, se han establecido algunos conceptos claves.

- **Matemática**: ciencia formal que estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas, comúnmente se usaba para la explicación del mundo natural.

- **Geometría**: parte de las matemáticas que estudia la extensión (representación gráfica), la forma de medirla y las distintas relaciones existentes entre el mundo percibido y su conceptualización matemática.

- **Enseñanza**: es una actividad realizada conjuntamente entre cuatro elementos: uno o más docentes, uno o más estudiantes, el objeto de conocimiento, y el entorno educativo.

- **Pedagogía**: saber teórico-práctico generado por los pedagogos a través de la reflexión personal y dialogal sobre su propia práctica pedagógica, específicamente en el proceso de convertirla en praxis pedagógica, a partir de su propia experiencia y de los aportes de las otras prácticas y disciplinas que se intersectan con su quehacer.

- **Didáctica**: es la disciplina científico-pedagógica que tiene como objeto de estudio y elementos existentes en la enseñanza y aprendizaje.

- **Dimensión**: número relacionado con las propiedades métricas o topológicas de un objeto matemático.

Referentes teóricos

Para la elaboración de este proyecto se tomaron en consideración a dos autores, a continuación se hace una reseña de su vida.

- **Thomas F. Banchoff**: Eminente matemático norteamericano, dedicado a la investigación en el área de la Geometría Diferencial. En 1964 obtuvo su título de Doctorado de Filosofía en la universidad de California Berkeley, luego, trabajó en la universidad de Harvard, Ámsterdam y después en la universidad de Brown, ubicada en la ciudad de Providence (EEUU), de ahí, hizo parte de la Sociedad estadounidense de Matemática donde tiempo después llegó a ser presidente ésta.

  Actualmente se le ha otorgado el premio "National Science Foundation Director's Award for Distinguished", por su trabajo como investigador articulado con la docencia.

  Mientras Banchoff trabajaba arduamente en sus investigaciones, pensaba a la vez, como usar una herramienta de tipo electrónico, para mejorar la educación matemática y en paralelo la investigación de ésta, Banchoff contribuyó a la instalación de laboratorios de cómputo especializados en matemática del país, también, ha logrado avances en el desarrollo de software para el estudio de la geometría innovadora y programas que contribuyen al estudio de matemáticas en pregrado. Él a través de procedimientos informáticos ha logrado obtener imágenes las cuales se integran a su propia investigación, llegando así a realizar vídeos para mejorar la difusión de sus resultados.

  En la década de los 90, cuando la web empezó a surgir, Banchoff observó que ésta podría ser empleada a la educación matemática e investigación, contribuyendo un mejor estudio de la geometría, a raíz esto empezó a elaborar una serie de proyectos asentados en la web, para resolver paradigmas sobre el uso de éste medio de carácter eficiente.

- **Friederich Froebel**: (Oberweissbach, 1782 - Marienthal, 1852) Pedagogo alemán. Discípulo de Rousseau y de Pestalozzi, estudió sobre todo la educación preescolar. Sus teorías sobre la educación reposan sobre un Cristianismo sin dogmatismos y su pedagogía lúdica del jardín de infancia insiste a la vez sobre la comunión de los adultos y los niños en el juego y sobre la función pedagógica intrínseca de los materiales u objetos naturales de los que se revelan poco a poco sus estructuras y leyes. Descubrió su vocación por el magisterio en 1805, en una Musterschule o escuela secundaria de Fráncfort del Meno donde se enteró de las novedosas ideas pedagógicas de Johann Heinrich Pestalozzi.

Su vocación específica de educador de la infancia adquirió aspectos precisos tras un breve paso por las universidades de Gotinga (1811) y Berlín (1812) y al regreso de la campaña contra Napoleón (1814), cuando ciertas circunstancias familiares le llevaron a ocuparse en la educación de cinco sobrinos. Se trasladó a varios lugares de Suiza y, tras unos cuantos intentos llevados a cabo en Wartensee, Willisam y Burgdorf, estableció en 1840 en Blankenburg el primer "Kindergarten"(jardín de infancia) alemán. Las actividades en su jardín de infancia incluían cantar, bailar, jardinería, jugar y autodirigirse con los "dones"de Froebel.

Fröbel creó diversos materiales escolares para estimular la actividad creadora y de observación. La gran visión de Friedrich Froebel fue reconocer la importancia de la actividad del niño en sus procesos cognitivos de aprendizaje. Introdujo el concepto de "trabajo libre"(Freiarbeit) en la pedagogía y estableció el "juegoçomo la forma típica que la vida tiene en la infancia, por lo que también vale la pena educar en el juego y mediante el juego; los niños hacen jugando cosas que nunca harían de forma impuesta y autoritaria.

En los trabajos de Friederich Froebel encontramos las llamadas "**Ideas Pedagógicas**":

- El estudiante debe ser tratado de acuerdo con su dignidad de hijo de Dios y dentro de un clima de entendimiento y de libertad.
- El profesor está obligado a respetar al discípulo en toda su integridad.
- El educador debe manifestarse como un guía experimentado y amigo fiel que, con mano flexible, pero firme, guía al discípulo. No es sólo un guía, sino también un sujeto activo de la educación: da y recibe orientación, pero deja libertad, aun cuando propone la actividad.
- El maestro debe conocer los diferentes grados de desarrollo del hombre para llevar a cabo su tarea con éxito: etapas de desarrollo infancia, niñez, pubertad, juventud, madurez.

Capítulo 2

Descripción del enfoque metodológico de enseñanza

2.1. Diferentes dimensiones según el artículo “dimensión” de Thomas F. Banchoff

Se puede llegar a pensar que la geometría suele ocuparse sólo de problemas relacionados con la medición y construcción, así como con problemas relacionados con astronomía. Pero la geometría va más allá de las mediciones y construcciones, también tiene un valor axiomático lo cual permite que se demuestren muchas teorías. Fue sobre todo Euclides quien con su obra “ELEMENTOS” sentó las bases teóricas de la geometría matemática. En la edad media fueron culturas islámicas quienes sumaron la trigonometría a la geometría Euclidiana. En el siglo XVII Europa vuelve a ser el centro de desarrollo de la geometría; nace así la geometría analítica. En el siglo XVIII aparece la geometría diferencial. En el siglo XX la geometría tradicional es sustituida por la geometría moderna que hace uso de novedosos sistemas axiomáticos. Con el soporte de las computadoras, la nueva geometría descriptiva va volviéndose una importante ayuda en cada vez más aspectos de la vida cotidiana [1].

La geometría siempre ha hecho parte de las matemáticas, el sentido estético del hombre prehistórico pudo haber despertado su interés por los diseños y relaciones espaciales y de esta forma empezar a hacer geometría, ya sea por el puro placer de hacer matemáticas, como ayuda práctica para la medición u otras alternativas, como el hecho de que la geometría, así como la numeración, tuviera su origen en ciertas prácticas rituales primitivas[2].

La geometría a través de toda la historia ha encerrado muchos conceptos y teorías, uno de los conceptos claves es el de “Dimensión”, el cual todavía se sigue estudiando.

El concepto de dimensión puede observarse desde tres caminos diferentes:

- **Dimensión topológica:** desde un punto de vista topológico se sabe que la circunferencia y una curva cerrada simple encierran el mismo tipo de superficie (es posible transformar una en la otra mediante una deformación continua, es decir, sin

[1] historia de las matemáticas K. Ríbnikov, Editorial Mir Moscú. P. 76 al 79.
[2] www.20enmate.com, 11 de febrero de 2015.

que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones "no topológicas")[3]. Desde un punto de vista métrico no son el objeto, ya que las áreas que encierran son diferentes. Aparece aquí entonces, una característica moderna de las matemáticas: intentar clasificar los objetos por lo que se conserva, por los invariantes, y analizar por otra parte, qué ocurre con lo que no se conserva, cómo hay que analizarlo, qué hay que hacer con ello, cómo integrarlo en el mundo de los entes matemáticos.

En el ejemplo anterior, lo que se conserva es el carácter topológico, es decir, la dimensión topológica. Ahora se analiza brevemente lo que significa la dimensión topológica, que es un término que introdujo Henri Poincaré para discernir sobre cuestiones de este tipo.

La definición inductiva dada por Poincaré al introducir este concepto fue la siguiente:

- El conjunto vacío tiene dimensión -1.
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios $(n-1)$ dimensionales, se dice que el espacio que se considera es n-dimensional.

Según esta definición se tiene:

- Conjunto vacío: dimensión topológica: $D=-1$.
- Punto: dimensión topológica: $D=0$.
- Segmento: dimensión topológica: $D=1$.
- Cuadrado: dimensión topológica: $D=2$.
- Cubo: dimensión topológica: $D=3$.

Otra definición de la dimensión topológica de un objeto geométrico la dio K. Devlin en 1988. Es la definición por el movimiento: En una curva sólo hay movimiento en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie hay movimiento adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen hay movimiento, además, hacia arriba, hacia abajo.

La construcción de la dimensión topológica se puede basar en la idea de generalizar el concepto de que la dimensión de una bola es tres, mientras que la dimensión de la esfera que la limita es dos: dimensión de un conjunto x a partir de la dimensión de su frontera δx.

- **Álgebra lineal:** para dar la definición de dimensión en este caso, se debe conocer primero el concepto de BASE:

  Definición 2.1.1 ***Base:*** *si B es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, entonces B es una base para V si y solo si:*

  - *El espacio V es generado por B.*
  - *B es un conjunto linealmente independiente*[4].

[3]Introducción A La Topología, Jose Maria Muñoz Q, Segunda Edición, Bogotá-Colombia, 1977. P. 15 a 16.

[4]Álgebra (Lineal Básica), Ana M Díaz Hernández, Vicente Bargueño Fariñas, Carlos Romera Carrión, Luis Manuel Ruiz Virumbrales, Luis Tejero Escribano, Editorial SANZ Y TORRES, S.L. Madrid-España. P. 25 a 28.

El concepto de dimensión viene dado de la siguiente manera:

Dimensión: la dimensión de un espacio vectorial $V \neq \{0\}$ es n si y sólo si V tiene una base que contenga n vectores. En el caso trivial en que $V = \{0\}$ se dice que V tiene dimensión 0.

Al dar esta definición se puede observar que el número de variables independientes de una ecuación es lo que determina la dimensión.

Esta definición de dimensión está más de acuerdo con la idea intuitiva que se tiene de este concepto cuando se habla de un punto como algo "cerodimensional", una recta como algo "unidimensional", un plano como algo "bidimensional" y un espacio en "tres dimensiones".

Cuando el concepto de dimensión es tratado de esta forma, es cuando se habla de dimensión EUCLIDIANA, que sería un caso particular del álgebra lineal[5].

- **Teoría de la medida:** el concepto de dimensión en términos de la medida se refiere al crecimiento, es decir hay una relación de potencias[6].

Definición 2.1.2 *S es la potencia a la que se eleva el diámetro para calcular la medida $H(E)$.*

$$H^s(E) \Leftrightarrow \begin{cases} s = 3, & Volumen\, de\, E \\ s = 2, & \acute{A}rea\, de\, E \\ s = 1, & L\acute{o}ngitud\, de\, E \end{cases}$$

Se observa que si E es una región plana, al medir la longitud, esta será infinita, igualmente si se trata de medir el área de un sólido, esta también será infinita.

Obsérvese la siguiente gráfica:

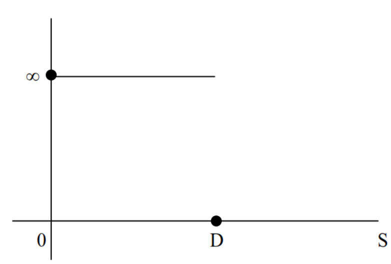


Figura 2.1: Gráfica para obtener la dimensión.

En el momento en que $H^s(E)$ deja de ser infinito, para volverse cero, en ese momento se tendrá el valor D de la dimensión.

[5] Algebra Lineal, ed. 5. GROSSMAN, Stanley I, Editorial McGraw-Hill, 1996 Colombia. P. 337 a 348.
[6] Teoría de la medida, Miguel A Jiménez Pozo, Editorial Pueblo y Educación, Playa-Ciudad de la Habana, 1989. P. 123.

$$dim(E) = D \Leftrightarrow \begin{cases} H^s(E) = \infty, & si\ S < D \\ H^s(E) = 0, & si\ S > D \end{cases}$$

Aunque se reconozca la dificultad al formalizar estos conceptos, esto no debe impedir su exploración a nivel intuitivo y elemental.

Un profesor de matemáticas no tiene que conocer formalmente el desarrollo de este tema, pero si sería bueno que se investigara un poco más, y así cultivar inquietudes en sus estudiantes.

Es claro que el propósito de este documento no es profundizar en estos conceptos avanzados, por lo tanto no se hará.

2.2. Dimensiones Usuales

2.2.1. Dimensión uno

En esta dimensión se está haciendo referencia a la profundidad, aquí aparece la línea recta, aunque es otro concepto que no se puede definir, se puede dar ideas que nos lleven a éste[7], estas ideas en ningún momento se pueden identificar con una definición.

Ejemplo:

- Una recta como parte de una situación física. (Ver Figura 2.2)

Figura 2.2: Carrilera.

- Una recta como la línea más delgada que se pueda dibujar, conservando la dirección. (Ver Figura 2.3).

Figura 2.3: Lineas rectas.

Se dice que una recta es una longitud ilimitada, derecha, sin grosor, ni extremos, en general decimos, que la línea recta es una sucesión de infinitos puntos en una única dirección.

[7]Ibid., Página 10.

En los Elementos de Euclides se trata de dar la definición de una línea como "una longitud sin anchura" y también se aclara que los extremos de una línea son puntos, o sea que se ve el punto como límite de una línea. Esto es, una figura es unidimensional si su frontera está compuesta de puntos.

En esta dimensión el punto puede estar situado en cualquier parte, más atrás, más adelante y existen infinitos puntos en distintas posiciones.

Cuando se habla de recta, se habla de un número, de una longitud, de una distancia, es por esto que Thomas escribe que en esta dimensión, número y geometría se hacen uno solo, se entrelazan.

Haciendo referencia al álgebra lineal, en la "dimensión uno" aparecen los conceptos de posición, distancia y longitud. En esta dimensión se puede dividir la línea en distintos segmentos con distintas longitudes y posiciones, pero no pueden existir líneas que se crucen o sean más gruesas unas que otras.

Thomas enuncia varios ejemplos para entender ésta dimensión.

- Cuando se dan instrucciones para ir de un lugar a otro, ir tantas casas a la derecha, o a la izquierda, o cuando se quiere encontrar un lugar con una dirección, simplemente se está ubicando un número.

- Cuando se quiere hallar la temperatura en un termómetro, se está hallando un número, ya sea positivo o negativo.

- También cuando se quiere cambiar de estación en un radio ya sea analógico o digital, lo que se necesita es ubicar un número.

Como se puede ver estos ejemplos para ilustrar la primera dimensión, lo único que se requiere es la localización de un número.

Ahora vamos a adentrarnos más en la parte de distancias y longitudes, ya que el problema fundamental de la geometría unidimensional es la determinación de la distancia a lo largo de una trayectoria.

Para medir una magnitud se elige una unidad de medida "u" adecuada, de la cual se toman múltiplos y submúltiplos. Cuando se mide una magnitud se compara con la unidad de medida y se expresa las veces que la unidad de medida está contenida en la cantidad, acompañada con la designación de la unidad usada[8].

Para hablar de posición, distancia y longitud, es importante hacer referencia al concepto de perímetro. Se puede decir que el perímetro de una figura es la longitud del contorno de ésta.

Aunque vale la pena aclarar que el concepto de perímetro se define para figuras que estén por lo menos en dos dimensiones, lo que se mide es la frontera de estas figuras, esta frontera si es unidimensional.

[8] Dimensión Matemática 8. Londoño, Nelson; Guarín, Hugo y Bedoya, Hernando. Colombia; Grupo Editorial Norma, 1993. Página 12.

Un ejemplo se tiene al comparar perímetros de curvas y polígonos. En este caso el perímetro de un polígono es la suma de los lados del polígono[9].

Al hablar de perímetros se encuentra algo muy importante que es el número pi (π). A veces se piensa que este número es la simple estimación numérica que da la calculadora (3,1415...) o 22/7, pero estas son sólo aproximaciones.

Matemáticamente y desde el punto de vista de la dimensión uno, π es la razón de la circunferencia del círculo y su diámetro. (Ver Figura 2.4).

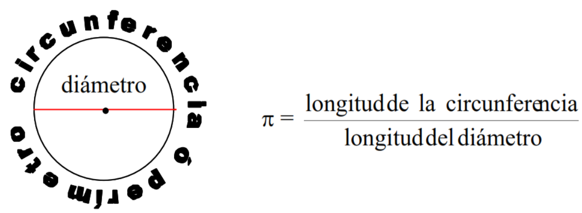


Figura 2.4: Relación entre el diámetro y la circunferencia.

Encontrar la circunferencia del círculo es un problema unidimensional, o sea, su solución debe estar representada por un punto en la recta numérica, se pueden hacer comparaciones con perímetros de polígonos inscritos y circunscritos para tratar de llegar a este punto, pero tampoco se puede llegar al valor exacto de π. (Ver Figura 2.5).

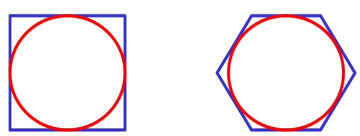


Figura 2.5: Comparaciones de perímetros inscritos y circunscritos.

Un ejemplo bastante importante de esta dimensión, se tiene cuando se ubican números en la recta real.

Para ubicar los números en la recta primero se tiene que elegir una unidad de medida "u", y tomar un punto de referencia, en este caso el cero. (Ver Figura 2.6).

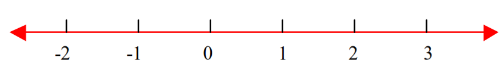


Figura 2.6: Recta real

[9]Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 408.

Veamos, como ejemplo, la ubicación $\sqrt{2}$ que es un número irracional.

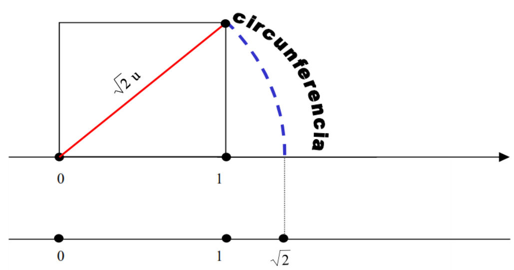


Figura 2.7: Ubicación de $\sqrt{2}u$ en la recta real

Con un compás se mide ese segmento de longitud $\sqrt{2}u$ y luego esta medida se lleva hasta la recta numérica, partiendo desde el punto cero.

Para ubicar $\sqrt{3}$, sobre el segmento de longitud $\sqrt{2}u$ se construye un rectángulo de altura $1u$, entonces la diagonal de este rectángulo tiene una medida igual a $\sqrt{3}u$, esta medida se toma con el compás y se lleva a la recta numérica, y así se ubica $\sqrt{3}$. (Ver Figura 2.8).

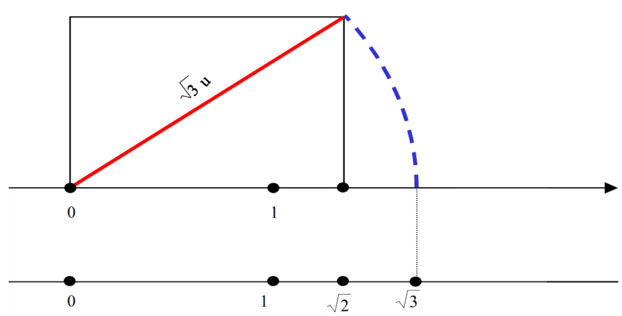


Figura 2.8: Ubicación de $\sqrt{3}u$ en la recta real

Así sucesivamente se puede ubicar $\sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, ...\sqrt{n}$. (Ver Figura 2.9).

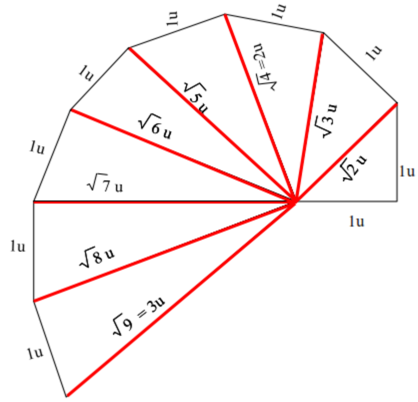


Figura 2.9: Racionales e irracionale

Para representar en la recta numérica los números irracionales de la forma $\frac{1}{\sqrt{n}}, n \in N$, sobre el segmento de la longitud unitaria, nos apoyamos en la representación de los números irracionales $\sqrt{n}$ con $n \in N$.

Ejemplo:

- Para ubicar $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en la recta, se construye un rectángulo de longitud $\sqrt{2}u$ y $1u$, su diagonal mide $\sqrt{3}$. Sobre la diagonal se construye un segmento de longitud $1u$ partiendo desde la esquina donde se ubica el punto cero. Luego se construye un rectángulo cuya diagonal sea el segmento construido anteriormente, y cuyos lados caigan perpendicularmente sobre los lados del rectángulo original. El lado que queda perpendicular al lado de la longitud $1u$, mide $\frac{1}{\sqrt{3}}u$; luego se ubica en la recta numérica de la misma forma como se había hecho anteriormente. (Ver Figura 2.10).

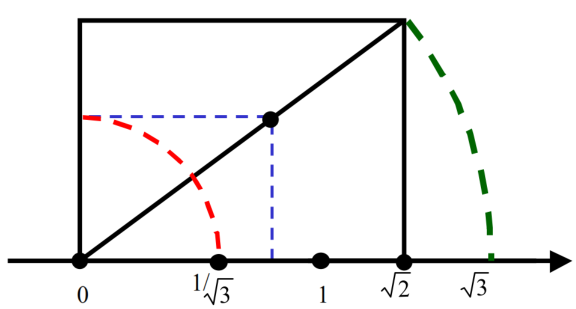


Figura 2.10: Ubicación de $\frac{1}{\sqrt{3}}u$ en la recta real

Este hecho se justifica mediante el uso de triángulos semejantes: (Ver Figura 2.11).

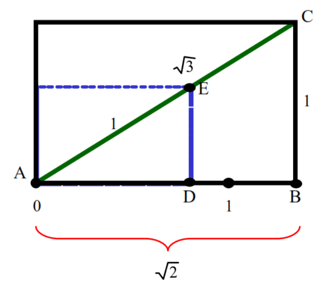


Figura 2.11: Triángulos semejantes

Lo que hay que demostrar, es que el segmento $\overline{DE}$ mide $\frac{1}{\sqrt{3}}u$.

Mediante triángulos semejantes se obtiene:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Esto es:

$$\frac{\overline{DE}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$\overline{DE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para representar el número π en la recta numérica, se construye una circunferencia cuyo diámetro mida $1u$ y así la longitud de la circunferencia es igual a πu.

Para transportar la longitud π sobre la recta, se coloca la circunferencia tangente a la recta, haciendo coincidir el punto de tangencia T con el origen y se hace rodar sobre la recta hasta que el punto T vuelva a estar sobre la recta. Este nuevo punto representa el número irracional π[10]. (Ver Figura 2.12).

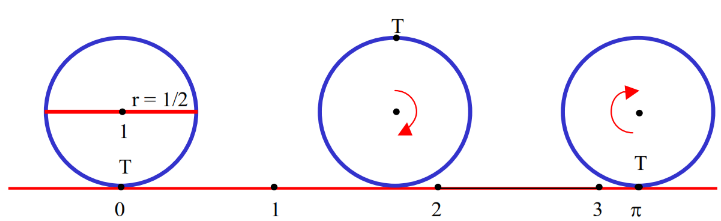


Figura 2.12: Ubicación de π en la recta real

[10] IBid., 1993. Páginas 22 y 23.

2.2.2. Dimensión dos

Después de una exposición sobre el punto y la línea, se tienen suficientes bases para hablar de la dimensión dos. Se vio que la dimensión uno está dotada de profundidad, la dimensión dos posee tanto profundad como anchura, y ahora ya no se tiene una línea, sino que se tiene un plano, en el que se puede ubicar puntos y líneas las cuales se pueden situar con total libertad, y no tienen por qué tener el mismo grosor, aquí es posible formar figuras planas y contornos. La palabra plano también se considera "primitiva en la geometría euclidiana", en la geometría afín, es la solución a una ecuación lineal en tres variables. Se puede intuir lo que es un plano mediante imágenes[11].

Ejemplo

- Un plano como parte de un objeto físico. (Ver Figura 2.13).

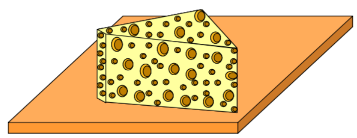


Figura 2.13: Queso

- Un plano como el corte más delgado posible. (Ver Figura 2.14).

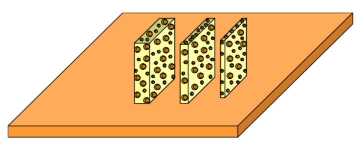


Figura 2.14: Queso tajado

No solamente los planos son de dimensión dos, las superficies también.

Los objetos en esta dimensión tienen ciertas características:

- En ellos se puede hablar de longitud y anchura[12].
- Se les puede medir el área. Cuando se habla de área, esta se puede definir como una parte del universo delimitado por líneas, donde se puede solapar figuras e incluir unas figuras en otras[13].
- Están limitados por líneas de dimensión uno.

[11] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 11

[12] Elementos de Euclides Libros I-VI, Puertas Castaños, Margarita. España, Editorial Gredos 1991 Páginas 13 al 17.

[13] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 11.

Hay varias fórmulas para hallar áreas de regiones planas. Esas fórmulas son instrumentos de aplicación inmediata en actividades académicas y prácticas como son, el embaldosado de los pisos, la confección de vidrieras, los diseños textiles, la planeación urbana, el diseño de máquinas de alta tecnología e industrial, etc.

En la dimensión dos, es necesario elegir una unidad de medida "u^2" para medir el área de las regiones, a esta unidad de medida se le llama "unidad cuadrada".

Una unidad cuadrada es una región cuadrada en la cual cada uno de sus lados mide una unidad de longitud. (Ver Figura 2.15).

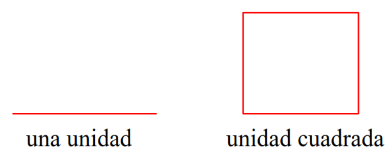


Figura 2.15: Unidad cuadrada

Las unidades más comunes para medir áreas son la pulgada cuadrada, el pie cuadrado, las yardas cuadradas, los centímetros cuadrados, los metros cuadrados, etc.

El área de una región se determina contando el número de unidades cuadradas que se requieren para cubrir exactamente la región[14]. (Ver Figura 2.16).

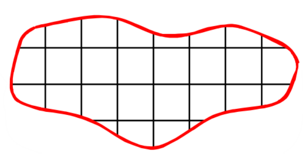


Figura 2.16: Área de una región determinada

En un plano cuadriculado se puede decir, vete tres cuadras a la derecha, da la vuelta a la izquierda y avanza otras tres cuadras o "avanza tres cuadras al este y luego tres cuadras al norte". Thomas habla de una "geometría del taxi", donde se da unas instrucciones para llegar a un determinado lugar.

Aquí se puede hablar de mapas. La superficie de la tierra, se representa en forma bidimensional por medio de la latitud y la longitud para determinar la posición de un punto sobre ella.

En el aspecto del álgebra lineal (geometría afín) en la dimensión dos, se habla de un sistema de coordenadas XY, compuesto de dos rectas numéricas, ubicadas una perpendicular a la otra, cuyo punto de intersección es el origen $(0, 0)$ y en cada recta están ubicados los números

[14] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 398.

reales. En este sistema de coordenadas se puede representar un cuadrado, dando sus vértices, que serían cuatro puntos, por ejemplo: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, la primera coordenada corresponde a la ubicación en el eje X y la segunda corresponde a la ubicación en el eje Y. Luego, unimos estos cuatro puntos por líneas rectas y así vemos como se mezclan punto, recta y plano. (Ver Figura 2.17).

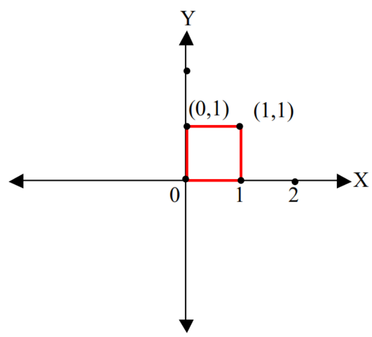


Figura 2.17: Cuadrado construido en el sistema de coordenadas XY

En la dimensión dos se habla del número pi (π) como "la razón del área de un disco y el área de un cuadrado de lado igual al radio del disco". (Ver Figura 2.18).

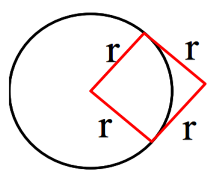


Figura 2.18: Razón del área del círculo y el área del cuadrado.

También en la dimensión dos se encuentra la geometría analítica del plano, a saber rectas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas (también llamadas secciones cónicas, pues se producen por cortes a un cono mediante distintos planos e inclinación), e incluimos las funciones reales de variable real. (Ver Figura 2.19).

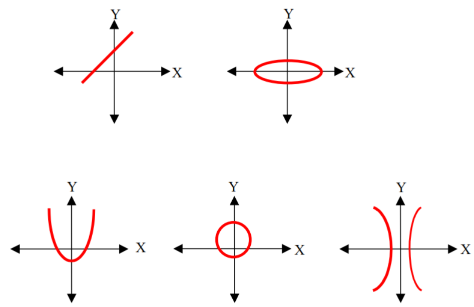


Figura 2.19: Geometría analítica del plano.

Se puede imaginar un mundo bidimensional como la superficie sin espesor donde viven todas las figuras planas, las cuales sólo se pueden mover hacia atrás, hacia delante o hacía la izquierda o derecha, así como las figuras que viven en la dimensión uno sólo se pueden mover hacia atrás o hacia a delante, es decir linealmente y en la dimensión cero, el punto no tiene ninguna posibilidad de movimiento.

2.2.3. Dimensión tres

En la dimensión dos se habla de profundidad y anchura, ahora, la dimensión tres se refiere a la profundidad, anchura y altura, aparecen todos los cuerpos tales y como los conocemos en el universo, objetos más anchos, más altos o más profundos que otros, con diferentes formas, esta es la dimensión en la cual vivimos, la dimensión de nuestro mundo real.

Así como en las otras dimensiones se habla de punto, recta y plano, en la dimensión tres se hace referencia a ESPACIO, en el hay puntos, rectas, planos, superficies, sólidos.

El espacio es ilimitado, en él hay puntos, rectas y planos.

Al igual que el punto, la recta y el plano, el espacio no se puede definir, pero si se pueden dar ideas que lo sugieren[15].

Ejemplo:

- Un globo (hay puntos sobre, dentro y fuera del globo) (ver Figura 2.20)

  El hilo es la dimensión 1, la goma de dimensión 2 y el gas interno (no es sólido) definen un volumen (dimensión tres).

[15] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998.Página 11.

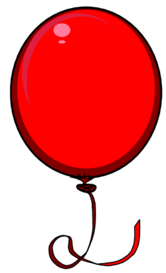


Figura 2.20: Globo.

- El espacio como lo que queda al destruir el globo. (ver Figura 2.21)

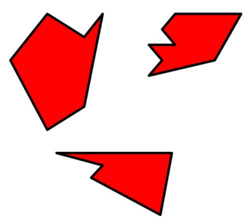


Figura 2.21: Globo destruido.

Los cuerpos que viven en la tercera dimensión son llamados sólidos. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad y los extremos o fronteras de un sólido son superficies planas[16].

En la dimensión tres nace el concepto de volumen, el volumen es un número positivo único que se le asigna a cada sólido, se mide en unidades cúbicas "u^3", y se puede decir que el volumen es la cantidad de espacio que ocupa cada sólido[17].

En esta dimensión también se puede hacer referencia al número pi (π), que en este caso es la razón entre el volumen de un cilindro y un paralelepípedo de base cuadrada con lado igual al radio de la base del cilindro y la misma altura. (Ver Figura 2.22)

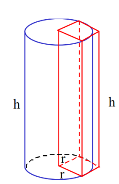


Figura 2.22: Relación del volumen del cilindro y el paralelepípedo.

[16]Libro X-XIII, Puertas Castaño, 1996. Páginas 199-201.
[17]Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 444.

En la dimensión dos se trabajan con pares ordenados en un sistema de coordenadas XY. En la dimensión tres se tiene el sistema de coordenadas XYZ, este sistema de coordenadas es un conjunto de tres líneas que se juntan en un único punto de forma perpendicular, cada una dispuesta según cada una de las dimensiones de espacio, es decir, profundidad, anchura y altura.

De forma usual el eje X va de izquierda a derecha, el eje Y va de abajo hacia arriba y el eje Z va de atrás hacia delante (sin embargo la ubicación de los ejes es indistinta de su esencia); en cada uno de los ejes van ubicados los números reales. (Ver Figura 2.23)

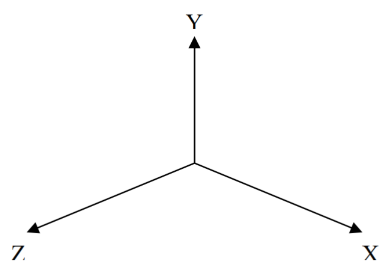


Figura 2.23: Sistema de coordenadas XYZ.

Este sistema es imaginario y su ubicación y orientación son totalmente arbitrarias, las define cada cual según sus necesidades. Para definir algo tridimensional en el sistema XYZ utilizamos coordenadas, al igual como lo hacemos en el sistema bidimensional. Los tres ejes: X, Y, Z no son elementos reales del mundo, son una creación y un convenio humano para poder trabajar en tres dimensiones[18].

Los objetos no llevan acopladas las coordenadas, las coordenadas las ponemos nosotros, y esto resulta fundamental para nuestra orientación espacial.

Se puede imaginar los tres ejes como las aristas de un cubo, que se unen para formar uno de los ocho vértices. Las posiciones se calculan midiendo la posición lateral, la altura y la profundidad. (Ver Figura 2.24).

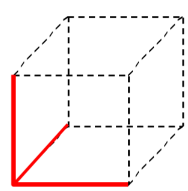


Figura 2.24: Aristas de un cubo.

Cuando expresamos los elementos de una habitación en coordenadas XYZ, y hacemos coincidir el origen $(0, 0, 0)$ con una de las esquinas de ella, tenemos un ejemplo de coordenadas

[18]www.infor.uva.es/-descover/proyectos/animacion/ejes.htm. 12 de Febrero 2015.

en el espacio.

Los vértices de un cuadrado en el plano XY están dados por cuatro puntos: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. Ahora se va a obtener un cubo en el sistema de coordenadas XYZ: $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(1,1,0)$; $(0,0,1)$; $(1,0,1)$; $(1,1,1)$; $(0,1,1)$. Lo que se hace es tomar los puntos del cuadrado, agregar cero en la tercera coordenada y luego mover el cuadrado una unidad en la tercera dirección, esto es, agregar unos en la tercera coordenada[19]. (Ver Figura 2.25).

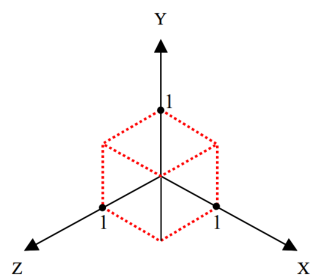


Figura 2.25: Cubo construido en el sistema de coordenadas XYZ.

Las coordenadas se expresan en la medida que más no convenga, según el tamaño de lo que se quiere definir. Así cuando se trabaja en una habitación se utilizan metros, si se trabaja con regiones inmensas se usan kilómetros, o cuando se trabaja en miniaturas, milímetros, claro está, que se pueden utilizar otras medidas.

Otro ejemplo es el caso de un avión, supongamos que se encuentra 1000 metros al norte, 500 metros al este y 200 metros de altura, en este caso se puede situar el eje X de oeste a este, Z de sur a norte y Y de abajo a arriba, entonces las coordenadas son (500, 200, 1000). Supongamos que ahora el avión se encuentra a 500 metros al oeste, a 1000 metros al sur y a 200 metros de altura, luego las coordenadas ahora son (-500, 200, -1000).

El origen de coordenadas se debe situar en un lugar adecuado para tener una buena referencia. Antes en la realidad cuando se quería dar la posición de un aeroplano, las coordenadas que se daban eran la longitud, la latitud y altitud.

El estudio de la dimensión tres es importante ya que es nuestra propia dimensión. La realidad material es lo tridimensional, lo que cabe enmarcar en las tres dimensiones clásicas. Como ya se vio, profundidad, anchura y altura son las tres dimensiones de nuestra mente con las que enmarcamos a los objetos materiales.

Ya no solo nos movemos hacia delante o hacia atrás, hacia la derecha o izquierda, en esta dimensión nos podemos mover también hacia arriba o abajo.

Por último vale la pena recordad que el universo está impregnado de geometría, ya que la geometría es la ciencia del espacio[20]. Todos los cuerpos están en el espacio y el espacio está en todos los cuerpos. El espacio es, el campo de acción de la geometría. Todo lo visible, todo lo corpóreo, todo lo existente materialmente está en el espacio y constituye un elemento o una

[19]Rucker, Cita Páginas 46, 47.
[20]Del punto a la cuarta dimensión. Página 41.

relación de los hechos espaciales. Si la geometría impregna constantemente todo el mundo objetivo, es debido a que el mundo objetivo es un mundo espacial.

2.3. Dimensiones extrañas

2.3.1. Dimensión cero

Aunque el autor del artículo no nombra la dimensión cero, esta puede considerarse como un universo en el que no existe la izquierda ni la derecha, ni arriba ni abajo, ni delante ni detrás, donde no existe el tamaño ni la distancia, no existe el tiempo ni la anchura, altura, profundidad, etc. Es decir no existen las cosas tal y como las conocemos. Lo único que existe es el punto, el cual no tiene ninguna dimensión, ni tiene profundidad, ni altura, ni anchura, lo único que posee es una posición, simplemente está ubicado.

El punto es un término primitivo que no se define.

En un diccionario cualquiera podemos encontrar la noción de este término de la siguiente manera:

- **Punto:** señal diminuta.

  Pero hay muchas ambigüedades en esta definición, porque una casa al ser vista desde un avión en vuelo puede ser una señal diminuta, sin embargo al verla desde unos pocos metros de distancia es algo inmenso.

  Ejemplo:

  Se puede ver el punto como parte de un objeto físico [21].

- La punta de un lápiz afilado. (Ver Figura 2.26).

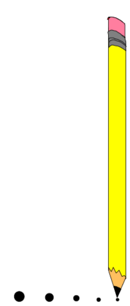


Figura 2.26: Lápiz Afilado.

[21] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. Página 10.

- La punta de una aguja. (Ver Figura 2.27).

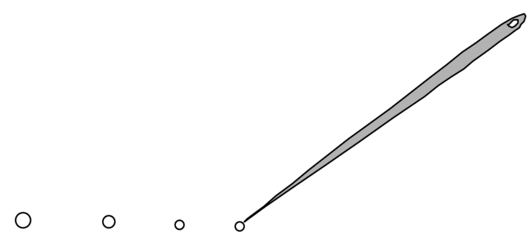


Figura 2.27: Aguja.

En los Elementos de Euclides hace referencia a lo que puede ser una posible definición de un punto: “un punto es lo que no tiene partes”, esto es; el punto se puede ver como algo totalmente indivisible.

Un punto es el menor elemento espacial imaginable. Y por ser el elemento mínimo no contiene en sí más espacio que otro punto. Pero como este segundo punto ha de rellenar completamente el primero, en el interior de un punto no existe ningún grado de libertad, es decir, no hay movimiento.

2.3.2. Dimensión Cuarta

“Nadie puede señalar la cuarta dimensión, aunque está a nuestro alrededor. Los filósofos y los místicos meditan sobre ella, los físicos y los matemáticos hacen cálculos con ella. La cuarta dimensión es una parte, una parcela de muchas teorías científicas respetadas, aunque también es de extendido uso a campos tan desacreditados como el espiritismo y la ciencia-ficción”[22].

No se puede discutir que las dimensiones anteriormente tratadas existen, ya que las conocemos y somos parte de ellas; pero sí que se puede dudar de la existencia de una cuarta dimensión, o de otras dimensiones.

Al hablar de la cuarta dimensión, se entra a un terreno muy complejo, porque los elementos de esta dimensión no se pueden palpar y son difíciles de imaginar ya que la mente humana no está capacitada para esto.

La cuarta dimensión puede ser vista desde dos puntos.

- **Dimensión Temporal:** se puede decir que la cuarta dimensión es el tiempo.
- **Dimensión Hiperespacial:** se puede decir que la cuarta dimensión es una dirección hiperespacial, perpendicular a las tres dimensiones obtenidas en la tercera dimensión.

Ambas afirmaciones son ciertas, entonces, la cuarta dimensión se puede concebir como dimensión hiperespacial y como dimensión temporal.

[22]Rucker, Página 4.

Para Thomas, decir que la cuarta dimensión es sólo el tiempo, limita el concepto de dimensionalidad.

En la física de la relatividad se especifica un evento dado con tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal, donde el tiempo se mide en unidades especiales relacionadas con la velocidad de la luz.

Pero en fin, esta clase de geometría del espacio está más cerca de la teoría de la relatividad; que de la geometría euclidiana, que es el campo que nos interesa.

La pregunta que nos hacemos es: ¿cómo intuimos una cuarta dimensión espacial, y no temporal?, porque si tomamos la cuarta dimensión como una dimensión temporal, ya conocemos la forma como varía el tiempo, no se le puede tocar, pero si sabemos que transcurre, lo sentimos, el tiempo es algo que siempre nos va a acompañar, somos capaces de desplazarnos, de cambiar de posición a nuestro antojo, pero no se puede controlar.

El tiempo, como ya sabemos, siempre va a transcurrir en el mismo sentido, de atrás hacia delante, siempre va a un ritmo constante, y no nos podemos mover a lo largo de él, como lo hacemos cuando caminamos, tan sólo podemos actuar en el presente.

Un ejemplo de lo que es la cuarta dimensión como tiempo puede ser visto de la siguiente forma:

Supongamos que cierta persona cita a otra en un lugar de Nueva York[23].

Comienza diciendo:

- Nos veremos en Brodway (primera dimensión: longitud).
  Agrega:

- En la calle 42... (segunda dimensión: latitud).
  Continua:

- Times building... (intersección de longitud y latitud).
  Prosigue diciendo:

- Quinto piso; oficina 505... (tercera dimensión: volumen o altitud).
  El sujeto agrega:

- A las cuatro de la tarde... (cuarta dimensión, en función del tiempo).

Ejemplos de esta clase, hay infinitos, pues en la realidad todo lo hacemos en función del tiempo es más se podría pensar que la cuarta dimensión no es más que la tercera, con una nueva dimensión llamada tiempo, ésta es la dimensión que hace que todo cambie.

A medida que envejecemos, vamos cambiando físicamente, pero muchos de estos cambios no pueden ser explicados por simples variaciones del largo, ancho o alto, ya que éstos explicarían solo cambios de volumen y forma. La cuarta dimensión llamada tiempo, explica estos cambios en la edad, y es más: no se podría concebir, ni captar, ni medir el tiempo, si no hubieran cambios. Si en nuestro universo todo estuviese inmóvil, quieto, congelado: sería

[23]www.biblioweb.editorialpeniel.com/libros/lacuartadimensión2.htm, 30 de marzo 2015

inconcebible la idea del tiempo[24].

Como se observa, es fácil imaginar la cuarta dimensión como una dimensión temporal, pero es muy difícil imaginar una cuarta dimensión espacial.

Si se viviera en un mundo dimensional sería difícil imaginar un mundo tridimensional. Estamos bien familiarizados con las tres primeras dimensiones, el largo, el alto y el ancho, porque son individualmente espaciales.

Nosotros nos movemos hacia delante, hacia atrás, hacia los costados, hacia arriba y abajo y no se puede concebir otra dirección de desplazamiento. Para tratar de concebir una cuarta dimensión como una dimensión espacial, es mejor empezar a manejar ciertas analogías. Matemáticamente se puede manejar "líneas" representadas por ecuaciones de cuarto grado, pero estas son irrepresentables gráficamente, así en nuestra realidad no tenemos acceso a la cuarta dimensión.

Para empezar a hacer analogías podríamos empezar a preguntarnos como sería la cuarta dimensión al ser cortada por nuestra dimensión.

Esta pregunta se puede tratar de responder con base en las dimensiones conocidas[25]

- Un punto (dimensión cero) al cortar una línea (dimensión uno) esta queda divida en dos. (Ver Figura 2.28).

Figura 2.28: Línea cortada por un punto.

Cuando una línea (dimensión uno) corta un plano (dimensión dos), el plano queda dividido en dos partes. (Ver Figura 2.29).

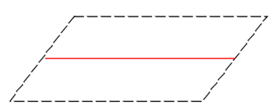


Figura 2.29: Plano cortado por una línea.

Un espacio (dimensión tres) al ser cortado por un plano (dimensión dos) también queda dividido en dos partes. (Ver Figura 2.30).

[24]Rucker, Páginas 161-165.
[25]Ibid, Página 31.

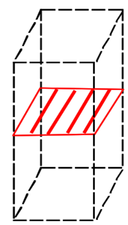


Figura 2.30: Espacio cortado por un plano.

Entonces análogamente se puede interpretar que un objeto en cuatro dimensiones al ser cortado por un objeto tridimensional queda dividido en dos partes. Podría pensarse que un espacio n-dimensional corta un espacio (n+1)-dimensional en dos partes.

De esta analogía resulta otra analogía interesante, la sección transversal de una línea, es un punto, la de un plano es una línea y la de un espacio es un plano, entonces se podría pensar que la sección transversal al cortar un objeto en cuatro dimensiones es tridimensional.

Si se usan puntos para formar líneas, líneas para formar planos y planos para formar el espacio, se puede pensar que para representar objetos en cuatro dimensiones se pueden utilizar combinaciones de objetos tridimensionales.

En nuestra dimensión al observar un objeto bidimensional este se puede ver totalmente, lo que no se puede hacer cuando vemos una figura tridimensional; por ejemplo, al observar un cubo, se puede observar solo el frente, o la parte de atrás, o alguna otra parte, pero algo se nos escapa, ya sean las partes laterales, la base o su interior; a no ser que el cubo sea transparente; pero lo más seguro es que al estar en la cuarta dimensión se puede ver una figura tridimensional totalmente exterior e interior[26].

En la dimensión tres se habla de un sistema XYZ, con sus tres ejes perpendiculares entre sí, entonces se puede decir que la cuarta dimensión es una dirección perpendicular a las otras direcciones que ya se tenían. Luego en la cuarta dimensión se trabaja con un sistema $XYZW$, donde W es un eje perpendicular al sistema XYZ.

En el sistema XYZ se tienen ocho puntos para obtener un cubo y cada punto tiene tres coordenadas.

Thomas construye un "hipercubo" que sería lo análogo a un cubo en tercera dimensión, de la siguiente manera: Se empieza con los ocho vértices de un cubo, y luego se ponen ceros en la cuarta coordenada, luego se mueve el cubo en la cuarta dirección que es perpendicular a las tres direcciones y así se obtienen ocho puntos más con unos en la cuarta coordenada[27].

$$
\begin{gathered}
(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,1,0,0),\\
(0,0,1,0),(1,0,1,0),(1,1,1,0),(0,1,1,0),\\
(0,0,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,1),(0,1,0,1),
\end{gathered}
$$

[26]Rucker, páginas 31-36.

[27]La Enseñanza Agradable De Las Matemáticas. Steen, Lynn Arthur. México, Editorial Limusa, 1999. Página 46.

$$(0,0,1,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,1,1).$$

De esta manera se obtiene un hipercubo en el sistema de coordenadas $XYZW$.

El hipercubo está compuesto de cubos, así como el cubo está compuesto por cuadrados, el cuadrado de líneas y estas a su vez por puntos. (Ver Figura 2.31).

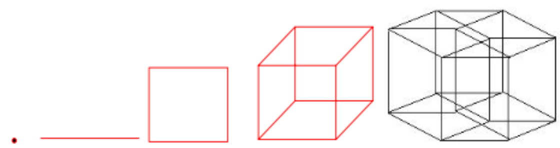


Figura 2.31: Hipercubo.

Otra forma de representar un hipercubo es desdoblándolo, así como se hace con el cubo, el cual tiene once maneras de ser desplegado. (Ver Figura 2.32).

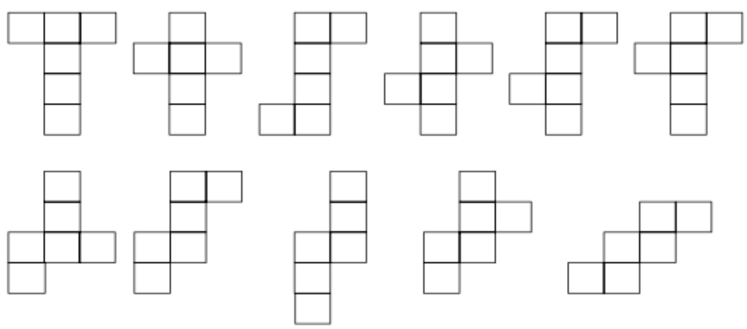


Figura 2.32: Once maneras de desplegar un cubo.

Una manera de desplegar un hipercubo puede ser en forma de cruz tridimensional[28]. (Ver Figura 2.33).

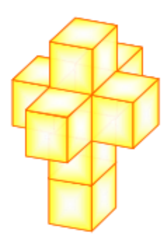


Figura 2.33: Cruz tridimencional.

[28]Rucker, Página 42.

Esta cruz tridimensional fue utilizada por Salvador Dalí en su pintura Christus Hypercubos (1954). (Ver Figura 2.34).

Figura 2.34: Pintura Christus Hypercubos de Salvador Dalí.

Otra forma en cuatro dimensiones es la hiperesfera: en la dimensión dos se tiene un círculo de radio r, en la dimensión tres se define una esfera tradicional como el sólido de revolución que se obtiene del círculo, y en la cuarta dimensón una hiperesfera.

También se encuentra el pentaedroide[29]. (Ver Figura 2.35).

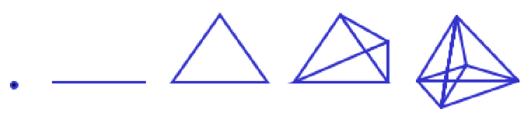


Figura 2.35: Pentaedroide.

Thomas B. ha tratado de dar un concepto geométrico de lo que es la cuarta dimensión, aunque para poder darnos cuenta de cómo sería un hipercubo o cualquier otra forma cuadrimensional se tendría que usar un computador, con un programa especial y ni aun así podríamos palpar este hipercubo, ya que se estaría viendo en una pantalla, es decir en dos dimensiones.

Se ha tratado de discutir diferentes fenómenos cuadrimensionales, se ha razonado sobre la cuarta dimensión, aunque se sólo en el papel, sería interesante verla. Lo que se ha podido hacer es trabajar a partir de interesantes analogías con el punto, la línea, el plano y el

[29] Ibid. Página 250.

espacio, es decir, con lo que ya conocemos.

Hasta aquí se ha hecho un análisis de cada dimensión, empezando por nuestra realidad (tercera dimensión) luego la primera y segunda, luego la dimensión cero, hasta la cuarta dimensión.

Se empieza con un punto, luego se pasa a la línea, de la cual se dice que es una sucesión infinita de puntos, y se habla del concepto de perímetro. En la segunda dimensión se habla del concepto de área, luego se pasa al mundo tridimensional, que es nuestro mundo, donde se habla del espacio, el cual está compuesto por planos, donde se habla de largo, ancho y alto y también de un sistema XYZ, tres ejes perpendiculares entre sí, y donde entra el concepto de volumen, que se define como el espacio que ocupa un cuerpo. Por último se habla de la cuarta dimensión, que es concebida como una dimensión hiperespacial y también como una dimensión temporal. El tiempo se percibe como lo conocemos, pero es muy difícil imaginar esta dimensión como una dimensión hiperespacial, ya que se conocen las tres direcciones que son perpendiculares entre sí, pero en la tercera dimensión no se puede concebir otra dirección que sea perpendicular a las otras tres direcciones. También se construye un sistema XYZ donde se traza un Hipercubo o Tesseracto el cual tiene un cubo por principio y otro por fin. De esta forma se puede ver cómo se van relacionando las dimensiones, y cómo una dimensión superior depende de las dimensiones inferiores, es decir está compuesta por los elementos de las dimensiones inferiores. Es por esta razón que al trabajar la cuarta dimensión se pueden hacer analogías e imaginar los comportamientos en esta dimensión, ya que se sabe cómo son los comportamientos en las otras dimensiones.

Así como se habla de una cuarta dimensión, se puede hablar de una quinta; sexta o una dimensión n, haciendo analogías, claro está. Pero si es difícil imaginar una cuarta dimensión, es mucho más difícil imaginar otras dimensiones, y este no es el objetivo de Thomas en su artículo "Dimensión", aunque el habla de otra dimensión muy diferente a las ya escritas.

2.3.3. Dimensión Fractal

Estas dimensiones tienen una particularidad que las hace diferentes de las otras dimensiones ya tratadas, y es que no son dimensiones enteras.

Los fractales no tienen dimensión uno, dos o tres como la mayoría de los objetos a los cuales estamos acostumbrados. Pero las dimensiones de estos objetos puede estar entre las dimensiones que ya conocemos, por ejemplo 1.55, es más el hecho de que las dimensiones no sean enteras fue la característica decisiva para llamar fractales a los objetos que poseen esta dimensión.

Para iniciar la dimensión fractal, primero se hará referencia a lo que es la geometría fractal.

La palabra fractal viene del latín "fractus" que significa roto, irregular, algo que no es entero.

Los fractales fueron concebidos en 1890 por el francés Herin Poincaré. En 1918, Gastón Julia y Pierre Fatou trabajaron durante varios años con las ideas de Poincaré. En 1974 el estudio fue retomado por IBM, e impulsado por el desarrollo de la computadora digital.

El primero en usar el término fractal fue Benoit Mandelbrot (de la Universidad de Yale) en los años 70, y él es conocido como el padre de la geometría fractal[30].

¿Qué es la geometría fractal? Es importante distinguir o saber cómo son los fractales. Las características que describen un fractal son las siguientes:

- **Autosimilitud:** cada pequeña porción del fractal es una réplica reducida del original.
- **Infinito detalle:** al ampliar un fractal, revela detalles sin límites.
- **Dimensión extraña:** un fractal se desarrolla en dimensiones no enteras, por ejemplo hay fractales que pueden ser un poco más que una curva, pero no llegan a ser un plano, es decir su dimensión está entre la dimensión uno y la dos.
- **Las fórmulas o algoritmos:** que los definen son relativamente sencillos y con un conjunto muy reducido de datos.
- **La iteración:** los algoritmos se definen por esta característica clave, y gracias a los computadores se puede experimentar y descubrir nuevos fractales.

La geometría fractal también se puede observar en la naturaleza, es más, Mandelbrot la llamó “la geometría de la naturaleza”. Se presenta en múltiples formas, en galaxias, costas marítimas, montañas, bosques, árboles, nubes, relámpagos, etc., también se presenta en procesos físicos como la cristalización, movimiento de partículas en fluido, electrólisis, etc. (Ver Figura 2.36).

Figura 2.36: Geometría de la naturaleza.

Pero vale la pena aclarar, que los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en nuestro mundo real es un fractal verdadero[31].

Los fractales se utilizan para la representación y el análisis de procesos complejos en la física, las matemáticas, biología, química, geología, en la economía y las finanzas, etc.

La utilización de la geometría fractal en investigaciones numéricas, teóricas y experimentales ha hecho posible la resolución de problemas que antes no se podían tratar.

[30]www.geocities.com/gammafx/index2htm, 31 de Marzo de 2015.
[31]www.geocities.com/gammafx/index2htm, 31 de Marzo de 2015.

ESCAPE Random Fractal Generator	Fractal Design
PLANTA IV	IFS
IIM	IFSIM2
FRACTINT	COSH2Z
STERLING	GRAFZVISION
QUEADRATICT	FRACTALING

Tabla 2.1: Software para crear fractales.

Otro campo en el que se aplica la geometría fractal es en el arte, las figuras realizadas con el arte fractal son bellísimas y ahora existen concursos de arte fractal donde se premia la mejor figura realizada.

Hay muchos software para crear fractales:
Así como es extraño tratar de hablar de la cuarta dimensión o de otras dimensiones superiores pero enteras al fin y al cabo, también es extraño hablar de dimensiones no enteras.

La dimensión fractal es una generalización de las dimensiones anteriormente descritas, con la diferencia de que no se trabaja con dimensiones enteras, solamente en cuanto a la "medida", por ejemplo, la curva de Koch tiene dimensión topológica 1. La pregunta clave que se puede hacer en esta dimensión es ¿cómo medir un fractal?

La medición de las formas fractales fue la que obligó a introducir el concepto de dimensión fractal. Dado que un fractal está constituido por elementos que se hacen cada vez más pequeños y el concepto de longitud no está claramente definido.

Así como la dimensión uno se asigna un número llamado perímetro, en la dimensión dos se habla de área y en la dimensión tres de volumen, en la dimensión fractal hay varios números asociados a los fractales y estos son las dimensiones fractales, esta es la forma como se pueden medir.

Un ejemplo clásico real, es hallar la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña.

La pregunta es ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?, es prácticamente imposible medirla con algún instrumento usado usualmente para medir algún otro objeto ya que al tratar de medir esta costa hay que tener en cuenta que hay infinitos granos de arena, también hay que tener en cuenta el contorno de las bahías, las rocas, etc. Lo más importante para tener en cuenta es que entra más rugoso sea el objeto más rápidamente crece la estimación de su longitud.

Se ha estimado la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña en 1.2, o sea es un poco más que una línea, pero es menos que un plano[32].

Si se quiere medir una línea fractal con una unidad de medida, o con instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escaparán a la sensibilidad del instrumento utilizado, y a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la

[32]Fractals Every Where. Barnsley, Michael. Georgia INstitute of Technology Atlanta, Georgia and Hera ted Sustems, Inc, Georgia: Academic Press, Inc. Harcout BraceJavonovich, publishers. 1988, páginas 172 a 173.

longitud de la línea.

Hay muchas formas de calcular dimensiones fractales, usando límites, logaritmos, escalas y medidas, pero hay fractales que son muy complejos y para hallar su dimensión se debe usar la ayuda de una computadora.

A continuación se describen dos métodos importantes para hallar la dimensión de ciertos fractales.

2.3.4. Dimensión Hausdorff-Besicovitch

Esta dimensión fue definida por Felix Hausdorff en 1919, y fue perfeccionada después por Besicovitch[33].

Si se toma un objeto (línea, superficie, sólido) y se recubre con pequeños objetos de tamaño L, sin que se superpongan. L depende de la dimensión del objeto.

Supóngase que se está en la dimensión uno, donde se tiene un segmento de longitud 1, luego se parte este segmento en n segmentos de longitud L. (Ver Figura 2.37)

Figura 2.37: Recta dividida.

Entonces se puede observar que se cumple: $n * L^1 = 1$

Donde el exponente de L es la dimensión en la que se está actuando.

Si el objeto que se toma es un cuadrado de área 1, y se compara con unidades cuadradas, cuyo lado sea de longitud L, y n es el número de unidades necesario para recubrir el cuadrado, entonces se cumple que: $n * L^2 = 1$. (Ver Figura 2.38)

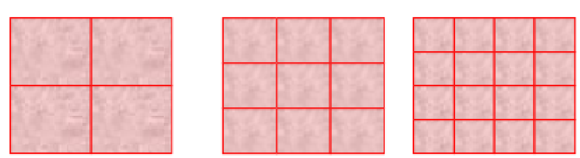


Figura 2.38: Cuadro dividido.

Ahora se tiene un objeto tridimensional, por ejemplo un cubo de volumen 1, el cual se compara con n unidades cubicas de arista L, entonces también se cumple que $n * L^3 = 1$. (Ver Figura 2.39).

[33]Paradojas y Fundamentos de la matemática. Historia y Pedagogía, Juan Eduardo Nápoles Valdes. Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina. Página 44.1

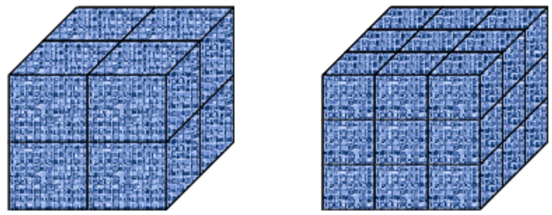


Figura 2.39: Cubo dividido.

En general si se tiene un hipercubo de dimensión D se necesitan 10^D hipercubos de tamaño L^D para cubrirlo.

Para poder asegurarnos de tener un recubrimiento real, es necesario hacer que el tamaño L sea cada vez menor, es decir, es necesario que L tienda a cero ($L \longrightarrow 0$)

En general $n = \left(\frac{1}{L}\right)^D$, o sea que el número n de objetos de tamaño L necesarios para cubrir un objeto depende de su dimensión, de donde sí se despeja D, se obtiene lo siguiente:

$$D = \frac{\log(n)}{\log\left(\frac{1}{L}\right)}$$

Para ilustrar la forma de hallar la dimensión fractal se utiliza un ejemplo interesante, la curva de Koch.

Esta curva de Koch fue construida en 1904 por el matemático Niels F. Helge Von Koch (1870-1924)34.

Los pasos para construir la curva de Koch son los siguientes:

Primero se toma un segmento de longitud 1 y se divide en tres partes iguales, luego se sustituye la parte central por los dos segmentos que, junto con dicha parte anulada formarían un triángulo equilátero. (Ver Figura 2.40).

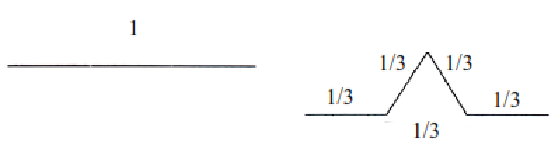


Figura 2.40: Construcción de la curva de Koch.

Después se repite el proceso con cada parte resultante.

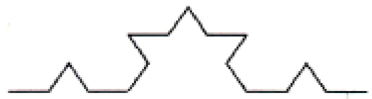


Figura 2.41: Construcción de la curva de Koch.

Este proceso se repite un número infinito de veces.

Figura 2.42: Construcción de la curva de Koch.

La dimensión de la curva de Koch nos indica, de qué forma o en qué medida la curva llena una proporción del plano.

Utilizando la fórmula de Hausdorff y Besicovitch $D = \frac{\log(n)}{\log\left(\frac{1}{L}\right)}$ para hallar la dimensión de la curva de Koch, se obtiene el siguiente resultado:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,2618\ldots$$

Donde 4 es el número de unidades de tamaño 1/3 que recubren el objeto inicial.

Como la curva de Koch tiene dimensión aproximada 1,2618... se puede decir que es un poco más que una línea, pero no alcanza a recubrir un plano.

Vale la pena recalcar que la longitud de esta curva es infinita (∞).

Los límites de un segmento de la curva son, al igual que cualquier recta, dos puntos (dimensión cero), y también se tiene un grado de libertad.

2.3.5. Método de similitud por duplicación

Este método se describe de la siguiente forma35:

En la dimensión uno, si se toma un segmento de longitud 1 y se duplica se obtienen dos segmentos iguales al original. (Ver Figura 2.43).

Figura 2.43: Segmento de longitud 1.

En la dimensión dos si se duplican los lados de un cuadrado de lado 1, se obtienen cuatro cuadrados iguales al original, o lo que es igual, se obtiene un cuadrado con cuatro veces el área del origina. (Ver Figura 2.44).

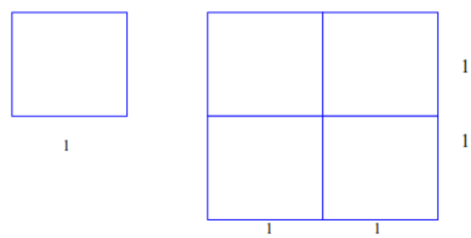


Figura 2.44: Cuadro de lado 1.

Ahora en la dimensión tres, se tiene un cubo de largo, alto y ancho 1 y se duplican todas sus medidas. Ahora se obtiene un cubo con 8 veces el volumen del cubo original, o un cubo formado con 8 cubos de largo, alto y ancho 1. (Ver Figura 2.45).

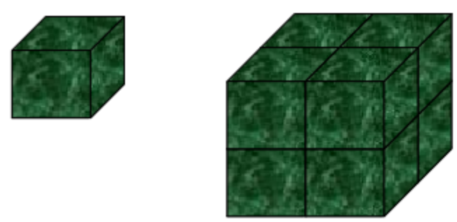


Figura 2.45: Cubos de lado 1.

En la siguiente tabla están los datos obtenidos.

Figura	**Dimensión**	**Número de Copias**
Línea	1	$2 = 2^1$
Cuadrado	2	$4 = 2^2$
Cubo	3	$8 = 2^3$
Similitud al Duplicar	d	$n = 2^d$

Tabla 2.2: Análisis duplicación

Nótese que al duplicar los lados de una figura el número de figuras iguales a la original es igual a 2 elevado a un número que es igual a la dimensión de la figura.

La fórmula obtenida es:

$$n = 2^d$$

Donde n es el número de figuras iguales a la original y d es la dimensión de la figura.

Entonces la fórmula para hallar la dimensión fractal por el método de similitud por duplicación es:

$$D = \frac{\log(n)}{\log(2)}$$

Para ilustrar el uso de esta fórmula se obtiene la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski, llamado así en honor a su inventor el polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

El primer paso para crear esta figura es dividir el triángulo original en cuatro triángulos iguales. (Ver Figura 2.46).

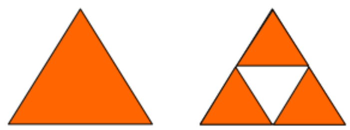


Figura 2.46: Construcción del triángulo de Sierpinski.

Luego se extrae el triángulo central de modo que se tengan tres partes.

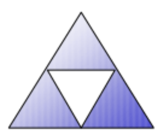


Figura 2.47: Construcción del triángulo de Sierpinski 2.

Sobre estos tres triángulos, se vuelve a repetir la operación anterior.

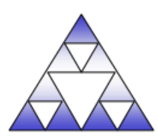


Figura 2.48: Construcción del triángulo de Sierpinski 3.

Este proceso se repite un número infinito de veces.

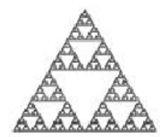


Figura 2.49: Construcción del triángulo de Sierpinski 4 .

Ahora se usa la fórmula de duplicación por similitud para hallar la dimensión fractal de éste triángulo.

Se tiene un triángulo de Sierpinski. (Ver Figura 2.50).

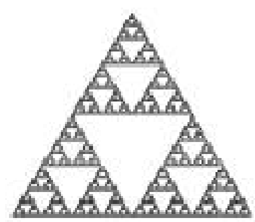


Figura 2.50: Triángulo de Sierpinski.

Al duplicar la longitud de sus lados se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, y este a su vez contiene tres triángulos de la misma escala del primero por lo tanto $n = 3$. (Ver Figura 2.51).

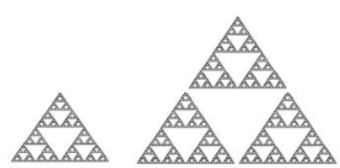


Figura 2.51: Triángulos de Sierpinski.

Usando la fórmula:

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,58496\ldots$$

Y los decimales siguen, pero el número no es periódico.

Por lo tanto, se puede observar que el triángulo de SIerpinski ocupa más que una línea, y un poco menos que un plano.

Se debe tener en cuenta que al calcular la dimensión fractal de un objeto real los resultados pueden variar bastante de acuerdo a las escalas usadas para medirlo y al método de cálculo.

Hasta aquí se ve lo que es la dimensión fractal, las diferencias que tiene con las otras dimensiones, las importantes aplicaciones que tiene la geometría fractal en diferentes campos de la ciencia, de las artes y de la naturaleza, las características para reconocer un fractal. Además de las formas para calcular la dimensión de algunos fractales, usando procesos que también se pueden usar en las dimensiones que ya conocemos.

Intuitivamente, la noción de dimensión fractal (fraccional) es una manera de medir que tan rugosa es una curva, una superficie, un espacio, etc., es decir, una curva rugosa tiene dimensión entre uno y dos, una superficie es rugosa si la dimensión está entre dos y tres, igualmente se puede pensar que un sólido es rugoso si la dimensión está entre tres y cuatro y así sucesivamente.

Un ejemplo para ilustrar este hecho, es con una hoja de papel.

En un comienzo una hoja de papel es de dimensión dos. (Ver Figura 2.52).

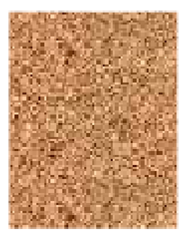


Figura 2.52: Hoja de papel.

Pero al arrugarla, ya deja de ser de dimensión dos, para empezar a ser de dimensión tres, sin embargo no es precisamente de ésta dimensión. (Ver Figura 2.53)

Figura 2.53: Hoja de papel arrugado.

Se puede observar que las dimensiones fractales están relacionadas con las dimensiones anteriormente tratadas.

Pero después de tratar todas estas dimensiones, solo hace falta tratar de responder una pregunta clave.

2.4. Análisis del artículo de Thomas F. Banchoff sobre ¿Qué es dimensión?

Nos damos cuenta que el concepto de dimensión es abordable desde distintos puntos de vista, que en los casos usuales nos llevan al mismo punto, pero en otros casos no.

A partir de lo observado en cada una de las dimensiones expuestas, se puede deducir que dimensión es cada una de las direcciones en que se puede medir la extensión de un cuerpo.

En la dimensión cero, solamente se ubica un punto, en la dimensión uno se habla de una longitud, una distancia y se encuentra el concepto de perímetro. En la dimensión dos se habla del concepto de área, y para hallar este número es necesario usar tanto la anchura como la profundidad, es decir las dos direcciones que componen esta dimensión. En la dimensión tres se halla un volumen usando la profundidad, anchura y altura.

También se tiene su propio sistema de medición, evidentemente si es vista como una dimensión temporal, se sabe que el tiempo tiene su sistema de medición: segundos, minutos, horas, días, semanas, etc. Al hablar de la cuarta dimensión hiperespacial ya se tendría que hacer analogías para poder hablar de un sistema de medición, si en la tercera dimensión para medir se usan unidades cúbicas, se podría pensar que en la cuarta dimensión se hacen las mediciones en unidades hipercúbicas.

Por último se encuentra que la forma de medir los fractales es hallando su dimensión fractal.

Desde el punto de vista del álgebra lineal (coordenadas), el concepto de dimensión no solo involucra mediciones, sino también movimientos, entonces se puede hablar de dimensión al hacer referencia al grado de libertad de movimiento. Esta libertad se entiende como número de direcciones ortogonales diferentes que se pueden tomar en cada dimensión.

En el interior de un punto, es decir en la dimensión cero no existe ningún grado de libertad, es imposible moverse en alguna dirección.

Un objeto al moverse sobre una línea, o sea, al moverse en la dimensión uno, podrá retroceder arbitrariamente sobre ella, este avance y retroceso, sobre ella se toman en sentido positivo y negativo, es decir hacia atrás y hacia delante, como en una vía férrea, es por esto que la dimensión uno posee solo un grado de libertad.

En la dimensión dos, los objetos se mueven en superficies, y esta dimensión adquiere un grado más de libertad, es decir, el movimiento puede ser de atrás hacia delante y de izquierda a derecha.

El movimiento en el espacio obtiene otro grado de libertad, también se adiciona el movimiento de arriba hacia abajo[34].

Análogamente se puede pensar que en la dimensión cuatro hay movimiento en la dirección perpendicular a la tres direcciones que ya se tenían en las dimensiones inferiores.

[34] Desde el punto a la cuarta dimensión, una geometría para todos. Colerus, Egmont. España, Editorial Labor, S.A. 1984. Páginas 39-45.

De la misma manera como se razonó con respecto al movimiento en la dimensión cuatro, se puede razonar sobre los grados de libertad en la dimensión cinco, seis, etc. Los grados de libertad se consideran para dimensiones enteras.

El concepto de dimensión se ha venido tratando desde tiempos atrás. En los elementos de Euclides ya se trataba de definir de una forma inductiva lo que es el concepto de dimensión, cuando se habla de que un punto no tiene partes, que una línea es una longitud sin anchura y los extremos de los segmentos son puntos, también se trata de definir la dimensión dos cuando se habla que una superficie solo tiene longitud y anchura y sus extremos son líneas, y la dimensión tres mencionando que un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad y sus extremos son superficies.

Cada dimensión está conectada a otras dimensiones, es decir, y exceptuando la dimensión cero, todas las dimensiones superiores tienen algo de las dimensiones inferiores.

Una última observación, se hace a partir de que tanto el punto, como la línea, la recta y la superficie, son conceptos imprecisos. Un punto medido en todos los sentidos, carece de extensión, resulta imposible de ver tomado en su sentido estricto, o sea, ni siquiera puede ser imaginado.

La recta, como línea que es, no tiene anchura ni grueso, es simplemente una sucesión imaginaria de puntos, como un cordón invisible, lo mismo ocurre con la superficie, si no se dibujara ninguna línea de contorno, la existencia de las figuras geométricas sólo se podría establecer en la imaginación, pues su superficie sólo adquiere realidad al aparecer como contorno de un cuerpo material, por ejemplo de un cubo o esfera. Pero desde el punto de vista geométrico, estos cuerpos son a su vez “nada”, simplemente son recortes mentales que se les atribuyen formas en el espacio.

De esta manera se afirma que en el universo no existe ninguna circunferencia real, ninguna esfera real, ninguna pirámide real, ningún triángulo real, ninguna línea real, ningún punto real, etc.

Es decir todas las formas geométricas son imágenes mentales que se anotan simbólicamente, a partir de dibujos para su conservación y comunicación con los demás seres humanos. Vale la pena resaltar que en este caso, cuando se habla de “dibujos” se habla de signos o símbolos[35].

Tratar de interpretar lo que es el concepto de dimensión no es algo nuevo, todo lo contrario, hasta en los elementos de Euclides se hace referencia de lo que es este concepto, y actualmente, todavía se sigue investigando al respecto.

[35] Ibid. Páginas 39-42.

2.5. Relación del manejo y visualización de las diferentes dimensiones con el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes

"Para responder a la pregunta "¿Cuál es el propósito de la educación?", comencé partiendo de la observación del hombre que vive en un mundo de objetos que lo influencia y a los que él quiere influir, y por lo tanto este hombre debe conocer estos objetos en sus características, en su esencia y en su relación con otros objetos y con la humanidad."
Friedrich Froebel.

Aunque el concepto de dimensión es intuitivamente claro en los casos usuales, su formalización rigurosa lejos está de ser elemental, por esto el trabajar con este concepto en los primeros niveles es un reto muy interesante desde el punto de vista matemático como pedagógico.

El interés principal de Thomas F. Banchoff en su artículo "Dimensión" no se basa en lo que puede representar matemáticamente el concepto de dimensión, sino en el uso que se le puede dar a las diferentes dimensiones para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes. La preocupación de Thomas radica en que a pesar de que la geometría tiene una relación muy directa con nuestra vida y nuestras experiencias, muchas veces suele ocupar un lugar secundario dentro de la enseñanza de las matemáticas en el colegio.

Hoy en día esta preocupación ya hace parte de muchos docentes, y se está intentado enseñar más geometría de tal forma que se relacione el manejo de las fórmulas con la realidad, ya que la mayoría de las veces los estudiantes suelen decir que no pueden calcular el área o volumen de una figura determinada por que no recuerdan las fórmulas o que no saben cómo usarlas, muchos de ellos creen que una fórmula es algo mágico que siempre hay que conocer de memoria, lo que no saben es que en matemáticas hay que reservar la memoria para cuando de verdad sea imprescindible[36].

Uno de los objetivos principales de la geometría es interpretar y modelar el espacio físico, y al haber perdido peso en la enseñanza de las matemáticas, los estudiantes pueden perder la capacidad de modelar, interpretar y visualizar su entorno[37].

Unas de las geometrías más importantes para tratar es la de nuestra propia dimensión, y esto es lo que no se está haciendo. Es por esta razón que Thomas enfatiza en el artículo sobre el modelo de enseñanza de la geometría que usaba Friedrich Froebel.

Friedrich Froebel (Oberwissbach, 1782 – Marienthal, 1852) fue un influyente educador del siglo XIX, debido a la forma en que introdujo los principios de la psicología y la filosofía en las ciencias de la educación.

En su forma de enseñar agregaba su visión religiosa y cuatro conceptos fundamentales: la libre expresión del estudiante, el estímulo de su creatividad, de su participación social y de su motricidad. Sobre estas bases comenzó a trabajar, enfocado principalmente en la etapa pre-escolar, y consecuente con su formación en ciencias naturales concibió este espacio como un "jardín" donde el niño debía ser "cultivado" en condiciones seguras y controladas.

[36] www.20enmate.com profesores art geometria.asp. 4 de abril de 2015.
[37] www.geocites.com aulavy la ense de la geometr.htm. 4 de abrirl de 2015.

Para Froebel el jardín de infancia es la forma de educación preescolar en la que los niños aprenden a través de juegos creativos, interacciones sociales y expresión natural. El jardín de infancia estaba basado en la idea de la importancia del juego en la formación de los niños, en un ambiente en el que Froebel intentaba educar a los niños tan libremente como las flores en un jardín (de ahí el nombre “Kindergarten” que significa en alemán “el jardín de los niños”), utilizaba los juegos, canciones, materiales especialmente elegidos para trabajar, e historias dirigidas a las necesidades de los pequeños (de 3 a 7 años de edad). El jardín de infancia sirve como una etapa de introducción a la escolarización formal subsiguiente.

Froebel se convirtió en el padre del Kindergarten cuando en 1837 fundó su primera casa de estudios en Blakengburg, Alemania. Para sostener la educación en un ambiente lúdico, Froebel puso especial cuidado en la capacitación de maestros de buen carácter, amistosos y accesibles para los niños, enfatizando su capacidad para transmitir el simbolismo profundo de la educación en cada una de sus acciones.

El gobierno prusiano, como era previsible, vio con desagrado esta iniciativa cargada de “liviandad”, y prohibió los Kindergarten en 1848. Cuatro años después moría Froebel, pero su idea fue llevada a los Estados Unidos por emigrantes alemanes, y de esta manera, el concepto de jardín de infancia se extendió a casi todos los países, demostrando que el juego es la actividad a través de la cual los niños aprenden, e influyendo sobre la filosofía y la práctica de la educación elemental[38].

El método que usaba Froebel para introducir en los estudiantes nociones geométricas en varias dimensiones, consistía en darles diferentes objetos, balones, bloques de madera, figuras planas, anillos, puntos, etc., para estimularlos a observarlos y manipularlos desde las etapas más tempranas de la educación, buscando que en cada etapa siguiente las ideas volvieran a ellos y se fueran consolidando los diferentes conceptos y expresiones matemáticas y así facilitar las representaciones mentales de los conceptos.

Froebel iniciaba la enseñanza de las diferentes dimensiones desde la parte más concreta de las matemáticas, es decir desde la tercera dimensión, luego iba pasando gradualmente a la segunda, primera y a la dimensión cero.

La geometría de la tercera dimensión es la más importante, ya que es la geometría de nuestro mundo real, es lo que somos, también hay que tener en cuenta que lo espacial está íntimamente ligado al quehacer matemático en todas sus etapas, y al trabajar con el espacio geométrico se hace alusión al estudio de las características espaciales de figuras que hacen parte del mundo concreto de los objetos físicos.

Las habilidades y destrezas especiales son un componente esencial del pensamiento matemático dado que nos permite comprender el mundo que nos rodea. El espacio es todo lo que vemos, lo que tocamos, lo que nos contiene y lo conocemos a través de la percepción de los sentidos al tener contacto con él[39].

Para trabajar con el espacio tridimensional, Froebel iniciaba con uno de los juegos más llamativos para los niños, El Balón. Para Froebel este objeto simboliza unidad, y este puede ser el inicio para dar a entender a los estudiantes que cada cosa es derivada de un todo. En cuanto a la forma, el niño observa que el balón es redondo, sin puntas anguladas o esquinas,

[38] www.terra.com.ve aldeaeducativa temas tareas2250e.html. 5 de abril de 2015.
[39] www.educared.org.ar vicaria links internos inicial 01 abordaje index.asp. 5 de abril de 2015.

no hay lugares planos o líneas, es fácil de agarrar y además tiene un peso y una medida. (Ver Figura 2.54)

Figura 2.54: Niño jugando con pelotas.

Por medio de este objeto los niños observan que en su vida diaria hay muchas figuras redondas, y así pueden distinguir fácilmente las figuras que tienen esta forma y las que no.

Froebel también trabajaba con cilindros y cubos, estos eran presentados en forma completa y luego eran descompuestos. (Ver Figura 2.55)

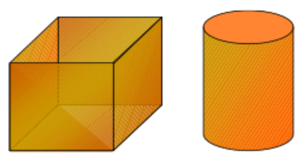


Figura 2.55: Cubo y cilindro.

Froebel encontró diferentes formas de descomponer un cubo. Un ejemplo es subdividir el cubo original en 8 cubos iguales, entonces los niños pueden observar que cada cubo tiene la mitad del largo, la mitad del ancho y la mitad del alto del cubo original. (Ver Figura 2.56)

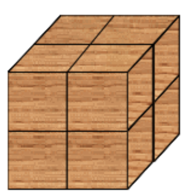


Figura 2.56: Cubo divido.

El cubo también puede ser descompuesto en bloques rectangulares iguales, en cubos partidos por la mitad en forma diagonal o en cubos partidos en cuatro partes diagonales. (Ver Figura 2.57)

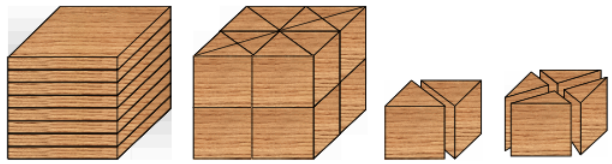


Figura 2.57: Otras formas de dividir el cubo.

También el cilindro puede ser descompuesto de diferentes formas[40]. (Ver Figura 2.58)

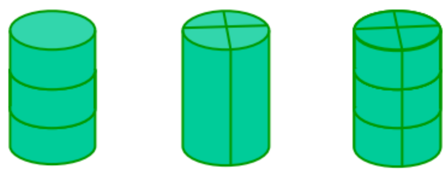


Figura 2.58: Cilindros divididos.

Thomas también presenta en el artículo, otras formas de descomponer el cubo, como por ejemplo cuando este se descompone en tres pirámides iguales.

Lo importante de estas experiencias, es que la idea de unidad como conjunto de partes queda en la mente del niño y se extiende a través de todas su vida.

Con todas estas formas los niños también puede representar cosas de la vida diaria: trenes, torres, casas, etc.

Así Froebel permitía que los niños crearan sus propias historias, hablando del número de figuras que usaban y la forma como las usaban. De esta manera el niño empieza a hacer asociaciones con el trabajo tridimensional, a interactuar con su propio mundo, usando conceptos como suma, resta, multiplicación, división, pueden clasificar, diferenciar, pensar en conceptos como línea, cubo, cuadrado, más, igual, medio, cuarto, rectángulo, dirección, vertical, horizontal, altura, anchura, largo, fracción, proporción, simetría, etc[41].

Otra experiencia que los niños pueden realizar a través de la observación es que ellos miren la forma y el tamaño de los edificios de la ciudad, comparándolos, encontrar parecidos en cuanto a la altura, el diseño de las esquinas, los cruces de las calles, etc. Mediante la observación y manipulación de diferentes objetos tridimensionales en los primeros años de la infancia, los niños van descubriendo sus diferentes propiedades y características, por ejemplo, los que ruedan, los que no pueden rodar, los que al caer rebotan, etc. Así se van construyendo las primeras hipótesis del mundo real. El interactuar con los objetos, permite que el sujeto vaya agrupándolos de acuerdo a las características de cada uno, lo que le permite ordenar y clasificar su entorno[42].

[40] www.froebelgifts.com. 7 de abril de 2015
[41] www.froebelgifts.com 7 de abril de 2015
[42] www.geocities.com casdua recursosinter.htm 8 de abril 2015

Es claro que la visualización en geometría es fundamental, así que la mejor manera de conocer las características de las formas tridimensionales es a partir de la observación de las mismas.

El aprendizaje de las matemáticas relaciona al educando con imágenes, dibujos, gráficos y representaciones visuales muy diversas. Es por esto que resulta obsoleto tratar de transmitir ideas del mundo tridimensional en forma bidimensional, esto es, cuando el maestro intenta enseñar o mostrar sólidos por medio de dibujos. De esta manera resulta difícil reflexionar sobre lo que es un sólido, lo mejor es que el objeto esté presente[43].

Pero no todo en la enseñanza de la tercera dimensión se basa en la observación y manipulación de objetos sólidos, también hay que tratar un concepto importante y es la medición de volúmenes.

Nuevamente, en la medición de volúmenes, Thomas hace referencia a los métodos de enseñanza de Friedrich Froebel[44]. El método de Froebel para enseñar ciertos volúmenes consistía en llenar diferentes recipientes con agua o arena y después hacer comparaciones entre ellos.

Ejemplos:

En el artículo aparecen diferentes casos:

- Comparación del volumen del cono y el cilindro.
- Comparación del volumen de una pirámide de base cuadrada y un prisma de base y altura igual a la de la pirámide.
- Comparación del volumen de una esfera de radio r, con un cilindro con base de radio r y altura $2r$.

Para lograr este aprendizaje hasta este punto, los niños no tienen por qué tener conocimiento de las fracciones ni del número π.

Después de estos experimentos, y cuando los niños estén familiarizados con el lenguaje de las fracciones se verá la justificación de las fórmulas para obtener los volúmenes[45].

Una relación importante es la que tiene que ver con el concepto de número π (Pi). Para mostrar esta relación se puede usar un recipiente en forma cilíndrica con la base de radio r y altura h, y cuatro paralelepípedos rectangulares de la misma altura del cilindro y cuyas bases formen un cuadrado de lado r. Vertiendo arena o agua, los estudiantes pueden observar que el volumen del cilindro es un poco mayor que el volumen de tres de estos paralelepípedos. (Ver la Figura 2.59)

[43]"Didáctica de las matemáticas, teoría y práctica de las matemáticas en el aula.ºrton, Anthony. Madrid, España. Ediciones Morata. S.L. 1996. P. 149.
[44]"La enseñanza agradable de las matemáticas"Steen, Lynn Arthur. México. Limusa 1999. P. 21.
[45]Ibid. P. 21.

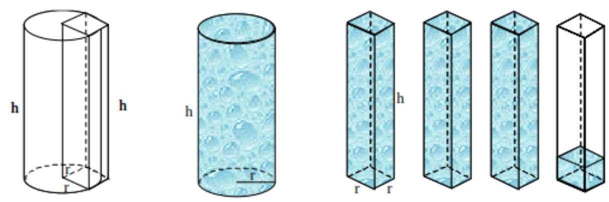


Figura 2.59: Relación del volumen del cilindro con el paralelepípedo.

Hay muchas formas de explicar el concepto de volumen, una forma es utilizando un cubo como unidad cúbica, se hace que el estudiante construya diferentes sólidos y luego cuente las unidades cúbicas que tiene cada sólido. (Ver Figura 2.60)

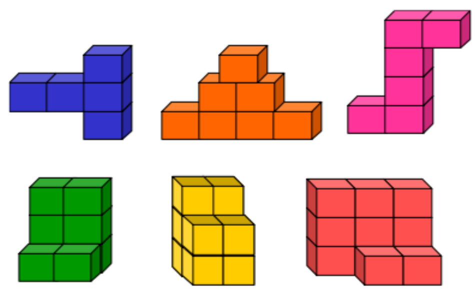


Figura 2.60: Construcción con cubos.

Otra forma de construir diferentes sólidos es haciéndolo mediante el uso de la plastilina, ya que este es un material muy fácil de trabajar y a los niños les gusta mucho.

Al trabajar en el espacio tridimensional, los estudiantes se encuentran con una grave dificultad, y es que al tratar de trabajar en este espacio, la mayoría de las actividades propuestas se resuelven en el espacio bidimensional y la utilización de dibujos en lugar de objetos supone una dificultad en el momento de la conceptualización.

El objetivo de todas estas experiencias es proporcionar al niño las herramientas necesarias para dominar sus relaciones con el espacio, así como para representarse y describir en forma ordenada el mundo en que vive[46].

El papel del docente debe ser ayudar al estudiante a que tome conciencia del espacio que le rodea a través de sus sentidos, esto dará paso a la experimentación y construcción de esquemas explicativos de propiedades, y clasificaciones, y como consecuencia la preparación para la interpretación de conceptos.

Se puede pensar que el concepto de área es menos complicado que el de volumen, pero no es así, Thomas afirma que es mejor iniciar desde la tercera dimensión, esto es, relacionar primero los volúmenes y luego trabajar en términos de área, ya que a los niños se les facilita más medir cantidades vertidas que áreas pintadas.

[46]www.educared.org.ar vicaria links internos inicial relatos 01 abordaje index.asp. 9 de abril de 2015.

Para iniciar el trabajo en la segunda dimensión, Friedrich le entregaba a sus estudiantes diferentes figuras planas, cuadrados, triángulos equiláteros, isósceles y escálenos, círculos, semi-círculos (la mitad de un círculo), etc. (Ver Figura 2.61)

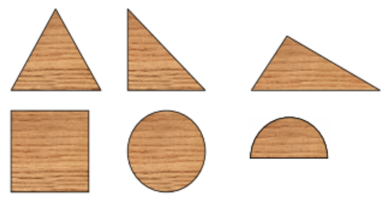


Figura 2.61: Figuras planas.

Para los niños el hecho de empezar a manipular estos objetos, significa un movimiento de la parte sólida a la superficie plana. Friedrich los hacía representar las figuras que los niños creaban en tercera dimensión en segunda dimensión, de este trabajo el niño va a obtener un importante desarrollo en su mundo geométrico, y va a comenzar a tener un pensamiento más abstracto por medio del juego con objetos concretos, claro está que el paso de la comprensión concreta a una abstracta no puede ser tan abrupto, estas construcciones en segunda dimensión se deben hacer gradualmente, por medio del juego[47]. (Ver Figura 2.62)

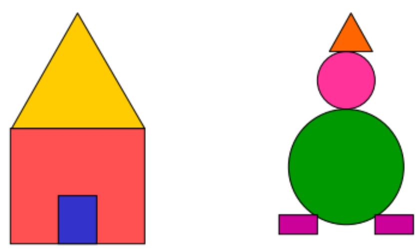


Figura 2.62: Construcciones con figuras planas.

Partiendo del concepto de volumen se puede introducir la noción de área[48], usando moldes de la misma altura. Al usar moldes de la misma altura, los niños pueden comparar los volúmenes y relacionarlos con el área de las bases, la altura se cancela ya que es la misma en todos los casos.

Thomas enuncia diferentes casos donde se compara fácilmente el área de diferentes figuras geométricas:

Un ejemplo es la comparación entre el área de un triángulo rectángulo y el área del rectángulo relacionado.

Froebel trabajaba con baldosas o azulejos para introducir el concepto de área en sus estudiantes.

[47] www.froebelgifts.com. 12 de abril de 2015.
[48] Steen, Op. Cit., P. 22.

Un ejemplo interesante que se puede hacer mediante el uso de baldosas, figuras planas o rompecabezas, es la relación que existe entre el área de un paralelogramo y el área de un rectángulo. (Ver Figura 2.63)

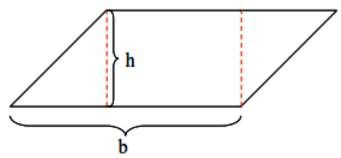


Figura 2.63: Paralelogramo.

A los niños se les puede mostrar, que todo paralelogramo es la unión de dos triángulos rectángulos iguales y un rectángulo.

El área de un paralelogramo es igual al producto de las medidas de su base (b) y de su altura (h).

Área Paralelogramo $= b \cdot h$.

Lo que se hace es probar que el área del paralelogramo de altura h y base b es igual al área de un rectángulo de altura h y base b.

A los niños se les puede dar a entender que un paralelogramo sería como un rectángulo, sino fuese por el triángulo que le sobra a un lado y el hueco que hay en el otro lado, después ellos comprenden que el triángulo que sobra a un lado equivale al hueco que ay en el otro, y de esta forma se obtiene el rectángulo[49]. (Ver Figura 2.64)

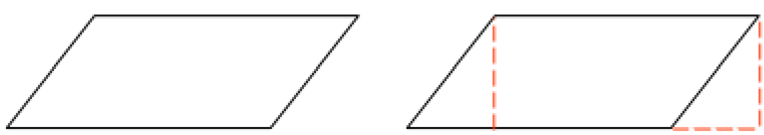


Figura 2.64: Paralelogramo descompuesto.

Este hecho se puede ilustrar de la siguiente forma: por medio de figuras o rompecabezas:

Uno de los triángulos rectángulos que forman el paralelogramo se quita y se coloca al lado del otro triángulo rectángulo, para así formar un rectángulo con base b y altura h. (Ver Figura 2.65).

[49]Orton, Op, Cti., P. 116.

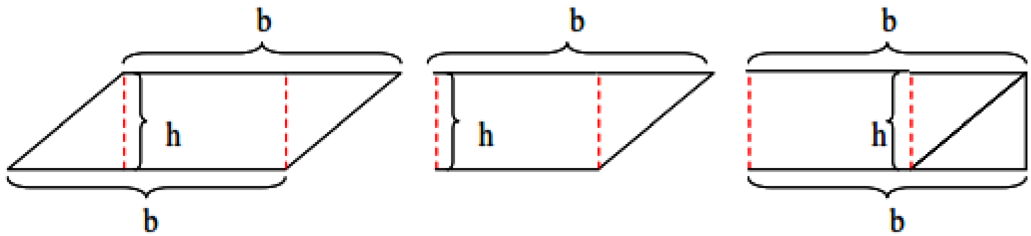


Figura 2.65: Relación entre el área del paralelogramo y el área del rectángulo.

Así se demuestra que el área del paralelogramo de altura h y base b es igual al área de un rectángulo de altura h y base b.

Es claro que si el maestro realiza esta experiencia por medio de dibujos en el tablero, los estudiantes no van a entender de manera óptima la relación entre las áreas, lo mejores hacerlo con figuras reales.

Mediante el concepto de área, también se puede ilustrar el teorema de Pitágoras, sin necesidad que los niños tengan alguna noción de raíces cuadradas.

La mayoría de las veces, en primaria y en secundaria para abordar el teorema de Pitágoras, se inicia con la tan conocida fórmula, el cuadrado de la hipotenusa (c), es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (a, b). (Ver Figura 2.66).

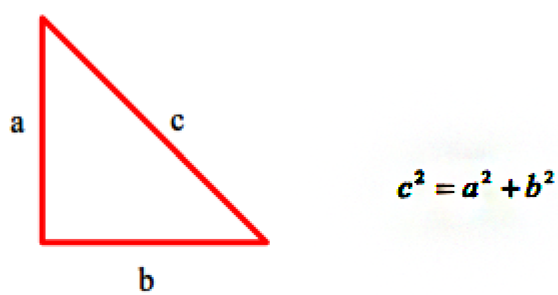


Figura 2.66: Triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras.

Pero para llegar a este resultado, es necesario preparar al estudiante a través de la motivación, para así lograr una mayor asimilación de este principio.

En la actualidad existen muchas pruebas y demostraciones del teorema de Pitágoras.

Una prueba muy didáctica basada en el concepto de área, la cual el estudiante debe conocer, es la siguiente[50]:

[50]Monografía .ᴱⁿsayo metodología para el aprendizaje de los números irracionales." Maluendas Uribe, Alicia. Bucaramanga: UIS. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. 1997. P. 47.

En un cuadrado de lado $a+b$, se construyen cuatro triángulos rectángulos, de catetos a y b y con hipotenusa c. (Ver Figura 2.67).

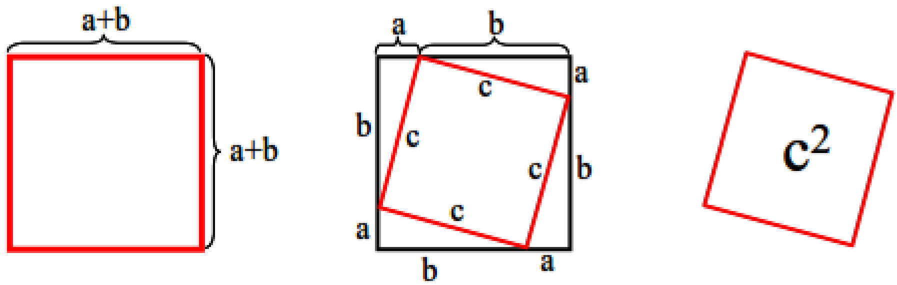


Figura 2.67: Teorema de Pitágoras.

En la mitad del cuadrado de lado $a+b$ se obtiene un cuadrado de lado c, el área del cuadrado de lado c, es igual al área del cuadrado de lado $(a+b)$ menos el área de los cuatro triángulos rectángulos.

Luego, se ordenan los triángulos rectángulos, de tal forma que dentro del cuadrado de lado $(a+b)$, queden dos rectángulos de lados a y b; un cuadrado de lado a y un cuadrado de lado b. (Ver Figura 2.68).

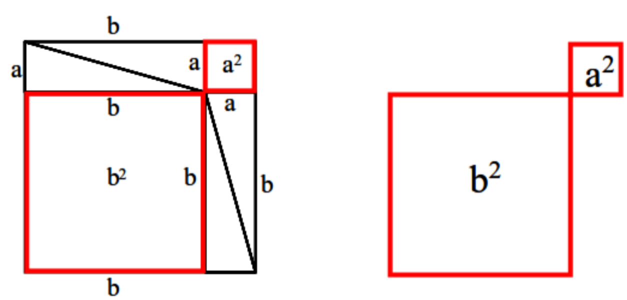


Figura 2.68: Prueba del teorema de Pitágoras.

Como se puede observar el área de los cuadrados de lado a y de lado b es igual al área del cuadrado de lado $(a+b)$ menos el área de los cuatro triángulos rectángulos.

De las dos observaciones hechas, los niños pueden concluir que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Obviamente estos procedimientos son más fáciles cuando se usan materiales que los niños pueden manipular físicamente, como rompecabezas geométricos. Usando rompecabezas geométricos, ya se sean de madera o de cartón se pueden realizar muchas experiencias para ilustrar el concepto de área.

Se les puede dar diferentes figuras y que ellos usen una unidad cuadrada adecuada para medir el área de cada figura:

¿Con cuántas unidades cuadradas pueden cubrirse las siguientes figuras?

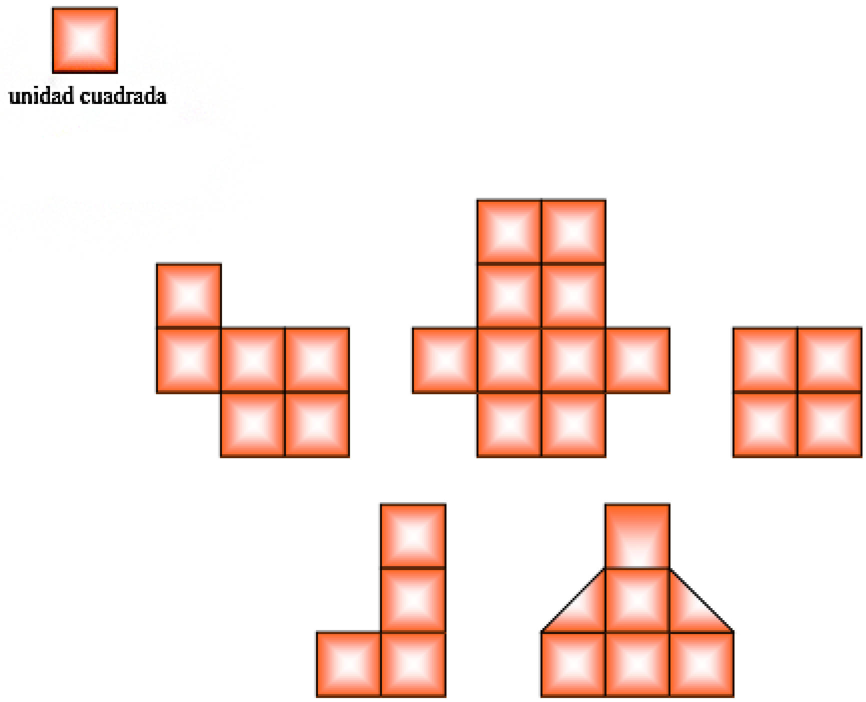


Figura 2.69: Construcciones con cuadrados.

Un rompecabezas muy famoso y que puede ilustrar el hecho de que figuras diferentes pueden tener la misma área, es el TANGRAM.

El TANGRAM es un rompecabezas inventado por los chinos y se dice que tiene unos 4.000 años de antigüedad[51]. (Ver Figura 2.70).

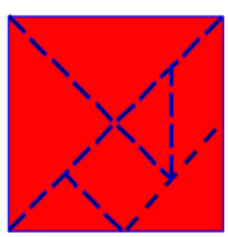


Figura 2.70: Tangram.

[51]Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. P. 7

En esta dimensión, también se le puede mostrar a los niños, la razón que existe entre el área y la circunferencia de un disco, cortando un círculo como si fuera un pastel. (Ver Figura 2.71).

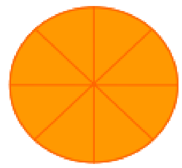


Figura 2.71: Descomposición de un disco.

Un círculo no se puede descomponer en triángulos isósceles congruentes, pero si se puede dividir en sectores circulares congruentes, suficientemente pequeños y se pueden considerar aproximadamente iguales a triángulos isósceles[52].

Primero se divide el círculo en cuatro sectores circulares congruentes. (Ver Figura 2.72).

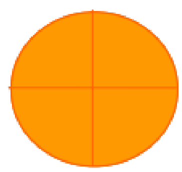


Figura 2.72: Descomposición de un disco en cuatro sectores circulares congruentes.

Luego se reacomodan los arcos, tratando de formar un "paralelogramo". (Ver Figura 2.73).

Figura 2.73: Reacomodación de los cuatro sectores circulares congruentes.

La aproximación a un paralelogramo no es muy buena, luego es mejor dividir la circunferencia en más arcos congruentes y realizar el mismo procedimiento. (Ver Figura 2.74).

[52]Londoño; Guarín y Bedoya. Cit., P. 345

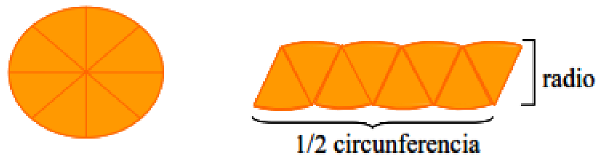


Figura 2.74: Aproximación a un paralelogramo.

Los niños pueden observar que entre mayor sea el número de sectores circulares en que se divida el círculo, mejor va a ser la aproximación a un paralelogramo. (Ver Figura 2.75).

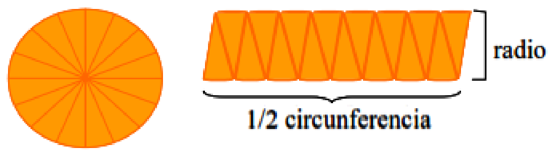


Figura 2.75: Aproximación más exacta a un paralelogramo.

Intuitivamente los niños pueden concluir:
Área círculo = Área paralelogramo = BASE x ALTURA

$$\begin{aligned}
\text{BASE} &= \frac{LONGITUD\ \ DE\ \ LA\ \ CIRCUNFERENCIA}{2} \\
\text{ALTURA} &= radio = r \\
\text{Área Círculo} &= \frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{2} * (r) \\
&= \frac{2\pi r}{2} r \\
\text{Área del Círculo} &= \pi r^2
\end{aligned}$$

Aunque el concepto de límite está oculto en este ejercicio, la idea de límite es más avanzada que la idea de área, así que los límites no deben utilizarse para enseñar el área, pero si el área para enseñar los límites[53].

Otra idea que se puede dar acerca del área de un círculo, y que también se usa intuitivamente el concepto de límite, es el hecho de que el área de un círculo es el número al que se aproximan las áreas de los polígonos inscritos de n lados a medida que n aumenta[54].

Un polígono regular inscrito puede cortarse en triángulos, los cuales se pueden ordenar en forma de paralelogramo. (Ver Figura 2.76).

[53]Londoño; Guarín y Bedoya. Cit., P. 215
[54]Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. P. 420.

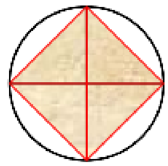


Figura 2.76: Cuadrado inscrito en una circunferencia.

O sea, que el área del círculo se aproxima al área del paralelogramo, pero esta aproximación mejora cuando aumenta el número de lados del polígono regular. (Ver Figura 2.77).

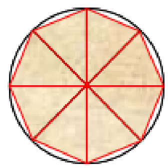


Figura 2.77: Polígono inscrito en una circunferencia.

A medida que aumenta el número de lados, el número de triángulos que componen el paralelogramo también aumenta y la altura de cada triángulo se aproxima más al radio del círculo. (Ver Figura 2.78).

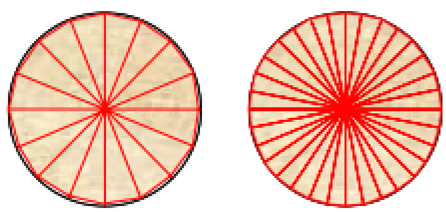


Figura 2.78: Aproximación a la circunferencia.

Para trabajar el concepto del número pi (π) se trabaja de manera análoga como se hizo cuando se usó el concepto de volumen. (Ver Figura 2.79).

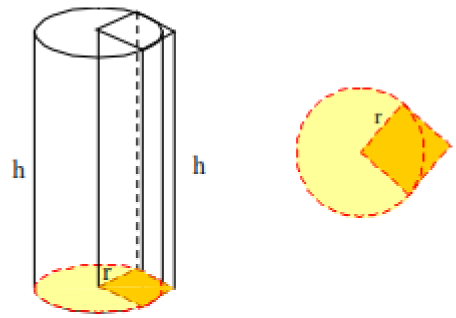


Figura 2.79: Concepto de número *pi*.

Como las bases de los paralelepípedos y del cilindro son planos, se puede decir que el área del disco de la base del cilindro ocupa un poco más de tres áreas de los cuadrados de las bases de los paralelepípedos[55].

Froebel también trabajaba con la primera dimensión, la metodología que usaba era repartir a sus estudiantes palillos o varillas, anillos, anillos partidos por la mitad y en cuartos, etc. (Ver Figura 2.80).

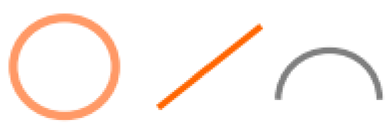


Figura 2.80: Varillas y anillos.

Es así como los objetos que se representaban en segunda dimensión, ahora serán representados en primera dimensión por sus esquinas o sus líneas exteriores. De esta manera se continúa el ciclo de abstracción, de sólidos a superficie y de superficie a línea.

El hecho de introducir palillos (líneas) y anillos (circunferencias), hará que el niño note las diferencias y similitudes entre ellos, y así podrán observar los conceptos de circunferencia y líneas curvas[56].

A este paso ya se puede introducir el concepto de perímetro. Este idea de perímetro se puede enseñar mediante el uso de cuerdas. Así los niños pueden observar que la distancia alrededor de un cuadrado es cuatro veces la longitud de cada uno de sus lados, sin importar el tamaño del cuadrado. (Ver Figura 2.81).

[55]Steen, Op. Cit., P. 29.
[56]www.froebelgifts.com. 20 de abril de 2015

Figura 2.81: Perímetro del cuadrado.

Cuando se trabaja con dos círculos, y que el radio de un disco sea el doble que el del otro, al rodear con una cuerda el disco más grande, se puede comprobar que esta misma cuerda rodeará dos veces el más chico. (Ver Figura 2.82).

Figura 2.82: Relación de los perímetros de las circunferencias.

A los niños se les puede pedir que calculen la cantidad de cuerda necesaria para rodear diferentes figuras y que establezcan si hay casos en que la cantidad de cuerda necesaria es igual pero las formas son diferentes. (Ver Figura 2.83).

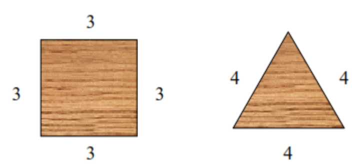


Figura 2.83: Perímetro de figuras diferentes.

De esta forma ellos pueden observar que con un mismo perímetro se puede obtener figuras diferentes.

Usando cuerdas, se pueden explorar otros contenidos de la geometría, por ejemplo:

- Líneas.
- Ángulos.
- Polígonos.
- Contorno y perímetro (mediciones).
- Diferencias y relaciones entre área y perímetro.

También pueden volver a recordar el concepto de número pi (π), al observar que una cuerda que rodea un círculo de radio "r" podrá rodear un poco más de tres veces un cuadrado cuyos lados sean iguales al radio del círculo. (Ver Figura 2.84).

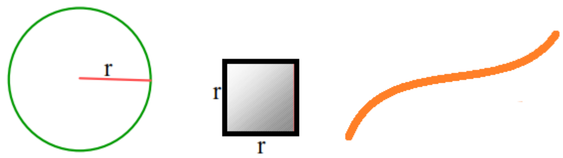


Figura 2.84: Relación de las circunferencias con el número *pi*.

Esta experiencia se puede realizar con diferentes círculos y cuadrados, para llegar a la conclusión de que la razón entre la circunferencia y el diámetro del círculo es la misma para todos los círculos, es decir, siempre es el número pi (π)[57].

Otra observación que se puede hacer con respecto a la circunferencia del círculo, es que al incrementar el número de lados de un polígono regular, poco a poco su forma se aproxima a la de un círculo circunscrito. (Ver Figura 2.85).

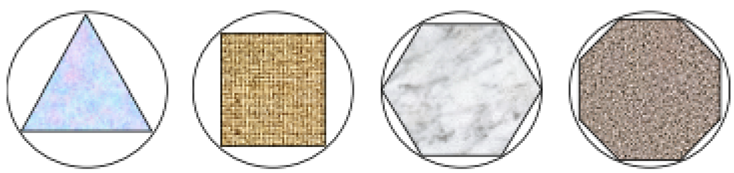


Figura 2.85: Polígonos inscritos.

Además su perímetro se aproxima a un número fijo que recibe el nombre de circunferencia del círculo.

Otra experiencia que se puede realizar con el número pi (π) es trazar una recta en el piso o sobre el pupitre y tomar una circunferencia de diámetro unitario, puede ser una moneda, la tapa de un tarro o se puede hacer de cartulina; luego se hace rodar sobre la recta trazada y así obtener el número pi (π)[58]. (Ver Figura 2.86).

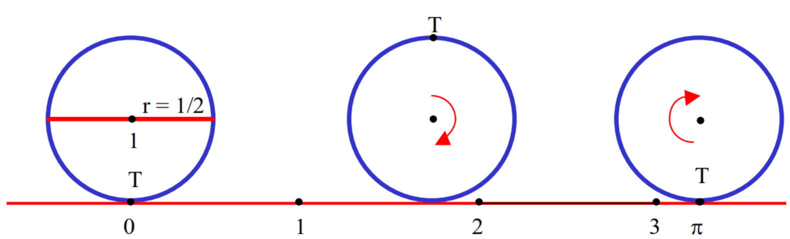


Figura 2.86: Obtención del número *pi*.

[57] Geometría, Clemens, Stanly R. O'Daffer, Phares G. y Cooney, Thomas J. México, Editorial Addison Wesley Longman, 1998. P. 416

[58] Monografía .Ensayo metodología para el aprendizaje de los números irracionales." Maluendas Uribe, Alicia. Bucaramanga: UIS. Facultad de CIencias. Escuela de Matemáticas. 1997. P. 63.

Es una experiencia que se puede realizar con un número de cuadros, los cuales se organizan de diferentes formas para así obtener diferentes perímetros.

Ejemplo:

- Al tomar cuatro cuadros iguales se pueden organizar de las siguientes formas:

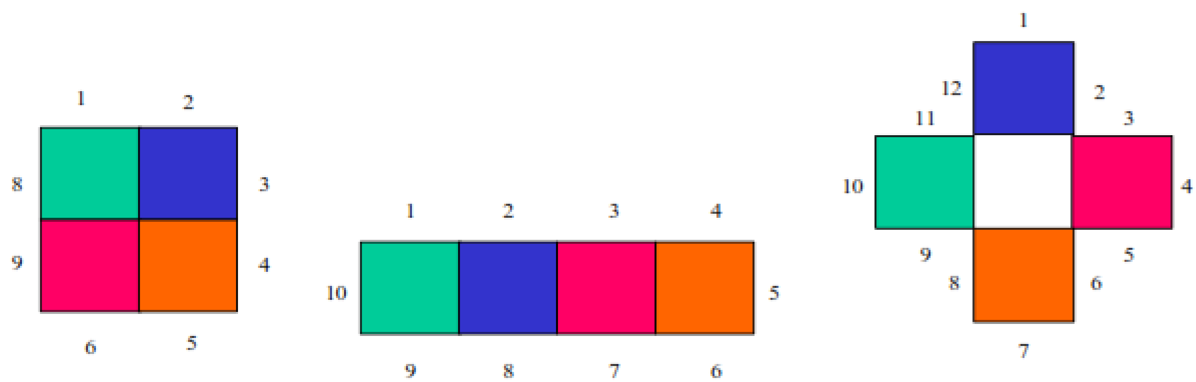


Figura 2.87: Obtención de perímetros.

De esta forma los niños pueden observar que a superficies que tengan una misma área, les puede corresponder diferentes perímetros[59].

Continuando el ciclo, se llega hasta la dimensión cero, la progresión de la abstracción ha encontrado un nivel más profundo, un punto sin dimensión, solo posición. Froebel entendió que los niños no podían pensar en conceptos tan abstractos, pero ellos pueden descubrirlos a través del juego y así puede internalizar esas ideas[60].

Para trabajar esta dimensión se pueden utilizar pequeños puntitos hechos de madera o plástico. (Ver Figura 2.88).

Figura 2.88: Punticos.

Diferentes conceptos geométricos pueden ser explorados a partir de la idea de punto. Los niños pueden observar que al unir varios puntos, se forma una línea. (Ver Figura 2.89).

[59]Van Cleave, Janice. Matemáticas para niños y jóvenes. México D.F.: Editorial Limusa S.A. 2002. p. 75, 76.
[60]www.froebelgifts.com. 22 de abril de 2015.

Figura 2.89: Obtención de una línea por medio de puntos.

También se pueden formar diferentes formas (círculos, triángulos, cuadrados, etc. (Ver Figura 2.90).

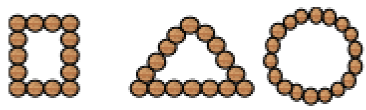


Figura 2.90: Obtención de figuras por medio de puntos.

De esta forma el niño puede obtener una idea de lo que es el concepto de posición.

El niño al haber trabajado primero con sólidos, entiende las superficies como parte de los sólidos, luego al trabajar con superficies observa que estas están formadas por líneas, y al trabajar con la dimensión cero, observa que las líneas están formadas por puntos.

Así el niño comienza a ver las diferentes conexiones que existen entre las dimensiones.

Después de todas las experiencias vividas desde la dimensión tres, hasta la dimensión cero, el niño ya puede hacer diferentes relaciones entre las dimensiones así como también se le facilitará el concepto de medición en ellas. Este concepto es importante en su aprendizaje, ya que es una acción que el hombre realiza cotidianamente con diferentes instrumentos.

En términos simples medir significa "cuantas veces" entra la unidad elegida en el objeto que se desea medir, haciendo entender al niño que el perímetro, área o volumen del objeto que se esté midiendo puede ser el mismo, pero su valor depende de la unidad elegida como patrón inicial.

La construcción de la noción de medida en el niño es un proceso continuo que requiere un desarrollo, partiendo desde lo que el niño pueda observar o percibir hasta llegar a las mediciones convencionales[61].
Después de que los niños tengan conocimiento de las dimensiones que están al alcance de ellos, se pueden introducir a la cuarta dimensión y a la dimensión fractal.

Froebel también trató de explicar a sus estudiantes lo que es la cuarta dimensión. Una forma apropiada, es hacerlo mediante el dibujo, observando si una línea está formada por puntos, un cuadrado por líneas y un cubo por cuadrados, entonces un cubo en cuarta dimensión (hipercubo), estará formado por cubos en tercera dimensión. (Ver Figura 2.91).

[61] www.educared.org.ar vicaria links internos inicial relatos 01 abordaje index.asp.

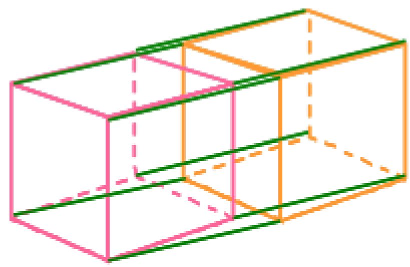


Figura 2.91: Hipercubo formado por cubos.

Otra manera de dibujar el hipercubo, es dibujar un cubo pequeño dentro de otro grande, así se sigue la idea de que un hipercubo en perspectiva puede verse como un cuadrado pequeño dentro de uno grande[62]. (Ver Figura 2.92).

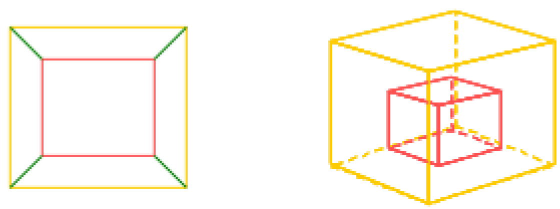


Figura 2.92: Perspectiva del hipercubo.

Froebel también diseñó un modelo tridimensional de un cubo en cuatro dimensiones, utilizando palitos unidos con bolitas de arcilla, ahora se pueden usar materiales más sofisticados como pitillos unidos con hilo o alambre[63]. (Ver Figura 2.93).

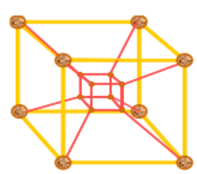


Figura 2.93: Hipercubo construido con palitos y arcilla.

Una forma de relacionar la cuarta dimensión con las otras dimensiones es por medio del hipercubo, contando sus cubos, caras, aristas y vértices.

Y se puede tratar de hacer el mismo procedimiento en una quinta dimensión con el hiperhipercubo[64].

[62]Rucker, Op. Cit., p. 41.
[63]Steen, Op. Cit., p. 37.
[64]Rucker, Op. Cit., p. 249.

	Vértices	Aristas	Caras	Cubos
Punto	1	0	0	0
Segmento	2	1	0	0
Cuadrado	4	4	1	0
Cubo	8	12	6	1
Hipercubo	16	32	24	8
Hiper-hipercubo	32	80	80	40

Tabla 2.3: Comparación de las diferentes dimensiones.

De esta forma el niño empezará a sacar figuras simples de unas más complicadas, agudizando así su percepción espacial[65].

En lo que respecta a la dimensión fractal, son cada vez más los docentes que piensan que la geometría fractal debiera integrarse a los contenidos de las matemáticas o la informática en los colegios[66].

La noción de dimensión fractal se puede introducir en el aprendizaje del niño a través de los cambios de escala, cuando el niño tenga conocimientos sobre notación exponencial.

Así el niño entenderá que la duplicación del tamaño de un cubo en la dimensión tres lleva a un aumento en el volumen en un factor de 2^3, al duplicarse el tamaño de un cuadrado su área incrementa en 2^2, y al duplicarse el tamaño en una línea su longitud aumenta en 2^1.

Se podría pensar que al duplicarse el tamaño de un hipercubo, este va a aumentar su tamaño en un factor 2^4. Es decir, a cada dimensión le corresponde su propio exponente de crecimiento[67].

En este punto a los niños ya se les puede dar las primeras nociones de dimensiones fractales, que como ya se observó son dimensiones fraccionarias.

Se puede utilizar el triángulo de Sierpinski. Los niños pueden observar que al duplicar su tamaño, se produce una figura que está compuesta por tres copias de la original y que la dimensión de éste triángulo es $d = 1{,}5849...$ (Ver Figura 2.94).

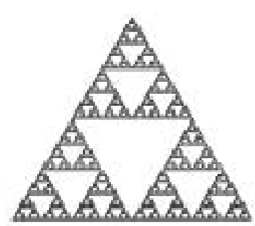


Figura 2.94: Triángulo de Sierpinski.

[65] Steen, Op. Cit., p. 58.
[66] wwww.platea.pntic.mec.es mzapata tutor ma fractal.htm. 30 de abril de 2015
[67] Steen, Op. Cit., p. 31.

También se puede introducir la noción de dimensión fractal, mediante el uso de las computadoras, utilizando el programa LOGO[68].

LOGO es un lenguaje de computadora, que surgió en los Estados Unidos hacia 1967. Actualmente es quizá el ejemplo más obvio del empleo de un ordenador para facilitar el descubrimiento de conocimiento matemático.

El empleo geométrico básico de LOGO permite a los niños creas sus propias formas, y mediante un proceso de perfeccionamiento sucesivo, lograr figuras predeterminadas[69], a través de una pequeña tortuga, que al darle órdenes de movimiento va haciendo los dibujos que se deseen.

Al observar la metodología que usaba Froebel con sus estudiantes, se puede concluir que las matemáticas se pueden aprender sin tener una definición completamente estricta de ciertos conceptos, y los conceptos que se van aprendiendo, crecen y se desarrollan a lo largo de los años.

El medio más eficaz para desarrollar un entendimiento en las matemáticas es el trabajo práctica, los niños aprenden por obra de sus propias actividades, de ahí se parte para afirmar que los estudiantes, en especial los más pequeños, aprenden mejor procediendo de lo concreto a lo abstracto[70].

Es por esta razón que Froebel prefirió empezar desde la tercera dimensión, es decir desde lo concreto hasta llegar a la dimensión cero, lo abstracto. Pero hoy en día no se hace mucho énfasis en el estudio de estas dimensiones. Y si se hace, no se hace de la forma adecuada, es decir, no se motiva al estudiante a que relacione lo que está aprendiendo con la realidad, haciendo que el estudiante no se interese en su aprendizaje y de esta manera se le está conduciendo hacia la ineficacia, tachando los verdaderos fines de la enseñanza del maestro[71].

A pesar de que la geometría es el campo más concreto de las matemáticas, es decir, es el campo donde no se trata solamente de traducir y comprimir aspectos de la vida real en números, expresiones y ecuaciones, a la mayoría de los maestros no les parece que sea lo suficientemente seria, se le considera muy poco matemática e intelectual. Es por esto que los maestros solo se ocupan de un tema geométrico solo cuando este ofrece suficientes oportunidades para realizar cálculos: hallar áreas y volúmenes, calcular ángulos en figuras dadas, hallar las proporciones en casos de semejanza, etc. De esta manera la geometría es "algebraizada" y así pierde su atractivo.

[68]www.platea.pntic.mec.es mzapata tutor ma fractal fractal.htm. 30 de abril de 2015
[69]Orton, Op. Cit., p. 132.
[70]Ibid., p. 48, 49.
[71]"La educación, teoría praxis filosofía. Ñeco J, Modesto. México, DF.: MacGraw Hill. 1989. p. 167-170.

2.6. Evolución del pensamiento geométrico y algunas conclusiones implícitas

Así como las habilidades para el pensamiento algebraico como contar, calcular, usar ecuaciones, etc., deben ser estimuladas, también deben ser estimuladas y desarrolladas las habilidades para el pensamiento geométrico a través del contacto con realidades geométricas.

Para empezar a hablar del pensamiento geométrico se deben mirar las diferencias que hay entre espacio físico y espacio geométrico.

El espacio físico se aprende a través de la experiencia, es el que el niño empieza a estructurar desde el momento en que nace, el espacio geométrico pertenece al campo de la matemática, este espacio nos permite comprender el espacio físico. Se puede decir que el espacio geométrico es una modelización del espacio físico. A este espacio se le conoce a través de la representación y esta acción permite que un objeto sea evocado aunque esté ausente[72].

La evolución del pensamiento geométrico se divide en tres fases[73]:

2.6.1. Espacio vivido.

Es el que manejan los niños de corta edad, hasta los 3 o 4 años. Es el espacio que los niños recorren, tocan, palpan, sienten y que generalmente está relacionado con espacios pequeños: el aula, los rincones, el estar debajo de la mesa, etc.

2.6.2. Espacio percibido.

Es la posibilidad que tienen los niños un poco mayores de comprender el espacio, sólo por su percepción visual. Por ejemplo cuando los niños recorren un lugar sin caminarlo, o cuando pueden decir que algo está lejos con solo verlo.

2.6.3. Espacio concebido.

Es el espacio que los niños van construyendo y está formado por todas las concepciones, imágenes, conceptos geométricos que le permiten ya no tener que tocar el espacio, no tener que verlo, sino simplemente imaginarlo. En esta fase el niño puede explicar un recorrido sin verlo.
El desarrollo del pensamiento geométrico debe orientarse al desarrollo de habilidades específicas, tales como:

- Concepción del espacio.
- Orientación espacial.
- Pensamiento espacial.
- Habilidad para la percepción visual.
- Constancia de la percepción.
- Percepción de la situación espacial.

[72]www.geocities.com aulavy revistas neo neo23geometr.htm. 15 de mayo de 2015.
[73]www.geocities.com aulavy la ense de la geometr.htm. 15 de mayo de 2015

- Percepción de relaciones espaciales.

La escuela a limitado obsesivamente los problemas geométricos, de tal manera que se limita también el desarrollo de estas habilidades, generalmente se enseña una geometría limitada al aula y sobre todo al cuaderno. El niño no tiene que moverse ni trasladarse, es una geometría del papel y tijera[74].

Para finalizar se hace un resumen del papel del juego en la educación matemática.

Aunque sea difícil de creer, la matemática, es también un juego, aunque implique otros aspectos como el científico, instrumental y filosófico. Es por eso que es importante aprovechar los rasgos comunes entre el juego y la matemática, para así poder transmitir a los estudiantes el profundo interés y entusiasmo que ella puede generar y así proporcionar una fácil familiarización con los procesos usuales de las actividades matemáticas.

La matemática es un grande y sofisticado juego y debe ser explorado de diferentes formas, en su aprendizaje se puede utilizar con gran provecho sus aplicaciones, su historia, las biografías de los matemáticos más interesantes, sus relaciones con la filosofía o con otras aspectos de la mete humana pero posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como un juego bien escogido.

En la actualidad los estudiantes están siendo "bombardeados" por diferentes técnicas de comunicación muy poderosas y atrayentes, así que al tratar de enseñarles las matemáticas, los profesores encuentran una gran dificultad para atraer la atención de sus estudiantes. Es por esta razón que es importante aprovechar todas estas técnicas de comunicación, tales como el vídeo, la televisión, la radio, el periódico, el comic, etc., para atraer la atención de ellos.

Sería un ejercicio atrayente combinar las actividades lúdicas con las intelectuales, de esta manera gran parte de los estudiantes pueden ser introducidos de manera agradable en actividades y manipulaciones que constituyen el inicio razonable de un conocimiento matemático.

El placer por el develamiento en matemáticas es posible y fuertemente motivador para superar otros aspectos rutinarios indispensables de su aprendizaje.

Es necesario romper, de todas las formas posibles, la idea preconcebida y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, que muchas veces provoca bloqueos iniciales en la niñez, de que la matemática es indispensablemente aburrida, inútil, inhumana y muy difícil.

[74] www.geocities.com aulavy la ense de la geometr.htm 15 de mayo de 2015

Capítulo 3

Finalización

3.1. Conclusiones

Al estudiar el concepto de “Dimensión”, partiendo de distintos enfoques, tales como la Topología, el Álgebra Lineal, la Teoría de la Medida, etc., los cuales nos presentaron de manera formal el mencionado, se logra dilucidar este concepto de manera intuitiva, lo que nos permitió proyectarlo como herramienta eficaz para la enseñanza de la geometría.

Conseguimos analizar detallada y sistemáticamente la propuesta de enseñanza de la geometría de Friedrich Froebel, con lo cual obtuvimos bases sólidas para ejecutar una acción docente mejor.

La diferenciación de las dimensiones extrañas (fractal, hiperespecial, temporal, etc.) desbloquea un posible camino para la incorporación de estos temas en los primeros niveles de educación.

La contextualización dentro del proceso de evolución del pensamiento geométrico fue un resultado que benefició nuestro proyecto inmediatamente, pues nos indicó el camino de donde viene y hacia donde podríamos llevar la enseñanza de la Geometría en un futuro.

Se pusieron en práctica algunas actividades con las cuales se describió la intencionalidad de Froebel con su enfoque metodológico.

3.2. Bibliografía

[1] Banchoff, T. (1993) *What Is Dimension?*. Estados Unidos: AMS.

[2] Vargas, G., Gamboa Araya, R. (2012) *The Van Hiele Model And The Teaching Of The Geometry.* Costa Rica: UNA.

[3] Ríbnikov, K. (1991) *Historia De Las Matemáticas.* Moscú: Mir Moscú.

[4] Muñoz Quevedo, J. M. (1977) *Introducción A La Topología.* Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[5] Diaz Hernandez, A.M., Bargueño Farinas, V., Romera Carrión, C., Ruiz Virumbrales, L. M., Tejero Escribano, l. (2008) *Álgebra (Lineal Básica).* España: Sanz y Torres.

[6] Grossman, S.I. (1996) *Algebra Lineal, ed. 5.* Colombia: McGraw-Hill.

[7] Jimenez Pozo, M.A. (1989) *Teoría de la medida.* Cuba: Pueblo y Educación.

[8] Clemens, S.R. O'Daffer, P. G. Cooney, T.J. (1998). *Geometría.* México: Addison Wesley Longman.

[9] Puertas Castaño, L.M. (1996) *Traducción y Notas Elementos de Euclides, Libros I-IV- X-XIII.* España: Gredos.

[10] Rucker, R. (1984). *La cuarta dimensión: Hacia una geometría más real.* Estados Unidos: Dover Publications.

[11] Colerus, E. (1948). *Desde el punto a la cuarta dimensión: una geometría para todos.* Barcelona: Labor S.A.

[12] Londoño, N. Guarín, H. Bedoya, H. (1993). *Dimensión Matemática 8.* Colombia: Norma.

[13] Steen, l. A. (1999). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* México: Limusa.

[14] Barnslay, M. (1988). *Fractals Every Where.* Estados Unidos: Academic Press.

[15] Nápoles Valdes, J. E. (2009). *Paradojas y Fundamentos de la matemática. Historia y Pedagogía.* Argentina: Universidad de la Cuenca.

[16] Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas, teoría y práctica de las matemáticas en el aula.* España: Morata S.L.

[17] Maluendas Uribe, A. (1997). *Ensayo metodología para el aprendizaje de los números irracionales aula.* Colombia: UIS.

[18] Van Cleave, J. (2002) *Matemáticas para niños y jóvenes.* México: Limusa S.A.

[19] Ñeco, M. (1989) *La educación, teoría praxis filosofía.* México : MacGraw-Hill.

3.3. Webgrafía

www.20enmate.com, **Consulta**: 11 de febrero de 2015.

www.infor.uva.es/-descover/proyectos/animacion/ejes.htm. **Consulta**: 12 de Febrero 2015

www.biblioweb.editorialpeniel.com/libros/lacuartadimensión2.htm, **Consulta**: 30 de marzo 2015

www.geocities.com/gammafx/index2htm, **Consulta**: 31 de Marzo de 2015.

www.geocities.com/gammafx/index2htm, **Consulta**: 31 de Marzo de 2015.

www.quanta.net.py/zfractal/dim.htm, **Consulta**: 2 de abril 2015

www.20enmate.com/profesores-art-geometria.asp. **Consulta**: 4 de abril de 2015.

www.geocites.com/aulavy/la-ense-de-la-geometr.htm. **Consulta**: 4 de abril de 2015.

www.terra.com.ve/aldeaeducativa/temas/tareas2250e.html. **Consulta**: 5 de abril de 2015.

www.educared.org.ar/vicaria/links-internos/inicial/01-abordaje/index.asp. **Consulta**: 5 de abril de 2015.

www.froebelgifts.com. **Consulta**: 7 de abril de 2015

www.froebelgifts.com **Consulta**: 7 de abril de 2015

www.geocities.com/casdua/recursosinter.htm **Consulta**: 8 de abril 2015

www.educared.org.ar/vicaria/links-internos/inicial/relatos/01-abordaje/index.asp. **Consulta**: 9 de abril de 2015.

www.froebelgifts.com. **Consulta**:12 de abril de 2015.

www.froebelgifts.com. **Consulta**: 20 de abril de 2015

www.froebelgifts.com. **Consulta**: 22 de abril de 2015.

www.educared.org.ar/vicaria/links-internos/inicial/relatos/01-abordaje/index.asp. **Consulta**: 22 de abril 2015

wwww.platea.pntic.mec.es/-mzapata/tutor-ma/fractal.htm. **Consulta**: 30 de abril de 2015

www.platea.pntic.mec.es/-mzapata/tutor-ma/fractal/fractal.htm. **Consulta**: 30 de abril de 2015

www.geocities.com/aulavy/revistas/neo/neo23geometr.htm. **Consulta**:15 de mayo de 2015.

www.geocities.com/aulavy/la-ense-de-la-geometr.htm. **Consulta**:15 de mayo de 2015

www.geocities.com/aulavy/la-ense-de-la-geometr.htm **Consulta**:15 de mayo de 2015.

3.4. Anexos

3.4.1. Descripción de algunas actividades puestas en práctica

Actividad n° 1

- **Nombre:** “Identificando los polígonos”
- **Objetivo:** Realizar construcciones y diseños en los que se puedan identificar figuras geométricas.
- **Lo desarrollado:** Para esta tarea se les llevó a los estudiantes hojas de papel de diferentes colores. Luego por medio de algunas instrucciones especificas, que fueron más tarde llevadas a la práctica, se les pidió a los estudiantes que dieran figura a un determinado objeto que fuera común dentro su cotidianidad. Ya con el material y las instrucciones los estudiantes aplicaron a cada hoja de papel una serie de acciones de doblado y rasgado que les permitieron reconocer formas y figuras geométricas que se encontraban inmersas dentro de sus creaciones.

Figura 3.1: Identificando polígonos

Actividad n° 2

- **Nombre:** "Sentados en paralelo y perpendicular"
- **Objetivo:** Orientar el concepto de paralelismo y perpendicularidad.
- **Lo desarrollado:** Se llevó a los estudiantes al hall de la institución en donde se les pidió que conformaran varias filas sentados, con la condición de que cada una de estas debía encontrarse a la misma distancia la una de la otra; para esto los niños y niñas observaron que resultaba más fácil midiendo esta distancia con la extensión sus brazos. Luego se les pidió que hicieran rectas conformadas por los mismos estudiantes donde únicamente uno de ellos perteneciera a las dos filas al mismo tiempo.

Figura 3.2: Sentados en paralelo y perpendicular

Actividad n° 3

- **Nombre:** “Trasladando en ajedrez”
- **Objetivo:** Visualizar las traslaciones de figuras en un plano.
- **Lo desarrollado:** En conjunto con los estudiantes se elaboró un tablero de Ajedrez; cada posición en el tablero representaba un punto en un plano. Se construyeron figuras las cuales se unieron a fichas de este juego. Dependiendo del movimiento de cada una de las fichas del juego, se les pudo mostrar a los estudiantes como se podía dar una traslación. Si la figura ocupaba varias posiciones se ponía una ficha por cada posición para que los estudiantes captaran el hecho de que todos los puntos de la figura se habían trasladado.

Figura 3.3: Trasladando en ajedrez

Actividad n° 4

- **Nombre:** “Visualizando medidas”
- **Objetivo:** Orientar el cálculo de medidas de áreas y perímetros.
- **Lo desarrollado:** En el aula y con la ayuda de algunos elementos se encaminó la actividad hacia la construcción de cuadrados de 10 centímetros de lado. Se les pidió a los estudiantes desarrollar una cuadricula en cada uno de estos cuadrados en donde cada cuadrado pequeño tuviera una medida de un centímetro de lado. Con los cuadrados, y sus respectivas cuadriculas, se fueron formando áreas que correspondían a las establecidas por decímetros cuadrados y con estas conformar áreas con medidas de metros cuadrados; los estudiantes comprendieron poco a poco el porque las medidas de áreas iba de cien en cien y no de diez en diez como en las medidas “lineales”.

Figura 3.4: Vizualizando Medidas