Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

La Heurística como una Técnica para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas

Ferley Embus Galindo
Erick Alexander Reyna Beltran

Neiva, Huila
2014

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

La Heurística como una Técnica para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciados en matemáticas

Ferley Embus Galindo

2008276804

Erick Alexander Reyna beltran

2006263889

Asesor:

Mg. Mauricio Penagos

Neiva, Huila

2014

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Junio de 2014

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de grado primeramente nos gustaría agradecer a Dios por bendecirnos y cumplir este sueño anhelado.

A la **UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA** por darnos la oportunidad de estudiar y ser unos profesionales.

A nuestro asesor, **Mg. Mauricio Penagos** por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en nosotros que podamos terminar nuestros estudios con éxito.

También nos gustaría agradecer a mis profesores durante toda nuestra carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a nuestra formación, y en especial a nuestra segunda lectora de trabajo de grado la *Mgs. Martha Cecilia Mosquera* por sus consejos, su enseñanza y más que todo por su amistad.

Y por último a nuestros padres **Maria Beltran**, **Luis Angel Reyna**; **Argelis Galindo** y **Gabriel Embus** quienes sin su esfurzo confianza y apoyo incondicional no hubieramos logrado hoy este tan anhelado sueño.

Son muchas las personas que han formado parte de nuestras vidas profesionales a las que nos encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañia en los momentos más difíciles de nuestras vidas. Algunas están aquí con nosotros y otras en nuestros recuerdos y corazones, sin importar en donde estén queremos darles las gracias por formar parte de nosotros, por todo lo que nos han brindado y por todas sus bendiciones.

Para ellos: Muchas gracias y que Dios los bendiga.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Bertrand Russell definió la matemática como la ciencia en la que nunca sabemos sobre lo que estamos hablando ni si lo que decimos es verdadero. Se ha mostrado que la matemática es ampliamente aplicable en muchos otros campos científicos. Por tanto, la mayoría de los científicos no saben de lo que están hablando ni si lo que dicen es verdad.

"Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada en cuentra una excusa".(Proverbio chino)

En primer lugar, en nuestra experiencia como estudiantes y ad portas de ser licenciados en matemáticas coincidimos en afirmar que el conocimiento no resulta únicamente de teorías, sino también de observaciones y de actividades secuenciales en las cuales se combina la reflexión y la práctica. A través de la historia, la matemática ha sido una herramienta fundamental para explicar problemas de la naturaleza, el universo y de la vida cotidiana. A partir de ello gran cantidad de matemáticos han dado pautas sobre la forma como se debe abordar un problema; gracias a estos hombres nace la *heurística.*

En este trabajo de grado queremos abordar la *heurística* como una estrategia para desarrollar el pensamiento matemático, a partir del razonamiento, de la incidencia de la abstracción o más ampliamente de los procesos mentales en general. Lo anterior nos obliga a preguntarnos: ¿Cómo piensan nuestros estudiantes?, ¿Cómo se desarrollan en ellos los procesos de pensamiento matemático?

La heurística podría ser definida como "*el tesoro del análisis o el arte de resolver problemas*"(Pappus, 300 a.c). También ha sido definida como "*los procedimientos para la resolución de problemas que involucra concebir una respuesta hipotética de un problema dado*"(Ambrosio Velasco Gómez).

En algunas ocasiones, al resolver problemas matemáticos, se pone atención sólo en los resultados y se califica como bien o mal una respuesta a partir de estos, dejando de lado los procedimientos y se desaprovecha la oportunidad de conocer cuáles son los procesos de pensamiento que se siguierón y en qué momento, se desviarón éstos del camino a la respuesta correcta. La heurística atiende de manera especial los procesos que sigue el pensamiento para llegar a la solución de un problema y con ellos poder reorientarlos para obtener resultados aceptables y por qué no decir, correctos.

Por lo anterior, mediante los métodos heurísticos se busca que los estudiantes diseñen de manera creativa y basándose en la experiencia propia, alternativas a la resolución de un problema donde incorporen lo que conocen, la observación de la situación y también la intuición para generar soluciones ante la problemática.

El presente trabajo de grado tiene como nombre "La Herustica como técnica para el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matematicas en los grados 8° y 9°" y con él se pretende proponer estrategias que potencien habilidades y estrategias para la resolución de problemas teniendo en cuenta los cinco dimensiones que abarcan el conocimiento matemático de los estudiante que son según el Ministerio de Eduación (MEN): Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos, Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.

El primer capítulo comprende el marco teórico, donde se plantean diferentes técnicas, propuestas por Matemáticos reconocidos en el campo de la Heuristica como George Pólya, Miguel De Guzmánn y Alan Schoenfeld para resolver problemas matemáticos. En el segundo, tercero, y cuarto capitulo están dedicados a la solución de problemas ilustrativos y el planteamiento de ejercicios de práctica, de acuerdo con las cinco dimensiones del pensamiento matemático antes mencionadas y su relación con los estándares de educación. Cabe mencionar que incluiremos problemas con diferente nivel de dificultad.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Ofrecer una colección de problemas de matemáticas para grados de 8° a 9° donde se note la importancia de la Heurística como herramienta fundamental para la adquisición del conocimiento matemático o el fortalecimiento del mismo.

Objetivos Específicos

- Analizar los métodos de resolución de problemas planteados por algunos matemáticos como Miguel de Guzmán, George Polya y A.H. Schoenfeld.

- Presentar de manera breve y sistemática algunos procedimientos necesarios para la resolución de problemas matemáticos de la Educación Basíca.

- Proponer una serie de ejercicios en la cual el estudiante puede poner en práctica lo aprendido en el presente trabajo.

JUSTIFICACIÓN

Durante muchos años se han identificado dificultades relacionadas con la enseñaza y el aprendizaje de las matemáticas, como la desmotivación hacia el aprendizaje, las altas tasas de mortalidad académica, la apatía, la repitencia, la deserción y la creencia de que a un buen profesor de matemáticas no le aprueban la materia un número significativo de estudiantes. Además existe la tendencia, un tanto generalizada, de considerar la matemática como algo inalcanzable e incomprensible, limitándose por esto su estudio, muchas veces, a la mecanización y a la memoria, y no a la comprensión de su tematica.

En los Lineamientos Curriculares del MEN también se plantea que la matemática escolar debe promover el desarrollo del pensamiento matemático, el cual posibilita al estudiante describir, organizar, interpretar y relacionarse con determinadas situaciones a través de la matemática: en otras palabras, un pensamiento que facilita matematizar la realidad. Según las investigaciones de George Polya al bordar un enfoque de formulación y resolución de problemas como el eje orientador de la actividad docente, incluyendo en ella la evaluación, contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, pues los problemas se conciben como situaciones en las que los estudiantes identifican, seleccionan y usan estrategias pertinentes y adecuadas para obtener soluciones válidas en el contexto matemático; así, estas distintas acciones que posibilitan a los problemas se consideran como aproximación al que hacer del matemático.

El titulo de este trabajo: La Heurística como Una Técnica para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas postula que la solución de problemas vistas como herramientas básicas, ha llevado a que los problemas sean usados después de teorizar, como aplicación de un concepto matemático de una tarea específica, en donde el estudiante realiza procedimientos operativos. Dichos textos expone una segunda concepción la cual se consideró en este trabajo y que plantea las estrategias empleadas de tres autores muy conocidos en el ámbito de la resolución de problemas matemáticos en el mundo y quiso tomar estas estrategias y mostrar cómo se puede abordar, en los cuatro pensamientos estipulados en el lineamientos curriculares.

Se resalto también la importancia de lo que plantea shoenfeld (citado ICFES: 2003:5)

Al respecto, explica que en la resolución de problemas intervien, por lo menos, aspectos como los recursos matemáticos, las estrategias heurísticas, la autorregulación o monitoreo, el control del proceso de la solución, y las ideas y creencias acerca de la matemática; es decir, resolver un problema requiere poner en acción el sentido construido alrededor de los conceptos matemáticos, poner en uso la matemática; en dicha relación se construye una o varias soluciones, en las que son válidas diferentes estrategias o planes de acción. La matemática escolar, pensada desde la formulación y resolución de problemas, puede contribuir a la consecución de los fines de la educación en Colombia desarrollar un pensamiento crítico, reflexivo y analítico, necesario para crear disciplina y habilidades de trabajo. Promover el desarrollo de la autonomía, facilitar los procesos de participación y promover el pensamiento científico.

En este trabajo se citó los artículos de texto Resolución de problemas matemáticos atraves del método heurístico de George Polya al igual que los métodos de Miguel de Guzmán y Alan Shoenfeld, ya que estos autores plantean métodos heurísticos es. Un desafío a la inteligencia del alumno que debe tener un cierto grado de creatividad y de originalidad y que ¿para dar solución a un problema? requiere de estrategias como adivinar, chequear, trabajar hacia atrás, explorar patrones, argumentar. Al igual que este trabajo contiene preconceptos para que el estudiante pueda recordar algunas cosas básicas antes de abordar algún problema y un banco de preguntas para que ponga a prueba lo aprendido.

CAPÍTULO 1

MARCO TEORICO

1.1. La Técnica de Resolución de Problemas

1.1.1. La Resolución de Problemas

La resolución de problemas es una tarea necesaria y de mucho compromiso y disposición. Los contenidos matemáticos cobran sentido desde el momento en que es necesario aplicarlos para poder resolver una situación problemática real.

Cuando se trabaja en el aula de forma sistemática, dando opción al alumno a que razone y explique cuál es su forma de afrontar y avanzar en la solución de una situación, salen a la luz las dificultades que el propio proceso de resolución de problemas conlleva. Dichas dificultades están relacionadas en algunos casos con la falta de asimilación de contenidos propios de matemática; en otras ocasiones son debidas a la escasa comprensión lectora al desconocimiento de conceptos propios de otras disciplinas que intervienen en la situación planteada. No obstante, suponen una importante fuente de información para dar a conocer los aspectos que se debieran retomar e incorporarlos nuevamente al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Un problema es una situación que se necesita resolver y para la cual no se dispone, en principio, de un camino rápido y directo que lleve a la solución. Consecuentemente, en ocasiones, ese hecho puede producir bloqueos pues conlleva siempre un grado de dificultad apreciable, es un reto que debe ser adecuado al nivel de formación de la persona o personas que se enfrentan a él. Si la dificultad es muy elevada en comparación con su formación matemática, desistirán rápidamente al tomar consciencia de la frustración que la actividad les produce. Por el contrario, si es demasiado fácil y su resolución no presenta especial dificultad ya que desde el principio ven claramente cuál debe ser el proceso a seguir para llegar al resultado final, esta actividad no será un problema para ellos sino un simple ejercicio. De este modo podemos decir que la actividad que para el estudiante de cierta edad puede concebirse como un problema, para otros no pasa de ser un simple ejercicio.

Según Alan. H. Schoenfeld, Profesor de la Universidad de California, el filósofo griego Sócrates fue capaz de aislar la noción de “resolver problemas” para someterla a estudios. Este hecho resulta sumamente notable para su época, siglo $V\ aC$. Si bien es cierto que este sabio negaba la cognoscibilidad del mundo físico y absolutizaba el hecho de que el hombre solo puede conocerse a sí mismo, hay que destacar en él ciertas reminiscencias metacognitivas. Desde el idealismo socrático, resolver problemas era una cuestión de “recordar”. Esta doctrina no puede juzgarse por su obra, pues nunca escribió nada, sino por el diálogo “Menón o de la Virtud"de su discípulo Platón.

Platón, en este pequeño diálogo, nos muestra como atraves de preguntas breves podemos ir resolviendo problemas que creemos imposibles de realizar y nos lleva a pensar si la virtud puede o no puede enseñarse. La respuesta sólo puede darla el que conozca la virtud en sí misma, porque nuestro espíritu se resiste a determinar con certidumbre ninguna de las propiedades de un ser, cuya naturaleza no le sea claramente conocida. Sócrates dialoga con Menon, un griego de la epoca que tenia asu dispocición muchos esclavos, y le comenta que para él la naturaleza de la virtud es aún un misterio; y sobre este punto esencial reclama las luces de su interlocutor. Menon, cogido de sorpresa, se acoge a su vez a las lecciones de su maestro Gorgias de Leoncio (Filosfo Griego que vivio 108 en perfecto estado fisico), y sus respuestas no son, por lo pronto, otra cosa que las opiniones de este célebre sofista. En este diálogo, Sócrates llama a un esclavo de Menón para ayudarle en la solución de un problema geométrico. Realizando una serie de preguntas capciosas y haciendo correcciones muy sutiles, lo conduce a probar que en cierto cuadrado de lado $2a$ en el cual hay inscrito otro cuadrado de lado c cuyos vértices son los puntos medios del primero se cumple que $a^2 = 8$, cuando $c = 2$.

Figura 1.1: Imágen De Sócrates y El Esclavo de Menon

He aquí un pasaje del Diálogo:

SÓCRATES. – Dime, joven: ¿Sabes que esto es un cuadrado?
ESCLAVO. – Sí.
SÓCRATES. – El espacio cuadrado, ¿no es aquel que tiene iguales las cuatro Líneas que

ves?
ESCLAVO. – Seguramente.
SÓCRATES. – ¿No tienes también estas otras líneas, tiradas por medio, iguales?
ESCLAVO. – Sí.
SÓCRATES. – ¿No puede haber un espacio semejante más grande o más Pequeño?
ESCLAVO. – Sin duda.
SÓCRATES. – Si este lado fuese de dos pies y este otro también de dos pies, ¿Cuántos pies tendría el todo? Considéralo antes de esta manera. Si este lado fuese de dos pies y éste de un pie sólo, ¿no es cierto que el Espacio tendría una vez dos pies ?
ESCLAVO. – Sí, Sócrates.
SÓCRATES. – Pero como este otro lado es igualmente de dos pies, ¿no tendrá el espacio dos veces dos?
ESCLAVO. – Sí.
SÓCRATES. – ¿Luego el espacio tiene dos veces dos pies?
ESCLAVO. – Sí.
SÓCRATES. – ¿Cuántos son dos veces dos pies? Dímelo después de haberlos contado.
ESCLAVO. – Cuatro, Sócrates.
SÓCRATES. – ¿No podría formarse un espacio doble que éste y del todo Semejante, teniendo como él todas sus líneas iguales?
ESCLAVO. – Sí.
SÓCRATES. – ¿Cuántos pies tendría?
ESCLAVO. – Ocho.
SÓCRATES. – Vamos; procura decirme cuál es la longitud de cada línea de este Otro cuadrado. Las de éste son de dos pies. ¿Dime cuántos serán las del cuadro doble?
ESCLAVO. – Es evidente, Sócrates, que serán dobles.
SÓCRATES. – Ya ves, Menón, que yo no le enseño nada de todo esto, y que no hago más que interrogarle. Él imagina ahora saber cuál es la línea con que debe formarse el espacio de ocho pies. ¿No te parece así?
MENÓN. – Sí.

Como se puede observar, los “impulsos” de Sócrates desaprovechan las verdaderas potencialidades del pensamiento del esclavo. Así, cada pregunta presupone una respuesta inmediata. El intervalo que implica un razonamiento pasa desapercibido. Es notable que si bien la pareja Sócrates-Esclavo simula una relación estímulo-respuesta, de manera implícita, algo similar pasa con Sócrates-Menón

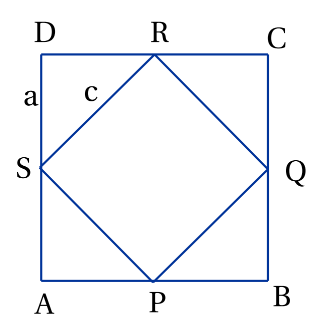


figura 1. Al comparar las áreas de los cuadrados ABCD y PQRS se revela que $c^2 = 2a^2$

Analizando la solución del problema anterior se llega a que la resolución de un problema es un procedimiento mental que nos lleva a la conclusión de un proceso más amplio, esto implica unas secuencias previas como la identificación del problema y su modelado.

LA HEURÍSTICA:

Es el arte de inventar o descubrir hechos a partir de hipótesis o principios que aun no siendo verdaderos estimulan la indagación. En matemáticas, la heurística existe desde la Grecia antigua. Según pudimos observar en el fragmento anterior de los dialogo de Platón.

1.2. Principales Exponentes de la Heuristica y sus Métodos

1.2.1. Método de Polya

Geoger Polya (1887-1985)

Figura 1.2:

> *Cuando se le preguntaba cómo había llegado a ser matemático, solía decir,en medio de broma y medio serio: No era lo suficientemente inteligente para ser físico, y demasiado para ser filósofo, así que elegí matemáticas, que es una cosa intermedia.*

Polya nació en Budapest(Hungria) el 13 de diciembre de 1887. En un principio no se sintió especialmente atraído por las matemáticas, sino por la literatura y la filosofía. Su profesor Alexander,de la universidad donde estudiaba le sugirió que siguiera cursos de física y de matemáticas para mejorar su formación filosófica. Este consejo marcó para siempre su carrera, las magníficas lecciones de física del Profesor Loránd Eotvos, y las de el Profesor de matemáticas Lipót Fejér influyeron decisivamente en la vida y obra de Pólya. Entre los discípulos de Fejér estaban Marcel Riesz, Otto Szás, Mihaly Fekete, Gábor Szego, Tibor Radó, y más tarde Paul Erdos y Paul Turán. Además de las clases "regulares", Fejér se reunía con ellos en un café de Budapest y resolvía problemas mientras les contaba historias y anécdotas sobre los matemáticos que había conocido. Polya es uno de los pioneros en formular un método para resolver problemas, dedicó gran parte de su trabajo (además de sus investigaciones originales en torno a las teorías de funciones y probabilidad) a desarrollar una teoría heurística en matemáticas y a ofrecer descripciones detalladas de varios métodos para solucionar problemas matemáticos.

Polya plantea un método para solucionar problemas el cual llamaria el método de **los cuatro pasos:** Acontinuación explicaremos el metodo de los cuatro paso de Polya.

1. Entender el problema
2. Configurar un plan
3. Ejecutar el plan
4. Mirar hacia atrás

Paso 1: Entender el Problema.

¿Puede replantear el problema en sus propias palabras?
¿Distingue cuáles son los datos?
¿Sabe a qué quiere llegar?
¿Hay suficiente información?
¿Hay información extraña?
¿Es este problema similar a algún otro que haya resuelto antes?

Paso 2: Configurar un plan.

¿Puede usar alguna de las siguientes estrategias?

- Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).
- Usar una variable.
- Buscar un Patrón.
- Hacer una lista.
- Resolver un problema similar más simple.
- Hacer una figura o diagrama
- Usar razonamiento directo.
- Usar razonamiento indirecto.

- Usar propiedades de los números.
- Trabajar hacia atrás (Devolverse)
- Usar casos.
- Plantear y Resolver una ecuación.
- Buscar una fórmula.
- Usar un modelo.
- Usar análisis dimensional.
- Usar coordenadas.
- Usar simetrías.

Paso 3**: Ejecutar el Plan**.

Implementar las estrategias que escogió hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción le sugiera tomar un nuevo curso. Tome un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tiene éxito solicite una sugerencia o haga el problema a un lado por un momento. No tenga miedo de volver a empezar. Suele suceder que inicar nuevamente o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4**: Mirar hacia atrás.**

¿Es su solución correcta? ¿Su respuesta satisface lo establecido en el problema? ¿Puede encontrar una solución más sencilla? ¿Puede generalizar el problema y su solución?

A hora a continuación mostraremos un ejemplo basado por el metodo de polya:

Problema:

Juan cría en su graja solamente cuyes y gallinas. Un día, jugando, le dijo a su hijo: Contando todas las cabezas de mis animales obtengo 60 y contando todas sus patas obtengo 188. ¿Cuántos cuyes y cuántas gallinas tengo?

Resolución:

Paso 1: Comprendiendo el problema.

Tenemos que hallar cuántos cuyes y cuántas gallinas tiene el papá de Juan.
Se sabe que hay 60 cabezas y 188 patas. También se sabe que un cuy tiene 4 patas y una gallina 2 patas.

Paso 2: Elaborando un plan.

Plan A: Estrategia:
Tanteo y error organizados. Se intenta hallar la solución dando valores al azar a la cantidad de cuyes y a partir de ellos obtener el número de gallinas. Para verificar si la respuesta es correcta se calcula el total de patas con esos valores. Se puede construir una tabla para que el trabajo sea más ordenado.

Plan B:
Estrategia: Plantear ecuaciones

Cantidad de cuyes: x
Cantidad de gallinas: y
Cantidad de cabezas: $x + y = 60$
Cantidad de patas: $4x + 2y = 188$

Hemos traducido el problema en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: x e y. Para hallar la solución del problema, tenemos que resolver este sistema de ecuaciones.

Paso 3: Ejecutando el plan.

Plan A:

En total hay 60 animales.
Todos no pueden ser gallinas porque entonces habría 120 patas.
Tampoco todos pueden ser cuyes porque entonces habría 240 patas.
Debe haber exactamente 188 patas.
Para poder continuar razonando vamos a hacer una tabla:

Nº de cuyes	Nº de gallinas	Nº de patas
0	60	120
60	0	240
30	30	180
34	26	188

Respuesta: Hay 34 cuyes y 26 gallinas

Este problema pudo ser resuelto mediante esta estrategia porque se ha trabajado con números relativamente pequeños. Sin embargo, si se tratase de números mayores y más complejos necesitaríamos realizar una mayor cantidad de tanteos y podríamos no llegar a la solución.

Plan B:

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

$$x + y = 60 \tag{1.1}$$
$$4x + 2y = 188 \tag{1.2}$$

De (1.1) se obtiene:

$$x = 60 - y \tag{1.3}$$

Sustituyendo el valor de x en 2:

$$\begin{gathered}
4(60 - y) + 2y = 188 \\
240 - 4y + 2y = 188 \\
240 - 2y = 188 \\
-2y = 188 - 240 \\
-2y = -52 \\
2y = 52 \\
y = 52/2 \\
y = 26
\end{gathered}$$

Sustituyendo el valor de y en (1.3)

$x = 60 - y$
$x = 60 - 26$

Respuesta: Hay 34 cuyes y 26 gallinas.

Plantear ecuaciones es una buena estrategia para resolver problemas con cualquier tipo de números. Esta estrategia funciona con mucha facilidad para resolver diversos problemas, sólo se requiere dominar el lenguaje algebraico.

Paso 4. Hacer la verificación.

Sustituimos los valores de x e y para confirmar que se cumplan las igualdades que hallamos al inicio:

x + y = 60 4x + 2y = 188
34 + 26 = 60 es correcto. 4(34) + 2(26) = 188
136 + 52 = 188 es correcto.

1.2.2. Modelo de Miguel de Guzmán

Miguel de Guzmán(1963-2004)

Figura 1.3: Miguel de Guzmán

> *El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?*

Miguel de Guzmán Ozámiz nació en 1936 en Cartagena(Murcia), fue catedrático de Análisis de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1982, miembro correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina desde 1985. En la década de los 90, fue presidente de la ICMI, Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

Obtuvo la licenciatura en Filosofía en el Berchmanskolleg de Munich (Alemania) en 1961 y después se licenció en Matemáticas y en Filosofía en la Universidad Complutense en 1965. Se doctoró en Matemáticas Aplicada en la universidad de Chicago en 1968. Ese mismo año regresó a la universidad Complutense donde obtuvo el título de doctor por esta misma universidad.

Guzmán plantea el siguiente modelo para la resolución de problemas:

1. Familiarización con el problema.

2. Búsqueda de estrategias.

3. Desarrollo la estrategia.

4. Revisión del proceso.

Para cada una de estas cuatro fases establece las siguientes sugerencias

Familiarización con el problema

- ¿De qué trata el problema?
- ¿Cuales son los datos?
- ¿Qué pide determinar o comprobar el problema?
- ¿Dispone de datos suficientes?
- ¿Guardan los datos relaciones entre si?

Búsqueda de Estrategias

Se trata de determinar unas cuantas estrategias heurísticas para abordar el problema. No ha llegado aún el momento de aplicarlas, sino de seleccionar, dentro de nuestro archivo de estrategias, cuáles parecen que se adecuan más a la naturaleza del problema.

Desarrollo de la Estrategia

Momento en el que pasa a aplicarse la estrategia seleccionada. S debe tener en cuenta la siguiente relación de sugerencias heurísticas

- Llevemos adelante las mejores ideas que se nos hayan ocurrido, una a una.
- Reflexionemos sobre la validez de cada paso.
- Preguntémonos si lo que hemos obtenido es la solución. Estudiémosla a fondo.

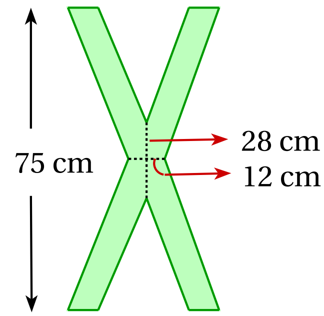
Revisión del Proceso

Iniciamos una reflexión, cuya guía puede ser la siguiente serie de sugerencias

- Examinemos a fondo el camino seguido. ¿Cómo hemos llegado a la solución? ¿ O por qué no la hemos alcanzado?
- Busquemos ahora un camino más simple
- Tratemos de entender por qué la cosa funciona.

A continuación un problema resuelto por el modelo de Miguel de Guzmán.

Esta letra pertenece a una pancarta y queremos saber qué superficie ocupa para preparar un presupuesto para la compra de pintura. ¿Cuál es su área?



Solución

1. **Familiarización con el problema**

   ¿De qué trata el problema?
   determinar el área de una figura con forma de equis

   ¿cuales son los datos?
   la altura de la figura es de 72 cm
   dos segmentos perpendiculares de 12 cm y 28 cm

   ¿qué pide determinar o comprobar el problema?
   el área de una figura plana formada por dos paralelogramos congruentes

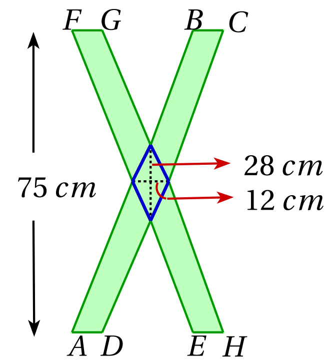
   ¿Dispone de datos suficientes?
   para determinar el área de la figura debemos determinar la base y altura de los paralelogramos, lo cual podemos obtenerlos con los datos dados

   ¿guardan los datos relaciones entre si?
   las medidas 12 cm y 28 cm corresponden a segmentos perpendiculares.

2. **Busqueda de estrategias**

   Con la información dada construimos la siguiente figura:

La letra X esta formada por dos paralelogramos congruentes ($ABCD$ y $EFGH$) delineando los paralelogramos se construye un rombo en el centro de la figura con diagonales 12 cm y 18 cm. El área del rombo pertenece al área de uno de los paralelogramos, así, para hallar el área de la figura podemos sumar las áreas de los paralelogramos y restar el área del rombo.



3. **Desarrollo de estrategia**
   Si llamamos A_1 el área del paralelogramo y A_2 el área del rombo, entonces:

$$A_1 \cdot h = 12 \cdot 75 = 900\ cm^2$$

$$A_2 = 12 \cdot 28 = 336\ cm^2$$

   Así que el área de la región se obtiene restando A_2 al doble del área de A_1,
   $A = A_1 - A_2 = (2 \cdot 900) - 336 = 1464\ cm$

4. **Revisión del proceso**
   Este proceso de solución funcionó porque hemos descompuesto la figura en polígonos, los cuales con los datos dados se encontraron sus áreas.

1.2.3. Modelo Alan Schoenfeld

Alan. H. Schoenfeld(1966)

Figura 1.4: Alan. H. Schoenfeld

Allan Schoenfeld es un matemático norteamericano quien, terminando de estudiar Matemática pura, se encontró con el primer libro de Pólya. Su lectura le entusiasmó y le hizo preguntarse por qué nadie le había enseñado ese texto cuando estudiaba. En su opinión, le habría servido de mucho; por eso, se dio a la tarea de preguntar a los miembros de la Facultad de Matemáticas las razones de esa ausencia. Algunos no lo conocían, y los que lo conocían señalaron que lo que Pólya decía no funcionaba. Schoenfeld también indagó un poco con profesores que entrenaban estudiantes para participar en olimpiadas matemáticas; y la respuesta fue similar. El interés de Schoenfeld nace precisamente aquí: al averiguar que la gente que se dedicaba a trabajar con personas que va a resolver problemas (en olimpiadas) no usaba las ideas de Pólya, y, más bien, decían que no funcionaba.

El modelo de Alan H. Schoenfeld que aparece en el libro "Mathematical Problem Solving "(1985), presenta el interés de retomar algunas ideas de G. Polya, profundizando en el análisis de la heurística y considerando las reflexiones que sobre los problemas matemáticos se han hecho hasta ese momento en campos avanzados de la Computación como la Inteligencia Artificial y en el de la Teoría Psicológica del Procesamiento de la Información. Como resultado, su trabajo muestra una considerable superación en lo referente a categorías y otros puntos de vista sobre el tema que nos ocupa. Es así, que a partir de los resultados de sus investigaciones, Schoenfeld considera cuatro dimensiones en el proceso de resolución de problemas:

- **Dominio de conocimientos y recursos:** Expresados a través de lo que el sujeto conoce y la forma de aplicar experiencias y conocimientos ante situaciones de problemas.

- **Estrategias cognoscitivas:** Categoría que contempla el conjunto de estrategias generales que pueden resultar eficaces para acceder a la solución de un problema. Dentro de la misma se pueden identificar recursos heurísticos para abordar los problemas matemáticos tales como: analogía, inducción, generalización, entre otros.

- **Estrategias metacognitivas:** Se caracteriza como la conciencia mental de las estrategias necesarias para resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo.

- **Sistema de creencias:** Esta conformado por las ideas, concepciones o patrones que se tienen en relación con la Matemática y la naturaleza de esta disciplina. Además, cómo ésta se relaciona o identifica con algunas tendencias en la resolución de problemas.

En contra de la idea de Polya, Schoenfeld entiende que el proceso de resolución no es lineal, si no que supone caminos en zig-zag y marchas hacia atraz y adelante, aún así, delimita cuatro fases

1. análisis

2. exploración

3. ejecución
4. comprobación

Para cada una de ellas presenta las siguientes sugerencias heurísticas:

Análisis

- Trazar un diagrama si es posible.
- Examinar casos particulares:
  -Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.
  - Examinar casos límites para explorar la gama de posibilidades. - Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1,2... y
- Buscar una pauta inductiva.
- Probar o simplificar el problema:
  -Sacando partida de posibles simetrías o,
  -Mediante razonamientos.

Exploración

- Examinar problemas esencialmente equivalentes:
  - Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
  - Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos. Introduciendo elementos auxiliares.
- Replanteando el problema mediante:
  - Cambio de perspectiva o de notación.
  - Considerando el razonamiento por contradicción o el contra- recíproco.
  - Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.
- Examinar problemas ligeramente modificados: - Elegir sub-objetivos (satisfacción parcial de las condiciones)
  -Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
  - Descomponer el problema por caso y estudiar caso por caso.
- Examinar problemas ampliamente modificados: - Construir problemas análogos con menos variables.
  - Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.

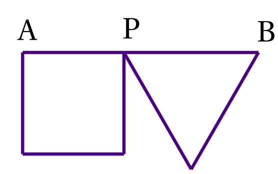
- Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
- Recordar que al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación

- ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?
- ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
- ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
- ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
- ¿Verifica los criterios generales siguientes?
- ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
- ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

A continuación mostraremos un problema resuelto por el método de Alan schoelfeld:

1. El segmento AB mide 21 cm de longitud. El punto P se coloca de forma que el cuadrado y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. ¿Cuánto mide el segmento AP? ¿Cuál será el perímetro de ambas figuras?



Análisis

La suma de un lado del cuadrado y un lado del triángulo equilatero es 21 cm.

Se desea hallar la medida de $\overline{AP}$ que corresponde al lado del cuadrado.

Las variables corresponden a los lados de los polígonos, consideremos x: el lado del cuadrado($\overline{AP}$) y y: el lado del triángulo ($\overline{PB}$)

El perímetro del cuadrado es $4x$ y el perímetro del triángulo es $3y$

Exploración

en términos algebraicos tenemos

$$x + y = 21 \tag{1.4}$$

$$4x = 3y \tag{1.5}$$

este sistema de ecuaciones se puede solucionar por el método de sustitución

Hallando el valor de x e y podemos hallar el perímetro de los polígonos.

Realización

despejando y en la ecuación (1.4) tenemos

$$y = 21 - x \tag{1.6}$$

(1.6) en la ecuación (1.5) y resolvemos

$$\begin{aligned} 4x &= 3(21 - x) \\ 4x &= 63 - 3x \\ 4x + 3x &= 63 \\ 7x &= 63 \\ x &= \frac{63}{7} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

sustituimos $x = 4$ en la ecuación (1.4)

$$\begin{aligned} 9 + y &= 21 \\ y &= 21 - 9 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

El lado del cuadrado mide 9 cm y el lado del triángulo 12 cm. El perímetro del cuadrado y triangulo es $4x = 4{,}9 = 36$ cm.

Verificación

si $x = 9$ y $y = 12$ veamos que el segmento $\overline{AB} = 21$

$$\begin{aligned} x + y &= 21 \\ 9 + 12 &= 21 \\ 21 &= 21 \end{aligned}$$

El perímetro del cuadrado y triángulo equilátero son iguales

$$4x = 3y \tag{1.7}$$
$$4{,}9 = 3{,}12 \tag{1.8}$$
$$36 = 36 \tag{1.9}$$

A continuación abordaremos el pensamiento numérico variacional, exponiendo al inicio del capitulo algunos elementos teórico básicos y después ejercicios de aplicación.

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.
Carl Friedrich Gauss

CAPÍTULO 2

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

"El gran libro de la naturaleza está escrito con símbolos matemáticos"
Galileo

El porqué de la formación matemática

Desde hace tres décadas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. En este sentido, la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos. Para comprender mejor los cambios en la relación entre las metas de la educación matemática y los fines de la educación actual de cara al siglo XXI, a continuación se describen algunos cambios en las argumentaciones sobre la importancia de la formación matemática y su relación con las nuevas visiones de la naturaleza de las matemáticas.

Hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo. Ello, en primer lugar, por su papel en la cultura y la sociedad, en aspectos como las artes plásticas, la arquitectura, las grandes obras de ingeniería, la economía y el comercio; en segundo lugar, porque se las ha relacionado siempre con el desarrollo del pensamiento lógico y, finalmente, porque desde el comienzo de la Edad Moderna su conocimiento se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

En Colombia, desde los inicios de la República hasta la década de los setenta, la contribución de la formación matemática a los fines generales de la educación se argumentó principalmente con base en las dos últimas razones de carácter personal y científico técnico, a saber: por su relación con el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, y por su aporte al desarrollo de la ciencia y la tecnología en el país. Estos fines estuvieron fuertemente condicionados por una visión de la naturaleza de las matemáticas como cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, lo que condujo a suponer que sólo se requería estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de contenidos matemáticos, hechos, definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos.

Sin embargo, estos argumentos comenzaron a ser cuestionados, de un lado, porque el desarrollo del pensamiento lógico y la preparación para la ciencia y la tecnología no son tareas exclusivas de las matemáticas sino de todas las áreas de la Educación Básica y Media y, de otro, por el reconocimiento de tres factores adicionales que no se habían considerado anteriormente como prioritarios: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos.

El primero de ellos obedece al ideal de ofrecer a toda la población del país una educación básica masiva con equidad y calidad, lo que implica buscar también la integración social y la equidad en y a través de la educación matemática, es decir, formar en matemáticas a todo tipo de alumnos y alumnas. La posibilidad de esta formación ya no está dada como sucedía en la primera mitad del Siglo XX por el filtro social que limitaba mucho el número de estudiantes que accedían a la educación secundaria, sino que tiene que atender a toda la población juvenil, independientemente de su preparación adecuada o deficiente en las matemáticas de la Educación Básica secumdaria y de su motivación o desmotivación por las mismas. Por ello, se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Estas consideraciones se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes. De esta forma se amplía la base argumentativa para relacionar las matemáticas con las finalidades culturalmente valoradas de la educación.

Sobre la noción de competencia matemática

Sin utilizar todavía la conceptualización y la terminología actual de las competencias, la visión sobre las matemáticas escolares propuesta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas preparaba ya la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la cual se utilizaban los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas efi caces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa.

También pueden reinterpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Gowin, y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins, Gardner, Wiske y otros. En la primera, la signifi catividad del aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. En la segunda, la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma. En las dimensiones de la comprensión se incluye no sólo la más usual de los contenidos y sus redes conceptuales, sino que se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la praxis cotidiana, profesional o científico-técnica en que se despliegue dicha comprensión. Todas estas dimensiones se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase.

Por lo dicho anteriormente, se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje signifi cativo y comprensivo. En la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla. Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

La noción general de competencia ha venido siendo objeto de interés en muchas de las investigaciones y reflexiones que adelanta la comunidad de investigadores en educación matemática. Una síntesis apretada de los resultados de éstas permite precisar que además de los aspectos que se acaban de mencionar el sentido de la expresión *ser matemáticamente competente* requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como:

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justifi caciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.

- La matemática es también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales, resultado que se configura como un cuerpo de conocimientos (definiciones, axiomas, teoremas) que están lógicamente estructurados y justificados. Con base en estos supuestos se pueden distinguir dos facetas básicas del conocimiento matemático:

- La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.
- La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justifi caciones, la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación.

En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo.

Estas dos facetas (práctica y formal) y estos dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalan nuevos derroteros para aproximarse a una interpretación enriquecida de la expresión *ser matemáticamente competente*. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Si bien es cierto que la sociedad reclama y valora el saber en acción o saber procedimental, también es cierto que la posibilidad de la acción reflexiva con carácter flexible, adaptable y generalizable exige estar acompañada de comprender qué se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo.

Estas argumentaciones permiten precisar algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática que explicitan lo que significa ser *matemáticamente competente:*

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identifi car lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas.

- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.

- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.

- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos.

Los cinco procesos generales de la actividad matemática

En la enumeración anterior se pueden ver con claridad aunque en distinto orden los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

En todas las áreas curriculares pueden considerarse procesos semejantes y en cada una de esas áreas estos procesos tienen peculiaridades distintas y deben superar obstáculos diferentes que dependen de la naturaleza de los saberes propios de la respectiva disciplina. En los apartados siguientes se hará mención de cada uno de esos procesos generales desde las particularidades presentes en la actividad matemática que ocurre en su enseñanza y en su aprendizaje. Debe aclararse, además, que esta clasificación en cinco procesos generales de la actividad matemática no pretende ser exhaustiva, es decir, que pueden darse otros procesos además de los enumerados, ni tampoco pretende ser disyunta, es decir, que existen traslapes y relaciones e interacciones múltiples entre ellos; en particular, como se verá a continuación, el proceso de formular y resolver problemas involucra todos los demás con distinta intensidad en sus diferentes momentos.

- **La modelación.**

  Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema a veces se dice también una estructura que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. En ese sentido, todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Análogamente, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo, aunque cualquier sistema podría utilizarse como modelo, pues esa es la manera de producir nuevas metáforas, analogías, símiles o alegorías.

  La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.

  En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

  Con respecto a la modelación, en la didáctica de las matemáticas se ha hablado también con frecuencia desde 1977 de la matematización de una situación problema, con un término introducido por Hans Freudenthal. Esta expresión se suele tomar como sinónimo de la modelación y ambas pueden entenderse en formas más y más complejas, que van desde una forma muy elemental, como simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación, hasta una forma muy avanzada, como creación de nuevos modelos y teorías matemáticas que permitan simular la evolución de una situación real en el tiempo. La segunda forma de entender la matematización y la modelación es más propia de los cursos avanzados de física, ingeniería, economía, demografía y similares, pero la primera puede comenzarse desde el preescolar e irse complejizando en los sucesivos grados escolares; esta primera manera de entender la matematización y la modelación es la que se utiliza en los Lineamientos Curriculares y en el presente documento de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Este primer sentido de la matematización o modelación puede pues entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente. Al respecto, Lynn Arthur Steen propuso en 19886 una definición de las matemáticas que va más allá de la descripción usual de ellas como la ciencia del espacio y el número: considera que las matemáticas parten de una base empírica, pero para detectar en ella esquemas que se repiten, que podemos llamar modelos o patrones (patterns), y en la multitud de esos modelos o patrones detectar de nuevo otros más y teorizar sobre sus relaciones para producir nuevas estructuras matemáticas, sin poner límites a la producción de nuevos modelos mentales, nuevas teorías y nuevas estructuras. Por lo tanto, las matemáticas serían la ciencia de los modelos o patrones (Mathematics is the science of patterns). Steen continúa así: El matemático busca modelos o patrones en el número, en el espacio, en la ciencia, en los ordenadores y en la imaginación. Las teorías matemáticas explican

las relaciones entre modelos o patrones; las funciones y los mapas, los operadores y los morfismos conectan un tipo de modelos o patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables

- **La comunicación**

A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas8. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama registros de representación o registros semióticos, no parece posible aprender y comprender dicho contenido.

- **El razonamiento**

El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. En los grados superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos y materiales, y puede trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos.

Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

- **La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos**.

Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados algoritmos, procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

Para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo signifi cativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos mecanismos es la alternación de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

Otro mecanismo cognitivo clave es la automatización, que requiere de la práctica repetida para lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos; esta automatización no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí contribuye a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas. Estas destrezas dan seguridad al alumno y pueden afianzar y profundizar el dominio de dichos conocimientos, pero también pueden perder utilidad en la medida en que se disponga de ayudas tecnológicas que ejecuten dichas tareas más rápida y confiablemente.

Otro mecanismo cognitivo involucrado es la reflexión sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización. Esta reflexión exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuándo basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado.

Por ello, así el docente decida practicar y automatizar un solo algoritmo para cada una de las operaciones aritméticas usuales, es conveniente describir y ensayar otros algoritmos para cada una de ellas, compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas. Esta comparación permite distinguir claramente la operación conceptual de las distintas formas algorítmicas de ejecutarla y el resultado de dicha operación conceptual del símbolo producido al final de la ejecución de uno u otro algoritmo. Todo ello estimula a los estudiantes a inventar otros procedimientos para obtener resultados en casos particulares. Esto los prepara también para el manejo de calculadoras, el uso de hojas de cálculo, la elaboración de macroinstrucciones y aun para la programación de computadores.

Los cinco tipos de pensamiento matemático

Los aspectos referidos anteriormente con respecto a la expresión ser matemáticamente competente muestran la variedad y riqueza de este concepto para la organización de currículos centrados en el desarrollo de las competencias matemáticas de manera que éstas involucren los distintos procesos generales descritos en la sección anterior. Estos procesos están muy relacionados con las competencias en su sentido más amplio explicado arriba, y aun en el sentido restringido de saber hacer en contexto, pues *ser matemáticamente competente* requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia. Además de relacionarse con esos cinco procesos,*ser matemáticamente competente* se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

En los Lineamientos Curriculares se prefirió hablar de los cinco tipos de pensamiento matemático ya mencionados (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional), sin incluir en ellos el lógico, pues como se indicó arriba en todos esos cinco tipos es necesario atender al uso y al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes y, a su vez, el progreso en el pensamiento lógico potencia y refina los cinco tipos de pensamiento matemático. Se describen a continuación uno por uno estos cinco tipos de pensamiento, mencionando simultáneamente los sistemas conceptuales y simbólicos con cuyo dominio se ejercita y refina el tipo de pensamiento respectivo, a la vez que ellos se desarrollan y perfeccionan con los avances en dichos tipos de pensamiento.

- **El pensamiento numérico y los sistemas numéricos**

  Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. Dichos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. Por ejemplo, para el estudio de los números naturales, se trabaja con el conteo de cantidades discretas y, para el de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas.

  En el caso de los números naturales, las experiencias con las distintas formas de conteo y con las operaciones usuales (adición, sustracción, multiplicación y división) generan una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas. En cierto sentido, la numerosidad o cardinalidad de estas cantidades se está midiendo con un conjunto unitario como unidad simple, o con la pareja, la decena o la docena como unidades complejas, y las operaciones usuales se asocian con ciertas combinaciones, separaciones, agrupaciones o reparticiones de estas cantidades, aunque de hecho se refieren más bien a los números que resultan de esas mediciones.

Históricamente, las operaciones usuales de la aritmética eran muy difíciles de ejecutar con los sistemas de numeración griegos o con el romano, y sólo en el Siglo XIII se empezó a adoptar en Europa el sistema de numeración indo-arábigo. Entre los Siglos XIV y XIX, la enseñanza de la aritmética escolar se redujo en la práctica al manejo de este sistema de numeración para los naturales y de su extensión para los racionales positivos (o fraccionarios). Pero durante el Siglo XX hubo una proliferación muy grande de otros contenidos matemáticos en la Educación Básica y Media; en particular, además de los naturales, se empezaron a estudiar los sistemas numéricos de los enteros, los racionales, los reales y los complejos, y otros sistemas de numeración antiguos y nuevos (como el binario, el octal, el hexadecimal, el vigesimal y el sexagesimal para los naturales y sus extensiones a los racionales), así como las notaciones algebraicas para los números irracionales, los reales y los complejos.

Estas extensiones sucesivas de los sistemas numéricos y de sus sistemas de numeración representan una fuerte carga cognitiva para estudiantes y docentes y una serie de dificultades didácticas para estos últimos. Es conveniente recordar, por ejemplo, que durante la Edad Antigua y Media ni siquiera las razones entre dos números de contar se consideraban como verdaderos números. Hoy día se aceptan como una nueva clase de números, llamados precisamente racionales (por la palabra latina ratio, que significa razón).

El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Las primeras situaciones llevan al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor (algunos de estos últimos considerados a veces también como partidores o fraccionadores de la unidad en partes iguales), representado usualmente por una fracción como $\frac{3}{4}$, o por un decimal como 0,75, o por un porcentaje como el 75 %. Las otras situaciones llevan al número racional como razón, expresado a veces por frases como 3 de 4, o 3 por cada 4, o la relación de 3 a 4, o por la abreviatura 3:4.

Algo parecido sucede con el paso del concepto de número natural al de número entero más general, que puede ser positivo, cero o negativo, y del concepto de número racional positivo (también llamado número fraccionario) al de número racional más general, que también puede ser positivo, cero, o negativo. Aunque los chinos e hindúes empezaron a explorar números negativos hace más de mil años, en los países europeos éstos no se aceptaron como números hasta bien entrado el Siglo XVII. El concepto de número negativo es el resultado de la cuantifi cación de ciertos cambios en las medidas de una magnitud, o de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, identificado con el cero. Este paso de los números naturales a los números enteros positivos y negativos (con el cero como entero) y a los números racionales positivos y negativos (con el cero como racional) no sólo amplía el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, configurando así sistemas numéricos diferentes.

El fracaso en la medición de ciertas longitudes cuando se tomaba otra como unidad llevó al concepto de número irracional, que complementó el de número racional y llevó a pensar en un sistema unificado de números racionales e irracionales llamados reales, con sus operaciones y relaciones apropiadamente extendidas a los nuevos números. Las conceptualizaciones relativas a los números reales implican la aritmetización de procesos infinitos, y por ende, la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, completitud y continuidad. Igualmente, este paso de los números racionales a los números reales requiere del uso y comprensión de diferentes tipos de representaciones numéricas, sobre todo, las relativas a los números irracionales, tanto por medio de decimales infinitos como de símbolos algebraicos.

- **El pensamiento espacial y los sistemas geométricos**

El pensamiento espacial, entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el plano, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.

Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Gálvez ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio, refiriéndose no sólo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del individuo, sino también a su relación con esos espacios1. En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana.

Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

Así pues, la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí y con respecto a los mismos estudiantes; de cada cuerpo sólido o hueco con sus formas y con sus caras, bordes y vértices; de las superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, en donde se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones. El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.

Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos. Como todos los sistemas, los geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos. Estos sistemas se expresan por dibujos, gestos, letras y palabras que se utilizan como registros de representación diferentes que se articulan en sistemas notacionales o sistemas simbólicos para expresar y comunicar los sistemas geométricos y posibilitar su tratamiento, para razonar sobre ellos y con ellos y, a su vez, para producir nuevos refinamientos en los sistemas geométricos. El pensamiento espacial opera mentalmente sobre modelos internos del espacio en interacción con los movimientos corporales y los desplazamientos de los objetos y con los distintos registros de representación y sus sistemas notacionales o simbólicos. Sin estos últimos, tampoco se hubiera podido perfeccionar el trabajo con los sistemas geométricos y, en consecuencia, refinar el pensamiento espacial que los construye, maneja, transforma y utiliza.

Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar geometrías.

La geometría euclidiana fue la primera rama de las matemáticas en ser organizada de manera lógica. Por ello, entre los propósitos principales de su estudio está definir, justificar, deducir y comprender algunas demostraciones. La geometría euclidiana puede considerarse como un punto de encuentro entre las matemáticas como una práctica social y como una teoría formal y entre el pensamiento espacial y el pensamiento métrico. Por ello, como se dijo al tratar sobre el pensamiento lógico, el pensamiento espacial y el métrico encuentran en la geometría euclidiana un lugar privilegiado aunque no exclusivo para el desarrollo del pensamiento lógico y éste, a su vez, potencia y refina los dos primeros.

"Finalmente, he acabado por comprender que la geometría
es el núcleo de todo sentimiento y que cada expresión del sentimiento
se origina con un movimiento dirigido por la geometría.
La geometría es omnipresente en la naturaleza: he aquí el verdadero concierto de la
naturaleza" (Auguste Rodin)

Motivación: El Problema de la reina Dido

Cartago había sido fundado por Dido, hija del rey Muto de Tiro y esposa de Sicarbas, rico sacerdote que murió asesinado por Pigmalión, el hermano de Dido, que deseaba atesorar las riquezas de su cuñado.

Durante un sueño, el fantasma de Sicarbas advirtió a su viuda de las funestas intenciones que Pigmalión proyectaba para ella. Dido se sintió obligada a armar una pequeña flota e iniciar un viaje por mar, huyendo de Tiro en busca de nuevas tierras.

Tras muchas peripecias, llegó a las costas de África, donde negoció con los lugareños establecerse en el pedazo de tierra que pudiera ser cubierto con la piel de un buey.

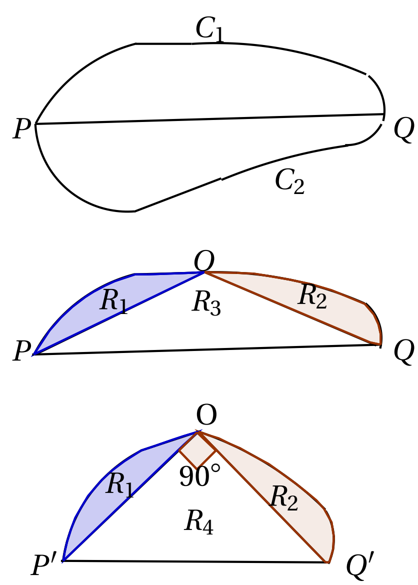
Figura 2.1:

Dido supo cortar la piel en finísimas tiras, formar con ellas una larga cuerda y encerrar con la cuerda una modesta superficie, en la que se levantó la ciudad de Birsa, origen de la que luego sería conocida como Cartago.
Aunque la grandeza matemática de Dido está ligada a que su comprensible ambición dió lugar al nacimiento del famoso problema llamado ”isoperimétrico´´.

“... De entre todas las curvas cerradas simples del plano con un mismo perímetro L, ¿cuál es la que encierra mayor área?”

Solución del problema isoperimétrico

Si se tiene una curva K convexa de longitud C, tomamos un punto P en la curva y a partir de P ubicamos el punto medio del perímetro denotado por Q. El segmento de líena $\overline{PQ}$ divide el área en dos sub-áreas desiguales y la curva K en dos curvas C_1 y C_2, cada una con longitud $\dfrac{C}{2}$, tomamos la curva C_1. Como C_1 no es un semicírculo podemos ubicar un punto O en la curva con el ángulo $POQ \neq 90°$. Haciendo un corte desde P a O y desde O a Q se divide el área encerrada por la curva K en tres sub-áreas, una primera región R_1 entre el segmento $\overline{PO}$ y la curva; una región R_2 entre el segmento $\overline{OQ}$ y la curva; y la tercera región R_3 encerrado por el triángulo POQ.



Ahora construimos otra curva, obtenida por los arcos PO y OQ como $P'O$ y OQ' y ángulo $P'OQ' = 90°$, de tal manera que $P'O = PO$ y $OQ' = OQ$. Sobre $P'O$ construimos una región congruente a R_1, y sobre OQ' una región congruente a R_2. Pero el triángulo $P'OQ'$ tiene mayor área que el area de el triángulo POQ (entre triángulos con dos lados de longitud especifica y el tercer lado de longitud arbitrario, el triángulo con mayor área es aquel que los dos lados de longitud especifica forman un ángulo de 90°). Por tanto la curva construida (desde A' hasta Q') encierra mayor área que la curva inicial(desde P hasta Q). Si repetimos infinitamente este proceso llegaremos a acercar la curva a un semicírculo. Luego se realiza el mismo procedimiento con la curva C_2 finalmente se obtiene un círculo.

- **El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas**

Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones. En los Lineamientos Curriculares se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

En relación con los anteriores conceptos y procedimientos, es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta. Otros aspectos importantes en este pensamiento son la integración de la estimación con los procedimientos numéricos de truncamiento y redondeo, el tratamiento del error, la valoración de las cifras significativas y el uso de técnicas de encuadramiento, así como la expresión de medidas grandes y pequeñas por medio de la notación científica.

Históricamente, el pensamiento métrico se perfeccionó con el refinamiento de las unidades de medida de longitud, tomadas al comienzo de partes del cuerpo y por tanto muy diversas en cada región y cultura, que fueron luego estandarizadas para el comercio y la industria. Se configuraron en distintas regiones y países muchos sistemas de unidades y medidas o sistemas métricos, como el francés, el español, el ruso, el inglés y su variante norteamericana y, después de la Revolución Francesa, se empezó a diseñar un sistema decimal de pesos y medidas que tuvo varias etapas y confi guraciones, como el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo) y el MKS (metro-kilogramo-segundo) y, más recientemente, el SI (Sistema Internacional de unidades y medidas), que es el más extendido actualmente. Sin embargo, el inglés y el norteamericano siguen siendo muy utilizados en todo el mundo y muchos de los antiguos sistemas locales subsisten más o menos adaptados a las unidades internacionales. Así pues, el pensamiento métrico no puede trabajar sin sistemas de medidas o métricos, ni éstos refinarse sin las notaciones, registros, tablas, abreviaturas y otros sistemas notacionales o simbólicos, en una interacción dialéctica constante y cambiante.

En lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del SI, es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). El estudio de esas primeras magnitudes muestra que el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas, sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales. En cada conjunto de unidades del SI para cada magnitud hay una unidad que sirve de base a las otras, que son mayores (múltiplos) o menores (submúltiplos) de dicha unidad básica. Así se construyen herramientas conceptuales para el análisis y la ejercitación de la equivalencia entre medidas expresadas en distintas unidades y la explicitación de las relaciones pertinentes del SI con el sistema de numeración decimal en sus diversas formas escriturales: con coma, con punto y en notación científica. Esas relaciones entre el sistema de numeración decimal y cada sistema de unidades del SI para una determinada magnitud (por ejemplo la longitud) se indican por los prefi jos que expresan los múltiplos (deca-, hecto-, kilo-, etc.) y submúltipos (deci-, centi-, mili-, etc.) de la unidad básica (en este caso, del metro) y su correspondencia con las unidades superiores del sistema métrico decimal (decena, centena, unidad de mil, etc.) y con las unidades inferiores (décima, centésima, milésima, etc.). Igualmente, es necesario establecer diferencias conceptuales entre procedimientos e instrumentos de medición, entre unidades y patrones de medida, y entre la precisión y la exactitud de una medición.

De especial importancia son aquellas magnitudes que tienen estrecha relación con aspectos claves de la vida social, como por ejemplo, todo lo relacionado con los servicios públicos, sus procesos de medición y facturación y las unidades respectivas (litro, metro cúbico, voltio, amperio, vatio, kilovatio, kilovatio-hora), algunas de las cuales, como ya se indicó arriba, desbordan el campo de las matemáticas y requieren del desarrollo del pensamiento científico y del aprendizaje de algunos contenidos de la física. De esta manera, el pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas naturales y sociales y con las competencias ciudadanas, en particular, con lo que al cuidado del medio ambiente se refiere, en tanto conviene tener elementos conceptuales claros para hacer un uso racional de los servicios públicos, identificar cuándo se está haciendo un gasto innecesario de ellos, explicar las razones por las cuales pudo haberse incrementado el gasto y proponer medidas eficaces para el ahorro del agua, el gas y la energía eléctrica.

- **El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos**

Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confi able, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo; de la ocurrencia de los terremotos, huracanes u otros fenómenos de la naturaleza; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer esferas numeradas para las loterías y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas o para el reparto de cartas o fichas en los juegos que por esto mismo se llaman de azar.

En las experiencias cotidianas que los estudiantes ya tienen sobre estos sucesos y estos juegos, empiezan a tomar conciencia de que su ocurrencia y sus resultados son impredecibles e intentan realizar estimaciones intuitivas acerca de la posibilidad de que ocurran unos u otros. Estas estimaciones conforman una intuición inicial del azar y permiten hacer algunas asignaciones numéricas para medir las probabilidades de los eventos o sucesos, así sean inicialmente un poco arbitrarias, que comienzan con asignar probabilidad 0 a la imposibilidad o a la máxima improbabilidad de ocurrencia; asignar $\frac{1}{2}$ a cualquiera de dos alternativas que se consideran igualmente probables, y asignar 1 a la necesidad o a la máxima probabilidad de ocurrencia.

Las situaciones y procesos que permiten hacer un conteo sistemático del número de combinaciones posibles que se puedan asumir como igualmente probables, junto con el registro de diferentes resultados de un mismo juego, así como los intentos de interpretación y predicción de los mismos a partir de la exploración de sistemas de datos, desarrollan en los estudiantes la distinción entre situaciones deterministas y situaciones aleatorias o azarosas y permiten refinar las mediciones de la probabilidad con números entre 0 y 1. Más tarde, esas situaciones y procesos pueden modelarse por medio de sistemas matemáticos relacionados con la teoría de probabilidades y la estadística.

El empleo cada vez más generalizado de las tablas de datos y de las recopilaciones de información codificada llevó al desarrollo de la estadística descriptiva, y el estudio de los sistemas de datos por medio del pensamiento aleatorio llevó a la estadística inferencial y a la teoría de probabilidades. El manejo y análisis de los sistemas de datos se volvió inseparable del pensamiento aleatorio.

Los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos.

Por ello, no es ya necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones, estimar si son o no igualmente probables y asignarles probabilidades numéricas, así como en dominar los conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar, resumir y diagramar sistemas de datos estadísticos y tratar de extraer de ellos toda la información posible con la ayuda de calculadoras, hojas de cálculo y otros programas de análisis de datos, con el fin de intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar.

"La difusión de los métodos estadísticos puede contribuir a una sociedad más abierta, más liberal y más tolerante" (Daniel Peña)

Motivación: EL CABALLERO DE MERÉ

La introducción de Pascal y Fermat en este tema vino propiciada por la amistad de Pascal con Antoine Gobaud (1610,1685), un jugador profesional más conocido como Caballero de Meré, que propuso a Pascal una serie de problemas sobre distintas situaciones en juegos de apuestas con dados. Pascal envió los problemas de Meré a su amigo Fermat que ya le había mostrado su interés por el tema. Se estableció así una correspondencia continua entre ellos con nuevas ideas y métodos de resolución que se puede considerar como el origen de la teoría de la probabilidad. Aquella relación epistolar produjo conceptos y métodos claros de resolución de problemas en los que intervenía el azar.

Era una época en que el juego de apuestas estaba prohibido y el ser sorprendido jugando significaba la cárcel. Meré se había visto obligado a cortar muchas de sus partidas para no ser descubierto. A la hora de repartirse con el rival el dinero de la apuesta en función de como había quedado ésta en el momento de interrumpirla siempre tenía problemas y discusiones por lo que decidió proponerle a Pascal el siguiente problema:

Dos jugadores han de interrumpir una partida en el momento en que el primero necesita dos puntos para ganar y el segundo tres. ¿En qué proporción debería repartirse el dinero de la apuesta?

Es claro que el dinero debe repartirse proporcionalmente a la probabilidad que tuviera cada uno de ganar la partida en el momento de abandonarla. También es evidente que el número máximo de jugadas (cada una vale un punto) que les faltarían para obtener un ganador es de cuatro.

Pascal comunicó por carta el problema a Fermat y ambos matemáticos lo resolvieron aunque utilizaron métodos distintos. Pascal determinó las probabilidades sucesivas que en cada jugada tenían de ganar los contendientes, mientras que Fermat lista todos los resultados posibles que terminarían el juego, formando lo que hoy llamamos el espacio muestral. El método de Fermat es mucho más general y semejante al que utilizamos hoy día, es decir, escribe las 10 formas de que termine la partida.

Escribiremos paréntesis en los que señalaremos por orden el número del ganador en cada tirada. Por ejemplo, (1,2,1) significa que la primera partida la gana el jugador 1, la segunda la gana el jugador 2, y la tercera la vuelve a ganar el jugador 1 con lo que la partida acaba. Las distintas formas de terminar el juego serán entonces las nueve siguientes:

$$(1,1),(1,2,2,1),(2,1,1),(2,1,2,1),(2,2,2),(1,2,2,2),(2,1,2,2),(2,2,1,2)$$

Vemos que en seis de ellas ganará el primer jugador. Lo cual indica que tenía un 60 % de probabilidades de ganar y que, por tanto, le ha de corresponder el 60 % del dinero total de la apuesta.

- **El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos**

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráfi cos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos. En particular la relación con otros pensamientos aparece con mucha frecuencia, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos y porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de fi guras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confi rmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las fi guras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

El estudio del cambio también se puede iniciar en la Educación Básica Primaria a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a la institución durante una mañana) representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones. Por el análisis cuidadoso de esas representaciones se puede identificar la variación que ocurre y, en algunos casos, llegar a precisar la magnitud de los cambios y aun la tasa de cambio en relación con el tiempo.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo.

El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional,*como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia* como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia.

Es importante distinguir las funciones lineales de las no lineales y conectar el estudio de la proporcionalidad directa con las funciones lineales. Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas.

El desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables. Además, en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, también se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. Esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades, etc. que permiten tratar con situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas. Los objetos algebraicos, como por ejemplo los términos algebraicos, se reconstruyen como representaciones de funciones y las ecuaciones e inecuaciones se reinterpretan como igualdades o desigualdades entre funciones. De aquí que las múltiples relaciones entre la producción de patrones de variación y el proceso de modelación y particularmente el estudio de las nociones de variable y de función sean las perspectivas más adecuadas para relacionar el pensamiento variacional con el cálculo algebraico en la Educación Básica Secundaria y con la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral en la Educación Media.

El desarrollo del álgebra en los Siglos XVI y XVII y el del cálculo diferencial e integral en los Siglos XVII y XVIII mostraron también que el pensamiento variacional no se podía refinar sin los sistemas algebraicos y analíticos ni éstos sin aquél. La relación del pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos.

Un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra corresponde a la utilización con sentido y al estudio formal de los objetos algebraicos (variables, constantes, parámetros, términos, fórmulas y otras expresiones algebraicas como las ecuaciones e inecuaciones, los sistemas de ecuaciones o de inecuaciones, por ejemplo), para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos (como la conmutativa y la asociativa de la adición y la multiplicación y la distributiva de la multiplicación respecto de la adición, o el carácter simétrico y transitivo de la igualdad y el carácter antisimétrico y transitivo de la desigualdad). De esta manera, el cálculo algebraico surge como generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente.

Es necesario señalar que el desarrollo de este pensamiento debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado. Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación, lo cual se logra articulando la búsqueda de soluciones no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación de posibles valores en el contexto de medidas de longitudes, áreas y volúmenes y de modelos matemáticos de procesos biológicos, químicos y físicos que utilicen expresiones algebraicas. Se refuerza así a la estimación como núcleo conceptual importante en el desarrollo del pensamiento numérico.

Ya desde el comienzo de la Básica Secundaria cobra especial importancia el estudio de los números decimales como sistemas de representación de valores aproximados y como expresiones infinitas para números racionales e irracionales, así como el cálculo del área del círculo, de los volúmenes de cilindros, conos y esferas y de las áreas exteriores de los mismos, todo lo cual prepara a los estudiantes para conceptualizar el límite, la continuidad, la derivada como tasa de cambio instantánea y la integral definida como límite de una suma.

Motivación: El Problema de la Ecuación Cubica

Se cree que el primero en resolver la ecuación cúbica, concretamente la ecuación del tipo $x^3 + px = q$, fue *Scipione del Ferro* (1465-1526), un profesor de Matemáticas de la Universidad de Bolonia. No obstante, Del Ferro nunca publicó su resolución en vida, sino que la legó, como testamento, a su alumno, Antonio Maria Fior. No se sabe con certeza si Tartaglia consiguió hacerse con el secreto o él mismo descubrió un método propio de resolución, pero en el año 1541 ya sabía resolver ecuaciones cúbicas y había ampliado el método siendo capaz de resolver ecuaciones del tipo $x^3 + px^2 = q$.

En la Italia renacentista, las matemáticas, tenían muy buena acogida popular y eran frecuentes los enfrentamientos públicos. Para Tartaglia ésta fue, en muchas ocasiones, una forma de sobrevivir. Cuando Fior se enteró de que Tartaglia hacia alarde de su capacidad para resolver ecuaciones cúbicas, un secreto que creía tener muy bien guardado, le retó públicamente a resolver 30 ecuaciones. Tartaglia las resolvió todas en el plazo convenido. Por el contrario, Fior no pudo resolver ninguno de los problemas propuestos por Tartaglia, puesto que Fior no sabía cómo resolver las ecuaciones del tipo $x^3 + px^2 = q$.

Tartaglia recibe una carta firmada por Cardano en la que le comunica que está escribiendo una obra de Álgebra y que le gustaría incluir su nombre junto con el método de resolución de la ecuación de tercer grado. Tartaglia no estaba dispuesto a revelar sus secretos y se niega a la oferta. Cardano, en sucesivas misivas, insiste e invita a Tartaglia a su residencia en Milán con la promesa de presentarle al Marqués del Vasto, quién era su protector. Tartaglia, al que cualquier proposición que puediera aliviar su situación económica le parece digna de consideración, acepta la invitación. Después de múltiples ruegos y bajo la promesa de que el método quedará protegido, Tartaglia cede y le explica los métodos para resolver las ecuaciones de tercer grado. Dicha concesión daría lugar a uno de los enfrentamientos más renombrados de la historia de las Matemáticas. Cardano se adjudicó el descubrimiento y lo publicó en su obra *Ars Magna*, haciendo tan sólo una pequeña y sinuosa referencia a Tartaglia. Cardano rechazó todos y cada uno de los enfrentamientos públicos a los que Tartaglia le retó. Al final, las influencias políticas de Cardano ganaron la partida. La historia posterior fue injusta mencionando como "Ecuaciones de Cardano" a los sistemas de resolución que habían sido obra indiscutible de Tartaglia.

A continuación haremos una descripción del método de *Tartaglia-Cardano* para resolver ecuaciones del tipo

$$x^3 + px = q$$

Se sabe que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

De donde:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

Si $u = a^3$ y $v = b^3$ entonces:

$$u - v = (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$$

Si se compara la identidad anterior con la ecuación $x^3 + px = q$ que se quiere resolver, resulta que:

$$3\sqrt[3]{uv} = p \Rightarrow \sqrt[3]{uv} = \frac{p}{3} \Rightarrow uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$x^3 = (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

obtenemos la expresión de x en función de p y q

$u - v = q \Rightarrow u = v + q$ y $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$

$$\begin{aligned}(v+q)v &= \left(\frac{p}{3}\right)^3\\ v^2 + qv &= \left(\frac{p}{3}\right)^3\\ v^2 + qv - \left(\frac{p}{3}\right)^3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora hacemos uso de la ecuación cuadrática y así,

$$v = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{q}\right)^3}}{2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Entonces, dado que la ecuación $x^3 + px = q$ tiene una única solución real positiva, se tiene que:

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{p}{2} \text{ y } u = v + q$$

luego

$$u = \left(\sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}\right) + q = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}$$

por tanto

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Dicha expresión se conoce como fórmula de Tartaglia-Cardano.

- **Relaciones entre los cinco tipos de pensamiento matemático**

Los cinco tipos de pensamiento descritos anteriormente tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático. Entre los elementos integradores de mayor relevancia se pueden destacar:

- El estudio de la variación como una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos. En este sentido, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos u operandos, o de los objetos de la geometría y sus características y de la manera como cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esos objetos, se proponen como procesos de abstracción y generalización a partir del análisis de lo que es invariante en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones. Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional.

- El tratamiento de las magnitudes y sus procesos de medición se constituyen en la base conceptual sobre la cual se organizan los procesos conceptuales de cada pensamiento. El estudio de la variación hace necesaria una referencia a la identificación de variables, y por tanto, al reconocimiento de las magnitudes y de las medidas de las cantidades asociadas. Así, por ejemplo, ya se señaló a propósito del pensamiento numérico cómo el tratamiento de las magnitudes cobra fuerza en el aprendizaje del concepto de número (medir y contar como base para su aprendizaje), de las operaciones entre números (al operar no solo se opera sobre números, sino también, sobre las cantidades y magnitudes que ellos representan en el contexto del problema que se pretende resolver) y de las relaciones entre ellos (al comparar números es conveniente comparar longitudes de segmentos y trazos o marcas en una recta numérica).
- La estimación y la aproximación son dos procesos presentes en los diferentes pensamientos. Ellas son elementos fundamentales en la construcción de los conceptos, procesos y procedimientos relativos a cada pensamiento, principalmente al numérico, al métrico y al aleatorio; llaman la atención sobre el carácter inexacto e incompleto de muchos de los resultados de las matemáticas y de otras ciencias, y ayudan a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares. De otra parte, muestran que en la mayoría de las situaciones cotidianas lo que se necesita es tener una buena estimación del rango de magnitud de un resultado y no tanto un resultado exacto.

- El tratamiento de los conceptos relativos a la medida de magnitudes compuestas a partir de las relaciones funcionales con respecto a las magnitudes fundamentales que las componen hace que conceptos como el de área, volumen, velocidad, aceleración, densidad, etc, puedan entenderse como funciones de otras magnitudes más simples. Igualmente, esta aproximación hace que los conceptos relativos al pensamiento métrico se relacionen de manera directa con el numérico y sirvan de puente para el estudio de las disciplinas científicas naturales y sociales.

- El tratamiento de las situaciones que involucran fenómenos estocásticos hace necesario el recurso a conceptos relacionados con el pensamiento variacional, al igual que el recurso a los conceptos numéricos, en tanto que se deben identificar variables, determinar su comportamiento a lo largo de su posible conjunto de valores, discriminar entre las variables independientes y las dependientes, y determinar, dentro de las posibilidades del fenómeno, la distribución de las variables independientes para predecir el posible comportamiento de las variables dependientes para distintos rangos de valores de las dependientes.

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS RESUELTOS

A continuación se presentan cinco problemas resueltos y diez problemas propuestos por cada componente en matemáticas.

3.1. componente Numérico- Variacional

1. Cierto número tiene la propiedad de que si se suman su mitad más su tercera parte, se obtiene una unidad más que si se hubieran sumado su cuarta parte más su quinta parte. ¿Cuál es?

Resolución

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos

Mitad: dividir por dos
Tercio o tercera parte: dividir por tres
Curta parte: dividir por cuatro
Quinta parte: dividir por cinco

solución de ecuaciones lineales

Entender el problema

consideremos x el número buscado

mitad del número: $\frac{x}{2}$
tercera parte del número: $\frac{x}{3}$

Cuarta parte: $\frac{x}{4}$
Quinta parte: $\frac{x}{5}$

El problema pide encontrar un número que satisface la siguientes condición:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$$

Configurar un plan

desarrollar la ecuación lineal

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$$

Ejecutar el plan

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}+\frac{x}{3}&=1+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\\
\frac{5}{6}x&=1+x\frac{9}{20}\\
\frac{5}{6}x-x\frac{9}{20}&=1\\
\frac{23}{60}x&=1\\
x&=\frac{60}{23}
\end{aligned}$$

Solución: El número buscado es $\frac{60}{23}$

Mirar hacia atrás

El número $\frac{60}{23}$ debe satisfacer la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}+\frac{x}{3}&=1+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\\
\frac{60}{23}\cdot\frac{1}{2}+\frac{60}{23}\cdot\frac{1}{3}&=1+\frac{60}{23}\cdot\frac{1}{4}+\frac{60}{23}\cdot\frac{1}{5}\\
\frac{30}{23}+\frac{20}{23}&=1+\frac{15}{23}+\frac{12}{23}\\
\frac{50}{23}&=1+\frac{27}{23}\\
\frac{50}{23}&=\frac{23}{23}+\frac{27}{23}\\
\frac{50}{23}&=\frac{50}{23}
\end{aligned}$$

2. Si escribimos todos los números enteros consecutivos, sin ninguna separación entre ellos, a partir del 1 y hasta el 2002, obtenemos un número de muchas cifras: 1234567891011121314151617819...20012002 ¿Cuántas cifras tiene ese número?

Entender el problema

El problema pide encontrar la cantidad de cifras del número
1234567891011121314151617819...20012002 formado por números consecutivos de una, dos, tres y cuatro cifras.

Configurar un plan

Para encontrar la cantidad de cifras del número
1234567891011121314151617819...20012002 debemos contar las cifras de los números de una, dos, tres y cuatro cifras que lo conforman.

Ejecutar el plan

Números de 1 cifra, aquellos que están entre 1-9 (incluyendo ambos): 9
Números de dos cifras, aquellos que están entre 10 y 99 (incluyendo ambos): 90
Números de tres cifras, aquellos que están entre 100 y 999 (incluyendo ambos): 900
Números de dos cifras, aquellos que están entre 1000 y 2002 (incluyendo ambos): 1003

Ahora procedemos a contar las cifras:

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1003 \cdot 4 = 6901$$

Solución: el número 1234567891011121314151617819...20012002 tiene 6901 cifras.

Mirar hacia atrás

El problema se resolvió en forma correcta puesto que se contaros las cifras de cada uno de los números que conforman el número 1234567891011121314151617819...20012002

3. Anselmo es un pastor al que le gustan mucho las matemáticas y tiene entre 80 y 100 ovejas en su rebaño. Un día observándolo pensó que el número de ovejas que dormían era igual a los $\frac{7}{8}$ de las que no dormían. ¿Cuántas ovejas hay exactamente en el rebaño?

Entender el problema

Consideremos n el número de ovejas, x el número de ovejas que dormían e y ovejas que no dormían.

número de ovejas: $80 < n < 100$ también $x + y = n$ ovejas que dormían: $\frac{7}{8} \cdot y$

Configurar un plan

Se tiene dos ecuaciones con tres incógnitas y una inecuación,

$$x + y = n \tag{3.1}$$

$$x = \frac{7}{8}y \tag{3.2}$$

$$80 \leq n \leq 100 \tag{3.3}$$

de las dos ecuaciones (3.1) y (3.2)obtener una ecuación con dos incógnitas y buscamos el valor de n que además satisface la inecuación (3.3).

Ejecutar el plan

de (3,1) y (3,2)

$$\frac{7}{8}y + y = n$$

$$\frac{15}{8}y = n$$

$$y = \frac{8}{15}n$$

Como y y n son enteros positivos y $80 \leq n \leq 100$, entonces 15 divide a n. El único numero que satisface es 90.

Solución: en el rebaño hay 90 ovejas.

Mirar hacia atrás

tenemos

$$y = \frac{8}{15} \cdot 90$$

$$y = 48$$

reemplazando y en () $x = 42$, así en el rebaño hay 90 ovejas de las cuales 42 dormían y 48 no dormían.

4. Compré cierto número de ejemplares de un libro por 150 magios; si cada ejemplar hubiera costado un magio más, hubiera comprado cinco libros menos con el mismo dinero ¿Cuántos eran y a qué precio?

Resolución

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos

solución de ecuaciones lineales.

Entender el problema

Las variables del problema son:
el número de libros, que llamaremos x y el precio de un libro, que llamaremos y.

El problema pide encontrar las variables x e y.

El problema proporciona los siguientes datos:

cierto número de ejemplares costaron 150 magios es decir $xy = 150$ Si el precio de cada libro hubiese sido un magio mas $(x+1)$ se hubiese comprado 5 magios menos $(y-5)$ es decir $(x+1)(y-5) = 150$

Configurar un plan

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas

$$xy = 150 \tag{3.4}$$
$$(x+1)(y-5) = 150 \tag{3.5}$$

podemos resolver el problema igualando las dos ecuaciones

Ejecutar el plan

$$\begin{aligned}
(x-5)(y+1) &= xy \\
xy + x - 5y - 5 &= xy \\
\frac{150}{y} - 5y - 5 &= 0 \\
y^2 + y - 30 &= 0 \\
(y+6)(y-5) &= 0
\end{aligned}$$

Luego $y = 5$ y $x = 30$.

Solución: fueron 30 libros a 5 magios cada uno.

Mirar hacia atrás

$y=5$ y $x=30$ deben satisfacer en las ecuaciones $xy=150$ y $(x+1)(y-5)=150$.

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ 5\cdot 30 &= 150 \\ 150 &= 150 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} (x+1)(y-5) &= 150 \\ (5+1)(30-5) &= 150 \\ 6\cdot 25 &= 150 \\ 150 &= 150 \end{aligned}$$

5. Mauricio tiene un terreno grande que quiere dividir en dos partes. Para esto construyó un muro. En el primer día de construcción usó $\frac{3}{8}$ de los ladrillos que tenía; en el segundo día $\frac{1}{6}$ de los ladrillos que tenía. Entonces contó los adobes que le quedaban para usar en el tercer día y eran 55. ¿Cuántos ladrillos tenía cuando comenzó a construir el muro?

Resolución

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos

solución de ecuaciones lineales con fraccionarios.

Entender el problema

El problema nos pide determinar el número de ladrillos utilizados para construir el muro

En el primer día utiliza $\frac{3}{8}$
En el segundo día utiliza $\frac{1}{6}$
Le quedan 55 ladrillos para el tercer día.

Configurar un plan

Utilizar una ecuación.

Total de adobes: x
ladrillos utilizados en el primer día: $\frac{3}{8}x$
ladrillos utilizados en el segundo día: $\frac{1}{6}x$

ladrillos utilizados en el tercer día: 55

El total de ladrillos es igual a la suma de los ladrillos utilizados cada día:

$$x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{6}x + 55$$

Ejecutar el plan

$$\begin{aligned}
x =& \frac{3}{8}x + \frac{1}{6}x + 55 \\
x - \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}x =& 55 \\
\left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right)x =& 55 \\
\frac{24 - 9 - 4}{24}x =& 55 \\
\frac{11}{24}x =& 55 \\
x =& 55 \cdot \frac{24}{11} \\
x =& 120
\end{aligned}$$

Solución se utilizaron 120 ladrillos para construir el muro.

Mirar hacia atrás

Reemplazamos el valor de x

$$\begin{aligned}
x =& \frac{3}{8}x + \frac{1}{6}x + 55 \\
120 =& \frac{3}{8}120 + \frac{1}{6}120 + 55 \\
120 =& \frac{360}{8} + \frac{120}{6} + 55 \\
120 =& 45 + 20 + 55 \\
120 =& 120
\end{aligned}$$

3.1.1. Problemas propuestos

1. En un curso, el 60 % son antioqueños; el 25 % son costeños y los 6 restantes son del Valle y Risaralda. ¿Cuál es el total de alumnos?

2. Un comerciante mezcla un tipo de té que vende a \$7450 la libra con otro tipo que vende a \$7050 la libra, para producir 80 libras de una mezcla que vende a \$7200 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en su mezcla?

3. Si un cordel se corta en trozos de 20 cm, sobra un trozo de 15 cm. Si la longitud del cordel hubiese sido el triple de la original, ¿habría sobrado algún trozo?. En caso afirmativo, ¿cuánto mediría ese trozo sobrante?

4. En un edificio de apartamentos, la mitad de las ventanas tiene cortinas; la cuarta parte de las ventanas tiene maceteros y la sexta parte tiene cortinas y maceteros. Hay 375 ventanas que no tiene cortinas ni maceteros. Además se sabe que $\frac{1}{5}$ de los apartamentos tiene 5 ventanas, $\frac{2}{5}$ de los apartamentos tiene 3 ventanas y los demás tienen 2 ventanas.

   ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

5. Juan nació antes del año 2000. El 25 de Agosto del 2001 cumplió tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento.
   Determina su fecha de nacimiento.

6. Un comerciante mezcla un tipo de té que vende a \$7450 la libra con otro tipo que vende a \$7050 la libra, para producir 80 libras de una mezcla que vende a \$7200 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en su mezcla?

7. Hallar el menor número natural que satisface las siguientes tres condiciones simultáneamente: tiene resto 24 en la división por 57; tiene resto 73 en la división por 106 y tiene resto 126 en la división por 159.

8. Mauricio, el bisabuelo de José, no es ciertamente centenario, pero es de edad muy avanzada. Si se sabe que el año anterior su edad era un múltiplo de 8, y que el año próximo es múltiplo de 7. ¿Cuál es la edad de Mauricio?

9. Un joyero tiene 5 anillos, cada uno pesa 18 gramos y son de una aleación de 10 porciento de plata y 90 porciento de oro. Decide fundir los anillos y añadir suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75 porciento ¿Cuánta plata debe añadir?

3.2. Componente Geométrico- Métrico

Un pastor construye en un prado una cerca con forma de hexágono regular de $6m$ de lado para que paste una oveja. El pastor ata la oveja cada día a un vértice distinto de la cerca con una cuerda de $3m$ de longitud y el séptimo día la ata al centro con la misma cuerda. La oveja come cada día todo el pasto que está a su alcance. ¿Cuál es la superficie del cercado que queda sin pastar?

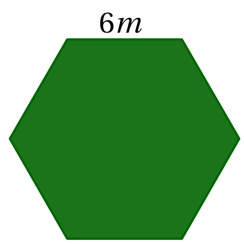
Resolución

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos

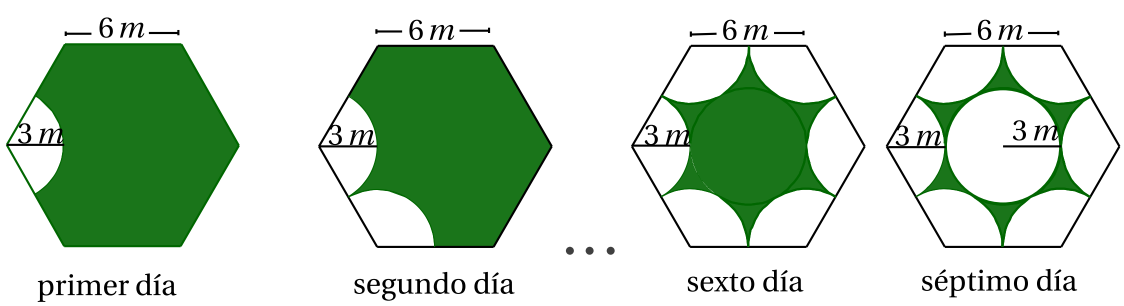
El área de un círculo de radio r es $A = r^2\pi$
EL área de un hexágono regular de lado l es $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$
Los ángulos internos de un hexágono regular son congruentes y miden 120°

Entender el problema

La siguiente figura corresponde al prado construido por el obrero para que paste su oveja

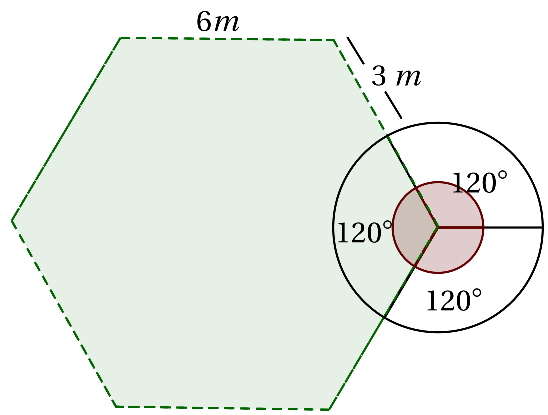


La oveja en los seis primeros días pasta seis sectores circulares de radio $3cm$ y el séptimo día pasta una región circular de radio $3cm$ como lo muestra la siguiente figura



El problema pide determinar la región sombrada en la última figura que corresponde al séptimo día que lleva la oveja pastando.

Cada sector circular tiene un ángulo de 120° por ello cada uno corresponde a un tercio del área de un círculo de radio $3m$



$$120° + 120° + 120° = 360°$$

Cada sector circular corresponde a un tercio de un círculo de radio 3m, luego los seis sectores pastados en los seis primeros días corresponden a 2 círculos de radio 3m, como en el séptimo día pasta una región circular de radio 3m entonces el área total pastada corresponde al área de tres círculos de radio 2m.

Configurar un plan

Para hallar el área de la región sombreada se debe calcular el área de tres círculos de radio 3 cm y restarlo al área del hexágono.

Ejecutar el plan

Consideremos A el área buscado, A_1 el área del hexágono y A_2 el área de un círculo de radio 3 cm así $A = A_1 - 3A_2$. Hallamos A_1

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$$
$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 6^2$$
$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 36$$
$$A_1 = 3\sqrt{3} \cdot 18$$
$$A_1 = 54\sqrt{3}$$

ahora hallamos A_2

$$A_2 = r^2\pi$$
$$A_2 = 3^2\pi$$
$$A_2 = 9\pi$$

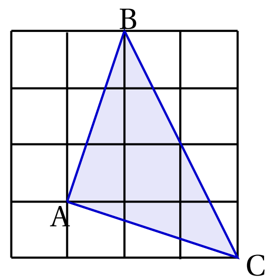
Solución: el área buscada es $A = A_1 - 3A_2 \ = \ 54\sqrt{3} - 3 \cdot 9\pi \ \simeq \ 8,71 \ m^2$

Mirar hacia atrás

La suma de las áreas de las regiones pastadas por la oveja y las no pastadas es igual al área del hexágono.

$$A_1 \simeq 3A_2 + 8,7154\sqrt{3} \simeq 3 \cdot 9\pi + 8,7193,53 \simeq 27\pi + 8,7193,53 \simeq 93,53$$

2. Tomando como unidad de superficie uno de los cuadrados pequeños, calcular el área del triángulo ABC.



El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos:

El área de un rectángulo de base b y altura h es $A = b.h$

El área de un triángulo de base b y altura h es $A = \dfrac{b.h}{2}$

Entender el problema

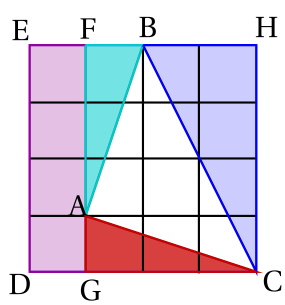
El problema nos pide hallar el área de un triángulo del cual no conocemos sus dimensiones

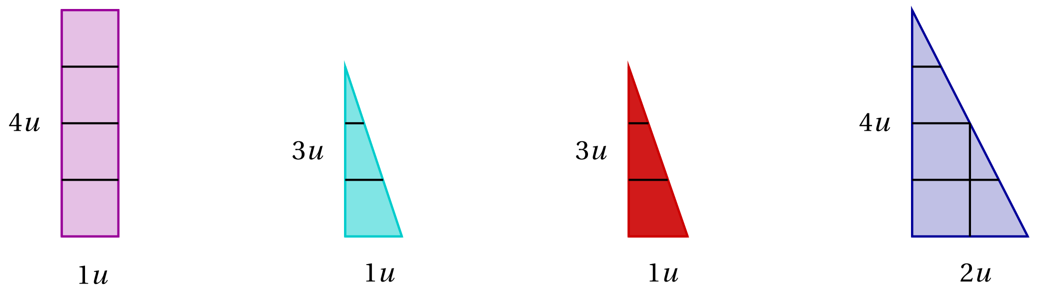
Configurar un plan

podemos hallar el área de la región externa a la región del triángulo y restarla al área del cuadrado de lado 4 unidades

Ejecutar el plan

Descomponemos la región del cuadrado en sub-regiones





$A_1 = 1u \cdot 4u = 4u^2$ $\quad A_2 = \dfrac{1u \cdot 3u}{2} = \dfrac{3u^2}{2}$ $\quad A_3 = \dfrac{1u \cdot 3u}{2} = \dfrac{3u^2}{2}$ $\quad A_4 = \dfrac{2u \cdot 4u}{2} = 4u$

Luego
Área exterior al triángulo $ABC = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} + 4 = 11u^2$

Solución: área del triángulo $ABC = 16 - 11 = 5u^2$

Mirar hacia atrás

La suma de las áreas de las sub-regiones del cuadrado debe ser igual al $16u^2$, si el área del triángulo ABC es A entonces

$$\begin{aligned} A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 16 \\ 5 + 4 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4 &= 16 \\ 13 + 2\frac{3}{2} &= 16 \\ 13 + 3 &= 16 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

3. Un hombre deja un terreno de herencia sus tres hijos y esposa, repartido en la siguiente forma: la mitad para el hijo mayor, la cuarta parte para el hijo mediano, la octava parte para el hijo menor y lo que sobre para la esposa. ¿Qué parte del terreno le corresponde a la esposa?

Resolución

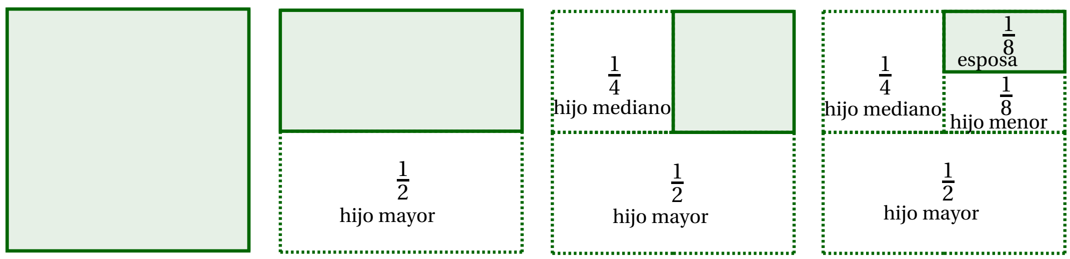
Entender el problema

El problemas pide determinar la fracción del terreno que le corresponde a la esposa de un hombre, quien le deja el terreno que sobra luego de repartirles a sus tres hijos la mitad, la cuarta parte y la octava parte de el.

Configurar un plan

Realizar una figura que muestre las divisiones del terreno, para observar que parte del terreno le corresponde a la esposa. Para facilitar las divisiones del terreno consideremos terreno en forma de cuadrado.

Ejecutar el plan



La región sombreada corresponde a la fracción de terreno que va quedando en cada repartición.

Solución: a la esposa le corresponde $\frac{1}{8}$ del terreno.

Mirar hacia atrás

La suma de las fracciones que les correspondió a los tres hijo y a la esposa debe ser igual a uno

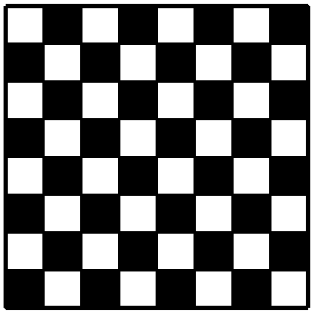
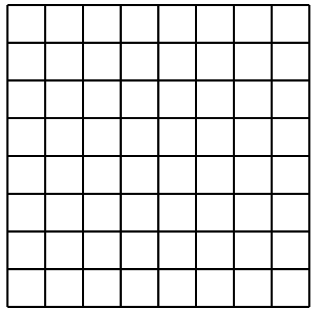
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} &= 1 \\ \frac{4+2+1+1}{8} &= 1 \\ \frac{8}{8} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

4. ¿Cuántos cuadrados e pueden contar en tablero de ajedrez?

Resolución

Entender el problema

El problema nos pide contar los cuadrados contenido en un tablero de ajedrez es decir un cuadrado 8x8 en la siguiente figura

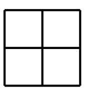
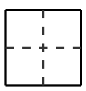
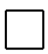
Configurar un plan

Contar los cuadrados contenidos en tableros con menor dimensión y encontrar una relación o patrón que nos permita determinar por inducción los cuadrados contenidos en un tablero 8x8.

Ejecutar el plan

Considermos un tablero 2x2, 3x3 y 4x4 y observemos

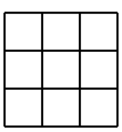
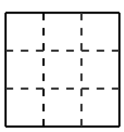
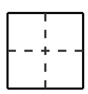
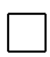
tablero 2x2

  =1  =4

se tiene 1 cuadrado 2x2 y 4 cuadrados 1x1

total de cuadrados $= 1+4 = 1^2+2^2 = 5$

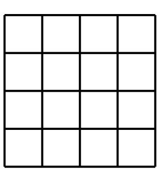
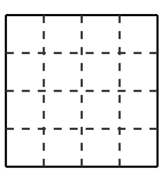
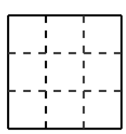
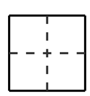
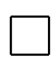
tablero 3x3

  =1  =4  =9

se tiene 1 cuadrado 3x3 , 4 cuadrados 2x2 y 9 cuadrados 1x1

total de cuadrados $= 1+4+9 = 1^2+2^2+3^2 = 15$

tablero 4x4

  =1  =4  =9  =16

se tiene 1 cuadrado 4x4 , 4 cuadrados 3x3, 9 cuadrados 2x2 y 16 cuadrados 1x1

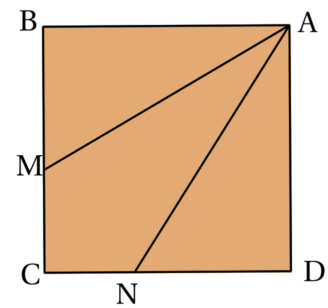
total de cuadrados $= 1+4+9+16 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$

realicemos una tabla de los resultados obtenido y hacemos inducción para resolver el problema

Tablero	No. cuadados
1x1	$1^2 = 1$
2x2	$1^2 + 2^2 = 5$
3x3	$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
4x4	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
$\vdots$	$\vdots$
8x8	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$

Solución: En el tablero de ajedrez podemos contar 204 cuadrados

5. Tres hermanos han heredado un campo cuadrado que han dividido como indica la siguiente figura. En A existe un pozo que todos quieren usar. ¿Dónde deben estar M y N para que las tres superficies ABM, $AMCN$ y AND tengan igual área?



Resolución

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos:

Área de un cuadrado de lado l: $A = l^2$
área de un triángulo de base b y de altura h: $\dfrac{b \cdot h}{2}$

Entender el problema

El problema pide ubicar determinar la ubicación de dos puntos M y N las cuales determinan un de los lados de los triángulos

Configurar un plan

consideremos l la medida del lado del cuadrado y $\overline{BM} = x$. Como las áreas de los triángulos ABM , AND equivalen cada una a un tercio del área del cuadrado, tenemos la ecuación $\dfrac{x \cdot l}{2} = \dfrac{l^2}{3}$, resolviendo esta ecuación solucionamos el problema.

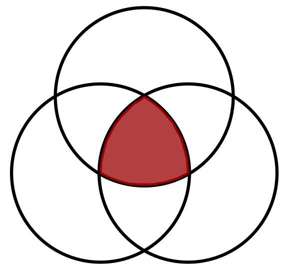
Ejecutar el plan

$$\frac{x \cdot l}{2} = \frac{l^2}{3}$$
$$x = \frac{2l}{3}$$

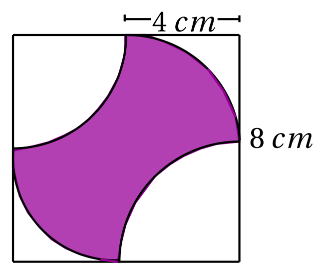
Solución: M y N deben estar a $\frac{2l}{3}$ de B y de D respectivamente.

3.2.1. Problemas propuestos

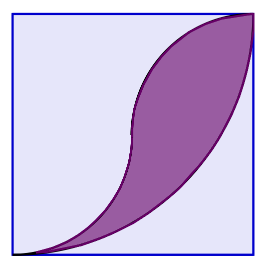
1. Las tres circunferencias de la siguiente figura son secantes entre sí, de manera que cada una tiene su centro en uno de los puntos de corte de las otras dos.
Las tres circunferencias tienen 5 cm de radio.
Calcula el perímetro exterior a les tres circunferencias.
Calcula el área de la región sombreada central.



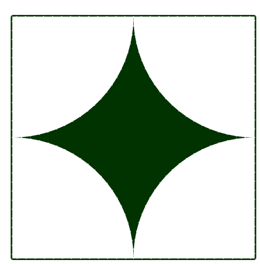
2. Determina el perímetro y el área de la figura sombreada que esta inscrita en el cuadrado de lado 8 cm.



3. Determinar el área y el perímetro de la figura sombreada. Si el lado del cuadrado mide 10 cm.



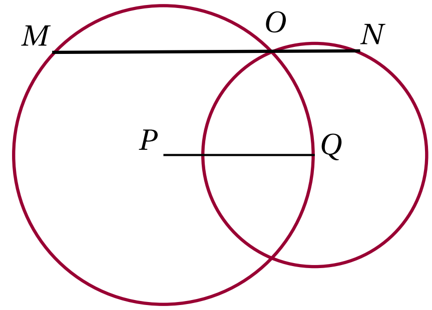
4. El área de la región sombreada es 4 m^2 ¿cuántos metros mide el lado del cuadrado?



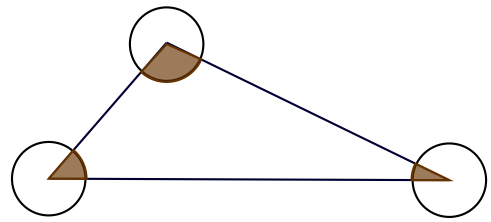
5. Tenemos un cuadrilátero con los cuatro lados diferentes, pero las diagonales son perpendiculares y miden 8 y 5 metros respectivamente ¿cuánto valdrá su área?

6.Una oveja manchega está atada a la esquina de una casa de labor rodeada de pasto. La casa mide 10 m de larga y 5 m de ancha y la longitud de la cuerda es de 4 m ¿cuál es la superficie máxima que tiene para pastar? ¿y si la cuerda fuese de 12 metros?

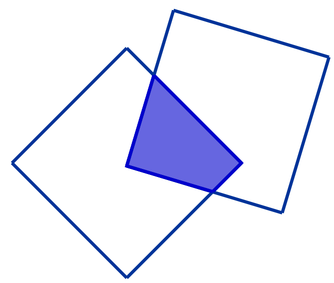
7. Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 3 centímetros. Por uno de los puntos (O) donde se cortas las circunferencias trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide MN?



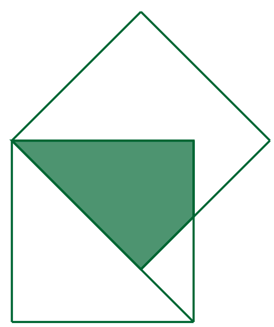
8. tenemos tres círculos de radio 1 m. Uniendo los centros obtenemos un triángulo, como lo muestra la figura ¿cuánto mide el área sombreada?



9. Dos cuadrados congruentes se sitúan como indica la figura de modo que el centro de uno es vértice del otro. ¿Cuántos metros cuadrados corresponden a la región común?



10. En la figura se muestran dos cuadrados de lado 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



3.3. Componente Aleatorios

1. Blanca Nieves quiso calcular la estatura media de los siete enanitos. Así que un día ella los midió, calculó su estatura promedio y obtuvo 112.3 cm. Luego Doc le informó que lo había pasado por alto y que sin darse cuenta había medido a Dopey dos veces. Si Doc mide 3 cm más que Dopey, ¿cuál es la estatura promedio de los siete enanitos?

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos:

media aritmética o Promedio ($\overline{X}$): es la suma de todos los valores numéricos dividida entre el número de valores . La media aritmética se calcula por medio de la siguiente fórmula

$$\bar{X} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

x_i: valor numérico (datos)
N: total de valores (datos)

Entender el problema

nos pide determinar el promedio correcto donde uno de los datos

Configurar un plan

Para hallar el promedio correcto se debe obtener la suma total de las estaturas y dividirla por 7.

La suma total de estaturas se puede obtener hallando la su suma total errónea y sumarle 3 cm.
Ejecutar el plan

Blanca Nieves midió 7 enanitos y obtuvo un promedio de 112.3 cm

$$\bar{X} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{N}$$
$$112,3 = \frac{\Sigma_{i=1}^{7} x_i}{7}$$

luego la suma de las 7 estaturas es

$$7 \cdot 112,3 = \Sigma_{i=1}^{7} x_i$$
$$786,1 = \Sigma_{i=1}^{7} x_i$$

la suma total de sus estaturas es en realidad 786,1 + 3 = 789,1 cm y su promedio es $\frac{789,1}{7} = 112,7\ cm$. **Solución**: el promedio de estatura es 112,7 cm

2. Disponemos de una zona en forma de hexágono regular de 30m de lado, en cuyos vértices existen piscinas con forma de sector circular de 10m de radio. Si un paracaidistas cayera aleatoriamente dentro de la zona, ¿cuál es la probabilidad de que no caiga en el agua?

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos:

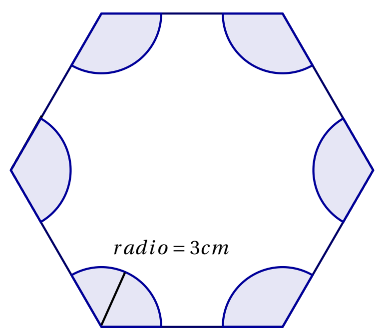
Probabilidad: dado un experimento aleatorio con un espacio de n sucesos elementales, la probabilidad del suceso X, que designamos mediante $P(X)$, es la razón entre la cantidad de casos favorables para la ocurrencia de X y la de casos posibles. En otros términos

$$P(X) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

EL área de un hexágono regular de lado l es $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$
Los ángulos internos de un hexágono regular son congruentes y miden 120°
área de un círculo de radio r es $A = r^2 \cdot \pi$

Entender el problema

El problema se refiere a una zona como la siguiente figura



El área de cada piscina o sector circular es un tercio de un círculo de radio $10m$ así las seis piscinas tienen un área equivalente a dos círculos de $10m$ de radio.

Configurar un plan

Para determinar la probabilidad de que el paracaidista no caiga en el agua, se debe hallar el área del hexágono regular y restarle el área que corresponde a las piscinas luego dividir por el área del hexágono

Ejecutar el plan

Área del hexágono= $\frac{3\sqrt{3}}{2}30^2 = 1350\sqrt{3}m$

Área de un sector circular= $\frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}m$

Área de los 6 sectores circulares= $6\frac{100\pi}{3} = 200\pi m$

la probabilidad de que el paracaidista no caiga en el agua es

$$\frac{\text{Área del hexágono - Área de los 6 sectores}}{\text{Área del hexágono}} = \frac{1350\sqrt{3} - 200\pi}{1350\sqrt{3}m} = 0,73$$

3. Con las letras de la palabra **libro**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

El estudiante que se enfrente a este problema debe tener en cuenta los siguientes preconceptos:

Principio Multiplicativo

Si un evento, hecho o suceso se realiza de “n” formas distintas y otro evento, independiente del anterior, se realiza de “r” formas distintas entonces, los dos eventos se realizan, conjuntamente, de “n” formas distintas.

Entender el problema

Se debe formar palabras de 5 letras con las letras de la palabra “libro”´ y con la condición que la primera letra debe una vocal.

Configurar un plan

Las siguientes son las casillas para las letras que se van a formar

una manera de determinar el número de palabras formadas es analizando las letras que se pueden colocar en cada casilla y aplicar el principio multiplicativo.

Ejecutar el plan

Teniendo en cuenta las condiciones del problema analizamos que letras se pueden colocar en cada casilla.

Casilla 1: Puede llenarse de 2 formas (I e O)
Casilla 2: Puede llenarse de 4 formas (Todas las letras menos I e O)
Casilla 3: Puede llenarse de 3 formas (Todas las letras menos I e O y la de 2)
Casilla 4: Puede llenarse de 2 formas (Todas las letras menos I e O, la de 2 y la de 3)
Casilla 5: Puede llenarse de 1 formas (Todas las letras menos I e O, la de 2, la de 3 y la de 4)

La siguiente figura muestra las formas en que puede llenare cada casilla

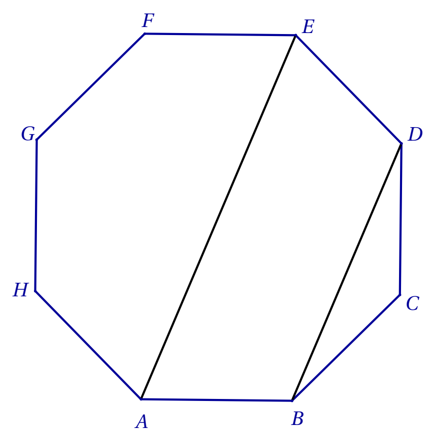
2	4	3	2	1

Solución la cantidad de palabras que se pueden formar son: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ palabras.

4. Problema 30. Sean A, B, C, D, E, F, G, H los ocho vértices consecutivos de un octágono convexo. De los vértices C, D, E, F, G, H elegimos uno de ellos al azar y trazamos el segmento que lo conecta con el vértice A. De nuevo elegimos un vértice del mismo grupo de seis vértices anterior, y trazamos el segmento que lo une con el vértice B. ¿ Cuál es la probabilidad de que estos dos segmentos corten al octágono en exactamente tres regiones?

Entender el problema

El problema nos pide encontrar la probabilidad de que al escoger dos vértices (C, D, E, F, G, H) donde uno de ellos se una por un segmento a el vértice A y el otro a el vértice B dividan al octágono en tres partes, como lo muestra la siguiente figura



Para que el octágono se divida exactamente en tres partes, las diagonales no deben cortarsen.

Configurar un plan

Determinar cuales son las parejas de vértices que cumplen con la condición y dividirlo por el total de parejas de vértices que e pueden formar

Ejecutar el plan

Debemos tener en cuenta que no se pueden formar diagonales con los vértices H y A ni tampoco con B y C puesto que son vértices consecutivos y la unión de ellos forma un lado.

Para que el octágono se divida exactamente en tres partes, las diagonales no deben cortarsen, para que estas diagonales no se corten la pareja de vértices deben ser de orden anti-alfabético como los vértices escogidos en la figura anterior (E,D)

la pareja de vértices escogidos pueden ser el mismo vértice e decir las parejas (G,G), (F,F), (E,E), (D,D)

las parejas que cumplen las condiciones son diez: (G,G), (F,F), (E,E), (D,D), (G,F), (F,E), (E,D), (G,E), (F,D), (E,C).
luego la probabilidad de escoger dos vértices que cumplan las condiciones es $\frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0,27$

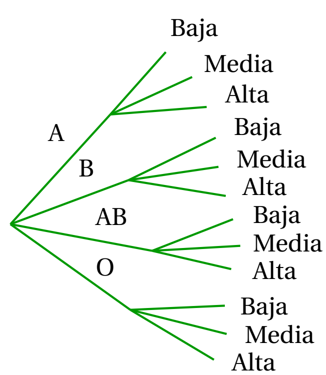
7. En un estudio médico se clasifica los pacientes de acuerdo con su tipo de sangre, ya sea A; B; AB u O, y también de acuerdo con su presión sanguínea, ya sea baja, normal o alta. ¿De cuántas maneras puede calificar al paciente?

Configurar un plan

representar las maneras de calificar al paciente por un diagrama de árbol.

Ejecutar el plan

Se puede calificar al paciente de 12 maneras como lo muestra el diagrama de árbol.



contando las ramas terminales obtenemos 12 formas de calificar al paciente.

3.3.1. Problemas Propuestos

Las preguntas 1 a 3 se contestan con base en la siguiente información

Un número palíndromo es un número entero que al leerse de izquierda a derecha o de derecha a izquierda resulta ser el mismo. Por ejemplo: 187781

1. Para determinar la cantidad de números palíndromos de dos cifras se debe multiplicar

A. la cantidad de números de 1 a 9 por uno

B. dos veces la cantidad de números dígitos

C. la cantidad de números dígitos del 1 al 9 por dos

D. dos veces la cantidad de números dígitos del 1 al 9

2. Si la probabilidad de que una persona escriba un número palíndromo de tres cifras iguales es $\frac{1}{10}$, entonces, la probabilidad de que una persona escriba un número palíndromo de cuatro cifras iguales

A. no cambia, porque la cantidad de números palíndromos de cuatro cifras iguales, es la misma que en de tres cifras

B. no cambia porque la cantidad de números paliíndromos de tres cifras iguales es la misma cantidad de números palíndromos de cuatro cifras iguales

C. cambia, porque aumenta la cantidad de números palíndromos de cuatro cifras iguales

D. cambia, porque aumenta la cantidad de números palíndromos de cuatro cifras

3. Si la probabilidad de que un número palíndromo de tres cifras inicie en un número par es igual a $\frac{4}{9}$, entonces, la probabilidad de que inicie en un número impar es igual a

A. la razón entre $\frac{4}{9}$ y uno

B. la diferencia entre uno y $\frac{4}{9}$

C. la razón entre $\frac{4}{9}$ y la cantidad de números impares

D. la diferencia entre la cantidad de números impares y de números pares

4. Si se responden al azar cuatro preguntas con cinco opciones cada una, ¿cuál es la probabilidad de acertar a todas?

5. He realizado un examen a los 35 estudiantes de la clase y ha resultado que la media de las calificaciones de las chicas es 6 y la de los chicos es 4,75. Sabiendo que la media de todos los estudiantes de la clase es de 5,25 ¿cuántas chicas hay en la clase?

Quieren publicar un diccionario en cuatro tomos iguales (con el mismo número de palabras) y ordenado según nuestro alfabeto. ¿Cuál será la primera palabra de cada tomo?

6. Disponemos de tres ruletas A, B y C cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales con distintos puntos:
A: 7 sectores con la cifra 6 y 25 sectores con la cifra 3.

B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.
C: 25 sectores con la cifra 4 y 7 sectores con la cifra 1.
Dos jugadores seleccionan una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con su ruleta. ¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, el primero o el segundo?

7. Juan y Sofía apuestan una cena. Para ello un amigo de ambos ha preparado 6 sobres, uno de los cuales contiene una tarjeta negra y los otros cinco, una tarjeta verde cada uno. Empieza Juan eligiendo un sobre; si dentro está la tarjeta negra, pagará la cena. En caso contrario, el sobre elegido por Juan se retira y ahora es Sofía la que elige uno de los 5 sobres restantes. Si el elegido tiene la tarjeta negra, Sofía paga la cena. En caso contrario, se retira el sobre y continúa el juego en las mismas condiciones, hasta que uno de los dos elija el sobre con la tarjeta negra y sea el perdedor.
¿Quién de los dos tiene más probabilidad de ganar?
¿Ocurriría lo mismo si se jugara con 5 sobres y 1 tarjeta negra?

8. Para adjudicar un premio entre tres estudiantes se prepara una bolsa con dos bolas negras y una bola blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. quien saque la bola blanca gana.

¿Quién lleva más ventaja: el primero, el segundo o el tercero?

9. En el planeta WI utilizan un alfabeto con las 27 letras españolas. Cada palabra está formada por dos letras: una consonante y una vocal (Y siempre es consonante). ¿Cuántas palabras distintas tienen en el planeta WI?

10. Dos equipos de baloncesto se enfrentan en una final al mejor de tres partidos. La estadística de los enfrentamientos anteriores señala que el equipo A ha ganado el 60 % de los partidos y el equipo B lleva ganados el 40 %. ¿Cuál es la probabilidad de que la final deba decidirse en un tercer partido?

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos tratado de mostrar la importancia que tiene la resolución de problemas en una disciplina como las Matemáticas los inconvenientes que presenta. Entre estos inconvenientes, queremos destacar que, en la actualidad, en las aulas de bachillerato, debido a las malas bases que han optenido en su primaria, nos encontramos con una disparidad de niveles académicos que hace difícil abordar la resolución de problemas. Los hábitos de los alumnos, en cuanto a la resolución mecánica de ejercicios, les lleva a no disfrutar de los retos intelectuales, de forma que para ellos pensar es malgastar el tiempo. Sus estructuras cognitivas no están ordenadas jerárquicamente y sus niveles de conocimiento no están bien integrados, de modo que no hay fácil acceso de un nivel a otro.

Los alumnos, si logran plantear el problema, normalmente conocen la estrategia a utilizar para su resolución. Sin embargo, pueden necesitar de otros conocimientos que han olvidado o no vieron en su primaria.

Para abordar la resolución de un problema, en primer lugar, el profesor debe enfatizar la importancia de la lectura cuidadosa y prestar atención al vocabulario específico, realizando una lectura en clase y discutiendo las palabras y frases que no entiendan los alumnos. Debe emplear discusiones de la clase para resaltar la trascendencia de la comprensión del problema y para comentar las posibles estrategias de resolución de problemas.

Durante la resolución propiamente dicha, el profesor debe observar y cuestionar a los alumnos en qué momento de la resolución se encuentran, y proporcionar sugerencias conforme sean necesarias, ayudando a los alumnos a superar los bloqueos. Una vez que los alumnos encuentren la solución, debe pedir a los que obtienen una solución que respondan a la pregunta planteada, para obligarles con ello a repasar todo el procedimiento viendo si tiene sentido. A los que terminan antes, el profesor debe desafiarlos a generalizar.

El profesor debe mostrar y discutir soluciones para que se vean distintas estrategias, relacionar con otros problemas ya vistos anteriormente o con problemas más generales.

Finalmente, nos gustaría resaltar que la resolución de problemas es, a nuestro juicio, muy importante, ya que pone el énfasis más en el proceso de resolución que en el producto de la misma. No nos interesa que el alumno aprenda una técnica concreta si no sabe a qué situación aplicarla. Queremos incidir en que esto es sólo una muestra de cómo puede utilizarse en las clases prácticas la resolución de problemas para poder conseguir que los alumnos aborden los problemas. El dominios específicos requiere del conocimiento de la disciplina involucrada y nuestra docencia de Matemáticas se concentra en los primeros cursos, en los que los alumnos aún no poseen los conocimientos basicos necesarios para abordar problemas más complejos y asi tener una clase divertida amena y bien aprovechada.

BIBLIOGRAFÍA

[1] GEORGE POLYA. *Como Plantear y Resolver Problemas*, Editorial Trillas, Princeton, 1945

[2] GUZMÃN M. *Aventuras Matemáticas*, Labor, Barcelona 1988

[3] SHOENFELD A. H. *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York 1985

[4] DÍAZ NAVARRO DÍAZ. *Números Reales y Fundamentos de Algebra*, CONARE Proyecto RAMA,2007

[5] ICFES *Orientaciones para el Examen de Ensayo de Educación Media ICFES PRE SABER 11*°, Bogotá, D.C., segunda edición, febrero de 2011

[6] NIVEN IVAN. *Maxima and Minima Without Calculus*, Mathematical Assn of America, Washington D.C. 19781.

[7] MIGUEL ANTONIO ESTEBAN. *Problemas IX y X Olimpiadas Matemáticas (EGB y ESO) 1988-1999*, Junta de Extremadura, Mérida, 2002

[8] PÉREZ MIGUEL A. *Una Historia De Las Matemáticas: Retos y Conquistas Através de sus Personajes Tomo II*, Vision Libros, 2002

[9] BLANCO JOSÉ LORENZO. *La Resolución de Problemas. Una Revisión Teórica* Revista Suma 21. 1996