Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

“Desigualdades y Regla de Cramer en Espacios Vectoriales”

Erika Patricia Capera Bonilla
Edinson Fernando Hernández Santiago

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

“Desigualdades y Regla de Cramer en Espacios Vectoriales”

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Erika Patricia Capera Bonilla
Código: 2007165739
Edinson Fernando Hernández Santiago
Código: 2007167367

Asesor:
Msc. Augusto Silva Silva

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Agosto de 2012

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darnos la oportunidad de realizar nuestros sueños.

A nuestro Angel y a nuestros padres, por ser fuente de inspiración, apoyo, comprensión y amor.

A nuestra familia, sabemos que nuestra alegría es la de ustedes, entonces nuestros logros tambien son suyos.

A nuestros profesores, en especial a nuestro asesor Augusto Silva Silva, porque cada uno de ellos con sus palabras, conocimientos y consejos, guiaban nuestra formación a la excelencia y hacia ser profesionales íntegros.

Definitivamente el amor llena de color los momentos oscuros y te enseña lo maravilloso de poder compartir con alguien las alegrías, los triunfos y los sueños. Este logro se lo dedicamos a nuestro amor.

A nuestros compañeros de clase y a todas aquellas personas que pusieron su granito de arena durante todo este largo proceso, sinceramente gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado hace un estudio acerca de algunos temas centrales del Algebra Lineal como: los espacios vectoriales, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad triangular, los determinantes y la regla de Cramer.

El primer capítulo, Generalidades, hace referencia, en su primera parte, a la estructura de Espacio Vectorial, se establecen sus propiedades fundamentales y se presentan algunos ejemplos. La segunda parte del capítulo se ocupa de los espacios vectoriales con producto interno y normados.

El segundo capítulo hace un estudio de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, una de las más importantes del Algebra Lineal. De ésta desigualdad se presenta una prueba de tipo general y en algunos espacios vectoriales concretos se presentan pruebas particulares propias de cada uno. El capítulo incluye algunas aplicaciones de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

El tercer capítulo, Determinantes y regla de Cramer, es una invitación a la reflexión teórica y metodológica. En éste capítulo se presenta una definición general de determinante, se presentan, se demuestran y se ilustran las propiedades de los determinantes las cuales permiten establecer y justificar con rigor la Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Revisar los cimientos teóricos sobre los cuales se apoya la desigualdad Triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicadas a los espacios vectoriales.
- Realizar un conveniente y detallado estudio acerca de los determinantes y su aplicación para la solución de algunos sistemas de ecuaciones lineales a través de la Regla de Cramer

Objetivos Específicos

- Introducir definiciones y resultados básicos sobre importantes desigualdades como la desigualdad Triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en los espacios vectoriales.
- Presentar algunas aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
- Demostrar la desigualdad Triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n, C[a,b]$, y $M_{mn}(K)$.
- Exponer un método efectivo para calcular determinantes usando sus propiedades.
- Introducir la Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

JUSTIFICACIÓN

La Matemática constituye una forma de aproximación a la realidad; brinda elementos de importancia para el desarrollo de la capacidad de argumentación racional, la abstracción reflexiva y el aumento de las habilidades necesarias para resolver problemas de amplia aplicación y transferencia a otros campos del saber.

Esta es una invitación a la reflexión teórica y metodológica en torno a los principios de un área del conocimiento que ha venido configurándose sobre la base de la determinación de su propia problemática, así como de los medios y formas de acercarse a ella para estudiarla y plantear acciones comprometidas con el mejoramiento de la calidad de los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos.

Hay que tener claro que más que aprender o memorizar una serie de algoritmos para la solución de determinados problemas, se tiene que ir mas allá, logrando comprender y argumentar el por qué funciona cierto algoritmo, indagar en qué consiste dicho método, ver la esencia, el trasfondo de este conocimiento, poder hacer una demostración, ya que estas ocupan una posición central en la actividad matemática, pues constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la Física o en otras ciencias, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad.

Se trata pues de salir del efecto de rigidez mental que produce el tratar de repetir sistemáticamente los métodos empleados en la resolución de problemas, lo cual puede ocasionar una cierta disminución en la capacidad de razonamiento “en el vacío” de la persona, una limitación a la libertad de pensamiento.

Esperamos que esta revisión, motive a quien generosamente lea este trabajo a profundizar en el tema, puesto que la gran variedad de problemas interesantes ligados a esta teoría es de gran interés y belleza.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

1.1. Espacios Vectoriales

Definición 1.1.1. *Sea K un cuerpo. Un espacio vectorial sobre K o un espacio vectorial con escalares en K o un K-espacio vectorial es una tripla $(V,+,\cdot)$ donde V es un conjunto cuyos elementos se llaman vectores y "+" "·" son dos operaciones.*

$$+ : V \times V \to V; \quad \text{Adición vectorial}$$

$$(x,y) \to x+y$$

$$\cdot : K \times V \to V; \quad \text{Producto por escalares}$$

$$(\alpha,x) \to \alpha \cdot x$$

de tal manera que se cumplen los siguientes axiomas llamados leyes vectoriales:

A1. $x+y=y+x; \quad \forall x,y \in V$

A2. $x+(y+z)=(x+y)+z; \quad \forall x,y,z \in V$

A3. Existe en V un elemento único notado $\boldsymbol{0}$, llamado vector nulo, tal que $x+\boldsymbol{0}=x; \quad \forall x \in V$

A4. Para cada $x \in V$ existe $y \in V$ tal que $x+y=\boldsymbol{0}$

A5. $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y; \quad \forall \alpha \in K$ y $\forall x,y \in V$

A6. $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x; \quad \forall \alpha,\beta \in K$ y $\forall x \in V$

A7. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta)\cdot x = \beta \cdot (\alpha \cdot x); \quad \forall \alpha,\beta \in K$ y $\forall x \in V$

A8. $1 \cdot x = x; \quad \forall x \in V$

Usualmente K es el cuerpo de los números reales o de los números complejos.

1.2. Propiedades de los Espacios Vectoriales

A partir de los axiomas de espacio vectorial se deducen las propiedades básicas de los espacios vectoriales las cuales se enuncian y se prueban en el siguiente,

Teorema 1.2.1. *Para todo $x, y \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in K$ se tiene:*

$P1$. $0 \cdot x = \boldsymbol{0}$; $\quad \forall x \in V$

$P2$. $\alpha \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$; $\quad \forall \alpha \in K$

$P3$. $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$; $\quad \forall x \in V$ y $\forall \alpha \in K$

$P4$. Si $\alpha \cdot x = \boldsymbol{0}$ entonces $\alpha = 0$ ó $x = \boldsymbol{0}$

$P5$. Si $\alpha \cdot x = \alpha \cdot y$, $\alpha \neq 0$, entonces $x = y$

$P6$. Si $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$, $x \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\alpha = \beta$

$P7$. $x + x = 2 \cdot x$ y $x + x + ... + x = n \cdot x$

Demostración:

$P1$. $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, luego $0 \cdot x = \boldsymbol{0}$

$P2$. $\alpha \cdot \boldsymbol{0} = \alpha(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}) = \alpha \boldsymbol{0} + \alpha \boldsymbol{0}$, luego $\alpha \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

$P3$. Puesto que $\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0 \cdot x = \boldsymbol{0}$ entonces $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha x)$. Análogamente $\alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ y por tanto $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$

$P4$. En efecto, si $\alpha \neq 0$, α tiene un inverso α^{-1}. Entonces $x = 1x = (\alpha^{-1}\alpha)x = \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

$P5$. $x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha)x = \alpha^{-1}(\alpha \cdot x) = \alpha^{-1}(\alpha \cdot y) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha)y = 1 \cdot y = y$

$P6$. $\boldsymbol{0} = \alpha x - \alpha x = \alpha x - \beta x = (\alpha - \beta)x$, como $x \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\alpha - \beta = 0$, o sea, $\alpha = \beta$.

$P7$. $x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = (1+1) \cdot x = 2 \cdot x$
Con un razonamiento inductivo se prueba que $x + x + ... + x = n \cdot x$

1.3. Ejemplos de Espacios Vectoriales

A continuación presentamos a modo de ejemplos algunos espacios vectoriales reales o complejos

1.3.1. Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$

Sea $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, $K = \mathbb{R}$. Para $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

Se verifican los axiomas de espacio vectorial. El vector nulo es $\boldsymbol{0} = (0, ..., 0)$ y si $x = (x_1, ..., x_n)$, el vector $y = (-x_1, ..., -x_n)$ es tal que $x + y = \boldsymbol{0}$. Así que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. De la misma manera se prueba que K^n es un K-espacio vectorial.

1.3.2. Ejemplo 2. Funciones

Sea $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua }\}$, $K = \mathbb{R}$. Las funciones $(f+g)$ y $(\alpha \cdot f)$ se definen por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x); \quad x \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la función nula es el vector nulo y la función $-f$ es tal que $f+(-f)$ es el vector nulo. En lo que sigue de este trabajo, éste espacio lo notaremos $C[a,b]$

1.3.3. Ejemplo 3. Matrices

Otro ejemplo importante de K-espacio vectorial es el conjunto de matrices de m filas por n columnas, cuyas componentes son elementos de K con la suma y producto por escalares usuales:

Adición:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto por escalares:

$$\alpha \cdot A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

El vector nulo es la matriz nula, que es aquella cuyos elementos son todos iguales a cero, esto es, una matriz A de componentes $a_{ij} = 0$ para todo i y para todo j; y el opuesto de una matriz A de componentes a_{ij} es la matriz B de componentes $b_{ij} = -a_{ij}$. Este espacio lo notaremos $M_{mn}(K)$

1.4. Espacios vectoriales con producto interno

Definición 1.4.1. *Un espacio vectorial real V tiene un producto interno si a cada par de elementos x e y de V corresponde un número real único $\langle x, y\rangle$ que satisface los siguientes axiomas cualesquiera sean x, y, z de V y para todos los escalares reales α*

A1. Simetria: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle; \quad \forall x, y \in V$

A2. Linealidad: $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle; \quad \forall x, y, z \in V$

A3. Homogeneidad: $\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle; \quad \forall x, y \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A4. Positividad: $\langle x, x\rangle > 0;$ si $x \neq \boldsymbol{0}$

Un espacio vectorial con un producto interno se llama Espacio Real Euclideo.

En un espacio vectorial complejo, un producto interno $\langle u, v\rangle$ es un número complejo que satisface los mismos axiomas que los del producto interno real, excepto el de la simetria que se reemplaza por la relación:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

Siendo $\overline{\langle v, u\rangle}$ el complejo conjugado de $\langle v, u\rangle$. En el axioma de homogeneidad (A3.), el multiplicador escalar α puede ser cualquier número complejo.

De aquí se concluye que:

$$\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v, u\rangle} = \overline{\alpha\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\ \langle u, v\rangle$$

Un espacio vectorial complejo con un producto interno se llama Espacio Euclideo Complejo

1.5. Ejemplos de Espacios Vectoriales con producto interno

1.5.1. Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., x_n)$, su producto escalar real usual se define con la igualdad:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2, ..., x_n)\ ,\ (y_1, y_2, ..., x_n)\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

Veamos que se cumplen los cuatro axiomas de producto interior:

A1. Simetria: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i = \langle y, x\rangle$$

A2. Linealidad: $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$$\langle x, y+z\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i + x_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

A3. Homogeneidad: $\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle$

$$\alpha\langle x, y\rangle = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \langle \alpha x, y\rangle$$

A4. Positividad: $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq \boldsymbol{0}$

$$\langle x,x\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;>\; 0$$

Luego, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con producto interno.

1.5.2. Ejemplo 2. Funciones

En el espacio vectorial real $C[a,b]$ definimos un producto interno de dos funciones f y g con la fórmula:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Verifiquemos que cumplen los cuatro axiomas del producto interior:

A1. Simetria: $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \;=\; \int_a^b g(t)f(t)dt \;=\; \langle g,f\rangle$$

A2. Linealidad: $\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$

$$\langle f,g+h\rangle = \int_a^b f(t)(g+h)(t)\;dt \;= \int_a^b [f(t)g(t)\;+\;f(t)h(t)]\;dt$$
$$= \int_a^b f(t)g(t)\;dt + \int_a^b f(t)h(t)\;dt \;=\; \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$$

A3. Homogeneidad: $\alpha\langle f,g\rangle = \langle \alpha f,g\rangle$

$$\alpha\langle f,g\rangle = \alpha\int_a^b f(t)g(t)\;dt = \int_a^b \alpha f(t)g(t)\;dt\; = \langle \alpha f,g\rangle$$

A4. Positividad: $\langle f,f\rangle \;>\; 0$ para $f \neq \boldsymbol{0}$

$$\langle f,f\rangle \;= \int_a^b [f(t)]^2\;dt \;\;>\;0$$

1.5.3. Ejemplo 3. Matrices

En el espacio vectorial real $M_{mn}(\mathbb{R})$ podemos introducir de manera natural un producto interno similar al de $\mathbb{R}^n$. En efecto, dadas las matrices

$$\mathrm{A} \;=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B \;=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

definimos el producto interno de A con B por la igualdad:

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{mn}b_{mn}$$

Veamos que se verifican las condiciones de la definición 2:

A1. Simetria: $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} = \sum_{ij} b_{ij}a_{ij} = \langle B,A\rangle$$

A2. Linealidad: $\langle A,B+C\rangle = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$

$$\langle A,B+C\rangle = \sum_{ij} a_{ij}\,(b+c)_{ij} = \sum_{ij} a_{ij}\,(b_{ij}+c_{ij}) = \sum_{ij}[(a_{ij}b_{ij}) + (a_{ij}c_{ij})]$$

$$= \sum_{ij} a_{ij}b_{ij} + \sum_{ij} a_{ij}c_{ij} = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$$

A3. Homogeneidad: $\alpha\langle A,B\rangle = \langle \alpha A,B\rangle$

$$\alpha\langle A,B\rangle = \alpha\sum_{ij} a_{ij}b_{ij} = \sum_{ij} \alpha a_{ij}b_{ij} = \langle \alpha A,B\rangle$$

A4. Positividad: $\langle A,A\rangle > 0$ para $A \neq \boldsymbol{0}$

$$\langle A,A\rangle = \sum_{ij} a_{ij}^2 > 0$$

1.6. Espacios Vectoriales Normados

Definición 1.6.1. *Sea V un espacio vectorial sobre K, una norma en V es una función de V hacia $\mathbb{R}$, tal que a cada vector v de V se le asigna un número real denotado por $\| v \|$ y que cumple las siguientes condiciones:*

$P1.$ $\| v \| = 0$; si y solo si $v = \boldsymbol{0}$

$P2.$ $\| v \| > 0$ si $v \neq \boldsymbol{0}$

$P3.$ $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|$; $\alpha \in K$

$P4.$ $\| v+u \| \leq \| v \| + \| u \|$

De los resultados presentados en el parágrafo 4 se deduce que en todo espacio vectorial con producto interno es posible introducir una norma (la norma inducida por el producto interno) definiendo:

$$\|v\| = \langle v,v\rangle^{1/2}$$

A continuación presentamos varios ejemplos de espacios vectoriales normados. En todos los casos, la prueba de la desigualdad triangular se omite ya que será presentada en el capítulo siguiente.

1.7. Ejemplos de Espacios Vectoriales normados

1.7.1. Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es normado.

Para

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

definimos

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Comprobemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial normado, para esto, veamos que cumple las propiedades de la norma.

P1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = \boldsymbol{0}$:

Si $\|x\| = 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ y $x = \boldsymbol{0}$

Si $x = \boldsymbol{0}$, $\langle x, x\rangle = 0$ y $\|x\| = 0$

P2. $\|x\| > 0$: Si $x \neq \boldsymbol{0}$, existe $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \neq 0$, para algún $i(1 \leq i \leq n)$, así que $x_i^2 > 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ y $\|x\| > 0$

P3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

$\|\alpha x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = \left(\alpha^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha|\|x\|$

1.7.2. Ejemplo 2. $C[a, b]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es normado.

Definimos:

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

Comprobemos que el espacio vectorial de todas las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$ es un espacio vectorial normado.

P1. $\|f\| = 0$ si y solo si $f = \boldsymbol{0}$

$\|f\| = 0$ significa que,

$$\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2} = 0$$

y de aqui tenemos que,

$$\int_a^b f^2(t)dt = 0$$

así que $f^2(t)=0$, lo cual lleva a que $f(t)=0$, es decir $f=\boldsymbol{0}$.

Por otra parte, si $f=\boldsymbol{0}$, entonces $f(t)=0$ para todo $t\in[a,b]$, así que:

$$\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}=0$$

lo que conlleva a afirmar que $\|f\|=0$

P2. *Si* f $\neq 0$ entonces $[f(t)]^2>0$ y $\|f\|>0$

P3. $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|$

$$\|\alpha f\|=\left(\int_a^b[\alpha^2 f^2(t)]dt\right)^{1/2}=\left(\alpha^2\int_a^b[f(t)]^2dt\right)^{1/2}=|\alpha|\left(\int_a^b[f(t)]^2dt\right)^{1/2}=|\alpha|\|f\|$$

1.7.3. Ejemplo 3. $M_{mn}(K)$ es un espacio normado.

Para una matriz A, definimos:

$$\|A\|=\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Veamos que el espacio vectorial de matrices de tamaño m x n es un espacio vectorial normado.

P1. $\|A\|=0$ si y solo si $A=\boldsymbol{0}$

Si $\|A\|=0$, entonces $\sum_{i,j}a_{ij}^2=0$ de donde $a_{ij}=0$ por lo tanto $A=\boldsymbol{0}$

Si $A=\boldsymbol{0}$, $\langle A,A\rangle=0$ y $\|A\|=0$

P2. Si $A\neq\boldsymbol{0}$, existe $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{ij}\neq 0$, para algún i,j $(1\leq i\leq m$ y $1\leq j\leq n)$, así que $a_{ij}^2>0$ y $\|A\|>0$

P3. $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$

$$\|\alpha A\|=\left(\sum_{i,j}\alpha^2 a_{ij}^2\right)^{1/2}=\left(\alpha^2\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}=|\alpha|\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}=|\alpha|\|A\|$$

CAPÍTULO 2

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ Y DESIGUALDAD TRIANGULAR

Para algunos reconocidos autores como Gilbert Strang, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es la más importante del Algebra Lineal y de la Matemática en general. Para espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2$, su demostración puede hacerse usando argumentos geométricos relacionados con las proyecciones y el ángulo formado por dos vectores. En espacios vectoriales más generales éstas herramientas ya no se pueden usar. En el presente capítulo se presenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz en espacios vectoriales con producto interno y una prueba de tipo general.

2.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 2.1.1. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si A y B son vectores de V, se verifica que:* $\langle A,B\rangle^2 \leq \langle A,A\rangle\langle B,B\rangle$; *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

Demostración:

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es trivial si A ó B es el vector nulo. Por tanto, podemos suponer que A y B son vectores no nulos.

Sea C el vector $C = xA - yB$ donde $x = \langle B,B\rangle = \|B\|^2$ e $y = \langle A,B\rangle$. Si $C \neq \boldsymbol{0}$, la propiedad A4 del producto interno implica que $\langle C,C\rangle > 0$

Luego: $\langle C,C\rangle = \langle xA - yB, xA - yB\rangle$

$$= \langle xA, xA\rangle - \langle yB, xA\rangle - \langle xA, yB\rangle + \langle yB, yB\rangle$$

$$= \|xA\|^2 - 2\langle xA - yB\rangle + \|yB\|^2$$

$$= x^2\|A\|^2 - 2xy\langle A,B\rangle + y^2\|B\|^2$$

$$= \|B\|^4\|A\|^2 - 2\|B\|^2\langle A,B\rangle^2 + \langle A,B\rangle^2\|B\|^2$$

$$= \|B\|^2\left(\|B\|^2\|A\|^2 - \langle A,B\rangle^2\right) > 0$$

Así que: $\|B\|^2\|A\|^2 > \langle A,B\rangle^2$

Cuando $C = \boldsymbol{0}$, se obtiene $\|B\|^2\|A\|^2 - \langle A, B\rangle^2 = 0$

Luego, en todos los casos $\langle A, B\rangle^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$

O sea: $|\langle A, B\rangle| \leq \|A\|\|B\|$ y en consecuencia $\langle A, B\rangle \leq \|A\|\|B\|$

2.2. Casos particulares

2.2.1. La Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.2.1. *Si $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ entonces* $\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$

Esta desigualdad expresada en términos de las componentes es:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Demostración:

Formamos el polinomio de segundo grado:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$$

Por otra parte $p(x) \geq 0$ y,

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k\right)x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$p(x)$ es un polinomio de la forma

$$Ax^2 + Bx + C \geq 0$$

Esta parábola abre hacia arriba y esta sobre el eje x ó lo intersecta en un solo punto. Por tanto, debe tenerse que $B^2 - 4AC \leq 0$.

O sea,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

Luego:

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

que es la desigualdad de Cauchy-Schwarz expresando cada uno de sus miembros en función de sus componentes.

2.2.2. La Desigualdad de Cauchy-Schwarz en C[a, b]

Teorema 2.2.2. *Sean $f, g \in C[a, b]$, entonces*

$$\langle f, g\rangle^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$$

donde

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

explicitamente

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$$

Demostración:

Si la función f o la función g es la función nula, la demostración es trivial, ya que si $f(t) = 0$, entonces:

$$\big(\langle f, g\rangle\big)^2 = \left(\int_a^b [f(t)g(t)]dt\right)^2 = \left(\int_a^b [0\cdot g(t)]dt\right)^2 = 0$$

y

$$\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) = 0\cdot\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) = 0$$

Luego,

$$\big(\langle f, g\rangle\big)^2 = 0 = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$$

Sean entonces $f, g \in C[a, b]$ $f \neq \boldsymbol{0}$ y $g \neq \boldsymbol{0}$

Consideremos el vector $h = g - \dfrac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot f$

Entonces:

$$0 \leq \langle h, h\rangle = \left\langle g - \frac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot f \,,\, g - \frac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot f\right\rangle = \langle g, g\rangle - \left\langle g \,,\, \frac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot f\right\rangle - \left\langle \frac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot f \,,\, g\right\rangle + \frac{\langle f, g\rangle^2}{\langle f, f\rangle^2}\cdot\langle f, f\rangle$$

$$= \langle g, g\rangle - 2\frac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle}\cdot\langle f, g\rangle + \frac{\langle f, g\rangle^2}{\langle f, f\rangle} = \langle g, g\rangle - \frac{\langle f, g\rangle^2}{\langle f, f\rangle}$$

Luego: $\langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle - \langle f, g\rangle^2 \geq 0$

Así que: $\langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle \geq \langle f, g\rangle^2$

2.2.3. La Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbf{M}_{mn}(K)$

Teorema 2.2.3. *Sean $A, B \in M_{mn}(K)$, entonces $\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$*

Explicitamente:

Si $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)$$

Demostración:

Cada matriz A de tamaño m x n puede considerarse como un elemento A' de $\mathbb{R}^{mxn}$, escribiendo cada fila a continuación de la anterior. Así si:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A' = (\, a_{11},\, a_{12},\, ...,\, a_{1n},\, a_{21},\, a_{22},\, ...,\, a_{2n},\, ...,\, a_{m1},\, a_{m2},\, ...,\, a_{mn} \,)$$

$$B' = (\, b_{11},\, b_{12},\, ...,\, b_{1n},\, b_{21},\, b_{22},\, ...,\, b_{2n},\, ...,\, b_{m1},\, b_{m2},\, ...,\, b_{mn} \,)$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en los espacios del tipo $\mathbb{R}^n$, obtenemos:

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + ... + a_{1n}b_{1n} + ... + a_{mn}b_{mn})^2 \leq (a_{11}^2 + a_{12}^2 + ... + a_{mn}^2)\cdot(b_{11}^2 + b_{12}^2 + ... + b_{mn}^2)$$

$$\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$$

2.3. Otros resultados

2.3.1. Ortogonalidad

Definición 2.3.1. *Representando la ortogonalidad con el simbolo* $\perp$. *Sea* V *un espacio con producto interno,* $x, y \in V$, $A, B \subset V$.

$i)$ $x \perp y$ si y sólo si $\langle x, y\rangle = 0$

$ii)$ $x \perp A$ si y sólo si $\langle x, a\rangle = 0, \quad \forall a \in A$

$iii)$ $A \perp B$ si y sólo si $\langle a, b\rangle = 0 \;\; \forall a \in A, b \in B$

2.3.2. Bases

Definición 2.3.2. *Sea* V *un espacio vectorial. Una base de* V *es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan el espacio* V.

2.3.3. Base Ortogonal de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.3.3. *Sean* $x_1, x_2, ..., x_p$, *p-vectores de* $\mathbb{R}^n$. *Decimos que:*

$$\{x_1, x_2, ..., x_p\} \text{ es una base ortogonal de } \mathbb{R}^n \text{ si:}$$

$i)$ $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ es base de $\mathbb{R}^n$
$ii)$ $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ para todo $i \neq j$

2.3.4. Proyección

Definición 2.3.4. *El producto escalar de dos vectores en* $\mathbb{R}^2$ *tiene una interpretación geométrica interesante. La figura 1 muestra dos vectores geométricos no nulos* A *y* B *que forman un ángulo* θ, *tal que* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. *La figura 2 muestra el mismo vector* A *y dos vectores perpendiculares cuya suma es* A. *Uno de ellos,* tB, *es el producto de* B *por un escalar que llamamos la proyección de* A *sobre* B *y la notamos* $Pr_B A$. *En este ejemplo,* t *es positivo ya que* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

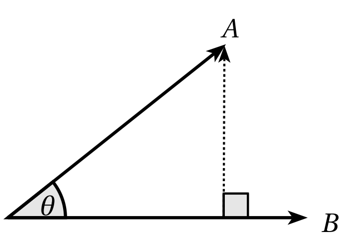

Figura 1

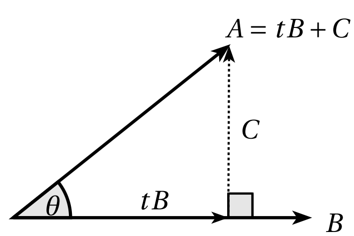

Figura 2

Podemos utilizar los productos internos para expresar t en función de A y B.

Sea: $$A = tB + C$$

Entonces: $$\langle A, B\rangle = \langle tB + C, B\rangle$$

$$= \langle tB, B\rangle + \langle C, B\rangle$$

$$= t\,\langle B,B\rangle + 0$$

porque $C \perp B$, así que: $\langle A,B\rangle = t\,\langle B,B\rangle$

de donde, $\dfrac{\langle A,B\rangle}{\langle B,B\rangle} = \dfrac{\langle A,B\rangle}{\|B\|^2}$

por lo tanto:

$$Pr_B A = tB = \frac{\langle A,B\rangle}{\|B\|^2}\,B$$

2.4. Aplicaciones de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

2.4.1. Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Este método consiste en obtener una base ortogonal a partir de una base (dada) de $\mathbb{R}^n$. El procedimiento consiste en lo siguiente:

Dada la base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, la base ortogonal $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ se consigue así:

Tómese $y_1 = x_1$

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 - Pr_{y_1}\cdot x_2 \\ &= x_2 - \frac{y_1\cdot x_2}{\|y_1\|^2}\cdot y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= x_3 - Pr_{y_1}\cdot x_3 - Pr_{y_2}\cdot x_3 \\ &= x_3 - \frac{y_1\cdot x_3}{\|y_1\|^2}\cdot y_1 - \frac{y_2\cdot x_3}{\|y_2\|^2}\cdot y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - Pr_{y_1}\cdot x_n - Pr_{y_2}\cdot x_n - ... - Pr_{y_{n-1}}\cdot x_n \\ &= x_n - \frac{y_1\cdot x_n}{\|y_1\|^2}\cdot y_1 - \frac{y_2\cdot x_n}{\|y_2\|^2}\cdot y_2 - ... - \frac{y_{n-1}\cdot x_n}{\|y_{n-1}\|^2}\cdot y_{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. *Dada la base de* $\mathbb{R}^2$, $\{x_1, x_2\} = \{(1,-1),(2,3)\}$, *obtener una base ortogonal para* $\mathbb{R}^2$

Es fácil verificar que $\{x_1, x_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$; como $\langle x_1, x_2\rangle = -1$, la base no es ortogonal.

Aplicando el metodo de ortogonalización de Gram-Schmidt, tenemos:

$$y_1 = x_1 = (1,-1)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_2 &= x_2 - Pr_{y_1}\cdot x_2 \\ &= \mathrm{x}_2 - \frac{x_1\cdot x_2}{\|y_1\|^2}\cdot y_1 \\ &= \mathrm{x}_2 - \frac{\langle x_1, x_2\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}\cdot y_1 \end{aligned}$$

$$= (2,3) - \frac{-1}{2} \cdot (1,-1)$$
$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

los vectores $y_1 = (1,-1)$, $y_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ son una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, como puede comprobarse directamente.

2.4.2. Comparación entre la Media Geométrica y Media Aritmética

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es útil para mostrar la relación existente entre la media aritmética y la media geométrica.

Para esto, tomemos dos números positivos x e y, elijamos los vectores $B = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$ y $A = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$.

Desarrollando el producto interno entre los vectores

$$\langle A, B\rangle = \sum a_k b_k = \sqrt{y}\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{y} = 2\sqrt{xy}$$

Luego, hallando la norma de cada vector y luego el producto entre ellas

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum a_k^2} = \sqrt{x+y}$$

$$\|B\| = \sqrt{x+y}$$

$$\|A\|\|B\| = (\sqrt{x+y})^2 = |x+y|$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\|\|B\|$$

$$2\sqrt{xy} \leq x+y$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Concluimos por medio de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

2.5. Desigualdad Triangular

2.5.1. La Desigualdad Triangular en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.5.1. *Si x e y son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces:*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Demostración:

$$0 \leq \|x+y\|^2 \;=\; \langle x+y, x+y\rangle \;=\; \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle|$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, asi que $2|\langle x,y\rangle| \leq 2\|x\|\,\|y\|$ entonces:

$$0 \leq \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Luego:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2.5.2. La Desigualdad Triangular en el espacio $C[a,b]$

Teorema 2.5.2. *Si f , g son dos funciones reales continuas en un intervalo [a, b] entonces:*

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\,|\langle f,g\rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

2.5.3. La Desigualdad Triangular en $M_{mn}(\mathbb{R})$

Teorema 2.5.3. *Si A, B son dos matrices de tamaño m x n con elementos reales, entonces:*

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Demostración:

$$0 \leq \|A+B\|^2 = \langle A+B, A+B\rangle = \langle A,A\rangle + \langle B,A\rangle + \langle A,B\rangle + \langle B,B\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\langle A, B\rangle \\ &\leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2|\langle A, B\rangle| \\ &\leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\|\|B\| \end{aligned}$$

Luego:

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

CAPÍTULO 3

DETERMINANTES Y REGLA DE CRAMER

3.1. Determinantes de orden 1 y 2

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

con dos incognitas, x_1 y x_2

Para hallar el valor de x_1 multipliquemos la primera ecuacion por a_{22} y la segunda por $-a_{12}$, y al sumar obtenemos:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12})$$

Si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$ entonces

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Despejando a x_2 en la misma forma obtenemos:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Observamos que a_{11} y a_{22} están sobre una diagonal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mientras que a_{21} y a_{12} están sobre la otra diagonal.

Definiendo el determinante de la matriz A como:

$$det\,(A) \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{(determinante de orden 2)}$$

Esto significa que:

$$x_1 \;=\; \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{|A|}\;; \qquad x_2 \;=\; \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{21}}{|A|}$$

Si $A \;=\; (a_{11})$ el determinante (de orden 1) de A es $|A| \;=\; a_{11}$

3.2. Determinantes de orden $n \geq 3$

Definición 3.2.1. *Si A es una matriz cuadrada, el **menor** de a_{ij}, notado M_{ij} es una matriz de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ obtenida de A, eliminando la fila i y la columna j.*

Ejemplo 2. *Sea*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces, $\quad M_{11} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{21} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{31} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ldots\,,$ *etc.*

Definición 3.2.2. *Si A es una matriz cuadrada, el **cofactor** de a_{ij}, notado A_{ij} se define por:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Ejemplo 3. *Sea*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A_{11} \;=\; (-1)^{1+1}|M_{11}| \;=\; |M_{11}| \;=\; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \;=\; -\;10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| \;=\; -|M_{12}| \;=\; -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \;=\; -\;(-4) \;=\; 4$$

$$A_{13} \;=\; (-1)^{1+3}|M_{13}| \;=\; |M_{13}| \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -\;6, \quad \ldots\,, \text{ etc.}$$

Definición 3.2.3. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$ e i un número fijo $(1 \leq i \leq n)$. El determinante de A desarrollado por la fila i, se define por:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

En particular, si $i = 1$ se obtiene:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}|$$

que es el desarrollo del determinante de A por la primera fila.

Ejemplo 4. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

tomando $i = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j}\, |M_{1j}| \\ &= (-1)^{1+1} a_{11}\, |M_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}\, |M_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}\, |M_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

En particular si,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} &= [1 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-2)] - [1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3] \\ &= [12 - 8] - [-8 + 18] = 4 - [10] = -6 \end{aligned}$$

Ejemplo 5. *Calcular $|A|$ para la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $i = 1$, se tiene que:

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}|$$

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11}\,|M_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}\,|M_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}\,|M_{13}| + (-1)^{1+4} a_{14}\,|M_{14}|$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculos directos, usando el ejemplo anterior, conducen a que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Luego, $|A| = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) = 12$

Observaciones: El determinante de una matriz no depende de la escogencia de la fila, es decir, el desarrollo de $|A|$ por la fila i es exactamente igual al desarrollo de $|A|$ por la fila j. Se obtiene una fórmula semejante para $|A|$ si en lugar de fijar una fila, escogemos como fija una columna cualquiera, esto es:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

y en particular si $j = 1$, entonces

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}|$$

que es el desarrollo de $|A|$ por la primera columna.

3.3. Propiedades de los Determinantes

3.3.1. Propiedad 1

Si cada uno de los elementos de una fila o columna de un determinante, es igual a cero, el valor del determinante es cero

Demostración:

Se desarrolla el determinante por la fila o columna que tenga todos sus elementos iguales a cero

3.3.2. Propiedad 2

El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta. Esto es:

$$|A| = |A'|$$

Demostración:

$i.$ Para determinantes de orden uno, la propiedad es evidente.

$ii.$ Supongamos la propiedad verdadera para determinantes de orden $n-1$ (Hipótesis de inducción).

$iii.$ Probemos la propiedad para determinantes de orden n, desarrollando |A| por la primera fila, y |A'| por la primera columna:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n}|A_{1n}|$$
$$|A'| = a_{11}|A'_{11}| - a_{12}|A'_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n}|A'_{1n}|$$

Por hipótesis de inducción, se tiene:

$$|A_{11}| = |A'_{11}| \quad ; \quad |A_{12}| = |A'_{12}| \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad |A_{1n}| = |A'_{1n}|$$

ya que cada uno de estos determinantes es de orden $n-1$. Por siguiente:

$$|A| = |A'|$$

Corolario: Toda propiedad de un determinante enunciada en términos de filas, origina una nueva propiedad enunciada en términos de columnas

3.3.3. Propiedad 3

Si dos filas o columnas de un determinante son intercambiadas, el signo del determinante queda cambiado.

Ilustración:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Demostración:

Sea |A| el determinante original y |B| el determinante obtenido de |A|, intercambiando dos filas, probaremos que

$$|B| = -|A|$$

$i.$ Para determinantes de orden dos, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -|A|$$

$ii.$ Supongamos la propiedad verdadera para determinantes de orden $n-1$ (Hipótesis de inducción).

$iii.$ Demostremos la propiedad para determinantes de orden n, suponiendo que |B| es obtenido de |A| intercambiando la fila i y la fila j. Sea $k \neq i$ y $k \neq j$. Desarrollando por la k-esima fila obtenemos:

$$|B| = a_{k1}C_{k1}^B + a_{k2}C_{k2}^B + ... + a_{kn}C_{kn}^B$$

Como: $C_{k1}^B = -C_{k1}^A, \quad C_{k2}^B = -C_{k2}^A, \quad ..., \quad C_{kn}^B = -C_{kn}^A$

Por la hipótesis de inducción, tenemos:

$$|B| \quad = \quad -a_{k1}C_{k1}^A - a_{k2}C_{k2}^A - ... - a_{kn}C_{kn}^A \quad = \quad -|A|$$

Luego la propiedad es válida para todo $n \geq 2$

3.3.4. Propiedad 4

Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale cero.

Ilustración:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Demostración:

Supongamos que |A| tiene iguales las filas i y j y sea |B| el determinante obtenido de |A|, intercambiando las filas i y j. Naturalmente

$$|B| = |A|$$

Sin embargo, por la propiedad anterior |B| = -|A| entonces |A| = -|A|, luego |A| = 0

3.3.5. Propiedad 5

Si cada uno de los elementos de una fila o columna de un determinante se multiplica por un mismo escalar α, el valor del determinante queda multiplicado por el escalar α.

Ilustración:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Demostración:

Sea |A| el determinante original y |B|, el determinante obtenido de |A|, al multiplicar todos los elementos de la fila i por α, probaremos que

$$|B| \quad = \quad \alpha|A|$$

Desarrollando |B| por la i-ésima fila, tenemos:

$$\begin{aligned}
|B| &= \alpha a_{i1}C^A_{i1} + \alpha a_{i2}C^A_{i2} + \ldots + \alpha a_{in}C^A_{in} \\
&= \alpha(a_{i1}C^A_{i1} + a_{i2}C^A_{i2} + \ldots + a_{in}C^A_{in}) \\
&= \alpha|A|
\end{aligned}$$

3.3.6. Propiedad 6

Si cada uno de los elementos de una fila o columna de un determinante se expresa como la suma de dos o más terminos, el determinante puede expresarse como la suma de dos o más determinates.

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \ldots & a_{in}+a'_{in} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

Demostración:

Desarrollando el determinante de la izquierda de la igualdad por la i-ésima fila, se obtiene:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \ldots & a_{in}+a'_{in} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} = (a_{i1} + a'_{i1})C_{i1} + (a_{i2} + a'_{i2})C_{i2} + \ldots + (a_{in} + a'_{in})C_{in} =$$

$$(a_{i1}\,C_{i1} + a_{i2}\,C_{i2} + \ . \ . \ . \ + a_{in}\,C_{in}) + (a'_{i1}\,C_{i1} + a'_{i2}\,C_{i2} + \ . \ . \ . \ + a'_{in}\,C_{in}) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.3.7. Propiedad 7

La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) de un determinante por los correspondientes cofactores de otra fila (o columna), es cero

Demostración:

Sean

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow fila\ i \\ \\ \leftarrow fila\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow fila\ i \\ \\ \leftarrow fila\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Desarrollando |B| por la i-ésima fila y, como se nota que |B| = 0, pues tiene dos filas iguales, se consigue:

$|B| = a_{j1}C^B_{i1} + a_{j2}C^B_{i2} + \ . \ . \ . + a_{jn}C^B_{in} = 0$

pero, $C^B_{i1} = C^A_{i1};\ C^B_{i2} = C^A_{i2}\ , \ . \ . \ . \ . \ , \ C^A_{in}$

y, por tanto, $a_{j1}C^A_{i1} + a_{j2}C^A_{i2} + \ . \ . \ . + a_{jn}C^A_{in} = 0$

que es precisamente lo que queria probarse.

Al reunir la definición 3 y la propiedad 7 tenemos:

3.3.8. Propiedad 8

La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los correspondientes cofactores de esa fila, da el determinante; pero la suma de los elementos de una fila (o columna) por los correspondientes cofactores de otra fila (o columna) da cero.

3.3.9. Propiedad 9

El valor de un determinante no cambia si a los elementos de cualquier fila o columna se le suman k veces los correspondientes elementos de cualquier otra fila o columna. Es decir, si:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ . & . & \ldots . \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots a_{in} \\ . & . & \ldots . \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots a_{in} \\ . & . & \ldots . \\ . & . & \ldots . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad y \ |B| = \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \ldots . & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots . & a_{2n} & \\ . & . & \ldots & . & \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \ldots & a_{in}+ka_{jn} & \leftarrow fila\ i \\ . & . & \ldots & . & \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots . & a_{jn} & \leftarrow fila\ j \\ . & . & \ldots & . & \\ . & . & \ldots & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots . & a_{nn} & \end{array}$$

entonces |A| = |B|

Demostración:

Desarrollamos |B| por la i-ésima fila:

$$|B| = (a_{i1} + k\,a_{j1})\ C^B_{i1} + (a_{i2} + k\,a_{j2})\ C^B_{i2} + \ldots + (a_{in} + k\,a_{jn})\ C^B_{in}$$

como, $C^B_{i1} = C^A_{i1}$, $C^B_{i2} = C^A_{i2}$, ... , $C^B_{in} = C^A_{in}$

tenemos, por la propiedad 8:

$$|B| = (a_{i1} + k\,a_{j1})\ C^A_{i1} + (a_{i2} + k\,a_{j2})\ C^A_{i2} + \ldots + (a_{in} + k\,a_{jn})\ C^A_{in} =$$

$$(\mathrm{a}_{j1}C^A_{i1} + a_{j2}C^A_{i2} + \ldots + a_{jn}C^A_{in}) + k\,(a_{j1}C^A_{i1} + a_{j2}C^A_{i2} + \ldots + a_{jn}C^A_{in}) = |A| + 0$$

Por consiguiente, $|B| = |A|$

3.3.10. Propiedad 10

Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces

$$|AB| = |A|\ |B|$$

Obsérvese que

|AB| = |A| |B| = |B| |A| = |BA| ; esto es |AB| = |BA|

3.4. Algunas matrices especiales

Matriz Regular: Una matriz cuadrada A, es regular si A es inversible. A es regular si y solo si $|A| \neq 0$. Si A no es inversible, A se llama singular. A es singular si y solo si $|A| = 0$

Matriz Triangular: Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (o $i < j$) se denomina matriz triangular superior (o matriz triangular inferior)

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \text{es una matriz triangular superior}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \text{es una matriz triangular inferior}$$

Matriz Adjunta: Sea A una matriz cuadrada. Se llama Adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario representado por $|M^A_{ij}|$, el cual resulta de suprimir en la matriz A la fila i y la columna j, multiplicado por el factor $(-1)^{i+j}$. La matriz Adjunta es aquella en la cual cada elemento se sustituye por su Adjunto. Se nota A^*. En simbolos:

$$A^* = \Big((-1)^{i+j} \, |M^A_{ij}| \Big)$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la adjunta de A notada por A^* es:

$$A^* = \begin{pmatrix} |M^A_{11}| & -|M^A_{12}| & |M^A_{13}| \\ -|M^A_{21}| & |M^A_{22}| & -|M^A_{23}| \\ |M^A_{31}| & -|M^A_{32}| & |M^A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta: La matriz traspuesta de una matriz A de orden m x n es la matriz A^T de orden n x m que se obtiene permutando filas por columnas. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{, la traspuesta de } A \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa: Sean A y B dos matrices cuadradas de forma que $AB = BA = I$, en estas condiciones, la matriz B se llama inversa de A y se escribe $B = A^{-1}$. Reciprocamente, la matriz A es la inversa de B y se puede escribir $A = B^{-1}$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Cada una de las matrices del producto es Inversa una de la otra.

3.5. Cálculo efectivo de los Determinantes

Con el uso de las propiedades de los determinantes, pueden calcularse en forma rápida y segura determinantes de cualquier orden; dada la matriz A, el método consiste básicamente en transformar la matriz A en una matriz triangular teniendo en cuenta los efectos que se producen en los determinantes en cada uno de los pasos que se realicen en este proceso.

Ejemplo 6. *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -8 & -9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -8 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 8 & -15 \\ 0 & 7 & -23 & 34 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & -15 \\ 0 & 7 & -23 & 34 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 13 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4 = -8$$

3.6. Cálculo de Inversas

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A tenga inversa es que no sea singular, es decir que su determinante sea no nulo, $|A| \neq 0$

Se puede calcular la matriz inversa por diversos métodos, entre ellos está el cálculo de la matriz inversa por determinantes; que se calcula a través de la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot (A^*)^T$$

Ejemplo 7. *Calcular la inversa de la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Procedemos asi:

i. Calculamos el determinante de A, en el caso que el determinante sea nulo, la matriz no tendrá inversa

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (15+4) \; = \; 19$$

ii. Hallamos la matriz adjunta que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto

$$A^* \; = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 12 & 2 & -3 \\ -8 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

iii. Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta

$$(A^*)^T \; = \; \begin{pmatrix} 12 & -8 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

iv. La matriz inversa es igual al inverso multiplicativo del valor de su determinante multiplicado por la matriz traspuesta de la adjunta

$$A^{-1} \; = \; \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T \; = \; \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -8 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{19} & \frac{-8}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{5}{19} & \frac{-2}{19} \\ \frac{-3}{19} & \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

3.7. Regla de Cramer

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Llamemos A a la matriz de los coeficientes $[a_{ij}]$ y α_{ij} al adjunto del elemento a_{ij} en A. Multiplicando la primera ecuacion del sistema por α_{11}, la segunda por α_{21}, ... , la ultima por α_{n1} y sumando miembro a miembro se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}x_1 \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 \quad + \quad ... \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{n1}$$

que se reduce a:

$$|A| \ . \ x_1 \ = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1| \ , \ de \ donde \ x_1 \ = \ \frac{|A_1|}{|A|}$$

Ya que, por la propiedad 10,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i3}\alpha_{i1}x_3 \quad + \quad ... \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n \quad = 0$$

Multiplicando ahora las ecuaciones del sistema por $\alpha_{12}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{n2}$, respectivamente, y sumando

$$|A| \ . \ x_2 \ = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{23} & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2| \ , \ de \ donde \ x_2 \ = \ \frac{|A_2|}{|A|}$$

Finalmente, multplicando las ecuaciones del sistema por $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ..., \alpha_{nn}$, y sumando miembro a miembro

$$|A| \ . \ x_n \ = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & ... & a_{2,n-1} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix} = |A_2| \ , \ de \ donde \ x_n \ = \ \frac{|A_n|}{|A|}$$

Como puede observarse cada variable x_i es el cociente de dos determinantes, $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$; A_i es la matriz obtenida de A cambiando los elementos de la columna i por los términos independientes.

Ejemplo 8. *Usando la regla de Cramer resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Lo primero que haremos es formar la matriz de cofactores, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora, el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = [\,(\,6 + 6 - 6\,) - (\,-1 + 8 + 27\,)\,] = -28$$

Luego hallamos el valor de x_1, x_2 y x_3

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -12 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{[(15+24+6)-(1+20+108)]}{-28} = \frac{-84}{-28} = 3$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -3 & -12 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{[(-72-3+10)-(12-4-45)]}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & -12 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{[(2+30-36)-(-5+48+9)]}{-28} = \frac{-56}{-28} = 2$$

Por tanto la solución al sistema de ecuaciones es $x_1 = 3,\; x_2 = 1$ y $x_3 = 2$

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

La elaboración del presente trabajo de grado permite concluir lo siguiente:

1. Los conceptos de los cuales se ocupa el Algebra Lineal elemental pueden generalizarse a espacios vectoriales de tipo más general.
2. La Desigualdad de Cauchy-Schwarz, aunque en principio soporta demostraciones de tipo geométrico, en el caso general es una consecuencia de las propiedades del producto interno.
3. La Desigualdad Triangular es una consecuencia, en todos los casos, de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
4. Los espacios vectoriales, donde es posible definir un producto interno son privilegiados, pues en ellos se puede introducir el concepto de norma y son válidas la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Desigualdad Triangular.
5. En los espacios donde es válida la Desigualdad de Cauchy-Schwarz es posible introducir el concepto de ángulo entre dos vectores y generalizar el concepto de Ortogonalidad.
6. La Regla de Cramer tiene su soporte en las propiedades de los determinantes.

CAPÍTULO 5

BIBLIOGRAFÍA

1. *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Gilbert Strang. Fondo Educativo Interamericano S.A. 1982. Nueva York. E.U.

2. *Matrices.* Frank Ayres. McGraw-Hill. 1975. Cali, Colombia.

3. *Conceptos Básicos de Algebra Lineal.* Augusto Silva S. Universidad Surcolombiana. 1988. Neiva, Colombia.

4. *Calculus, Vol I, Vol II.* Tom M. Apostol. Editorial Reverté S.A. 1976. Barcelona, España.

5. *Curso Básico de Algebra Lineal.* Rubén E. Sánchez C. Antonio Velazco M. Editorial Comex. 1981, Bogotá, Colombia.