Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Aplicaciones de Teoría de la Medida a Marcos Continuos

María Katherine Plazas Olaya
Juan Gabriel Quimbaya Torres

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Aplicaciones de Teoría de la Medida a Marcos Continuos

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

María Katherine Plazas Olaya
2007268626
Juan Gabriel Quimbaya Torres
2007164858

Asesor:
Mg. Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Junio de 2012

Agradecimientos

La vida nos ha brindado la oportunidad
de luchar por metas e ideales soñados:
uno de esos sueños que se hace hoy realidad
es el de en matemáticas estar siendo formados.

Formación que debemos darle continuidad
día a día, para ser siempre honestos y honrados.
Agradecimientos a quienes con su generosidad
y paciencia, de sus enseñanzas hemos sido heredados.

Agradecemos a nuestro asesor Mg. Ricardo Cedeño Tovar, por estar siempre dispuesto a resolver nuestras dudas e inquietudes; al C.Dr. Osmin Ferrer Villar por sus valiosas recomendaciones y apoyo incondicional.

Gracias a nuestros padres Yanith Olaya Pastrana, Luz Marina Torres y Gabriel Quimbaya, por el enorme esfuerzo que a diario hacen por otorgarnos lo mejor.

A los profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas, que con su dedicación nos entregaron sus enseñanzas con todo el rigor que exige la matemática, a ello nuestros agradecimientos; así también a los compañeros que estuvieron presentes para apoyarnos en este proceso de formación; y a la Universidad Surcolombiana por facilitar a lo suma las condiciones mínimas de estudio.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se esquematiza de manera general en cuatro partes: En primer lugar, se presenta una visión histórica de la evolución y consolidación de las ideas que dan origen a la teoría de la medida. En un segundo momento, aparecen algunas nociones teóricas fundamentales en el desarrollo de la teoría abstracta de la medida. Seguidamente, se dan ciertas definiciones y resultados acerca de funciones medibles y se muestran importantes aspectos sobre la integración de este tipo de funciones. Por último, se aplican las nociones necesarias de teoría de la medida, en el estudio preliminar sobre marcos continuos en espacios de Hilbert.

OBJETIVOS

Objetivo General

Presentar algunas nociones teóricas e históricas sobre la teoría de la medida que posibilitan el estudio de marcos continuos en espacios de Hilbert.

Objetivos Específicos

- Mostrar una reseña histórica sobre el desarrollo del concepto de medida.
- Enunciar definiciones y resultados básicos sobre teoría de conjuntos, análisis funcional y teoría de operadores relacionados con los conceptos de medida y marcos continuos.
- Exponer una visión abstracta de teoría de la medida e integración.
- Aplicar algunos conceptos y resultados de teoría de la medida a marcos continuos.

JUSTIFICACIÓN

Hay momentos de la historia que se engalanan con el nacimiento de personajes capaces de brindar a la humanidad desde su quehacer cotidiano otras formas de pensamiento, implicando ello otras perspectivas de observar las realidades.

Dentro del ámbito del conocimiento matemático es maravilloso cuando surge una nueva manera de abordar un problema, pues generalmente cuando ocurre esto, no sólo es posible agilizar la solución del problema en particular, sino que se abren múltiples posibilidades de estudio tomando como referencia los nuevos conceptos que se desarrollan paralelamente, quedando dispuestos los senderos para ir en busca de fructíferos horizontes dentro del campo específico en el cual se presentan dichos resultados; o también al interior de otras disciplinas.

Es precisamente estos procesos los que se llevan a cabo en la segunda mitad del siglo XIX dentro de la teoría de integración, pues debido a la presentación de funciones no Riemann-integrables, se gestan una serie de esfuerzos por superar este obstáculo, hasta llegar a 1902, que es el año en que Henri Lebesgue presenta en su tesis doctoral, *Longitud, área e integral* una novedosa perspectiva para abordar el concepto de integral, que en definitiva termina por reducir la teoría de la integración a la teoría de la medida.

De esta manera se ha considerado importante estudiar teoría de integración vía teoría de la medida, pues, ello brinda un panorama más amplio sobre las propiedades de las funciones integrables, proyectándose de manera natural aplicaciones a marcos continuos en espacios de Hilbert.

RESEÑA HISTÓRICA

Las ciencias matemáticas en sus primeras etapas forjan sus elementos a partir del abordaje de situaciones sociales que "impiden" la vida en comunidad, aproximándose a la solución de cada una de ellas a través de métodos particulares, los cuales dejan observar en su trasfondo los procesos de *contar* y *medir*, cohesionadores medulares de una amplia colección de conocimientos surgidos de la experiencia, que poco a poco aparecen en el seno de antiguas civilizaciones, quizá en aquellas que permiten a ciertas clases sociales tener resueltas las condiciones óptimas de existencia. Posteriormente, al inquieto espíritu humano se le hace necesario dar algunos criterios de organización para los ya establecidos resultados "matemáticos", lo que paulatinamente dan a las disciplinas matemáticas el carácter de abstractas y alejadas de la realidad tangible, sin embargo, se transforman en potentes herramientas que permiten la comprehensión fenomenológica de gran parte del universo.

En este sentido, las dinámicas que motivan el desarrollo de la matemática están en la línea definida por la búsqueda de métodos más generales que encierran en sus nociones básicas posibilidades amplias de solución a múltiples problemas. Pero como se ha dicho, primero fueron las particularidades. Véase en Heródoto $(-484, -425)$, un hecho anecdótico, que supone el nacimiento de la geometría, se trata de un rey egipcio de nombre Sesostris:

> "Este rey dividió la tierra entre todos los egipcios de manera de darle a cada uno un cuadrángulo de igual tamaño y de obtener de ellos sus ingresos, imponiéndoles una contribución para recaudar anualmente. Pero todos a aquellos a quienes el río hubiera quitado alguna parte, debían ir a notificarle lo sucedido; él enviaba entonces a inspectores que midieran en cuánto había disminuido el terreno, con el fin de que el propietario pagara sobre lo que le había quedado, proporcionalmente respecto al impuesto total. Fue así, me parece, como se originó la geometría, la cual pasó desde allí a Grecia."[1]

Precisamente en el momento histórico que enuncia Heródoto del paso a Grecia de la geometría, es que aparece la alta figura de Thales de Mileto $(-640, -546)$, marcando una ruptura trascendental acerca del estudio de la matemática, pues se está en los albores de un criterio organizativo fundamental en su evolución: *la demostración*, alcanzándose de este modo un ambiente propicio de consistencia lógica para los conocimientos geométricos que Thales y otros griegos logran recoger en sus viajes. Además Thales ataca con buenos frutos, problemas como la determinación de la altura de las pirámides egipcias y la distancia que separa a un barco de la costa, con ingeniosos

[1] CAMPOS. Alberto. Historia de la matemática. Pág. 74.

métodos de medición indirecta, transformando de esta manera en problemas matemáticos problemas físicos.

Inicia entonces en la civilización griega la visión de la matemática como un cúmulo orgánico de conocimientos irrefutables concebidos bajo una *teoría*, concepto rector en su consolidación posterior como ciencia demostrativa y universal. Todo esto en consecuencia con la búsqueda incesante y consistente de una explicación racional del principio original del universo, proceso que encuentra en el concepto de *infinito* una amplia gama de controversias. Siendo Zenón de Elea $(-490, -425)$ quien llama la atención acerca de las formas en que se interpreta (en su época) el espacio-tiempo en términos de su construcción: finita o infinitamente divisibles (discreto-continuo) presentando una serie de cuatro paradojas que refutan ambas perspectivas, negando la posibilidad del movimiento.

Al interior de estos debates, los conceptos de medir y contar toman cada vez mayor protagonismo en el escenario matemático, pues junto a las paradojas planteadas por Zenón, aparecen las magnitudes inconmensurables que causan gran desconcierto sobre todo en los denominados pitagóricos, puesto que en sus trabajos prima el precepto filosófico de la *armonía*, que se ve tambalear ante tal hito así como también las bases de su teoría matemática de la medida, la cual implica la comparación directa de una unidad de medida, correspondiente a los números de contar (los naturales), con la magnitud a medir. Este proceso supone que para cualesquier magnitud siempre existe una unidad que la mide exactamente, es decir, es posible establecer para magnitudes A y B dos "números" m y n tal que $mA = nB$. Claro está, la validez de esta relación sólo se da si las magnitudes son discretas, pero casualmente es el pitagórico Hipaso de Metaponto quien demuestra la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado, lo que muestra que longitudes, áreas, volúmenes, tiempo, son cantidades continuas, derrumbándose la concepción atomista del universo pitagórico.

La salida a estas situaciones empieza a fraguarse con Eudoxo de Cnido $(-408, -355)$, quien da un tratamiento al concepto de infinito bajo la concepción de eludir las magnitudes infinitamente pequeñas, usando para ello el llamado *Axioma de Arquímedes* y plantear la teoría de proporciones que recoge Euclides $(-330, -275)$ en el Libro V de su monumental obra *Los Elementos*, cuya definición cinco sobre razones iguales: "se dice que la primera de cuatro cantidades tiene la misma razón respecto de la segunda como tiene la tercera respecto a la cuarta, cuando, siempre que consideremos equimúltiplos de la primera y la tercera, y cualquier otro equimúltiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el múltiplo de la segunda, cuando el múltiplo de la tercera es mayor, igual o menor que el múltiplo de la cuarta"[2], es de vital importancia para replantear algunas pruebas y razonamientos geométricos, considerando las magnitudes inconmensurables.

De otra parte, se encuentra en el llamado *método de exhausión*, una herramienta demostrativa poderosa usada con gran magistralidad por Arquímedes $(-287, -212)$ en la verificación matemática de resultados sobre cuadraturas de figuras no rectilíneas, evitando para tal prueba el concepto de cantidades infinitamente pequeñas y así el paso al límite.

De esta manera se esclarece el panorama para que sea consistente una teoría matemática de la medida. Pues los inconvenientes que presuponen las paradojas de Zenón y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, son superados en gran medida con herramientas conocidas desde tiempos de Eudoxo, a saber: la definición de razones equivalentes y el método exhaustivo.

[2]CASTRO Chadid, Ivan y PÉREZ Alcázar, Jesús Hernando. Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas. E.P.U.J. Bogotá, 2007.

Pero en esta época quedan problemas abiertos, como los tres clásicos problemas griegos.

Uno de esos clásicos problemas que los griegos dejan sin respuesta definitiva es la cuadratura del círculo, y en consecuencia el problema de las cuadraturas en su forma general.

Los matemáticos renacentistas, aprovechando las nuevas teorías matemáticas: el álgebra y la geometría analítica, se abalanzan sobre este problema, obteniendo algunos resultados importantes a costas del abandono de la preocupación teórica impregnada en toda la obra matemática de los griegos. Como se deja a un lado tanto precepto filosófico, a ésta generación de matemáticos le apasionan los hechos prácticos.

Así, el tratamiento que dan al cálculo de áreas y volúmenes hombres como Johannes Kepler (1571, 1630), Galileo Galilei (1564, 1642) y Bonaventura Cavallieri (1578, 1647), se basa en uno de los principios del Método de Arquímedes: "cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas paralelas a una cuerda dada",[3] dando el nombre de *indivisible* a cada una de las infinitas partes en las cuales se puede descomponer convenientemente una figura dada y así el área de dicha figura es la suma infinita de estos indivisibles. En este sentido Cavallieri establece un método para el cálculo de áreas y volúmenes sintetizado en un teorema que lleva su nombre: "Si dos sólidos tienen igual altura, y si las secciones hechas por planos paralelos a las bases y a distancias iguales desde ellas, tienen siempre una razón dada, entonces, los volúmenes de los sólidos están también a esta razón".[4]

En cuanto al problema de cuadraturas, Cavallieri establece que $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ es la cuadratura de la región limitada por la curva de la forma x^n y las rectas $x = 0$ y $x = a$, haciendo uso para ello de sus indivisibles. Y es precisamente la naturaleza indefinida de estos indivisibles el talón de Aquiles de la teoría geométrica para la medida de áreas y volúmenes de Cavallieri, pues como se dijo, poco interesaba el rigor comparándolo con los resultados prácticos de las teorías. Sin embargo haciendo uso del método de los indivisibles John Wallis (1616, 1703) continúa por la senda trazada por Cavallieri.

Al mismo resultado que presenta Cavallieri en cuanto al problema de la cuadratura de la región limitada por la curva $y = x^n$ y las rectas $x = 0$ y $x = a$, llegan también por métodos distintos y de manera independiente Gilles Personne de Roberval (1602, 1675), Pierre de Fermat (1601, 1665) e Isaac Newton (1642, 1727).

Es precisamente este último, que junto a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646, 1716), alcanzan el desarrollo del *cálculo infinitesimal*. Newton aborda el problema de la cuadratura del círculo a través de la extensión del binomio $(a + x)^n$ para exponentes racionales, teniendo en cuenta los desarrollos hechos por sus antecesores. Su originalidad radica en asumir el problema general de las cuadraturas en el sentido de hallar la ecuación que corresponda a la cuadratura de otra ecuación, es decir, convierte un problema geométrico en otro puramente algebraico.

Por su parte, Leibniz basándose especialmente en el principio de indivisibles de Cavallieri establece la relación inversa entre el problema del cálculo de cuadratura y el trazado de tangentes. En cuanto a la notación, Leibniz avanza notablemente en introducir símbolos que agilizan y esclarecen las relaciones intrínsecas que se tejen entre los problemas mencionados. Por un lado el signo "$\int$", que proviene de la primea letra de la palabra suma, representa la suma de los infinitos indivisibles, siendo así una operación generadora de dimensiones superiores, la

[3] CASTRO Chadid, Ivan y PÉREZ Alcázar, Jesús Hernando. Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas. E.P.U.J. Bogotá, 2007.

[4] Ibid.

sumación. También adopta el símbolo "d" tomado de la primera letra de la palabra *diferenciación*, como operación inversa a la sumación. Así, puede trabajar con estos signos en términos de operadores.

Pues bien, los importantes avances que se han realizado en torno a la elaboración de una teoría matemática de la medida, han estado sujetos a fundamentos vulnerables desde el punto de vista del rigor, pues dichos avances están sustentados en buena parte por métodos heurísticos; y es de aclarar que la construcción de una teoría de la medida no se asume de una manera consciente, sino que espontáneamente se hacen necesarios conceptos que iluminen el derrotero de las dinámicas propias de la matemática.

Es con Leonhard Euler (1707, 1783) que se inicia la búsqueda de un concepto apropiado de *función* al colocarlo como eje central en el estudio del cálculo. Explorando algunas de las propiedades fundamentales de una función como la de ser o no continua[5]. En consecuencia el abordaje de ciertos problemas por parte de los matemáticos contemporáneos a Euler desatan fuertes discusiones a raíz de las diversas interpretaciones del concepto de función.

Es el llamado problema de la cuerda vibrante, que consiste en encontrar las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales -la ecuación de ondas-, el causante de una acalorada discusión en cuanto a la naturaleza de las funciones presentes en su solución. Entre los matemáticos que se intrincaron en este hecho junto con Euler se destacan Jean le Rond d'Alembert (1717, 1783), Daniel Bernoulli (1700, 1782) y Joseph Louis Lagrange (1736, 1813).

En esta misma línea se encuentra Jean Baptiste Joseph Fourier (1768, 1830) en cuanto al análisis que desarrolla en sus investigaciones sobre la conducción del calor, pues en este punto y gracias a los buenos resultados prácticos que de allí se derivan, sostiene que en la solución de la ecuación de difusión del calor, la cual es una ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

la función de condición inicial, $T(0,x) = f(x)$, puede escribirse como una serie de senos y cosenos (*serie de Fourier*)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

En donde los coeficientes a_n y b_n se calculan mediante las integrales

$$a_n = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nt) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nt) dt, \quad \forall n \geq 0.$$

Fourier observa que cada a_n y b_n pueden concebirse como el área bajo las curvas $y = \frac{1}{\pi} f(x) \cos(nx)$ y $y = \frac{1}{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)$ para x entre $-\pi$ y π, considerando que tal área tiene sentido aún para funciones suficientemente arbitrarias. La pregunta natural es qué tan "arbitraria" debe ser una función para que aún siga teniendo sentido hablar del área bajo su curva.

Es por estas motivaciones que Augustin Louis Cauchy (1789, 1857) es el primer matemático que define modernamente la integral basada en el concepto de límite, lo que supone un retorno a la noción de integral de la antigüedad y primera parte del siglo XVII. Así, la integral definida, que durante mucho tiempo quedó en un lugar secundario, vuelve con Cauchy a desempeñar un papel primordial, dando respuesta a las iquietudes dejadas por Fourier, de manera parcial, pues Cauchy

[5]Téngase en cuenta que estas primeras aproximaciones a la elaboración de una teoría consistente de funciones se encuentra alejada de los conceptos actuales.

demuestra que las funciones continuas son integrables y además que funciones con un número finito de discontinuidades también lo son. Pero, ¿Se puede generalizar aún más el conjunto de función integrable?.

Siguiendo la línea de Cauchy, Gustav Lejeune Dirichlet (1805, 1859) proporciona un concepto de función muy cercano al concepto que se maneja actualmente, lo cual le permite plantearse la generalización de la condición de integrabilidad dada por Cauchy a funciones con un número infinito de discontinuidades. En 1829 da un ejemplo de una función $f(x)$ que no es integrable según Cauchy, definida: igual a 1 si x es racional y a 0 si x es irracional (*función característica de los racionales*). Sin embargo Dirichlet piensa que es posible una extensión de la definición de integral. Y es al brillante matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826, 1866) a quien le corresponde la generalización de dicha definición.

Para Riemann, una función f, definida y acotada en un intervalo $[a,b]$, es integrable, si para cada partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, la suma $S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ converge a un límite determinado, para cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y cuando $\|P\| = \text{máx}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$, tiende a cero. Ese límite constituye, por definición, $\int_a^b f(x)dx$. Riemann presenta dos formas equivalentes a la definición de integral para determinar cuándo una función es integrable y construye un ejemplo de una función con alto grado de discontinuidades que es integrable Riemann. Así la definición dada por Riemann de una función integrable no depende necesariamente de la continuidad de la función.

Pero, la teoría de integración de Riemann presenta algunos problemas en cuanto que las operaciones de integración y diferenciación no son inversas una de la otra, es decir, en general no se cumple el teorema fundamental del cálculo. Un ejemplo de una función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, derivable en todo punto, con derivada acotada pero no integrable en el sentido de Riemann es dado por Vito Volterra (1860, 1940) en 1881, en la construcción de dicho ejemplo, Volterra parte de la función g que toma los valores $g(0) = 0$ y $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fuera del origen; y por otra parte la integrabilidad en el sentido de Riemann no se conserva cuando se requiere tomar el límite de la integral de una sucesión infinita de funciones y cuando se toma la integral del límite de dicha sucesión.

Estos eminentes logros se deben al espíritu crítico forjado en el siglo XIX pensando en fundamentar el análisis matemático sobre robustas bases impregnadas del más arduo rigor. Es así que a pesar de que en los tres primeros cuartos de este siglo no se cuenta con una definición y caracterización claras de lo que son los números reales, los desarrollos en la dirección de encontrar una definición lo más general posible de integrabilidad son sorprendentes y parecen haber alcanzado su punto más alto con la teoría riemanniana de la integración. Sin embargo, falta contar con los desarrollos teóricos del último cuarto del siglo XIX, pues se debate con furor la naciente teoría de conjuntos impulsada por Georg Cantor (1845, 1918) en cuanto su aceptación como el sustento teórico de la vasta ciencia matemática, presentando dificultades debido a la falta de claridad sobre la composición del continuo lineal, cuya naturaleza cae en subjetividades de índole ideológicas. Es así que ciertos matemáticos con pocos escrúpulos filosóficos deciden estar al “margen” de estas voraginosas discusiones, retomando senderos poco transitados.

Es así que en 1902, un ingenioso matemático: Henri-Léon Lebesgue (1875, 1941) presenta en su tesis doctoral *Integral, Longitud y Área* una novedosa perspectiva para abordar el concepto de integral, que en definitiva termina por reducir la teoría de la integración a la teoría de la medida. Este proceso tiene sus antecedentes mas cercanos en las investigaciones sobre conjuntos infinitos de Cantor y en la noción de conjunto medible que se empieza a elaborar a partir de trabajos como los de Giuseppe Peano (1858, 1932), Camille Jordan (1838, 1922), Emile Félix Edouard Justin Borel (1871, 1956) y René Louis Baire (1874, 1932). Lebesgue es consciente de que si bien el horizonte final debe ser el de dar una definición analítica de la integral, no escatima esfuerzos en fundar las bases conceptuales de su integral en la medida de objetos geométricos, como él mismo lo plantea en la introducción de su tesis doctoral, se puede *"definir la integral de una función continua como el área de un dominio plano, y de hecho este método tiene la ventaja de llevarnos a definir la integral de una función discontinua acotada como la medida de un cierto conjunto de puntos"*.

A diferencia tanto de Cauchy como Riemann que empiezan estableciendo una partición en el intervalo en que se busca integrar la función, Lebesgue invierte este proceso, realizando la partición sobre el codominio y define la integral no como una suma de rectángulos, sino como la suma de la medida de una familia de conjuntos. Posteriormente Lebesgue muestra que su definición cumple con las propiedades básicas de la integral de Riemann y además "supera" las dificultades que se tenían con esta integral, logrando así que sean integrables funciones mucho más generales como la función característica de los racionales definida por Dirichlet. Sin embargo, a pesar de los resultados profundos que encierra la propuesta de Lebesgue, la integración y la diferenciación no son operaciones inversas una de la otra.

Épico es el esfuerzo realizado por más de veinticinco siglos por los más grandes espíritus dedicados al desarrollo de la ciencia matemática, que ha llegado a la consolidación de una teoría abstracta de la medida que generaliza la medida de objetos geométricos. Quedando despejado el camino para que nuevos esfuerzos se apoyen en esta genial teoría de la medida y se alcancen potentes logros teóricos que sustentan las dinámicas propias del mundo tecnologizado en el cual se vive. Estando en esta dirección la definición de *marcos continuos* sobre *espacios de Hilbert*.

CAPÍTULO 1

CLASES DE CONJUNTOS

1.1. Preliminares

En este trabajo Ω es llamado **conjunto referencial**. La notación $\omega \in \Omega$ significa que ω es un **elemento** de Ω y $\omega \notin \Omega$ significa que ω no es un elemento de Ω. El conjunto de todos los objetos que tienen una propiedad P se indica por $\{\omega : P(\omega)\}$. Dados A y B dos conjuntos, si todo elemento de B es también elemento de A, entonces se dice que B es un **subconjunto** de A y se nota $B \subseteq A$. Si A es un subconjunto de B pero existe algún $\omega \in B$ tal que $\omega \notin A$, se dice que A es un **subconjunto propio** de B y se escribe $A \subset B$. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, se dice que A y B son **iguales**, lo cual se nota $A = B$.

El **conjunto vacío** denotado por ϕ es el conjunto de los objetos ω tales que $\omega \notin \phi$ para todo ω. Se llama **clase**, **familia** o **colección de conjuntos** a un conjunto de conjuntos. El **conjunto de partes** de Ω es la clase de todos los subcojuntos de Ω, notado por $\mathscr{P}(\Omega)$.

A continuación se definen algunas operaciones entre conjuntos.

Dado I un conjunto de índices y, para cada $i \in I$ se tiene $A_i \subseteq \Omega$. La **unión de la familia** $\{A_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de los objetos ω tales que $\omega \in A_i$ para algún i, el cual se denota por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{\omega : \text{ existe } i \in I, \text{ para el cual } \omega \in A_i\right\}.$$

Si el conjunto de índices es enumerable, en este caso, la unión de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ se escribe $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, la unión de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ se denota por $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.
La unión de los conjuntos $A, B \subseteq \Omega$ se indica por $A \cup B$.

Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega$ es una familia de conjuntos, el conjunto de todos los elementos que pertenecen a todos los A_i se denomina la **intersección de la familia** $\{A_i\}_{i\in I}$, y es simbolizado por

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega : \omega \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$$

Como en el caso de la unión de conjuntos, de acuerdo sea I enumerable, finito ó conste de dos elementos, se usan las notaciones:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{ó} \qquad A \cap B.$$

Los conjuntos A y B son **disjuntos** cuando $A \cap B = \phi$. Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es disjunta, si para $i, j \in I$ se tiene que $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$.

El **complemento** de A en Ω es el conjunto $A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$.

La **diferencia** de los conjuntos $A, B \subset \Omega$ es el conjunto de los objetos ω tales que $\omega \in A$ y $\omega \notin B$, el cual se nota por $A \setminus B$, y por definición de intersección y complemento se tiene que $A \setminus B = A \cap B^c$. Nótese que $A^c = \Omega \setminus A$. Si además $B \subset A$, entonces $A \setminus B$ se denomina **diferencia propia**. Ahora, al conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, designado por $A \triangle B$, se llama **diferencia simétrica** entre A y B. Obsérvese que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \phi$.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_{i'}\}_{i' \in I'}$ son familias de conjuntos en Ω se verifican las siguientes propiedades:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i' \in I'} B_{i'}\right) = \bigcup_{(i,i') \in I \times I'} (A_i \bigcap B_{i'}) \tag{1.1.1}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i' \in I'} B_{i'}\right) = \bigcap_{(i,i') \in I \times I'} (A_i \bigcup B_{i'}) \tag{1.1.2}$$

$$\Omega \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i) \quad \text{y} \quad \Omega \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\Omega \setminus A_i) \tag{1.1.3}$$

Equivalentemente, las identidades en (1.1.3) se pueden expresar como:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} (A_i)^c \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} (A_i)^c$$

Si M y N son conjuntos, una regla f que asocia a cada elemento de M un único elemento N se denomina una **función** de M en N, este hecho se nota $f : M \to N$. El conjunto $f(A) = \{y = f(x) : x \in A \text{ y } A \subseteq M\}$ es la **imagen directa** de A mediante f. La **imagen inversa** de un conjunto $B \subseteq Y$ es el conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\}$. Una función $f : M \to N$ es **inyectiva** si $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$; f es **sobreyectiva** si $f(M) = N$; y f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Dada una función $f : M \to N$ y $A \subset M$, se dice que la **restricción** de f a A es la función $f|_A : A \to N$ dada por $\left(f|_A\right)(x) = f(x)$, cuando $x \in A$. Si se tiene una función $g : A \to N$ y existe una función f con dominio $B \subset M$ y $A \subset B$, se dice que f es una **extensión** de g siempre que $f(x) = g(x)$, cuando $x \in A$ o lo que es lo mismo, $g = f|_A$.

En particular, cuando se hace $\Omega = \mathbb{R}$, se estudian las propiedades fundamentales de este conjunto. Ahora, se tratan algunas de las caracteríticas de los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Tomado $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \phi$. Se dice que S es **acotado superiormente** en $\mathbb{R}$ si existe un número real t tal que $x \leq t$ para todo $x \in S$; t es una **cota superior** de S. Se dice que S es **acotado inferiormente** en $\mathbb{R}$ si existe un número real t tal que $x \geq t$ para todo $x \in S$; t es una **cota inferior** de S.

Se dice que S es **acotado** en $\mathbb{R}$ si S es a la vez acotado superior e inferiormente.

Un número real t_0 se llama el **supremo** de S si t_0 es una cota superior de S tal que ningún $t < t_0$ es una cota superior de S. El supremo de S se nota por $\sup S$. Un número real t_0 se llama el **ínfimo** de S, si t_0 es una cota inferior de S tal que ningún $t > t_0$ es una cota inferior de S. Este hecho se nota $\inf S = t_0$.

Definición 1.1.1. *Dados $S \subset \mathbb{R}$ y $r \in S$, se dice que r es punto* ***interior*** *de S, cuando existe un intervalo (a,b) tal que $r \in (a,b) \subset S$.*

El conjunto de todos los ***puntos interiores*** *de S se llama el* ***interior*** *de S, y se denota por $\overset{\circ}{S}$.*

Definición 1.1.2. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S = \overset{\circ}{S}$, es llamado un* ***conjunto abierto*** *de $\mathbb{R}$, o simplemente un* ***abierto*** *de $\mathbb{R}$.*

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ se llama **cerrado** si su complemento S^c es abierto.

Se presentan algunas propiedades de los abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$:

(i) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de conjuntos abiertos, $\bigcap_{i\in I} X_i$ es un conjunto abierto.

(ii) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, $\bigcup_{i\in I} X_i$ es un conjunto abierto.

(iii) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, $\bigcap_{i\in I} X_i$ es un conjunto cerrado.

(iv) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de conjuntos cerrados, $\bigcup_{i\in I} X_i$ es un conjunto cerrado.

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$. Además si el conjunto I es enumerable, entonces se dice que la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es una sucesión que se puede denotar así:

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{o} \quad (A_i)_i \text{, para } i = 1,2,\ldots$$

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $x_0 \in \mathbb{R}$, se dice que x_0 es el **límite** de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, o que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x_0, si para todo $\varepsilon > 0$ dado, es posible encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_o$ entonces $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Lo cual se denota:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Dada una sucesión (x_n), $n = 1,2,\ldots$, es posible encontrar una nueva sucesión tomando elementos de x_n sin alterar su orden. Es decir, dados $n(1), n(2), \ldots, n(k), \ldots$, números naturales tales que $n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < \cdots$, entonces la nueva sucesión

$$B = \left\{x_{n(1)}, x_{n(2)}, \ldots, x_{n(k)}, \ldots\right\}$$

es una **sub-sucesión** de (x_n).

Dada una sucesión $\{x_n\}$, el máximo límite de todas sus sub-sucesiones se llama **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$ y se nota:

$$\limsup_{n\to\infty} \{x_n\} \text{ o } \overline{\lim_{n\to\infty}} \{x_n\}.$$

Dado por:

$$\limsup_{n\to\infty} \{x_n\} = \inf_n \left\{ \sup_{k\geq n} \{x_k\} \right\}$$

Dada una sucesión $\{x_n\}$, el mínimo límite de todas sus sub-sucesiones se llama **límite inferior** de la sucesión $\{x_n\}$ y se nota:

$$\liminf_{n\to\infty} \{x_n\} \text{ o } \underline{\lim}_{n\to\infty} \{x_n\}.$$

Dado por:

$$\liminf_{n\to\infty} \{x_n\} = \sup_n \left\{ \inf_{k\geq n} \{x_k\} \right\}$$

Definición 1.1.3. *Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de un conjunto Ω se dice que es una* ***topología*** *en Ω si posee las siguientes propiedades:*

(i) $\phi \in \mathcal{T}$ *y* $\Omega \in \mathcal{T}$.

(ii) *Si* $A_i \in \mathcal{T}$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *entonces* $\bigcap_{n=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

(iii) *Si* A_i *es una colección arbitraria de elementos de* $\mathcal{T}$ *entonces* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología en Ω, se dice que $(\Omega, \mathcal{T})$ es un ***espacio topológico****, y los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan conjuntos abiertos en Ω.*

Siendo Ω y Ω' espacios topológicos, y una función $f : \Omega \to \Omega'$. Se dice que f es ***continua*** *si $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en Ω para todo conjunto abierto A en Ω'.*

Definición 1.1.4. *Se denotan los conjuntos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por $[-\infty, \infty]$, $(-\infty, \infty]$ y $[-\infty, \infty)$ respectivamente, y se llaman* ***conjuntos de números reales extendidos****.*
En el conjunto de los números reales extendidos se dan la siguientes reglas aritméticas:

(i) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$.

(ii) $a + (\pm\infty) = \pm\infty, \; a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\dfrac{a}{(\pm\infty)} = 0, \; a \in \mathbb{R}$.

(iv) $$(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & si \; a \in (0, \infty] \\ 0, & si \; a = 0 \\ \mp\infty, & si \; a \in [-\infty, 0). \end{cases}$$

(v) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{\pm\infty}{0}, \infty - \infty$ *no se definen.*

1.2. Clases de Conjuntos

En esta sección se definen ciertas clases de conjuntos, algunas de las propiedades e interrelaciones más sobresalientes entre ellas. Y se fija la notación con la cual se identifica cada clase de conjuntos.

Se considera Ω un conjunto no vacío siempre que no se especifique lo contrario.

Definición 1.2.1. *Dado $\mathscr{R}$ un subconjunto de $\mathscr{P}(\Omega)$. Se dice que $\mathscr{R}$ es un* ***anillo de conjuntos*** *(o un* ***anillo****) en Ω si satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $A, B \in \mathscr{R}$, *entonces* $A \cup B \in \mathscr{R}$

(ii) *Si* $A, B \in \mathscr{R}$, *entonces* $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

Si $\mathscr{R}$ es un anillo en Ω y además $\Omega \in \mathscr{R}$, se dice que $\mathscr{R}$ es una ***álgebra de conjuntos*** *(o una* ***álgebra****) en Ω.*

Observaciones 1.2.2.

(i) Si $\mathscr{R}$ es un anillo en Ω entonces $\phi \in \mathscr{R}$.
En efecto, para $A \in \mathscr{R}$, entonces $(A \setminus A) \in \mathscr{R}$ y $A \setminus A = \phi$ en consecuencia $\phi \in \mathscr{R}$.

(ii) Si $\mathscr{A}$ es una álgebra de conjuntos en Ω, $\mathscr{A}$ es cerrada bajo la operación de complemento. En efecto, si $A \in \mathscr{A}$, $A^c = (\Omega \setminus A) \in \mathscr{A}$.

(iii) La intersección de una familia de anillos en Ω es un anillo en Ω. Así, si se tiene una clase no vacía $\mathscr{C}$ de subconjuntos de Ω entonces la intersección de todos los anillos que contienen a $\mathscr{C}$ se llama **anillo generado** por $\mathscr{C}$. El anillo generado por $\mathscr{C}$ se denota por $R(\mathscr{C})$.

(iv) La observación anterior es cierta si en lugar de un anillo en Ω, se tiene una álgebra en Ω. La **álgebra generada** por $\mathscr{C}$ se denota por $A(\mathscr{C})$.

Proposición 1.2.3. *Si $\mathscr{R}$ un anillo de conjuntos en Ω, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω*

(ii) *$\mathscr{R}$ es cerrada con relación a unión finita y diferencia propia;*

(iii) *$\mathscr{R}$ es cerrada con relación a diferencia simétrica e intersección finita;*

(iv) *$\mathscr{R}$ es cerrada con relación a unión finita disjunta, diferencia propia e intersección finita.*

Prueba. $(i) \to (ii)$ Supónganse $A, B \in \mathscr{R}$, $A \cup B \in \mathscr{R}$ pues $\mathscr{R}$ es un anillo. Como $B \subset (A \cup B)$ y $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$, se tiene que $\mathscr{R}$ es cerrado por diferencia propia.

$(ii) \to (iii)$ Considérense $A, B \in \mathscr{R}$, como $B \subset (A \cup B)$ y $A \subset (A \cup B)$ entonces por hipótesis se tiene que $(A \cup B) \setminus B, (A \cup B) \setminus A \in \mathscr{R}$. De esta manera $A \triangle B = ((A \cup B) \setminus B) \cup ((A \cup B) \setminus A) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{R}$. Y de otra parte $((A \cup B) \setminus B) \subset A$, de modo que $A \cap B = (A \setminus ((A \cup B) \setminus B)) \in \mathscr{R}$. Por lo anterior se tiene que $\mathscr{R}$ es cerrado por diferencia simétrica e intersección finita.

$(iii) \to (iv)$ Tomando $A, B \in \mathscr{R}$, por hipótesis $\mathscr{R}$ es cerrado por intersección finita. Como $A \cap B^c \in \mathscr{R}$ y además $A \cap B^c \subset A$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B^c) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)) \\ &= \phi \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap B) \in \mathscr{R}, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $\mathscr{R}$ es cerrado por diferencia propia.

Puesto que $(A \cap (A \triangle B)), (B \cap (A \triangle B)) \in \mathscr{R}$ y además $(A \cap (A \triangle B)) \cap (B \cap (A \triangle B)) = \phi$, se deduce que $(A \cap (A \triangle B)) \cup (B \cap (A \triangle B)) = (A \triangle B) \cap (A \cup B) = (A \triangle B) \in \mathscr{R}$, así $\mathscr{R}$ es cerrado por unión finita disjunta.

$(iv) \to (i)$ Tomando $A, B \in \mathscr{R}$, se tiene que $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $(A \setminus (A \cap B)) \cap (B \setminus (A \cap B)) = \phi$, $(A \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \phi$ y $(B \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \phi$, de este modo

$$A \cup B = ((A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)) \in \mathscr{R}.$$

De otro lado $A \setminus B = (A \cap (A \setminus (A \cap B))) \in \mathscr{R}$. Por lo tanto $\mathscr{R}$ es un anillo. ■

Ejemplo 1.2.4. Si $\Omega = \mathscr{P}(\Omega)$ entonces $\mathscr{R} = \{\phi\}$ es un anillo de conjuntos.
En efecto, ya que por la definición del conjunto $\mathscr{R}$ se tiene que $\phi \in \mathscr{R}$, y de esta manera $\phi \cup \phi = \phi \in \mathscr{R}$, además $\phi \cap \phi^c = \phi \in \mathscr{R}$. En consecuencia $\mathscr{R}$ es un anillo en Ω

Ejemplo 1.2.5. $\mathscr{R} = \mathscr{P}(\Omega)$ es una álgebra de conjuntos en Ω.
Tomando $A, B \in \mathscr{R}$, entonces $A \subseteq \Omega$ y $B \subseteq \Omega$, por lo tanto $A \cup B \subseteq \Omega$, y, $A \setminus B \subseteq \Omega$, de donde $A \cup B \in \mathscr{R}$ y $A \setminus B \in \mathscr{R}$. Además $\Omega \in \mathscr{R}$ y así $\mathscr{R}$ es una álgebra.

Ahora se definen en Ω dos clases de conjuntos más débiles que un anillo o una álgebra, en el sentido, que se restringe la posibilidad de encontrar operaciones de cierre entre los elementos de estas clases de conjuntos.

Definición 1.2.6. *Dado $\mathbb{S}$ un subconjunto de $\mathscr{P}(\Omega)$. Se dice que $\mathbb{S}$ es un **semi-anillo de conjuntos** (o un **semi-anillo**) en Ω si satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Si $A, B \in \mathbb{S}$ entonces $A \cap B \in \mathbb{S}$*

(ii) *Si $A, B \in \mathbb{S}$ existe una colección de conjuntos $\{C_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{S}$ con $C_i \cap C_j = \phi$ para $i \neq j$, tal que $A \setminus B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$.*

*Si $\mathbb{S}$ es un semi-anillo y $\Omega \in \mathbb{S}$, $\mathbb{S}$ es llamada una **semi-álgebra de conjuntos** (o una **semi-álgebra**) en Ω.*

Observación 1.2.7. Si $\mathbb{S}$ es un semi-anillo de conjuntos en Ω entonces $\phi \in \mathbb{S}$. En efecto, puesto que Ω es un conjunto no vacío se deduce que $\mathbb{S}$ es no vacío.
Considérese $A \in \mathbb{S}$, entonces existe una familia $\{C_i\}_{n=1}^{\infty} = A \cap A^c$ de elementos de $\mathscr{S}$ con $C_i \cap C_j = \phi$ para $i \neq j$ y en consecuencia $\phi = A \cap A^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_i$.

Un ejemplo importante de semi-anillo es:

Ejemplo 1.2.8. Si $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{S} = \{(a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \leq b\}$ es un semi-anillo en Ω.
En efecto, si $(a, b], (c, d] \in \mathbb{S}$ y $a \leq b \leq c \leq d$, entonces $(a, b] \cap (c, d] = \phi$. Por la observación 1.2.7 $\phi \in \mathbb{S}$. Si $a \leq c \leq b \leq d$, entonces $(a, b] \cap (c, d] = (c, b] \in \mathbb{S}$; y si $a \leq c \leq d \leq b$, entonces $(a, b] \cap (c, d] = (c, d] \in \mathbb{S}$. Por lo tanto $(a, b] \cap (c, d] \in \mathbb{S}$.

De otra parte si se toma $a \leq c \leq d \leq b$, existe $(c_i, d_i] \subset \mathbb{S}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que

$$a = c_n < c_{n-1} < \cdots < c_0 = c < d = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = b,$$

así, $C_i = \{(c_i, c_{i-1}]\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{S}$ con $C_i \cap C_j = \phi$ para $i \neq j$, $D_i = \{(d_i, d_{i-1}]\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{S}$ con $D_i \cap D_j = \phi$ para $i \neq j$ y además $C_i \cap D_i = \phi$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $(a, b] \setminus (c, d] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (C_i \cup D_i)$. En consecuencia $\mathbb{S}$ es un semi-anillo.

Nótese que $\mathbb{S}$ no es una semi-álgebra, pues $\Omega \notin \mathbb{S}$. Sin embargo si $\Omega = (-\infty, \infty]$ se tiene que $\omega \in \mathbb{S}$ y así $\mathbb{S}$ es una semi-álgebra en Ω.

La aplicación inmediata de la siguiente clase de conjuntos es que a partir de sus elementos es posible generar un semi-anillo.

Definición 1.2.9. *Una clase no vacía $\mathscr{L}$ de conjuntos en Ω que cumple:*

(i) *$\phi \in \mathscr{L}$,*

(ii) *Si $A, B \in \mathscr{L}$, entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathscr{L}$,*

*se denomina **retículo de conjuntos** en Ω.*

Proposición 1.2.10. *Dado $\mathscr{L}$ un retículo de conjuntos en Ω. Si $\boldsymbol{P} = \{B \setminus A : A, B \in \mathscr{L}$ con $A \subset B\}$, entonces $\boldsymbol{P}$ es un semi-anillo y $\mathscr{L} \subset \boldsymbol{P}$.*

Prueba. Como $\phi \in \boldsymbol{P}$, $\mathscr{L} \subset \boldsymbol{P}$. Considérense $D_i = B_i \setminus A_i$, $A_i \subset B_i$, $A_i, B_i \in \mathscr{L}$, $i = 1, 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 &= (B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2) \\ &= (B_1 \cap A_1^c) \cap (B_2 \cap A_2^c) \\ &= B_1 \cap B_2 \cap (A_1^c \cap A_2^c) \\ &= B_1 \cap B_2 \cap (A_1 \cup A_2)^c \\ &= B_1 \cap B_2 \setminus A_1 \cup A_2. \end{aligned}$$

Por hipótesis $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{L}$ y $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{L}$. En consecuencia $D_1 \cap D_2 \in \boldsymbol{P}$.

Si $D_2 \subset D_1$, se hace $C = (B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$. Entonces, $D_2 = B_2 \setminus A_2 = B_2 \cap A_2^c \subset B_1 \cap A_1^c$ ya que $D_2 \subset D_1$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} D_2 \subset (B_1 \cap A_1^c) \cap B_2 &= (B_1 \cap B_2) \cap A_1^c \\ &= (B_1 \cap B_2) \cap (B_1 \cap B_2 \cap A_1)^c \\ &= (B_1 \cap B_2) \setminus (B_1 \cap B_2 \cap A_1) \\ &= (B_1 \cap B_2) \setminus (B_2 \cap A_1) \\ &= C, \end{aligned}$$

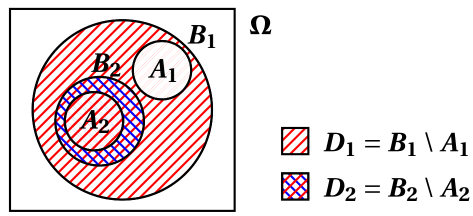

Figura 1.1

y $C = B_1 \cap B_2 \cap A_1^c \subset B_1 \cap A_1^c = D_1$. Así, $D_2 \subset C \subset D_1$ y $C \in \boldsymbol{P}$; además,

$$\begin{aligned} C \setminus D_2 &= (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c) \setminus (B_2 \setminus A_2) \\ &= (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c) \setminus (B_2 \cap A_2^c) \\ &= (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c) \cap (B_2 \cap A_2^c)^c \\ &= B_1 \cap B_2 \cap A_1^c \cap (B_2^c \cup A_2) \\ &= B_1 \cap B_2 \cap A_1^c \cap A_2 \\ &= (B_1 \cap B_2) \setminus A_1 \cap A_2 \in \boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} D_1 \setminus C &= (B_1 \setminus A_1) \setminus (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c) \\ &= (B_1 \cap A_1^c) \cap (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c)^c \\ &= B_1 \cap A_1^c \cap (B_2 \cap A_1^c)^c \\ &= B_1 \cap A_1^c \cap (B_2^c \cup A_1) \\ &= B_1 \cap A_1^c \cap B_2^c \\ &= B_1 \cap (A_1 \cup B_2)^c \\ &= B_1 \setminus (A_1 \cup B_2) \in \boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

De este modo $(D_1 \setminus C) \cap (C \setminus D_2) = \phi$ y así $D_1 \setminus D_2 = (D_1 \setminus C) \cup (C \setminus D_2)$. Por lo tanto $\boldsymbol{P}$ es un semi-anillo. ■

Proposición 1.2.11.

(i) *Un semi-anillo $\mathbb{S}$ cerrado por la operación de unión de sus miembros es un anillo.*

(ii) *El anillo generado por un semi-anillo $\mathbb{S}$ de conjuntos en Ω se da por la colección de todas las uniones finitas de elementos disjuntos de $\mathbb{S}$.*

Prueba. (i) Considérense $A, B \in \mathbb{S}$. Por hipótesis $A \cup B \in \mathbb{S}$. Ahora $A \cap B \in \mathbb{S}$ y $A \cap B \subset A$. Por lo tanto, por la definición de semi-anillo existe una cadena completa de conjuntos $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\} \subset \mathbb{S}$ tal que $A \cap B = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = A$ con $(C_i \setminus C_{i-1}) \in \mathbb{S}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Por hipótesis, $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (C_i \setminus C_{i-1}) \in \mathbb{S}$ y, por lo tanto, $\mathbb{S}$ es un anillo.

(ii) Considérese $\mathscr{R} = \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathbb{S},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ A_i \cap A_j = \phi \text{ para } i \neq j,\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Entonces $\mathscr{R}$ es cerrado por uniones disjuntas. Se afirma que $\mathscr{R}$ es un semi-anillo. En efecto, si $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_j$, $A_i \cap A_{i'} = \phi$ para $i \neq i'$, $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{S}$, $B_j \cap B_{j'} = \phi$ para $j \neq j'$, $\left\{B_j\right\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{S}$, entonces $A \cap B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m} \left(A_i \cap B_j\right)$, y, $\left\{\left(A_i \cap B_j\right)\right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}}$ es una familia de miembros disjuntos de $\mathbb{S}$. Por lo tanto $(A \cap B) \in \mathscr{R}$. Ahora, considérense $A, B \in \mathbb{S}$ con $A \subset B$. Entonces por la definición 1.2.6, $B \setminus A$ es una unión finita de miembros disjuntos de $\mathbb{S}$ y, por lo tanto, $B \setminus A \in \mathscr{R}$. Si $A \in \mathbb{S}$ y $B \in \mathscr{R}$ con $A \subset B$, existe una familia finita $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{S}$ tal que $B_i \cap B_j = \phi$ para $i \neq j$ con $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. Luego, $B \setminus A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (B_i \setminus A) \in \mathscr{R}$, puesto que $B_i \setminus A = (B_i \setminus (B_i \cap A)) \in \mathscr{R}$ y además $\mathscr{R}$ es cerrado por unión finita de miembros disjuntos de $\mathscr{R}$.

Por último, si $A, B \in \mathscr{R}$ con $A \subset B$, considérese $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$, donde $\{A_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{S}$ y $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$. Entonces

$$
\begin{aligned}
B \setminus A &= B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right) \\
&= B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right)^c \\
&= B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i^c \right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{m} \left(B \cap A_i^c \right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{m} (B \setminus A_i) \in \mathscr{R},
\end{aligned}
$$

por el hecho de que $\mathscr{R}$ es cerrado por intersección finita de sus miembros y $(B \setminus A_i) \in \mathscr{R}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Por lo tanto se puede tomar $A = C_0 \subset C_1 = B$ con $C_0, C_1 \in \mathscr{R}$ y $(C_1 \setminus C_0) \in \mathscr{R}$ y $B \setminus A = C_1 \setminus C_0$. En consecuencia $\mathscr{R}$ es un semi-anillo.

Ahora dados $A, B \in \mathscr{R}$, se tiene que $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, que es una unión disjunta de miembros de $\mathscr{R}$, luego, $A \cup B \in \mathscr{R}$. Ahora, por (i), $\mathscr{R}$ es un anillo.

Si $\mathscr{R}_1$ es un anillo arbitrario que contiene a $\mathbb{S}$, entonces $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}_1$ y por lo tanto, $\mathscr{R} = R(\mathbb{S})$. ∎

Se presentan dos clases de conjuntos que tienen la particularidad de lograr operaciones de cierre introduciendo una cantidad numerable de sus elementos, lo cual los hace conceptos más especiales que los de anillo y álgebra.

Definición 1.2.12. *Un subconjunto $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ es un* ***σ-anillo de conjuntos*** *(o un* ***σ-anillo****) en Ω si satisface las siguientes condiciones:*

(i) *Si $A, B \in \mathscr{S}$ entonces $A \setminus B \in \mathscr{S}$.*

(ii) *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathscr{S}$, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$.*

Si se tiene un σ-anillo $\mathscr{S}$ en Ω y además $\Omega \in \mathscr{S}$, se dice que $\mathscr{S}$ es una ***σ-álgebra de conjuntos*** *(o una* ***σ-álgebra****) en Ω.*

Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en Ω, $(\Omega, \mathscr{A})$ se llama un ***espacio medible****, y a los elementos de $\mathscr{A}$ se les llama* ***conjuntos medibles****.*

Observaciones 1.2.13.

(i) Todo σ-anillo es cerrado por intersecciones enumerables. En efecto, si se consideran $\mathscr{S}$ un σ-anillo de conjuntos en Ω donde $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}$ y si $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces $A \in \mathscr{S}$. Así,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \cap A \\
&= A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\
&= A \setminus \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)\right) \\
&= A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A \cap A_i^c\right)\right) \\
&= A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_i)\right) \in \mathscr{S},
\end{aligned}$$

luego $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S}$

(ii) La intersección de una familia de σ-anillos en Ω es un σ-anillo en Ω. Así, si se tiene una clase no vacía $\mathscr{C}$ de subconjuntos de Ω entonces la intersección de todos los σ-anillos que contienen a $\mathscr{C}$ se llama ***σ*-anillo generado** por $\mathscr{C}$.

El σ-anillo generado por $\mathscr{C}$ se denota por $\mathscr{S}(\mathscr{C})$.

(iii) La observación 1.2.13 parte (ii) es cierta si en lugar de un σ-anillo en Ω, se tiene una σ-álgebra.

La ***σ*-álgebra generada** por $\mathscr{C}$ se denota por $\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

Ejemplo 1.2.14. Si $(\Omega, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la σ-álgebra generada por los abiertos del espacio topológico se denomina ***σ*-álgebra de Borel**, y se denota $\sigma(\mathcal{T}) = \mathscr{B}(\Omega)$. Sus elementos se llaman **conjuntos de Borel**, o simplemente **borelianos**.
De esta manera, se puede decir que $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ es un espacio medible.
En particular, $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ es un espacio medible, donde los abiertos en $\mathbb{R}$ son borelianos.

Ejemplo 1.2.15. Tomando $\Omega = \mathbb{N}$ y $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. La colección $\mathscr{S} = \mathscr{P}(A)$ es un σ-anillo.

Observación 1.2.16. Una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos en Ω no decreciente (respectivamente no creciente) se denota por $A_n \uparrow$ (respectivamente $A_n \downarrow$). Y se escribe $A_n \uparrow A$ (respectivamente $A_n \downarrow A$) si $A_n \uparrow$ (respectivamente $A_n \downarrow$), y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ (respectivamente $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$).

Definición 1.2.17. *Si $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, se dice que $\mathscr{M}$ es una* ***clase monótona*** *si cumple las siguientes condiciones:*

(i) *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente de elementos de $\mathscr{M}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.*

(ii) *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no creciente de elementos de $\mathscr{M}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.*

Observaciones 1.2.18.

(i) Todo σ-anillo es una clase monótona. En efecto, considérese un σ-anillo $\mathscr{S}$ de conjuntos en Ω, $\mathscr{S}$ es una clase monótona ya que es cerrado por unión e intersección numerables de sus miembros por la definición 1.2.12 y por la observación 1.2.13.

(ii) Análogamente a la observación 1.2.13 (ii) si en lugar de un σ-anillo se tiene una clase monótona. La **clase monótona generada** por $\mathscr{C}$ se denota por $\mathscr{M}(\mathscr{C})$

Teorema 1.2.19. *Si una clase monótona $\mathscr{M}$ es un anillo, entonces $\mathscr{M}$ es un σ-anillo.*

Prueba. Supóngase que $\mathscr{M}$ es un anillo que a la vez es una clase monótona. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$, entonces $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{M}$ y $B_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Como $\mathscr{M}$ es una clase monótona, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$. Por lo tanto, $\mathscr{M}$ es un σ-anillo. ■

Teorema 1.2.20 (La clase monótona generada por un anillo)**.** *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω, entonces $\mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R})$. En consecuencia, si $\mathscr{M}$ es una clase monótona que contiene a un anillo $\mathscr{R}$, entonces $\mathscr{M}$ contiene a $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.*

Prueba. Para cada $B \subset \Omega$, considérese $C(B) = \left\{A \subset \Omega : (A \setminus B, B \setminus A, A \cup B) \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})\right\}$.

De este modo $A \in C(B)$ si y solo si $B \in C(A)$.

AFIRMACIÓN:

$$\mathscr{R} \subset C(B) \text{ para cada } B \in \mathscr{R}. \tag{1.2.1}$$

En efecto, si $A, B \in \mathscr{R}$, entonces por ser $\mathscr{R}$ un anillo, $\{A \setminus B, B \setminus A, A \cup B\} \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})$. Así, $A \in C(B)$ lo cual implica que $\mathscr{R} \subset C(B)$.

AFIRMACIÓN:

$$C(B) \text{ es una clase monótona si } C(B) \text{ es no vacía.} \tag{1.2.2}$$

Considérese $\{A_n\}_{n=i}^{\infty}$ una sucesión monótona en $C(B)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \setminus B &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus B \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B) \in \mathscr{M}(\mathscr{R}); \\ B \setminus \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= B \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \\
&= B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(B \cap A_n^c \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus A_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{R}), \text{ y,}
\end{aligned}
$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) \cup B = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B) \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$. Si $A_n \uparrow$.

Si $A_n \downarrow$, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) \setminus B &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \setminus B \\
&= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B^c \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cap B^c \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B) \in \mathscr{M}(\mathscr{R}); \\
B \setminus \left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) &= B \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\
&= B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \\
&= B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(B \cap A_n^c \right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \setminus A_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{R}).
\end{aligned}
$$

Además $\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) \cup B = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B) \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$.

De esta manera $C(B)$ es una clase monótona.

AFIRMACIÓN:

$$\mathscr{M}(\mathscr{R}) \text{ es un anillo.} \tag{1.2.3}$$

En efecto, considérense $A \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ y $B \in \mathscr{R}$. Entonces por (1.2.1), $\mathscr{R} \subset C(B)$, y según (1.2.2) se tiene que $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M}(C(B)) = C(B)$, y por lo tanto, $A \in C(B)$, lo cual implica que $A \in C(A)$. Como A es arbitrario en $\mathscr{R}$, se tiene que $\mathscr{R} \subset C(A)$ y por (1.2.2) se deduce que $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \subset C(A)$.

Si $A, B \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$, entonces $B \in C(A)$ y luego, $\{A \setminus B, B \setminus A, A \cup B\} \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})$, lo cual implica que $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ es un anillo.

Por (1.2.3) y por ser $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ una clase monótona, $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ es un σ-anillo y así, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})$.

Como $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ es una clase monótona, se tiene $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{S}(\mathscr{R})$. En consecuencia, se concluye que $\mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R})$.

Por último, si $\mathscr{M}$ es una clase monótona que contiene a un anillo $\mathscr{R}$, entonces $\mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M}$. ■

Proposición 1.2.21. *Si $\mathscr{E}$ es una clase no vacía de conjuntos en Ω, y A es un subconjunto de Ω, entonces*

$$\mathscr{S}(\mathscr{E}) \cap A = \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A) = \mathscr{S}\left(\{F : F = E \cap A,\ E \in \mathscr{E}\}\right).$$

Prueba. Considérese $\mathscr{C}$ la clase de todos los conjuntos de la forma $B \cup (C \setminus A)$ donde $B \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)$ y $C \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$.

$\mathscr{C}$ es un σ-anillo. En efecto, si $\{B_i \cap (C_i \setminus A)\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}$ donde $B_i \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)$ y $C_i \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$ para $i = 1, 2, \ldots$ Entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (B_i \cup (C_i \setminus A)) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \cup \left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i\right) \setminus A\right) \in \mathscr{C}$, puesto que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$.

Considérese $F_i = B_i \cup (C_i \setminus A) \in \mathscr{C}$, $i = 1, 2$. Ya que $B_i \subset A$, $B_i^c \cap A^c = A^c$ y $B_i \cap A = B_i$, $i = 1, 2$. Así,

$$\begin{aligned}
F_1 \setminus F_2 &= (B_1 \cup (C_1 \setminus A)) \setminus (B_2 \cup (C_2 \setminus A)) \\
&= \left(B_1 \cup \left(C_1 \cap A^c\right)\right) \cap \left(B_2 \cup \left(C_2 \cap A^c\right)\right)^c \\
&= \left(B_1 \cup \left(C_1 \cap A^c\right)\right) \cap \left(B_2^c \cap \left(C_2^c \cup A\right)\right) \\
&= B_1 \cap B_2^c \cap C_2^c \cup B_1 \cap B_2^c \cap A \cup C_1 \cap A^c \cap B_2^c \cap C_2^c \cup C_1 \cap A^c \cap B_2^c \cap A \\
&= B_1 \cap B_2^c \cap C_2^c \cup B_2 \cap B_2^c \cup C_1 \cap C_2^c \cap A^c \\
&= \left(B_1 \cap B_2^c\right) \cup \left(C_1 \cap C_2^c\right) \cap A^c \\
&= (B_1 \setminus B_2) \cup ((C_1 \setminus C_2) \setminus A) \in \mathscr{C}.
\end{aligned}$$

Como $(B_i \setminus B_2) \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)$ y $(C_1 \setminus C_2) \in \mathscr{S}(\mathscr{E})$. Por lo tanto $\mathscr{C}$ es un σ-anillo.

Para todo $E \in \mathscr{E}$ se tiene que $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ y así, $E \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$ y, en consecuencia $\mathscr{S}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Además,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}(\mathscr{E}) \cap A \subset \mathscr{C} \cap A &= \left\{B \cup (C \setminus A) \cap A :\ B \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A),\ C \in \mathscr{S}(\mathscr{E})\right\} \\
&= \left\{B :\ B \in \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)\right\} \\
&= \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A).
\end{aligned}$$

Pero $\mathscr{S}(\mathscr{E}) \cap A$ es un σ-anillo y así, $\mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A) \subset \mathscr{S}(\mathscr{E}) \cap A$.

En consecuencia, se tiene que $\mathscr{S}(\mathscr{E}) \cap A = \mathscr{S}(\mathscr{E} \cap A)$. ■

Definición 1.2.22. *Un anillo $\mathscr{R}$ de conjuntos en Ω es* ***hereditario*** *si $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{R}$, para todo $A \in \mathscr{R}$. El* ***σ-anillo hereditario*** *$H(\mathscr{C})$* ***generado*** *por una clase de conjuntos no vacía $\mathscr{C}$ es el más pequeño σ-anillo hereditario que contiene a $\mathscr{C}$.*

Proposición 1.2.23. *Siendo $\mathscr{C}$ una clase no vacía de conjuntos en Ω. Entonces, $H(\mathscr{C})$ es la colección de todos los conjuntos que se pueden cubrir por la unión numerable de miembros de $\mathscr{C}$.*

Prueba. Considérese $\mathscr{S} = \left\{A :\ A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathscr{C},\ i \in \mathbb{N}\right\}$. Entonces $\mathscr{S}$ es un σ-anillo hereditario que contiene a $\mathscr{C}$. Luego, $H(\mathscr{C}) \subset \mathscr{S}$.

Por otra parte, si $A \in \mathscr{S}$, entonces existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Como $H(\mathscr{C})$ es un σ-anillo hereditario, luego $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ y A pertenecen a $H(\mathscr{C})$.

Es decir, $\mathscr{S} = H(\mathscr{C})$. ■

CAPÍTULO 2

MEDIDA Y CONJUNTOS MEDIBLES

2.1. Medidas

Definición 2.1.1. *Dado* $(\Omega,\mathscr{A})$ *un espacio medible. Una función* $\mu:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ *es una* ***medida*** *si satisface:*

(i) $\mu(\phi)=0$

(ii) *μ es **σ-aditiva** o **numerablemente aditiva**, es decir, para cada sucesión* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de elementos de $\mathscr{A}$ tales que $A_i\cap A_j=\phi$ para $i\neq j$ y* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$*, se verifica*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

*Una medida μ es llamada **finita** si para todo $A\in\mathscr{A}$ se tiene $\mu(A)<\infty$ y **σ-finita** si existe* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$ *con* $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ *y* $\mu(A_n)<\infty$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$.

*Si $(\Omega,\mathscr{A})$ es un espacio medible y μ una medida en $\mathscr{A}$, $\big(\Omega,\mathscr{A},\mu\big)$ se denomina **espacio de medida**.*

Proposición 2.1.2. *Dados Ω, un anillo $\mathscr{R}$ de conjuntos en Ω y una medida $\mu:\mathscr{R}\to[0,\infty]$. Para cada $A,B\in\mathscr{R}$ se cumple:*

(i) $\mu(B)=\mu(B\cap A)+\mu(B\cap A^c)$

(ii) *μ es **sustractiva**, es decir, si $A\subset B$ entonces* $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$

(iii) *Si $A\subset B$ y $\mu(A)=\infty$, entonces* $\mu(B)=\infty$

(iv) *μ es **monótona creciente**, es decir, si $A\subset B$ entonces* $\mu(A)\leq\mu(B)$

(v) $\mu(A\cup B)+\mu(B\cap A)=\mu(A)+\mu(B)$

(vi) $\mu(A\cup B)\leq\mu(A)+\mu(B)$

Prueba. (i) Como $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ y $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \phi$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\big((B \cap A) \cup (B \cap A^c)\big) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c). \end{aligned}$$

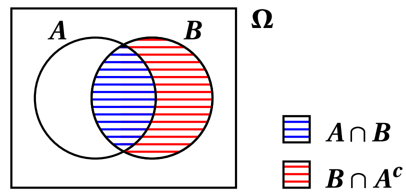

Figura 2.1

(ii) Como $A \subset B$ se tiene que $B = A \cup (A^c \cap B)$ y $A \cap (A^c \cap B) = \phi$, luego

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\big(A \cup (A^c \cap B)\big) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A). \end{aligned}$$

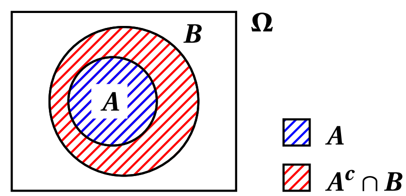

Figura 2.2

(iii) Por la parte (ii) se tiene que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \infty + k$, luego $\mu(B) = \infty$.

(iv) Por (ii) se tiene $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, luego $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A) \geq 0$, y por lo tanto $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(v) Como $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ y $(A \cap B^c) \cap (A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \phi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu\big((A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)\big) \\ &= \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B). \quad (2.1.1) \end{aligned}$$

Ahora por (i) y (2.1.1) se tiene

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \end{aligned}$$

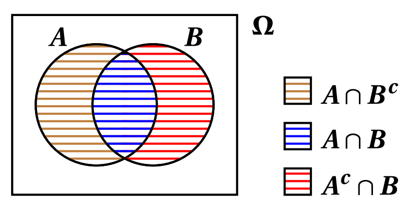

Figura 2.3

(vi) Por (v) se tiene que $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B)$, en consecuencia $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. ■

Definición 2.1.3. *Dados $\mathscr{C}$ una clase no vacía de conjuntos en Ω y una función de conjuntos $\lambda : \mathscr{C} \to [0, \infty]$. Se dice que λ es **finitamente aditiva** en $\mathscr{C}$ si para cada familia finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de elementos de $\mathscr{C}$ disjuntos entre sí dos a dos y cuya unión pertenece a $\mathscr{C}$ entonces*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i).$$

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathscr{R}$ un anillo de conjuntos en Ω. Si μ es una medida en $\mathscr{R}$ entonces μ es finitamente aditiva en $\mathscr{R}$.*

Prueba. Considérese $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{R}$ con $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$. si se hace $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$, entonces $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ con $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$, y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \mathscr{R}$. Por la definición 2.1.1 se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

es decir μ es finitamente aditiva en $\mathscr{R}$. ■

Proposición 2.1.5. *Dado $\mathscr{R}$ un anillo de conjuntos en Ω. Si para algún $A \in \mathscr{R}$ se tiene que $\mu(A) < \infty$ y si μ es σ-aditiva en $\mathscr{R}$ entonces $\mu(\phi) = 0$. Así, μ es una medida en $\mathscr{R}$.*

Prueba. Si $A \in \mathscr{R}$ con $\mu(A) < \infty$, entonces haciendo $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \cdots = \phi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(A) =& \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \\ =& \mu\left(A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i\right) \\ =& \mu(A) + \mu\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i\right) \\ =& \mu(A) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(A_i). \end{aligned}$$

Como $\mu(A)$ es finita, se obtiene $\sum_{i=2}^{\infty} \mu(A_i) = 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} n\mu(\phi) = 0$, lo cual muestra que $\mu(\phi) = 0$. Y de este modo se tiene que μ es una medida en $\mathscr{R}$. ■

Observación 2.1.6. Nótese que $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty)$ es una medida en un anillo $\mathscr{R}$ de conjuntos en Ω si y solo si μ es numerablemente aditiva en $\mathscr{R}$.

Ejemplo 2.1.7. Considérese $\Omega = \mathbb{N}$. La función $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty, & \text{si } A \text{ es infinito,} \end{cases}$$

se llama **medida de conteo**.

Proposición 2.1.8. *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω y $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ es una medida en $\mathscr{R}$, entonces μ es **completamente** (o **numerablemente**) **sub-aditiva**, es decir, si dada una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Prueba. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$, entonces si se hace $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$, $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \ldots$, se tiene $B_i \cap B_j = \phi$ para $i \neq j$, $B_i \in \mathscr{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Como μ es numerablemente aditiva y monótona, se deduce que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$ ■

Lema 2.1.9. *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω y $\mu : \mathscr{R} \to [0,\infty]$ es una medida en $\mathscr{R}$, entonces μ es **continua por abajo**, es decir, dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de elementos de $\mathscr{R}$, con $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Prueba. Si se hace $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \ldots$, se tiene que $B_n \in \mathscr{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap B_m = \phi$ para $n \neq m$ y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Como μ es una medida en $\mathscr{R}$, por la proposición 2.1.4 μ es finitamente aditiva en $\mathscr{R}$, luego

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

■

Lema 2.1.10. *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω y $\mu : \mathscr{R} \to [0,\infty]$ es una medida en $\mathscr{R}$, entonces μ es **condicionalmente continua por arriba**, es decir, dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ no creciente de miembros de $\mathscr{R}$ con $\mu\left(A_{n_0}\right) < \infty$ para algún n_0, y con $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, entonces se tiene que*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Prueba. Considérese una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ no creciente de miembros de $\mathscr{R}$ con $\mu\left(A_{n_0}\right) < \infty$ para algún n_0, y con $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$. Si $A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $A_0 = \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} A_n$.

Tomando $B_n = A_n \setminus A_0$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $B_n \downarrow$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \phi$. Si se toma $C_n = B_{n_0+n-1} \setminus B_{n_0+n}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ y $C_n \cap C_m = \phi$ para $n \neq m$.

Como $B_n \downarrow$ entonces $C_n \subset B_{n_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset B_{n_0}$. Si la contenencia es estricta, entonces existe $x_0 \in B_{n_0}$ tal que $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Es decir, $x_0 \notin C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x_0 \notin B_{n_0+k-1} \setminus B_{n_0+k}$ y así, $x_0 \in B_{n_0+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_{n_0+k} = \phi$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu\left(B_{n_0}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B_{n_0+n-1} \setminus B_{n_0+n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu\left(B_{n_0+n-1}\right) - \mu\left(B_{n_0+n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\mu\left(B_{n_0+k-1}\right) - \mu\left(B_{n_0+k}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(B_{n_0}\right) - \mu\left(B_{n_0+n}\right)\right) \\
&= \mu\left(B_{n_0}\right) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right).
\end{aligned}
$$

Puesto que $\mu\left(B_{n_0}\right) < \infty$, se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = 0$. Es decir,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(A_n \setminus A_0\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(A_n\right) - \mu\left(A_0\right)\right),$$

ya que μ es sustractiva y $\mu\left(A_0\right) \leq \mu\left(A_{n_0}\right) < \infty$. Así, $\mu(A_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ y $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$. ∎

Teorema 2.1.11. *Dados $\mathscr{S}$ un σ-anillo de conjuntos en Ω, $\mathscr{L}$ es un retículo de conjuntos en Ω tal que $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$, μ y ν medidas en $\mathscr{S}$ de tal manera que $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathscr{L}$. Si para $E \in \mathscr{S}(\mathscr{L})$, existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}$ tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathscr{S}(\mathscr{L})$.*

Prueba. Por la proposición 1.2.10, $\mathbb{S} = \{A \setminus B : A, B \in \mathscr{L} \text{ con } B \subset A\}$ es un semi-anillo que contiene a $\mathscr{L}$. Por lo tanto a partir de la proposición 1.2.11 se deduce que

$$R(\mathbb{S}) = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i : \ E_i \cap E_j = \phi \text{ para } i \neq j,\ E_i \in \mathbb{S} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Primero se asume que μ y ν son medidas finitas en $\mathscr{S}$. Por hipótesis, para $A \setminus B \in \mathbb{S}$ con $A, B \in \mathscr{L}$ y $B \subset A$, se tiene que

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B).$$

Por lo tanto, $\mu|_{R(\mathbb{S})} = \nu|_{R(\mathbb{S})}$, por la construcción de $R(\mathbb{S})$.

Considérese $\mathscr{M} = \left\{E \in \mathscr{S} : \ \mu(E) = \nu(E)\right\}$. Entonces $R(\mathbb{S}) \subset \mathscr{M}$.

Se afirma que $\mathscr{M}$ es una clase monótona. En efecto, como $R(\mathbb{S}) \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ no es vacía. Si $E_n \uparrow E$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$, entonces por el lema 2.1.9, se deduce que

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \nu(E)$$

y así, $E \in \mathscr{M}$.

Si $E_n \downarrow E$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$, entonces por el lema 2.1.10, se tiene que $\mu(E) = \nu(E)$ y así, $E \in \mathscr{M}$. De este modo, $\mathscr{M}$ es una clase monótona.

Como $\mathscr{M}$ es una clase monótona que contiene a $R(\mathbb{S})$ por el teorema 1.2.20, $\mathscr{M} = \mathscr{S}(R(\mathbb{S})) = \mathscr{S}(\mathbb{S})$. Es decir, $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathscr{S}(\mathbb{S}) = \mathscr{S}(\mathscr{L})$.

Ahora, considérese μ una medida no necesariamente finita, pero que cumple la hipótesis del teorema.

Si $E \in \mathscr{S}(\mathscr{L})$, por hipótesis, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}$ con $\mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Considérense μ_n y ν_n las medidas finitas en $\mathscr{S}$ definidas por $\mu_n(F) = \mu(F \cap B_n)$ y $\nu_n(F) = \nu(F \cap B_n)$ para todo $F \in \mathscr{S}$, donde $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Para $A \in \mathscr{L}$ se tiene que $\mu_n(A) = \mu(A \cap B_n) = \nu(A \cap B_n) = \nu_n(A)$ ya que $(A \cap B_n) \in \mathscr{L}$ y $\mu|_{\mathscr{L}} = \nu|_{\mathscr{L}}$. Como μ_n y ν_n son medidas finitas en $\mathscr{S}$, en consecuencia, se obtiene

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_n \cap E) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap E.$$

Como $B_n \cap E \uparrow$, por el lema 2.1.9 se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \lim_{n \to \infty} \mu(B_n \cap E) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu_n(E) \\ &= \lim_{n \to \infty} \nu_n(E) \\ &= \lim_{n \to \infty} \nu_n(B_n \cap E) \\ &= \nu(E), \text{ para todo } E \in \mathscr{S}(\mathscr{L}). \end{aligned}$$

■

2.2. Medidas Exteriores y Extensión de Medidas

Definición 2.2.1. *Dado H un σ-anillo hereditario de conjuntos en Ω. Una **medida exterior** es una función de conjuntos*

$$\mu^* : H \to [0, \infty]$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) $\mu^*(\phi) = 0$

(ii) *Si $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*

(iii) *μ^* es completamente sub-aditiva, es decir, para toda sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{P}(\Omega)$ se cumple que*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Definición 2.2.2. *Sean H un σ-anillo hereditario de conjuntos en Ω y μ^* una medida exterior en H. Un conjunto $A \in H$ se llama **μ^*-medible** si para cada $C \in H$ se tiene que*

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c).$$

La colección de todos los conjuntos μ^*-medibles se denota por M_{μ^*}.

Observación 2.2.3. Como μ^* es sub-aditiva en H, $A \in H$ es μ^*-medible si y solo si, para cada $A \in H$ se tiene que $\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c)$.

Lema 2.2.4. *La colección de todos los conjuntos μ^*-medibles M_{μ^*} es un anillo de conjuntos en Ω.*

Prueba. Considérense $A, B \in M_{\mu^*}$ y $C \in H$. Usando C, $C \cap A$, y $C \cap A^c$, respectivamente, en lugar de C en la definición 2.2.2 se tiene las siguientes identidades:

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \tag{2.2.1}$$

$$\mu^*(C \cap A) = \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(C \cap A \cap B^c) \tag{2.2.2}$$

$$\mu^*(C \cap A^c) = \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c). \tag{2.2.3}$$

Usando las identidades (2.2.2) y (2.2.3) en (2.2.1) se obtiene:

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(C \cap A \cap B^c) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c). \tag{2.2.4}$$

Al reemplazar C por $C \cap (A \cup B)$ en (2.2.4), se deduce que

$$\begin{aligned}
\mu^*(C \cap (A \cup B)) =& \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A \cap B) + \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A \cap B^c) \\
&+ \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A^c \cap B) + \mu^*((C \cap (A \cup B)) \cap A^c \cap B^c) \\
\mu^*(C \cap (A \cup B)) =& \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(C \cap A \cap B^c) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(\phi) \\
\mu^*(C \cap (A \cup B)) =& \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(C \cap A \cap B^c) + \mu^*(C \cap A^c \cap B).
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Utilizando (2.2.5) en (2.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu^*(C) =& \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c) \\
=& \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c),
\end{aligned}$$

lo cual implica que $(A \cup B) \in M_{\mu^*}$.

De igual manera, reemplazando C por $C \cap (A \setminus B)^c = C \cap (A^c \cup B)$ en (2.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu^*(C \cap (A^c \cup B)) =& \mu^*((C \cap (A^c \cup B)) \cap A \cap B) + \mu^*((C \cap (A^c \cup B)) \cap A \cap B^c) \\
&+ \mu^*((C \cap (A^c \cup B)) \cap A^c \cap B) + \mu^*((C \cap (A^c \cup B)) \cap A^c \cap B^c) \\
\mu^*(C \cap (A^c \cup B)) =& \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(\phi) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c) \\
\mu^*(C \cap (A^c \cup B)) =& \mu^*(C \cap A \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Ahora, empleando (2.2.6) en (2.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu^*(C) =& \mu^*(C \cap (A^c \cup B)) + \mu^*(C \cap A \cap B^c) \\
=& \mu^*(C \cap (A \setminus B)^c) + \mu^*(C \cap (A \setminus B)) \\
=& \mu^*(C \cap (A \setminus B)) + \mu^*(C \cap (A \setminus B)^c),
\end{aligned}$$

lo que implica $(A \setminus B) \in M_{\mu^*}$.

En consecuencia, M_{μ^*} es un anillo de conjuntos en Ω. ■

Lema 2.2.5. *M_{μ^*} es un σ-anillo de conjuntos en Ω y $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ es numerablemente aditiva en M_{μ^*}.*

Prueba. Considérese $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M_{\mu^*}$, donde $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$.

Reemplazando A y B por A_1 y A_2, respectivamente en (2.2.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu^*(C \cap (A_1 \cup A_2)) =& \mu^*(C \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(C \cap A_1 \cap A_2^c) + \mu^*(C \cap A_1^c \cap A_2) \\
=& \mu^*(\phi) + \mu^*(C \cap A_1) + \mu^*(C \cap A_2) \\
=& \mu^*(C \cap A_1) + \mu^*(C \cap A_2).
\end{aligned}$$

Luego por inducción finita, se tiene que $\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu^*(C\cap A_i)$, para $C\in H$ y para todo $n\in\mathbb{N}$. Como M_{μ^*} es un anillo por el lema 2.2.4, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in M_{\mu^*}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Además, ya que μ^* es monótona se deduce que

$$\begin{aligned}\mu^*(C)=&\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c\right)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\mu^*(C\cap A_i)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c\right)\\ \geq&\sum_{i=1}^{n}\mu^*(C\cap A_i)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c\right),\end{aligned}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}\mu^*(C)\geq&\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(C\cap A_i)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c\right)\\ \geq&\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c\right),\end{aligned}$$

puesto que μ^* es numerablemente sub-aditiva. En consecuencia, se tiene que $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\in M_{\mu^*}$. Además, se tiene que

$$\mu^*(C)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(C\cap A_i)+\mu^*\left(C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c\right),\text{ para todo } C\in H. \tag{2.2.7}$$

Ahora, considérese $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en M_{μ^*}.

Como M_{μ^*} es un anillo, los conjuntos $A_1=B_1$, $A_n=B_n\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}A_i$, $n>1$ pertenecen a M_{μ^*} para todo n y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de miembros de M_{μ^*}, disjuntos dos a dos, tal que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. Como $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\in M_{\mu^*}$ se tiene que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in M_{\mu^*}$ y así, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in M_{\mu^*}$. Es decir, M_{μ^*} es un σ-anillo de conjuntos en Ω.

Por último, tomando $C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ en (2.2.7), donde $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en M_{μ^*} con $A_i\cap A_j=\phi$ para $i\neq j$, se tiene que $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$, lo cual prueba que $\mu^*\mid M_{\mu^*}$ es numerablemente aditiva. ■

Teniendo en cuenta la definición 2.2.2, los lemas 2.2.4 y 2.2.5 se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6. *Si $\mu^*: H\to[0,\infty]$ es una medida exterior en el σ-anillo hereditario H de conjuntos en Ω, entonces M_{μ^*}, la colección de todos los conjuntos μ^*-medibles en H, es un σ-anillo contenido en H, y $\mu^*\mid M_{\mu^*}$ es una medida en M_{μ^*}.*

Definición 2.2.7. *Dados Ω, un anillo $\mathscr{R}$ de conjuntos en Ω y μ una medida en $\mathscr{R}$. Se dice que μ es **completa** en $\mathscr{R}$, si para cada $A\in\mathscr{R}$ y para $\mu(A)=0$ entonces todos los subconjuntos de A pertenecen a $\mathscr{R}$.*

Teorema 2.2.8 (μ^* como medida completa en M_{μ^*})**.** *Si μ^* es una medida exterior en el σ-anillo hereditario H de conjuntos en Ω, entonces $\mu^* |_{M_{\mu^*}}$ es una medida completa en M_{μ^*}. Además, para $A \in H$ con $\mu^*(A) = 0$ se tiene que $A \in M_{\mu^*}$. Es decir, si $\mu^*(A) = 0$, A es μ^*-medible.*

Prueba. Por el teorema 2.2.6, basta probar que μ^* es completa en M_{μ^*}.

Considérese $A \in H$ con $\mu^*(A) = 0$. Para $B \in H$, se tiene que $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(B \cap A)$, pues μ^* es monótona y no negativa. Luego $A \in M_{\mu^*}$.

Si $A \in M_{\mu^*}$ con $\mu^*(A) = 0$, entonces $\mu^*(B) = 0$ para todo $B \subset A$ puesto que H es hereditario por lo tanto, $B \in M_{\mu^*}$. Es decir, $\mu^* |_{M_{\mu^*}}$ es completa en M_{μ^*}. ■

Teorema 2.2.9 (Medida exterior inducida)**.** *Supóngase que $\mathscr{C}$ es una clase no vacía de conjuntos y que $\phi \in \mathscr{C}$. Si $\lambda : \mathscr{C} \to [0,\infty]$ es una función de conjuntos tal que $\lambda(\phi) = 0$, entonces $\lambda^* : H(\mathscr{C}) \to [0,\infty]$ definida por*

$$\lambda^*(B) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) : \ A_i \in \mathscr{C},\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ i = 1,2,\ldots\right\}$$

*es una medida exterior en $H(\mathscr{C})$. λ^* se llama la **medida exterior inducida** por λ.*

Prueba. Por la proposición 1.2.23, dado $E \subset H(\mathscr{C})$, la colección de todos los números reales extendidos no negativos

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) : \ A_i \in \mathscr{C},\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ i = 1,2,\ldots\right\}$$

no es vacía, y así $\lambda^*(B)$ está bien definida, con su rango en $[0,\infty]$.

Puesto que $\lambda^*(\phi) \leq \lambda(\phi) = 0$, se tiene que $\lambda^*(\phi) = 0$.

Considérense $B, D \in H(\mathscr{C})$ con $B \subset D$. Si $D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, $D_i \in \mathscr{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, así $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B) &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(D_i) : \ D_i \in \mathscr{C},\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\right\}\\
&\leq \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(D_i) : \ D_i \in \mathscr{C},\ D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\right\}\\
&= \lambda^*(D),
\end{aligned}$$

es decir, λ^* es monótona.

Tomando $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H(\mathscr{C})$. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i) = \infty$, entonces $\lambda^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i)$. Por lo tanto, se asume que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i) < \infty$. Como $\lambda^*(B_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, dado $\epsilon > 0$, por la definición de $\lambda^*(B_i)$, existe una sucesión $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ de miembros de $\mathscr{C}$ para (B_i) tal que

$$\lambda^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} > \sum_{j=1}^{\infty} \lambda\left(B_{ij}\right),\ i = 1,2,\ldots$$

Luego, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} B_{ij}$, $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}$ y

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda\left(B_{ij}\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lambda^*(B_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(B_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(B_i)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, se tiene que

$$\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(B_i).$$

Es decir, λ^* es numerablemente sub-aditiva en $H(\mathscr{C})$.

En consecuencia, λ^* es una medida exterior en $H(\mathscr{C})$. ■

Teorema 2.2.10. *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω y μ una medida en $\mathscr{R}$, entonces $\mu^* : H(\mathscr{R}) \to [0,\infty]$ definida por*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathscr{R},\ i \in \mathbb{N}\right\}$$

es una medida exterior y $\mu^* |_{M_{\mu^*}} = \mu$. Además, $\mathscr{R} \subset M_{\mu^*}$ y, en consecuencia, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset M_{\mu^*}$. Por último, $\mu^* |_{\mathscr{S}(\mathscr{R})}$ es una medida en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ y extiende a μ.

Prueba. Ya que $\mu(\phi) = 0$ y $\mu : \mathscr{R} \to [0,\infty]$, por el teorema 2.2.9, μ^* es una medida exterior en $H(\mathscr{R})$.

Se prueba que $\mu^* |_{\mathscr{R}} = \mu$:

Si $A \in \mathscr{R}$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Recíprocamente, Si $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$, donde $A \in \mathscr{R}$, entonces $A = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A$. Como μ es monótona y numerablemente sub-aditiva, se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap A\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A)\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap A)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

Luego, $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ y por lo tanto $\mu^* |_{\mathscr{R}} = \mu$.

Ahora se prueba que $\mathscr{R} \subset M_{\mu^*}$.

Considérense $B \in H(\mathscr{R})$, $A \in \mathscr{R}$ y $\mu^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de μ^*, existe un cubrimiento secuencial $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ de B, tal que

$$\begin{aligned}\mu^*(B) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((A_n \cap A) \cup (A_n \setminus A)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A)\\ &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),\end{aligned}$$

puesto que μ es aditiva en $\mathscr{R}$. Como ε es arbitrario, se deduce que $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. Cuando $\mu^*(A) = \infty$ la desigualdad se cumple. Ahora, $A \in M_{\mu^*}$. Luego $\mathscr{R} \subset M_{\mu^*}$.

Puesto que M_{μ^*} es un σ-anillo, se tiene que $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset M_{\mu^*}$. Además, $\mu^* |_{M_{\mu^*}}$ es una medida, en consecuencia $\mu^* |_{\mathscr{S}(\mathscr{R})}$ es una medida en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ y extiende a μ. ■

Lema 2.2.11. *Si $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos en Ω y μ es una medida σ-finita en $\mathscr{R}$, así lo son μ^* en $H(\mathscr{R})$, μ^* en M_{μ^*} y μ^* en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, donde μ^* es la medida exterior en $H(\mathscr{R})$ inducida por μ con respecto a $\mathscr{R}$. Específicamente, dado $A \in H(\mathscr{R})$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Considérese $A \in H(\mathscr{R})$. Por la construcción de $H(\mathscr{R})$, existe un cubrimiento secuencial $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A por miembros de $\mathscr{R}$. Como μ es σ-finita en $\mathscr{R}$, para cada A_n existe una sucesión $\{A_{nk}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathscr{R}$ tal que $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ y cada $\mu(A_{nk}) < \infty$, para $n, k = 1, 2, \ldots$ Luego, si $\{G_m\}_{m=1}^{\infty} = \{A_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$, entonces $\{G_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$, $A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ y $\mu(G_m) < \infty$ para $m = 1, 2, \ldots$ Así, $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \cap A$ y $\{G_m \cap A\}_{m=1}^{\infty} \subset H(\mathscr{R})$. Como μ^* es una medida exterior en $H(\mathscr{R})$, se tiene que

$$\mu^*(G_m \cap A) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \mu(G_m) : G_m \in \mathscr{R},\ G_m \cap A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m,\ m \in \mathbb{N}\right\} < \infty \qquad ■$$

Teorema 2.2.12 (Teorema de extensión). *Si μ es una medida σ-finita en un anillo de conjuntos $\mathscr{R}$, existe una extensión única $\overline{\mu}$ de μ al σ-anillo $\mathscr{S}$ generado por $\mathscr{R}$, como una medida en $\mathscr{S}$ y además, $\overline{\mu}$ es σ-finita.*

Prueba. dérese μ^* la medida exterior en $H(\mathscr{R})$ inducida por μ con respecto a $\mathscr{R}$ definida por

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathscr{R},\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Entonces, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset M_{\mu^*}$, pues M_{μ^*} es un σ-anillo que contiene a $\mathscr{R}$ y $\mu^* |_{\mathscr{R}} = \mu$ (por el teorema 2.2.10). Luego μ^* es una extensión de μ al σ-anillo $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, como una medida en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Se denota $\mu^* |_{\mathscr{S}(\mathscr{R})}$ por $\overline{\mu}$.

Para probar la unicida de $\overline{\mu}$, supóngase inicialmente que μ es finita en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Si μ_1 es otra extensión de μ a $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ como una medida, considérese $\mathscr{M} = \{E \in \mathscr{S} : \overline{\mu}(E) = \mu_1(E)\}$. Por hipótesis $\mathscr{R} \subset \mathscr{M}$.

AFIRMACIÓN: $\mathscr{M}$ es una clase monótona.

En efecto, considérese $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ tal que $E_n \uparrow E$. Siendo μ y μ_1 medidas en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, son continuas por abajo en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ y, por lo tanto, $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(E_n)$. Así, $E \in \mathscr{M}$.

Como μ es finita en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, μ_1 es finita en $\mathscr{M}$ y luego, por el lema 2.1.10, se tiene que $E \in \mathscr{M}$ si $E_n \downarrow E$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$. Así, $\mathscr{M}$ es una clase monótona y contiene a $\mathscr{R}$. Luego por el teorema 1.2.20, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M}$ y, en consecuencia $\mathscr{M} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$. Esto es, $\overline{\mu} = \mu_1$ en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.

Ahora, considérese el caso general. Como μ es σ-finita en $\mathscr{R}$, por el lema 2.2.11, $\overline{\mu} = \mu^* \mid_{\mathscr{S}(\mathscr{R})}$ es σ-finita en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Además por dicho lema, dado $A \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n < \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathscr{R}$ es un anillo, se puede asumir que $A_n \cap A_m = \phi$, para $n \neq m$. Por la proposición 1.2.21, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap A_i = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap A_i)$, $\mathscr{R} \cap A_i$ es un anillo contenido en $\mathscr{R}$ y así, $\overline{\mu} \mid_{\mathscr{R}\cap A_i} = \mu_1 \mid_{\mathscr{R}\cap A_i} = \mu \mid_{\mathscr{R}\cap A_i}$. Puesto que $\mu(A_i) < \infty$, las restricciones de $\overline{\mu}$ y μ_1 a $\mathscr{S}(\mathscr{R} \cap A_i)$ son finitas. Luego se obtiene que $\overline{\mu} = \mu_1$ en $\mathscr{S}(\mathscr{R} \cap A_i) = \mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap A_i$. Es decir, $\overline{\mu}(A \cap A_i) = \mu_1(A \cap A_i)$, para $i = 1, 2, \ldots$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(A) &= \overline{\mu}\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \\
&= \overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A \cap A_i) \\
&= \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right) \\
&= \mu_1\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \\
&= \mu_1(A).
\end{aligned}$$

Así, $\overline{\mu} = \mu_1$ en $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. ■

CAPÍTULO 3

INTEGRACIÓN

3.1. Funciones Medibles

Definición 3.1.1. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$ *y* $\left(\Omega', \mathscr{A}'\right)$ *espacios medibles, una función* $f : \Omega \to \Omega'$ *se denomina* ***medible****, si para todo* $A' \in \mathscr{A}'$ *se tiene que* $f^{-1}(A') \in \mathscr{A}$*, es decir,* $f^{-1}(\mathscr{A}') \subset \mathscr{A}$*.*

Proposición 3.1.2. *Si* $(\Omega', \mathscr{A}')$ *es un espacio medible y una función* $f : \Omega \to \Omega'$*, entonces* $f^{-1}(\mathscr{A}')$ *es una* σ*-álgebra en* Ω*.*

Prueba. Como $\mathscr{A}'$ es una σ-álgebra entonces $\mathscr{A}'$ no es vacía, luego existe $C \in \mathscr{A}'$ tal que $f^{-1}(C) = A$, de manera que $A \in f^{-1}(\mathscr{A}')$. Y además

$$A^c = \left(f^{-1}(C)\right)^c = f^{-1}(C^c),$$

y $C^c \in \mathscr{A}'$. En consecuencia $A^c \in f^{-1}(\mathscr{A}')$.

Ahora, tomando $A_i \in f^{-1}(\mathscr{A}')$ para $i = 1, 2, \ldots$, existen $C_i \in \mathscr{A}'$ para $i = 1, 2, \ldots$, tales que $A_i = f^{-1}(C_i)$ para $i = 1, 2, \ldots$, y así,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right),$$

y como $\mathscr{A}'$ es una σ-álgebra, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathscr{A}'$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in f^{-1}(\mathscr{A}')$.

En conclusión, $f^{-1}(\mathscr{A}')$ es una σ-álgebra. ■

Proposición 3.1.3. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$*,* Ω' *un conjunto no vacío y* $f : \Omega \to \Omega'$*, entonces la colección* $\mathscr{A}' = \left\{A' \subseteq \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathscr{A}\right\}$ *es una* σ*-álgebra en* Ω'*.*

Prueba. Como $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en Ω, entonces $\mathscr{A}$ no es vacía, luego existe $B \subseteq \Omega'$ tal que $f^{-1}(B) = A$, donde $A \in \mathscr{A}$. De esta manera $B \in \mathscr{A}'$. Se tiene que

$$A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c),$$

como $A^c \in \mathscr{A}$, pues $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra entonces $f^{-1}(B^c) \in \mathscr{A}$ y así $B^c \in \mathscr{A}'$.

Si existe una familia $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Omega'$ tal que $f^{-1}(B_i) = A_i$ donde $A_i \in \mathscr{A}$. Se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right),$$

y como $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$, de modo que $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in \mathscr{A}$, y por lo tanto $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{A}'$. Se concluye que, $\mathscr{A}'$ es una σ-álgebra en Ω'. ■

Teorema 3.1.4. *Dados* $(\Omega_1, \boldsymbol{\tau}_1)$ *y* $(\Omega_2, \boldsymbol{\tau}_2)$ *espacios topológicos y* $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ *una función continua.*

(i) *Si* $(\Omega, \boldsymbol{\tau})$ *es un espacio topológico,* $f : \Omega \to \Omega_1$ *una función continua y* $h = g \circ f$, *entonces* $h : \Omega \to \Omega_2$ *es continua.*

(ii) *Si* $(\Omega, \mathscr{A})$ *es un espacio medible,* $f : \Omega \to \Omega_1$ *una función medible y* $h = g \circ f$, *entonces* $h : \Omega \to \Omega_2$ *es medible.*

Prueba. (i) Suponiendo A un abierto en Ω_2, entonces por definición 1.1.3 se tiene que $g^{-1}(A)$ es abierto en Ω_1. De esta manera se obtiene

$$h^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right).$$

Como f es continua, entonces $h^{-1}(A)$ es abierto en Ω, lo cual prueba que $h = g \circ f$ es continua.

(ii) Como $g^{-1}(A)$ es un abierto en Ω_1 por (i), entonces por la porposición 3.1.3 $g^{-1}(A)$ es un conjunto medible y por ser f una función medible, entonces $h^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ es medible. En consecuencia $h = g \circ f$ es medible. ■

Teorema 3.1.5. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espacio medible,* (Ω, τ) *un espacio topológico,* $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *funciones medibles, una aplicación continua* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \Omega_1$, *y*

$$h(\omega) = \Phi(u(\omega), v(\omega)) \text{ para } \omega \in \Omega.$$

Entonces $h : \Omega \to \Omega_1$ *es medible.*

Prueba. Considérese una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(\omega) = (u(\omega), v(\omega))$. De este modo

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \Phi(u(\omega), v(\omega)) \\ &= \Phi\left(f(\omega)\right) \\ &= \Phi \circ f, \end{aligned}$$

así, por el teorema 3.1.4 (ii) se debe mostrar que f es medible para que h también lo sea.
Si R es un rectángulo abierto en el plano, con lados paralelos a los ejes, entonces R es el producto cartesiano de dos segmentos I_1 e I_2, y

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2),$$

que es medible, por la hipótesis sobre u y v. Cada subconjunto abierto A del plano es una unión numerable de rectángulos R_i, y como

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (R_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i),$$

y así $f^{-1}(A)$ es medible. En consecuencia f es medible. Por lo tanto h es medible. ■

Proposición 3.1.6. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$, $\overline{\mathbb{R}}$ *la recta real extendida y* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. *Si para todo* $a \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $f^{-1}((a,\infty]) \in \mathscr{A}$, *entonces* f *es medible.*

Prueba. Considérese $\mathscr{C} = \left\{I \subset \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(I) \in \mathscr{A}\right\}$. Tomando $a \in \mathbb{R}$ y una sucesión creciente $\{a_i\}_{i\in I}$ tal que $a_i < a$ y $a_i \to a$ cuando $i \to \infty$.

Por hipótesis $(a_i,\infty] \in \mathscr{C}$ para toda i, y además se cumple que $[-\infty, a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [-\infty, a_i] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i,\infty]^c$, y dado que $\mathscr{C}$ es σ-álgebra por la proposición 3.1.3 se tiene que $[-\infty, a) \in \mathscr{C}$.

Como cualquier conjunto abierto en la recta real extendida se puede escribir como la unión enumerable de segmentos $(a,\infty]$, $\mathscr{C}$ contiene a cualquier abierto, en consecuencia f es medible. ■

Definición 3.1.7. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones y* $c \in \mathbb{R}$. *Se dan las siguientes funciones:*

(i) $\left(f + c\right)(\omega) = f(\omega) + c$, *para todo* $\omega \in \Omega$.

(ii) $\left(cf\right)(\omega) = cf(\omega)$, *para todo* $\omega \in \Omega$.

(iii) $\left(f + g\right)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$, *para todo* $\omega \in \Omega$.

(iv) $\left(fg\right)(\omega) = f(\omega)\, g(\omega)$, *para todo* $\omega \in \Omega$. *Si* $g = f$, *se nota a* ff *por* f^2.

Teorema 3.1.8. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espacio medible,* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones medibles y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces las siguientes funciones son medibles:*

(i) $\left(f + c\right) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) $\left(cf\right) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(iii) $\left(f + g\right) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(iv) $f^2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(v) $\left(fg\right) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Prueba. (i) Tomando $a \in \mathbb{R}$, para $f + c$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(f+c\right)^{-1}((a,\infty]) &= \left\{\omega \in \Omega : \left(f+c\right)(\omega) > a\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) + c > a\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) > a - c\right\} \\ &= f^{-1}((a-c,\infty]). \end{aligned}$$

Luego, como f es medible, entonces $\left(f+c\right)^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible en Ω para todo $a \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f + c$ es medible.

(ii) Para probar que cf es medible, se estudian los casos $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.

a) Si $c = 0$, entonces cf es una función idénticamente nula, es decir, para todo $\omega \in \Omega$ se tiene que

$$cf(\omega) = 0.$$

De esta manera, si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(cf\right)^{-1}((a,\infty]) = \Omega, \text{ si } 0 > a.$$

Si $0 \leq a$, entonces $\left(cf\right)^{-1}((a,\infty]) = \phi$. De esta forma, cf es medible, pues ϕ y Ω son conjuntos medibles.

b) Si $c>0$ y $a\in\mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\left(cf\right)^{-1}((a,\infty]) &= \left\{\omega\in\Omega:\ \left(cf\right)(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ cf(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)>\frac{a}{c}\right\}\\ &= f^{-1}\left(\left(\frac{a}{c},\infty\right]\right),\end{aligned}$$

y como f es medible, $\left(cf\right)^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible. Por lo tanto cf es medible.

c) Si $c<0$ y $a\in\mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\left(cf\right)^{-1}((a,\infty]) &= \left\{\omega\in\Omega:\ \left(cf\right)(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ cf(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)<\frac{a}{c}\right\}\\ &= f^{-1}\left(\left[-\infty,\frac{a}{c}\right)\right).\end{aligned}$$

Como f es medible, entonces $\left(cf\right)^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible. Por lo tanto cf es medible.

En consecuencia, por *a*), *b*), y *c*), se tiene que cf es una función medible.

(iii) Como el conjunto de los números racionales es enumerable, entonces se puede encontrar una sucesión biyectiva $\{r_n\}:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$. Donde

$$\mathbb{Q}=\{r_n:\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Afirmación. Dados $a\in\mathbb{R}$ y $\omega\in\Omega$, entonces $f(\omega)+g(\omega)>a$ si, y solo si, existe un racional r_0 tal que $f(\omega)>r_0$ y $r_0>a-g(\omega)$.

En efecto, de una parte se tiene que $f(\omega)+g(\omega)>a$ de donde $f(\omega)>a-g(\omega)$. Como $f(\omega), a-g(\omega)\in\mathbb{R}$, entonces existe $r_0\in\mathbb{Q}$ tal que $r_0\in\left(a-g(\omega), f(\omega)\right)$. En consecuencia $f(\omega)>r_0>a-g(\omega)$, lo que es equivalente a tener, $f(\omega)>r_0$ y $r_0>a-g(\omega)$.
De otro lado, como existe $r_0\in\mathbb{Q}$ tal que $f(\omega)>r_0$ y $r_0>a-g(\omega)$, por transitividad se deduce que $f(\omega)>a-g(\omega)$, y así, $f(\omega)+g(\omega)>a$.

Ahora para $f+g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(f+g\right)^{-1}((a,\infty]) &= \left\{\omega\in\Omega:\ \left(f+g\right)(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)+g(\omega)>a\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)>r_0 \quad \text{y} \quad r_0>a-g(\omega)\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)>r_0\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega:\ r_0>a-g(\omega)\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)>r_0\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega:\ g(\omega)>a-r_0\right\}\\ &= f^{-1}((r_0,\infty])\cap g^{-1}((a-r_0,\infty]).\end{aligned}$$

Como f y g son funciones medibles y la intersección de dos conjuntos medibles es también medibe, entonces $\left(f+g\right)^{-1}((a,\infty])$ es medible. En consecuencia $f+g$ es una función medible.

(iv) Considérese $a \in \mathbb{R}$.

a) Si $a < 0$, entonces: $\left(f^2\right)^{-1}((a,\infty]) = \{\omega \in \Omega : \left(f^2\right)(\omega) > a\} = \left\{\omega \in \Omega : \left(f(\omega)\right)^2 > a\right\} = \phi$,

Luego como ϕ es un conjunto medible, entonces $\left(f^2\right)^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible. Así, f^2 es medible.

b) Si $a \geq 0$, entonces $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ son números reales. En este caso:

$$\begin{aligned}
\left(f^2\right)^{-1}((a,\infty]) &= \{\omega \in \Omega : \left(f^2\right)(\omega) > a\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : \left(f(\omega)\right)^2 > a\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \sqrt{a}\} \\
&= \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \sqrt{a} \quad \text{o} \quad -f(\omega) > \sqrt{a}\} \\
&= \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \sqrt{a} \quad \text{o} \quad f(\omega) < -\sqrt{a}\} \\
&= \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \sqrt{a}\} \cup \{\omega \in \Omega : f(\omega) < -\sqrt{a}\} \\
&= (f)^{-1}\left((\sqrt{a},\infty]\right) \cup (f)^{-1}\left([-\infty,-\sqrt{a})\right).
\end{aligned}$$

Como f es una función medible, se tiene que $\left(f^2\right)^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible, para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego f^2 es medible.

Es consecuencia de *a*) y *b*), que f^2 es una función medible.

(v) Observése que:

$$\begin{aligned}
fg = 1(fg) = \frac{4}{4}(fg) &= \frac{1}{4}(4fg) \\
&= \frac{1}{4}(0 + 2fg + 0 + 2fg) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(f^2 - f^2\right) + 2fg + \left(g^2 - g^2\right) + 2fg\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(f^2 + 2fg + g^2\right) - \left(f^2 - 2fg + g^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).
\end{aligned}$$

Como f y g son medibles, entonces se deduce de (ii) (iii) y (iv) que las funciones $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son medibles. En consecuencia fg es una función medible. ■

Definición 3.1.9. *Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos en Ω. El* ***ínfimo*** *y el* ***supremo*** *de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ están dados por $\inf_{k\geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ y $\sup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ respectivamente.*

El ***límite inferior*** *de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nota $\liminf_{n\to\infty} A_n$ y esta dado por $\liminf_{n\to\infty} A_n = \sup_{n\geq 1}\left\{\inf_{k>n} A_k\right\}$. El* ***límite superior*** *de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ denotado $\limsup_{n\to\infty} A_n$, esta dado por $\limsup_{n\to\infty} A_n = \inf_{n\geq 1}\left\{\sup_{k>n} A_k\right\}$.*

Teorema 3.1.10. *Si $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ para $n = 1,2,\ldots$, son funciones medibles y*

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n, \quad h = \inf_{n\geq 1} f_n,$$

entonces g y h son medibles

Prueba. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles y $g = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$, por la definición 3.1.9 se tiene que $g^{-1}((a,\infty]) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$, luego $g^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible en Ω. Por lo tanto, g es una función medible.

De otro lado se tiene que, $h^{-1}((a,\infty]) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$, luego $h^{-1}((a,\infty])$ es un conjunto medible en Ω. Por lo tanto, h es una función medible.

Además las funciones $s = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ y $t = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ son medibles. En efecto, de la definición 3.1.9 se sigue que $s = \sup\limits_{n\geq 1}\left\{\inf\limits_{k>n} f_k\right\}$ y $h = \inf\limits_{n\geq 1}\left\{\sup\limits_{k\geq n} f_n\right\}$, y como el supremo y el ínfimo de una sucesión de funciones medibles, son medibles, se concluye que s y t son funciones medibles. ■

3.2. Funciones Simples

Definición 3.2.1. *Si A es un conjunto no vacío, la **función característica** para el conjunto A, se define por:*

$$\mathfrak{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A, \\ 0, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Observación 3.2.2. Algunas de las propiedades de la función característica son:

(i) $\mathfrak{X}_{\phi}(\omega) = 0.$

(ii) $\mathfrak{X}_{\Omega}(\omega) = 1.$

(iii) $(\mathfrak{X}_A\mathfrak{X}_B)(\omega) = \mathfrak{X}_{A\cap B}(\omega).$
En efecto,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{X}_A\mathfrak{X}_B)(\omega) &= \mathfrak{X}_A(\omega)\,\mathfrak{X}_B(\omega) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A\cap B, \\ 0, & \text{si } \omega \notin A\cap B. \end{cases} \\ &= \mathfrak{X}_{A\cap B}(\omega).\end{aligned}$$

Proposición 3.2.3. *La función $\mathfrak{X}_A$ es medible si, y solo si, A es medible.*

Prueba. $\Rightarrow$ Como $\mathfrak{X}_A$ es medible entonces $\mathfrak{X}_A^{-1}(1) = A$ y $\mathfrak{X}_A^{-1}(0) = A^c$ son conjuntos medibles.

$\Leftarrow$ Como A es un conjunto medible en Ω, entonces A^c es medible. Por la proposición 3.1.3, y como $a = \mathfrak{X}_A^{-1}(1)$ y $A^c = \mathfrak{X}_A^{-1}(0)$, se tiene que $\mathfrak{X}_A$ es medible. ■

Definición 3.2.4. *Dados $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y $\mathbf{s} : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Si **s** toma un número finito de valores entonces **s** se denomina **función simple**.*

Proposición 3.2.5. *Dado $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible. Una función $s : \Omega \to \mathbb{R}$ es simple si, y solo si, existen $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ y $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{A}$, con $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$, tales que $s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Como s es una función simple, entonces, por la definición 3.2.4 se tiene que el conjuntos de las imágenes de s es finito, $s(\omega) = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. De otro lado, los elementos de las imágenes de s son borelianos (ejemplo 1.2.14) y por la proposición 3.1.2 se deduce que $s^{-1}(\{a_i\}) = A_i$ para $i = 1, \ldots, n$ son conjuntos medibles en Ω, lo que significa que $\{A_i\} \subset \mathscr{A}$ y además $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$. En consecuencia $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$.

($\Leftarrow$) Si se tiene una función $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$, entonces el conjunto de sus imágenes es un conjunto finito. En efecto, por la definición 3.2.1 se tiene que si $\omega \in A_i$ entonces $s(\omega) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$, y $s(\omega) = 0$ si $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. En consecuencia $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ es una función simple. ■

Observaciones 3.2.6.

(i) Si s es una función simple entonces su representación $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ es única si $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ y además que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

(ii) Una función simple $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ es medible si y solo si cada uno de los conjuntos A_i es medible. Esto se sigue de la proposición 3.2.3 y de 3.2.5.

Proposición 3.2.7. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A})$ *y* $s, h : \Omega \to \mathbb{R}$. *Si* s *y* h *son funciones simples entonces las funciones* $s + h$ *y* sh *también lo son.*

Prueba. Por la proposición 3.2.5 existen $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $A_i, B_j \in \mathscr{A}$ con $A_i \cap A_{i'} = \phi$ para $i \neq i'$, $B_j \cap B_{j'} = \phi$ para $j \neq j'$, tales que $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ y $h = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j}$. Como $A_i, B_j \in \mathscr{A}$ entonces $A_i \cap B_j \in \mathscr{A}$ y además son disjuntos, así se tiene que

$$
\begin{aligned}
s + h &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j} \\
&= a_1 \mathfrak{X}_{A_1} + \cdots + a_n \mathfrak{X}_{A_n} + b_1 \mathfrak{X}_{B_1} + \cdots + b_m \mathfrak{X}_{B_m} \\
&= (a_1 + b_1) \mathfrak{X}_{A_1 \cap B_1} + \cdots + (a_n + b_m) \mathfrak{X}_{A_n \cap B_m} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_i + b_j\right) \mathfrak{X}_{A_i \cap B_j},
\end{aligned}
$$

y de otra parte

$$
\begin{aligned}
sh &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i} \sum_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j} \\
&= \left(a_1 \mathfrak{X}_{A_1} + \cdots + a_n \mathfrak{X}_{A_n}\right)\left(b_1 \mathfrak{X}_{B_1} + \cdots + b_m \mathfrak{X}_{B_m}\right) \\
&= a_1 b_1 \mathfrak{X}_{A_1 \cap B_1} + a_1 b_2 \mathfrak{X}_{A_1 \cap B_2} + \cdots + a_1 b_m \mathfrak{X}_{A_1 \cap B_m} + \cdots + a_n b_m \mathfrak{X}_{A_n \cap B_m} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathfrak{X}_{A_i \cap B_j}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $s + h$, sh son funciones simples. ■

Teorema 3.2.8. *Dados $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y una función medible $f : \Omega \to [0,\infty]$. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Ω tales que*

(i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

(ii) $s_n(\omega) \to f(\omega)$ *cuando* $n \to \infty$*, para todo* $\omega \in \Omega$.

Observación 3.2.9. Se presenta esta observación, con el ánimo de mostrar un camino por el cual llegar a prueba de 3.2.8.

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $[0,\infty] = [0,n) \cup [n,\infty]$, donde $[0,n)$, $[n,\infty]$ son conjuntos medibles. En $[0,n)$ se hace la partición $n2^n$ segmentos de longitud 2^n.

Considérense $E_k = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $a_k = k2^{-n}$, para $k = 0,1,\ldots,n2^n - 1$, $F_n = [n,\infty]$, para $n = 0,1,2,\ldots$, conjuntos medibles y las funciones $\mathfrak{X}_{E_k}$, $\mathfrak{X}_{F_n}$ las funciones características asociadas a los conjuntos E_k y F_n. Con esto, se tiene la función $\varphi_n : [0,\infty] \to [0,\infty]$, dada por

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} a_k \mathfrak{X}_{E_k}(t) + n\mathfrak{X}_{F_n}(t), \tag{3.2.1}$$

así, las funciones φ_n son funciones simples medibles.

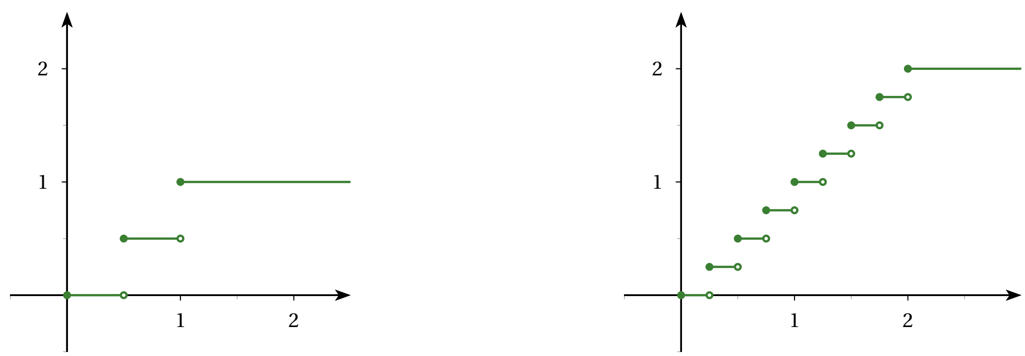

Figura 3.1: Gráficas de las funciones φ_1 y φ_2.

Teniendo en cuenta que la función f es medible y toma valores no negativos, se observa que partiendo de (3.2.1) se encuentra la sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen las condiciones de 3.2.8.

3.3. Integral de Funciones no Negativas

Definición 3.3.1. *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y $s : \Omega \to [0,\infty)$ una función simple medible, de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son los distintos valores de s, y si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{A}$, con $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. La **integral** de s esta dada por*

$$\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Observación 3.3.2. La integral de una función s simple medible está bien definida, en el sentido de que si existen dos representaciones

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j}, \quad \text{entonces} \quad \int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

Proposición 3.3.3. *Dadas s_1, s_2 funciones simples y $c \in [0,\infty)$, entonces*

(i) $\int_\Omega c s_1 \, d\mu = c \int_\Omega s_1 \, d\mu$.

(ii) $\int_\Omega (s_1 + s_2) \, d\mu = \int_\Omega s_1 \, d\mu + \int_\Omega s_2 \, d\mu$

(iii) *Si* $0 \le s_1 \le s_2$, *entonces* $\int_\Omega s_1 \, d\mu \le \int_\Omega s_2 \, d\mu$.

Prueba. (i) De la definición 3.3.1, se tiene que

$$\int_\Omega c s_1 \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c a_i \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = c \int_\Omega s_1 \, d\mu.$$

(ii) Si $s_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ y $s_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j}$ son funciones simples entonces, por la proposición 3.2.7 se tiene que $s_1 + s_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(a_i + b_j\right) \mathfrak{X}_{A_i \cap B_j}$ es una función simple y así

$$\begin{aligned}\int_\Omega (s_1 + s_2) \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_i + b_j\right) \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \int_\Omega s_1 \, d\mu + \int_\Omega s_2 \, d\mu.\end{aligned}$$

(iii) Considérense $s_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ y $s_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mathfrak{X}_{B_j}$ funciones simples, por hipótesis $0 \le s_1 \le s_2$ entonces, si $A_i \cap B_j \ne \phi$ se tiene que $0 \le a_i \le b_j$, por lo tanto

$$\begin{aligned}0 \le \int_\Omega s_1 \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j \mu\left(B_j\right) \\ &= \int_\Omega s_2 \, d\mu.\end{aligned}$$

En consecuencia $0 \le \int_\Omega s_1 \, d\mu \le \int_\Omega s_2 \, d\mu$. ■

Definición 3.3.4. *Dados $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mu\right)$ y $f : \Omega \to [0,\infty]$ una función medible, la integral de f respecto de μ en Ω, esta dada por*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s \, d\mu : \ s \textit{ es una función simple tal que } 0 \le s \le f\right\}.$$

Usualmente hecho se nota $\int_\Omega f \, d\mu = \sup \int_\Omega s \, d\mu$.

Proposición 3.3.5. *Dados $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mu\right)$ y $f, g : \Omega \to [0,\infty]$ funciones medibles, se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $0 \leq f \leq g$, *entonces* $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$.

(ii) *Si* $A \subset B$ *y* $f \geq 0$, *entonces* $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

(iii) *Si* $f \geq 0$ *y* c *una constante,* $0 \leq c < \infty$, *entonces* $\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu$.

(iv) $\int_\Omega f d\mu = 0$, *si, y solamente si,* $f = 0$.

Prueba. (i) Como f, g son medibles entonces por el teorema 3.2.8 existen s_n, h_m sucesiones de funciones simple tales que $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq f$, $0 \leq h_1 \leq \cdots \leq g$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$, $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = g$. Además, $0 \leq f \leq g$ y por la proposición 3.3.3 (iii) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu &= \sup \int_\Omega s_n d\mu \\
&\leq \sup \int_\Omega h_m d\mu \\
&= \int_\Omega g d\mu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$.

(ii) Como $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. De otro lado como f es medible, entonces por el teorema 3.2.8 existe s una sucesión de funciones simples tal que $0 \leq s \leq f$, así

$$\begin{aligned}
\int_A f d\mu = \sup \int_A s d\mu &= \sup \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A) \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(B) \\
&= \int_B s d\mu \\
&= \int_B f d\mu.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

(iii) Como f es medible, entonces por el teorema 3.2.8 existe una sucesión s de funciones simples tales que $0 \leq s \leq f$, y c una constante, $0 \leq c < \infty$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega c f d\mu = \sup \int_\Omega c s d\mu &= \sup c \int_\Omega s d\mu \\
&= c \sup \int_\Omega s d\mu \\
&= c \sup \int_\Omega f d\mu.
\end{aligned}$$

De esta manera $\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu$.

(iv) Si $f = 0$, entonces por la parte (i) se sigue $\int_\Omega f d\mu = 0$.

Ahora, como f es medible, por el teorema 3.2.8 existe $f = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ donde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$, $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, luego $\int_\Omega f d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i)$ y $\int_\Omega f d\mu = 0$ si y solo si $\mu(A_i) = 0$ para $i = 1, 2 \ldots$, es decir que $\mu\left(f^{-1}([0, \infty])\right) = 0$ en consecuencia $f = 0$. ■

Proposición 3.3.6. *Dados* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $s, t : \Omega \to [0, \infty]$ *funciones simples medibles y*

$$\varphi(\Omega) = \int_\Omega s \, d\mu.$$

Entonces φ *es una medida sobre* $\mathscr{A}$.

Prueba. Tomando $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{X}_{A_i}$ y si $B_1, B_2, \ldots$, son elementos disjuntos de $\mathscr{A}$ cuya unión es Ω, la actividad numerable de μ muestra que

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) = \int_\Omega s \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap \Omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B_r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(B_r). \end{aligned}$$

Además $\varphi(\phi) = 0$. En consecuencia φ es una medida sobre $\mathscr{A}$. ■

3.4. Teoremas de Convergencia

Se llega ahora a una parte importante del trabajo. Una de sus características más notables es la facilidad con que se manejan las operaciones con límites.

Teorema 3.4.1 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Dados* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles en* Ω*, tales que*

(i) $0 \le f_1(\omega) \le f_2(\omega) \le \cdots \le \infty$ *para todo* $\omega \in \Omega$*,*

(ii) $f_n(\omega) \to f(\omega)$ *cuando* $n \to \infty$*, para todo* $\omega \in \Omega$.

Entonces f *es medible, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Prueba. Por el teorema 3.1.10 el límite de funciones medibles es medible, entonces se tiene que f es medible. Luego, $\int_\Omega f \, d\mu$ esta bien definida, y como se cumple (i), se tiene que $\int_\Omega f_n d\mu \le \int_\Omega f_{n+1} d\mu$, de modo que $\{\int_\Omega f_n d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente, y por lo tanto converge a algún $a \in [0, \infty]$. De (i) también se deduce que $\int_\Omega f_n d\mu \le \int_\Omega f \, d\mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$a \le \int_\Omega f \, d\mu. \tag{3.4.1}$$

Considérense s una función simple medible tal que $0 \le s \le f$, c una constante $0 < c < 1$, y E_n el conjunto dado por

$$E_n = \{\omega : f_n(\omega) \ge c s(\omega)\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cada E_n es medible, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$. Para ver esta igualdad, considérese $\omega \in \Omega$. Si $f(\omega) = 0$, entonces $\omega \in E_1$; si $f(\omega) > 0$, entonces $cs(\omega) < f(\omega)$, ya que $c < 1$; por lo tanto $x \in E_n$ para

algún n.
Además

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.4.2}$$

Haciendo que $n \to \infty$, y aplicando la proposición 3.3.6 y por el lema 2.1.9 a la última integral de (3.4.2), se obtiene que

$$a \geq c \int_{\Omega} s d\mu. \tag{3.4.3}$$

Puesto que se cumple (3.4.3) para todo $c < 1$, se tiene que $a \geq \int_{\Omega} s d\mu$, para toda función simple medible s que satisfaga $0 \leq s \leq f$, de modo que

$$a \geq \int_{\Omega} f d\mu. \tag{3.4.4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = a$ y por (3.4.1) y (3.4.4) $\int_{\Omega} f_n d\mu = a$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$ ■

Lema 3.4.2 (**Lema de Fatou**). *Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ es medible, para cada entero positivo n, entonces*

$$\int_{\Omega} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \tag{3.4.5}$$

Prueba. Considérese

$$g_k(\omega) = \inf_{i \geq k} f_i(\omega) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \ \omega \in \Omega).$$

Entonces $g_k \leq f_k$, por lo que

$$\int_{\Omega} g_k d\mu \leq \int_{\Omega} f_k d\mu \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.4.6}$$

Además $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$, cada g_k es medible, por el teorema 3.1.10 y $g_k(\omega) \to \liminf\limits_{k\to\infty} f_n(\omega)$. En consecuencia, el teorema de convergencia monótona muestra que el miembro de la izquierda de (3.4.6) tiende al miembro de la izquierda de (3.4.5) cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, (3.4.5) se deduce de (3.4.6) ■

Definición 3.4.3. *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una función medible. Se dice que f es una función **Lebesgue integrable** o simplemente **integrable** si*

$$\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Lema 3.4.4. *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y f una función medible. Si f es integrable entonces*

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

Prueba. Como $-|f| \leq f \leq |f|$, entonces por la proposición 3.3.5 partes (i) y (iii) se tiene que

$$-\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

Por lo tanto $\left|\int_{\Omega} f d\mu\right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$. ■

Teorema 3.4.5 (**Teorema de Convergencia Dominada**). *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ó $\mathbb{C}$) una sucesión de funciones medibles tales que existen $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$, entonces f es integrable y*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Prueba. Como f es límite de funciones medibles, entonces f es medible y como g es integrable, y además $|f_n| \leq g$, de donde se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es integrable, y

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |f_n| &\leq \lim_{n\to\infty} g \\ |f| &\leq g. \end{aligned}$$

Lo que implica que f es integrable.
Sumando término a término las desigualdades $|f_n| \leq g$ y $|f| \leq g$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f_n| + |f| &\leq 2g \\ |f_n - f| \leq |f_n| + |f| &\leq 2g \\ |f_n - f| &\leq 2g \\ 0 &\leq 2g - |f_n - f|. \end{aligned}$$

Luego, $2g - |f_n - f|$ es una función medible y satisface

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)\, d\mu = \int_\Omega 2g\, d\mu$$

y por el Lema de Fatou, las funciones $\{2g - |f_n - f|\}$ satisfacen

$$\begin{aligned} \int_\Omega 2g\, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega 2g\, d\mu + \left(-\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \right) \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega 2g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \right) \\ &= \int_\Omega 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu. \end{aligned}$$

Como la $\int_\Omega 2g\, d\mu$ es finita, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

de donde $\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$.
Por el lema 3.4.4 se tiene que

$$\left| \int_\Omega (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$$

y por lo tanto

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0,$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n - f)\, d\mu = 0$ y en consecuencia

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu. \qquad \blacksquare$$

3.5. Espacios L^p

Definición 3.5.1. *Una **métrica** en un conjunto M es una función $d: M \times M \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ un numero real $d(x,y)$, llamado la distancia de x a y, de modo que sean satisfechas las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in M$*

(i) $d(x,x) = 0$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

*Un **espacio métrico** es un conjunto M no vacío en el cual se ha definido una métrica.*

Observación 3.5.2. Si d satisface las condiciones (i) (ii) y (iii) de la definión 3.5.1, entonces $0 \leq d(x,z)$.
En efecto, tomando $x = y$,

$$\begin{aligned}
d(x,y) \leq& d(x,z) + d(z,y)\\
d(x,x) \leq& d(x,z) + d(z,x)\\
0 \leq& d(x,z) + d(x,z)\\
0 \leq& 2d(x,z)\\
0 \leq& d(x,z)
\end{aligned}$$

Definición 3.5.3. *Se dice que en un espacio métrico (M,d) , $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **sucesión de Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definición 3.5.4. *Un espacio métrico (M,d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy en M converge a un elemento de M.*

Definición 3.5.5. *Dado V un espacio vectorial real. Una **norma** en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, tal que para todos $x, y \in V$ y todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

(i) $\|x\| = 0$ *si, y solo si,* $x = 0$,

(ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*Un **espacio normado** es un espacio vectorial en el cual se ha definido una norma.*

Observación 3.5.6. Una norma induce una métrica sobre V en forma natural: $d(x,y) = \|x - y\|$. Cuando se refieren a las propiedades métricas de un espacio normado, se está utilizando esta métrica.

Definición 3.5.7. *Un espacio vectorial normado X el cual es completo con realación a la métrica inducida por la norma se denomina un **espacio de Banach**.*

Definición 3.5.8. *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una función medible y $\|\cdot\|_p$ una función real dada por*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

El conjunto L^p esta dado por

$$L^p := \left\{ f : \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Ahora se consideran algunas desigualdades que son fundamentales para probar que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

Lema 3.5.9. *Si $p > 1$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad \textit{para toda } \alpha, \beta \ge 0.$$

Prueba. Como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p + q = pq, \qquad (p-1)(q-1) = 1, \qquad \frac{1}{p-1} = q - 1.$$

Ahora, si se toma $u = t^{p-1}$ entonces $t = u^{q-1}$.

Figura 3.2

Así,

$$I = \int_0^\alpha t^{p-1}\,dt = \frac{\alpha^p}{p} \qquad \text{y} \qquad II = \int_0^\beta u^{q-1}\,du = \frac{\beta^q}{q}.$$

Luego $\alpha\beta \le I + II$, por lo tanto

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.5.10 (Desigualdad de Hölder). *Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 \le p < \infty$, entonces*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Prueba. Si $\|f\|_p$ o $\|g\|_q$ son nulos, entonces la desigualdad se cumple.
Suponiendo $\|f\|_p$ y $\|g\|_q$ no nulos y haciendo $\alpha = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ y $\beta = \frac{|g|}{\|g\|_q}$, por lema 3.5.9 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} &\le \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} \\
\frac{\int_\Omega |fg|\,d\mu}{\|f\|_p\|g\|_q} &\le \frac{\int_\Omega |f|^p\,d\mu}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_\Omega |g|^q\,d\mu}{q\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

En consecuencia $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$. $\blacksquare$

Observaciones 3.5.11.

1. Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y $1 \le p \le \infty$, entonces $fg \in L^1$.
   En efecto, por el teorema 3.1.8 (v) fg es medible. Como $f \in L^p$ y $g \in L^q$ se tiene que $\|f\|_p < \infty$ y $\|g\|_q < \infty$, así $\|f\|_p + \|g\|_q < \infty$. Por el teorema 3.5.10 se obtiene $\|fg\|_1 < \infty$. Por tanto $fg \in L^1$

2. Si $a \in \mathbb{K} (\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R})$ y $f \in L^p$ entonces $af \in L^p$.
   En efecto,

$$\begin{aligned}\|af\|_p = \left(\int_\Omega |af|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |a|^p \, |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} &= \left(|a|^p \int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &= |a| \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &= |a| \, \|f\|_p < \infty.\end{aligned}$$

Teorema 3.5.12 (Desigualdad de Minkowski). *Si* $1 \le p < \infty$ *y* $f, g \in L^p$, *entonces* $f+g \in L^p$ *y*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prueba. En primer lugar se prueba que $f+g \in L^p$, bajo las hipótesis dadas. Como se cumple $|f| \le \sup\{|f|, |g|\}$ y $|g| \le \sup\{|f|, |g|\}$, entonces

$$\begin{aligned}|f|+|g| &\le 2\sup\{|f|, |g|\} \\ |f+g| \le |f|+|g| &\le 2\sup\{|f|, |g|\} \\ |f+g| &\le 2\sup\{|f|, |g|\} \\ |f+g|^p &\le (2\sup\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \sup\{|f|^p, |g|^p\} \\ &\le 2^p \left(|f|^p, |g|^p\right) < \infty.\end{aligned}$$

En consecuencia $f+g \in L^p$.

De otro lado, suponiendo $\|f+g\|_p \ne 0$, $1 \le p < \infty$ y $h = f+g$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}|h|^p &= |f+g| \, |h|^{p-1} \\ &\le (|f|+|g|) \, |h|^{p-1} \\ &= |f| \, |h|^{p-1} + |g| \, |h|^{p-1} \\ \int_\Omega |h|^p \, d\mu &\le \int_\Omega |f| \, |h|^{p-1} \, d\mu + \int_\Omega |g| \, |h|^{p-1} \, d\mu.\end{aligned}$$

Por el teorema 3.5.10 se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f| \, |h|^{p-1} \, d\mu &\le \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(|h|^{p-1}\right)^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |h|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

y de manera similar

$$\int_\Omega |g| \, |h|^{p-1} \, d\mu \le \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |h|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h|^p\,d\mu &\le \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left[\left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_\Omega |h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\\ \left(\int_\Omega |h|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} &\le \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ \left(\int_\Omega |h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

en consecuencia $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$. ■

Observación 3.5.13. L^p junto con la función $\|\cdot\|_p$ es un espacio normado.

En efecto, para $f, g \in L^p$, $a \in \mathbb{C}$, la función $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ satisface las condiciones de la definición 3.5.5:

(i) Por la proposición 3.3.5 parte (iv) se sigue que

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= 0\\ \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} &= 0\\ \int_\Omega |f|^p\,d\mu &= 0\\ |f|^p &= 0\\ f &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia $\|f\|_p = 0$ si y solo si $f = 0$.

(ii) Por la observación 3.5.11 parte (ii) se tiene que $\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p$.

(iii) Por el teorema 3.5.12 se obtiene $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Por lo tanto $\left(L^p, \|\cdot\|_p\right)$ es un espacio normado.

Teorema 3.5.14. *Dado* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. L^p, $1 \le p < \infty$ *es un espacio de Banach.*

Prueba. Considérese $\{f_n\} \subset L^p$ una sucesión de Cauchy. Existe una subsucesión $\{f_{n_i}\} \subset L^p$, $n_1 < n_2 < \cdots$ tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 2^{-i},\ i \in \mathbb{N}$$

Tomando $g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. Como el límite de funciones medibles es una función medible, la sucesión converge a

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Luego, por el teorema 3.4.1 sobre $\{g_k\}^p$ se obtiene

$$\|g\|_p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$$

Luego $g \in L^p$
Ahora, como $\sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) + f_{n_1} = f_{n_k}$, se sigue que

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}.$$

Así, f es medible.
Dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f_n - f_m \right\|_p < \varepsilon \text{ si } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n, m \geq N.$$

Entonces, por el lema 3.4.2 para $m \geq N$, se sigue

$$\left\| f - f_m \right\|_p \leq \liminf_{i\to\infty} \left\| f_{n_i} - f_m \right\|_p < \varepsilon.$$

Por lo tanto $f \in L^p$ y $\lim_{n\to\infty} \left\| f - f_n \right\|_p = 0$. ■

CAPÍTULO 4

APLICACIONES A MARCOS CONTINUOS

4.1. Algunas Nociones sobre Teoría de Operadores y Análisis Funcional

Definición 4.1.1. *Dados X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación. Se dice que T es un* ***operador lineal*** *si*

(i) *El dominio $\mathscr{D}(T) \subseteq X$ y el rango $\mathscr{R}(T) \subseteq Y$ son espacios vectoriales.*

(ii) *Para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumplen*

$$T\left(x+y\right) = Tx + Ty \qquad y \qquad T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

Definición 4.1.2. *Dado X un espacio vectorial. El operador $I : X \to X$ dado por $Ix = x$, para todo $x \in X$, se denomina* ***operador identidad.***

Definición 4.1.3. *Dados X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es* ***acotado*** *si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X$, para todo $x \in X$.*

Luego $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$, para todo $x \in X$ con $x \neq 0$. Además, $W = \left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} : \ x \neq 0\right\} \neq \phi$ y $W \subset \mathbb{R}$, entonces existe $\sup W$ y se denota

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

$\|T\|$ se denomina ***norma*** *del operador T.*

Definición 4.1.4. *Dado V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ se denomina* ***producto interno*** *en V, si para todo $x, y, z \in V$ y para toda $a \in \mathbb{K}$, se cumplen:*

$(i.)$ $\left\langle x+y, z\right\rangle = \langle x, z\rangle + \left\langle y, z\right\rangle,$

$(ii.)$ $\left\langle ax, y\right\rangle = a\left\langle x, y\right\rangle,$

$(iii.)$ $\left\langle x, y\right\rangle = \overline{\left\langle y, x\right\rangle},$

$(iv.)$ $\langle x, x\rangle > 0$, *y* $\langle x, x\rangle = 0$ *si, y solo si,* $x = 0$.

Un espacio vectorial en el cual se ha definido un producto interno, se denomina ***espacio producto interno****.*

Observación 4.1.5. Un producto interno en V induce una norma en V, dada por $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ para todo $u \in V$.

Definición 4.1.6. *Un espacio producto interno, el cual es completo con relación a la métrica inducida por el producto interno, se dice que es un **espacio de Hilbert**.*
De ahora en adelante, $\mathscr{H}$ denota un espacio de Hilbert.

Definición 4.1.7. *Dados $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y L^2 el conjunto de todas las funciones cuadrado integrables. El producto interno usual en L^2 esta dado por*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g}\,d\mu, \text{ para todo } f, g \in L^2.$$

Definición 4.1.8. *Dados $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert y $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ un operador lineal acotado. El operador $T_1 : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$, relacionado por $\langle Tx, y\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle x, T_1 y\rangle_{\mathscr{H}_1}$, para todo $x \in \mathscr{H}_1$ y para todo $y \in \mathscr{H}_2$, se llama el **adjunto** de T, y se denota T^*.*

Definición 4.1.9. *Dados X y Y espacios vectoriales y $T_1 : X \to Y$ un operador lineal. T_1 es **invertible** si existe un operador lineal $T_2 : Y \to X$ tal que $T_1T_2 = T_2T_1 = I$. El operador T_2 se nota por T^{-1}.*

Definición 4.1.10. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador lineal acotado.*

(i) *T es **hermitiano** o **auto-adjunto** si $T^* = T$.*

(ii) *T es **isométrico** si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathscr{H}$.*

(iii) *T es **biyectivo** si $R(T) = \mathscr{H}$.*

(iv) *T es **unitario** si es biyectivo e isométrico.*

Observaciones 4.1.11. (i) Si $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un operador unitario entonces T^{-1} es un operador unitario. En efecto, $\langle T^{-1}h, T^{-1}k\rangle = \langle TT^{-1}h, TT^{-1}k\rangle = \langle Ih, Ik\rangle = \langle h, k\rangle$.

(ii) Si T es un operador unitario entonces T es biyectivo y $T^* = T^{-1}$.
En efecto, $\langle Th, k\rangle = \langle T^{-1}Th, T^{-1}k\rangle = \langle Ih, T^{-1}k\rangle = \langle h, T^{-1}k\rangle$, por lo tanto $T^* = T^{-1}$.

(iii) Si T es un operador auto-adjunto, entonces $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$, para toda $h \in \mathscr{H}$.
En efecto, $\langle Th, h\rangle = \langle h, Th\rangle = \overline{\langle Th, h\rangle}$, por lo tanto $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$.

(iv) Si $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ es invertible y $T^{-1} : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ un operador lineal acotado entonces $T^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ es invertible y $(T^*)^{-1} : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ es un operador lineal acotado con

$$\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$$

Definición 4.1.12. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador auto-adjunto. Si para todo $h \in \mathscr{H}$, $\langle Th, h\rangle \geq 0$, T se llama **operador positivo**. Este hecho se nota $T \geq 0$.*

4.2. Marcos Continuos en Espacios de Hilbert

Definición 4.2.1. *Dado $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : \Omega \to \mathscr{H}$ es **débilmente medible,** si $h \in \mathscr{H}$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega &\to \mathbb{K} \\ \omega &\to \Psi(\omega) = \langle h, f(\omega)\rangle, \end{aligned}$$

es una función medible en Ω.

Observación 4.2.2. Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : \Omega \to \mathscr{H}$ es **débilmente medible** si $h \in \mathscr{H}$, existe

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Ran} f \subset \mathscr{H} &\to \mathbb{K} \\ k &\to \Phi(k) = \langle h, k \rangle, \end{aligned}$$

tal que $\Phi f : \Omega \to \mathbb{K}$ es una función medible en Ω.

Definición 4.2.3. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida con medida positiva μ. La aplicación $F : \Omega \to \mathscr{H}$ se llama un **marco continuo** con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, si:*

(i) *F es débilmente medible.*

(ii) *Existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A\|h\|^2 \leq \int_\Omega \| \langle h, F(\omega) \rangle \|^2 d\mu(\omega) \leq B\|h\|^2, \ \ \textit{para todo } h \in \mathscr{H}.$$

*Las constantes A y B se llaman cotas del marco continuo. Si $A = B$, entonces F se denomina un **marco continuo exacto**; si $A = B = 1$, F es un **marco de Parseval**.*

Proposición 4.2.4. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador unitario y $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, con μ medida positiva. Si $F : \Omega \to \mathscr{H}$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, entonces $U^{-1}F : \Omega \to \mathscr{H}$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.*

Prueba. Como F es un marco, F es débilmente medible y así, dado $h \in \mathscr{H}$, $\Psi(\omega) = \langle h, F(\omega) \rangle$ es medible en Ω. Luego, por se U unitario se tiene que para todo $h \in \mathscr{H}$ $U^{-1}h \in \mathscr{H}$ y

$$\left\langle h, U^{-1}F(\omega) \right\rangle = \left\langle \left(U^{-1}\right)^* h, F(\omega) \right\rangle = \left\langle \left(U^*\right)^{-1} h, F(\omega) \right\rangle = \left\langle U^{-1}h, F(\omega) \right\rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma : \Omega &\to \mathbb{K} \\ \omega &\to \Gamma(\omega) = \langle h, U^{-1}F(\omega) \rangle, \end{aligned}$$

es medible en Ω. Luego $U^{-1}F$ es débilmente medible.

De otro lado, existen $A, B > 0$ tales que

$$\begin{aligned} A\|h\|^2 = A\|Uh\|^2 &\leq \int_\Omega |\langle Uh, F(\omega) \rangle|^2 d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.2.3 \\ &= \int_\Omega \left|\left\langle h, U^* F(\omega) \right\rangle\right|^2 d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.1.8 \\ &= \int_\Omega \left|\left\langle h, U^{-1} F(\omega) \right\rangle\right|^2 d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.1.11\ (ii) \\ &\leq B\|Uh\|^2 && ;\text{por } 4.2.3 \\ &= B\|h\|^2;\ \text{para todo } h \in \mathscr{H}. && ;\text{por } 4.1.10\ (ii) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A\|h\|^2 \leq \int_\Omega \left|\left\langle h, U^{-1}F(\omega) \right\rangle\right|^2 d\mu(\omega) \leq B\|h\|^2;\ \text{para todo } h \in \mathscr{H}.$$

Lo que prueba que $U^{-1}F(\omega)$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mu\right)$. ■

Proposición 4.2.5. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $U:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ un operador unitario y $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida, con μ medida positiva. Si $UF:\Omega\to\mathscr{H}$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, entonces $F:\Omega\to\mathscr{H}$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$.*

Prueba. Como $UF:\Omega\to\mathscr{H}$ es un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ y $U:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ un operador unitario, entonces por la proposición 4.2.4 $U^{-1}UF$ es un marco continuo para $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$. Por lo tanto F es un marco continuo para $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$. ■

Definición 4.2.6. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $F:\Omega\to\mathscr{H}$ un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$. $T_F:L^2\to\mathscr{H}$ dado por*

$$T_F g=\int_\Omega g(\omega)F(\omega)\,d\mu(\omega),$$

recibe el nombre de ***operador pre-marco****.*

Proposición 4.2.7. *El operador pre-marco $T_F:L^2\to\mathscr{H}$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Para todo $h\in\mathscr{H}$ se tiene que $\langle T_F g,h\rangle=\int_\Omega g(\omega)\langle F(\omega),h\rangle\,d\mu(\omega)$.*

(ii) *T_F es acotado.*

Prueba. (i)

$$\begin{aligned}\langle T_F g,h\rangle=\left\langle\int_\Omega g(\omega)F(\omega)d\mu(\omega),h\right\rangle&=\int_\Omega\langle g(\omega)F(\omega),h\rangle\,d\mu(\omega) &&;\text{por } 3.3.1,\ 3.3.4 \text{ y } 4.1.4\ (i)\\ &=\int_\Omega g(\omega)\langle F(\omega),h\rangle\,d\mu(\omega). &&;\text{por } 4.1.4\ (ii)\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\|T_F g\|&=\sup_{\|h\|=1}\left|\langle T_F g,h\rangle\right|\\ &=\sup_{\|h\|=1}\left|\int_\Omega g(\omega)\langle F(\omega),h\rangle\,d\mu(\omega)\right| &&;\text{por } 4.2.6\\ &\le\sup_{\|h\|=1}\int_\Omega\left|g(\omega)\langle F(\omega),h\rangle\right|d\mu(\omega) &&;\text{por } 3.4.4\\ &=\sup_{\|h\|=1}\int_\Omega|g(\omega)|\,|\langle F(\omega),h\rangle|\,d\mu(\omega)\\ &=\sup_{\|h\|=1}\int_\Omega|g(\omega)|\left|\overline{\langle h,F(\omega)\rangle}\right|d\mu(\omega) &&;\text{por } 4.1.4\ (iii)\\ &=\sup_{\|h\|=1}\int_\Omega|g(\omega)|\,|\langle h,F(\omega)\rangle|\,d\mu(\omega)\\ &\le\sup_{\|h\|=1}\left(\int_\Omega|g(\omega)|^2\,d\mu(\omega)\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\langle h,F(\omega)\rangle|^2\,d\mu(\omega)\right)^{1/2} &&;\text{por } 3.5.10\\ &=\sup_{\|h\|=1}\|g\|\left(\int_\Omega|\langle h,F(\omega)\rangle|^2\,d\mu(\omega)\right)^{1/2} &&;\text{por } 3.5.13\\ &=\|g\|\sup_{\|h\|=1}\left(\int_\Omega|\langle h,F(\omega)\rangle|^2\,d\mu(\omega)\right)^{1/2}\\ &\le\|g\|\sup_{\|h\|=1}\left(B\|h\|^2\right)^{1/2}=\|g\|\sqrt{B}. &&;\text{por } 4.2.3\end{aligned}$$

Por lo tanto T_F es acotado.

Además $\frac{\|T_F g\|}{\|g\|} \leq \sqrt{B}$, con $g \neq 0$, entonces $\sup\left\{\frac{\|T_F g\|}{\|g\|},\ \text{con } g \neq 0\right\} \leq \sqrt{B}$, luego $\| T_F\| \leq \sqrt{B}$. ■

Observación 4.2.8. Nótese que el adjunto de T_F se dedude a partir de las definiciones 4.1.8 y 4.2.6, como sigue:

$$
\begin{aligned}
\left\langle h, T_F g\right\rangle &= \left\langle h, \int_\Omega g(\omega)F(\omega)d\mu(\omega)\right\rangle && ;\text{por } 4.2.6\\
&= \int_\Omega \left\langle h, g(\omega)F(\omega)\right\rangle d\mu(\omega) && ;\text{por } 3.3.1,\ 3.3.4 \text{ y } 4.1.4\ (i)\\
&= \int_\Omega \overline{g(\omega)}\left\langle h, F(\omega)\right\rangle d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.1.4\\
&= \int_\Omega \left\langle h, F(\omega)\right\rangle \overline{g(\omega)} d\mu(\omega) && ;\text{por } 3.3.5\ (iii)\\
&= \left\langle \left\langle h, F(\omega)\right\rangle, g\right\rangle_{L^2}. && ;\text{por } 4.1.7
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $T_F^* h = \langle h, F(\omega)\rangle$.

Definición 4.2.9. *El operador adjunto de $T_F : L^2 \to \mathscr{H}$, es el operador $T_F^* : \mathscr{H} \to L^2$ dado por $T_F^* g = \langle g, F(\omega)\rangle$, para todo $\omega \in \Omega$.*

Definición 4.2.10. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \Omega \to \mathscr{H}$ un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. El operador lineal acotado $S_F : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ dado por*

$$S_F = T_F T_F^*$$

se llama el ***operador marco****.*

Proposición 4.2.11. *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \Omega \to \mathscr{H}$ un marco continuo para $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. El operador marco $S_F : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, satisface las siguientes propiedades:*

(i) $S_F h = \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega) d\mu(\omega)$, *para todo $\omega \in \Omega$.*

(ii) *S_F es un operador auto-adjunto.*

(iii) *El operador S_F es invertible, y satisface $B^{-1} I \leq S_F^{-1} \leq A^{-1} I$.*

(iv) *$\left\{S_F^{-1} F\right\}$ es un marco con cotas B^{-1} y A^{-1}.*

Prueba. (i) Para todo $\omega \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
S_F h = T_F T_F^* h &= T_F (T_F^* h)\\
&= T_F \langle h, F(\omega)\rangle && ;\text{por } 4.2.9\\
&= \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega) d\mu(\omega). && ;\text{por } 4.2.6
\end{aligned}
$$

(ii) $S_F^* = (T_F T_F^*)^* = \left(T_F^*\right)^* T_F^* = T_F T_F^* = S_F$.

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle (S_F - AI)h, h\rangle &= \langle S_F h, h\rangle - AI\langle h, h\rangle && ;\text{por } 4.1.4\ (i)\ \text{y}\ (ii)\\
&= \left\langle \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega) d\mu(\omega), h\right\rangle - A\langle h, h\rangle && ;\text{por } 4.2.11\ (i)\\
&= \int_\Omega \langle \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega), h\rangle\, d\mu(\omega) - A\langle h, h\rangle && ;\text{por } 3.3.1,\ 3.3.4\ \text{y}\ 4.1.4\ (i)\\
&= \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle \langle F(\omega), h\rangle\, d\mu(\omega) - A\langle h, h\rangle && ;\text{por } 4.1.4\ (ii)\\
&= \int_\Omega |\langle h, F(\omega)\rangle|^2\, d\mu(\omega) - A\langle h, h\rangle\\
&\geq A\|h\|^2 - A\langle h, h\rangle = 0 && ;\text{por } 4.2.3
\end{aligned}$$

Luego $S_F - AI \geq 0$, entonces $AI \leq S_F$

$$\begin{aligned}
\langle (BI - S_F)h, h\rangle &= BI\langle h, h\rangle - \langle S_F h, h\rangle && ;\text{por } 4.1.4\ (i)\ \text{y}\ (ii)\\
&= B\langle h, h\rangle - \left\langle \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega) d\mu(\omega), h\right\rangle && ;\text{por } 4.2.11\ (i)\\
&= B\langle h, h\rangle - \int_\Omega \langle \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega), h\rangle\, d\mu(\omega) && ;\text{por } 3.3.1,\ 3.3.4\ \text{y}\ 4.1.4\ (i)\\
&= B\langle h, h\rangle - \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle \langle F(\omega), h\rangle\, d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.1.4\ (ii)\\
&= B\langle h, h\rangle - \int_\Omega |\langle h, F(\omega)\rangle|^2\, d\mu(\omega)\\
&\geq B\langle h, h\rangle - B\|h\|^2 = 0 && ;\text{por } 4.2.3
\end{aligned}$$

Luego $BI - S_F \geq 0$, entonces $S_F \leq BI$

Esto es $AI \leq S_F \leq BI$. Implicando ello que el operador marco S_F es un operador uniformemente positivo y por ende es completamente invertible. Además se tiene

$$B^{-1}I \leq S_F^{-1} \leq A^{-1}I.$$

(iv) Considérese $h \in \mathscr{H}$, se sigue

$$\begin{aligned}
S_F^{-1}h = S_F^{-1}S_F\left(S_F^{-1}h\right) &= S_F^{-1}\left(\int_\Omega \left\langle S_F^{-1}h, F(\omega)\right\rangle F(\omega) d\mu(\omega)\right) && ;\text{por } 4.2.11\ (i)\\
&= S_F^{-1}\left(\int_\Omega \left\langle \left(S_F^*\right)^{-1} h, F(\omega)\right\rangle F(\omega) d\mu(\omega)\right) && ;\text{por } 4.2.11\ (ii)\\
&= S_F^{-1}\left(\int_\Omega \left\langle \left(S_F^{-1}\right)^* h, F(\omega)\right\rangle F(\omega) d\mu(\omega)\right)\\
&= S_F^{-1}\left(\int_\Omega \left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle F(\omega) d\mu(\omega)\right) && ;\text{por } 4.1.8\\
&= \int_\Omega S_F^{-1}\left(\left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle F(\omega)\right) \mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle S_F^{-1}F(\omega) d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $h \in \mathscr{H}$ se tiene

$$B^{-1}\|h\|^2 \leq \int_\Omega \left|\left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle\right|^2 d\mu(\omega) = \int_\Omega \left\langle S_F^{-1}h, F(\omega)\right\rangle d\mu(\omega) \leq A^{-1}\|h\|^2.$$

Por ello $S_F^{-1}F$ es un marco continuo para $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. ■

Teorema 4.2.12 (**Descomposición de Marcos).** *Dados $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $F : \Omega \to \mathscr{H}$ un marco continuo de $\mathscr{H}$ con respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, entonces*

$$h = \int_\Omega \left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle F(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle S_F^{-1}F(\omega)d\mu(\omega), \quad \textit{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Prueba. Como el operador marco es invertible y auto-adjunto se tiene que:

$$\begin{aligned}
h = S_F S_F^{-1}h = S_F\left(S_F^{-1}h\right) &= \int_\Omega \left\langle S_F^{-1}h, F(\omega)\right\rangle F(\omega)d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.2.10\\
&= \int_\Omega \left\langle h, S_F^{-1}F(\omega)\right\rangle F(\omega)d\mu(\omega) && ;\text{por } 4.1.8\\
h = S_F^{-1}S_F h = S_F^{-1}(S_F h) &= S_F^{-1}\left(\int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle F(\omega)d\mu(\omega)\right) && ;\text{por } 4.2.10\\
&= \int_\Omega S_F^{-1}\left(\langle h, F(\omega)\rangle F(\omega)\right) d\mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \langle h, F(\omega)\rangle S_F^{-1}F(\omega)d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

■

BIBLIOGRAFÍA

[1] BOURBAKI, NICOLAS. *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, España, 1976.

[2] RECALDE, LUIS CORNELIO. *Las raíces históricas de la integral de Lebesgue*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XV, $N°$ 2, Cali, 2007.

[3] PANCHAPAGESAN, T. V. *Medida e Integración Parte I*, Tomo I, Universidad de los Andes, Mérida, 1991.

[4] RUDIN, WALTER. *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill, Madrid, 1990.

[5] FERNÁNDEZ, PEDRO JESÚS. *Medida e integração*, Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada, CNPq, Río de Janeiro, 1976.

[6] BALAZS, BAYER y RAHIMI. *Multipliers for Continuous Frames in Hilbert Spaces*, 2011.