



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 10 de abril del 2018

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

La suscrita:

Emilse Cabrera Capera con C.C. No. 1075295941, autora de la tesis y/o trabajo de grado titulado “Cálculo determinístico de la reactividad en reactores nucleares” presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de Física;

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

Vigilada Mineducación



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 2
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Cálculo determinístico de la reactividad en reactores nucleares.

AUTORA:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cabrera Capera	Emilse

DIRECTOR DE TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Suescún Díaz	Daniel

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Física

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA: Física

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2018 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 48

TIPO DE ILUSTRACIONES:

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros **X**

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Word, Adobe Reader

PREMIO O DISTINCIÓN: Laureada

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español

1. Ecuación inversa de la cinética
2. Formulación matricial
3. Reactividad nuclear
4. Reactor nuclear

Inglés

1. Inverse point kinetic equations
2. Matrix formulation
3. Nuclear reactivity
4. Nuclear power reactor



RESUMEN DEL CONTENIDO:

En el presente trabajo de grado se propone un nuevo método para el cálculo de la reactividad usando una función matricial equivalente para la concentración de precursores de neutrones retardados con cualquier forma de la potencia nuclear. La función matricial planteada se puede escribir en un sistema homogéneo el cual se resuelve usando la matriz exponencial y para su solución se requiere integrar la función matricial con respecto al tiempo, originando una segunda matriz. La forma exponencial de la matriz originada se calcula a partir de una diagonalización analítica, evitando el cálculo numérico de los valores propios, vectores propios y la inversión de la matriz. Los resultados del cálculo de la reactividad muestran una muy buena precisión del método propuesto con diferentes tamaños de paso en relación a otros métodos reportados en la literatura.

ABSTRACT:

In the present undergraduate thesis a new method for the calculation of nuclear reactivity using an equivalent matrix function for the concentration of delayed neutron precursors is proposed for any given form of nuclear power. The proposed matrix function can be written in a homogeneous system which is solved using an exponential matrix and for its solution requires to integrate the matrix function with respect to time, which originates a second matrix. The exponential form of the resulting matrix is calculated by analytical diagonalization, avoiding numerical calculation of the eigenvalues, eigenvectors and matrix inversion. The results of the nuclear reactivity calculations show a very good precision of the proposed method for different time steps in relation to other methods reported in the literature.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Ana Lilia Bernal Esteban

Firma:

Nombre Jurado:

Carlos Eduardo Cuellar Santanilla

Firma:

Nombre Jurado:

Diego Alejandro Rasero Causil

Firma:



UNIVERSIDAD
SURCOLOMBIANA

TRABAJO DE GRADO

Cálculo Determinístico de la Reactividad en Reactores Nucleares

Emilse Cabrera Capera

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA
NEIVA, HUILA
Enero, 2018



UNIVERSIDAD
SURCOLOMBIANA

Cálculo Determinístico de la Reactividad en Reactores Nucleares

Trabajo de Grado presentado como requisito para
optar al título profesional de *Física*

Emilse Cabrera Capera

Código: 20121110486

Ph.D. Daniel Suescún Díaz

Director del Trabajo

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA
NEIVA, HUILA
Enero, 2018

Agradecimientos

A través de estas líneas quiero expresar mis agradecimientos a la vida misma por concederme tantas bendiciones. También deseo agradecer a todas aquellas personas que han contribuido de cualquier manera en este proceso de formación. Entre ellas quiero hacer mención:

A mis padres, Rubiel Cabrera y Emilsen Capera, por estar siempre presentes con su amor, apoyo y comprensión, y por orientarme de la manera en que lo han hecho. De igual forma, le agradezco a mi hermano por la fortaleza dada a lo largo de estos años.

A mi director de este trabajo de grado el profesor Ph.D. Daniel Suescún Díaz por compartir su amplio conocimiento y su valioso tiempo. También le agradezco por los múltiples aportes que me brindó a través de sus oportunas recomendaciones para mejorar este trabajo y por sus consejos para enriquecer mi formación integral. De igual modo, le agradezco por darme la oportunidad de hacer parte del semillero de Física Computacional.

A todos los profesores del Programa de Física que me impartieron clases por contribuir ampliamente tanto con sus conocimientos como a través de sus experiencias. También les agradezco por tenerme en cuenta en la oportunidades que surgieron en su momento.

A todos mis compañeros del Programa de Física con los que he compartido, por su colaboración, por ser voces de aliento y por las enseñanzas que cada uno me ha aportado con sus distintas personalidades. También deseo agradecer a mi compañero Jesús Antonio Jiménez por facilitarme la herramienta computacional durante el desarrollo del trabajo.

A las personas que trabajan en las distintas dependencias de la Universidad Surcolombiana por contribuir con su labor para hacer posible las diferentes participaciones en eventos científicos divulgando los resultados de este trabajo.

Índice general

Resumen	III
Índice de tablas	V
Introducción	1
1 Fundamento Físico	4
1.1 Física nuclear	4
1.1.1 Reacciones nucleares	5
1.1.2 Energía de la reacción y secciones transversales	7
1.2 Fisión nuclear	8
1.3 Reacción en cadena	10
2 Consideraciones Teóricas	12
2.1 Aspectos generales	12
2.2 Ecuaciones de la cinética puntual determinísticas (ECP)	15
2.3 Factor de multiplicación k y reactividad	18
2.4 Método inverso	19
3 Método Propuesto	21
3.1 Forma matricial de ecuaciones diferenciales	21
3.2 Formulación matricial homogénea	24
3.3 Diagonalización	26
4 Resultados	29
4.1 Máximas diferencias en reactividad	29
5 Conclusiones y Perspectivas	37
5.1 Productos	38
Bibliografía	38

Resumen

En el presente trabajo de grado se propone un nuevo método para el cálculo de la reactividad usando una función matricial equivalente para la concentración de precursores de neutrones retardados con cualquier forma de la potencia nuclear. La función matricial planteada se puede escribir en un sistema homogéneo el cual se resuelve usando la matriz exponencial y para su solución se requiere integrar la función matricial con respecto al tiempo, originando una segunda matriz. La forma exponencial de la matriz originada se calcula a partir de una diagonalización analítica, evitando el cálculo numérico de los valores propios, vectores propios y la inversión de la matriz. Los resultados del cálculo de la reactividad muestran una muy buena precisión del método propuesto con diferentes tamaños de paso en relación a otros métodos reportados en la literatura.

Abstract

In the present undergraduate thesis a new method for the calculation of nuclear reactivity using an equivalent matrix function for the concentration of delayed neutron precursors is proposed for any given form of nuclear power. The proposed matrix function can be written in a homogeneous system which is solved using an exponential matrix and for its solution requires to integrate the matrix function with respect to time, which originates a second matrix. The exponential form of the resulting matrix is calculated by analytical diagonalization, avoiding numerical calculation of the eigenvalues, eigenvectors and matrix inversion. The results of the nuclear reactivity calculations show a very good precision of the proposed method for different time steps in relation to other methods reported in the literature.

Índice de tablas

Tabla 4.1.1	Parámetros cinéticos del ^{235}U	30
Tabla 4.1.2	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.00243 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 20 \text{ pcm}$, $t = 1000 \text{ s}$	30
Tabla 4.1.3	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.01046 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 70 \text{ pcm}$, $t = 800 \text{ s}$	31
Tabla 4.1.4	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.02817 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 140 \text{ pcm}$, $t = 600 \text{ s}$	31
Tabla 4.1.5	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.12353 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 300 \text{ pcm}$, $t = 300 \text{ s}$	32
Tabla 4.1.6	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.00847 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 550 \text{ pcm}$, $t = 100 \text{ s}$	32
Tabla 4.1.7	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.023 \text{ s}^{-1}$, $t = 100 \text{ s}$	33
Tabla 4.1.8	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 2.345 \text{ s}^{-1}$, $t = 80 \text{ s}$	33
Tabla 4.1.9	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 11.6442 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 700 \text{ pcm}$, $t = 60 \text{ s}$	34
Tabla 4.1.10	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 52.80352 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 800 \text{ pcm}$, $t = 10 \text{ s}$	34
Tabla 4.1.11	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con diferentes valores de ω y diferentes pasos de tiempo.	35
Tabla 4.1.12	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = a + bt^3$ con $a = 1$, diferentes valores del factor b y $h = 1 \text{ s}$	35
Tabla 4.1.13	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para un paso de tiempo $h = 1 \text{ s}$	36
Tabla 4.1.14	Máximas diferencias de la reactividad en pcm para potencias nucleares con variaciones hiperbólicas y para grandes pasos de tiempo.	36

Introducción

El estudio acerca del funcionamiento de los reactores nucleares requiere del análisis de los procesos físicos que intervienen en su núcleo. En ese sentido, las investigaciones entorno a esta área de física de reactores se enfocan esencialmente en comprender desde procesos de decaimientos radiactivos hasta las diferentes reacciones nucleares debidas a neutrones. Todos estos fenómenos son de interés para reconocer los parámetros fundamentales que están involucrados en los sistemas internos y que permiten mantener la seguridad de estos dispositivos.

Cabe mencionar que un reactor nuclear es una instalación basada en el fenómeno físico de la fisión nuclear. Su función principal es producir, mantener y controlar una serie de fisiones nucleares auto-sostenidas a través de la interacción de átomos pesados, como el ^{235}U y el ^{239}Pu , con neutrones térmicos. Como resultado de la reacción nuclear de fisión es más probable que se produzca dos isótopos de masas intermedias, de dos a tres neutrones rápidos en promedio y aproximadamente 200 MeV de energía. Tanto los isótopos como los neutrones producidos en la reacción de fisión son utilizados para actividades de investigación, y la energía liberada en forma de calor, se aprovecha principalmente para producción de energía eléctrica [1].

Para mantener estable la energía eléctrica generada y por razones de seguridad, es indispensable regular las reacciones de fisión nuclear en cadena o en su defecto, la potencia del reactor. Uno de los mecanismos que fueron diseñados para ese objetivo, son las barras de control. Su función es moderar los neutrones por medio de la absorción de éstos, evitando que dichas partículas interactúen con algún núcleo del elemento combustible y a su vez, que no generen otro evento de fisión. De este modo, subiendo o bajando las barras se puede controlar la velocidad de estas reacciones y efectuar cambios rápidos de potencia en las pruebas de encendido, durante su funcionamiento normal e incluso en una parada rápida del reactor dado algún caso de emergencia.

Justamente el avance en los procedimientos de control permitió paulatinamente prevenir accidentes industriales y optimizar los mecanismos de control para garantizar la seguridad en los reactores nucleares. Todo esto también provocó un progreso en las herramientas computacionales a través del análisis numérico de los modelos matemáticos que describen el comportamiento

cinético del núcleo del reactor. Por esta razón, uno de los principales propósitos de las investigaciones en física de reactores es calcular propiedades relacionadas directamente con el control de un reactor, siendo la reactividad una de las más importantes [2]. La reactividad es el parámetro dependiente del tiempo que se utiliza frecuentemente para definir el estado de los reactores nucleares y también es considerada como una característica física del núcleo [3]. Este parámetro puede ser determinado en cada instante, analizando la variación temporal del nivel de potencia del reactor y utilizando las ecuaciones de la cinética puntual. Además, se considera como uno de los desafíos de investigación en el monitoreo y control de los reactores nucleares.

El desarrollo que hubo en los computadores digitales también motivó a mejorar las pruebas físicas en el encendido del reactor, durante su funcionamiento normal y en el reabastecimiento de combustible; reduciendo las dificultades asociadas a los dispositivos analógicos en tiempo, costo y precisión. Como resultado de ello, fueron diseñados y construidos los medidores digitales de reactividad en línea, con los cuales se disminuye el tiempo necesario para dichas pruebas y se permite alcanzar eficientemente el nivel de potencia deseada para el funcionamiento del reactor [4–7]. De igual manera, se han generado estudios previos de mediciones en tiempo real para el monitoreo en el dominio subcrítico de un reactor [8–10]. Asimismo, se han propuesto métodos para el cálculo de la reactividad y fuente de neutrones, en reactores nucleares en estado subcrítico o de baja potencia [11–15]. Incluso en el diseño y construcción de un medidor de reactividad en tiempo real para reactores de investigación [3]. Todos estas investigaciones indican la necesidad de disponer datos precisos sobre la reactividad.

En general, los medidores digitales de reactividad están basados en la ecuación inversa de la cinética puntual determinística [16]. Varios de los estudios mencionados anteriormente han determinado la reactividad mediante métodos que permitan discretizar el término de la integral asociado a esta ecuación, la cual es conocida como histórico de la potencia nuclear. También se ha formulado el cálculo de la reactividad sin este término, usando derivadas de la potencia nuclear y el método de mínimos cuadrados para controlar el ruido [17]. De otro modo, se han implementado diferentes métodos como es el caso de la versión discreta de la transformada de Laplace [18], usando la fórmula de Euler Maclaurin [19] y el método de Lagrange de tres y cinco puntos [20].

Para el diseño de los medidores de reactividad en tiempo real es necesario métodos que no involucren el histórico de la potencia nuclear. Por tanto, estudios más recientes han implementado métodos numéricos multipaso para el cálculo de la reactividad. Entre ellos el método predictor-corrector generalizado de Hamming [21] y la formulación del método predictor-corrector generalizado de Adams-Bashforth-Moulton [22].

Las investigaciones mencionadas destacan el continuo estudio que hace la comunidad científica en el cálculo de la reactividad determinística para el adecuado funcionamiento, seguridad y producción de energía en los reactores nucleares. En virtud de lo anterior, este trabajo propone un método alternativo para el cálculo de la reactividad sin el uso del histórico de la potencia nuclear, de una forma sencilla y precisa. El desarrollo del mismo se concentra en cinco capítulos, empezando por una descripción de la física involucrada en los reactores nucleares. En el segundo capítulo se describe el modelo cinético puntual de un reactor que permite obtener la ecuación inversa de la cinética puntual con la cual se calcula la reactividad. En el tercer capítulo se expone el método propuesto a partir de la formulación matricial para la concentración de precursores de neutrones retardados en las ecuaciones de la cinética puntual con diferentes formas de la potencia nuclear. Finalmente, en los últimos dos capítulos se presentan los resultados y las conclusiones relevantes del presente trabajo.

Capítulo 1

Fundamento Físico

La investigación en física nuclear ha generado múltiples descubrimientos que han contribuido a un gran número de aplicaciones en diferentes ramas del conocimiento tan diversas como ciencias, ingeniería, artes y ciencias de la salud. Una de estas aplicaciones de la física nuclear en ciencias e ingeniería se utiliza con frecuencia para la producción de energía en plantas nucleares. De acuerdo a esto, es esencial comprender los procesos físicos que ocurren en el núcleo de los reactores, los cuales representan la fuente y el suministro principal para el funcionamiento dentro de estas instalaciones. En este capítulo se abordará de manera cualitativa aquellos fenómenos de interés, involucrados en el área de física nuclear aplicada a reactores nucleares. Para ello, se hará una introducción acerca de física nuclear, luego se aborda las reacciones nucleares con neutrones, las secciones transversales y una descripción un poco más detallada de la fisión nuclear y la reacción en cadena.

1.1. Física nuclear

Durante la primera mitad del siglo XX se hicieron muchos descubrimientos en el área de física nuclear y gran parte de los resultados novedosos procedentes de aquellas investigaciones experimentales fueron influenciadas gracias al trabajo de Ernest Rutherford. Este científico neozelandés se le considera como el padre de la física nuclear debido a la cantidad de contribuciones que hizo junto a sus principales colaboradores, sus estudiantes.

Uno de los tantos aportes que realizó Rutherford con sus experimentos fue caracterizar los diferentes tipos de radiaciones: alfa (átomos de helio ionizados), beta (electrones) y gamma (fotones de alta energía), procedentes del fenómeno de la radiactividad descubierto accidentalmente por

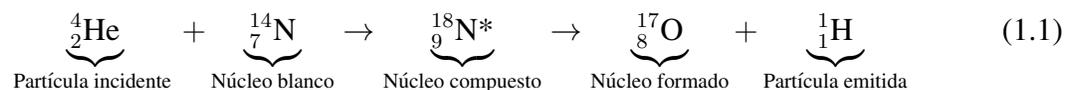
Henri Becquerel a finales del siglo XIX. De igual manera, asoció la emisión de estos tipos de radiaciones a procesos de decaimientos radiactivos que fueron modelados por una ley de decaimiento exponencial propuesta junto a Frederick Soddy [23].

Poco después sus estudios profundizaron la estructura de la materia radiando láminas de oro con partículas alfa. El resultado de esas investigaciones fue el descubrimiento del núcleo en el año de 1911, con su modelo atómico y con ayuda de sus estudiantes Geiger y Marsden. Aquel modelo explicaba cómo una porción de las partículas alfa incidentes eran dispersadas en una pequeña región llamada núcleo, en donde se reúne toda la carga positiva y además, se concentra la mayor parte de la masa del átomo. De esta manera, promovió el desarrollo de posteriores estudios bombardeando núcleos atómicos con partículas de diferente naturaleza.

Hacia el año de 1932, James Chadwick otro de sus estudiantes, encontró una fuerte radiación emitida en dichos experimentos, lo cual conllevó al descubrimiento de una nueva partícula con una característica muy importante. La propiedad asociada a dicha partícula está relacionada con su carga eléctrica, evitando que experimente la interacción de Coulomb cuando se hace incidir en el núcleo atómico precisamente debido a su carga neutra, motivo por el cual se le denominó neutrón. Este hallazgo proporcionó un nuevo camino hacia la comprensión sobre la naturaleza del núcleo, las propiedades del mismo y las reacciones nucleares debidas a estas partículas. Por este motivo, a continuación se detalla las principales reacciones nucleares con neutrones que están presentes en el núcleo de un reactor y sus respectivas secciones eficaces.

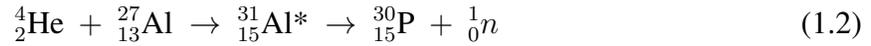
1.1.1. Reacciones nucleares

La dinámica de las reacciones nucleares fue utilizada con el objetivo de encontrar nuevos elementos a través de la interacción entre partículas y núcleos atómicos. En este sentido, diferentes tipos de isótopos radiactivos se producían con frecuencia en las reacciones nucleares entre partículas de distinta naturaleza (neutrón, protón, partículas beta o incluso, núcleos de átomos ligeros), utilizadas como proyectiles sobre un núcleo atómico. Una de las primeras reacciones nucleares la realizó Rutherford en 1919, mostrando el proceso de transformación o “transmutación” nuclear:

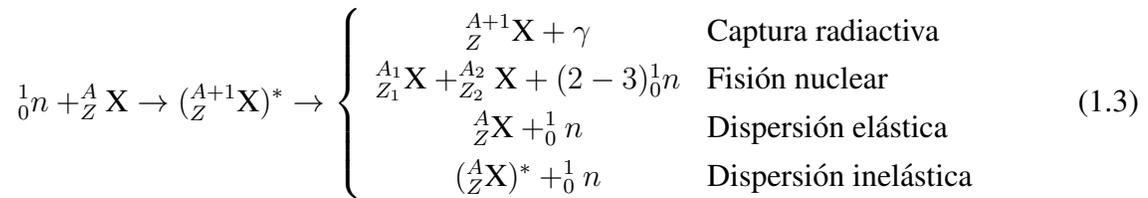


ó en forma abreviada ${}^{14}\text{N}(\alpha, p){}^{17}\text{O}$, en donde α es la partícula alfa incidente ${}^4_2\text{He}$ y p es el protón emitido ${}^1_1\text{H}$. En la reacción nuclear (1.1) se muestra la transformación nuclear que ha sufrido el

nitrógeno en oxígeno luego de ser bombardeado por partículas alfa. De manera similar, se puede deducir que hay un sin número de reacciones nucleares posibles teniendo en cuenta la cantidad de partículas y los elementos dispuestos en la tabla periódica por aquella época. Asimismo, otro ejemplo de estas múltiples reacciones es la siguiente:



En este caso, la partícula emitida es un neutrón 1_0n . A partir de la reacción nuclear mostrada en (1.2) se descubrió el fenómeno de la radiactividad artificial en 1934 por Joliot-Curie, hecho que animó a científicos en diferentes partes del mundo a producir nuevos isótopos radiactivos en forma artificial, utilizando el neutrón como partícula incidente. Desde entonces, las reacciones nucleares típicas con neutrones son eventos de capturas radiactivas, fisión nuclear o reacciones de dispersión; tal como se muestra a continuación:



Aquí Z es el número atómico (número de protones), A es el número de masa o número total de nucleones ($A = Z + N$, donde N es el número de neutrones) y X es el elemento asociado al núcleo de interés. Cada una de las reacciones nucleares dadas por (1.3) contribuyen de manera significativa en la reacción en cadena y por tanto son de interés en el análisis de los reactores nucleares [24]. Por ejemplo, la reacción de *captura radiactiva* se genera a partir de la absorción de un neutrón por un núcleo atómico, lo cual produce que este núcleo pase a un estado excitado y posteriormente decaiga al estado fundamental emitiendo un fotón de alta energía. Este tipo de reacción es importante ya que eliminan los neutrones de la reacción en cadena [1].

La reacción principal es la *fisión nuclear* dado a que es el proceso que caracteriza a los reactores nucleares y se hará especial énfasis en la sección 1.2. Para las *reacciones de dispersión* se tienen dos tipos de eventos: dispersión elástica o inelástica. Si es del primer tipo, el núcleo permanece en su estado fundamental, conservando la energía cinética. Si es un evento de dispersión inelástica entonces el neutrón y el núcleo se combinan temporalmente mientras se dispersa el neutrón y el núcleo que ha quedado en estado excitado decae emitiendo un rayo gamma. En este último evento de dispersión, no se conserva la energía cinética tal como se conoce de los principios en mecánica para partículas macroscópicas. También se conoce que la dispersión inelástica ocurre

con mayor probabilidad en las reacciones de neutrones de mayor energía cinética con núcleos con Z elevado.

1.1.2. Energía de la reacción y secciones transversales

Algo característico de las reacciones nucleares denotadas por $X(a, b)Y$ es que se emite o absorbe energía dependiendo en gran medida de un defecto en masa $\Delta M = M_i - M_f$. La diferencia entre la masa calculada al inicio de la reacción nuclear $M_i = M_a + M_X$ y después de ella $M_f = M_b + M_Y$, permite conocer la energía que se libera en el proceso o la que se requiere para el mismo. Con la teoría de la relatividad se proporcionó una nueva idea capaz de generar enormes cantidades de energía, a través del principio propuesto por Albert Einstein por medio de la expresión $Q = \Delta M c^2$, siendo Q la *energía de la reacción*, que corresponde al cambio de la energía en reposo por aquel defecto en masa luego de la reacción nuclear. Esta diferencia en masa también determina cómo será la reacción: si es positiva, entonces la reacción se considera *exotérmica* y, si es negativa, conduce a una reacción *endotérmica*. En el caso particular de la fisión nuclear corresponde a un tipo de reacción exotérmica.

Las reacciones nucleares también se pueden caracterizar a través de las *secciones transversales* comúnmente representadas por el símbolo σ , las cuales representan la probabilidad de que dichas reacciones se lleven a cabo. De otro modo, se considera como el área transversal efectiva que el núcleo presenta para la reacción nuclear con los neutrones. Entre mayor sea ésta superficie asimismo será la probabilidad de que ocurra la reacción nuclear y dependerá esencialmente del núcleo y de la velocidad de los neutrones. La magnitud de dicha área superficial se denomina *barn*, que equivale a 10^{-24}cm^2 y corresponde al área geométrica presentada al neutrón por el núcleo [23]. Las secciones transversales están asociadas a cada una de las reacciones nucleares que se muestran en (1.3). Esto se puede representar esquemáticamente de la siguiente manera:

$$\sigma_t \quad (\text{Total}) \rightarrow \begin{cases} \sigma_s & (\text{Dispersión}) \\ \sigma_a & (\text{Absorción}) \end{cases} \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e \quad (\text{Dispersión elástica}) \\ \sigma_{in} \quad (\text{Dispersión inelástica}) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_f \quad (\text{Fisión}) \\ \sigma_\gamma \quad (\text{Captura radiactiva}) \end{array} \right. \end{cases} \quad (1.4)$$

La suma de todas ellas permitirá conocer la sección transversal total $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_e + \sigma_{in} + \sigma_a + \sigma_f + \sigma_\gamma$, que determina la probabilidad de que ocurra cualquier tipo de interacción nuclear entre las mencionadas con el neutrón. Cuando se analiza la interacción con un solo núcleo se habla de *sección transversal microscópica* y depende de algún modo de la energía de los neutrones inci-

dentos (a bajas energías se comporta aproximadamente como $E^{-1/2}$) y posee una dependencia mucho más débil con la componente angular [1]. Si aquello que se desea caracterizar es un trozo macroscópico de material del combustible, entonces se hace referencia a la *sección transversal macroscópica* $\Sigma = N\sigma$ (donde N es la densidad del número atómico). Esta determina la probabilidad de que suceda cualquier reacción nuclear por unidad de longitud recorrida por el neutrón incidente. Además tendrá dependencia espacial en caso de que la densidad del material no sea uniforme y del tiempo, debido a la inestabilidad de los núcleos atómicos.

Si un neutrón interacciona con un núcleo pesado disminuye su energía de enlace por nucleón, es decir, disminuye la energía requerida para extraer del núcleo una de sus partículas constituyentes. Esta reducción es suficiente para que algunos núcleos (como el ^{235}U y el ^{239}Pu), en estado excitado, tengan alta probabilidad de fisión aún si el neutrón tiene muy baja energía. Esta medida de probabilidad para que un núcleo fisione luego de interaccionar con un neutrón es la que se describe en (1.4) y se conoce como *sección transversal de fisión* σ_f . Los núcleos con número de masa A impar tienen secciones transversales de absorción y fisión muchos más grandes para neutrones de baja energía que aquellos con A par [24]. La razón principal se debe a que los primeros estados excitados del núcleo compuesto (núcleo con número de masa A impar que absorbió un neutrón) están más cercanos al estado base que los núcleos compuestos derivados de la absorción de neutrones por núcleos con A par.

En la actualidad, existen bases de datos de las secciones transversales nucleares a partir de mediciones experimentales o cálculos teóricos. En vista de la necesidad de consolidar esta información se crearon fuentes de información tales como ENSDF (Evaluate Structure Nuclear Data File) en Estados Unidos, así como en diferentes lugares en el mundo [1]. También han sido creados con el propósito de consolidar los datos con el desarrollo experimental y teórico.

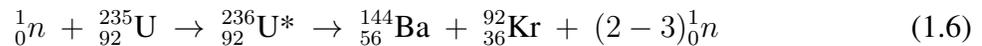
1.2. Fisión nuclear

Para que suceda un evento de fisión se requiere superar una barrera de potencial de 6 a 9 MeV en la mayoría de los núcleos de interés. De ahí la razón para disponer de una cantidad de energía suficiente para superar esa barrera de fisión y se produzca dicho evento de manera espontánea o inducida. Lo anterior se logra, enviando una partícula con una energía cinética mayor a la energía necesaria para superar esa barrera de fisión. Un ejemplo de ello, es un rayo gamma incidente sobre un núcleo pesado, esto produciría lo que se denomina *fotofisión*. Sin embargo, en términos de energía es más conveniente enviar un neutrón al núcleo pesado ya que la energía de enlace con el neutrón añadido supera dicha barrera y podría inducir a un evento de fisión [1].

En ese sentido, es necesario una fuente de neutrones similar a las primeras que se utilizaron experimentalmente (por el año de 1940), producidas en ese entonces a través de las siguientes reacciones:



La notación d indica que es un átomo de deuterio, α es una partícula alfa y n es el neutrón producido. Una vez se generan los neutrones en las reacciones mencionadas anteriormente, se hacen incidir aquellos que tienen energía cinética muy pequeña comparada con la energía nuclear, los cuales se denominan *térmicos* dado a que tienen energías de $E = 0.025$ eV, comparables a la energía térmica de los átomos en el núcleo del reactor a temperatura ambiente [1]. Cuando un núcleo de ${}^{235}\text{U}$ captura un neutrón de este tipo, entonces hace que éste se fisione al encontrarse en un estado excitado. De la fragmentación se puede generar diferentes combinaciones en los dos isótopos productos de fisión, los cuales poseen masas comparables que decaen en una fracción de segundo hasta muchos miles de años. A continuación, se muestra un ejemplo representativo de una reacción nuclear de fisión:



En este caso, los isótopos productos de fisión son ${}_{36}^{92}\text{Kr}$ y ${}_{56}^{144}\text{Ba}$. Este último isótopo conllevó a Otto Hahn y Fritz Strassman en 1938 a observar que éste elemento era producido cuando el núcleo de uranio era irradiado con neutrones. De manera casi simultánea, esto también fue interpretado por Otto Frish y Lise Meitner, quienes calcularon que la captura de un neutrón podía causar la ruptura de un núcleo pesado como el uranio en partes de tamaño medio como los núcleos de bario.

Por otro lado, el evento de fisión con los neutrones térmicos utilizados como proyectiles, funciona especialmente con núcleos pesados como ${}^{233}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$ y ${}^{241}\text{Pu}$. Aquellos núcleos se les considera *fisibles* dado a que se fisionan con facilidad por la absorción de un neutrón de este tipo, siendo ideales para sostener una reacción en cadena y por ello, comúnmente se eligen como combustibles en los reactores. Sin embargo, existe un grupo de núcleos pesados en donde la energía de enlace adicional proporcionada por el neutrón capturado es insuficiente para superar la barrera de fisión. Por ese motivo se le suministra energía de 1 MeV al neutrón para que induzca fisión, dichos neutrones se denominan *rápidos* y los núcleos son llamados *fisionables* como ${}^{232}\text{Th}$, ${}^{238}\text{U}$ y ${}^{240}\text{Pu}$. En este caso, dichos núcleos son incapaces de sostener una reacción en cadena por sí mismos y por tanto se combinan con núcleos físiiles como ${}^{235}\text{U}$ y ${}^{239}\text{Pu}$.

Varios de los núcleos pesados son fisionables pero cabe resaltar que no todos son fisibles y la razón principal es la velocidad o energía cinética que debe poseer el neutrón incidente. Por ejemplo, el ^{239}Pu puede ser fisionado en presencia de neutrones térmicos tal como lo hace el núcleo de ^{235}U . A diferencia del ^{238}U que sólo puede ser fisionado por neutrones rápidos (ya que la probabilidad de ser fisionado por neutrones térmicos es muy baja), éste se fisiona espontáneamente. Lo anterior está relacionado con la probabilidad de que ocurran estas reacciones nucleares de acuerdo al núcleo. El ^{235}U es el material más fisionable de los tres que existen en la naturaleza, pero su contenido es de tan solo 0.72 % en el uranio natural, se debe al continuo decaimiento de este isótopo desde la formación de la Tierra y en consecuencia se requiere de técnicas complejas para aumentar la cantidad de ^{235}U en el uranio natural por un proceso llamado *enriquecimiento*.

La mayoría de los isótopos producidos en la fisión son inestables y usualmente se transmutan por desintegración beta (emisión de electrones) o por emisión de neutrones producto de la desintegración de estos productos de fisión. Por este motivo, generalmente también se emiten neutrones durante el siguiente segundo después del evento de fisión a los cuales se les denomina *neutrones retardados*. Estos neutrones constituyen tan solo el 0.7 % de los que han sido producidos en el evento de fisión y son fundamentales dado a que permiten controlar el reactor. El 99.3 % restante se generará de manera simultánea justo en la fisión, de ahí que sean llamados *neutrones instantáneos* y corresponden en promedio a dos a tres neutrones para el ^{235}U . También se libera una energía nuclear de aproximadamente 200 MeV por cada evento de esta naturaleza, la mayor parte proviene de la energía cinética de estos fragmentos de fisión. La energía que proviene del decaimiento de los productos de fisión tienen proporciones mucho más pequeñas de 20 MeV producida entre electrones y neutrinos. En el caso de los electrones depositan su energía en el combustible a diferencia de los neutrinos que rara vez interactúan con la materia.

1.3. Reacción en cadena

Los neutrones generados dan la posibilidad de producir sucesivos eventos de fisión conduciendo a lo que se conoce como *reacción nuclear en cadena*. Para mantener esta reacción es necesario que uno o más de los neutrones producidos no sean absorbidos por núcleos combustibles o productos de fisión a través de eventos de captura radiactiva e incluso no sean fugados del sistema y en cambio, sean dispersados para generar otro evento de fisión [1].

Justamente el trabajo experimental sobre los neutrones fue fundamental para que se lograra poner en marcha aquel primer reactor nuclear denominado “Pila”, precisamente debido al apilamiento de óxido de uranio y grafito. Esta hazaña fue alcanzada por Fermi junto con otros

investigadores hacia el año de 1942 en el estadio Stagg Field de la Universidad de Chicago [23]. A partir de este logro, se consiguió utilizar la reacción en cadena de fisiones nucleares, lo que posteriormente dio lugar al control de los reactores nucleares.

Es importante destacar que en ocasiones los neutrones liberados tienen mucha energía por lo cual se requiere disminuir su velocidad con núcleos de elementos ligeros como el hidrógeno. Luego, es posible moderar las reacciones en cadena por medio de mecanismos que permitan controlar la población de neutrones. Por tanto, los sistemas involucrados en el reactor nuclear deben contener las siguientes condiciones esenciales para cumplir éste propósito: en primer lugar, se requiere una cantidad de combustible o masa crítica (compuesta por elementos pesados, usualmente uranio); también un componente llamado moderador (agua, agua pesada o grafito) que disminuya la velocidad de los neutrones de las nuevas generaciones y un fluido que tenga la capacidad de extraer el calor denominado refrigerante [23]. El refrigerante es impulsado por una bomba, una vez extrae el exceso de temperatura pasa a un intercambiador de calor en el que es cedido a un circuito secundario de agua que produce el vapor que va ser dirigido hacia las turbinas para la generación de energía eléctrica.

Capítulo 2

Consideraciones Teóricas

En este capítulo se describirá algunos aspectos relevantes asociados a las teorías rigurosas que describen el comportamiento del flujo neutrónico a través de la teoría de transporte y la teoría de difusión de neutrones según las referencias [1] y [24]. Estas teorías conducen a la ecuaciones de la cinética puntual determinísticas (ECP) que representan un modelo muy simple pero muy útil en el análisis de los reactores nucleares. Asimismo se describe el factor de multiplicación k y el parámetro de estudio en este trabajo, la reactividad. De acuerdo a esto, finalmente se introduce el método inverso o la ecuación de la cinética puntual inversa, la cual permite el cálculo de la reactividad.

2.1. Aspectos generales

Para monitorear la estabilidad de la reacción en cadena de fisión es necesario describir el comportamiento de los neutrones en el núcleo de un reactor a partir de la evolución temporal del flujo de neutrones $n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$. En este sentido, la distribución de estos neutrones se puede determinar estudiando la *ecuación de transporte de neutrones* que puede ser obtenida por medio de una ecuación de balance entre la producción, absorción y fugas de los neutrones, como lo indica la siguiente expresión:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} n + v\Sigma_t(\vec{r}, E)n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v'\Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad (2.1)$$

Donde v es la velocidad de los neutrones, $\hat{\Omega}$ es el vector unitario del desplazamiento de los neutrones, Σ_t es la sección macroscópica total, Σ_s es la sección macroscópica de dispersión y S es el término de fuente. El segundo y tercer término del lado izquierdo de la ecuación (2.1) corresponden a neutrones que se fugan a través de la superficie y a los neutrones que sufren colisión (dispersión o absorción), respectivamente. En el lado izquierdo se representa la producción de neutrones: el primer término será neutrones de diferentes energías E' y moviéndose en diferentes direcciones $\hat{\Omega}'$, que pueden experimentar una colisión de dispersión que cambia E' y $\hat{\Omega}'$, en los parámetros E y $\hat{\Omega}$ de interés; el segundo término denota cualquier fuente de neutrones.

Evidentemente la ecuación (2.1) es integro-diferencial dado a que contiene derivadas en tiempo y espacio, e integrales sobre el ángulo y la energía. También ofrece una descripción detallada del comportamiento del flujo neutrónico, lo cual conlleva a que la matemática involucrada sea de un alto grado de complejidad debido a su dependencia en siete variables ($\vec{r} = x, y, z; E; \hat{\Omega} = \theta, \phi; t$). De este modo, la ecuación de transporte de neutrones usualmente se implementa para el diseño de ensambles de combustibles.

Desde un punto de vista real del sistema, la estructura compleja y no uniforme en la mayoría de ensambles y núcleos de los reactores, implica un costo computacional demasiado elevado. Por este motivo, las investigaciones se enfocan en desarrollar herramientas computacionales a través de métodos aproximados que permitan obtener información útil del reactor nuclear. La función de estos métodos es convertir la ecuación de transporte en sistemas de ecuaciones algebraicas más viables para el cálculo computacional, a partir de la discretización de cada una de las variables independientes.

Otra forma más conveniente a los métodos de discretización es simplificar o reducir las variables independientes en la ecuación de transporte. Esto es posible, considerando problemas independientes del tiempo, geometrías del reactor en una o dos dimensiones y también es muy útil, eliminar la variable angular. En virtud de ello, se considera la expresión $\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \equiv \psi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ en la ecuación (2.1) y se integra. Este procedimiento conduce a la *ecuación de continuidad de neutrones*:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, t) = \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) + S(\vec{r}, E, t) \quad (2.2)$$

En esta expresión aparecen las variables desconocidas ϕ y \vec{J} , que representan el flujo y corriente de neutrones, respectivamente. Asimismo, se ha considerado que poseen una dependencia angular débil. De otro modo, estas incógnitas se pueden conocer a partir del flujo angular:

$$\phi(\vec{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} \quad (2.3)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \hat{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} \quad (2.4)$$

Luego, se puede suprimir la dependencia con la variable independiente de la energía si se considera que la velocidad o energía de los neutrones es la misma. De esta manera, se elimina la dependencia explícita de la energía con dicha aproximación de una velocidad:

$$\int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) \implies \Sigma_s \phi(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$, siendo Σ_a la sección transversal macroscópica de absorción y Σ_s la sección transversal macroscópica de dispersión. Luego de reemplazar la ecuación (2.5) en la ecuación (2.2), se obtiene la ecuación base para la construcción del modelo cinético descrito en la siguiente sección. Esta aproximación conduce a la teoría conocida como la *ecuación de difusión de una velocidad*:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi + \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

Aquí $\vec{J}(\vec{r}, t) = -D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t)$ es la aproximación de difusión o ley de Fick, siendo $D(\vec{r})$ el coeficiente de difusión de neutrones. Esta relación implica que una variación en el flujo de neutrones (o densidad) dará lugar a una corriente de neutrones que fluyen desde regiones de alta a baja densidad. Desde el punto de vista físico, la tasa de colisión en regiones de alta densidad de neutrones será mayor con la correspondiente tendencia de los neutrones a dispersarse con mayor frecuencia hacia densidades más bajas. La velocidad a la que se produce dicha difusión depende del coeficiente de difusión. Esto también se asocia a leyes de transporte y a su vez en ejemplos relacionados a la teoría de difusión como ley de Fourier de conducción térmica (conductividad térmica), ley de viscosidad de Stokes (viscosidad de corte).

En términos matemáticos, la ecuación de difusión de neutrones se describe como una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico. Este tipo de ecuación ha sido ampliamente estudiada en procesos que describen condiciones de calor, difusión de gases e incluso, en mecánica cuántica con la ecuación de Schrödinger. Aunque la descripción de la ecuación de difusión de una velocidad no es válida en general, debido a que presenta limitaciones en zonas con gradientes fuertes en el flujo ya sea en el exterior o en la interfase entre materiales distintos, medio fuertemente absorbentes y fuentes localizadas, se pueden hacer estimaciones preliminares de

diseño y estudiar conceptos importantes en el análisis de reactores. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se puede resolver de forma analítica debido a la complejidad geométrica y a las heterogeneidades del sistema, por ello son necesarias técnicas numéricas que permitan resolver estas ecuaciones. De entre las distintas técnicas de resolución podemos destacar las diferencias finitas y los métodos nodales. La aproximación por estos métodos es más exacta pero presenta un alto costo computacional y por tanto, no provee el cálculo en tiempo real de algunos parámetros como la reactividad. Esto no es viable dado a que el operador tiene un segundo para tomar la decisión sobre la barra de control. Por esta razón, es más conveniente analizar un modelo apropiado para el cálculo de la reactividad a través de las ecuaciones de la cinética puntual descritas en la siguiente sección.

2.2. Ecuaciones de la cinética puntual determinísticas (ECP)

Para describir un modelo que incluya todos los neutrones derivados del evento de fisión es necesario introducir el término $C_i(\vec{r}, t)$ que representa el número esperado de precursores de tipo i que siempre decaen emitiendo un neutrón retardado. Por tanto, se debe considerar los siguientes términos:

- Número de precursores que se producen en la fisión primaria: $\beta_i = \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$
- Número de precursores que decaen por segundo: $\lambda_i C_i$

La primera expresión supone que los precursores no se fugan o se dispersan antes del proceso de decaimiento, considerando el número promedio de neutrones emitidos por fisión los cuales se denotan por el término ν . A partir de ambas expresiones se puede construir una ecuación de balance para la concentración de precursores:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

También se incluye la contribución de los neutrones instantáneos y retardados en el término de fuente de la ecuación (2.6), tal como se muestra a continuación:

$$S(\vec{r}, t) = (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (2.8)$$

Con la ecuación (2.7) y reemplazando la ecuación (2.8) en (2.6), se obtiene una descripción más completa para el flujo de neutrones para seis grupos de precursores:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}') \vec{\nabla} \phi + \Sigma_a(\vec{r}') \phi(\vec{r}', t) = (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}', t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}', t) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}', t) - \lambda_i C_i(\vec{r}', t); \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.10)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede resolver separando la dependencia espacial y temporal, para la concentración de precursores $C_i(\vec{r}', t) = C_i(t)\psi(\vec{r}')$ y el flujo de neutrones $\phi(\vec{r}', t) = vn(t)\psi(\vec{r}')$, donde $n(t)$ es el número total de neutrones. Posterior a ello, se analiza la situación asintótica para ambas variables de forma que la evolución temporal estará descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(1 - \beta) - 1}{l} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (2.11)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i \frac{k}{l} n(t) - \lambda_i C_i(t); \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.12)$$

Aquí, se ha tenido en cuenta dos nuevos parámetros en las ecuaciones anteriores definidos así:

$$l \equiv [v\Sigma_a(1 + L^2 B_g^2)]^{-1} \equiv \text{Tiempo de vida media del neutrón en el reactor} \quad (2.13)$$

$$k \equiv \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B_g^2} \equiv \text{Factor de multiplicación} \quad (2.14)$$

Donde $L^2 = D/\Sigma_a$ es la longitud de difusión y B_g^2 es el buckling geométrico o buckling del material, parámetros conocidos en un reactor. De esta manera, se puede reducir aún más las ecuaciones (2.11) y (2.12), en términos de un parámetro conocido como el *tiempo de generación de neutrones*:

$$\Lambda \equiv \frac{l}{k} \equiv \text{Tiempo promedio de generación entre el nacimiento de los neutrones y su posterior absorción induciendo a la fisión.} \quad (2.15)$$

Ahora bien, se define una cantidad muy importante en la cinética del reactor denominada *reactividad*, a partir del factor de multiplicación k :

$$\rho(t) \equiv \frac{k(t) - 1}{k(t)} \equiv \text{Reactividad} \quad (2.16)$$

Estos dos parámetros se describirán en profundidad en la siguiente sección. Por el momento, la dependencia temporal del factor de multiplicación $k(t)$ implica que la reactividad también dependa del tiempo. Con frecuencia, es más conveniente monitorear el nivel de potencia instantánea total $P(t)$ que se genera en el reactor en el momento t . Por este motivo, se expresa $P(t)$ en lugar de $n(t)$ (ambas están asociadas por la relación $P(t) = w_f v \Sigma_f n(t)$, siendo w_f la energía utilizable liberada por evento de fisión), modificando a su vez la concentración de precursores de manera que C_i representa $w_f \Sigma_f C_i(t)$. Teniendo esto en cuenta en el conjunto de ecuaciones (2.11) y para m grupos de precursores en (2.12), y utilizando las definiciones de la ecuaciones (2.15) y (2.16), se obtiene:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (2.17)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.18)$$

Con las condiciones iniciales apropiadas para las ecuaciones anteriores:

$$P(t = 0) = P_0 \quad (2.19)$$

$$C_i(t = 0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0 \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) son conocidas como las *ecuaciones de la cinética puntual*. Este conjunto de ecuaciones describen la evolución temporal de la potencia nuclear y la concentración de precursores de neutrones retardados. En general, estas ecuaciones resultan en un sistema de $m + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias, fuertemente acopladas y comúnmente no lineales, debido a la dependencia de la reactividad en términos de la potencia nuclear $P(t)$.

La cinética de reactores estudia el comportamiento de éstos cuando se incorpora una perturbación a su condición de balance. Estas variaciones surgen en la puesta en marcha y parada de los reactores y también como consecuencia de perturbaciones accidentales a lo largo de la operación. Los resultados alcanzados se aproximan a los obtenidos por métodos más rigurosos, la diferencia es alrededor del 10 %. Sin embargo, las soluciones para el cálculo de la reactividad en simulaciones numéricas proporcionan los resultados en tiempo real a través de este modelo. En el presente trabajo, se utiliza estas ecuaciones conociendo la potencia nuclear a través de la *ecuación inversa de la cinética puntual* descrita en la sección (2.4).

2.3. Factor de multiplicación k y reactividad

En los reactores se utilizan los neutrones generados en un evento previo de fisión para inducir otras reacciones de la misma naturaleza en una reacción en cadena. La idea fundamental es controlar el número de neutrones presentes en el reactor con el objetivo de estudiar la reacción en cadena. De otro modo, significa mantener de forma autosostenida o estable (en estado estacionario) la población de neutrones, sosteniendo un equilibrio de estas partículas de forma que no aumenten ni disminuyan con el tiempo. En este sentido, se debe ajustar el sistema de manera que por lo menos un neutrón de cada fisión induzca otro evento de fisión que conlleve a una nueva generación de neutrones. Aquellos neutrones que no intervienen en el primer evento de fisión, serán absorbidos en las reacciones de captura o por fuga del sistema.

Una forma de medir el número de neutrones de fisión en dos generaciones sucesivas y la proximidad del sistema con la condición de criticidad, es a través del *factor de multiplicación*, de manera explícita será:

$$k = \frac{\text{Número de neutrones en la generación N}}{\text{Número de neutrones en la generación N-1}} \quad (2.21)$$

En un tratamiento real del problema donde se considere un sistema de tamaño finito y existan escape o fugas de neutrones se habla de una cantidad conocida como *factor de multiplicación efectivo* y se define como la razón entre los neutrones producidos y, los neutrones que han sido absorbidos y fugados del sistema:

$$k_{ef} = \frac{\text{Neutrones producidos}}{\text{Neutrones absorbidos} + \text{Neutrones Fugados}} \quad (2.22)$$

Luego, la condición de criticidad establece la posibilidad de la reacción de fisión en cadena autosostenida y se define cuando el valor del factor de multiplicación equivale a uno ($k = 1$). Lo anterior implica que el número de neutrones producidos por fisión en cada generación sería exactamente igual al número de neutrones perdidos, por absorción y por escape, en la generación anterior. Esto hace que se mantenga en un estado estacionario con una densidad de neutrones constante, produciendo una reacción en cadena con velocidad constante. Si el factor de multiplicación efectivo se reduce por debajo de dicho valor, el reactor es subcrítico reduciendo el nivel de potencia y, por consiguiente, la velocidad de fisión disminuye a tal punto que la reacción en cadena sería convergente, extinguiéndose de modo gradual dado a que en cada generación se perderían los neutrones producidos por diferentes causas. En cambio, si el valor del factor de

multiplicación efectivo aumenta por encima de la unidad se incrementará el nivel de potencia de modo constante, es decir, se producirían más neutrones de los que se pierden. Esto produce que tanto la población de neutrones como la velocidad de fisión aumente y el reactor sería supercrítico.

La reactividad cuando se está bien definido es una propiedad integral de todo reactor, el modelo se satisface solo cuando k está muy próximo a la unidad, no muy lejos del estado de criticidad, lo que afortunadamente incluye una amplia variedad de casos importantes. El control y monitoreo de la reactividad garantiza la seguridad y operatividad del reactor mediante el flujo controlado de neutrones producidos en los eventos de fisión a partir del movimiento ajustado de las barras de control.

2.4. Método inverso

Para propósitos de este trabajo es importante describir el método inverso para determinar la reactividad $\rho(t)$ en términos de la potencia nuclear de interés $P(t)$. Para ello, se reescribe la ecuación (2.18), la cual es lineal y no homogénea como se muestra a continuación:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} + \lambda_i C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t); \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23)$$

Esta ecuación se resuelve a través del método del factor integrante $e^{\int \lambda_i dt} = e^{\lambda_i t}$ integrando y considerando la condición inicial dada por la ecuación (2.20) se encuentra:

$$C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0 e^{-\lambda_i t} + \frac{\beta_i}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \quad (2.24)$$

Luego, es posible reescribir la reactividad $\rho(t)$ en términos de la potencia nuclear $P(t)$ a partir de la ecuación (2.17):

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{\Lambda}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (2.25)$$

Una vez se reemplace la ecuación (2.24) en (2.25) se puede obtener la reactividad de la siguiente manera:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \left[\frac{P_0}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \right] \quad (2.26)$$

En general, la reactividad resulta de la variación de la potencia nuclear y se puede determinar en forma exacta por medio de la expresión anterior conocida como la *ecuación inversa de la cinética puntual* [1]. Esta es una ecuación integro-diferencial en la que su parte integral es conocida como el histórico de la potencia nuclear y la parte diferencial corresponde al periodo del reactor. Además es la ecuación base para la construcción de los medidores de reactividad. En el presente trabajo, esta ecuación también corresponde al método de referencia una vez se calcule de manera exacta la integral con la potencia nuclear de interés, con el objetivo de comparar los resultados del método propuesto de la función matricial.

Capítulo 3

Método Propuesto:

Método de la Función Matricial

A continuación se detalla el método de la función matricial a partir de una descripción general de la forma matricial de las ecuaciones diferenciales. Una vez se ha abordado los fundamentos necesarios, se hará un ejemplo de esta representación al conjunto de ecuaciones diferenciales para la concentración de m -grupos de precursores de neutrones retardados de la ecuación (2.18), mediante una formulación matricial no homogénea. Las limitaciones y dificultades derivadas de esa formulación sirven como motivación para plantear la función matricial que permite describir el sistema no homogéneo de la concentración de precursores de neutrones retardados en una formulación matricial homogénea. Finalmente, se utiliza una diagonalización analítica para el cálculo eficiente de las concentraciones de neutrones retardados y en consecuencia, de la reactividad.

3.1. Forma matricial de ecuaciones diferenciales

Algunos sistemas de ecuaciones diferenciales son derivados del proceso de reducción de orden de una o más ecuaciones diferenciales, o simplemente aparecen en el estudio de fenómenos en física (como la cadena de desintegración radiactiva), problemas en química, biología e incluso economía. En general, para el caso de un sistema de m ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con m incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ en la variable independiente t , se escriben comúnmente de la siguiente forma:

similar a la ecuación (3.3). En forma abreviada, la formulación matricial no homogénea para este caso se describe así:

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) = A\vec{\psi}(t) + \vec{\mathbf{f}}(t), \quad \vec{\psi}(0) = \vec{\psi}_0 \quad (3.4)$$

Donde $\vec{\psi}(t)$ y $\vec{\mathbf{f}}(t)$ son funciones vectoriales de dimensión m y $\vec{\psi}_0$ son las condiciones iniciales dadas por la ecuación (2.20); tal como se muestra a continuación:

$$\vec{\psi}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_m(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{f}}(t) = P(t) \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\Lambda} \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} \\ \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_0 = P_0 \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\Lambda\lambda_1} \\ \frac{\beta}{\Lambda\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\beta}{\Lambda\lambda_m} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

En este caso, se define A como una matriz diagonal de constantes con dimensiones $m \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_m \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La solución exacta del problema de valor inicial dado por la ecuación (3.4) se puede resolver multiplicando la ecuación mencionada por el factor integrante $\exp(-At)$, obteniendo:

$$\frac{d}{dt}[\exp(-At)\vec{\psi}(t)] = \exp(-At)\vec{\mathbf{f}}(t) \quad (3.7)$$

Luego, integrando en ambos lados de la ecuación (3.7) con respecto al tiempo desde t_n hasta t_{n+1} resulta:

$$\exp(-At_{n+1})\vec{\psi}_{n+1} - \exp(-At_n)\vec{\psi}_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-At')\vec{\mathbf{f}}(t')dt' \quad (3.8)$$

Donde $\vec{\psi}_n = \vec{\psi}(t_n)$ y $\vec{\psi}_{n+1} = \vec{\psi}(t_{n+1})$. Resolviendo la ecuación (3.8) para $\vec{\psi}_{n+1}$ se obtiene una ecuación de la siguiente forma:

$$\vec{\psi}_{n+1} = \exp(Ah)\vec{\psi}_n + \exp(At_{n+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-At') \vec{f}(t') dt' \quad (3.9)$$

Donde $h = t_{n+1} - t_n$ representa el tamaño de paso. En la solución de la representación matricial no homogénea dada por la ecuación (3.9) se observa que el segundo término depende de una integral. Este hecho también se encuentra en la literatura de manera general para soluciones de sistemas no homogéneos, en donde cualquier solución del sistema no homogéneo es suma de una solución particular de éste (segundo término) y de una solución del sistema homogéneo (primer término). Lo que se hace comúnmente para encontrar la solución particular es resolver el producto $\exp(-At') \vec{f}(t')$, lo cual generará una función vectorial y a continuación integrar la expresión que resulte en cada elemento de este vector. Sin embargo, esto no es muy conveniente debido a que $\vec{f}(t)$ depende de $P(t)$ y por tanto, se tendría que calcular integrales cada vez que se cambie la potencia nuclear. Con el propósito de evitar el cálculo directo de estas integrales derivadas de la integral en la solución de la ecuación (3.9), se ha propuesto el método descrito en la siguiente sección.

3.2. Formulación matricial homogénea

En este trabajo, se plantea una función matricial de dimensión $m + 1$ en un sistema homogéneo, obteniendo una representación equivalente al conjunto de m -ecuaciones diferenciales para la concentración de precursores de neutrones retardados de la ecuación (2.24) dada una potencia nuclear. Aunque se planteará para seis grupos de precursores ($m = 6$) y por tanto, un sistema de dimensión siete; las ideas desarrolladas en esta sección serán válidas para cualquier dimensión y en consecuencia, para más precursores. Este modelo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = S(t) \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (3.10)$$

Donde,

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_m(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_m(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda\lambda_1} \\ \frac{\beta_2}{\Lambda\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda\lambda_m} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Aquí $\frac{d}{dt} \vec{x}(t)$ y $\vec{x}(t)$ son funciones vectoriales de dimensiones $m + 1$ y \vec{x}_0 reproduce las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones (2.19) y (2.20). Así la función matricial $S(t)$ es:

$$S(t) = \begin{pmatrix} \frac{P'(t)}{P(t)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_m \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Esta función matricial $S(t)$ ha sido definida considerando que debe contener la potencia nuclear $P(t)$ la cual es conocida para el cálculo de la reactividad. Por este motivo, se incluye la potencia nuclear $P(t)$ en la función vectorial $\vec{x}(t)$, con su respectiva condición inicial P_0 en \vec{x}_0 y el término $\frac{P'(t)}{P(t)}$ para la función matricial $S(t)$, produciendo un aumento de dimensión de orden $m + 1$ que genera la representación matricial homogénea. Se puede observar, usando las ecuaciones (3.10) - (3.12) cómo se reproduce exactamente la ecuación (2.18) y una igualdad en el primer elemento que conlleva $P'(t) = P'(t)$, sin producir ninguna contradicción.

El sistema homogéneo con la función matricial $S(t)$ en la ecuación (3.10) es un problema de valor inicial que se resuelve en cualquier instante de tiempo usando la matriz exponencial:

$$\vec{x}_{n+1} = \exp \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} S(t) dt \right) \vec{x}_n \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Desarrollando la integral del elemento $s_{11}(t)$ se obtiene

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} s_{11}(t) dt = Ln \left[\frac{P_{n+1}}{P_n} \right] \quad (3.14)$$

Siendo $P_{n+1} = P(t_{n+1})$ y $P_n = P(t_n)$. Todas las demás integrales en los elementos constantes de $S(t)$ se resuelven de manera directa considerando el tamaño de paso h . Por tanto, la matriz M_n asociada a la integral de $S(t)$ estará dada de la siguiente forma:

$$M_n = \begin{pmatrix} \text{Ln} \left(\frac{P_{n+1}}{P_n} \right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} h & -\lambda_1 h & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} h & 0 & -\lambda_2 h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} h & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_m h \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Una vez conocida la matriz M_n se puede calcular la solución de la ecuación (3.13) como sigue:

$$\vec{\mathbf{x}}_{n+1} = \exp(M_n) \vec{\mathbf{x}}_n \quad (3.16)$$

Así que para hallar la solución general de la formulación homogénea hay que emplear un método para calcular la expresión $\exp(M_n)$, también conocida como la *matriz fundamental de soluciones*. Según [26] hay diferentes formas o métodos de calcular dicha matriz, por ejemplo diagonalización, expansión en serie de potencias, aproximación de Padé, fórmula integral de Cauchy, algoritmo de escalamiento y cuadratura. Por tanto, el objetivo de la siguiente sección será utilizar alguno de estos métodos.

3.3. Diagonalización

Una forma útil para computar la matriz exponencial $\exp(M_n)$ se obtiene a través de una diagonalización de M_n . La razón de esta elección obedece a su dimensión y debido a que tiene la característica de ser una matriz triangular inferior, lo cual facilita el cálculo analítico de este método. Esta diagonalización es posible mediante la siguiente transformación:

$$M_n = X_n D_n X_n^{-1} \quad (3.17)$$

Donde X_n es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de M_n y D_n es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios $\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots, \omega_{m+1}^{(n)}$ de M_n . Utilizando la transformación dada por la ecuación (3.17) en la ecuación (3.16), resulta:

$$\vec{\mathbf{x}}_{n+1} = X_n \exp(D_n) X_n^{-1} \vec{\mathbf{x}}_n \quad (3.18)$$

El esquema numérico propuesto en el presente trabajo está basado en la solución dada por la ecuación (3.18). Con el propósito de que el método sea eficiente, se calcula analíticamente las matrices X_n , D_n y X_n^{-1} . Según la ecuación (3.15), M_n es una matriz triangular inferior por lo cual sus valores propios ω_k (para $k = 1, 2, \dots, m + 1$) corresponden a los elementos de su diagonal y por tanto, la matriz diagonal D_n estará definida como sigue:

$$D_n = \text{diag} \left[\text{Ln} \left(\frac{P_{n+1}}{P_n} \right), -\lambda_1 h, \dots, -\lambda_m h \right] \quad (3.19)$$

Aquí se observa que la matriz M_n tiene $m + 1$ valores propios distintos, lo cual implica que tiene $m + 1$ vectores propios linealmente independientes y por tanto, la matriz M_n es diagonalizable. Con ayuda de la expresión $M_n \mathbf{U}_k = \omega_k \mathbf{U}_k$ se pueden encontrar los vectores propios \mathbf{U}_k , cada uno de los cuales tiene asociado su valor propio ω_k correspondiente y debe ser distinto de cero por definición. Una vez se obtiene los valores propios se construye la matriz $X_n = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_{m+1}]$. Una solución para los elementos u_{ij} de la matriz X_n computada en cada tamaño de paso se pueden expresar de la siguiente manera:

$$u_{ij} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m + 1 \quad (3.20)$$

Donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker definida en este caso de la siguiente forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \text{ con } j \neq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Cuando $j = 1$ entonces,

$$u_{i1} = \frac{\beta_{i-1} h / \Lambda}{\lambda_{i-1} h + \text{Ln} \left(\frac{P_{n+1}}{P_n} \right)} \quad i = 2, 3, \dots, m + 1 \quad (3.22)$$

Además, los elementos v_{ij} de la inversa de la matriz de vectores propios X_n se pueden calcular por medio del sistema de ecuaciones que resulta de la expresión $X_n X_n^{-1} = I$. De manera similar se obtiene

$$v_{ij} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m + 1 \quad (3.23)$$

Donde δ_{ij} se ha definido en la ecuación (3.21). Para este caso, cuando $j = 1$ resulta la siguiente expresión:

$$v_{i1} = -\frac{\beta_{i-1}h/\Lambda}{\lambda_{i-1}h + \text{Ln}\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)} \quad i = 2, 3, \dots, m + 1 \quad (3.24)$$

Luego, es posible calcular eficientemente la ecuación (3.18) una vez se construye de forma analítica las matrices X_n , D_n y X_n^{-1} con las ecuaciones (3.19) - (3.24). Su solución puede ser computada en cada tamaño de paso usando sólo una serie de multiplicaciones entre matrices y vectores. La aproximación para las concentraciones de precursores de neutrones retardados utilizando la ecuación (3.18) será reemplazada en la ecuación (2.26) para el cálculo de la reactividad.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para el cálculo de la reactividad por medio de las simulaciones computacionales de la ecuación (2.25), utilizando las concentraciones de precursores dadas por el método de la función matricial (MF) descrito en la sección anterior. La reactividad se determina considerando seis grupos de precursores de neutrones retardados ($m = 6$) y diferentes formas de la potencia nuclear. Algunas de las variaciones de la potencia nuclear que fueron implementadas tienen forma exponencial, lineal, polinomial, armónica e hiperbólica. También se consideraron los parámetros cinéticos para el ^{235}U que se ilustran en la Tabla 4.1.1, con un tiempo de generación de $\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ y una fracción efectiva total de $\beta = 0.007$.

La solución analítica de la reactividad se obtiene mediante la ecuación inversa de la cinética puntual (2.26) o también conocida como el método de referencia. Sus resultados son útiles a fin de comparar las aproximaciones de la reactividad con la solución del método propuesto MF a través del máximo valor del error absoluto entre estas dos cantidades. Finalmente, las aproximaciones que se muestran en esta sección son verificadas para diferentes tamaños de paso, comparando con resultados reportados en la literatura como el método de las derivadas, Euler-Maclaurin, cinco puntos de Lagrange, Hamming y Adam-Bashforth-Moulton Caso V.

4.1. Máximas diferencias en reactividad

En la presente sección se detalla el valor máximo del error absoluto entre el método de referencia y el método MF propuesto. En consecuencia, los resultados de las tablas presentadas proporcionan la máxima diferencia de la reactividad en pcm para diferentes formas de la potencia nuclear

$P(t)$. En el caso particular de las potencias nucleares en forma exponencial se implementaron tamaños de paso $h = 0.01 s$, $h = 0.05 s$, $h = 0.1 s$, $h = 0.2 s$, $h = 0.5 s$ y $h = 1 s$.

Grupo de precursores i	λ_i [s^{-1}]	β_i
1	0.0127	0.000266
2	0.0317	0.001491
3	0.115	0.001316
4	0.311	0.002849
5	1.400	0.000896
6	3.870	0.000182

Tabla 4.1.1: Parámetros cinéticos del ^{235}U .

En la Tabla 4.1.2 se comparan las máximas diferencias de reactividad con los métodos de Hamming, Euler-Maclaurin y Adams-Bashforth-Moulton, para el caso de una potencia nuclear $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.00243 s^{-1}$. Los resultados muestran para un tamaño de paso $h = 0.01 s$ que los métodos de Hamming y Adams-Bashforth-Moulton son un poco más precisos en relación al método propuesto de la función matricial. Sin embargo, para los demás tamaños de paso considerados la precisión de éste es mayor, obteniendo mejor precisión para tamaños de paso $h \geq 0.05 s$.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	Hamming	ABM	MF
0.01	6.20×10^{-8}	2.09×10^{-11}	2.48×10^{-11}	4.94×10^{-11}
0.05	3.85×10^{-5}	5.66×10^{-8}	5.66×10^{-8}	1.37×10^{-11}
0.1	6.14×10^{-4}	1.22×10^{-6}	1.25×10^{-6}	6.16×10^{-12}
0.2	9.73×10^{-3}	3.47×10^{-5}	5.40×10^{-5}	3.47×10^{-12}
0.5	3.60×10^{-1}	9.07×10^{346}	2.48×10^{307}	2.00×10^{-12}

Tabla 4.1.2: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.00243 s^{-1}$, $\rho \approx 20 \text{ pcm}$, $t = 1000 s$.

Las Tablas 4.1.3 - 4.1.5 muestran los resultados de las máximas diferencias en reactividad de los métodos de Hamming, Euler-Maclaurin, cinco puntos de Lagrange, Adams-Bashforth-Moulton

y el método de la función matricial, para una forma de la potencia nuclear $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.01046 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 0.02817 \text{ s}^{-1}$ y $\omega = 0.12353 \text{ s}^{-1}$, produciendo reactividades de $\rho \approx 70$ pcm, $\rho \approx 140$ pcm y $\rho \approx 300$ pcm, con intervalos de cálculo de $t = 800 \text{ s}$, $t = 600 \text{ s}$ y $t = 300 \text{ s}$, respectivamente. Para estos valores de reactividad se encuentra que el método propuesto de la función matricial presenta mejores resultados que los métodos reportados en todos los tamaños de paso empleados. También se observa buena precisión en los resultados de los métodos de Hamming y Adams-Bashforth-Moulton hasta un tamaño de paso $h = 0.2 \text{ s}$. Sin embargo, los métodos de cinco puntos de Lagrange y Euler Maclaurin mantienen su convergencia hasta un tamaño de paso $h = 0.5 \text{ s}$.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	Cinco puntos Lagrange	Hamming	ABM	MF
0.01	6.24×10^{-8}	2.37×10^{-5}	9.05×10^{-11}	1.06×10^{-10}	5.65×10^{-11}
0.05	3.88×10^{-5}	3.98×10^{-4}	1.57×10^{-7}	2.43×10^{-7}	4.80×10^{-11}
0.1	6.19×10^{-4}	1.14×10^{-3}	4.72×10^{-6}	5.37×10^{-6}	1.35×10^{-11}
0.2	9.80×10^{-3}	-	1.47×10^{-4}	2.30×10^{-4}	1.34×10^{-11}
0.5	3.60×10^{-1}	1.04×10^{-2}	1.30×10^{250}	3.28×10^{305}	1.04×10^{-12}

Tabla 4.1.3: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.01046 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 70$ pcm, $t = 800 \text{ s}$.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	Cinco puntos Lagrange	Hamming	ABM	MF
0.01	6.33×10^{-8}	6.38×10^{-5}	2.37×10^{-10}	2.88×10^{-10}	8.13×10^{-11}
0.05	3.93×10^{-5}	1.06×10^{-3}	4.19×10^{-7}	6.56×10^{-7}	8.01×10^{-11}
0.1	6.28×10^{-4}	3.05×10^{-3}	1.25×10^{-5}	1.43×10^{-5}	2.13×10^{-11}
0.2	9.96×10^{-3}	-	3.86×10^{-4}	6.06×10^{-4}	2.10×10^{-11}
0.5	3.60×10^{-1}	2.65×10^{-2}	4.44×10^{182}	1.17×10^{301}	9.66×10^{-13}

Tabla 4.1.4: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.02817 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 140$ pcm, $t = 600 \text{ s}$.

La Tabla 4.1.6 muestra los resultados de los métodos de Hamming, Euler-Maclaurin, cinco puntos de Lagrange, Adams-Bashforth-Moulton en relación al método propuesto para una potencia nuclear de forma $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.00847 \text{ s}^{-1}$, produciendo una reactividad de

$\rho \approx 550$ pcm en un intervalo de cálculo de $t = 100$ s. Para tamaños de paso $h = 0.5$ s se observa que el método más apropiado entre los resultados de los métodos reportados es el de cinco puntos de Lagrange, aunque las aproximaciones del método propuesto de la función matricial son mejores.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	Cinco puntos Lagrange	Hamming	ABM	MF
0.01	6.88×10^{-8}	2.78×10^{-4}	1.07×10^{-9}	1.27×10^{-9}	1.14×10^{-10}
0.05	4.28×10^{-5}	4.50×10^{-3}	1.76×10^{-6}	2.88×10^{-6}	2.90×10^{-11}
0.1	6.83×10^{-4}	1.24×10^{-2}	6.24×10^{-5}	6.24×10^{-5}	3.02×10^{-11}
0.2	1.08×10^{-2}	-	1.50×10^{-3}	2.36×10^{-3}	8.24×10^{-12}
0.5	3.90×10^{-1}	8.29×10^{-2}	3.30×10^{78}	2.49×10^{145}	1.48×10^{-12}

Tabla 4.1.5: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 0.12353$ s⁻¹, $\rho \approx 300$ pcm, $t = 300$ s.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	Cinco puntos Lagrange	Hamming	ABM	MF
0.01	1.41×10^{-7}	2.11×10^{-3}	9.76×10^{-9}	1.11×10^{-8}	4.89×10^{-11}
0.05	8.81×10^{-5}	2.59×10^{-2}	1.12×10^{-5}	2.43×10^{-5}	6.25×10^{-12}
0.1	1.40×10^{-3}	5.03×10^{-2}	1.89×10^{-4}	5.15×10^{-4}	6.48×10^{-12}
0.2	2.20×10^{-2}	-	3.87×10^{-3}	9.94×10^{-3}	1.71×10^{-12}
0.5	7.90×10^{-1}	5.50×10^{-1}	7.80×10^{-1}	1.74×10^{10}	7.96×10^{-13}

Tabla 4.1.6: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.00847$ s⁻¹, $\rho \approx 550$ pcm, $t = 100$ s.

En las Tablas 4.1.7 y 4.1.8 se muestran las máximas diferencias en el cálculo de la reactividad para una potencia nuclear $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.023$ s⁻¹ y $\omega = 2.345$ s⁻¹, e intervalos de cálculo de $t = 100$ s y $t = 80$ s, respectivamente. De acuerdo a las aproximaciones de la Tabla 6, se encuentra mejores aproximaciones con el método de la función matricial para los diferentes tamaños de paso. En general, para estos valores de ω y tamaños de paso considerados, los resultados indican mejor precisión en el método propuesto.

$h[s]$	Hamming	ABM	MF
0.01	9.92×10^{-9}	1.13×10^{-8}	4.87×10^{-11}
0.05	1.15×10^{-5}	2.46×10^{-5}	6.37×10^{-12}
0.1	1.91×10^{-4}	5.22×10^{-4}	6.37×10^{-12}
0.2	3.00×10^{-3}	1.00×10^{-2}	2.39×10^{-12}
0.3	1.50×10^{-1}	6.70×10^{-2}	2.05×10^{-12}

Tabla 4.1.7: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 1.023 s^{-1}$, $t = 100 s$.

$h[s]$	Hamming	ABM	MF
0.01	2.83×10^{-8}	3.04×10^{-8}	3.34×10^{-11}
0.05	5.01×10^{-5}	6.35×10^{-5}	4.77×10^{-12}
0.1	1.19×10^{-3}	1.31×10^{-3}	4.66×10^{-12}
0.2	3.68×10^{-2}	2.64×10^{-2}	1.71×10^{-12}
0.3	2.70×10^{-1}	2.10×10^{-1}	7.96×10^{-13}

Tabla 4.1.8: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 2.345 s^{-1}$, $t = 80 s$.

La Tabla 4.1.9 muestra las máximas diferencias en reactividad entre los métodos de Hamming, Euler-Maclaurin, Adams-Bashforth-Moulton y el método de la función matricial, para una potencia nuclear de forma $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 11.6442 s^{-1}$, la cual produce una reactividad de $\rho \approx 700$ pcm, con un intervalo de tiempo $t = 60 s$. Con estos resultados se observa que los métodos reportados en la literatura mantienen la precisión hasta un tamaño de paso $h = 0.2 s$. Para tamaños de paso $h = 0.5 s$, estos métodos son inapropiados para el cálculo de la reactividad mientras que el método de la función matricial presenta aproximaciones precisas en todos los tamaños de paso.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	ABM	MF
0.01	1.00×10^{-5}	4.26×10^{-6}	5.34×10^{-12}
0.05	6.23×10^{-3}	1.10×10^{-2}	2.16×10^{-12}
0.1	9.64×10^{-2}	2.40×10^{-1}	7.96×10^{-13}
0.2	1.37×10^0	3.10×10^0	9.09×10^{-13}
0.5	3.07×10^1	2.80×10^1	3.41×10^{-13}

Tabla 4.1.9: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 11.6442 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 700 \text{ pcm}$, $t = 60 \text{ s}$.

Para una reactividad alta de $\rho \approx 800 \text{ pcm}$ producida por una potencia nuclear de forma $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 52.80352 \text{ s}^{-1}$, en un intervalo de tiempo $t = 10 \text{ s}$, se presenta los resultados de los métodos de Hamming, Euler-Maclaurin, Adams-Bashforth-Moulton y el método de la función matricial en la Tabla 4.1.10. De acuerdo a las máximas diferencias en pcm de los métodos reportados, se observa que estos mantienen su precisión hasta tamaños de paso de $h = 0,1 \text{ s}$. En el caso del método nuevo se observa que mantiene la misma precisión con un valor de $3.41 \times 10^{-13} \text{ pcm}$ para $0.05 \leq h \leq 0.2 \text{ s}$. Además, para este tipo de reactividades la aproximación del método propuesto es mejor a los métodos existentes en la literatura y en especial, para tamaños de paso $h \geq 0.2 \text{ s}$ debido a que los métodos reportados presentan dificultades en este caso. Esta aproximación del método propuesto concuerda con la solución exacta a partir de un tamaño de paso $h = 0.5 \text{ s}$.

$h[s]$	Euler-Maclaurin	ABM	MF
0.01	6.77×10^{-4}	1.36×10^{-3}	1.36×10^{-12}
0.05	3.60×10^{-1}	8.60×10^{-1}	3.41×10^{-13}
0.1	4.04×10^0	4.80×10^0	3.41×10^{-13}
0.2	3.04×10^1	1.48×10^1	3.41×10^{-13}
0.5	2.75×10^2	4.35×10^1	0.00×10^0

Tabla 4.1.10: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con $\omega = 52.80352 \text{ s}^{-1}$, $\rho \approx 800 \text{ pcm}$, $t = 10 \text{ s}$.

Otros ejemplos para el cálculo de la reactividad para una potencia exponencial con valores de ω igual a 0.1176, 1.176 y 11.76 implementando tamaños de paso h de 0.01, 0.1 y 1 s, se muestran

en la Tabla 4.1.11. Las diferencias máximas en reactividad de los métodos de las fórmulas de tres y cinco puntos de Lagrange presentan buenas aproximaciones a medida que disminuye el tamaño de paso. Pero, para pasos de $h = 0,1$ s presenta dificultades en valores grandes de ω . Por el contrario, el método propuesto de la función matricial conduce a una mejor aproximación para todos los casos.

$\omega[s^{-1}]$	$t[s]$	$h[s]$	Tres puntos Lagrange	Cinco puntos Lagrange	MF
0.1176	100	1	-5.33×10^{-1}	9.46×10^{-2}	3.98×10^{-13}
		0.1	-3.47×10^{-2}	1.18×10^{-2}	7.33×10^{-12}
1		-2.19×10^1	-6.24×10^0	7.96×10^{-13}	
0.1		-4.51×10^{-1}	5.11×10^{-2}	6.03×10^{-12}	
0.01		-8.00×10^{-3}	2.40×10^{-3}	4.60×10^{-11}	
11.76		20	0.1	-1.03×10^1	-3.03×10^0
		0.01	-1.87×10^{-1}	1.07×10^{-2}	3.64×10^{-12}

Tabla 4.1.11: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = \exp(\omega t)$ con diferentes valores de ω y diferentes pasos de tiempo.

En el caso de una potencia nuclear de la forma $P(t) = a + bt^3$, los resultados del cálculo de la se muestran en la Tabla 4.1.12. En este caso los parámetro tiene valores de $a = 1$ y b se varió para validar el método propuesto de la función matricial en comparación con los resultados del método de referencia dado por la ecuación (2.26). Los valores de b de la Tabla 4.1.12 fueron seleccionados de acuerdo a los resultados publicados con el método de las derivadas [17]. Los resultados sugieren que, cuanto mayor sea el valor de b , mayor será las diferencias máximas, siendo más preciso el método de la función matricial que el método de las derivadas.

b	Derivadas	MF
$0,0127^5/9$	3.89×10^{-3}	1.42×10^{-5}
$0,0127^4/40$	6.20×10^{-2}	9.57×10^{-5}
$0,0127^4/4$	6.21×10^{-1}	4.38×10^{-4}

Tabla 4.1.12: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para $P(t) = a + bt^3$ con $a = 1$, diferentes valores del factor b y $h = 1$ s.

$P(t)$	a	$b[s^{-1}]$	$t[s]$	Tres puntos Lagrange	Cinco puntos Lagrange	MF
$a + bt$	1	1	10	-2.03×10^{-1}	6.15×10^{-2}	5.12×10^{-2}
$a + \sin bt$	1	$\pi/10$	180	-7.80×10^{-2}	2.79×10^{-2}	4.22×10^{-2}

Tabla 4.1.13: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para un paso de tiempo $h = 1 s$.

$P(t)$	a	$b[s^{-1}]$	$t[s]$	$h[s]$	Derivadas	MF
$a + \cosh bt$	100	$\pi/180$	180	5	2.00×10^{-4}	3.04×10^{-1}
$a + \sinh bt$	0	1.27×10^{-3}	10000	20	3.40×10^{-2}	6.68×10^{-3}

Tabla 4.1.14: Máximas diferencias de la reactividad en pcm para potencias nucleares con variaciones hiperbólicas y para grandes pasos de tiempo.

Las Tablas 4.1.13 y 4.1.14 presentan otros ejemplos de potencias nucleares con formas lineal, sinusoidal y variaciones hiperbólicas. En la Tabla 4.1.13 se muestran los resultados de las primeras dos formas de la potencia nuclear con tamaño de paso $h = 0.1 s$. Para el caso de una potencia lineal, la máxima diferencia en reactividad usando el método propuesto de la función matricial es de 5.12×10^{-2} pcm. Esta diferencia es menor a los resultados reportados con el método de Lagrange de tres y cinco puntos [20]. Sin embargo, la aproximación del método de la función matricial indica que es mejor con respecto al método de tres puntos de Lagrange pero un poco más baja al método de cinco puntos para una variación sinusoidal en la potencia nuclear. En la Tabla 4.1.14 se muestran los resultados para potencias nucleares con variación hiperbólica. En el caso de una potencia nuclear de la forma coseno hiperbólico con tamaño de paso $h = 5 s$, el método de las derivadas [17] presenta una mejor aproximación al método de la función matricial. No obstante, para una potencia nuclear de la forma seno hiperbólico con tamaño de paso muy grande de $h = 20 s$, el método de la función matricial es más preciso al reportado por [17].

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

En el presente trabajo de grado se realizó una revisión y fundamentación física de los procesos que intervienen en el núcleo de un reactor, los cuales conducen a una descripción de la población de neutrones a partir del modelo cinético puntual. También se construyó el método de la función matricial para determinar la concentración de precursores retardados y por medio de esta aproximación se calculó la reactividad nuclear.

Se consiguió la solución de la formulación matricial homogénea con el cálculo analítico de las matrices asociadas a la diagonalización de la matriz exponencial, reduciendo el costo computacional. Luego, la aproximación de la matriz exponencial se aplicó para diferentes formas de la potencia nuclear y con diferentes tamaños de paso. Las simulaciones computacionales del método propuesto para el cálculo de la reactividad indican que es fácil de implementar, ya que no hay necesidad de calcular integrales, tan solo se requiere conocer la potencia nuclear y calcular su primera derivada utilizada en la ecuación (2.25). Los resultados sugieren que el método de la función matricial tiene una mejor precisión que los métodos reportados en los estudios propuestos en [17, 19–22], para los diferentes casos considerados. Debido a su alta precisión, este método propuesto puede ser implementado en medidores digitales de reactividad en tiempo real.

Finalmente, este estudio puede ser aplicado asumiendo la potencia nuclear con ruido Gaussiano que represente la señal que se obtiene en la práctica. Asimismo, se puede investigar cual es el filtro apropiado para reducir las fluctuaciones producidas en el cálculo de la reactividad. Además se podría aplicar el método propuesto a estudios más recientes del cálculo de la reactividad como el que se ha desarrollado en [27].

5.1. Productos

Los estudios preliminares de este trabajo fueron presentados en el Encuentro de Semilleros de Investigación 2016 con la ponencia oral “*Estudio físico de la reactividad en reactores nucleares*”, durante los días 20 y 21 de octubre en el municipio de La Plata. También fue enviado el trabajo “*Un nuevo estudio en reactividad aplicado a seguridad en reactores nucleares*” en el VI Congreso de Matemática Aplicada Computacional e Industrial, celebrado entre el 2 y 5 de mayo de 2017 en la ciudad de Comodoro Rivadavia en Argentina. Aunque este trabajo fue aceptado para ponencia oral no fue posible tener participación en el evento por inconvenientes en la documentación requerida para el proceso de apoyo financiero. Sin embargo, se presentó un trabajo también en modalidad oral bajo el título “Nuevos estudios para el cálculo de la reactividad” en el XI Congreso Colombiano de Métodos Numéricos, llevado a cabo en la ciudad de Bucaramanga los días 16, 17 y 18 de agosto de 2017.

Adicionalmente, parte de los resultados de esta investigación fueron divulgados en la presentación oral denominada “*Nueva formulación para el cálculo de la reactividad*” en el II Congreso Internacional “La Física y sus Aplicaciones” en las instalaciones de la Universidad Surcolombiana entre los días 25 al 29 de septiembre del 2017. De igual manera, se presentó los resultados finales de este trabajo en el XXVII Congreso Nacional de Física con la ponencia oral “Cálculo determinístico de la reactividad en reactores nucleares” celebrado en la ciudad de Cartagena entre el 3 y 6 de octubre de 2017. Por último, se sometió un artículo científico bajo el título “*Matrix Formulation for the Calculation of Nuclear Reactivity*” en la revista internacional *Annals of Nuclear Energy* ubicada en categoría A1 en Publindex y Q1 en Scopus, con código de sometimiento ANUCENE-D-17-00983. Este documento de tesis al igual que los productos mencionados, hacen parte del proyecto de investigación de trabajo de grado aprobado por vicerrectoría de investigación con el nombre “Cálculo determinístico de la reactividad en reactores nucleares”.

Bibliografía

- [1] J. J. Duderstadt and L. J. Hamilton. *Nuclear reactor analysis*, volume 1. Wiley New York, 1976.
- [2] W. C. Gonçalves, A. S. Martinez, Martinez, and F. C. Da Silva. Inverse kinetics for subcritical systems with external neutron source. *Annals of Nuclear Energy*, 108:343–350, 2017.
- [3] H. Khalafi, S. H. Mosavi, and S. M. Mirvakili. Design & construction of a digital real time reactivity meter for tehran research reactor. *Progress in Nuclear Energy*, 53(1):100–105, 2011.
- [4] Y. Shimazu, Y. Nakano, Y. Tahara, and T. Okayama. Development of a compact digital reactivity meter and a reactor physics data processor. *Nuclear Technology*, 77(3):247–254, 1987.
- [5] S. E. Binney and A. J. M. Bakir. Design and development of a personal-computer-based reactivity meter for a research reactor. *Nuclear Technology*, 85(1):12–21, 1989.
- [6] S. A. Ansari. Development of on-line reactivity meter for nuclear reactors. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 38(4):946–952, 1991.
- [7] N. Jahan, M. M. Rashid, F. Ahmed, M. G. S. Islam, M. Aliuzzaman, and S. M. A. Islam. On line measurement of reactivity worth of triga mark-ii research reactor control rods. *Journal of Modern Physics*, 2(09):1024, 2011.
- [8] Y. Shimazu and M. Tsuji. Applicability of point reactor kinetic equations for subcriticality monitoring. In *Proc. Nuclear Society Spring Meeting*, 2001.
- [9] Y. Shimazu, H. Unesaki, and N. Suzuki. Subcriticality monitoring with a digital reactivity meter. *Journal of nuclear science and technology*, 40(11):970–974, 2003.

- [10] R. Kumar, S. B. Degweker, K. P. Singh, and M. Y. Ali. Measurement of sub-critical reactivity in a heavy water reactor by neutron noise methods using a time stamping data acquisition system. *Annals of Nuclear Energy*, 8 2015.
- [11] J. E. Hoogenboom and A. R. Van Der Sluijs. Neutron source strength determination for on-line reactivity measurements. *Annals of Nuclear Energy*, 15(12):553–559, 1988.
- [12] A. Kitano, M. Itagaki, and M. Narita. Memorial-index-based inverse kinetics method for continuous measurement of reactivity and source strength. *Journal of nuclear science and technology*, 37(1):53–59, 2000.
- [13] S. Tamura. Signal fluctuation and neutron source in inverse kinetics method for reactivity measurement in the sub-critical domain. *Journal of nuclear science and technology*, 40(3):153–157, 2003.
- [14] S. Dulla, M. Nervo, and P. Ravetto. A method for the continuous monitoring of reactivity in subcritical source-driven systems. *Annals of Nuclear Energy*, 87:1–11, 2016.
- [15] S. Dulla, S. S. Hoh, G. Marana, M. Nervo, P. Ravetto, and C. H. Pyeon. Analysis of kuca measurements by the reactivity monitoring mapta method. *Annals of Nuclear Energy*, 101:397–407, 2017.
- [16] R. Busquim e Silva, A. L. F. Marques, J. J. Cruz, K. Shirvan, and M. S. Kazimi. Reactivity estimation during a reactivity-initiated accident using the extended kalman filter. *Annals of Nuclear Energy*, 85:753–762, 2015.
- [17] D. S. Diaz, A. S. Martínez, and F. C. Da Silva. Formulation for the calculation of reactivity without nuclear power history. *Journal of nuclear science and technology*, 44(9):1149–1155, 2007.
- [18] D. S. Díaz, A.S. Martinez, and F. C. Da Silva. Calculation of reactivity using a finite impulse response filter. *Annals of Nuclear Energy*, 35(3):472–477, 2008.
- [19] D. S. Díaz, J. A. R. Sarasty, and J. H. F. Jiménez. Reactivity calculation using the euler–maclaurin formula. *Annals of Nuclear Energy*, 53:104–108, 2013.
- [20] H. Malmir and N. Vosoughi. On-line reactivity calculation using lagrange method. *Annals of Nuclear Energy*, 62:463–467, 2013.
- [21] D. S. Díaz, M. C. I. Gonzalez, and J. H. F. Jiménez. Hamming generalized corrector for reactivity calculation. *Kerntechnik*, 79(3):219–225, 2014.

- [22] D. S. Díaz, M. N. Paredes, and J. H. L. Parada. Calculation of nuclear reactivity using the generalised adams-bashforth-moulton predictor corrector method. *Kerntechnik*, 81(1):86–93, 2016.
- [23] S. Burbulian, E. O. Regil, and S. M. F. Valverde. *Reactores de Fisión Nuclear de hace miles de millones de años*. 2005.
- [24] W. M. Stacey. *Nuclear reactor physics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [25] M. Kinard and E. J. Allen. Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, 31(9):1039–1051, 2004.
- [26] Y. Cai, X. Peng, Q. Li, and K. Wang. A numerical solution to the nonlinear point kinetics equations using magnus expansion. *Annals of Nuclear Energy*, 89:84–89, 2016.
- [27] D. A. P. Palma, A. L. Nunes, and A. S. Martinez. Effect of the time variation of the neutron current density in the calculation of the reactivity. *Annals of Nuclear Energy*, 96:204–211, 2016.