

	<b>GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>					  	
	<b>CARTA DE AUTORIZACIÓN</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 1</b>

Neiva, 14 de mayo de 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

William Andres Avila Leyva, con C.C. No. 1075262196, autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado SECUENCIA DIDACTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONTENIDO MATEMÁTICO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO EN LA ACADEMIA MILITAR “GENERAL JOSÉ ANTONIO ANZOÁTEGUI” presentado y aprobado en el año 2022 como requisito para optar al título de

MAGISTER EN EDUCACIÓN; autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



	<b>GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>					  	
	<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 3</b>

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Secuencia Didáctica para el aprendizaje del contenido matemático función cuadrática en estudiantes de grado noveno en la Academia Militar “General José Antonio Anzoátegui”

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Avila Leyva	William Andres

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Magíster en Educación e Investigación Universitaria

**FACULTAD:** Educación

**PROGRAMA O POSGRADO:** Maestría en Educación

**CIUDAD:** Neiva (Huila)      **AÑO DE PRESENTACIÓN:** (2022)      **NÚMERO DE PÁGINAS:** 241

**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**

Diagramas\_\_\_ Fotografías  Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general  Grabados\_\_\_  
 Láminas\_\_\_ Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas  
 o Cuadros

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento:

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):**



## GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

### DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-07**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**2 de 3**

#### PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Secuencia Didáctica	Didactic sequeunce	6. _____	_____
2. Análisis Didáctico	didactic analysis	7. _____	_____
3. Función cuadrática	quadratic function	8. _____	_____
4. Dificultades de aprendizaje	learning difficulities	9. _____	_____
5. _____	_____	10. _____	_____

#### RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Aportar al mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula representa un compromiso con la formación integral de los educandos, aún más cuando resaltan dificultades y falencias en dichos procesos. En este sentido, el presente artículo expone los desarrollos y procesos investigativos relacionados con la construcción de una secuencia didáctica que aporte al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático función cuadrática. Para el desarrollo de la investigación se acoge una metodología cualitativa bajo un enfoque descriptivo no experimental, donde la población la componen estudiantes de grado noveno de una Institución Educativa colombiana. Los elementos y estructuras que permiten la configuración de la secuencia didáctica se basan en el desarrollo del análisis didáctico de la función cuadrática asociado a la estructura de la secuencia didáctica, Los resultados de la investigación son considerados satisfactorios, teniendo en cuenta que las estrategias y procedimientos presentados en la secuencia didáctica se estructuran en torno al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática, teniendo como referencia dificultades y falencias presentadas por los sujetos de estudio en torno al aprendizaje de la función cuadrática. Se establece como prospectiva la implementación de esta, esto con el fin de observar y evaluar su efectividad.

#### ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Contributing to the improvement in the teaching and learning processes of mathematics in the classroom represents a commitment to the comprehensive training of students, even more so when they highlight difficulties and shortcomings in these processes. In this sense, this article exposes the developments and investigative processes related to the construction of a didactic sequence that contributes to the improvement of the learning of the quadratic function mathematical content. For the development of the research, a qualitative methodology is used under a non-experimental descriptive approach, where the



## GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

### DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-07**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**3 de 3**

population is made up of ninth-grade students from a Colombian Educational Institution. The elements and structures that allow the configuration of the didactic sequence are based on the development of the didactic analysis of the quadratic function associated with the structure of the didactic sequence. The results of the investigation are considered satisfactory, taking into account that the strategies and procedures presented in the didactic sequence are structured around the improvement of the learning of the quadratic function, having as reference difficulties and shortcomings presented by the subjects of study around the learning of the quadratic function. The implementation of this is established as prospective, this in order to observe and evaluate its effectiveness.

#### APROBACION DE LA TESIS

**MARÍA ELVIRA CARVAJAL SALCEDO**

**MARTHA PATRICIA VIVES HURTADO**

**SECUENCIA DIDACTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONTENIDO  
MATEMÁTICO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO  
NOVENO EN LA ACADEMIA MILITAR “GENERAL JOSÉ ANTONIO  
ANZOÁTEGUI”**

**WILLIAM ANDRES AVILA LEYVA**



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
MAESTRIA EN EDUCACION E INVESTIGACION UNIVERSITARIA  
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍAS CRÍTICAS  
Y DIDÁCTICAS ALTERNATIVAS  
NEIVA, COLOMBIA  
2022**

**SECUENCIA DIDACTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONTENIDO  
MATEMÁTICO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO  
NOVENO EN LA ACADEMIA MILITAR “GENERAL JOSÉ ANTONIO  
ANZOÁTEGUI”**

**Tesis que presenta**

**William Andrés Avila Leyva**

**Como un requisito para obtener el Grado de  
Magíster en Educación e investigación Universitaria**

**Asesor**

**Dr. Johnny Fernando Alvis Puentes**



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
MAESTRIA EN EDUCACION E INVESTIGACION UNIVERSITARIA  
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍAS CRÍTICAS  
Y DIDÁCTICAS ALTERNATIVAS  
NEIVA, COLOMBIA  
2022**

## CONTENIDO

RESUMEN.....	6
INTRODUCCIÓN .....	10
CAPÍTULO I.....	13
1. APROXIMACION INICIAL AL OBJETO DE ESTUDIO.....	13
1.1 Antecedentes.....	13
1.1.1 Estrategias didácticas para el aprendizaje de la función cuadrática .....	13
1.1.2 Identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática .....	16
1.2 Formulación del Problema .....	20
1.3 Objetivos.....	27
1.3.1 Objetivo General .....	27
1.3.2 Objetivos Específicos .....	27
1.4 Justificación.....	29
CAPÍTULO II .....	35
2. MARCO TEORICO .....	35
2.1 Análisis Didáctico .....	35
2.1.1 Análisis de Contenido.....	37
2.1.2 Análisis Cognitivo .....	47
2.1.3 Análisis de Instrucción .....	55
2.2 Análisis Didáctico de la Función Cuadrática .....	58
2.2.1 Análisis de Contenido Asociado a la Función Cuadrática.....	58
2.2.2 Análisis Cognitivo de la Función Cuadrática .....	92
2.2.3 Análisis de Instrucción de la Función Cuadrática .....	99
2.3 Estructura de la Secuencia Didáctica.....	102
CAPITULO III .....	109
3. MARCO METODOLOGICO .....	109
3.1 Perspectiva metodológica .....	109
3.2 Esquema de la investigación.....	114
3.3 Fases de la investigación .....	115
3.3.1 Fase inicial .....	116
3.3.2 Fase de campo .....	119
3.3.3 Fase de análisis .....	129
CAPITULO IV .....	134

4.	ANÁLISIS DE DATOS .....	134
4.1	La función cuadrática: Construcción del instrumento para la detección de dificultades en su aprendizaje .....	134
4.1.1	Actividades de la función cuadrática: una mirada desde la estructura conceptual .....	135
4.1.2	Actividades de la función cuadrática: una mirada desde los sistemas de representación..	138
4.1.3	Actividades de la función cuadrática: una mirada desde los contextos.....	141
4.2	La función cuadrática: detección de dificultades en su aprendizaje.....	146
1.1.1	Análisis desde el campo conceptual de la función cuadrática.....	146
1.1.2	Análisis desde los sistemas de representación de la función cuadrática.....	149
1.1.3	Análisis desde el campo fenomenológico de la función cuadrática .....	155
1.1.4	Caracterización De Dificultades Presentes En El Aprendizaje De La Función Cuadrática	159
1.2	Actividades para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.....	161
1.2.1	Tareas matemáticas configuradas para el campo conceptual de la función cuadrática .....	161
1.2.2	Tareas matemáticas configuradas para los sistemas de representación de la función cuadrática .....	168
1.2.3	Tareas matemáticas configuradas para los contextos de la función cuadrática.....	173
CAPITULO V .....		180
5.	SECUENCIA DIDÁCTICA.....	180
5.1	Documento Técnico.....	180
5.2	Documento Guía.....	192
5.2.1	Primera Sesión.....	192
5.2.2	Segunda Sesión.....	198
5.2.3	Tercera Sesión .....	206
CAPITULO VI.....		212
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	212
6.1	Objetivo Específico 1: Establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, en estudiantes de grado noveno. ....	212
6.2	Objetivo Específico 2: Caracterización de las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno. ....	214
6.3	Objetivo Específico 3: Estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática. ....	216

6.4	Objetivo General: Contribuir al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado noveno de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”.....	217
	CAPITULO VII.....	219
7.	PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN .....	219
	REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS .....	221
	ANEXOS.....	228

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Resultados de simulacro pruebas saber 2020	30
Ilustración 2: Análisis de dificultad de contenidos por individual en prueba externa	31
Ilustración 3: Resultados por nivel de competencias matemáticas (grado 9° nivel nacional)	34
Ilustración 4: Estructura general del análisis didáctico	37
Ilustración 5: Esquema del análisis cognitivo	52
Ilustración 6: Secuencia de tareas	56
Ilustración 7: Contribuciones de la secuencia de tareas	57
Ilustración 8: Procesos de descripción, análisis y modificación	57
Ilustración 9: Representación gráfica de la función cuadrática (parábola)	76
Ilustración 10: Parábola de vértice en el origen y un eje coordenado	77
Ilustración 11: Parábola cuando $p < 0$	79
Ilustración 12: Parábola cuando $p > 0$	79
Ilustración 13: Parábola cuando $p > 0$	79
Ilustración 14: Parábola cuando $p < 0$	79
Ilustración 15: Estructura Conceptual del Objeto Matemático Función Cuadrática	91
Ilustración 16: Secuencia Didáctica	103
Ilustración 17: Esquema de investigación.	115
Ilustración 18: Actividad relacionada con la estructura conceptual de la función cuadrática	135
Ilustración 19: Actividad asociada a la estructura conceptual de la función cuadrática	137
Ilustración 20: Actividad asociada a los sistemas de representación de la función cuadrática	139
Ilustración 21: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática.	141
Ilustración 22: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática	143
Ilustración 23: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática	145
Ilustración 24: Concepción de función cuadrática	147
Ilustración 25: Concepción de función cuadrática	147
Ilustración 26: Elementos significativos de la estructura de la función cuadrática	148
Ilustración 27: Elementos significativos de la estructura de la función cuadrática	148
Ilustración 28: Transformación entre registros de representación	150
Ilustración 29: Transformación entre registros de representación 2	150
Ilustración 30: Transformación entre registros de representación 3	152
Ilustración 31: Transformación entre registros de representación 4	152

Ilustración 32: Transformación entre registros de representación 5	153
Ilustración 33: Transformación entre registros de representación 6	153
Ilustración 34: Transformación entre registros de representación 7	153
Ilustración 35: Comprensión del problema	156
Ilustración 36: Comprensión del problema	156
Ilustración 37: Comprensión del problema	156
Ilustración 38: Comprensión del problema	156
Ilustración 39: Comprensión del problema	156
Ilustración 40: Solución a uno de los problemas	158
Ilustración 41: Solución de uno de los problemas	158
Ilustración 42: Solución de uno de los problemas	158
Ilustración 43: Tarea 1 para la sesión 1	162
Ilustración 44: Tarea 2 para la sesión 1	164
Ilustración 45: Tarea 3 de la sesión 1	167
Ilustración 46: Tarea 1 para la sesión 2	168
Ilustración 47: Tarea 2 para la sesión 2	171
Ilustración 48: Tarea 1 para la sesión 3	174
Ilustración 49: Tarea 2 para la situación 3	175
Ilustración 50: Tarea 3 para la sesión 3	177
Ilustración 51: Pared con lados cuadrados	194
Ilustración 52: Elementos de la parábola en el plano cartesiano	195
Ilustración 53: Lanzamiento de disco	196
Ilustración 54: Representación tabular de la función a	200
Ilustración 55: Representación tabular de la función b	200
Ilustración 56: Paso 1 de la construcción	202
Ilustración 57: Paso 2 para la construcción	203
Ilustración 58: Paso 3 para la construcción	203
Ilustración 59: Paso 4 para la construcción	204
Ilustración 60: Paso 6 para la construcción	205
Ilustración 61: Paso 7 para la construcción	205
Ilustración 62: parábola de función a	210
Ilustración 63: Parábola de función b	210

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Descripción del campo conceptual de la función cuadrática.	67
Tabla 2: Descripción del campo procedimental de la función cuadrática.	69
Tabla 3: Valores de $x$ en $fx = x^2 + 1$ en el sistema de representación tabular	82
Tabla 4: Valores de $fx = x^2 + 1$ en el sistema de representación tabular	82
Tabla 5: Relación de componentes de la fenomenología de la función cuadrática	88
Tabla 6: Objetivos de aprendizaje de la función cuadrática	93
Tabla 7: Capacidades con relación al aprendizaje de la función cuadrática	95
Tabla 8: Capacidades relacionadas con los objetivos de aprendizaje	96
Tabla 9: Dificultades y errores relacionados con las actividades	98
Tabla 10: Organización de la clase desde las tareas matemáticas	101
Tabla 11: Momentos de planificación de la secuencia didáctica	105
Tabla 12: Objetivos específicos de la investigación	119
Tabla 13. Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 1	130
Tabla 14: Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 2	131
Tabla 15: Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 3	132
Tabla 16: Caracterización de Dificultades y errores	160
Tabla 17: Documento técnico de la secuencia didáctica	180
Tabla 18: Datos de tarea "Mira como baja"	201
Tabla 19: Tabla de datos a identificar en el problema	207

## RESUMEN

Aportar al mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula representa un compromiso con la formación integral de los educandos, aún más cuando resaltan dificultades y falencias en dichos procesos. En este sentido, el presente artículo expone los desarrollos y procesos investigativos relacionados con la construcción de una secuencia didáctica que aporte al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático función cuadrática. Para el desarrollo de la investigación se asume una metodología cualitativa con alcances descriptivos, los sujetos de estudio son estudiantes de grado noveno de una Institución Educativa colombiana. Los elementos y estructuras que permiten la configuración de la secuencia didáctica se basan en el desarrollo del análisis didáctico de la función cuadrática. El resultado de la investigación concluye al establecer la secuencia didáctica configurada a partir de las estrategias y actividades que aportan al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.

*Palabras clave: Secuencia didáctica, análisis didáctico, función cuadrática, dificultades de aprendizaje.*

## ABSTRACT

Contributing to the improvement in the teaching and learning processes of mathematics in the classroom represents a commitment to the comprehensive training of students, even more so when they highlight difficulties and shortcomings in these processes. In this sense, this article exposes the developments and investigative processes related to the construction of a didactic sequence that contributes to the improvement of the learning of the quadratic function mathematical content. For the development of the research, a qualitative methodology with descriptive scope is assumed, the study subjects are ninth grade students of a Colombian Educational Institution. The elements and structures that allow the configuration of the didactic sequence are based on the development of the didactic analysis of the quadratic function. The result of the investigation concludes by establishing the didactic sequence configured from the strategies and activities that contribute to the improvement of the learning of the quadratic function.

*Keywords: Didactic sequence, didactic analysis, quadratic function, learning difficulties.*

## INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia las matemáticas han ocupado un papel predominante en los planes de la educación a nivel mundial, impulsada por su aporte en desarrollar la capacidad del pensamiento y por su utilidad en la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas, además de ser una ciencia de lenguaje universal. Ha sido considerada a través del tiempo como un proceso que entraña gran complejidad y que para la importancia que en ella recae ha sido observada de manera general. El aprendizaje de la matemática requiere la creación y la apropiación de significados abstractos, la codificación y decodificación de símbolos, además de la capacidad de relacionar y contextualizar los procesos y desarrollos correspondientes a la misma, un hecho cotidiano presente a lo largo de la enseñanza de estos procesos es la existencia de dificultades, algunas perceptibles para el profesor en ejercicio y otras entrañadas en el desarrollo común del aprendizaje del estudiante, generando apreciaciones distantes y malinterpretaciones relacionadas con las capacidades y dificultades de un estudiante al aprender un tema. Por ello la detección de las dificultades de aprendizaje en estos procesos, su diagnóstico y posible solución deben ser factores prioritarios en los profesores en ejercicio para que los estudiantes puedan afrontarlas y no sean causa de fracaso o abandono escolar.

Son múltiples las investigaciones que develan posibles causas que desencadenan dificultades de aprendizaje en matemática, posturas como la de Bermejo (2004) quien establece que pueden presentarse por la comprensión lectora o por procesos relacionados con el desarrollo cognitivo, Fernández (2013) considera que los objetivos y métodos de enseñanza son factores que al ser desarrollados de un modo no adecuado pueden generar dificultades. En consecuencia, el presente trabajo de investigación describe los desarrollos enmarcados en la construcción de una secuencia didáctica que aporte al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática. El desarrollo de este inicia a partir del planteamiento de la existencia de dificultades en el aprendizaje del objeto de estudio, desde la construcción de un instrumento que identifica estas dificultades hasta la creación de estrategias que permitan alcanzar el objetivo principal. Es de esta forma como la investigación realizada se organiza en 7 capítulos con la siguiente estructura:

En el primer capítulo, se lleva a cabo una revisión documental de diferentes fuentes relacionadas con secuencias didácticas del contenido matemático función cuadrática e instrumentos de identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, esto con el fin de establecer los posibles caminos para tener en cuenta, las diferentes iniciativas y postulados presentes en las demás investigaciones. Se estudian los posibles orígenes de las dificultades comunes y la delimitación de esta problemática en el actual campo de práctica, dando pie al establecimiento de conjeturas que estructuren proyecciones de mejoramiento en el aprendizaje del objeto de estudio, junto a esto las bases que justifican la investigación con relación a la necesidad presente en los sujetos de estudio.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que dan guía a la investigación, partiendo de la descripción de un modelo que permite diseñar, llevar a la práctica una secuencia didáctica para un tema en específico o para varios como tal. En esta sección se realiza una aproximación a dicho modelo desde el contenido matemático función cuadrática, se adopta la postura de una estructura basada en una serie de actividades que posibilitan el aprendizaje del objeto de estudio.

En el tercer capítulo, se describe la estructura metodológica de la investigación, se adopta una postura descriptiva lo que permite la comprensión de los datos producto de la aplicación de instrumentos de observación y recolección de estos. De igual forma, en este capítulo es posible encontrar la descripción de las fases y desarrollos que constituyen la investigación, estas responden a la fase inicial en la cual se delimitan los actores y fundamentos de la presente investigación, la fase campo donde se expone los procesos a seguir para dar cumplimiento a los objetivos de la investigación y la fase de análisis que detalla los elementos y criterios para el proceso de observación y análisis de los recursos e información relevante para la investigación.

En el cuarto capítulo, se detallan las observaciones, inferencias y deducciones producto del análisis realizado a los datos obtenidos por medio del instrumento, información y actividades que dan estructura a la investigación, estas siguen los parámetros establecidos en la fase de análisis.

En el quinto capítulo, se presenta la estructura correspondiente a la secuencia didáctica compuesta por dos documentos, el documento técnico que describe de manera general las características, actividades y componentes que forman la secuencia y el documento guía que expone de manera específica las actividades, descritas por sesiones.

En el sexto capítulo, se recogen las conclusiones producto del desarrollo de la investigación realizada, en este es posible evidenciar la descripción del proceso relacionado con el análisis documental y la selección de actividades que permiten dar estructura a un instrumento de identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática, de igual forma, la descripción de la aplicación del instrumento en las sesiones establecidas. Posteriormente, se realiza la caracterización de las dificultades identificadas en los resultados de la aplicación del instrumento diagnóstico, teniendo en cuenta la comparación de esta información con las categorías y características relacionadas con el análisis de contenido de Gómez (2002). Continuo a estas descripciones, se mencionan los elementos y características que permiten la selección y construcción de las estrategias y actividades que contiene la secuencia didáctica proyectada a mejorar el aprendizaje del contenido matemático función cuadrática. Finalizando el capítulo, es posible observar las consideraciones que permiten dar solución a la pregunta de investigación.

En el séptimo capítulo, se delimitan las posibles perspectivas que se pueden abordar en otras investigaciones, consideraciones como la aplicación de la secuencia didáctica, el análisis de los resultados después de la aplicación, la validación de las tareas pertenecientes a la secuencia, entre otras, con el fin de brindar herramientas didácticas que permitan a los profesores que abordan el área de matemáticas en la institución el mejoramiento del aprendizaje en el contenido matemático función cuadrática.

## **CAPÍTULO I**

### **1. APROXIMACION INICIAL AL OBJETO DE ESTUDIO**

En el siguiente capítulo se describe algunos trabajos de investigación que fueron constitutivos para la caracterización de la problemática de estudio y relacionados con el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática, de igual forma aquellos que se enfocaron hacia la construcción de instrumentos para la identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática. Así mismo, se presenta, la problemática abordada, los objetivos que guían la investigación, y las razones que se consideran relevantes para el desarrollo presente trabajo.

#### **1.1 Antecedentes**

En el siguiente apartado se da a conocer algunos trabajos de investigación relacionados con el diseño y estructura de secuencias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático función cuadrática e investigaciones dedicadas a la configuración de instrumentos de identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática.

##### **1.1.1 Estrategias didácticas para el aprendizaje de la función cuadrática.**

En principio la investigación realizada por Mosquera (2015) diseña una secuencia didáctica en el marco de la enseñanza que posibilita a los estudiantes de grado noveno de la I.E.R Yarumito ubicada en Barbosa Antioquia, el aprendizaje de las funciones cuadráticas de variable real desde el marco de la enseñanza para la comprensión. La investigación relacionada utilizó la monografía de análisis de experiencias (estudio de casos) como instrumento de la investigación. Metódicamente se refleja el uso de la inducción, desarrollada a partir de concepciones particulares para obtener otras generales, instrumentalmente se utiliza como fuente de información cuestionarios y libros sobre enseñanza para la comprensión, describen un tipo de pre test que permite diagnosticar falencias, dificultades o preconceptos y fortalezas que presentan los estudiantes frente a la función cuadrática, en cuanto a la evaluación de la secuencia queda evidenciado que mejoraron los resultados entre el pre test y el post test lo cual dice de cierto modo que la aplicación de la secuencia

de enseñanza aplicada fue viable debido a que los estudiantes mejoraron sus competencias frente a las funciones cuadráticas lo cual conlleva a que los estudiantes mejoren en el desarrollo del pensamiento variacional.

Es importante decir que este trabajo no tenía como prioridad medir las dimensiones y niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes sino, recoger algunos aspectos importantes sobre la metodología del marco de enseñanza para la comprensión. De manera general describen en dicha investigación que la secuencia didáctica fue aplicada y completada a cabalidad por los estudiantes dando como conclusión una mejora en las competencias referentes a la función cuadrática, en consecuencia, una mejora en el pensamiento variacional. Tomando este trabajo como referente para la investigación que se está desarrollando es de destacar los medios de observación y diferentes dificultades observadas en el proceso de la secuencia didáctica ya que se pueden tomar como base para la estructuración de la secuencia didáctica a desarrollar.

En relación con lo anterior, Aránzazu (2013) enfoca su investigación en el desarrollo de una secuencia de enseñanza significativa de la función cuadrática utilizando el marco del aprendizaje significativo. La investigación utilizó unidades de enseñanza potencialmente significativas (UEPS), fundamentada en teorías de aprendizaje significativo, en la cual concluyen que ésta, posibilita que los estudiantes aprendan significativamente sobre una función cuadrática y como obtener otras representaciones algebraicas equivalentes a partir de su expresión polinómica, observando y llevando a colación el modelo U.E.P.S utilizado en esta secuencia resulta objetivo y aplicable para la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática. Pero lo más importante es que permite espacios para que el maestro y estudiante interactúen de tal manera que pueda existir una socialización de conocimiento donde sean los estudiantes los encargados de hacer ver al docente las fallas que se puedan estar dando en la forma en la que se enseña el tema. En este orden de ideas plasmar estos desarrollos a la investigación para la secuencia didáctica a diseñar aporta un avance en la metodología para los criterios de escogencia de la estructuración de la secuencia.

Del mismo modo, Briceño & Buendía (2016) desarrollan secuencias en las que la práctica de la modelación es utilizada a favor de generar un aprendizaje significativo de la función cuadrática y sus aspectos variacionales. La investigación se fortalece gracias a las contribuciones

que se obtienen al usar la metodología de experimentos de diseño sustentado en el marco teórico de la socio-epistemología. Concluye que la aplicación de secuencias es realizable en el aula de clase para estudiantes entre 12-13 años que hasta ahora comienzan el trasegar en el precálculo y desarrollar significativamente los procesos de aprendizaje en aspectos variacionales. Las secuencias diseñadas fueron ideadas con el fin de discutir los aspectos variacionales de la función cuadrática favorecidos intencionalmente por la práctica de modelación como parte activa en el proceso enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática y se refleja al terminar el proceso secuencial.

Desde la óptica de la investigación a desarrollar se puede destacar que en las investigaciones en las que la modelación se toma como una práctica, es factible que se resignifique el conocimiento matemático usando los experimentos de diseño como complemento, dando solución a varios vacíos generados en los estudiantes. Esta investigación sirve como referente para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática a nivel de bachillerato y con adaptaciones a otros niveles, considerando los procesos de modelación aplicados en la función cuadrática como importantes procesos para el aprendizaje concreto del objeto matemático.

La investigación realizada por Tobón (2017) genera un proyecto de aula que promueve el aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática mediante la resolución de problemas en los estudiantes de grado noveno del colegio maría auxiliadora ubicada en la ceja Antioquia. En el proyecto de aula se trabaja con el enfoque de resolución de problemas basado en la teoría del aprendizaje significativo crítico expuesto por Marco Antonio Moreira, buscando que las estudiantes sean partícipes en la construcción del conocimiento. Concluye que la implementación de una estrategia de aprendizaje, como el proyecto de aula permite adoptar nuevas dinámicas de enseñanza brindando herramientas pedagógicas más contextualizadas, adaptadas a los gustos, intereses y necesidades de los educandos; brindándoles la oportunidad de construir conocimiento, además ser protagonista en el proceso de aprendizaje.

Ligado a estos aspectos, la investigación realizada por Genicio, Lazarte, Fortinico, & Hernández (2004) se enfocan en desarrollar estrategias innovadoras para la enseñanza de la función y ecuación cuadráticas, en el marco de la ingeniería didáctica. Se observa la utilidad de estrategias

participativas a nivel áulico, derivadas de la concepción del trabajo grupal como una forma de resolver problemas. Además, menciona en distintos momentos, el trabajo individual, con el propósito de provocar procesos inferenciales, donde los participantes experimenten que el “HACER” es una tarea intelectual personal. La contribución de este trabajo se encamina a procesos más generales, como favorecer un cambio positivo sobre la forma de enseñar matemática con respecto a las viejas metodologías y termina por encaminar a los estudiantes al aprendizaje de la función cuadrática.

Es de interés para esta investigación la estrategia de ingeniería didáctica, y la situación – instrumento – objeto ya que se puede implementar como herramienta que identifica falencias en los diferentes desarrollos correspondientes al objeto matemático función cuadrática. Particular a esto la implementación del pensamiento de innovación en los estudiantes se complementa a cabalidad con el pensamiento crítico.

### **1.1.2 Identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática**

La investigación realizada por Acevedo (2017) establece elementos con características de desarrollo y análisis del objeto de estudio de la presente investigación, por lo cual se tiene en cuenta como fuente de interés. Dicha investigación tuvo como fin analizar el aprendizaje conceptual, procedimental y representativo de las funciones (lineal, cuadrática y exponencial). Se estructura bajo estrategias didácticas basadas en la resolución de problemas con la proyección de acercar a los estudiantes a la contextualización del concepto de función, función lineal, función cuadrática y función exponencial en problemáticas cotidianas y la utilización de estas en la vida diaria. La metodología utilizada en esta investigación fue de carácter cualitativo, desarrollada mediante una serie de actividades como cuestionarios de preguntas abiertas y cerradas con el fin de comprobar la efectividad que tuvo la implementación de la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas.

La investigación es aplicada a un total de 30 estudiantes de la Institución Educativa San Luis Gonzaga en el periodo 2017, con edades entre los 15 y 16 años, la estrategia didáctica implementada es compuesta inicialmente por preguntas de carácter conceptual, para después ser

articuladas con problemas cotidianos los cuales se postulan como perspectiva de la investigación y a las cuales se han denominado la resolución de problemas de tipo práctico, viendo lo práctico reflejado a las situaciones problemas de la vida cotidiana.

La investigación anteriormente mencionada es tomada como parte fundamental para la creación de los instrumentos diagnósticos que permitirán la identificación de dificultades asociados al aprendizaje de la función cuadrática, ya que la estructura utilizada en los instrumentos aplicados por Acevedo (2017), se analiza y se estructura bajo unas categorías representativas del objeto de estudio e investigación. Cabe aclarar que se tendrá en cuenta específicamente la información y estructuras relacionadas con la función cuadrática, ya que el documento hace un amplio análisis y desarrollo de las demás funciones que en este caso no son de utilidad para la investigación.

En la construcción de Genicio et al., (2004) se conciben estrategias participativas a nivel áulico, derivadas de la concepción del trabajo grupal como una forma de resolver problemas, enfoca la propuesta didáctica a que los estudiantes experimenten el “hacer” como una tarea intelectual personal. El instrumento que proponen está diseñado a partir de un análisis didáctico, esto denotado por los autores en la descripción metodológica. En dicha propuesta se plantean estrategias estructuradas bajo las siguientes descripciones que deben ser tomadas por el profesor en ejercicio:

- a) Anticipen los procedimientos que podrían realizar los alumnos para resolver la secuencia de problemas, incluyendo los erróneos y los acertados.
- b) Enuncien, para cada uno de los procedimientos, los conocimientos previos que los alumnos deben poseer para resolver la secuencia de problemas.
- c) Identifiquen él o los conocimientos a los que apunta la secuencia de problemas.
- d) ¿En qué marcos aparece el concepto?
- e) Analice la variable didáctica puesta en juego.
- f) ¿En qué curso aplicarían la propuesta? ¿Cómo organizarían el grupo de alumnos? ¿Cómo sería la gestión de la clase?, ¿Qué podría hacer peligrar la propuesta y qué acciones permitirían superar el inconveniente?, ¿Cuál sería la intervención del docente? ¿Cómo se realizarían las validaciones de las actividades desarrolladas por los alumnos?

En el documento no existen conclusiones, ni resultados de aplicación, sin embargo, los autores postulan que el docente que utilice la propuesta debe hacer un análisis previo a el grupo respecto a los conocimientos que poseen hasta el momento y posterior la aplicación del instrumento y al respectivo análisis de los diferentes errores y dificultades presentes. Se plantea la lectura de un texto que contiene definiciones, conceptos y procedimientos que abordan el mejoramiento en el aprendizaje del objeto de estudio y aportan a la superación de las posibles dificultades que se puedan presentar en la realización del instrumento "Función polinómica de segundo grado" tomado del libro de matemática para 4° año del Bachillerato escrito por Nelly Vásquez de Tapia.

Ahora bien, esta investigación representa significancia para la presente investigación, debido a la utilización de actividades que posibilitan la identificación de dificultades en el aprendizaje del objeto de estudio y el planteamiento de posibles aportes a la solución de los mismos, es de resaltar que siguen una estructura en común a la presente investigación, descrita como análisis didáctico, además de los procesos que contiene el instrumento que se adaptan en gran parte a la finalidad de la revisión documental de esta sección en específico.

En este orden de estructuras, es importante destacar el trabajo realizado por Hernández, Márquez & Quiñonez (2008), quienes establecen una propuesta didáctica compuesta por situaciones problemas contextualizados, estos con el fin de destacar diferencias posteriores a la aplicación del mismo, sin embargo es de interés para la presente investigación que en dicho trabajo se estructuran procesos de identificación de dificultades relacionadas con la función cuadrática previas a la construcción de los talleres que posibilitan la superación de las mismas.

Los procesos dedicados a la creación de actividades de identificación de dificultades están dispersos en los desarrollos iniciales, propuestos de la siguiente manera: inicialmente con entrevistas informales, donde los estudiantes indagan sus preconceptos, falencias y aspectos que el autor considera importantes como la mediación de los contenidos por parte de los docentes que han impartido el tema, posterior a esto se establece la utilización de talleres con fines de reflexión, confrontación y de acercamiento conceptual, describen que por medio de estos se obtiene

información crucial acerca de los niveles de significancia y de conceptualización de la temática tratada, específicamente los talleres se dividen en tres tipos: talleres de socialización, donde se permite indagar y afianzar los preconceptos de los estudiantes, talleres de autoaprendizaje consistentes en problemas contextualizados que permiten observar el grado de aplicación del estudiante del concepto al medio que lo rodea y los talleres de profundización, donde permite identificar si el estudiante puede aplicar los diferentes sistemas de representación de la función cuadrática y que tanta orientación requieren para el desarrollo del mismo.

En lo que respecta a los momentos posteriores a la utilización de estos talleres, es posible apreciar los planteamientos de los autores al obtener datos fructuosos para la creación de actividades que permitiesen el mejoramiento en el aprendizaje del contenido, estas apreciaciones dan la significación que presenta este trabajo para la presente investigación, ya que es posible compara sus desarrollos con los fines principales de la investigación. Para finalizar la apreciación de la investigación de Hernández et al., (2008), es importante mencionar que fueron tomadas categorías de análisis correspondientes a:

- El compromiso asumido por los estudiantes para el desarrollo de las actividades propuestas para cada taller.
- Acciones de tipo interpretativo, argumentativo y propositivo realizado por los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
- Nivele de significación y sentido logrado por los estudiantes a medida que se avanza con el desarrollo del trabajo en el aula con respecto a la temática.
- Estrategias cognitivas y metacognitivas desarrolladas por los estudiantes para la solución de problemas propuestos en los talleres.

Como recomendación en la utilización del instrumento y en la posible articulación de este, los autores proponen utilizar situaciones cercanas a la población de la cual se piensan identificar las dificultades, para que el estudiante tenga mayor capacidad de respuesta ante estas situaciones.

En los procesos relacionados a la experimentación de enseñanza, el trabajo de Huapaya (2012), caracteriza dichos procesos a partir de estructuras e instrumentos de identificación de

dificultades en el aprendizaje del proceso de modelación teniendo como contenido principal la función cuadrática. Los procesos de experimentación donde se refleja la presencia de los instrumentos de identificación de dificultades fueron aplicados en tres distintos experimentos, el primero denominado experimento cero donde se brinda un acercamiento a los recursos y herramientas que se utilizarán en los siguientes experimentos, recogiendo de esta manera información significativa para el investigador, en segundo experimento denominado experimento I, este es diseñado con el fin de que el estudiante aborde el concepto de función cuadrática desde un punto de vista contextualizado, transitando entre los diversos registros coordinando de manera eficiente las representaciones: numérica, gráfica y luego algebraica y apoyándose de manera eficiente en los recursos y en la tercer experimentación presentan diferentes modelos de problemas de contextos relacionados con la modelación, donde el estudiante debe tomar una postura y una decisión ante las diferentes situaciones presentes.

Es importante mencionar que en el análisis de los resultados y como conclusión, el autor establece que los procesos descritos en los instrumentos deben tener más afinidad en lo que quieren comunicar a los estudiantes, ya que debido a esto se presentaron ideas incompletas o confusas por parte de los estudiantes, además de esto que se debe tener en cuenta cada punto de vista establecido por cada estudiante acerca de los diferentes elementos, ya que esto permite estructurar una manera adecuada para superar falencias en el aprendizaje del objeto de estudio en caso de que se presenten.

## **1.2 Formulación del Problema**

Un aspecto fundamental en la formación integral de los estudiantes está en el aprendizaje de la matemática, siendo este primordial en el desarrollo de la humanidad a través de las generaciones, de allí la importancia que esta sea apropiada por cada uno de los miembros de las culturas permitiendo su crecimiento individual y social (Mosquera, 2015).

De esta forma, la Educación Matemática como disciplina científica y de investigación postula retos cada día para los diferentes sistemas de educación, gran variedad de investigadores dedica arduamente sus esfuerzos en contribuir a los procesos enseñanza y aprendizaje la matemática educativa, sin embargo, con cada proceso educativo surge una dificultad, siendo estas

el constante obstáculo que imposibilita un aprendizaje significativo de un tema o contenido matemático.

La experiencia en el campo educativo permite observar que en las clases de matemáticas no se presta la suficiente atención a las múltiples dificultades asociadas al aprendizaje de esta ciencia y mucho menos a las falencias particulares que tiene cada estudiante, encasillándolo todo como ignorancia o desinterés por aprender, el maestro debe conocer las causas y características de estas dificultades para poder tratarlas adecuadamente. Hay que destacar, por tanto, el papel importante que juega la formación con qué cuenta el docente para abordarlas, pero también su implicación a la hora de dar respuesta a la atención a la diversidad (Fernández C., 2013).

Según Arbones (2005) las dificultades de aprendizaje se refieren a aquellas falencias que se manifiestan en la adquisición y el uso de las capacidades de la lectura, la comprensión, la expresión escrita y para este caso en específico el razonamiento matemático, siendo estas denotadas durante la etapa escolar y que pueden tener como consecuencia un rendimiento más lento e incluso fracaso escolar. Dichas falencias son difíciles de detectar en los primeros años de escolaridad, de ahí la importancia que se debe imponer a la detección e intervención temprana de las dificultades específicas de aprendizaje, para la presente investigación las relacionadas con el aprendizaje de la matemática.

Los objetivos en la enseñanza de la matemática son amplios y todos van dirigidos a desarrollar en los escolares la comprensión y las destrezas matemáticas que preparan para la vida adulta, a partir de ello, es importante tratar un aspecto denotado en la enseñanza que corresponde a las dificultades que pueden experimentar determinados alumnos. El nivel de dificultad de aprendizaje de los diferentes temas relacionados con objetos matemáticos viene marcado por el contenido en sí pero también por las características cognitivas y psicológicas de los escolares (Carrillo, 2009). Es importante tener en cuenta es el uso del lenguaje propio de las Matemáticas, ya que este puede resultar muy diferente al lenguaje natural de los niños y puede generar dificultades importantes en los alumnos debido a la complejidad sintáctica y al vocabulario propio del área.

En la actualidad y desde la psicología cognitiva escolar se habla de Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas porque las dificultades del alumno no sólo aparecen en el ámbito del cálculo, sino también en otros dominios matemáticos (Bermejo, 2004). Estudios procedentes de la psicología cognitiva han puesto de manifiesto que los niños con DAM (Dificultad en el Aprendizaje de la Matemática) presentan dos tipos diferentes de perfiles cognitivos: aquellos que presentan dificultades de comprensión lectora y aquellos cuyas habilidades lectoras son normales pero que presentan problemas en otros procesos cognitivos como la memoria, atención, etc. Por tanto, se puede ver que desde este enfoque no se intenta etiquetar al alumno, sino que se intenta explicar el origen de las DAM y ver cómo se pueden solventar. El área de matemáticas puede producir cierta ansiedad desde su perspectiva educativa, ya que es posible prever con facilidad los diferentes aciertos y los errores en los procedimientos propuestos, siendo estos estructurados con cierto nivel de abstracción, este nivel debe ir aumentando con cada paso avanzado por los estudiantes, pero el docente no debe permitir que el nivel de abstracción separe al estudiante de sus contextos cotidianos.

La asimilación de los contenidos se ve afectada, por su funcionalidad, la falta de contextualización de los procesos de enseñanza de un contenido matemático se ha convertido en un desarrollo común de la matemática educativa actual, para que el alumno interiorice un contenido con facilidad es necesario que vea su utilidad, en caso contrario perderá interés y se desmotivará, generando más dificultades en el proceso de aprendizaje. Algunas de estas dificultades pueden presentarse a partir de la precaria relación que establecen para los contenidos relacionados con el medio en que se desenvuelven los alumnos, la falta de sentido para ellos minimiza el entendimiento de la materia como algo vivo que puede ayudarles a resolver múltiples situaciones en la vida diaria (Fernández, 2013).

La metodología de enseñanza y la actitud que adopta el maestro de matemáticas es presentada como foco generador de dificultades, puesto que esta puede determinar la predisposición y el interés de los alumnos hacia la materia (Fernández, 2013). Años atrás era habitual hacer grupos homogéneos para adaptar los contenidos matemáticos a los distintos ritmos de aprendizaje. En la actualidad se sabe que esta práctica no garantizaba el éxito, aun cuando se estructura una distribución predispuesta de los estudiantes en el aula, el aprendizaje sigue teniendo

factores que generan dificultades. Los objetivos y los métodos de enseñanza representan un eje crucial en el surgimiento de las posibles dificultades, en algunos casos por que no están pensados para los estudiantes a los que se les aplicara en otros por falta de formación del profesor en ejercicio en ámbitos pedagógicos y didácticos, lo cierto es que siempre se presentaran dificultades que el docente debe prever.

Las dificultades en el área de las matemáticas descritas anteriormente se pueden asociar al estudio de las matemáticas en cualquier grado y que curricularmente para el caso de Colombia, los estándares proveen el estudio de pensamientos y sistemas que configuran la matemática escolar que deben aprender los estudiantes, uno de ellos es el pensamiento variacional el cual:

Tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 66).

En el pensamiento variacional, se manifiestan problemáticas al considerar el estudio de la variación como un elemento necesario para el aprendizaje de la matemática, pero que no es el propiciado en los salones de clase, dejando en su lugar un aprendizaje basado en recursos memorísticos (Caballero & Cantoral, 2013). El pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento.

Para este caso en específico se asume una visión amplia respecto al pensamiento variacional, teniendo en cuenta que su estudio se inició en el intento de cuantificar la variación por

medio de cantidades y magnitudes (MEN, 2006), del análisis de los lineamientos y estándares curriculares en matemáticas se observa la necesidad de establecer prioridad al desarrollo de la variación y del pensamiento variacional, según Acevedo (2017) el pensamiento variacional posibilita la comprensión de fenómenos de variación, estando estos relacionados con el reconocimiento, la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, reconoce tres ejes conceptuales que orientan el desarrollo curricular en la educación matemática: patrones y regularidades, procesos algebraicos y por último análisis de funciones. Los conceptos de variable y función cobra mayor representación, pues son considerados núcleos conceptuales matemáticos relacionados de forma directa con la variación y el pensamiento variacional, es claro asumir que en la vida diaria la variación se encuentra asociada a contextos de dependencia entre variables acoplado de manera significativa los procesos que atienden a el concepto de función.

Como todo concepto matemático, el de función ha ido definiéndose a lo largo de la historia para llegar a su estructura actual, de este modo el concepto de función ha sido establecido a través de variedad de registros, descripción verbal, términos algebraicos, tablas, diagramas de flechas, “black box” de entrada y salida, pares ordenados (González, 2015), se debe hablar del concepto de función como fundamental en las matemáticas y por tanto también central en la educación secundaria (Bagni, 2004), sin embargo, en lo que respecta a los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto, o en su defecto al contenido matemático completo, es posible describirlo como un tema que también consta de dificultades debido a su complejidad y generalidad.

En la educación matemática, el concepto y estructura de función, es considerado como uno de los más difíciles de desarrollar en cuanto a la secuencia de aprendizaje, esto se debe a la variedad de conceptos que lleva asociados, incluso las funciones consideradas más simples dependen de estos (González, 2015), entre otros y todos recogidos en Hit (2014), centran las dificultades en los conceptos: pendiente, tangente, tasa de variación media e instantánea, límite, infinito y derivada. Con relación a lo mencionado anteriormente, cada función específica que compone el contenido general de función consta de variedad de dificultades.

Centrando la mirada a una de las funciones que representa gran significancia en los procesos de aprendizaje del contenido matemático función, se llega al contenido de función cuadrática, objeto de estudio de la presente investigación. El proceso de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática al igual que el de las demás funciones, está ligado a análisis y desarrollos que marcan una estructura no cotidiana y que a pesar de utilizar conceptos considerados conocimiento previo, se evidencia la existencia de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este.

Tradicionalmente el docente generaliza el concepto de función cuadrática impartiendo la definición más general y poco completa sobre la función cuadrática, destacándola como un instrumento de modelación, a lo cual el profesor sugiere valores a tabular para crear la conocida tabla de valores y así trasportar dichas parejas ordenadas a la graficación de la función cuadrática en el plano cartesiano. Este trabajo mecánico no llena los vacíos que tiene cada estudiante, pues al desarrollar una práctica mecánica el estudiante no aprende a cabalidad, ni el maestro puede enseñar el contenido propuesto a plenitud, esta solo se enfoca en que el estudiante memorice los procesos y propiedades aplicadas en el desarrollo de una función cuadrática, dejando de lado las preguntas de casos particulares que surgen de los estudiantes, por ejemplo: ¿qué pasa si se coloca un número muy grande o muy pequeño a tabular?, ¿qué pasa cuando cambiamos el signo de cada término de la función cuadrática a utilizar?, ¿qué pasa en la graficación cuando se altera cada parte de la función?. Entre variedad de dudas que nacen a partir de una práctica incompleta del docente, pretende encerrar todo un mundo de enseñanzas en una sola clase. Además, se presentan dificultades en los estudiantes al resolver problemas verbales que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso de lenguaje algebraico, es decir en las que el estudiante debe plantear ecuaciones cuadráticas. Otra dificultad es que los estudiantes no pueden interpretar situaciones representadas mediante el uso de funciones cuadráticas (Huapaya, 2012).

Considerando el pensamiento de Rivera (2009), en la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática se enfoca en la conversión de su representación algebraica a tabular, y por último se pasa a su representación gráfica utilizando como recurso didáctico lápiz, papel y pizarrón. Estos procesos describen un currículo alejado de la realidad educativa ya que los procesos de transmisión de conocimiento no forman un estudiante integral. En la práctica cotidiana, los mismos estudiantes declaran tener dificultad al desarrollar un problema de contexto, al realizar una transformación en

los sistemas de representación, inclusive llegar a identificar y distinguir una función cuadrática de las demás funciones, sin embargo, tomando una posición empírica, es posible declarar que no se han tomado acciones hasta el momento para enfrentar la problemática presente, o por lo menos no se identifican estrategias o actividades que aporten al estudiante a mejorar en el aprendizaje de este contenido, a pesar de la existencia de trabajos de investigación que contienen herramientas para al mejoramiento del aprendizaje de este contenido, no hay apropiación ni proposiciones que relacionen estas estrategias en el mejoramiento o superación de esta problemática.

Al realizar un sondeo superficial no estructurado en los estudiantes de grado 9° de la Academia Militar “General José Antonio Anzoátegui”, se denotan problemáticas y dificultades en los estudiantes asociados al aprendizaje del contenido matemático función cuadrática, en su construcción, además de presentar falencias en el desarrollo de estrategias para encontrar los valores de una variable y finalmente graficar estas funciones. Las anteriormente mencionadas dificultades fueron inicialmente denotadas en los resultados de evaluaciones internas por una empresa externa a la institución (resultados expuestos más adelante), y observaciones realizadas por el docente titular de la cátedra asignada como matemáticas.

Los resultados en las pruebas saber de grado noveno para el área de matemáticas (ICFES, 2021) muestra el siguiente diagnóstico: “El 68% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos no lineales; además el 78% de los estudiantes no identifica características en graficas cartesianas en relación con la situación que se presentan; al 63% de los estudiantes se les dificulta interpretar graficas no lineales.” entre otras. Los estudiantes presentan complicaciones acerca de su uso, normalmente se les enseñan sus características y comportamientos en la gráfica y los métodos para resolverlas, pero no se le aproxima a la realidad con problemas de contexto (Esquer, 2014).

Es importante agregar que en los tiempos en los que se desarrolla la investigación se ha presentado un cambio radical en cuanto a la forma en que se desarrollaba el diario vivir, la industria, el comercio, la salud, la educación y demás elementos considerados cotidianos, esto debido a una emergencia sanitaria, una pandemia incide actualmente en la región en donde se lleva a cabo la investigación, esto ha obligado al sistema educativo acoger diferentes metodologías relacionadas

con la formación no presencial con el fin de salvaguardar la salud y vida de los sujetos que interviene en los procesos formativos, es un tema que requiere una amplia sección si se pretendiera describir, por ende, la presente investigación tiene en cuenta que la necesidad de utilizar herramientas didácticas que permitan al profesor en ejercicio reinventarse y abarcar posturas que aporten al aprendizaje de los diferentes contenidos, en este caso la función cuadrática.

### **Pregunta de investigación**

Teniendo en cuenta que las investigaciones muestran que la comprensión de la función cuadrática es compleja en las aulas de matemáticas y que se hace necesario diseñar estrategias didácticas que aporten al mejoramiento en su aprendizaje, se considera relevante definir como problema de investigación:

**¿Cómo una secuencia didáctica contribuye al aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes de noveno grado de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”?**

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Contribuir al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado noveno de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, en estudiantes de grado noveno.
- Caracterizar las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno.

- Estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.

## 1.4 Justificación

El fin de las matemáticas escolares consiste en enriquecer el desarrollo del pensamiento matemático, y desde esta investigación el pensamiento variacional, el estudiante debe crear una correlación y dependencia entre variables, cuantificar la variación, analizar e interpretar gráficas, de igual forma el desarrollo de procesos de modelación. Los lineamientos curriculares pretenden encaminar al estudiante al aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos, para que el estudiante pueda apropiarse significativamente de estos conceptos, es necesario que proceda, modele, retome y desarrolle nuevos conocimientos relacionados con los conceptos propuestos, y de esta manera obtener un aprendizaje significativo.

Para lograr un claro entendimiento sobre los elementos que conforman la justificación de la presente investigación se postula la aplicación de los criterios FINER (Factible, interesante, novedosa, ética y relevante), formulados por Hulley, Cummings, Browner, Grady & Newman (2007).

*La Factibilidad* de la investigación recae en la necesidad de elementos que porten a la formación del estudiante, esta necesidad es identificable por cuanto la educación matemática y los contenidos que la componen son impartidos de manera tradicional y con metodologías que aportan al distanciamiento de los estudiantes con la matemática.

Los conceptos propios del pensamiento variacional (constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia) expresados en los estándares de competencia se definen o configuran como obligatorios a la hora de orientar la temática de funciones y se deben desarrollar encaminadas a lo que se espera alcancen los estudiantes. A partir de esto, los estudiantes deben desarrollar conocimientos y habilidades para desempeñarse con éxito en situaciones que incluyan la variación para tener una mayor comprensión del mundo que nos rodea y así poder contribuir a la solución de problemas presentes en la cotidianidad.

En consecuencia, el desarrollo del presente trabajo de investigación se pretende mejorar el aprendizaje del contenido matemático función cuadrática, a partir de un proceso reflexivo y teórico,

generando una secuencia didáctica que permita afrontar las dificultades presentadas por los estudiantes de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui” y potenciar un aprendizaje matemático consistente de la función cuadrática.

La institución cuenta con los recursos e infraestructura para la aplicación y el desarrollo de un proyecto de esta magnitud, es posible argumentar que la institución donde se pretende aplicar invierte un porcentaje a simulacros y actividades relacionadas con pruebas estandarizadas que pretenden dar un diagnóstico de las posibles falencias presentes en los diferentes contenidos de cada curso.

Las pruebas acumulativas y simulacro del ICFES aplicadas en la academia militar “General José Antonio Anzoátegui” por una empresa externa (Grupo Educativo Helmer Pardo) describen específicamente los campos de dificultad asociados a las temáticas investigadas en este trabajo.

Ilustración 1: Resultados de simulacro pruebas saber 2020



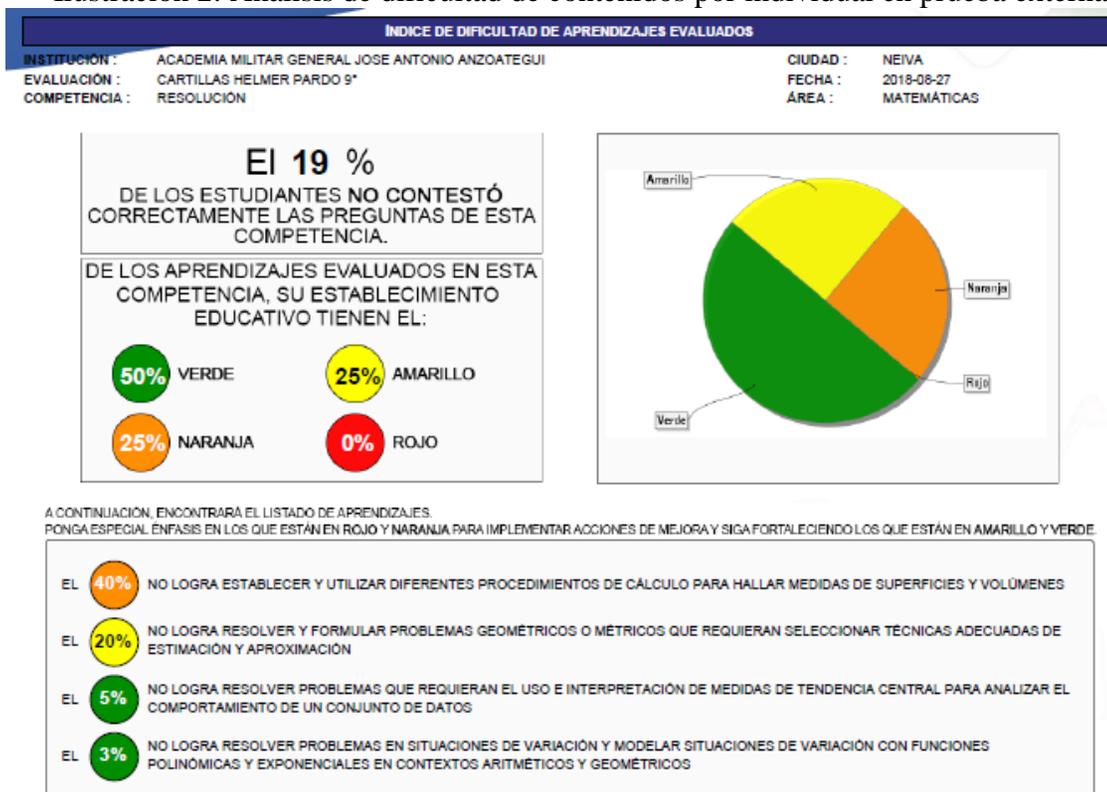
INDICE DE DIFICULTAD Y ANÁLISIS DE RESPUESTAS POR ÁREAS														
INSTITUCIÓN :		PRE-ICFES EXTENSIVO				CIUDAD :		NEIVA						
EVALUACIÓN :		SIMULACRO 874081 11* (CEREBRO)				FECHA :		2018-08-01						
ÁREA		MATEMÁTICAS - SESION 1												
#	COMPETENCIAS	COMPONENTES	TEMAS	PORCENTAJES								ID		
				A	B	C	D	E	F	G	H		NR	
1	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ESTADÍSTICA	ANÁLISIS COMBINATORIO	44.7	13.2	26.3	13.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	66.8
2	INTERPRETACIÓN Y REPRESENTAC..	ESTADÍSTICA	INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍST..	6.3	5.3	78.9	7.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	21.1
3	INTERPRETACIÓN Y REPRESENTAC..	ESTADÍSTICA	INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS ESTADÍ..	50.0	13.2	23.7	5.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.3	50.0
4	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	ESTADÍSTICA	MEDIA ARITMETICA	15.8	10.5	18.4	52.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	47.4
5	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	GEOMETRÍA	ÁREAS	44.7	7.9	18.4	21.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.3	78.9
6	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ESTADÍSTICA	CÁLCULO DE PROMEDIOS ESTADÍSTICOS	2.6	7.9	84.2	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	18.8
7	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	CÁLCULOS NUMÉRICOS EN FRACCIONARI..	34.2	52.6	7.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	47.4
8	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ESTADÍSTICA	CÁLCULO DE RESULTADOS EN GRÁFICAS..	42.1	34.2	5.3	13.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	57.9
9	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ESTADÍSTICA	CÁLCULO DE PROMEDIOS ESTADÍSTICOS	44.7	15.8	28.9	7.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	92.1
10	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	GEOMETRÍA	ANÁLISIS DE CORTES EN SÓLIDOS GEO..	18.4	31.6	13.2	28.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.3	81.6
11	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	ESTADÍSTICA	CÁLCULO DE PROMEDIOS ESTADÍSTICOS	28.9	13.2	18.4	34.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	66.8
12	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS MEDIAN..	50.0	13.2	26.3	7.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	86.8
13	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	CÁLCULOS NUMÉRICOS SOBRE TABLAS	5.3	26.3	52.6	10.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	47.4
14	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	ANÁLISIS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS	28.9	26.3	31.6	10.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	68.4
15	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	ESTADÍSTICA	ANÁLISIS MEDIANTE DIAGRAMAS DE ÁR..	47.4	18.4	23.7	7.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	52.6
16	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	RECTAS PARALELAS	18.4	55.3	13.2	10.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	81.6
17	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	GRÁFICAS DE PARÁBOLAS A PARTIR DE..	2.6	13.2	81.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100.0
18	INTERPRETACIÓN Y REPRESENTAC..	ESTADÍSTICA	PROBABILIDAD	21.1	13.2	7.9	55.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	78.9
19	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	GEOMETRÍA	CÁLCULO PERÍMETROS FIGURAS GEOMÉT..	15.8	18.4	34.2	26.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	73.7
20	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	GEOMETRÍA	ANÁLISIS DE CÍRCULOS INSCRITOS EN..	26.3	7.9	44.7	15.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	55.3
21	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	GEOMETRÍA	CÁLCULO DE DISTANCIAS MEDIANTE TE..	15.8	60.5	5.3	15.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.5
22	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	ÁLGEBRA Y CÁLCULO	CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD	7.9	10.5	15.8	63.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	36.8
23	FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN	GEOMETRÍA	ANÁLISIS DE EXPRESIONES GEOMÉTRIC..	15.8	0.0	76.3	5.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	23.7

Fuente: Banco de datos de la Academia Militar “General José Antonio Anzoátegui”

Analizando de manera general el examen simulacro de las pruebas saber 2020 se observa un grado de dificultad en lo que concierne al análisis de funciones algebraicas, detallando el índice de dificultad de dicha temática, para ser más específicos, a continuación, se denotan los resultados más específicamente de la función cuadrática en la prueba de grado noveno y su índice de dificultad.

En la Ilustración 1 se presenta a detalle el índice de dificultad de aprendizaje evaluado por la empresa “Grupo Educativo Helmer Pardo” en las pruebas aplicadas a grado noveno, se observa en dicha ilustración que el 3% de la población evaluada no logra resolver problemas en situaciones de variación ni tampoco modelar situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos, diagnostico descrito por la misma empresa.

Ilustración 2: Análisis de dificultad de contenidos por individual en prueba externa.



Fuente: Banco de datos academia militar “General José Antonio Anzoátegui”

Como se denota en las descripciones anteriores, las falencias y dificultades están presentes, sin embargo, la población de estudio posee un grado considerable de madurez cognitiva y sociocultural. El proyecto de investigación es desarrollado y proyectado a aplicarse a estos sujetos de estudio que cumplen con las condiciones necesarias para abordar el proyecto.

En cuanto a lo *interesante*, el proyecto rompe con un esquema tradicional de la enseñanza de la matemática, por cuanto se propia de una secuencia didáctica fundamentada desde la teoría. Duval (2004) menciona: “las diferentes representaciones de un objeto son importantes y necesarias para la comprensión de los conceptos y para el desarrollo de la misma actividad matemática” (p.152), lo cual directamente influye el qué, y cómo se enseña el objeto matemático. El maestro debe utilizar el lenguaje adecuado, así como las referencias pertinentes para que el aprendizaje del concepto, desarrollo de los procesos y aplicaciones no pasen a ser un conflicto más en estos desarrollos, cada parte de esta construcción de saberes comparte el mismo nivel de importancia y responsabilidad por parte del educando y educador. Particularmente el docente debe ser ingenioso y completo al buscar alternativas que llenen vacíos y ayuden a superar dificultades. Llevado de la mano de un proceso de creación de tareas que permiten al profesor caracterizar y abordar estas dificultades de esta forma el estudiante podrá desarrollarse en las distintas representaciones de la función cuadrática sin miedo de lograr un aprendizaje completo, integral y significativo.

La secuencia didáctica, articulada desde el análisis didáctico, permite que el concepto de función cuadrática sea abordado desde diferentes perspectivas como su representación tabular, algebraica, grafica, entre otras. Logrando una cobertura del concepto de manera que el estudiante se apropie de los desarrollos y aplicaciones.

Lo *novedoso* de la investigación se denota en el enfoque de la misma, la cual pretende lograr que el estudiante pueda mejorar el aprendizaje de este contenido matemático mediante una secuencia didáctica, de la cual se espera que aporte a la superación de la mayoría de las falencias encontradas en el aprendizaje de dicho contenido, permitiendo al alumno llegar a la deducción y construcción de conceptos y procesos matemáticos a partir del mejoramiento en sus dificultades y obstáculos, más aún cuando requieran enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana, ya que en este contenido hay multiplicidad de aplicaciones y representaciones donde se presentan dificultades. La

secuencia didáctica estará planeada teniendo en cuenta las múltiples dificultades y obstáculos caracterizados desarrollando paso a paso el conocimiento necesario para capacitar y crear conceptos y desarrollos matemáticos en torno a la función cuadrática, este aporte a las metodologías presentes destaca la utilidad y la existencia de nuevos elementos que permitan mejorar en contenidos matemáticos.

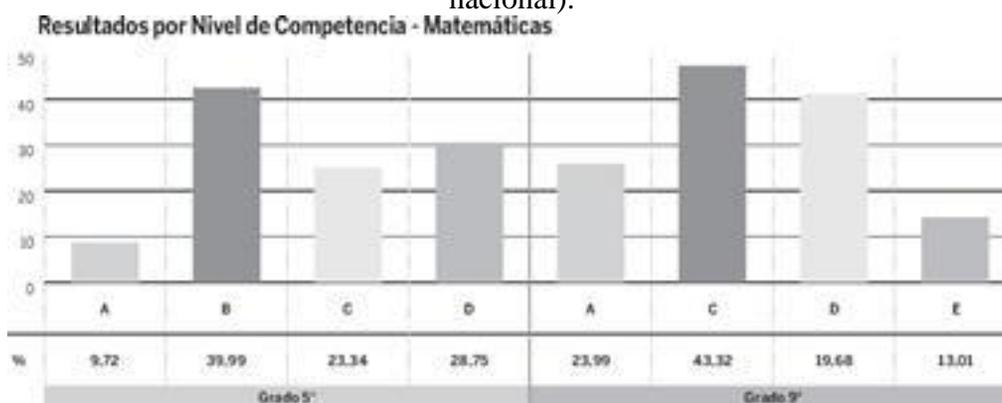
Es importante agregar que, la situación sanitaria en la que se encuentra la región ha permitido innovar y repensar en estructuras pedagógicas que refuercen al estudiante en procesos y contenidos que se reconocían cotidianamente como temas de amplia dificultad, gracias a la estructura digital en la que se plasma la secuencia didáctica es acogida y desarrollada por parte de los sujetos de estudio.

La categoría *ética* de la investigación parte de los principios y valores fundamentales, como la formación educativa propicia para cada estudiante, la construcción de comportamiento crítico que permita defender sus pensamientos e ideales en cuanto a este contenido matemático. El presente proyecto no vulnera los derechos de los sujetos de estudio, contrario a esto, contribuye a la formación analítica de estos.

Ahora bien, lo *relevante* hace evidencia en el proyecto en cuanto a la propuesta didáctica que pretende dar aporte a la educación matemática, las dificultades están presentes en cada paso que da el estudiante, por lo tanto, la finalidad es aportar al mejoramiento del aprendizaje del contenido y a la superación de estas falencias.

De acuerdo con el contexto colombiano, la prueba Saber en el área de Matemáticas evalúa tres competencias (comunicar, razonar y solucionar problemas), que los estudiantes deben demostrar en tres contextos del conocimiento matemático: uno relacionado con los números, las operaciones y transformaciones de estos, otro asociado a los problemas propios de la geometría y de la medición, y finalmente uno relacionado con los fundamentos de la estadística. Igualmente, esta prueba propone a los estudiantes preguntas con tres niveles de complejidad (B, C y D para grado 5° y C, D y E para grado 9°).

Ilustración 3: Resultados por nivel de competencias, matemáticas (grado 9° nivel nacional).



Fuente: Periódico Altablero, Ministerio de Educación Nacional.

<https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-107411.html>

Los resultados de la evaluación revelan que la mayoría de los estudiantes de grado quinto y noveno a nivel nacional, alrededor del 40% en cada caso, se concentran en el primer nivel de competencia (B para grado 5° y C para grado 9°), lo que implica que apenas son capaces de resolver problemas sencillos en los que se les proporciona la información necesaria para solucionarlos y se les sugieren alternativas de acción.

En relación con lo anterior, analizando los puntajes en el área de Matemáticas para los estudiantes de grado 11 de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui” fueron de 53,1; con solo tres estudiantes con promedios superiores a los 70 puntos, analizando estos resultados de manera superficial, se pone a consideración la existencia de dificultades en los desarrollos y planteamientos expuestos por los estudiantes en dicha prueba.

Siendo el mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático función cuadrática el enfoque principal de esta investigación, es de importancia mencionar que dicha investigación contribuirá a través del diseño de la secuencia didáctica a que el estudiante se prepare de manera adecuada en un proceso longitudinal, para cuando presenten sus respectivas pruebas del área de matemáticas, específicamente en el caso del pensamiento variacional, los resultados se eleven, puesto que la secuencia diseñada a través del análisis didáctico estructurada de manera reflexiva, generará en los estudiantes la capacidad de desarrollar y plasmar las diferentes representaciones de la función cuadrática.

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO TEORICO

A continuación, se presentan las categorías que contextualizan la investigación en términos teóricos: análisis didáctico, secuencia didáctica teniendo en cuenta esto, se describen las posibles aproximaciones a sus definiciones y constitución en la Educación Matemática.

#### 2.1 Análisis Didáctico

En el desarrollo del proceso formativo que facilita la adquisición de conocimientos, habilidades, valores y creencias reconocido como educación genera constantemente cuestiones de tipo social, cultural, político, económico, científico y tecnológico, los cuales juegan un papel fundamental en los procesos de enseñanza – aprendizaje. Del mismo modo, el ritmo de aprendizaje acelerado y el descubrimiento continuo de elementos educativos conlleva a la existencia de cuestiones, estas deben ser integradas a las prácticas pedagógicas, hecho que involucra al docente buscar estrategias y metodologías que estén acordes a los sucesos que los estudiantes viven en su día a día.

Para Ruiz (2009) es necesario que los docentes reflexionen sobre su propia práctica para llevar a cabo una planificación y una reflexión que se sustente en una fundamentación disciplinar objetiva, donde la reflexión es parte fundamental en la concreción del currículo en el aula. De lo anterior, la Educación Matemática provee de estructuras didácticas y metodológicas para llevar a cabo estas reflexiones. De este modo el análisis didáctico es considerado un potencial instrumento para el profesor en ejercicio, basado en la teoría de currículo, que le permite diseñar, poner en práctica y evaluar unidades didácticas en la educación matemática.

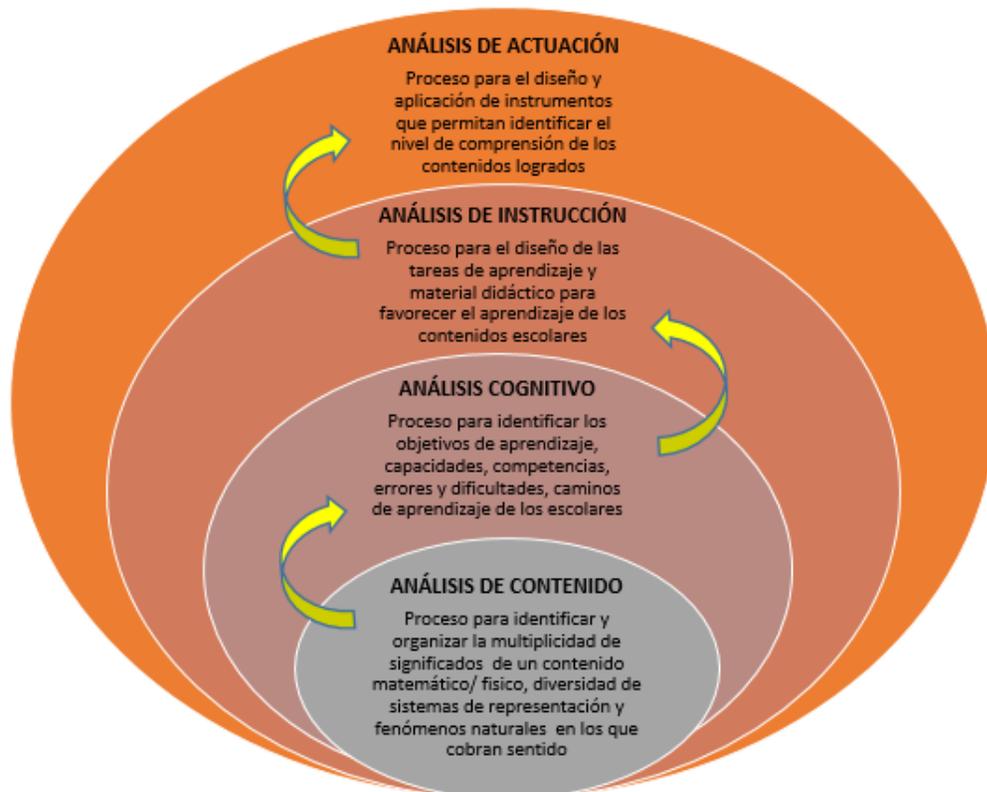
Así, el análisis didáctico se refiere a una parte del currículo que permite la identificación, organización y selección de significados de varios conceptos matemáticos con el fin de llevar un proceso acorde a las unidades didácticas (Gómez, 2002). Sigue un procedimiento cíclico que incluye cuatro subanálisis que atienden a los condicionantes del contexto e identifica las

actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto.

Según Gómez (2002), la relación entre las actividades que se espera que realice el profesor en ejercicio, el significado y los usos de los organizadores del currículo del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que están implicados, pone de manifiesto la complejidad del conocimiento didáctico. El conocimiento didáctico, como el conocimiento que se pone en juego y se desarrolla al realizar el análisis didáctico, es un conocimiento para la acción. El desarrollo de este conocimiento requiere que los profesores en ejercicio puedan transformar los organizadores del currículo que conforman el análisis didáctico en instrumentos.

En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis: el análisis de contenido, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto; el análisis cognitivo, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje; el análisis de instrucción, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y el análisis de actuación, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento (Gómez, 2002). Así como se evidencia en la Ilustración 4:

Ilustración 4: Estructura general del análisis didáctico



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se describe teóricamente el significado de cada uno de los análisis considerados durante la investigación: análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

### 2.1.1 Análisis de Contenido

En efecto, este análisis concierne a la dimensión conceptual de las matemáticas en el nivel de planificación local y proporciona herramientas para analizar los fenómenos y temas de las matemáticas escolares para identificar y organizar su multiplicidad de significados (Cañadas et al., 2018).

Para desarrollar una clase referente a un contenido de las matemáticas escolares, es importante profundizar en ciertas características matemáticas que son propias de las estructuras

matemáticas. El primer proceso es desarrollar una exploración del contenido matemático para reconocer sus diferentes significados. No se determina que la mayoría de los significados identificados a partir del análisis de contenido vayan a tratarse en el salón de clase, pero es significativo tener en cuenta esta información y se seleccione los que se consideren convenientes.

Según Aigner (1999) para establecer claridad en el contenido a explorar se describen las fuentes de información de donde es posible construir el significado de un contenido o tema en específico:

**A.** Inicialmente se dará por entendido que las fuentes de información son tomadas como **datos**, siendo estos el material con el que se desarrolla el análisis de contenido. Siguiendo a esto se debe describir:

- Qué datos van a ser analizados;
- Forma de definirlos;
- De qué lugar se han generado estos datos

**B. El contexto de los datos:** Para permitir deducciones previas con relación a la investigación en la que el sujeto está interesado, se debe tener un mínimo de conocimiento sobre el contexto de los datos. Para poder llegar a hacer inferencias válidas en relación con el proceso en que el investigador está interesado, éste debe tener algún conocimiento acerca del contexto de los datos.

“El contexto de los datos es construido por el investigador, y esta construcción está determinada por sus intereses y sus conocimientos, los cuales deben, por ello, ser expuestos con claridad” (Aigner, 1999, p. 8). El contexto utilizado para el análisis de los datos abarca todos los medios que encierran o cercan los datos: entre estos se tiene las condiciones antecedentes, otras intervinientes, unas terceras resultantes.

**C. El objetivo** del análisis de contenido enmarca lo que el investigador quiere lograr, debe ser lo más claro posible, ya que debe ser exhibido de tal manera que permita determinar si ha sido alcanzado o no y para que se posibilite la especificación del tipo de prueba que se necesita para validar los resultados.

Una de las metodologías de la técnica de Análisis de Contenido y elemento central de su estructura conceptual, es la inferencia. Se ha dicho que, en todo análisis de contenido, incluso en el más estrictamente descriptivo, se realiza alguna inferencia, por rudimentaria que ésta sea (Aigner, 1999, p. 10).

**D. Validez de los resultados** Este ítem permite reflejar la realidad que se ha pretendido analizar o captar. Según Aigner (1999) las inferencias o resultados deben ser validados acorde a una prueba de validez, y para mayor calidad en los resultados debe indicarse con anterioridad al análisis que pruebas de validez se utilizara, para ser más precisos que tipo de datos comprobaran la validez de los resultados o inferencias.

Según Gómez (2002) el análisis de contenido es abordado principalmente a través de tres categorías: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología.

#### **2.1.1.1 Estructura conceptual:**

Cañadas et al., (2018) indican que el concepto pedagógico estructura conceptual permite que el profesor responda a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema?
- ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos y esos procedimientos?

Los conceptos, procedimientos y relaciones son las ideas clave de este concepto pedagógico. Una forma de dar respuesta al listado de preguntas anterior es comenzar por identificar elementos del campo conceptual del tema matemático, al considerar tanto la estructura del propio concepto, como la estructura de la que el concepto forma parte (Cañadas et al., 2018) a partir de ellos, es posible detectar los procedimientos que se ejecutan sobre esos elementos del campo conceptual y las relaciones entre esos procedimientos. Por último, se pueden establecer las relaciones entre los conceptos y los procedimientos identificados.

## Clasificación cognitiva de los contenidos

Los contenidos de la matemática escolar son categorizados cognitivamente y es de consideración una distinción entre el campo conceptual y el procedimental (Rico, Luapiñez, Marín, & Gómez, 2008).

Campo conceptual: Rico, et al., (2008) establecen una estructura de subcategorías complementarias entre sí, distribuidas de la siguiente manera: (a) hechos, (b) conceptos y (c) estructuras conceptuales y las describen de la siguiente manera:

- Hechos: Representan un nivel básico de complejidad, pues son los elementos de información que registran acontecimientos, se caracterizan cuatro tipos de hechos: los términos caracterizados por enlistar los elementos verbales importantes que componen el acontecimiento; las notaciones enmarcan los elementos simbólicos y signos presentes en el acontecimiento; los convenios se establecen como los procesos y desarrollos presentes en el acontecimiento y por último los resultados (teoremas) caracterizados por identificar los productos presentes en el acontecimiento.
- Conceptos: Constituyen un nivel mediano de complejidad, estos se establecen como objetos matemáticos.
- Estructuras: Determinan un nivel alto de complejidad debido a que corresponden a la respectiva relación entre conceptos, pues denota las conexiones y relaciones bilaterales de un ramaje de conceptos.

Campo procedimental: El campo procedimental incluye los procedimientos y modos de actuación con respecto al conocimiento. Distingue entre (a) destrezas, (b) razonamientos y (c) estrategias y las describe de la siguiente manera:

- Destrezas: Suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. Se ejecutan sobre los hechos y se llevan a

cabo por ejecución de una secuencia de reglas, manipulación de símbolos o transformaciones gráficas.

- Razonamientos. Suponen un conocimiento de los conceptos y de su extensión, lo que permite el procesamiento secuenciado de ideas razonadas. Es la capacidad de expresión y comunicación de los alumnos. Se ejecutan sobre los conceptos. Se pueden clasificar como deductivos, inductivos, analógicos y figurativos.
- Estrategias: Son aquellos procedimientos que permiten obtener una conclusión mediante el uso de las relaciones, conceptos y diversidad de sistemas de representación. Se ejecutan sobre las estructuras.

### **2.1.1.2 Sistemas de representación:**

Los objetos matemáticos, ideales por naturaleza, no pueden ser identificados de manera directa por los sentidos, de esta necesidad de interacción se establecen representaciones que facilitan el poder mediar con estos objetos. En el campo de la educación matemática y en posturas como la de Duval (2004) el concepto de representación se postula como la señal externa que expone y denota un concepto matemático, de igual forma como signo o marca que los sujetos utilizan para pensar la matemática. De cierta forma los conceptos matemáticos no son objetos reales, consecuencia de esto es necesario recurrir a distintas formas que permitan el estudio de estas, destacando características que permitan representar estas formas de manera entendible para el sujeto.

La particularidad de los objetos matemáticos, carentes de una existencia física o material, da lugar a que sólo sea posible su conceptualización y alguna actividad sobre ellos a través de sus representaciones semióticas y las actividades de conversión entre ellas (Duval, 2004), a partir de esto es posible agregar que las representaciones semióticas responden a todos los signos o gráficos que permiten a un objeto abordar e interactuar con el conocimiento matemático. En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado.

Ahora bien, es importante tomar las teorías de registro de representación semiótica de Duval (2004), establecidas por medio de tres desarrollos cognitivos aplicable en esa, descritos de la siguiente forma:

- 1) **La formación** de una representación identificable como la representación de un registro dado.
- 2) **El tratamiento** de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada, el tratamiento es una transformación interna a un registro.
- 3) **La conversión** de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial (p. 177-178).

Los ideales de Kaput (1992) concuerda con los planteamientos inicialmente descritos, este describe un sistema de representación como “un sistema de reglas para (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523), en donde las reglas a las que hace referencia Kaput (1992) determina (a) cómo crear un signo que pertenezca al sistema, (b) cómo reconocer si un signo dado pertenece a él y (c) cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos.

En el análisis de contenido, los sistemas de representación como concepto pedagógico permiten dar respuestas a las siguientes cuestiones.

- ¿Qué representaciones hay asociadas al tema?
- ¿Qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones?

Para dar respuestas a estas preguntas, el profesor puede:

- Determinar los diferentes sistemas de representación en los que se puede representar.
- Identificar las relaciones entre esos sistemas de representación (que, en algunos casos, serán procedimientos, y que, por tanto, se relacionan estrechamente con el campo procedimental de la estructura conceptual).

Aunque los sistemas de representación permiten identificar los modos en que el concepto se presenta (Gómez, 2002), se debe tener bastante tacto a la hora de identificar los sistemas de representación de un tema desarrollado por el profesor en ejercicio, ya que cualquier manera de enunciar un concepto o procedimiento no es considerada un sistema de representación. En este orden de ideas Gómez (2002) señala que los sistemas de representación son considerados como las diferentes maneras en las que se puede representar un contenido y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos. De igual modo, clasifica los principales sistemas de representación de la siguiente manera:

- Representación Simbólica: Representaciones que utilizan símbolos del abecedario y símbolos matemáticos para expresar los distintos tipos de conocimiento conceptual o procedimental.
- Representaciones algebraicas: Aplicaciones de las propiedades algebraicas.
- Representación verbal: Expresión de un contenido a partir de convenios de lectura y lenguaje desde la expresión oral y escrita.
- Representación gráfica: Expresa un contenido matemático mediante la creación de un dibujo, formado por líneas, símbolos y superficies que permite observar diferentes propiedades de dicho contenido.
- Representación tabular: Permite visualizar la relación entre las variables involucradas.

Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval (2004) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. En este sentido y teniendo en cuenta los registros de representación semiótica, el nivel de conceptualización se analiza con base a las articulaciones de las diferentes representaciones de este. Es importante establecer que las transformaciones, conversiones, tratamientos y demás procesos que conlleven al estudiante migrar el concepto de un sistema de representación a otro depende de un amplio trabajo de exploración, teniendo en cuenta los sistemas de representación expuestos anteriormente, el sujeto de estudio debe someterse a un trabajo de observación de las variaciones sistemáticas que fortalecen el aprendizaje del concepto.

### 2.1.1.3 Fenomenología

Representa la tercera categoría que permite organizar los significados de un concepto en el análisis de contenido, el considerar la fenomenología como parte primordial del significado de un concepto se desarrolla de una proyección funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto (Gómez, 2002).

En Educación Matemática, la noción de fenomenología adquirió una particular relevancia con motivo de los trabajos de Freudenthal (2001) quien establece que la fenomenología “consiste en describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad” (p. 9).

En el análisis fenomenológico, se pueden dar dos situaciones: (a) que se haya identificado un tema desde un comienzo, en cuyo caso se deberán identificar los fenómenos que dan sentido al tema, las subestructuras, los contextos fenomenológicos y las situaciones según PISA; o (b) que tengamos un fenómeno dentro de las matemáticas escolares. En tal caso, se deberá identificar que otros fenómenos comparten características estructurales con el seleccionado y determinar la subestructura matemática que corresponde dentro de la estructura conceptual (Cañadas et al., 2018).

Existe una variedad de países en los cuales se encuentra Colombia, que están optando por un desarrollo en la formación matemática en los estudiantes que capaciten sus competencias para enunciar y emprender desarrollos a problemas expuestos en medios no matemáticos y dar respuesta usando herramientas matemáticas. Para ello, los profesores deben “diseñar, analizar y seleccionar tareas que necesiten el uso de conceptos y procedimientos de las matemáticas escolares como herramientas para resolver los problemas que se presentan en diferentes contextos y situaciones” (Cañadas et al., 2018, p. 78).

Según PISA (2012) La fenomenología, como concepto pedagógico, permite dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué fenómenos dan sentido a mi tema?
- ¿Qué subestructuras permiten organizar los fenómenos que dan sentido a mi tema?
- ¿Para qué se utiliza mi tema? ¿A qué problemas da respuesta? (contextos Fenomenológicos).
- ¿Qué características comparten los fenómenos que dan sentido al tema?
- ¿Qué subestructuras se relacionan con qué contextos fenomenológicos?
- (Características estructurales y relación entre subestructuras y contextos fenomenológicos).
- ¿En qué situaciones está presente mi tema?

## **Fenómenos**

Teniendo en cuenta la identificación de un tema previo, como se indica en la primera categoría en la que podemos encontrar la fenomenología, determinamos como primer paso la caracterización de los fenómenos adecuados para dicho tema. La caracterización se desarrolla enunciando una serie de fenómenos a manera de lista, teniendo en cuenta los usos del tema y los problemas en los que se utiliza este. Estos fenómenos, a través del análisis fenomenológico, se podrán organizar según diferentes criterios: (a) contextos fenomenológicos, (b) subestructuras y (c) contextos.

## **Contextos fenomenológicos**

Son entendidos como “el modo en que se usan los conceptos en una o varias situaciones” (Rico, 2007, p. 11), en este sentido las situaciones en las que se estructuran los fenómenos son consideradas en el establecimiento del análisis fenomenológico como una característica estructural.

Desde la perspectiva empírica es de considerarse el análisis fenomenológico para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Para qué se usa el tema matemático? y
- ¿A qué problemas da respuesta el tema?

Según Gómez (2002) los fenómenos se categorizan de acuerdo con sus características estructurales, o bien llamadas características del fenómeno que sean importantes desde la perspectiva matemática, y esas categorías configuran los contextos fenomenológicos.

Resumiendo, con la identificación de contextos fenomenológicos se espera que los profesores en ejercicio puedan organizar los distintos fenómenos ligados por medio de contextos fenomenológicos de acuerdo con las características estructurales que tienen en común.

### **Subestructuras**

Al tener un fenómeno establecido dentro de las matemáticas escolares, el profesor puede proceder a la identificación de las subestructuras. Dichas subestructuras parten de considerar los elementos de la estructura conceptual del tema, según Cañadas et al., (2018) una subestructura es una “porción” de la estructura conceptual que a los ojos del profesor en ejercicio tenga identidad propia. En algunos casos, estas subestructuras surgen de clasificaciones por tipos, por ejemplo, los principales tipos de simetrías o los tipos de funciones o ecuaciones.

Teniendo en cuenta lo anterior mencionado, las subestructuras se pueden identificar a partir de la estructura conceptual a manera de exploración y verificar si algunas de estas subestructuras organizan grupos de fenómenos “Una subestructura puede ser una porción de la estructura conceptual que, a los ojos del profesor en ejercicio, tenga identidad propia” (Cañadas et al., p. 37). En algunos casos estas subestructuras surgen de clasificaciones por tipos, en otros casos puede darse por propiedades de los conceptos involucrados en el tema, lo importante en estos casos es que la estrategia de identificación resulte efectiva ya que de esta manera permitirá avanzar en la reflexión sobre cuales fenómenos están ligados al tema y de qué manera este tema organiza esos fenómenos.

### **Contextos PISA 2012 y situaciones**

Cuando se plantea y se escogen tareas para el desarrollo de una práctica, los profesores en ejercicio deben proyectar los objetivos de estas tareas, en ocasiones la finalidad es motivar al

estudiante con tareas contextualizadas en su diario vivir, en otras se puede relacionar la matemática con otras áreas fundamentales del saber, en estos casos es importante agrupar los fenómenos con la clasificación denominada: situación. “En la prueba PISA del 2012 se abandona el concepto de situación para hablar exclusivamente de contextos, entendido como aquel aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas” (MEN, 2006, p. 23).

Para cerrar esta categoría es de importancia mencionar como están organizados según Gómez (2002) los contenidos matemáticos que utilizamos para las diferentes prácticas, ya que están categorizados y organizados dependiendo al tipo de contenido que deseamos aplicar. Siendo explícitos el profesor en ejercicio puede disponer, dependiendo de sus objetivos, de las tareas que proyecte plantear a los estudiantes, característicamente a que situación está ligado el fenómeno presentado.

### **2.1.2 Análisis Cognitivo**

A diferencia del anterior análisis (análisis de contenido) que se enfoca en el tema matemático a enseñar, el presente análisis se centra en el aprendizaje del estudiante, la proyección del profesor en ejercicio respecto a lo que quiere que el estudiante aprenda, además de los errores, dificultades y obstáculos que surjan de dicho proceso, González & Gómez (2014) caracterizan plantean que:

La visión funcional de las matemáticas y la posición constructivista del aprendizaje deben concretarse cuando abordamos la dimensión cognitiva del currículo en el nivel de planificación del profesor; es decir, cuando nos centramos en la planificación de un tema matemático concreto. El análisis cognitivo guía esa concreción, ya que nos permite hacer una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el tema matemático en cuestión y sobre sus previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje (p.1).

De este modo, al desarrollar la programación de un contenido matemático, el profesor en ejercicio es guiado por el análisis cognitivo, de manera que la pre-medición de cada objeto de estudio sea programada con anterioridad por el docente en ejercicio; en otras palabras, tener previsto sobre lo que el estudiante va a aprender y en lo que hay que enfatizar (Lupiáñez, Rico,

Gómez, & Marín, 2002). Este debe tener entre sus preocupaciones principales el hecho de que sus estudiantes puedan entender la estructura que está programando para ser aprendida, complemento a esto, el docente debe prever las capacidades que el estudiante desarrollará a raíz de este aprendizaje, que errores pueden cometer y que dificultades se presentan en dicha práctica.

Según González & Gómez (2014) el análisis cognitivo se basa en categorizar las expectativas de aprendizaje del tema respecto a su operatividad y sean de orientación para el diseño de tareas en el salón de clase. Para ello, plantean distintas herramientas que permiten expresar las hipótesis del profesor sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas. Estas herramientas tendrán en cuenta las capacidades que activen los estudiantes al resolver problemas, las dificultades y los errores que surjan, y los elementos afectivos que intervengan en el proceso de aprendizaje.

### **Expectativas de aprendizaje**

El profesor debe llevar el nivel de operatividad de su planificación en torno al desarrollo de las competencias matemáticas del estudiante, en sí, que el estudiante pueda resolver problemas en contexto, para ellos debe desarrollarse en expectativas de aprendizaje que se desglosan en tres niveles de concreción. Según González & Gómez (2014) el nivel superior que hace referencia a las expectativas que se logran después de un periodo formativo amplio. Son expectativas transversales y comunes en la mayoría de los temas matemáticos, el nivel medio se desarrolla entre cada unidad didáctica de matemáticas y el nivel inferior que está asociado a los conocimientos más básicos y a los desarrollos más periódicos que el estudiante tiene que asimilar a lo largo de cada unidad didáctica.

### **Expectativas de Aprendizaje a Nivel superior: Procesos matemáticos y capacidades fundamentales**

Según González & Gómez (2014), la forma ideal para enfrentar una situación contextual se describe en las siguientes Procesos matemáticos:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.
- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.
- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

Los procesos matemáticos anteriormente mencionados se relacionan de cierta forma con los estándares básicos de competencia, teniendo en cuenta lo postulado por Gómez (2002) definiendo las competencias como “la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en las situaciones en las que ellas pueden jugar un papel” (p. 90). Cuando se aplican estos procesos matemáticos, se desarrollan las actuaciones cognitivas consideradas primordiales en la matemática, denominadas por PISA 2012 como capacidades fundamentales, descritas como: Pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, usar herramientas y recursos. En este sentido, la expectativa consiste en desarrollar en los sujetos de estudio las capacidades fundamentales o competencias matemáticas predispuestas en los procesos matemáticos.

Los procesos anteriormente mencionados son asumidos en las expectativas de aprendizaje a nivel superior.

### **Expectativas de Aprendizaje a Nivel medio: objetivos de aprendizaje.**

En el nivel medio se catalogan las expectativas de aprendizaje que abordan las siguientes caracterizaciones:

- Están vinculadas a un nivel educativo concreto;
- Están asociadas a un contenido matemático concreto; y

- Expresan una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento involucrados en la estructura conceptual.

En este caso las expectativas de aprendizaje se interpretan como objetivos de un tema de matemáticas, estos objetivos concuerdan con las relaciones que existen entre los distintos sistemas de representación que se den y a uno de los fenómenos organizados de este contenido. El alcance de un objetivo se concreta cuando le asociamos conjuntos de tareas matemáticas. Así, el profesor puede asociar al objetivo el conjunto de tareas que, desde su punto de vista, sirven para demostrar que quien resuelve esas tareas ha conseguido desarrollar el objetivo.

### **Expectativas de Aprendizaje a Nivel inferior: capacidades.**

El concepto de capacidades es asociado en este caso a la actuación del estudiante, cuando este interactúa y desarrolla procedimientos rutinarios de contenidos matemáticos en el medio que lo rodea, de cierta forma estos que atienden a las expectativas de aprendizaje de más bajo nivel cognitivo. “Así, definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático” (González & Gómez, 2014, p. 9), por lo que es importante proporcionar claridad al enunciar las capacidades de un estudiante, debido a que estas se presentan mediante conductas observables, del enunciar de manera correcta las capacidades del estudiante resulta el punto de partida adecuado, de igual forma, los datos necesarios para poner en juego dichas capacidades.

Una sola capacidad puede estar relacionada a múltiples objetivos, visto de otra forma, es de utilidad fijar un objetivo y a partir de esto generar una lista de capacidades, posterior a esto es necesario proyectar los procedimientos rutinarios que el estudiante necesita saber hacer, esto concreta el hecho de haber alcanzado dicho objetivo de aprendizaje. Para facilidad de la presente investigación, se tendrán en cuenta las capacidades relacionadas a un objetivo de aprendizaje. De igual forma, al mencionar procesos rutinarios, la documentación establecida en el análisis de contenido relacionada con estructuras procedimentales cuenta como como fuente de información primordial para establecer las capacidades relacionadas a un objetivo.

## **Tareas relacionadas con los objetivos de aprendizaje**

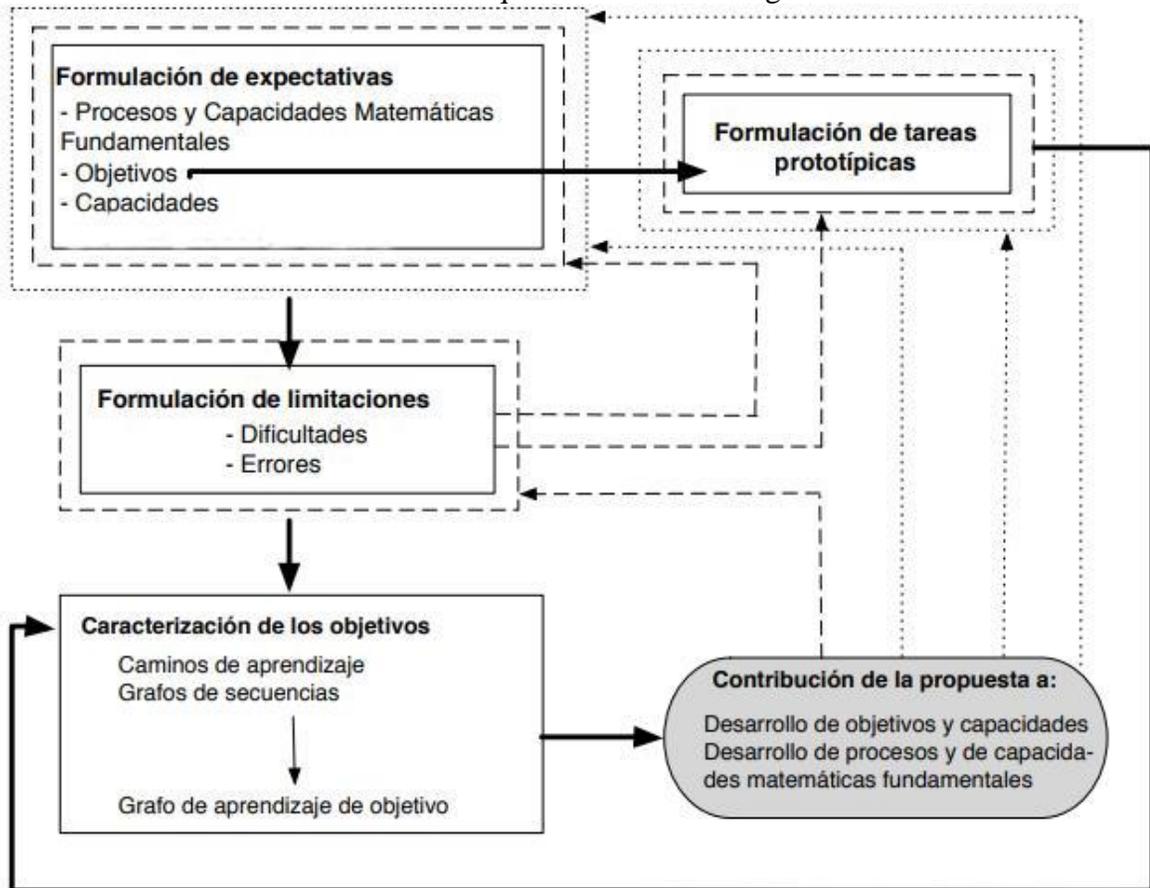
En el momento de la selección de tareas es necesario tener como prioridad los objetivos de aprendizaje, sin embargo, es normal que estos sean definidos utilizando frases cortas cuyo significado se supone evidente sin constatar la dificultad de dichas formulaciones (Luapiñez et al., 2002). Continuo a las frases cortas se debe agregar información de manera que describa sus máximos, esta información debe también aportar de forma detallada el modo en el que el estudiante puede alcanzar dichos objetivos. Caracterizando las tareas proyectadas para el salón de clases, es posible definir las de la siguiente manera:

**Tareas prototípicas de un objetivo:** Definidas como las tareas matemáticas insignias del objetivo. Específicamente son aquellas tareas concretas que al ser aplicadas por el docente y desarrolladas satisfactoriamente por los estudiantes, se declara que los estudiantes lograron los objetivos propuestos.

**Tareas de aprendizaje:** Estas tareas se desarrollan con el fin de que el estudiante con dificultades se supere así mismo y logre cumplir con el objetivo propuesto, siendo estas tareas diseñadas bajo las expectativas de aprendizaje iniciales.

**Tareas de evaluación:** Su propósito principal es evaluar el logro del objetivo, probablemente en distintas secciones de su respectivo desarrollo.

Ilustración 5: Esquema del análisis cognitivo.



Fuente: González & Gómez, 2014, p. 48.

Las posturas de González & Gómez (2014) describen una adaptación a contextos sociales, institucionales y académicos de la siguiente manera: al redactar objetivos de aprendizaje, estos deben ser analizados desde el punto social, institucional y académico ya que el análisis didáctico va a ser aplicado a uno de estos contextos, para esto el profesor en ejercicio debe hacerse una serie de preguntas que en el desarrollo de la caracterización de los objetivos de aprendizaje den respuesta a estas, las preguntas son las siguientes:

- ¿Los objetivos tienen en cuenta las características de la institución en la que se va a implementar la unidad didáctica?
- ¿Los objetivos se adaptan a las características sociales, personales y académicas de los estudiantes a los que se dirige la unidad didáctica?
- ¿Se ha hecho explícito el nivel educativo en el que se va a implementar la unidad didáctica?

- ¿Los objetivos tienen en cuenta ese nivel educativo? (González & Gómez, 2014)

### **2.1.2.1 Dificultades de aprendizaje y errores.**

Es trabajo del análisis cognitivo contribuir a la solución de los limitantes del aprendizaje, que de algún modo pueden deformar, obstruir o detener el ya mencionado aprendizaje de los estudiantes. Los razonamientos positivos y negativos de las expectativas de aprendizaje se complementan, en términos metafóricos el análisis cognitivo se encarga de la creación de la expectativa de lo que los estudiantes sean capaces de hacer y por otro lado se encarga de los limitantes que puedan surgir en el proceso de aprendizaje.

En concreto, existen multiplicidad de factores que interceden en la caracterización de las limitaciones de aprendizaje, algunas se entrelazan con talentos sociales como el ambiente familiar o el nivel socio cultural, otras muy específicas infieren en trastornos cognitivos que llegan a ser perjuicios directos al aprendizaje básico y fundamental del estudiante. Es importante mencionar que la perspectiva a investigar se encamina a las dificultades y errores relacionados con temas matemáticos particulares.

Según Rico (1997) las dificultades y errores son dos ítems relacionados con las limitaciones en el aprendizaje, que de cierto modo es posible encontrar en todos los campos del saber, incluso si se da un enfoque estrictamente matemático a su planteamiento, surgen algunas características que son transversales de ambas y que trascienden al campo general del aprendizaje.

### **2.1.2.2 Dificultades de aprendizaje en matemáticas**

Según González & Gómez (2014) una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que imposibilita u obstaculiza el logro de los objetivos de aprendizaje establecidos, considerado de igual forma como un término genérico, que establece un grupo heterogéneo de perturbaciones que se presentan por medio de dificultades constantes en la apropiación y utilización de la escucha, la palabra, la lectura, la escritura, del razonamiento o de las matemáticas, además de las habilidades sociales. el procedimiento de importancia relacionado con estas dificultades es identificarlas, que

acciones o elementos son incidentes en su aparición y por último como se pueden superar. Para fines de la presente investigación, es necesario centrar la mirada a las dificultades relacionadas con el área de matemática. Socas (1997) da una aproximación al orden de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas estructuradas en 5 categorías dependientes del elemento que las origine.

La primera asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, originadas de la propia naturaleza del concepto, su representación y el lenguaje usado en estos; la segunda responde a los procesos propios del pensamiento matemático, en este caso la naturaleza lógica de las matemáticas genera las dificultades, las explicaciones, argumentos y demostraciones no son abordados con determinación; la tercera corresponde a los procesos de enseñanza, siendo estas producto de la organización curricular, estilos de enseñanza y modos de organización; la cuarta representa el desarrollo cognitivo de los alumnos, para esta se abordan teorías de aprendizaje relacionadas con el desarrollo intelectual que describen y caracterizan los tipos de razonamientos y por último la quinta categoría relacionada con las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática, llevando a que los estudiantes desarrollen estados de ansiedad o infravaloración personal.

### **2.1.2.3 El error en el aprendizaje de las matemáticas**

El error es el elemento característico y perceptible de una dificultad, estos se hacen visibles en el comportamiento de los estudiantes, en sus fallas y equivocaciones en las cuestiones y procesos específicos que propone el profesor en ejercicio.

“El error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y tareas concretas que les demanda el profesor” (González y Gómez, 2014, p. 141). En consecuencia, muestra que gran proporción de los investigadores imputan a los errores las siguientes características:

- Son sistemáticos, no se producen por azar, manifiestan un proceso mental subyacente incompleto o equivocado que el sujeto utiliza de modo consistente y con confianza.
- Se manifiestan de manera sorprendente: por lo general se mantienen ocultos durante un tiempo y sólo surgen ante determinadas tareas.

- Son persistentes debido a que pueden afectar a una parte amplia de conocimiento adquirido que previamente ha tenido validez en otros contextos.
- Ignoran el significado, de modo que respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan.

Las diferentes dificultades y errores deben estar a disposición a la hora de establecer los objetivos de un contenido matemático. Si se pone en consideración que las limitaciones de aprendizaje son la cara negativa de las expectativas, es posible incidir en las expectativas de aprendizaje la proyección de apoyar a los estudiantes en su proceso de superación de dificultades y errores caracterizados.

### **2.1.3 Análisis de Instrucción**

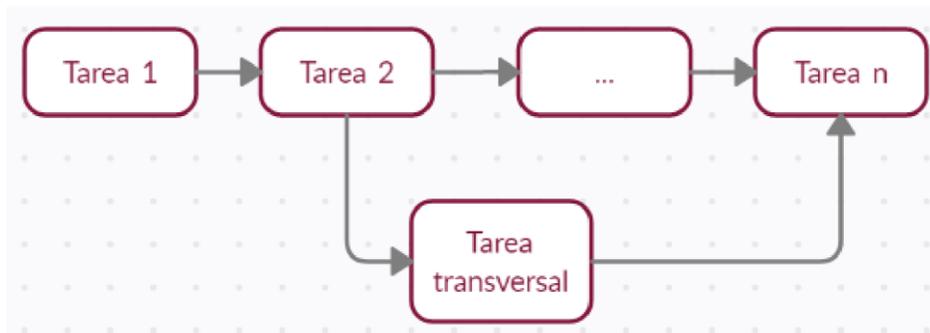
La visión de alfabetización matemática soportada en el marco conceptual de PISA (2012) permite entender las matemáticas como una herramienta con la que el estudiante puede abordar problemas de la vida cotidiana en múltiples contextos, teniendo en cuenta esta postura funcional de las matemáticas es posible asumir que los estudiantes aprenden matemática cuando, al afrontar tareas complicadas relacionadas con problemas contextualizados, utilizan de manera activa los conocimientos y destrezas que poseen. A partir de esta consideración del aprendizaje de las matemáticas es posible establecer un acercamiento a la enseñanza de las mismas, el profesor en ejercicio ha establecido unas expectativas, de igual forma ha identificado unas dificultades y limitaciones, ahora, el objetivo del profesor es proporcionar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas y superen las limitaciones.

El profesor en ejercicio debe brindar estas oportunidades de aprendizaje a los estudiantes por medio de las tareas, estas llevan al estudiante a utilizar de manera activa los conocimientos y destrezas que tienen disponibles, de igual forma, debe reconocer los posibles errores en los que puede incurrir el estudiante. Según González & Gómez (2014) los términos “tarea” y “tarea matemática escolar” son utilizados para referirse a tareas de aprendizaje, ahondando en que la tarea matemática escolar es considerada amplia, estructurada con un contenido matemático y un

propósito de aprendizaje. Así mismo, mencionan que una tarea incluye su formulación, elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupación y temporalidad.

Los desarrollos del análisis de instrucción son producto de la información obtenida del análisis de contenido y el análisis cognitivo, la construcción de la propuesta establecida por el profesor en ejercicio se configura a partir de técnicas de búsqueda, diseño, descripción, análisis y modificación de las tareas que permitan la enseñanza del contenido matemático. Los procedimientos que estructuran el análisis de instrucción se sustentan en dos ideas principales: tarea y secuencia de tareas, teniendo en cuenta que ya se dio una breve descripción de los componentes de una tarea, es posible establecer lo que se considera una secuencia de tareas. Según González & Gómez (2014) una secuencia de tareas es una ordenación de estas, en algunas ocasiones pueden incluir una o más tareas transversales que los estudiantes afrontan simultáneamente con otras tareas de la secuencia.

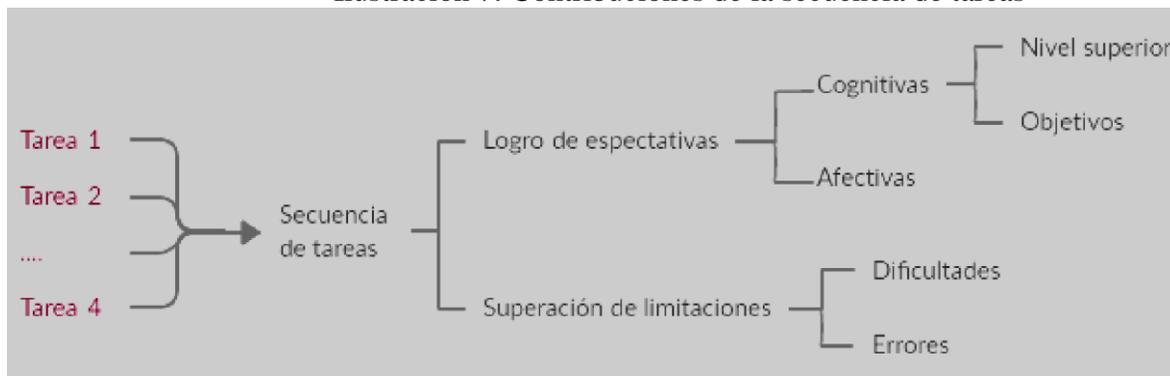
Ilustración 6: Secuencia de tareas



Fuente: Elaboración propia

A partir del establecimiento de las proyecciones y objetivos de aprendizaje, las posibles dificultades y errores, el análisis de instrucción concede objetos conceptuales y técnicas con el fin de analizar, diseñar y en algún momento modificar las respectivas secuencias de tareas de tal forma que aporten al logro de las propuestas y a superar las posibles limitaciones encontradas.

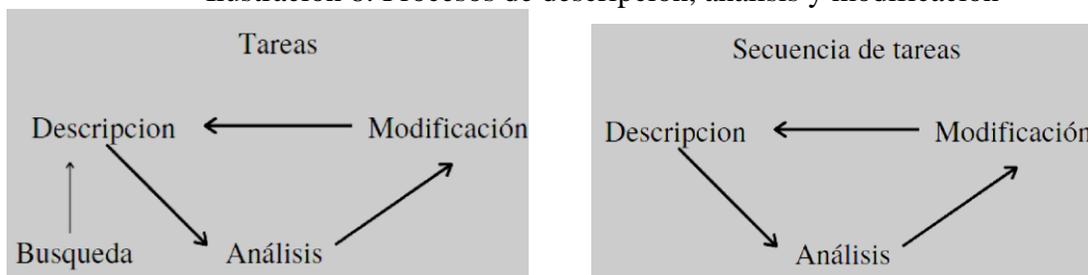
Ilustración 7: Contribuciones de la secuencia de tareas



Fuente: Elaboración propia

Es importante que el profesor en ejercicio tenga capacidad de ejecutar herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la secuencia de tareas y evidenciar las condiciones establecidas en la Ilustración 7. Teniendo en cuenta la postura de González & Gómez (2014), el profesor en ejercicio debe buscar, describir, analizar, modificar y seleccionar las tareas que estructuran las secuencias de tareas de igual forma que posibilite el poder describir, analizar y modificar la secuencia de tareas.

Ilustración 8: Procesos de descripción, análisis y modificación



Fuente: Elaboración propia

Como factor inicial, la descripción de la secuencia de tareas radica en establecer el orden en el que las tareas se establecen

Es de importancia aclarar que no se tendrán en cuenta los desarrollos del análisis de actuación, debido a que la secuencia didáctica diseñada está estructurada para ser validada bajo

juicio de expertos, para tal caso no se requiere su aplicación y diagnóstico, por lo cual el enfoque teórico se establece en el margen del análisis de contenido, cognitivo e instrucción.

## **2.2 Análisis Didáctico de la Función Cuadrática**

A fin de buscar e implementar una estructura didáctica que permitiera reflexionar, acerca de las planificaciones y descentralizar las practicas tradicionalistas de enseñanza aprendizaje, se aborda el análisis didáctico, atendiendo a la identificación, organización y selección de las actividades propicias que un profesor en ejercicio debería realizar para la enseñanza de un contenido matemático concreto, que para este caso en específico es la función cuadrática. No obstante, el análisis de actuación, estructura perteneciente al análisis didáctico, no será desarrollado debido a los propósitos de investigación inicialmente establecidos, el respectivo análisis didáctico del objeto de estudio función cuadrática se enfocará en el desarrollo del análisis de contenido y cognitivo del anterior mencionado objeto de estudio.

Para dar inicio al desarrollo del análisis didáctico correspondiente al objeto de estudio función cuadrática, se establecen las diferentes descripciones correspondientes a las estructuras que la componen, ya que como se ha descrito anteriormente el análisis de contenido como el análisis cognitivo se desglosan en diferentes categorías, como la estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología para el caso del análisis de contenido y las expectativas de aprendizaje, caminos de aprendizaje y dificultades y errores de aprendizaje para el caso del análisis cognitivo. Teniendo en cuenta los planteamientos anteriormente mencionados se presentan los desarrollos de la siguiente manera:

### **2.2.1 Análisis de Contenido Asociado a la Función Cuadrática**

En la presente sección se pretende exponer el análisis de contenido asociado al objeto de estudio función cuadrática, teniendo en cuenta la estructura teórica anteriormente planteada compuesta por tres categorías: la estructura conceptual, conformada por el campo conceptual y el campo procedimental, los sistemas de representación donde se sintetizan las diferentes maneras en

las que se puede presentar el objeto de estudio función cuadrática, por último, la fenomenología, donde se presentan variedad de espacios donde tiene uso la función cuadrática.

### **Descripción de las categorías que componen el análisis de contenido**

Para desarrollar las bases estructuradas en el análisis de contenido, se da inicialmente la descripción y las pautas a seguir para la escogencia de los datos que suministran la información articulada en las categorías que componen el análisis de contenido.

Para poder establecer los datos que serán soporte del desarrollo del análisis de contenido, se considera configurarlos en 3 categorías:

1. Profesores
  - El conocimiento propio de los profesores de matemática
  
2. Textos
  - Libros de texto
  - Literatura en Educación Matemática (Básica)
  - Libros de texto de matemática avanzada
  
3. Documentos de Investigación
  - Tesis de Maestría
  - Tesis Doctorales
  - Internet (Google constituye una primera aproximación para identificar fuentes de información en la red, o repositorios digitales como Funes: [funes.uniandes.edu.co](http://funes.uniandes.edu.co)).

En un principio se considera la participación de los profesores Jhon Sebastián Gómez Ortiz, Magíster en Educación e Investigación Universitaria, además de la profesora Yudy Andrea niño, docente nombrada en el municipio de Garzón (Huila), los cuales comparten de manera cordial sus conocimientos para el desarrollo de la presente investigación, es importante mencionar que se utilizan los nombres verdaderos de los docentes anteriormente mencionados con la autorización de

los mismos, únicamente con fines académicos. En la categoría correspondiente a textos se seleccionaron los siguientes títulos:

- Hipertexto: matemática 9, editorial Santillana, 2017.
- Nuevas matemáticas: Álgebra, geometría y estadística, editorial Santillana, 2016.
- Matemáticas: Espiral 9 editorial Norma, 2005.
- Matemáticas: Delta 9 editorial Norma, 2009.
- Precálculo: Matemática para el cálculo de Stewart, Redlin y Watson, 2012.
- Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas de Stewart, 2013.

Por último, pero no menos importante se encuentran los documentos de investigación e información complementaria considerada:

- Funciones Reales de Variable Real (Astorga & Rodríguez, 1984)
- Incidencia de las mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática (Córtes, 2012)
- Enseñanza de la función cuadrática (Oaxaca, Carmen, & Bravo, 2015)
- Comprensión de función cuadrática y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de primer ciclo de la universidad peruana de ciencias aplicadas, sede san miguel (Garay, 2019).

Para dar certeza al proceso de selección de datos se tuvieron en cuenta aspectos importantes descritos de la siguiente manera: inicialmente los profesores que participaron en el proceso son docentes del área de matemáticas, estos ostentan el título profesional de Licenciado en matemática, de igual forma se han desempeñado como docentes titulares del grado noveno, expresan haber desarrollado sus programaciones en torno a los estándares básicos de competencia en matemáticas del MEN.

Para la selección de los datos se hace indispensable que los docentes tuvieran en su experiencia el haber impartido noveno grado, ya que la investigación se encuentra relacionada con

este nivel de formación académica, además de esto que en este grado hayan desarrollado a cabalidad la enseñanza del contenido función cuadrática.

Para el caso de los textos de básica secundaria, se escogieron los de más reciente edición, y que afirman estar acorde con el currículo de Matemática que se encuentra en vigor, aunque no se han hecho estudios que verifiquen la veracidad de esta información, complemento a esto, para el caso de los textos universitarios se utilizaron sugerencias expuestas por los docentes del programa de Licenciatura en Matemática, de la Universidad Sur colombiana de Neiva (Huila - Colombia), los cuales hacen parte de la bibliografía de los cursos donde se aborda el objeto de estudio función cuadrática, y por último las investigaciones a nivel de posgrado, relacionadas con los procesos de enseñanza aprendizaje del objeto de estudio función cuadrática.

Teniendo en cuenta el fin del análisis de contenido es posible establecer que el objetivo de este se centra en postular el significado de la función cuadrática desde la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología correspondiente a esta. Este significado debe ser coherente y preciso, perceptible para los estudiantes y estructurado de tal forma que permita abarcar gran parte del concepto.

Los datos que permiten el desarrollo del presente análisis se describen a continuación teniendo en cuenta cada detalle que compone cada uno de estos, inicialmente la información proporcionada por los profesores fue transcrita puntualmente, representada de la siguiente manera:

**Profesora Yudy Niño:**

“Es una relación entre dos conjuntos, esta puede establecerse mediante una ecuación matemática de la forma  $ax^2 + bx + c$  donde  $a$  siempre tiene que ser un número real distinto de cero y la gráfica para esta siempre será una parábola”

**Profesor Jhon Sebastián Gómez**

“Función cuadrática: la dividimos en dos partes, función y cuadrática. Cuando hablamos de función es una relación que cumple una estructura que tiene una característica especial al hablar de función, donde hay una relación entre dos conjuntos, donde el primer conjunto es un conjunto  $A$  y el segundo conjunto es un conjunto  $B$ , para que sea función, significa que todos los elementos del conjunto  $A$  tienen una única imagen en el conjunto  $B$  se relacionan una sola vez con el conjunto  $B$ , esa es la característica de función. Cuando hablamos de cuadrática es simplemente que cumple una regla general con una forma algebraica particular, que es de la forma  $ax^2 + bx + c$ , esta función cuadrática la podemos representar de tres maneras: la representamos de manera algebraica, de forma gráfica, de forma tabular.

De manera algebraica es como lo acabamos de mencionar, es la de  $ax^2 + bx + c$ , su forma gráfica es una parábola, donde se pueden identificar que hay unos elementos, donde está el vértice, los ejes de corte en  $x$ , el eje de corte en  $y$ , si abre hacia arriba o si abre hacia abajo. Resumiendo, una función cuadrática para mí es una ecuación matemática, que cumple cierta característica y forma donde su representación gráfica es una parábola con los elementos que mencioné y su representación algebraica es como ya la mencioné y su representación tabular se va a observar que los números son simétricos en la variable dependiente”. Así mismo, la información de los textos se describe de la siguiente manera:

### **Textos de educación matemática de básica secundaria:**

- Hipertexto: matemática 9  
“Una función cuadrática es una relación entre dos variables que cumple con ciertas condiciones. La forma algebraica de una función cuadrática es la siguiente (también se conoce como criterio):  $y = ax^2 + bx + c$ , donde  $y$  es la variable dependiente,  $x$  es la independiente y  $a, b$  y  $c$  son números reales con  $a \neq 0$ ” (Santillana, 2017).
- Nuevas matemáticas: Álgebra, geometría y estadística  
“Una función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a, b, c \in R$  y  $a \neq 0$  recibe el nombre de función cuadrática o función de segundo grado. Expresiones como  $f(x) = 3x^2$ ,  $y = 5x^2 + 2x$  y  $f(x) = x^2 + x + 3$ , entre otras son algunos ejemplos de funciones cuadráticas” (Santillana, 2016).

- Matemáticas: Espiral 9  
 “La familia de las funciones cuadráticas está formada por expresiones de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con las siguientes características:  $x$  es variable independiente y puede tomar cualquier valor real  $a, b, c$  son números reales y  $a$  es diferente de cero.  $y$  es la variable dependiente. Su grafica es una parábola” (Norma, 2005).
- Matemáticas: Delta 9  
 “La función cuadrática de  $x$  es una función cuya ecuación es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ ,  $c, a$  y  $b$  constantes reales. Toda función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; con  $a \neq 0$  se puede escribir de la forma estándar  $f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ . El vértice de la parábola tiene coordenadas  $(h, k)$ , y la recta vertical de la ecuación  $x = h$  es el eje de simetría de la parábola” (Norma, 2009).

### Textos de educación universitaria sugeridos:

- Precálculo: Matemática para el cálculo  
 “Una función cuadrática es una función polinomial de grado dos. Entonces una función cuadrática es una función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; con  $a \neq 0$ ” (Stewart, Rediln & Watson, 2012, p. 224).
- Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas  
 “Una polinomial de grado 2 es de la forma  $P(x) = ax^2 + bx + c$  y se llama función cuadrática. Su grafica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola  $y = ax^2$ , la parábola abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$ ” (Stewart, 2013, p. 27).
- Funciones Reales de Variable Real  
 “Sea  $f : R \rightarrow R$  una función,  $f$  recibe el nombre de función polinomial de segundo grado o función cuadrática si  $\forall x, x \in R$  se cumple que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con,  $a, b$  y  $c$  constantes reales,  $a \neq 0$ ” (Astorga & Rodríguez, 1984, p.37).

### Documentos de investigación:

Las definiciones presentadas a continuación, fueron encontradas en investigaciones de nivel de posgrado, relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje del objeto de estudio función cuadrática.

- Para que el concepto de función cuadrática pudiese haber llegado a ser considerado como de gran importancia para la física y la matemática, era necesario que Galileo Galilei (1564- 1642) descubriera que para la trayectoria de puntos del movimiento en caída libre le correspondía un espacio, un tiempo y una velocidad determinada, estableciendo así una correspondencia biunívoca entre el tiempo transcurrido en la caída y el espacio recorrido por el cuerpo; al igual que entre el tiempo transcurrido en la caída y la velocidad adquirida por el objeto que cae. Con esto se hace evidente que esta situación tendrá: variables, relación de dependencia, correspondencia biunívoca y adicionalmente están presentes constantemente en el entorno natural para provocar su estudio en un proceso de modelización matemática. Como por ejemplo la caída de un cuerpo o el movimiento de proyectiles. Una función cuadrática es una expresión polinómica de grado dos en la variable dependiente  $x$  e independiente  $y$ , que resulta del desarrollo de la ecuación de la parábola de eje vertical. La función cuadrática es entonces una expresión polinómica de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con,  $a, b$  y  $c$  constantes reales,  $a \neq 0$ .  $a$  es el coeficiente del término cuadrático,  $b$  es el coeficiente del término lineal, y  $c$  es el término independiente, cada uno de ellos indica una determinada característica geométrica:  $a$ : orienta las ramas o sea la concavidad,  $b$ : el desplazamiento del eje de la parábola, y  $c$ : el desplazamiento del vértice de la parábola” (Cortez, 2012, p.20 - 21).
- Una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde,  $a, b$  y  $c$  son números reales cualesquiera, y  $a$  es distinto de 0. Si representamos "todos" los puntos  $(x, f(x))$  de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada parábola (Oaxaca, Carmen & Bravo, 2015, p. 3).
- Una función cuadrática refiere a una función polinomial de grado 2, de tal forma que una función cuadrática viene a ser una función de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . Su gráfica en el plano cartesiano corresponde a una parábola. puede expresarse en la forma normal:  $f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ . Si  $a > 0$  (coeficiente principal), la parábola se abre hacia arriba. Si  $a < 0$  (coeficiente principal), la parábola se abre hacia abajo (Garay, 2019, p. 12).

Teniendo la información descrita y seleccionada de tal forma que permite tener claridad en las concepciones y definiciones de los datos establecidos, es posible desarrollar las categorías que componen el análisis de contenido.

### **2.2.1.1 Estructura conceptual**

#### **Campo conceptual de la función cuadrática**

La concepción de función cuadrática al igual que otros elementos pertenecientes a la rama que conforma la matemática se ha concebido a partir de sus elementos precursores, en este caso es pertinente decir que se ha desarrollado a partir del concepto de función, siendo este considerado “como uno de los conceptos más importantes de las matemáticas, en parte porque a nivel histórico se ha consolidado como un modelo de procesos de variación” (Posada & Villa, 2006, p.60). Ahora bien, se toma a consideración que existen muchas referencias al concepto de función, a pesar de tener raíces antiguas, su consolidación se establece de manera reciente en el campo de las matemáticas, es decir, la variación en su constitución y formalización ha sido la relación de diferentes aportes teniendo en cuenta su naturaleza y sus propiedades. Junto a lo anterior, Kline (1992) postula que

... cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable (p. 1254).

En este sentido, el concepto de función se configura como una relación de dependencia, caracterizada por entrelazar valores de un conjunto con otro conjunto, teniendo como característica principal que cada valor del conjunto inicial tenga relación únicamente con un valor del conjunto final. A partir de esta estructura, se da paso a las diferentes variaciones, permitiendo la concepción formal de definiciones generadas de su propia naturaleza, es de esta forma que se puede considerar la relación con el objeto de estudio función cuadrática.

En cuanto a el concepto de cuadrado, se genera de igual forma a partir de las nociones y postulados establecidos a lo largo del tiempo y las diferentes culturas, en situaciones presentadas por los Babilonios (2000 a. C – 600 a. C) y mencionadas por Mesa & Villa (2008), muestran que la concepción de “cuadrado” se entendía como un producto de una cantidad por sí misma, representada mediante un “álgebra retórica” que la estructuraba como una construcción aritmética al no poseer acciones o símbolos que permitieran realizar un registro de sus generalidades, aunque se esboza claridad en las generalidades que pueden surgir de esta. De igual forma, Euclides (325 a. C – 265 a. C) postula una perspectiva geométrica que “Entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es la que es equilátera y rectangular” teniendo esto en cuenta y los procedimientos relacionados con las concepciones de “equilátero” y “rectangular” planteadas por Euclides, una cantidad (en este caso puede interpretarse como segmento) multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica.

Para Apolonio (262 a. C – 190 a. C) el cuadrado es utilizado para dar desarrollo y representación de forma algebraica a los que actualmente conocemos como secciones cónicas. De igual forma Galileo (1564 - 1642) en sus amplios aportes a la matemática y al conocimiento en general, argumenta el concepto de función cuadrática desde fenómenos geométricos, físicos, entre otros, centrados en la variación y cambio. Sin embargo, para fines de la presente investigación, se acoge una de las posturas con estructura aritmética definiendo al cuadrado como aquellos números que se obtienen multiplicando un número natural por sí mismo, a los números que los números que los generan se determinan como raíces.

La información anteriormente mencionada forma parte de los planteamientos a tener en cuenta para la construcción del concepto de función cuadrática, sin embargo, vale la pena mencionar que el concepto de función lineal como variación del concepto de función, toma un papel significativo para dar pie a la construcción del concepto de función cuadrática, es debido a esto que se mencionara de manera general uno de los planteamientos relacionados con el concepto de función lineal, teniendo en cuenta su afinidad con el concepto que se pretende establecer. En Posada & Villa (2006) se propone el concepto de función lineal desde una visión variacional,

acogiendo conceptos como el de unidad significativa establecido por Duval (2004) con el fin de esclarecer algunas de características de la función lineal. Producto de esto se describe que:

Para el concepto de función lineal, las unidades significantes serán determinadas a partir de la noción de variación y razón de cambio. Esto debido a que es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional. (p. 247)

A partir de esta postura, es posible observar el estudio de la función lineal desde tres elementos:

- Unificar la noción de función lineal y afín.
- Concebir la función lineal como un modelo matemático de un conjunto de situaciones con una misma característica (razón de cambio constante).
- Proponer una única unidad significativa cognitivamente pertinente, que permita el estudio de las dificultades presentadas en la actividad cognitiva (Posada & Villa, 2006, p. 93).

Con base en ello, se afirma que “Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante” (Posada & Villa, 2006, p. 96).

Representando el “cambio” de una variable como  $\Delta x$  se tendría que la variación lineal puede representarse de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ con } a \text{ constante}$$

Considerando la cantidad y variabilidad de los datos obtenidos y expuestos en las definiciones y estructuras anteriores, es necesario realizar una caracterización de estos, los datos se seleccionaron con el fin de dar forma a la propuesta establecida para este concepto. Teniendo en cuenta las categorías propuestas por Rico et al., (2008) es posible plantear los siguientes resultados:

Tabla 1: Descripción del campo conceptual de la función cuadrática.

Categorías	Datos
------------	-------

	Términos	Relación, dependencia, magnitud, característica, contención, elementos, cuadrado, producto, variable, variación, variable dependiente, variable independiente, razón, cambio, linealidad
	Notaciones	No se establecen para la conceptualización
Hechos	Convenios	Relación de dependencia (igualdad) Producto entre variables (multiplicación) Razón de cambio Linealidad
	Resultados	Magnitud con elementos cuadráticos producto de una variable independiente. Razón de cambio varía de manera lineal
	Conceptos	cuadrado (cuadrático), Magnitud, razón, variación, función
	Estructuras	Modelos cuadráticos. Relaciones Binarias y Funciones.

Fuente: Elaboración propia.

Como resultado del análisis y relacionamiento entre la información planteada, es posible concretar una concepción de la función cuadrática a término personal, de igual forma, esta propuesta es soportada bajo interpretaciones como la de Posada & Villa (2006) quien afirma que la función cuadrática “es una relación entre dos cantidades cuya razón de cambio varía linealmente” (p. 248); además de los planteamientos de Alonso (2001) que postula que cuando una función es de tipo cuadrática “se dice que la variable  $y$  (magnitud o cantidad) depende cuadráticamente de la variable  $x$ ” (p.1), a pesar de que este último hace referencia a la representación algebraica del concepto, se tienen en cuenta parte de sus planteamientos, a fin de análisis la propuesta del concepto de función cuadrática es descrita como:

Una relación de dependencia entre dos magnitudes, caracterizada por presentar procesos cuadráticos en los elementos correspondientes a la magnitud que se considere dependiente respecto a los elementos de la magnitud independiente, la razón de cambio de esta relación varía de manera lineal.

*Campo procedimental de la función cuadrática.*

En la siguiente tabla al igual que en la anterior, se pretende describir los datos encontrados en las fuentes expuestas, relacionados con la propuesta del concepto de función cuadrática establecida en el campo conceptual, estos se clasifican teniendo en cuenta las categorías propuestas por Lupiañez (2009), expuestas como: destrezas, razonamientos y estrategias.

Tabla 2: Descripción del campo procedimental de la función cuadrática.

Datos	
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconoce la igualdad y dependencia entre dos magnitudes</li> <li>- Identifica la variación en magnitudes relacionadas</li> <li>- Reconoce el papel de un elemento cuadrado (cuadrático) en una relación de dependencia entre dos magnitudes variables.</li> <li>- Reconoce el término cuadrado como el producto de dos cantidades iguales.</li> <li>- Determina el comportamiento de una variable dependiente bajo características determinadas.</li> <li>- Identifica la razón de cambio de una función</li> <li>- Establece la variación constante de manera lineal de una magnitud variable dependiente relacionada con una magnitud variable independiente</li> <li>- Identifica las características que distinguen el concepto de función cuadrática de las demás variaciones del concepto de función</li> </ul>
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Deduce la variación entre dos magnitudes relacionadas de forma dependiente.</li> <li>- Establece el valor de un elemento cuadrado (cuadrático) a partir de la multiplicación de una cantidad por sí misma.</li> <li>- Identifica las características que generan el comportamiento característico de la función.</li> <li>- Adquiere criterios para distinguir el concepto entre las demás variaciones del concepto de función.</li> </ul>
Estrategias	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconoce patrones a partir del concepto propuesto para función cuadrática</li> <li>- Reflexiona acerca del uso y aplicaciones de la función cuadrática en el entorno.</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia.

Las destrezas, razonamientos y estrategias identificadas en la Tabla 1 y Tabla 2 se relacionan de forma directa con los elementos utilizados para configurar el concepto de función cuadrática, es posible observar esto ya que cada proceso mencionado hace referencia a los desarrollos que

estructuran los hechos, los conceptos y las estrategias. De esta forma, es posible definir los procedimientos y modos de actuación en torno al concepto establecido, para este caso, los procedimientos descritos anteriormente se relacionan de cierta forma con el conocimiento variacional y algunos elementos del conocimiento aritmético del estudiante (conocimientos previos), acotados por temáticas consideradas propias del conocimiento previo del estudiante, según los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006).

### **2.2.1.2 Sistemas de representación de la función cuadrática**

Teniendo en cuenta las estructuras teóricas que definen un sistema de representación, como la de Gómez (2002), entendida como “un sistema de reglas para identificar o crear caracteres, operar sobre y con ellos y determinar relaciones entre ellos” (p.266), o la postura de Duval (2004) que establece que los objetos matemáticos, como carentes de una existencia física o material, esto da lugar a que sólo sea posible su conceptualización y alguna actividad sobre ellos a través de sus representaciones semióticas y las actividades de conversión entre ellas.

Las nociones de registros de representación, tratamiento y conversión de representaciones y la tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos son fundamentales para su comprensión (Duval, 2004), han sido objeto de estudio por numerosos investigadores que sostienen, como puede apreciarse en Lupiañez (2001), para el caso particular de la matemática, que no existe actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. De las distintas posibilidades planteadas por Gómez (2002) señaladas como las más cotidianas en la educación matemática se ha optado por representar el concepto en el sistema de representación algebraico, sistema de representación verbal, sistema de representación tabular y por último el sistema de representación gráfico, atendiendo a las características postuladas en el concepto de función cuadrática establecido.

#### **Sistema de representación algebraica**

La representación algebraica también conocida como lenguaje algebraico es utilizada para la representación de valores numéricos, cuando estos son desconocidos en magnitud. Este presenta

un alto grado de precisión en los procedimientos, sin embargo, es posible que se manifieste cierto grado de dificultad en su entendimiento, debido a el nivel de abstracción que lo caracteriza (Reyes & Huerta, 2020). Este lenguaje es conocido como método que permite simplificar teoremas o problemas matemáticos mostrando generalidades. Dentro del sistema de representación algebraica, también llamada representación simbólica, la función cuadrática toma tres distintas representaciones en los datos identificados anteriormente, estas pueden representarse de la siguiente manera:

$$\text{Forma Estándar: } f(x) = ax^2 \pm bx + c \text{ con } a \neq 0$$

$$\text{Forma Factorizada: } f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ con } a \neq 0$$

$$\text{Forma Canónica: } f(x) = a(x - h)^2 + k \text{ con } a \neq 0$$

Como se menciona anteriormente, se observa en los datos caracterizados que la forma estándar correspondiente al sistema de representación algebraico es la más utilizada, por cuanto se considera genere en los estudiantes un acercamiento preciso hacia la comprensión del significado de la función cuadrática, por lo tanto, la forma factorizada y la forma canónica no se tendrán en cuenta para dar representación algebraica al concepto propuesto.

Ahora bien, la forma estándar de la representación algebraica de la función cuadrática es estructurada y establecida teniendo en cuenta las diferentes características y procesos que enmarcan tan importante forma de constituir un concepto tan significativo para el desarrollo del conocimiento y la educación matemática. A pesar de que esta representación es mencionada de manera general, haciendo énfasis en los caracteres y elementos que la relacionan con los demás sistemas de representación de la función cuadrática, es posible describir algunas particularidades:

El sistema de representación algebraico de la función cuadrática, para este caso en específico la determinada forma estándar, se constituye matemáticamente (aritméticamente) con elementos pertenecientes a estructuras matemáticas consideradas en el conocimiento previo del estudiante, tal es el caso de los conceptos de variables, ecuaciones, igualdades, polinomios algebraicos, específicamente el polinomio algebraico de grado 1, y los demás componentes que estructuran estos conceptos, por lo cual es importante establecer que la construcción de esta

representación se basa en la utilización de elementos pertenecientes a estos conceptos o estructuras, como se observa en la forma estándar representada anteriormente es posible describirla matemáticamente de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^2 \pm bx + c \text{ con } a \neq 0$$

El término  $f(x)$  hace referencia a la magnitud, variable, cantidad dependiente del proceso a desarrollar en los términos que se encuentran al otro lado del símbolo “=”.

El polinomio  $ax^2 \pm bx + c$  se establece como un trinomio que dependiendo al caso puede estar compuesto por un término cuadrático estructurado por la magnitud, variable o cantidad independiente elevada a la potencia 2 (siendo esta la máxima potencia) y un coeficiente que para el caso de la función cuadrática debe ser diferente de cero “0”, un término lineal estructurado por la variable independiente y un coeficiente perteneciente a los números reales y por último un término sin variable que también pertenece a los números reales. Cabe resaltar, que se pueden presentar dentro de esta los siguientes casos:

- Si  $a = 0$  sería de la forma  $f(x) = bx + c$ , por tanto, no sería una función de segundo grado sino una función de primer grado, entonces  $a \neq 0$
- Si  $b = 0$  y  $c = 0$  La forma de la función sería  $f(x) = ax^2$
- Si  $c = 0$  La forma de la función sería  $f(x) = ax^2 + bx$
- Si  $b = 0$  La forma de la función sería  $f(x) = ax^2 + c$ .

Los polinomios algebraicos juegan un papel fundamental en la construcción de conocimiento, la relación que guarda cada término y cada variable establecida en esta representación permite al estudiante situar a la función cuadrática en un comportamiento cotidiano en concordancia a desarrollos como cálculos y procedimientos ya utilizados.

Las funciones polinómicas como la función cuadrática se estructuran en aspectos particulares que dan su la forma característica, es posible llegar a su representación algebraica

teniendo en cuenta los elementos que componen un polinomio algebraico, de cierta forma es posible describir la construcción a partir de lo siguiente:

Es necesario trascender a la función polinomial entendida según Castillo, Correa & González (2016) como una función cuya regla de correspondencia está dada por un polinomio en una variable, el grado de una función polinomial es el grado del polinomio de una variable, es decir, la potencia más alta que aparece en la variable. Está definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde  $n$  es un número entero positivo;  $a_n, a_{n-1}, a_2, a_1, a_0$  se denominan coeficientes y son números reales,  $a_n \neq 0$ , en este caso el grado de la función es  $n$ , de igual forma existe el coeficiente principal, este acompaña a la variable con el mayor exponente, en este caso  $a_n$ , el término constante es aquel que acompaña a la variable de exponente cero, por lo tanto esta variable no se escribe, la gráfica de su función es una curva continua, es posible seguir hablando de esta función, sin embargo, el interés radica en un caso específico perteneciente a esta, el caso de la función cuadrática toma estructura cuando la función polinomial tiene grado dos, de igual forma denotamos que siguiendo la representación general de la función polinomial esta es seguida por un término con una unidad menos en el exponente de la variable y con el ya mencionado término independiente:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Los aspectos considerados generales en la función polinomial pasan a ser elementos específicos teniendo en cuenta la forma polinomial de la función cuadrática, por ejemplo, sus raíces, cuya cantidad radica en el grado de la función, para el caso de la función cuadrática se establecen tres posibilidades, la primera atiende a que no existan raíces reales en la función cuadrática establecida, la segunda que ambas raíces sean iguales y la tercera que existan dos raíces reales, es posible hallar estas mediante la fórmula general de la ecuación cuadrática representada:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

Para dar sentido a los coeficientes plasmados en dicha fórmula se tiene en cuenta la estructura algebraica planteada inicialmente  $f(x) = ax^2 \pm bx + c$  con  $a \neq 0$ . Ahora bien, la representación algebraica de la función cuadrática guarda relación con las demás representaciones, existen elementos en la representación algebraica de la función cuadrática que permiten identificar características de las demás representaciones, por ejemplo, el signo del coeficiente principal puede indicar la dirección en la que abre la parábola de dicha función, es posible hallar el vértice de la parábola a partir de las constantes de la función, entre otras.

### **Sistema de representación verbal**

Desde el campo de las representaciones de un objeto matemática, la verbal guarda un acercamiento a las descripciones con las que se establece un concepto, de cierto modo, esta pretende describir el objeto a partir de convenios de lectura desde la expresión escrita y oral. Sin embargo, en algunos casos hace referencia a la forma en que se interpretan y argumentan los procedimientos de cada característica que estructura el objeto bajo por medio de un lenguaje común, haciendo análisis a las variables que estén en juego (Alvis, 2019). Por otro lado, se identifican por parte de otros autores cierto nivel de controversia, ya que según estos no se reduce a una lectura, ni escritura literal ya sea de las características, de los procesos o del mismo concepto en sí.

Partiendo de lo anterior, el concepto de función cuadrática establecido guarda similitud en cuando a su representación verbal, sin embargo, es importante mencionar que, de igual forma, los demás sistemas de representación que se asocian a este objeto matemático presentan sincronía con el sistema de representación verbal, como ya se mencionó anteriormente, al final de la descripción de los sistemas de representación de la función cuadrática se hará énfasis en los cambios y transformaciones entre estos sistemas.

A pesar de no contar con variedad de información relacionada con el sistema de representación verbal en los datos propuestos, es posible establecer aquellos datos que se enmarcan con el concepto postulado, en investigaciones como la de Fernández et. al (2018), la función cuadrática se representa verbalmente en los textos de educación básica como: “Relación entre dos variables con ciertas condiciones” (p. 81), declarando que los enfoques se rigen bajo una relación de dependencia entre dos variables, pero no describen las condiciones a las que se somete la relación, por este motivo la considera una representación escueta e incompleta. Ahora bien, considerando la información planteada por los profesores John Sebastián Gómez y Yudy Andrea Niño, la definición propuesta por el profesor John Sebastián Gómez presenta elementos verbales que se acogen a las estructuras que se quieren expresar para este caso en específico, como la relación de dependencia entre cantidades bajo características cuadráticas.

Teniendo en cuenta las posturas planteadas anteriormente, la representación verbal de la función cuadrática se describe como la relación de dependencia entre dos magnitudes, una dependiente y una independiente, en la magnitud independiente se opera con procesos cuadráticos y la razón de cambio de esta relación varía de manera lineal.

A pesar de que en esta representación se expresan conceptos considerados complejos en la utilidad del estudiante promedio, es pretendido que por medio de esta los estudiantes logren determinar el concepto matemático de función cuadrática y en algún momento contextualizarlo o relacionarlo con procesos comunes en su diario vivir.

### **Sistema de representación gráfica.**

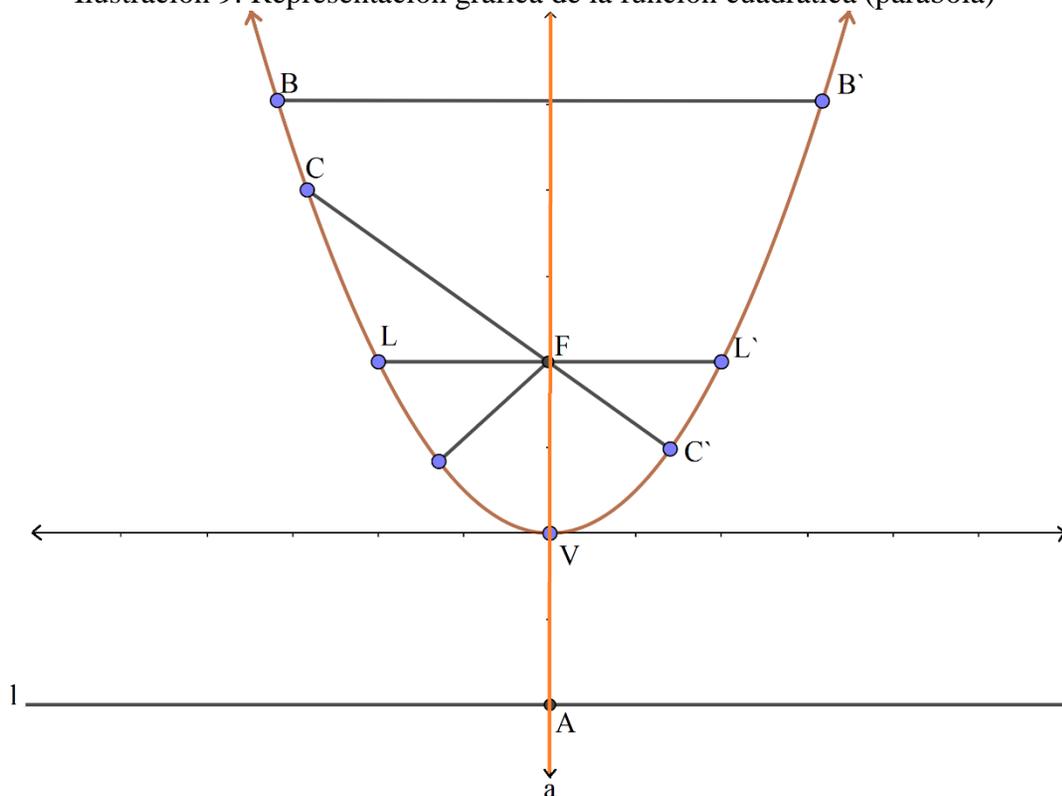
La representación gráfica, al igual que los demás sistemas de representación contiene elementos que relacionan los procesos de expresión del contenido con los demás sistemas, para el caso de la matemática es establecido por algunos autores que el sistema de representación gráfica depende de características propias del sistema de representación algebraico, o en su defecto del sistema de representación tabular (Gómez, 2002). En relación con el objeto matemático de la presente investigación, Apolonio (262 a. C. – 190 a. C) refuerza la anterior postura en la

formulación de las cónicas, relacionando el gráfico de una parábola como el lugar geométrico de una ecuación de grado dos.

En el caso de Fernández et al. (2018) determinan la representación gráfica como la expresión de un contenido matemático mediante un dibujo, formado por líneas, símbolos y superficies que permiten observar diferentes propiedades del contenido. De este modo es posible indicar que la representación gráfica de la función cuadrática responde a una expresión definida con elementos característicos, esta es reconocida como parábola y es entendida como:

La parábola es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia desde un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta, el punto fijo se determina foco y la recta fija se considera directriz, la definición excluye el caso en el que el foco este sobre la directriz (Lehmann, 1989, p. 149)

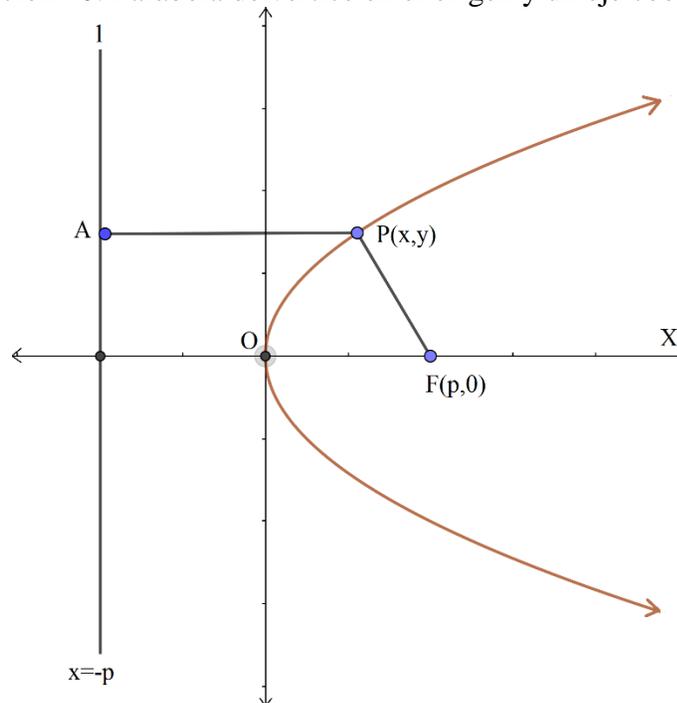
Ilustración 9: Representación gráfica de la función cuadrática (parábola)



Fuente: Elaboración propia

Para dar descripción a los elementos y características particulares que componen la parábola se han tomado como base algunos de los argumentos propuestos por Lehmann (1989) en su libro de geometría analítica, postulando las siguientes concepciones: Teniendo en cuenta lo plasmado en la Ilustración 9: Representación gráfica de la función cuadrática (parábola) se designa  $F$  como el foco y  $l$  como la directriz de una parábola respectivamente, la recta que pasa por  $F$  y es perpendicular a  $l$  se le llama eje de la parábola. Sea  $A$  el punto de intersección del eje y la directriz. El punto  $V$ , punto medio del segmento  $AF$ , está, por definición, sobre la parábola, este punto se llama vértice. El segmento de la recta, tal como  $BB'$ , que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama cuerda; en particular una cuerda que pasa por el foco como  $CC'$ , se llama cuerda focal. La cuerda focal  $LL'$  perpendicular al eje se llama lado recto. Si  $P$  es un punto cualquiera de la parábola, la recta  $FP$  que une al foco  $F$  con el punto  $P$  se llama radio focal de  $P$ , o radio vector.

Ilustración 10: Parábola de vértice en el origen y un eje coordenado



Fuente: Elaboración propia

Es posible observar que la parábola asume su forma más simple cuando su vértice se encuentra en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados, en el caso de la Ilustración 10: Parábola de vértice en el origen y un eje coordenado, el eje coincide con el eje  $X$ , por lo tanto, el foco se encuentra sobre el eje  $X$ , sean  $(p, 0)$  sus coordenadas. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz  $l$  es  $x = -p$ . Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la parábola. Por  $P$  se traza el segmento  $PA$  perpendicular a  $l$ , entonces, por la definición de la parábola el punto  $P$  debe satisfacer la condición geométrica

$$|\underline{FP}| = |\underline{PA}| \quad (1)$$

Atendiendo a uno de los teoremas (teorema 2 del Artículo 6) postulados en el trabajo de Lehmann (1989), que establece que un segmento con las características del segmento  $|\underline{FP}|$  guarda la siguiente igualdad:

$$|\underline{FP}| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

De igual forma por el teorema 9 (Artículo 33), es posible describir que:

$$|\underline{PA}| = |x + p|$$

Por lo tanto, la condición geométrica 1 esta expresada analíticamente por la expresión

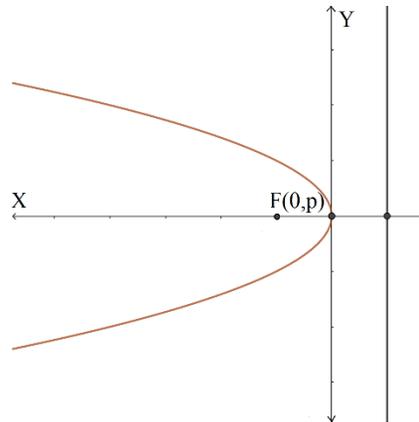
$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros es posible obtener la expresión:

$$y^2 = 4px$$

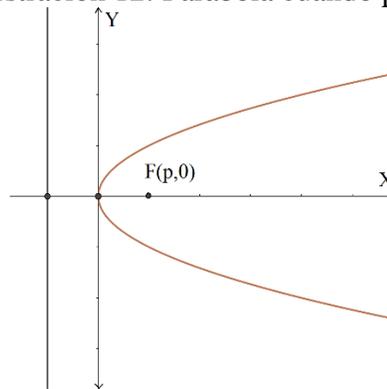
En este caso, si  $p > 0$ , la parábola abre hacia la derecha, contrario a esto, si  $p < 0$ , la parábola abre hacia la izquierda

Ilustración 11: Parábola cuando  $p < 0$



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 12: Parábola cuando  $p > 0$



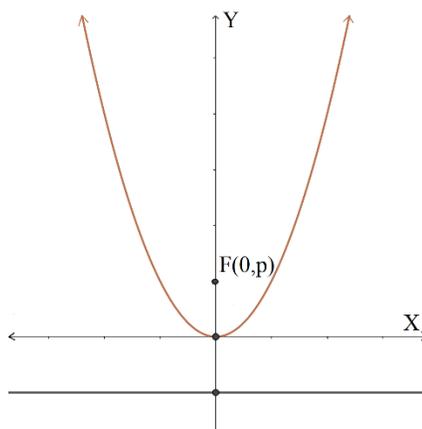
Fuente: Elaboración propia.

Si el eje de la parábola coincide con el eje Y, su ecuación está dada por la expresión

$$x^2 = 4py$$

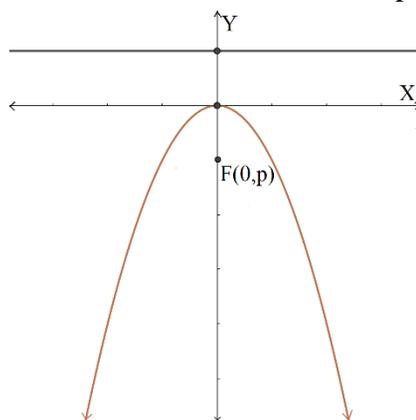
En este caso el foco está ubicado en el punto  $F(0, p)$ , la ecuación de la directriz está dada por  $y = -p$ , en similitud al caso anterior, si  $p > 0$ , la parábola abre hacia arriba y en caso de que  $p < 0$  la parábola abre hacia abajo, es posible observar esto en la siguiente ilustración:

Ilustración 13: Parábola cuando  $p > 0$



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 14: Parábola cuando  $p < 0$



Fuente: Elaboración propia.

Finalizando estas descripciones, se tiene el caso general donde el vértice se ubica en un punto  $(h, k)$ , con ánimo de no extender la descripción de estos sistemas se exponen de manera breve las dos expresiones que acogen esta situación:

Si el eje de la parábola es paralelo al eje de coordenadas  $X$  entonces su ecuación está dada por la expresión  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  para este caso el foco está ubicado en el punto  $F(h + p, k)$ , la ecuación de la directriz está dada por la expresión  $x = h - p$ , de igual forma si  $p > 0$  la parábola abre hacia la derecha, en caso contrario si  $p < 0$  la parábola abre hacia la izquierda.

Para el segundo caso, si el eje de la parábola es paralelo al eje  $Y$  entonces su ecuación está dada por la expresión  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  para este caso el foco está ubicado en el punto  $F(h, k + p)$ , la ecuación de la directriz está dada por la expresión  $y = k - p$ , de igual forma si  $p > 0$  la parábola abre hacia arriba, en caso contrario si  $p < 0$  la parábola abre hacia abajo.

### **Sistema de representación tabular**

La representación tabular juega un papel importante en cuanto a la organización de los datos y la visualización de la información, esta es caracterizada por ordenar en filas y columnas datos de utilidad para una investigación o procedimiento, pretendiendo facilitar el proceso de interpretación o toma de decisiones, los criterios de ordenanza en las filas y las columnas responden a juicios de interés (Rodríguez, Aguilar & Anaya, 2015). En el campo de las matemáticas, el concepto se relaciona con objetos matemáticos como las funciones, en algunos casos respondiendo a variables cualitativas y en otros a variables cuantitativas, es posible acercarse a una postura que define a la tabulación como el hecho de calcular valores parciales para una función y compararlos en una tabla, sin embargo, esta postura deja un sin sabor, ya que no abarca elementos que logren desplegarla y constituirla como un sistema de representación.

Los elementos que relacionen el concepto de función y el de representación tabular en la educación matemática, mencionan las magnitudes o variables tanto dependientes como independientes, al obtener los registros producto de una función es posible organizarlos en pares, el primer valor lo toma la variable independiente y el segundo valor lo toma la variable dependiente. De igual forma, al estructurar la representación tabular, es posible plantear información de utilidad para los diferentes cambios y transformaciones entre sistemas de representación.

Para el caso de la función cuadrática al igual que las demás funciones representadas por medio de este sistema, se establece una tabla que registra en dos columnas (o filas) valores producto de la relación procedimental definida en la función, en la primera columna (fila) se escriben los valores correspondientes a la magnitud que consideramos independiente, frente a esta, se describen los valores resultantes de la magnitud independiente, resultantes de la relación procedimental que atiende a la función cuadrática. De cierto modo al igual que las anteriores representaciones existen

transformaciones y formas de relación entre el sistema de representación tabular y el sistema de representación algebraico, el grafico y en algún momento el sistema de representación verbal.

Como se mencionaba anteriormente, el sistema de representación tabular toma la forma de tabla, con fines de registro de información, teniendo esto en cuenta y los datos encontrados en las distintas fuentes de información, es posible dar una propuesta del objeto de estudio representado por medio del mencionado sistema, para este caso en específico se utilizará el simbolismo algebraico  $f(x) = x^2 + 1$

Teniendo en cuenta que los registros de información son producto de un desarrollo en este caso algebraico, teniendo en cuenta las características establecidas para la función cuadrática  $f(x) = x^2 + 1$  se describirá a continuación los valores de la magnitud independiente en la función correspondiente y al final los registros en la representación tabular resultante.

Tabla 3: Valores de x en  $f(x) = x^2 + 1$  en el sistema de representación tabular

$x$	$y = f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Fuente: Elaboración propia.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + 1 \\ &= (4) + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 1 \\ &= (1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^2 + 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^2 + 1 \\ &= (1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^2 + 1 \\ &= (4) + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= (3)^2 + 1 \\ &= 9 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Tabla 4: Valores de  $f(x) = x^2 + 1$  en el sistema de representación tabular

$x$	$y = f(x)$
-2	5

<b>-1</b>	2
<b>0</b>	1
<b>1</b>	2
<b>2</b>	5
<b>3</b>	10

Fuente: Elaboración propia.

Las variables ( $x$  e  $y$ ) se sitúan como títulos de las columnas. La variable independiente se ubica a la izquierda. Los valores numéricos de ambas variables se ponen de forma que el valor de la variable independiente está en la misma fila del valor de la variable dependiente que se corresponde con él. Por tanto, la información que se presenta en las filas y las columnas de la tabla es clave y forma parte de las normas de este sistema de representación.

### **Transformaciones y relaciones entre sistemas de representación de la función cuadrática**

En los sistemas de representación anteriormente descritos, se da un acercamiento a las diferentes maneras de plasmar el concepto asumido para el objeto de estudio de la presente investigación, sin embargo, en estos no se aclara en gran medida la importante relación existente entre sí. En la educación matemática, los sistemas de representación no solo asumen el importante papel de comunicar, sino que se establece como indispensable para el desarrollo de cualquier actividad, en efecto, las transformaciones realizadas al objeto matemático depende del sistema de representación propuesto, de igual forma, cuando el objeto matemático evidencia las diferentes similitudes o concordancia en la articulación de sus distintas representaciones se facilita realizar una comparación entre estas y como resultante es posible establecer relaciones.

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza (Duval, 2004, p.59).

De este modo, es posible asumir la noción de representación semiótica en concordancia a los sistemas de representación establecidos para la función cuadrática y de esta forma tomar postura

en postulados que trascienden en el tema, Duval (2004) describe que los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación.

1. Construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Desde una perspectiva empírica, es posible observar que los docentes de aula por lo general no marcan una diferencia entre las actividades de tratamiento y las de conversión de las representaciones. Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que se utilizan las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión, al contrario, moviliza dos o más registros de representación y requiere su coordinación por parte del sujeto que la efectúa.

En tal sentido, es posible que los sistemas de representación de la función cuadrática contengan múltiples características que los relacionen y articulen, teniendo en cuenta las teorías anteriormente descritas, se propondrán las relaciones identificadas asociadas a las representaciones presentadas en torno al objeto de estudio. Es importante mencionar que se abarcaran de manera general cada relación, haciendo énfasis en los puntos considerados imperantes.

Es importante mencionar el importante papel que juega el sistema de representación algebraico en la transformación y desarrollo de los demás sistemas, es posible observar que este tipo de representación contiene la mayor cantidad de características y parámetros identificables entre los demás sistemas, su relación con el sistema de representación gráfico es amplio desde la forma tradicional de pasar de un sistema a otro, algunos son las expresiones para los vértices, foco

y demás elementos del sistema gráfico, de igual forma los parámetros del sistema algebraico pueden ser determinados a partir del posicionamiento y dirección de la parábola.

En este orden de ideas, el sistema de representación algebraico en cierto momento es generador de los registros del sistema de representación tabular, desarrollando las diferentes expresiones con variables dependientes e independientes, sin embargo, el sistema de representación tabular, en su estado total (existencia de todos los elementos de la columna o fila  $X$  y todos los elementos de la columna o fila  $Y$ ) puede ser de igual forma generador de los elementos que conforman el sistema de representación algebraico, teniendo en cuenta las características plasmadas en el sistema de representación tabular. De manera cotidiana es posible encontrar la transformación del sistema de representación tabular al sistema de representación gráfico en los diferentes sistemas educativos programados para el contenido función cuadrática, no obstante, a partir de la parábola es posible describir las diferentes parejas ordenadas que conforman el sistema de representación tabular.

El sistema de representación verbal permite introducir el análisis fenomenológico de la función cuadrática. La diversidad de fenómenos en los que este concepto se encuentra involucrado, en este se encuentran descripciones propias de la física (como la caída de cuerpos y la optimización de áreas), de la ingeniería (como las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes) y propias de lo numérico, es impórtate mencionar esto, ya que cuando tratamos con representaciones verbales de los problemas que pretendemos resolver a partir de la utilización de este objeto matemático la transformación del sistema de representación verbal a los demás sistemas de representación juega un papel crucial, la interpretación y transformación de los registros verbales son un proceso que se desarrolla en casi todas las actividades propuestas en relación al objeto de estudio.

En conclusión, es posible argumentar que el contenido matemático función cuadrática, al igual que los demás objetos y actividades matemáticas requieren de un sistema de expresión y representación distintos al lenguaje cotidiano, esto genera la necesidad de desarrollos de Procesos Generales (MEN, 2006), como el aporte en el aprendizaje de un contenido, el razonamiento, la modelación y comunicación entre otros. De acuerdo con Duval (2004), los sistemas de representación no solo constituyen un medio para expresar el pensamiento de un sujeto o que su

fin se la comunicación, contraste a esto, los sistemas de representación cuentan como instrumentos para la realización del trabajo matemático, es decir, son instrumentos semióticos, entendidos de acuerdo con Godino (2007) como, correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Los registros de representación de la función cuadrática son manipulados y transformados con el fin de explorar y reconocer el rol fundamental que desempeña cada sistema, permitiendo reflexionar sobre el uso y los posibles alcances en construcción del conocimiento a partir de estas representaciones.

### **2.2.1.3 Fenomenología de la función cuadrática**

Esta sección responde al análisis fenomenológico, o fenomenología de la función cuadrática, este permite el estudio del objeto matemático desde la relación con los diferentes fenómenos que podrían ser asociados con el objeto en sí y los conceptos del mismo, esto con fines de aportar a la solución a los problemas que estén asociados a los diferentes fenómenos, teniendo en cuenta las características, propiedades y elementos de utilidad del objeto de estudio, que para este caso en específico es la función cuadrática.

En relación a lo anterior y teniendo en cuenta las situaciones planteadas por Cañadas et al., (2008) el análisis fenomenológico que se desarrolla en la presente investigación atiende a la situación donde se identifica previamente un tema, se identifican los fenómenos en los que se denota utilidad de la función cuadrática, los contextos fenomenológicos y las posibles características estructurales, las subestructuras matemáticas que organizan los fenómenos y los contextos PISA (2012) considerados, estas son el resultado de una averiguación minuciosa en investigaciones previas, teniendo en cuenta la finalidad, y los procesos que guían la presente investigación. Es importante mencionar que estos componentes van relacionados, para dar claridad, al final de la descripción de los elementos que pertenecen a cada componente se presenta una tabla con las relaciones de los elementos de manera organizada y entendible.

Al hablar de fenómenos, es posible suponer la existencia de una extensa cantidad en relación con el contenido investigado, sin embargo, los fenómenos relacionados con la construcción del concepto de función cuadrática se acortan debido al concepto asumido para el contenido. Los siguientes postulados son fenómenos considerados acordes a los fines de la investigación:

- a. Utilidad o ganancia de un producto teniendo en cuenta su utilidad.
- b. Variación de parámetros principales entre representaciones con magnitudes cuadráticas
- c. Costos de fabricación de un producto en función del número de unidades vendidas
- d. Proporcionalidad directa entre una variable y otra variable cuadrática.
- e. Máximos y mínimos de un área
- f. desplazamiento de un objeto de un punto a otro (observación y variación de características)

Los posibles problemas a los que responden los fenómenos establecidos fueron catalogados en dos categorías teniendo en cuenta las características de cada situación:

- a. Solución de las variaciones de una magnitud cuadrada respecto a otra
- b. Determinación de magnitudes desconocidas relacionadas con la proporcionalidad cuadrática.

En cuanto a los contextos fenomenológicos, es posible evidenciar dos características estructurales, atendiendo a:

- a. Variación entre magnitudes cuadradas, lineales y términos constantes
- b. Variación cuadrática

De los postulados anteriores se puede decir que la primera hace relación a todos los datos establecidos en una situación para poder estructurar una representación de la función, son considerados datos completos y en la segunda es posible agregar la existencia de datos que se omiten, por ende, la representación tiende a una estructura diferente.

Teniendo en cuenta las descripciones planteadas, las subestructuras matemáticas se asocian a los tipos de representaciones anteriormente mencionadas, para este caso se ha contemplado caracterizarlas en:

- a. Funciones cuadráticas completas (representación algébrica)
- b. Funciones cuadráticas incompletas (representación algebraica)

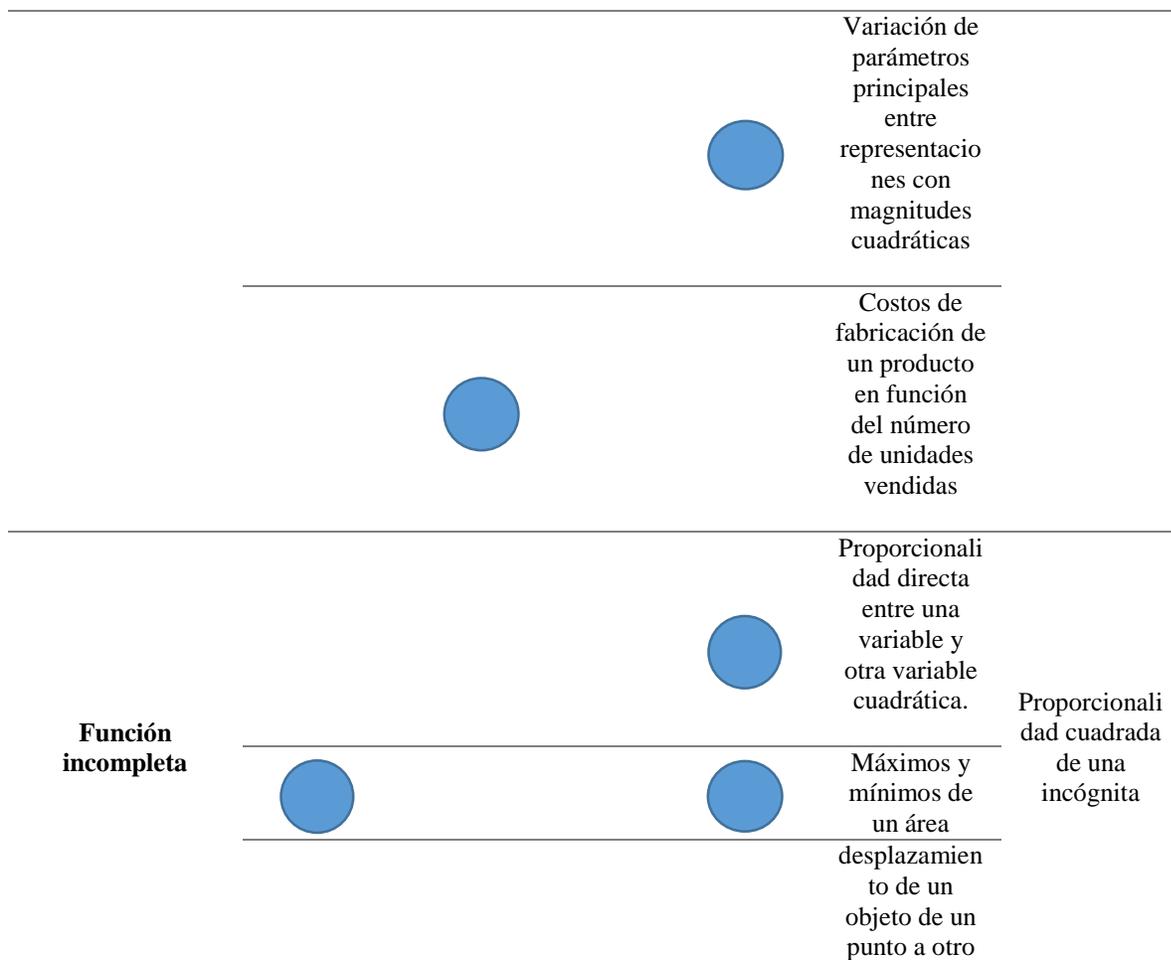
Por último, los contextos PISA (2012), son descritos teniendo en cuenta los aspectos en los cuales se encuentra identificada la situación, esta descripción corresponde a las categorías establecidas por PISA (2012), se postulan de la siguiente forma:

- a. Personal: En el deporte (tiro parabólico en la trayectoria de una pelota)
- b. profesional: En la industria (Calculo de los costos y ganancias en la fabricación de un objeto)
- c. Social: En el turismo (Descuento y compra de tiquetes de viaje)
- d. Científico: En la biología y la física (crecimiento de una especie y análisis al movimiento de un automóvil).

Cabe resaltar que estos aspectos fueron propuestos a partir del medio que rodea directamente a los sujetos de estudio, proporcionando cierto grado de confianza al encontrarse con las determinaciones propuestas. A continuación, se presenta una descripción articulada entre los componentes propuestos en la fenomenología de la función cuadrática:

Tabla 5: Relación de componentes de la fenomenología de la función cuadrática

SUBESTRUCTURAS	CONTEXTOS PISA 2012				FENOMENOS	CONTEXTOS
	PERSONAL	PROFESIONAL	SOCIAL	CIENTÍFICO		
<b>Función completa</b>					Utilidad o ganancia de un producto teniendo en cuenta variación de su magnitud	Variación entre magnitudes cuadradas, lineales y términos constantes



Proporcionalidad cuadrada de una incógnita

Fuente: Elaboración propia

Es posible observar en la Tabla 5 las siguientes apreciaciones: al lado izquierdo las subestructuras relacionadas de manera biunívoca con los contextos establecidos, por ejemplo, la subestructura función completa se relaciona de manera biunívoca con el contexto fenomenológico variación entre magnitudes cuadradas, lineales y términos constantes, de igual forma los fenómenos postulados se asocian a una o dos categorías establecidas por PISA (2012), por ejemplo, el comportamiento de las mariposas: el número de mariposas que se ven en el campo es proporcional al cuadrado de la temperatura, del mismo modo, el desplazamiento de un automóvil podría considerarse una situación relacionada con contextos tanto personales como científicos.

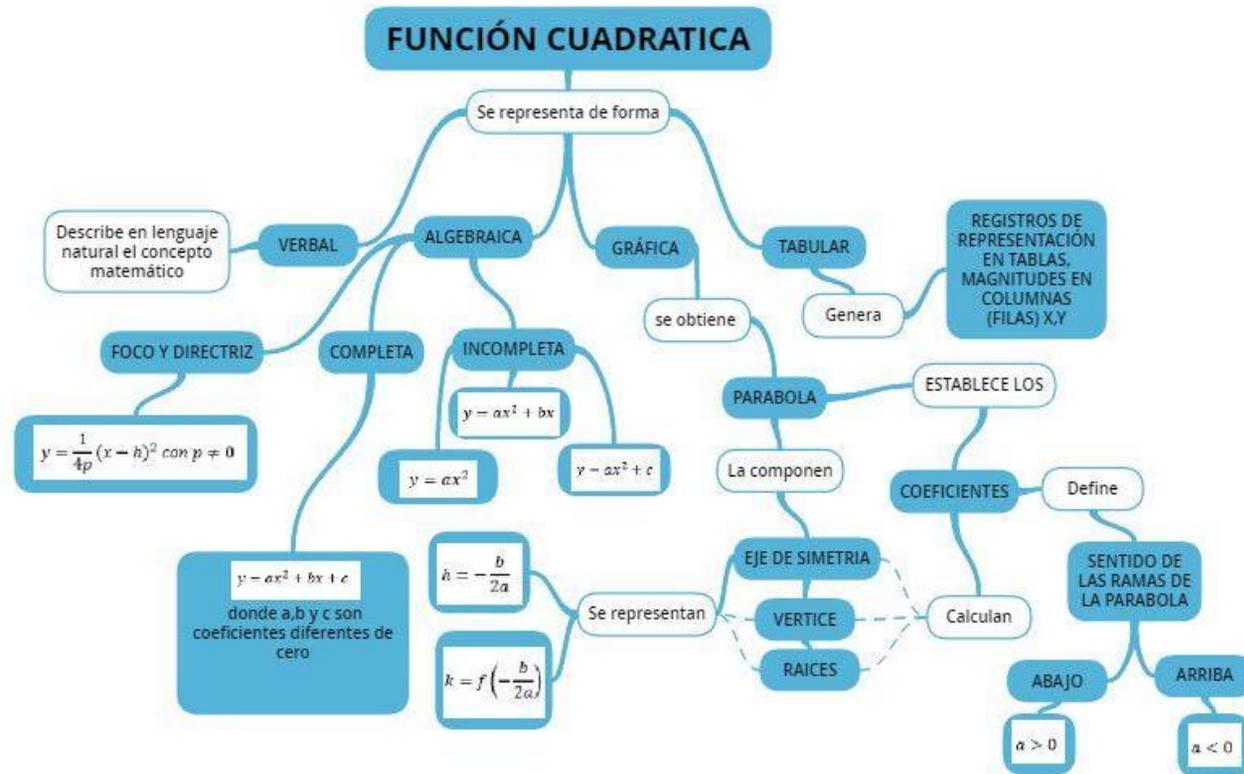
En este sentido, el análisis fenomenológico no consiste únicamente en establecer los elementos que forman cada componente, es necesario describir las relaciones y dentro de las mismas caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del problema que se quiere resolver

dentro del contexto del fenómeno) que pueden asociarse (modelizarse) con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática (Gómez, 2002).

### **Red conceptual**

La red conceptual es un instrumento gráfico didáctico, que permite exponer los conceptos propios ya sea a una disciplina o área. De igual forma, genera facilidad al elegir los conceptos de mayor preeminencia e instituir la correlación que se establezcan entre ellos. Por otra parte, no se requiere de una organización de tipo jerárquica ya que las líneas que enlazan los diversos conceptos dan sentido y orientan lo expuesto.

Ilustración 15: Estructura Conceptual del Objeto Matemático Función Cuadrática



Fuente: Elaboración propia.

## **2.2.2 Análisis Cognitivo de la Función Cuadrática**

En este apartado se presenta el análisis cognitivo de la función cuadrática, teniendo en cuenta la información estructurada en el apartado anterior (análisis de contenido de la función cuadrática) se presentan las expectativas de aprendizaje programadas para la función cuadrática, orientadas al diseño de tareas que aporten a superar las dificultades de aprendizaje de la función cuadrática identificadas en los sujetos de estudio, además de hacer mención de los diferentes errores y dificultades que pueden presentarse en la aplicación de las mismas.

### **2.2.2.1 Expectativas de aprendizaje de la función cuadrática**

Para el caso de la presente investigación y el respectivo objeto matemático se tiene en cuenta la postura de González & Gómez (2014) considerando los tres niveles en los que se categorizan las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo: procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales (nivel superior), objetivos de aprendizaje (nivel medio) y capacidades (nivel inferior). A partir de esto, se establecen las expectativas de aprendizaje de la presente investigación.

#### **Procesos matemáticos y capacidades fundamentales**

Ahora bien, los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales son descritas como “lo que hacen los individuos para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y de ese modo resolverlo” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p. 12). Al abordar la función cuadrática, se considera abordar los siguientes estándares de competencia en términos de los procesos matemáticos:

- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración (PM 1).

- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista (PM 2).
- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas (PM 3)
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz (PM 4) (MEN, 2006, p. 42).

En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales de la función cuadrática, se tienen en cuenta las siete capacidades descritas en PISA 2012, abreviadas de como:

- Pensar y razonar (PR)
- Argumentar (A)
- Comunicar (C)
- Modelar (M)
- Plantear y resolver problemas (PRP)
- Representar (R)
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones (ULS)
- Usar herramientas y recursos (UHR)

### **Objetivos de aprendizaje:**

A partir de los elementos planteados en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales, además de los elementos que caracterizan el objeto de estudio se definen los objetivos de aprendizaje de la siguiente forma:

Tabla 6: Objetivos de aprendizaje de la función cuadrática

<b>Objetivos de aprendizaje</b>	<b>Descripción</b>	<b>Estándar curricular con que se relaciona</b>
---------------------------------	--------------------	---

O1	Identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.</li> <li>● Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.</li> </ul>
O2	Representar la función cuadrática en los sistemas algebraicos, tabular y gráfico y realizar transformaciones entre sus registros de representación	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.</li> </ul>
O3	Plantear y resolver problemas de contexto relacionados con la función cuadrática utilizando datos e información propuesta en el problema.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.</li> <li>● Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.</li> <li>● Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.</li> <li>● Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.</li> <li>● Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia

## Capacidades

A partir de estos planteamientos de aprendizaje y después de un análisis de la información obtenida, pueden enunciarse las capacidades que se esperan que los estudiantes adquieran, estas corresponden al nivel inferior de las expectativas de aprendizaje, son estructuradas en torno a los objetivos de aprendizaje como se describe en la siguiente tabla:

Tabla 7: Capacidades en relación con el aprendizaje de la función cuadrática

<b>Objetivos de aprendizaje</b>	<b>Descripción</b>	<b>Capacidades</b>	<b>Descripción</b>
<b>1</b>	Identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real	C1	Identifica el significado de la función cuadrática
		C2	Reconoce la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática
		C3	Interpreta la relación entre los parámetros de la función cuadrática y la familia de funciones que genera
<b>2</b>	Representar la función cuadrática en los sistemas algebraicos, tabular y gráfico y realizar transformaciones entre sus registros de representación	C4	Traduce un registro de representación de la función cuadrática entre los diferentes sistemas
		C5	Hace conversiones entre diferentes formas de representación de la función cuadrática.
		C6	Reconoce la gráfica de una función cuadrática.
<b>3</b>	Plantear y resolver problemas de contexto relacionados con la función cuadrática utilizando datos e información propuesta en el problema.	C7	Identifica características y datos relevantes para la solución de un problema relacionado con la función cuadrática
		C8	Utiliza las características y elementos de la función cuadrática para desarrollar problemas
		C9	Crea problemas que se puedan modelar mediante funciones cuadráticas.

Fuente: Elaboración propia

### **Relación de Objetivos, capacidades y competencias**

En la siguiente tabla se establece la relación entre los objetivos de aprendizaje, las capacidades correspondientes al nivel inferior de las expectativas de aprendizaje y las capacidades fundamentales, con el fin de exponer la conexión entre los procesos que aportan al aprendizaje del objeto de estudio.

Tabla 8: Capacidades relacionadas con los objetivos de aprendizaje

Objetivos de aprendizaje	Descripción	Capacidades	Descripción	Capacidades Matemáticas Fundamentales								
				PR	A	C	M	PRP	R	ULS	UHR	
1	Identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real	C1	Identifica el significado de la función cuadrática	X	X							
		C2	Reconoce la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática	X	X					X		
		C3	Interpreta la relación entre los parámetros de la función cuadrática y la familia de funciones que genera	X	X		X			X	X	
2	Representar la función cuadrática en los sistemas algebraicos, tabular y gráfico y realizar transformaciones entre sus registros de representación	C4	Traduce un registro de representación de la función cuadrática entre los diferentes sistemas	X	X					X	X	X
		C5	Hace conversiones entre diferentes formas de		X		X		X	X	X	

		representación de la función cuadrática.								
		Reconoce la gráfica de una función cuadrática.		X	X			X		X
		Identifica características y datos relevantes para la solución de un problema relacionado con la función cuadrática	X	X	X	X	X	X	X	X
3	Plantear y resolver problemas de contexto relacionados con la función cuadrática utilizando datos e información propuesta en el problema.	Utiliza las características y elementos de la función cuadrática para desarrollar problemas	X	X		X	X	X	X	X
		Crea problemas que se puedan modelar mediante funciones cuadráticas.		X	X			X	X	X

Fuente: Elaboración propia

### Dificultades y errores

Teniendo en cuenta la información establecida en torno a los procesos matemáticos, capacidades fundamentales y objetivos de aprendizaje, a continuación, se describen las posibles dificultades y errores en los que el estudiante puede incurrir a la hora de desarrollar las actividades.

Tabla 9: Dificultades y errores relacionados con las actividades

<b>Dificultad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Error</b>	<b>Descripción</b>
<b>D1</b>	Presenta deficiencias en el manejo de concepto, contenidos y procedimientos relacionados a la función cuadrática	E1	Confunde la función cuadrática con un binomio algebraico
		E2	Utiliza los datos incorrectos para lograr establecer el punto máximo y el corte con el eje x
		E3	Realiza cambios en los componentes de la función cuadrática y no identifica las características resultantes.
<b>D2</b>	Demuestra falencias al interpretar y representar la función cuadrática desde los sistemas de representación verbal, algebraico y gráfico.	E4	Calcula de forma incorrecta la potencia cuadrada al reemplazar un valor
		E5	No ubica de forma adecuada una pareja ordenada en el plano cartesiano
		E6	No reconoce la parábola como gráfico que representa la función cuadrática
<b>D3</b>	Dificultad asociada a la interpretación y aplicación de elementos asociados a la función cuadrática en un problema de contexto	E7	Utiliza datos que no están involucrados en el problema para justificar su respuesta
		E8	Reconoce solamente la magnitud independiente de la función cuadrática
		E9	Propone de manera incorrecta la magnitud dependiente e independiente de la función cuadrática

Fuente: Elaboración propia

### **2.2.3 Análisis de Instrucción de la Función Cuadrática**

En este apartado se da estructura al análisis de instrucción a partir de la información producto del análisis de contenido y el análisis cognitivo asociado a la función cuadrática, describiendo en un primer momento las pautas a seguir para la selección de las tareas, posterior a esto, la secuencialidad de las tareas. Flores, Gómez & Marín (2012) consideran que el análisis de instrucción permite ver la visión funcional de las matemáticas; y señalan que aprender matemáticas implica que el estudiante aprecie y le de utilidad a los contenidos para resolver situaciones prácticas en contextos específicos. El modelo curricular sugiere incorporar el diseño y gestión de tareas que involucren problemas contextualizados que permitan movilizar a los estudiantes hacia el aprendizaje, con la mediación de recursos y materiales didácticos. En esta perspectiva, la función del profesor recae en promover una visión de la enseñanza que contribuya al logro de las expectativas de aprendizaje propuestas y a la superación de las dificultades y errores del contenido matemático.

#### **Selección de tareas**

Para la selección y estructuración de las tareas se tiene en cuenta los conocimientos conceptuales y procedimentales especificados en el análisis de contenido, los objetivos de aprendizaje, las dificultades y errores descritos en el análisis cognitivo, dado que se consideraron tareas que permitieran trabajar sobre los aspectos desarrollados en dichos análisis. Además, es importante destacar que el análisis crítico realizado sobre tareas preexistentes en investigaciones y textos educativos fueron adecuadas para efectos de la investigación. Donde adecuar implica seleccionar tareas que se ajustan a los criterios que la investigación maneja, incluyendo la posibilidad de modificarlas, y si es necesario, diseñar tareas nuevas (Marín, 2013).

#### **Variables involucradas en el análisis de las tareas**

Para el desarrollo del análisis de las tareas seleccionadas se tiene en cuenta los criterios de análisis establecidos en fase de análisis (ver apartado 3.4.3), al ser abordadas en la observación de las tareas, se logra concretar y describir los elementos que componen cada tarea y su relación con los objetivos de aprendizaje, la superación de las dificultades y la utilidad presentada para la presente investigación (ver apartado 5.3).

### **Secuencialidad de las tareas**

Respondiendo a los planteamientos establecidos por González & Gómez (2014) se considera dar una descripción de la secuencialidad de las tareas asociadas a sus objetivos de aprendizaje, capacidades, dificultades y errores. Para dar mayor claridad a las descripciones se establece la siguiente tabla:

Tabla 10: Organización de la clase desde las tareas matemáticas

Sesiones y tiempo de desarrollo	No. Tarea	Nombre de la tarea	Objetivo de aprendizaje	Proceso Matemático	Capacidad	Organización de la clase		Dificultad	Error	Material didáctico	Recursos
						Espacio	Agrupamientos estudiantes				
<b>Sesión 1 2 horas</b>	1 (30 min)	Paredes Cuadradas	O1	PM1, PM 2, PM 4	C1.	Aula de clase	Individual	D1	E1	Documento guía	Tablero, marcadores, regla.
	2 (60 min)	Atletismo matemático			C2	Aula de clase	Individual		E2	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo.
	3 (30 min)	Familia de funciones			C3	Sala de informática	Individual		E3	Documento guía	Tablero, computador, Herramienta web GeoGebra
<b>Sesión 2 2 horas</b>	1 (30 min)	Relaciones cuadradas	O2	PM 2, PM 3, PM 4	C4	Aula de clase	Individual	D2	E4	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo, tv, USB.
	2 (40 min)	Mira como baja			C5	Aula de clase	Individual		E5	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo
	3 (50 min)	Construya mos la forma			C6	Aula de clase	Grupos de 2 estudiantes		E6	Documento guía	Tablero, marcadores, papel milimétrico, icopor, chinches, alfileres, lana, pegante.
<b>Sesión 3 2 horas</b>	1 (40 min)	Las edades y los números	O3	PM1, PM 2, PM 3, PM 4	C7	Aula de clase	Individual	D3	E7	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo.
	2 (40 min)	Midiendo y solucionan do			C8	Aula de clase	Individual		E8	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo
	3 (40 min)	El valor de un problema			C9	Aula de clase	Individual		E9	Documento guía	Tablero, marcadores, regla, curvígrafo

Fuente: Elaboración propia.

### **2.3 Estructura de la Secuencia Didáctica**

Los contextos que rodean la educación en épocas actuales obligan a los profesores en ejercicio a enfrentar al reto de pasar del énfasis en la planificación de la enseñanza, a un nuevo planteamiento docente, postulando la generación de situaciones significativas, con el fin de que los estudiantes adquieran el aprendizaje que necesario para su autorrealización y participación en la sociedad. De alguna manera es posible decir que la educación continua en un proceso intencional, que pretende planear procesos de acuerdo con ciertas metas establecidas, sin embargo, estas metas deben aportar a la formación del estudiante desde algún contexto o parámetro, como, por ejemplo, el mejoramiento en el aprendizaje de algún contenido, de igual forma, la superación de dificultades y falencias que se presenten en este proceso.

Lo anterior implica que como profesores en ejercicio se debe analizar los diferentes problemas de contexto, tener claridad acerca de las competencias que se pretenden contribuir a desarrollar, generar una apropiación adecuada de los contenidos educativos de las diferentes áreas, todo esto con el fin de estructurar una mediación con los estudiantes para que aprendan, mejoren sus conocimientos, refuercen sus competencias y superen dificultades de aprendizaje. “Los saberes previos y las estrategias didácticas pertinentes articuladas con las competencias, contenidos y problemas juegan un papel fundamental a la hora de enfrentar los procesos necesarios para alcanzar las metas propuestas” (Tobón, Pimienta & García, 2010, p. 20), la secuencia didáctica es propuesta como estrategia que de cierta forma acopla los fines mencionados anteriormente. De acuerdo con Tobón et al., (2010) las secuencias didácticas son:

Conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas (p. 20).

En este orden de ideas, la secuencia didáctica constituye una estrategia que permite al profesor en ejercicio ordenar, estructurar y articular actividades con el fin de reflexionar, indagar y mejorar el ejercicio docente. Es importante esclarecer que la secuencia didáctica permite establecer un principio y un fin, además de ser antecedentes y consecuentes, esto conlleva a que el profesor en ejercicio no improvise en su práctica. El hecho de planificar los contenidos en este conjunto de actividades propuesta por el profesor en ejercicio proporcione diferentes líneas formativas teniendo en cuenta los posibles errores que se presenten, de cierta forma pueden ser cuestiones o dificultades en la construcción de las respuestas relacionadas con las actividades propuestas.

Para la elaboración de la secuencia didáctica existen múltiples metodologías y posturas, algunas más elaboradas que otras, sin embargo, para el caso de esta investigación se pretende optar por una descripción detallada que guarda relación con la definición de secuencia didáctica abordada. Rodríguez (2014) considera que la planificación de la secuencia didáctica debe estructurarse bajo un inicio, un desarrollo y un cierre con el fin de que los alumnos obtengan un buen aprendizaje a través de las estrategias metodológicas y los recursos didácticos. A continuación, se dará una descripción de las componentes y los momentos que se pretenden asumir para la planificación de la secuencia didáctica, los cuales se acogen a las posturas que proponen Tobón et al., (2010) y Rodríguez (2014).

Ilustración 16: Secuencia Didáctica



Fuente: Tobón et al., (2010)

### **Componentes de la secuencia didáctica**

Los elementos expuestos a continuación hacen parte de la estructura postulada por Tobón et al., (2010) considerados como secciones generales que permiten dar diseño a la secuencia didáctica propuesta, estas configuradas con el producto del análisis didáctico de la función cuadrática, los componentes atienden a:

- Situación del problema del contexto: Problema relevante al contexto de los estudiantes el cual se busca la formación. Representa un aspecto imperante, ya que de este depende el acoplamiento del estudiante con las actividades que se presentan.
- Competencias a formar: Se describe la competencia o competencias que se pretender formar mediante la secuencia didáctica. La descripción se relaciona con las metas y el contenido específico abordado.
- Actividades de aprendizaje y evaluación: Se indican las actividades de aprendizaje autónomo de los estudiantes a partir del problema del contexto y las competencias a formar. Dichas actividades deben estar articuladas entre sí para contribuir al problema.
- Evaluación: Se establecen criterios y evidencias para orientar la evaluación del aprendizaje, así como la ponderación respectiva. En el formato de la secuencia didáctica, la evaluación es paralela a las actividades y se realiza en dichas actividades.
- Recursos: Se establecen los materiales educativos para la secuencia didáctica, así como los espacios físicos y equipos.

Ahora bien, Rodríguez (2014) plantea una descripción detallada de los momentos relacionados con los procesos que se deben tener en cuenta en la planificación de la secuencia didáctica, esta postura se relaciona con los componentes estructurados por Tobón et al., (2010), la descripción se caracteriza de la siguiente forma:

Tabla 11: Momentos de planificación de la secuencia didáctica

<b>MOMENTO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>	<b>ACTIVIDADES</b>
<b>INICIO</b>	En estas actividades iniciales el docente controla las actividades o conocimientos previos, buscando introducir actividades iniciales como un diálogo.	Determina la lista de tareas y las temáticas de los contenidos.  Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación.
	Son actividades que sirven como punto de partida de manera lógica para construir y reconstruir significados.	Identifica y recupera saberes, conocimientos previos que tiene cada alumno en relación con los nuevos contenidos de aprendizaje (preconcepciones o pre-conocimientos)
	Todavía no se sabe si las estrategias y actividades tratadas son suficientes, y si van a funcionar, pero hay que seguir trabajando y hacer las primeras intervenciones.	Estima lo que aprende, lo que le falta aprender e identifica en donde se puede intervenir.
	Una de ellas es estar al tanto de construcciones en los procesos de aprendizaje a través de conflictos cognitivos y esto en cierta manera obligará al alumno a cuestionar sus conocimientos y reconsiderar su análisis, interpretación y explicación del contenido de estudio.	Establecer un vínculo entre lo que el alumno ya conoce y los nuevos contenidos  Exposición del concepto  Actividades motivadoras  Actividades enfocadas a captar la atención del alumno  Fomenta la construcción de preguntas generadoras
Es necesario revisar constantemente las actividades iniciales su impacto y funcionalidad y vigilar las frecuentes necesidades e intereses de los alumnos.	Funcionalidad de los nuevos conocimientos  Presentación de una situación problema-planteamiento del problema	

	<p>Es en este momento inicial donde se consideran los referentes teóricos para construir conocimientos es cuando comienzan a ajustarse los aprendizajes esperados y se hacen de manera transversal.</p> <p>Los ajustes que se hagan vienen identificados de acuerdo con su contenido y pueden ser: conceptual, procedimental y actitudinal.</p>	<p>Presentación del contenido o Consulta de diversas fuentes de información.</p>
<p><b>DESARROLLO</b></p>	<p>En estas actividades el grado de conocimiento es más complejo, el proceso de aprendizaje depende de la capacidad o habilidad del docente y toma control de las condiciones prácticas de los aprendizajes esperados, habrá entonces de introducir actividades.</p> <p>El alumno es el protagonista, será él quien haga el desarrollo de la temática a través de diversas estrategias que el docente le permita, de manera que tendrá que demostrar por medio de ciertas competencias establecidas en los propósitos y en los aprendizajes esperados.</p> <p>Una del punto clave para este momento de secuencia es que cuando los contenidos sean más complejos la conducción de la clase sea demasiada</p>	<p>Aplicación y ejecución de las estrategias programadas</p> <p>Existe una articulación entre los saberes el conocimiento científico.</p> <p>Contextualiza el macro de trabajo académico y vincula las ideas previas.</p> <p>Hace una selección de evidencias y productos.</p> <p>Inicia el momento de análisis y desarrollo del problema.</p> <p>Identifica las áreas de mejora y se retroalimenta.</p> <p>Hace del contenido interesante, significativo y funcional para los alumnos</p> <p>Crea zonas de desarrollo próximo para intervenir</p> <p>Expone respuestas intuitivas</p>

	simple. En esta etapa de desarrollo se ubican las actividades de aprendizaje, facilita sus procesos para el logro de los aprendizajes esperados.	Búsqueda de soluciones o Aplica actividades procedimentales  Incluir nuevas estrategias
	Papel del docente	
<b>CIERRE</b>	La parte de la validación es el complemento de la actividad inicial y de los aprendizajes esperados, en esta se observa la determinación de los criterios de desempeño, las evidencias como los exámenes, escalas estimativas.	Esta última etapa de actividades está relacionada con las actividades de evaluación o Conclusiones.  Discusión del grupo y los diferentes puntos de vista  Notifica la valoración de los aprendizajes esperados
	En el apartado de cierre culmina con la parte de valorar los desempeños posibles que dan cuenta del fortalecimiento de las competencias.	Elabora síntesis en relación con el aprendizaje esperado, retomando preguntas o dudas de los alumnos
	Las evidencias son el reflejo de la planificación, también son la creatividad y la innovación, así como la intervención que tenga en los aprendizajes esperados, que determinan el balance de logros y oportunidades de mejora.	La vigilancia del conocimiento en su proceso y desarrollo hace que se aproveche y se retorne otra transversalidad  Estimar el nivel de eficacia de la planificación.

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta los componentes y los momentos propuestos para el diseño de la secuencia didáctica es posible establecer una guía, para el desarrollo de esta se toma como contenido principal la función cuadrática producto del análisis didáctico de la misma.

La planeación de secuencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de un determinado tema debe ser considerado cada vez más por los docentes, ya que por medio de esta se aporta a la satisfacción de las necesidades de la educación actual que aumentan a pasos agigantados. Además, aclara el sentido y pertinencia de lo que se enseña, los aprendizajes que se pretenden potenciar y las actividades que se deben realizar.

## CAPITULO III

### 3. MARCO METODOLOGICO

En el capítulo anterior se establecieron las bases teóricas necesarias para el desarrollo del presente trabajo de investigación, dando pie a la construcción de los procedimientos para dar respuesta a la pregunta de investigación, teniendo en cuenta los objetivos y el enfoque. En el presente capítulo se da una descripción de la estructura metodológica y sus fases, empezando por la perspectiva metodológica, esquema y diseño de la investigación a implementar, siguiente a esto, se describen los procesos y estrategias presentes en el trabajo de campo y caracterización, por último, se describen los elementos que configuran el plan de análisis acorde a los propósitos de investigación.

#### 3.1 Perspectiva metodológica

La presente investigación toma la postura objetiva de contribuir el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática a través de una secuencia didáctica, que acoge un corte no experimental. El enfoque adoptado por la investigación es de carácter cualitativo. Krause (1995) manifiesta que:

La metodología cualitativa se refiere, entonces, a procedimientos que posibilitan una construcción de conocimiento que ocurre sobre la base de conceptos. Son los conceptos los que permiten la reducción de complejidad y es mediante el establecimiento de relaciones y desarrollos de estos conceptos que se genera la coherencia interna del producto científico (p.21).

Considerando que la investigación cualitativa se basa en un procedimiento inductivo que posibilita la exploración y la descripción de fenómenos específicos en función de los significados que las personas le conceden. En esta perspectiva, el enfoque cualitativo enmarca los fines y propósitos generales de la presente investigación, ya que en principio busca establecer instrumentos que permitan la identificación de dificultades, continuo a esto

realizar una caracterización de dichas dificultades y a su vez la creación de estrategias que permitan el mejoramiento del contenido matemático investigado.

Teniendo en cuenta la concepción metodológica de Krause (1995), inicialmente el proceso de categorización de la información proporcionada en el análisis documental para su posterior adaptación cuenta como procedimiento de construcción de conocimiento. A su vez, en el proceso de gestión de los instrumentos y caracterización de las dificultades se hace necesaria una relación directa con los sujetos de estudio, con el fin de registrar información relevante, procesos característicos que permitan establecer una descripción y análisis de los desarrollos y comportamientos observados, para este caso en específico, se tiene en cuenta que la educación remota juega un papel fundamental en la aplicación de instrumentos de identificación de dificultades en los sujetos de estudio, en estos momentos la educación se desarrolla mediante un modelo virtual, entendido como:

La educación virtual, también llamada **educación en línea**, se refiere al desarrollo de programas de formación que tienen como escenario de enseñanza y aprendizaje el ciberespacio. En otras palabras, la educación virtual hace referencia a que no es necesario que el cuerpo, tiempo y espacio se conjuguen para lograr establecer un encuentro de diálogo o experiencia de aprendizaje. Sin que se dé un encuentro cara a cara entre el profesor y el alumno es posible establecer una relación interpersonal de carácter educativo (MEN, 2016, p. 67)

Partiendo de lo anterior, es posible desarrollar los procesos necesarios siguiendo el modelo presente, esto debido a la propagación del virus SRAS-CoV-2 (Coronavirus) de forma pandémica y las medidas tomadas por los entes gubernamentales para salvaguardar la salud y el bienestar de la población en general, como la cuarentena estricta y el uso de modalidades virtuales, semipresenciales o alternancia bajo protocolos de bioseguridad.

### **Alcance investigativo**

En concordancia al enfoque metodológico escogido para la investigación, es pretendido un alcance descriptivo teniendo en cuenta que este se adapta al proceso de alcance de los objetivos propuestos, ya que como lo menciona Dalen & Meyer (2006):

Su meta no se limita a la recolección de datos, sino a la predicción e identificación de las relaciones que existen entre dos o más variables. Los investigadores no son meros tabuladores, sino que recogen los datos sobre la base de una hipótesis o teoría, exponen y resumen la información de manera cuidadosa y luego analizan minuciosamente los resultados, a fin de extraer generalizaciones significativas que contribuyan al conocimiento (p. 1).

A partir de lo anterior, al realizar una descripción de los instrumentos que permiten identificar las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática se reconocen propiedades y rasgos necesarios para su caracterización, teniendo en cuenta que dicha caracterización se establece bajo la descripción de referentes teóricos. En este caso su enfoque se direcciona a la obtención de descripciones específicas, por lo tanto, se cataloga como un alcance descriptivo ideográfico cuyo énfasis está en lo particular e individual, se adopta una postura observacional transversal ya que esta se entiende por recolectar información en un momento concreto del objeto de la investigación, se logra una idea certera del medio estudiado.

Gran parte de la investigación hace uso del registro de los desarrollos del sujeto de estudio y con el fin de generar registros precisos y fructuosos para la investigación se ha de utilizar la observación participante entendida como forma cualitativa de observación que permite al investigador recoger los datos de manera natural y estar en contacto con los propios sujetos observados (Rodríguez, Gil, & García, 1996), la observación se desarrolla con un presencialidad remota asistida, siguiendo los márgenes de la educación actual, a pesar de no encontrarse en un espacio físico, la recolección de la información necesaria es registrada de manera minuciosa, contemplando de igual forma cada factor que intercede en cada paso.

Los referentes conceptuales anteriormente mencionados, el alcance descriptivo es un proceso fundamental que abarca en su mayoría los procesos necesarios para describir cualidades, características y elementos, una de los referentes teóricos que estructuran la presente investigación es la del análisis didáctico de Gómez (2002), en ella el alcance descriptivo juega un papel de suma importancia, debido a su utilización en cada uno de los análisis que la componen, para esta investigación en particular, tal es el caso del análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

Haciendo una descripción específica, según Gómez (2002) el análisis de contenido se centra en procesos fundamentales analíticos con fines de identificación y caracterización, de significados. A partir de lo anterior, el alcance descriptivo permite la observación de las características y puntos importantes a analizar de un contenido en específico, se convierte en procedimiento implícito de dicho análisis. Ahora bien, si se desea abordarlo a fondo en las partes que componen el análisis de contenido como la estructura conceptual se describen los elementos, procesos y procedencia de los datos a analizar, de igual forma en los sistemas de representación y en la fenomenología se encuentra presente, debido a que el proceso de identificación de información requiere una previa descripción de los procesos y características a analizar.

Para el caso del análisis cognitivo, se enmarca en palabras de González & Gómez (2014, p. 1) “El análisis cognitivo permite hacer una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el tema matemático en cuestión”. Específicamente se enfoca en dos categorías: La primera es describir las expectativas de aprendizaje que se programe para el tema matemático en cuestión, diferenciando el ámbito cognitivo y afectivo, y la segunda es categorizar las expectativas de aprendizaje del tema respecto a su operatividad y sean de orientación para el diseño de tareas en el salón de clase, proceso continuo a una descripción, lo que se relaciona con el siguiente análisis identificado como análisis de instrucción, retomando palabras de González & Gómez (2014) permiten organizar las respectivas tareas en un orden definido con una estructura que permita el buen desarrollo del análisis didáctico, esto relacionado con la finalidad de la investigación permite dar forma y

secuencialidad a las tareas que se establecen en la sección y aportar a la construcción de la secuencia didáctica.

Del mismo modo, es importante resaltar que la función cuadrática, objeto de estudio de la presente investigación, es elemento contundente en los procesos concernientes al alcance descriptivo, ya que este hace parte del desarrollo y alcance de cada objetivo propuesto. Para el caso del primer objetivo específico, que hace referencia a establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, no solo se observa que el proceso se centra en describir dificultades, ya que previo a esto también se debe realizar una detallada descripción de las características y componentes que estructuran las fuentes de información que contienen el objeto de estudio, que se analizaron con el fin de establecer el instrumento que permitió la identificación de las mencionadas dificultades.

De modo idéntico, en el proceso de caracterización de dificultades, que encontramos en el segundo objetivo específico, es producto de una previa descripción de categorías, que en principio están asociadas al objeto de estudio en cuestión. No obstante, en el tercer objetivo específico que se propone estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje del objeto de estudio, se encuentra una relación directa entre el objeto de estudio y la secuencia didáctica, ya que en ella se detalla una descripción de las estrategias a seguir para el mejoramiento del aprendizaje de dicho objeto de estudio.

En relación a lo anterior, las estrategias que conformaran la secuencia didáctica se enmarcan en un alcance descriptivo, ya que de cierta forma la estructura final (secuencia didáctica), deja un camino abierto a que sea validada, aplicada o en su defecto modificada, con el fin de mejorar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión, los futuros profesores en ejercicio realizaran un análisis y mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática, aclarando el hecho de que se presenten dificultades similares, para lo cual se ha construido como aporte la respectiva secuencia didáctica.

### **3.2 Esquema de la investigación.**

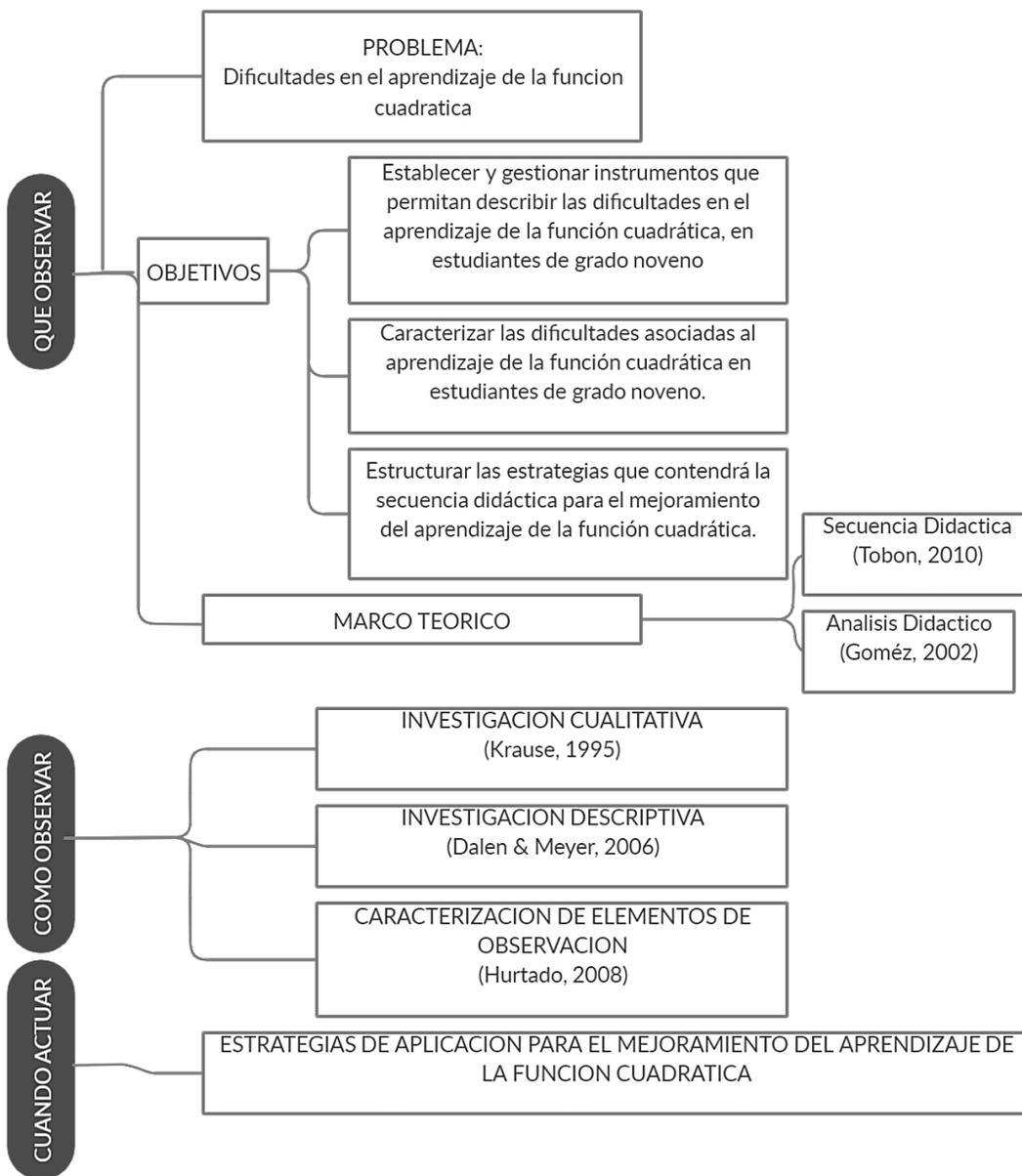
En el desarrollo de toda investigación se deben establecer caracteres fundamentales, en este caso existe un enfoque expuesto por Bisquerra (2004) el cual describe que todo investigador, al acercarse a la realidad, especula el “que observar”, “como observar” y “cuando actuar”, como adquirir datos importantes, la pertinencia de los instrumentos de recolección de información y como desarrollar un análisis a los datos obtenidos.

Teniendo en cuenta lo anterior el esquema que representa la presente investigación toma como base inicial en el que observar el problema de investigación, el cual conduce al planeamiento de unos objetivos (general y específicos) para establecer los pasos a seguir, necesarios para dar respuesta al problema de investigación formulado, para lograr estos objetivos es propuesto un marco teórico también interno en el carácter del “que observar” ya que este será el bloque de información ineludible para el desarrollo de la investigación compuesto por bases fundamentales como el análisis didáctico, la secuencia didáctica entre otros.

Ahora bien, el “como observar”, que tiene relación directa con la metodología, abarca los aspectos principales metódicos como la investigación cualitativa, piedra angular de esta investigación, subyacente a esta el alcance descriptivo, que es ineludible para avanzar a lo que en el esquema se establece como la caracterización de los elementos de observación.

En este orden de ideas, el “cuándo actuar” se posiciona como último carácter fundamental en el proceso de investigación, el cual contiene las estrategias ya formadas y fundamentadas que al ser aplicadas se pretende aportar al mejoramiento en el aprendizaje del contenido matemático función cuadrática.

Ilustración 17: Esquema de investigación.



Fuente: Elaboración propia.

### 3.3 Fases de la investigación

El desarrollo investigativo expuesto hasta el presente capítulo sustentan la fundamentación teórica, dicho desarrollo se ha trazado un proceso de observación y

entendimiento en el cual se propone abordar fundamentos desde lo general, desplazándose a lo específico y particular. Se plantea ahora dar estructura la parte práctica, generada a partir de análisis, documentación y establecimiento de semblantes observados en estudiantes que se enfrentan a una clase donde el objeto de enseñanza - aprendizaje es la función cuadrática, de esta forma, configurar estrategias que permitan el mejoramiento en el objeto de estudio investigado.

Es así, que para el desarrollo de esta investigación se establecieron fases que abarcaron aspectos esenciales a partir de los siguientes puntos.

1. En primer lugar, se procede a describir el proceso en que se planteó el problema a investigar.
2. En el segundo momento se pasa a explicar el proceso de acceso a la información y la elección de los sujetos de estudio.
3. A continuación, se procede a presentar los objetivos específicos que se articulan con la fase de campo, las diversas técnicas, instrumentos de registro y fuentes de información.
4. Se describen las categorías y descriptores empleados para el análisis de los datos.

### **3.3.1 Fase inicial**

Esta primera fase corresponde a la examinación y evolución del problema a investigar, abarcando semblantes pertenecientes a la estructura del problema, como su naturaleza, formulación, etc. El proceso de formulación y establecimiento del problema es resultado de un proceso de examinación, análisis y reformulación del mismo. Inicialmente se tomó como enfoque principal el mejoramiento en el aprendizaje de objetos matemáticos en los cuales existieran dificultades de aprendizaje. Siguiendo a esto, se reformuló dicho planteamiento del problema debido a la cantidad de contenidos y la variedad de posibles dificultades que pueden presentarse en su aprendizaje, teniendo esto en cuenta, se centra en el proceso de formulación y establecimiento en un objeto de estudio específico en el cual se

presentaron notorias dificultades de aprendizaje, anexo a esto, las experiencias y motivaciones personales. Se desarrolla un proceso de exploración y documentación, resultado de este proceso se presenta interés por el contenido matemático función cuadrática y las respectivas dificultades que se presentan en su aprendizaje.

En consecuencia, se hace necesario dar claridad y orden a dichos planteamientos, esto con el fin de garantizar la existencia de un problema, este proceso de consolidación se realizó a través de una búsqueda de antecedentes, enfocados a la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático función cuadrática e investigaciones dedicadas a la realización de instrumentos de identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática. Como resultado de los procesos establecidos para la determinación del problema, se logra concretar la siguiente cuestión:

**¿Cómo una secuencia didáctica contribuye al aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes de noveno grado de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”?**

Una vez formulado y delimitado el problema, se procede a establecer los propósitos de investigación, descritos como objetivos, estructurados con el fin de aportar a la solución de dicho problema, en consecuencia, es necesario apoyarse en un marco teórico que de soporte a los procesos necesarios para el alcance de dichos propósitos de investigación. En lo que respecta al desarrollo del marco teórico, se decide tratar de asumir algunas posiciones teóricas que permitieran contribuir a la solución del problema, estas teorías están soportadas en elementos teóricos de Tobón et al., (2010) con relación a secuencia didáctica entendida como “Un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos” (p.20), en complemento, los elementos teóricos de Gómez (2002) con relación a análisis didáctico descrita como “Un procedimiento para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas, en el contexto concreto de una hora de clase o de una unidad didáctica completa” (p.2).

Sobre la base de las consideraciones anteriores y en conjunto de estos elementos teóricos establecidos, se pretende constituir metodológicamente los elementos y procedimientos necesarios para contribuir a la solución del problema de investigación, y al alcance de los propósitos de investigación propuestos.

### **Sujetos de estudio**

Para el desarrollo de esta investigación, específicamente el trabajo de campo se propone la academia militar “General José Antonio Anzoátegui” del municipio de Neiva (Huila-Colombia). La institución propuesta se encuentra ubicada en la zona central del municipio, sector donde se denota un amplio desarrollo académico y competitividad entre instituciones educativas de gran trascendencia en el municipio, anexo a esto, la accesibilidad al sector donde se encuentra ubicada la institución es considerablemente fácil, del mismo modo la disposición que presentó la institución en cabeza de la actual administración, rector, cuerpo militar y cuerpo académico son fundamentales para el proceso de investigación. La institución cuenta con una población heterogénea respecto a género y estratificación social. Para propósitos de la presente investigación se hace necesario el establecimiento de unos sujetos de estudio, por consiguiente, la población a considerar para desarrollar la investigación la componen 10 estudiantes del grado 901 este grupo de estudiantes es variable respecto a rasgos, comportamientos y actitudes, es mixto respecto a género y sus edades oscilan entre 14 y 16 años.

Se escogió el grado noveno porque en Colombia, en este grado finaliza el ciclo de educación básica secundaria, el cual, es el último grado de educación obligatoria (Art. 67, Constitución Nacional de Colombia) y según los estándares básicos de competencias en este grado corresponde realizar el estudio de situaciones de variación con funciones polinómicas (MEN, 2006). Así para efectos de la investigación y siguiendo los fines metodológicos se consideró necesario acceder a todos los sujetos para recopilar los datos de la investigación. Como característica disciplinaria notable, el grupo sigue un régimen militarizado, según

reglamento y normas del Batallón de Artillería No. 9 de Neiva. Los sujetos de estudio son adolescentes pertenecientes a estratos que oscilan entre 3 y 4, y actualmente ninguno tiene registro de problemas psicológicos, cognitivos ni motrices.

A demás, es posible describir que el rendimiento en las competencias matemáticas de dicho grupo no es del todo positivo, en anteriores pruebas diagnósticas y de desempeño se han denotado dificultades en el desarrollo de temáticas específicas del grado mencionado, denotando un déficit en los objetos de estudio de la presente investigación, además de esto se suma el bajo rendimiento en el área de matemáticas de las pruebas saber, estas caracterizaciones están registradas en las pruebas particulares aplicadas y categorizadas.

### 3.3.2 Fase de campo

En esta fase se produce la implementación “real” del diseño de la investigación, partiendo de la articulación de cada objetivo específico con cada método, instrumento, procedimiento, para alcanzarlo. A continuación, se presentan los objetivos de investigación que serán articulados en el desarrollo de la fase de campo:

Tabla 12: Objetivos específicos de la investigación

<b>Objetivos Específicos</b>	
1.	Establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, en estudiantes de grado noveno.
2.	Caracterizar las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno.
3.	Estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.

Fuente: Elaboración propia.

Según Barrera (2000) “la selección de técnicas e instrumentos de recolección de datos implica determinar por cuales medios o procedimientos el investigador obtendrá la información necesaria para alcanzar los objetivos de la investigación” (p. 154). Para el

alcance de los objetivos específicos se seleccionaron técnicas que ayudaran a una precisa adquisición de información y desarrollo pertinente, además de la descripción del diseño, instrumentos, procedimientos y elementos utilizados para el alcance de cada objetivo específico en este proceso investigativo:

### **3.3.2.1 Objetivo Específico 1:**

**Establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, en estudiantes de grado noveno.**

#### **Diseño general**

Para el desarrollo y alcance del primer objetivo específico el cual se estructura como el establecer los instrumentos que permitirán la identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática, se utilizó la técnica de análisis documental entendida como “una técnica en la cual se recurre a información escrita ya sea bajo la toma de datos que pueden haber sido producto de mediciones hechas por otros o como contexto que en sí mismo constituyen los eventos de estudio” (Hurtado, 2008, p.427) con el fin de establecer los instrumentos.

En este sentido, el análisis documental se aplicó con el fin de establecer en la literatura, baterías e instrumentos, procesos para detectar dificultades asociadas a la función cuadrática. Para poder desarrollar el respectivo análisis documental se utilizaron como fuentes de información diversas bases de datos, revistas especializadas en educación matemática, donde se encontraron diversos documentos como trabajos de investigación, tesis de posgrados, artículos de investigación entre otros documentos académicos.

#### **Construcción del instrumento diagnóstico**

Para registrar la información producto del análisis documental se utilizaron como instrumentos de recolección de datos unas rejillas de observación entendidas según Cornejo (1996) como un instrumento para explorar la estructura y el contenido de las teorías implícitas o redes de significado a través de las cuales percibimos y actuamos en el acontecer cotidiano. El diseño de la rejilla de observación se establece bajo categorías específicas del contenido matemático función cuadrática, siendo este producto del marco teórico de la presente investigación, permitiendo describir y categorizar la documentación seleccionada, las categorías están comprendidas bajo el concepto de:

1. Fuente: La cual describe a cabalidad los ítems de vital importancia de la fuente a observar, para este caso en específico, la denominación de la fuente (título), el autor de la fuente, el año de presentación de la fuente y tipificación de la fuente.
2. Actividad: en la cual se puede observar los procesos que constituyen la fuente a observar, desde su forma completa
3. Estructura conceptual: entendida como la agrupación de conceptos correlacionados que delimitan las acciones del investigador en el análisis de contenido. De igual modo, establece una guía de desarrollo, compuesta por los campos conceptuales y procedimentales, en donde encontraremos la descripción de los elementos de la fuente que enmarcan los conceptos y los procedimientos.
4. Sistemas de representación: se establece como un sistema de normas que permiten identificar, operar y determinar relaciones entre signos, además de esto posibilita observar los modos en que el concepto se presenta. Teniendo esto en cuenta es posible postular los tipos de representación que para el caso del objeto de estudio de la presente investigación pueden ser: representación algebraica, representación tabular, representación gráfica y la transformación de dichas representaciones que se contemplan en las fuentes investigadas.

5. Contextos: Estos permiten dar objetividad al contenido abordado, denotando si estos hacen parte de situaciones estrictamente matemáticas o por el contrario están ligados a situaciones de diario común, que no atienden a contextos directamente matemáticos. Para el caso del presente objeto de estudio se han tomado como contextos: el contexto matemático y el contexto extra matemático.

En relación con lo anterior, las diferentes fuentes establecidas para el análisis documental se observan a detalle, con el fin de denotar, comparar y constituir relaciones entre ellas, estos productos de observación se describen como actividades que serán consignadas en las respectivas categorías de la rejilla de observación (ver anexo 1). Posterior a esto, se diseñó un instrumento diagnóstico producto del análisis documental, que contiene las actividades estructuradas de tal forma que al realizar su respectivo análisis permite la identificación de dificultades de aprendizaje de la función cuadrática.

### **Gestión del instrumento diagnóstico**

Partiendo de lo anterior, se procedió a dar una descripción de los aspectos que conciernen a la gestión del instrumento diagnóstico, como los participantes directos, el proceso de aplicación, sesiones y estructuras de la misma. Es importante mencionar que el proceso de aplicación del instrumento diagnóstico y la respectiva recolección de información en el trabajo de campo se realizó de manera semi-asistida, atendiendo a la emergencia sanitaria presente en la población. Las actividades relacionadas con acompañamiento y observación se realizaron a través de procesos virtuales por parte del docente investigador, además el docente titular de la asignatura realizó la aplicación del instrumento diagnóstico a los estudiantes que se presentaron en el aula (siendo 10 estudiantes la cantidad máxima permitida en el aula), esto con el fin de seguir las normas de bioseguridad establecidas por el gobierno nacional, departamental y municipal, además de salvaguardar la salud de los entes participantes en la investigación.

### **Acceso a los sujetos de estudio:**

Es importante mencionar que cuando se escogió la institución, se solicitó una autorización de manera formal y escrita al rector(a) con el fin de acceder a los alumnos de la institución y de esta forma poder desarrollar la investigación (ver anexo 2). Continuo a esto, se socializo la iniciativa de investigación con el rector(a) y las directrices administrativas de la institución. Al tener el aval por parte de la institución, se procedió a realizar un acercamiento y discusión con el profesor en ejercicio Edgar Baquero, titular de la asignatura matemática en el grado noveno con el fin de entablar el proceso de sensibilización de la investigación, programación de las actividades a desarrollar y en lo posible una caracterización de los sujetos de estudio en términos de disposición y actitudes, todo esto encaminado a esclarecer semblantes fundamentales en el reconocimiento de los sujetos de estudio.

Como parte del proceso anterior, se pactó la plataforma y aula virtual en la que se realizaron las clases, en las horas correspondientes a la clase de matemáticas, proporcionadas por el profesor en ejercicio, los estudiantes correspondientes al grado noveno, que para fines de la investigación se han denominado sujetos de estudio y la metodología impartida por el profesor en ejercicio. De forma similar, es importante aclarar que los sujetos de estudio debían tener un conocimiento previo y en desarrollo sobre el objeto de estudio, en lo posible que el profesor en ejercicio haya impartido sus clases en gran proporción del contenido que compone el objeto de estudio o en su defecto las clases finales correspondientes a la enseñanza de dicho contenido.

### **Proceso de aplicación**

A partir de la descripción anterior, se procedió a entablar correlación entre la metodología establecida, el profesor en ejercicio y el sujeto investigador que para este caso corresponde al Licenciado en matemáticas William Andrés Avila Leyva. En estos procesos, es necesario aclarar que la observación participante entendida como el proceso que faculta a los investigadores a aprender acerca de las actividades de las personas en estudio en el

escenario natural a través de la observación y participando en sus actividades (DeWALT, 2002) empezó a tener representación en los procesos proyectados para la gestión del instrumento diagnóstico, esto desarrollado desde una clase virtual activa y en vivo con los sujetos de estudio.

A fin de organizar los procesos de aplicación del instrumento diagnóstico y teniendo en cuenta aspectos fundamentales como presentación, socialización y desarrollo del proceso de aplicación del instrumento, se contemplaron los planteamientos de Patton (1987), enfocado a los momentos esenciales de la observación participante. Así, se configuro la aplicación en dos momentos: uno concerniente a la sensibilización del instrumento y el otro lo correspondiente al desarrollo del instrumento por parte de los sujetos de estudio.

En el desarrollo de las actividades en el primer momento, se establecieron: presentación al curso del sujeto investigador y los respectivos propósitos de la investigación, acompañamiento a las clases virtuales correspondientes a la enseñanza del objeto de estudio, además de otros instrumentos de registro de información, como grabaciones de las clases en la plataforma. Es necesario argumentar que el proceso de registro de información se realiza atendiendo a cada detalle presente por parte de los estudiantes y el profesor en ejercicio durante la clase en la plataforma virtual.

A su vez, las actividades a desarrolladas en el segundo momento se describen de la siguiente manera: aplicación del instrumento diagnóstico, recolección de la información, palabras de agradecimiento a los sujetos de estudio y a los entes participantes directos e indirectos de la investigación pertenecientes a la institución.

### **Primer momento**

Siguiendo el modelo planteado para el desarrollo de las actividades correspondientes al primer momento, se aplicaron en 2 sesiones distribuidas en 2 semanas:

- **Presentación a los sujetos de estudio:** Este espacio se ejecutó en una hora de la primera sesión, y abarco la presentación personal del sujeto investigador, y la explicación del objetivo de su presencia en el aula virtual. Se contó con una buena recepción por parte de los estudiantes, lo cual permitió estimular los procesos investigativos, se comentó a los sujetos de estudio que están siendo participes de una investigación científica, que busca crear estrategias que mejoren su aprendizaje en el objeto de estudio presente en las clases de matemática, es importante aclarar que la información personal obtenida en la investigación sería utilizada únicamente con fines de análisis para la respectiva investigación y no para otro propósito; anexo a esto, fue pertinente informar que el desarrollo del instrumento diagnóstico no representa ningún tipo de calificación en la asignatura, motivo por el cual podrían desarrollar el instrumento de manera completa, sin preocupaciones.

Posterior a la presentación, se envió un documento a los acudientes de los sujetos de estudio, con el fin de autorizar la participación en la investigación y hacer uso de los diferentes instrumentos de recolección de datos en donde estos estuviesen expuestos (ver anexo 3).

- **Acompañamiento a las clases virtuales impartidas por el profesor en ejercicio sobre el objeto de estudio:** este espacio se ejecutó en 3 horas, distribuidas de la siguiente manera: la primera hora correspondiente a la segunda parte de la primera sesión, las siguientes dos horas correspondientes a la segunda sesión. Este acompañamiento fue enfocado a observar a los sujetos de estudio en su actual ambiente de aprendizaje y así poder lograr datos precisos y pertinentes, además de la aplicación de los demás instrumentos de recolección de datos (grabación de las clases por medio de la plataforma virtual), en planteamientos de Yin (2009), estas observaciones directas constituyen una fuente de información primaria, ya que los datos que se ven con nuestros propios ojos y se perciben con nuestros propios sentidos no es suministrado por ningún otro investigador o por algún documento que hayamos leído. La utilización de dichos instrumentos de recolección de datos se proyecta con el fin de

realizar observaciones y análisis sin entorpecer el desarrollo de las clases y generando un buen ambiente investigativo y culminando todas las sesiones propuestas para la gestión del instrumento diagnóstico.

## **Segundo momento**

A continuación, se procede a dar una descripción del plan de desarrollo de las actividades realizadas en el segundo momento, este corresponde a una sesión de dos horas, correspondientes a la segunda semana de iniciado el proceso de gestión del instrumento.

- **Aplicación del instrumento diagnóstico:** Para el desarrollo del segundo momento se aplicó el instrumento diagnóstico producto del análisis documental, y moldeado con las consideraciones propuestas y caracterizadas durante el acompañamiento a los sujetos de estudio, el proceso de aplicación del instrumento, se desarrolló de manera individual en el aula de clase, inicialmente presentando una orientación por parte del sujeto investigador respecto a la forma en que se debe desarrollar y el lapso de tiempo que se propone para finalizarlo.

Finalizando el tiempo de desarrollo del instrumento diagnóstico, el sujeto investigador confirma de manera verbal con los estudiantes que se ha terminado el tiempo, el docente en ejercicio procede a recoger los instrumentos desarrollados por los sujetos de estudio, procedente a esto, el docente en ejercicio se encargó de enviar la información en físico al docente investigador para su respectiva examinación y análisis.

Para cerrar el proceso de gestión se procedió a agradecer a cada sujeto de estudio y al profesor en ejercicio, de igual forma, dar agradecimiento de manera amena a los integrantes de la institución, por permitir realizar la investigación en la respectiva institución.

### **3.3.2.2 Objetivo Específico 2:**

**Caracterizar las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno.**

#### **Diseño General**

Para lograr las proyecciones establecidas en el segundo objetivo específico, el cual se estructura como la caracterización de las dificultades identificadas a partir de la información producto del instrumento diagnóstico gestionado en el primero objetivo específico, se realizó una observación detallada a las respuestas y desarrollos de los diferentes sujetos de estudio. Para lograr caracterizar las dificultades se dispone un análisis relacionado con posturas, información y conclusiones a las que han llegado algunos autores que manejan actividades con objetivos similares, proporcionando información relevante para lograr identificar las respectivas dificultades y caracterizarlas con base a los elementos del análisis de contenido.

#### **Observación de la información del instrumento diagnóstico**

Inicialmente, se procede a tomar registro sistematizado de los productos generados por los sujetos de investigación (escanear los desarrollos físicos), dando facilidad al proceso de observación, se le asigna a cada producto (instrumento diagnóstico desarrollado) un número 1 al 10 con el fin de mencionarlos en los respectivos análisis sin hacer visibles sus verdaderos nombres. Se realiza una observación específica por medio de las categorías correspondientes al campo conceptual, los sistemas de representación y los contextos todos estos enmarcados en la unidad de análisis correspondiente al análisis de contenido.

Con el fin de dar una identificación clara se observó punto a punto (actividades) de los diez (10) instrumentos desarrollados. Mediante la comparación entre las dificultades propuestas por los autores que estructuraron las actividades y las respuestas de los sujetos de estudio se logra encontrar similitud, teniendo en cuenta si el estudiante incurre en las

dificultades propuestas, presenta una dificultad distinta a esta o logra desarrollar de manera correcta la actividad.

### **3.3.2.3 Objetivo Especifico 3:**

**Estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.**

#### **Diseño General**

El desarrollo del tercer y último objetivo específico, toma como base sustancial la información producto del desarrollo del segundo objetivo específico, siendo estas las dificultades identificadas y caracterizadas. Teniendo en cuenta que la finalidad del tercer objetivo específico es estructurar las estrategias (tareas) que aportan al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática, se realizó el análisis didáctico (Gómez, 2002), en este caso el análisis de contenido (ver apartado 2.2.1), del cual se tomaron aspectos para configurar la selección y construcción de las tareas.

Los criterios tienen una relación directa con análisis de contenido ya que las dificultades identificadas fueron caracterizadas en torno al análisis de contenido de la función cuadrática, por ende, para determinar si las tareas son viables para su selección y respectiva estructuración, se debe hacer mediante el análisis de contenido de la función cuadrática. Gracias a una revisión crítica de las tareas consideradas a partir de investigaciones que responden a las dificultades identificadas, investigaciones como la de Fernández et al., (2018) que aporta actividades que permiten de cierta forma superar las dificultades identificadas, relacionadas con las que presentan los sujetos de estudio, se procede a dar escogencia y el respectivo análisis a cada una de estas.

Al tener claridad en cuanto a las tareas que se analizaron, se realizó una caracterización de las tareas desde el análisis cognitivo e instrucción de la función cuadrática

(ver apartado 2.2.2 y apartado 2.2.3), de igual forma se procedió a dar estructura a la secuencia didáctica, construyendo y describiendo las diferentes fases y elementos que la componen.

### **3.3.3 Fase de análisis**

En el presente apartado se desarrollaron los procesos necesarios, para dar tratamiento a la información que proporcionaron los diferentes instrumentos y las fuentes de datos. Ahora bien, las conclusiones y las implicaciones didácticas proporcionadas en la presente investigación dependieron en gran medida de las decisiones que se tomaron con relación a los datos analizados.

#### **Plan de análisis**

Para el desarrollo del análisis a los datos producto de la investigación, se establece seguir los planteamientos de Sandin (2003), quien propone que el análisis de la información se puede estructurar bajo dos orientaciones, la primera orientación es en la que se realizan inferencias o deducciones a partir de unidades de análisis, estas entendidas como “unidades de observación que, seleccionadas de antemano, y reconocidas por los observadores en el campo y durante el tiempo de observación, se constituyen en objeto de la categorización en los registros construidos a tal efecto” (Gaitán & Piñuel, 1998, p.60), estas permiten la creación de teorías a partir de los datos encontrados y no de supuestos a priori.

La segunda orientación se desarrolla en la verificación de supuestos previamente establecidos, esto con el fin de intentar identificar proposiciones universales y leyes causales intentando ajustar y leyes causales, tratando de relacionar y acomodar los datos a las explicaciones de la realidad educativa. A partir de lo anterior, y teniendo en cuenta los fines de la investigación, se opta por la primera orientación. En este sentido es necesario establecer las categorías de análisis entendidas como cada elemento o dimensión últimos y más simples

de la variable investigada, estos tienen la finalidad de clasificar o agrupar según las unidades de análisis que se establezcan.

Algunos autores conceptualizan las categorías de análisis como un atributo o característica expuesto de un objeto o fenómeno, que representan la información de interés a investigar, las establecen como concepto que posee significado, que a su vez puede estar relacionado con situaciones, contextos, opiniones, acontecimientos, sentimientos, relaciones personales, entre otros. De igual forma, para los procesos de categorización se estructuran los descriptores, siendo estos factores clave para el estudio y relación con los propósitos de la investigación, específicamente permite describir las diferentes variables de manera específica que se relacionan al objeto de estudio y a la categoría correspondiente, dependiendo de los propósitos establecidos.

En este sentido, para el análisis correspondiente al primer objetivo específico se establece la unidad de análisis, las categorías y descriptores del contenido matemático función cuadrática, A partir de esto, se ordenan los respectivos datos de acuerdo con los criterios denotados en común en todos estos.

Tabla 13. Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 1

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código
Análisis de contenido	Estructura conceptual	1. Identifica variables, elementos y características que corresponden al concepto de función cuadrática	<b>IFC</b>
		2. describe las relaciones entre magnitudes dependientes e independientes teniendo en cuenta que una de estas posee un término cuadrático	<b>OPV</b>
		4. Realiza procedimientos en situaciones matemáticas que le permiten llegar a estructuras relacionadas con el desarrollo de los elementos de la función cuadrática	<b>EPS</b>

Sistemas de representación	1. Reconoce la estructura de la función cuadrática en los sistemas de representación.	<b>RES</b>
	2. Identifica y relaciona los elementos de la ecuación (representación algebraica) asociada a la función cuadrática con lo demás sistemas de representación	<b>IRE</b>
	3. Identifica y utiliza los elementos necesarios para construir una parábola, además de relacionarlos a los demás sistemas de representación	<b>INP</b>
Contextos	1. Resuelve problemas de otras áreas, relativos a situaciones de variación con la función cuadrática	<b>PRP</b>
	2. Deduce a partir de una situación el concepto de función cuadrática	<b>ICS</b>
	3. Comprende fenómenos de la realidad a partir del uso de la función cuadrática	<b>CFR</b>

Fuente: Elaboración propia

Así mismo, el segundo objetivo específico, se establecen la unidad de análisis, categorías y descriptores producto de la revisión documental, en donde diferentes autores han configurado en torno a las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática.

Tabla 14: Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 2

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código
Análisis de contenido	Estructura conceptual	1. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos relacionados con la función cuadrática.	<b>AE1</b>
		2. Dificultad al reconocer y manipular las características, relaciones y expresiones que configuran el concepto de la función cuadrática.	<b>AE2</b>
		3. Confusión entre el significado de función cuadrática y otros objetos matemáticos.	<b>AE3</b>

Sistemas de representación	1. Poco reconocimiento al identificar unidades significativas de los registros de representaciones semióticas de la función cuadrática	<b>AS1</b>
	2. Deficiencia al reconocer y manipular la relación entre elementos de las representaciones verbal, algebraica, tabular y gráfica y realizar transformaciones entre ellas.	<b>AS2</b>
	3. Falencias en la implementación de estrategias para encontrar valores y elementos necesarios para la construcción de las representaciones de la función cuadrática.	<b>AS3</b>
Contextos	1. Dificultad en identificar situaciones reales que siguen un modelo cuadrático	<b>AC1</b>
	2. Presenta errores al extraer conclusiones a partir de un problema que se modela a través de la función cuadrática.	<b>AC2</b>
	3. Identifica las variables pero no comprende su significado en el problema (contexto).	<b>AC3</b>

Fuente: Elaboración propia

Para el tercer objetivo específico, el análisis de las tareas seleccionadas se desarrolla teniendo en cuenta los criterios establecidos en el análisis de contenido. A continuación, se presentan la respectiva unidad de análisis, las categorías y los descriptores que permiten analizar y describir las características, cualidades y demás elementos que estructuran las diferentes tareas.

Tabla 15: Unidad de análisis, categorías y descriptores del objetivo específico 3

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código
Análisis de contenido	Estructura conceptual	Permite el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos relacionados con la función cuadrática.	<b>ET1</b>
		Aporta al reconocimiento y la manipulación de las características, relaciones y expresiones que configuran el concepto de la función cuadrática.	<b>ET2</b>
		Aclara el significado de función cuadrática entre otros objetos matemáticos.	<b>ET3</b>

	Aporta a identificar unidades significativas de los registros de representaciones semióticas de la función cuadrática	<b>ST1</b>
Sistemas de representación	Facilita el reconocimiento y la manipulación entre elementos de las representaciones verbal, algebraica, tabular y gráfica y realizar transformaciones entre ellas.	<b>ST2</b>
	Faculta la implementación de estrategias para encontrar valores y elementos necesarios para la construcción de las representaciones de la función cuadrática.	<b>ST3</b>
	Permite identificar situaciones reales que siguen un modelo cuadrático	<b>CT1</b>
Contextos	Guía en la extracción de conclusiones a partir de un problema que se modela a través de la función cuadrática.	<b>CT2</b>
	Refuerza la identificación de las variables y permite la comprensión de su significado en el problema (contexto).	<b>CT3</b>

Fuente: Elaboración propia

## CAPITULO IV

### 4. ANALISIS DE DATOS

En el presente capítulo se exponen los análisis a los datos obtenidos, relacionados con los 3 objetivos específicos planteados para el trabajo de investigación. Los respectivos análisis se desarrollaron teniendo en cuenta la información producto de los instrumentos y desarrollos abordados en las diferentes fases de la investigación, desde los elementos necesarios para la construcción de un instrumento que permita identificar dificultades, hasta las actividades que componen la secuencia didáctica, todo esto a partir de diferentes criterios y parámetros postulados para lograr los objetivos propuestos.

#### **4.1 La función cuadrática: Construcción del instrumento para la detección de dificultades en su aprendizaje**

En esta sección se pretende describir los análisis producto de los procesos relacionados con el objetivo específico 1, en un primer momento se abarcan los elementos relacionados con el establecimiento del instrumento diagnóstico producto de una revisión documental, estos elementos se obtienen de las descripciones hechas en las rejillas de observación, estructuradas en la unidad de análisis correspondiente al análisis de contenido, las categorías de análisis corresponden a la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos. A partir de lo anterior, se denotan relaciones, patrones y tendencias que permiten ir dando forma a las actividades que se plasman en el instrumento diagnóstico.

Es importante mencionar que las diferentes actividades analizadas de manera individual en la respectiva rejilla ofrecen elementos que dependiendo la convergencia, estructura y propósito se relacionan con una, dos o todas las categorías de análisis, todo esto con la intención de dar mayor precisión al instrumento propuesto. Posterior al establecimiento del instrumento diagnóstico, se da aplicación teniendo en cuenta los tiempos correspondientes a la fase de campo.

#### 4.1.1 Actividades de la función cuadrática: una mirada desde la estructura conceptual

En el desarrollo de la revisión documental es posible resaltar algunas actividades que manifiestan estar posicionadas en el manejo de la estructura conceptual, donde se identifican algunos elementos sustanciales del concepto de función cuadrática. Es importante declarar que resultaron múltiples actividades que presentan gran relación entre los elementos que las componen, sin embargo, se escogieron aquellas que tienen mayor afinidad con el objetivo propuesto.

Ante esto, la actividad estructurada por Álvarez (2012) aborda elementos que permiten conocer la postura personal de cada estudiante, dirigiendo preguntas directas acerca del concepto de función cuadrática y los elementos característicos que la componen. Según Godino & Batanero (1994) un estudiante por medio de ciertas prácticas personales (desarrollo de preguntas o problemas dirigidos a un campo en específico) y en función de las practicas que una persona usa para resolver un campo de problemas que surgen del objeto matemático, desarrollan lo que denominan dimensión subjetiva del significado, esto es importante ya que en el desarrollo de problemas y preguntas en relación al objeto de estudio se postula un acercamiento a su significado además de complementarse con las practicas previas en relación al mismo.

#### Ilustración 18: Actividad relacionada con la estructura conceptual de la función cuadrática

**Defina en sus palabras.**

1. ¿Qué es una función cuadrática?
2. En la función cuadrática, ¿qué valor nos indica hacia donde abre la curva?
3. ¿Qué formas puede tomar la función cuadrática?
4. ¿Qué nombre recibe la curva originada al graficar una función de la forma  $ax^2+c$ ?
5. ¿Hacia dónde abre la curva originada por  $f(x)=-ax^2+bx$ ?

Fuente: Álvarez (2012).

A pesar de tener una estructura básica, las preguntas presentes en la actividad de Álvarez (2012) permiten en un primer momento tener un acercamiento a las concepciones que tienen los estudiantes del objeto matemático, que elementos percibe a la hora de escuchar las palabras función cuadrática, esto permite tener una base inicial para saber desde donde se debe empezar a reforzar el aprendizaje del estudiante. Esta actividad toma importancia en la presente investigación teniendo en cuenta que a partir de estos elementos es posible tener un acercamiento a la identificación de algunas de las dificultades de aprendizaje del objeto matemático, esto es demostrable en el hecho de que el autor de las actividades y el documento logra identificar algunas de las dificultades de aprendizaje del concepto de la función cuadrática a partir de las mismas, a continuación, una de las afirmaciones de Álvarez (2012):

La relación existente entre los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática y la utilización de mediaciones pedagógicas, es que la mediación que más favorece a los estudiantes es la tabular gráfica, seguida de la tecnológica – problémica y como era de esperarse, la incidencia oral – escrita y analítica abstracta no fueron bien recibidas por parte de los estudiantes, estas afirmaciones están sujetas con base a los resultados de la prueba (p. 51)

De cierta forma esta actividad permite identificar que tan lejos está la concepción del estudiante del objeto de estudio, que tipos de representaciones asimila a la concepción de la función cuadrática, y los elementos que la caracterizan (IFC), Además de postular procedimientos que llevan al estudiante a construir estructuras que guardan relación con elementos de la función cuadrática (EPS).

De igual forma, Tobón (2017) establece en sus actividades elementos que permiten identificar dificultades desde el campo de la estructura conceptual de la función cuadrática.

Ilustración 19: Actividad asociada a la estructura conceptual de la función cuadrática

### **Situación problema**

“Una caja sin tapa se fabricará a partir de una hoja rectangular de hoja de lata cortando. Cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si el ancho de la caja es de 3 pulgadas menos que el largo y la caja contiene 280 pulgadas cúbicas. Encuentre las dimensiones de la hoja de lata”.

Fuente: Tobón (2017).

Es posible observar que el problema se estructura en un fenómeno cotidiano, sin embargo, la actividad debe realizarse teniendo en cuenta que los elementos como el ancho de la caja ( $(x - 3)$  pulgadas) y el largo de la caja ( $x$  pulgadas) estructuradas en la fórmula de volumen se relacionan directamente con la estructura de la función cuadrática (EPS), de igual forma al plantearse la multiplicación entre los dos elementos anteriormente mencionados y el alto de la caja (4), se configura una estructura que contiene una variable (magnitud) de grado 2 (OPV), permitiendo al estudiante acercarse a la construcción de una de las representaciones de la función cuadrática, a partir de esto es posible percibir la capacidad del estudiante en cuanto a la identificación de las características que representan la función cuadrática (IFC) y los elementos que se asocian a la misma. En algún momento de los análisis establecidos por Roa (2018) en su propia actividad, manifiesta las posibles dificultades en las que un estudiante puede incidir a la hora de desarrollar la actividad, lo cual es importante ya que deja un precedente para el análisis de los resultados del instrumento diagnóstico.

Ahora bien, como se menciona en el inicio de este apartado, para estructurar el instrumento diagnóstico se tienen en cuenta elementos de las actividades que tienen mayor afinidad con los objetivos de la investigación, teniendo en cuenta la postura de Covacevich (2014) establece que los elementos seleccionados para la realización de un instrumento deben ser coherentes con el objetivo de la investigación, es necesario identificar los propósitos de

los elementos en las actividades y concretar si son o no de utilidad para los fines del instrumento.

Es posible indagar acerca de las actividades que de cierta forma no aportan en gran medida a la configuración del instrumento, tal es el caso de las actividades propuestas por Hernández et al. (2018) y Roa (2018), estas coinciden en enfocar sus elementos a desarrollos relacionados con las características de las representaciones de la función cuadrática y la solución de ciertos problemas de contexto mediante el uso de la función cuadrática, mas no dan manejo a la estructura conceptual de la misma. Por otro lado, los elementos de estas actividades convergen en las categorías siguientes, dando aportes significativos a la creación del instrumento desde los sistemas de representación y los contextos.

#### **4.1.2 Actividades de la función cuadrática: una mirada desde los sistemas de representación**

De forma similar al apartado anterior, en esta sección se pretende describir las actividades producto de la revisión documental, centradas en el manejo de los sistemas de representación, de las cuales se denotan elementos relacionados con la detección de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, aunque la cantidad de elementos pertenecientes a las actividades analizadas en relación a esta categoría es bastante amplia, se tienen en cuenta aquellas que guardan mayor concordancia con la finalidad de la investigación.

En este orden de ideas, la actividad planteada por Hernández, et al. (2008), se configura a partir de preguntas y desarrollos que permiten reconocer el planteamiento que tiene cada estudiante en cuanto a los sistemas de representación de la función cuadrática, la construcción y comparación de características que relacionan algunos de estos sistemas. En palabras de Pecharroman (2014):

Las representaciones del objeto matemático, como signos que permiten su expresión, contribuyen al desarrollo de su significado y permiten (los iconos) la interpretación de sus propiedades y relaciones internas, que también son caracterizadoras del objeto. Además, ciertas componentes del icono permiten discriminar y caracterizar al objeto matemático (número de lados de un polígono, grado de un polinomio...). Finalmente, el tratamiento de las representaciones (transformación y conversión) puede caracterizar o contribuir a la interpretación del objeto (conversión algebraico-gráfica de una función) (p. 4).

La actividad se presenta inicialmente la transformación del sistema de representación algebraico al sistema de representación gráfico, siguiente a esto postula que el estudiante tabule algunos puntos de las anteriores funciones cuadráticas representando de esta forma el sistema de representación tabulas, por último, procede a establecer algunas preguntas relacionadas con el comportamiento de la función al cambiar entre cada sistema de representación, la actividad es representada de la siguiente forma:

Ilustración 20: Actividad asociada a los sistemas de representación de la función cuadrática

**ACTIVIDAD**

a) Trazar la gráfica de  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  en un mismo plano cartesiano.

I)  $f(x) = x^2$ .

II)  $g(x) = x^2 + 4$

III)  $h(x) = x^2 - 4$

I)  $f(x) = x^2$

X	0	1	2	3	-1	-2	-3
Y							

II)  $f(x) = x^2 + 4$

X	0	1	2	3	-1	-2	-3
Y							

III)  $f(x) = x^2 - 4$

X	0	1	2	3	-1	-2	-3
Y							

Observa y analiza las gráficas anteriores y responde las siguientes preguntas:

- b) ¿Qué le ocurre a la gráfica de  $f(x) = x^2$  cuando se le adiciona o resta cuatro?
- c) ¿Qué le ocurre a la ordenada de  $g(x) = x^2 + 4$  y  $h(x) = x^2 - 4$  con respecto a la ordenada de  $f(x) = x^2$ ?
- d) ¿En qué varía la gráfica de  $g(x) = x^2 + 4$  y  $h(x) = x^2 - 4$  con respecto a la gráfica de  $f(x) = x^2$ .
- e) ¿Qué clase de desplazamiento observas en las gráficas y de qué está dependiendo?
- f) Escribe la función de tal manera que generalice lo que observas en su desplazamiento.

Fuente: Hernández, et al. (2008)

En este caso es posible establecer que la actividad promueve a que el estudiante por medio de transformaciones entre las representaciones planteadas reconozca la estructura de la función cuadrática (RES), al analizar las transformaciones, logre identificar las posibles variaciones en elementos característicos y la forma en la que se relacionan (IRE), es posible observar elementos que postulan transformaciones entre sistemas de representación algebraico a tabular, de tabular a gráfico y en cierto momento a partir de estas construcciones deducir características que relacionan estos sistemas (INP). Es importante mencionar que esta actividad representa un punto importante para el establecimiento del instrumento diagnóstico, ya que Hernández, et al. (2008) estructura una serie de características o dificultades en los que el estudiante puede incurrir a partir de la solución de la actividad propuesta, es posible observar esto en una de las conclusiones descritas de la siguiente manera:

De los resultados de la prueba encontramos que alrededor del 79% de los estudiantes presentaron dificultades para responder cuestionamientos acerca de la situación problema planteada, tales como la identificación de las cantidades que intervienen en la situación, la pertenencia o no a un punto de la gráfica, relacionarla con un modelo matemático apropiado, lo cual evidencia la dificultad para un aprendizaje significativo en la construcción del concepto de función cuadrática (Hernández, et al, 2008, p. 18).

### **4.1.3 Actividades de la función cuadrática: una mirada desde los contextos**

En esta sección se realizan las descripciones relacionadas con las actividades que presentan una estructura enfocada al manejo de los contextos, donde es posible resaltar elementos que permiten la identificación de dificultades y guardan afinidad con los propósitos de la presente investigación.

Como muestra de lo anterior mencionado, la actividad de Álvarez (2012) presenta elementos contextuales que permiten que el estudiante relacione el objeto matemático con eventos de su vida cotidiana, desarrolle procesos que expongan sus conocimientos y posibles dificultades en el aprendizaje del mismo, En palabras de Pecharroman (2014) “la comprensión de los objetos matemáticos es el reconocimiento de la funcionalidad organizativa o interpretativa del contexto que representa el objeto y el desarrollo de la capacidad de uso de esta funcionalidad” (p.1).

La actividad propone un problema del mundo natural que lleva al estudiante a contextualizar la función cuadrática en un medio funcional, como se ve a continuación:

#### **Ilustración 21: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática.**

Si un guepardo inicialmente detenido y comienza a perseguir a un antilope que está a 80 m, en ese mismo instante el antilope emprende su huida. Se cumple la siguiente ecuación  $d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$  La aceleración del guepardo y el antilope son respectivamente de  $3,19 \text{ m/s}^2$  y  $2,69 \text{ m/s}^2$ .

10. ¿A qué distancia se encuentran con respecto a su posición inicial los dos animales a los 5 segundos?
- a) 39,875 y 33,625      b) 38,578 y 32,625      c) 38,875 y 33,526      d) 39, 578 y 32,562
11. ¿En qué momento (medido en segundos) los dos animales están separados 10 metros?
- a)  $2\sqrt{70}$       b) 40      c)  $6,32+2\sqrt{70}$       d)  $(2\sqrt{10})/40$
12. ¿En qué instante (medido en segundos) el guepardo da alcance al antilope?
- a) 17,88      b) 19,88      c) 2      d) 37,76

Fuente: Álvarez (2012)

Inicialmente, es posible afirmar que la actividad se estructura en una eventualidad, relacionada a una representación de la función cuadrática y que cuestiona al estudiante ante algunos valores puntuales y lo encamina a desarrollar procesos que se relacionan con otras áreas como la física y las ciencias naturales, es posible encontrar en el problema elementos como velocidad, distancia, tiempo, entre otros, que pertenecen a física y la alimentación entre animales perteneciente a ciencias naturales (PRP), de igual forma el estudiante por medio de la presente actividad tiene un acercamiento a un evento de la vida natural como la cacería y supervivencia en el reino animal que de cierta forma se relacionan con elementos de la función cuadrática, como las distancias entre los animales y la comparación entre sus velocidades (CFR). Como se mencionó en un anterior análisis, Álvarez (2012) establece en el documento, específicamente en sus conclusiones las posibles dificultades en las que el estudiante puede incidir a la hora de desarrollar las actividades del cuestionario, siendo esto un factor representativo para la presente investigación.

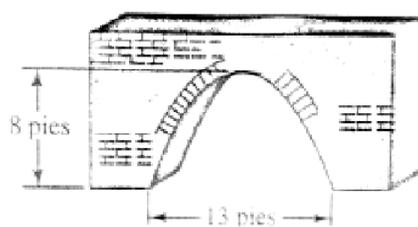
De forma similar, la actividad propuesta por Roa (2018), contiene dos elementos que se ubican en el manejo de los contextos de la función cuadrática, por medio de preguntas y procesos enfocan al estudiante a utilizar los conocimientos propios en relación al objeto matemático para dar respuesta o en su defecto resolver el problema de contexto, para este

caso se presentan dos actividades que acogen un contexto similar, sin embargo sus estructuras, procedimientos o respuestas son diferentes, las actividades se representan de la siguiente manera:

**Ilustración 22: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática**  
**ACTUEMOS:**

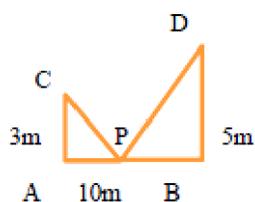
Desarrolle en el cuaderno esta actividad, trabaje con el par correspondiente y al finalizar la expone al grupo en la socialización.

1. Explique qué elementos le proporciona la figura para determinar una función cuadrática que describa el arco parabólico.



Adaptado de (Zill & Dewar, 2008, p.126)

2. La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10m. La longitud de cada poste es de 3 y 5 m. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los dos postes se sujetará a un punto en tierra, localizado sobre la línea que une los dos postes.



- ¿Dónde debe situarse en punto sobre la tierra de manera que la longitud del cable sea la menor?
- ¿Si cambio la posición de P cambia la longitud del cable?
- ¿Cómo podemos saber que la longitud del cable cambia cuando el punto P se mueve a lo largo del segmento entre los postes?
- ¿Cómo podemos determinar la distancia entre un poste y el punto P?
- ¿Qué datos tenemos?
- ¿Qué sabemos de los triángulos que se forman (ver figura)?
- ¿Qué relación existe entre la longitud del cable y la posición del punto P?
- Elabore una tabla en la que represente la información que puede obtener.
- ¿Para qué valor emplea la menor longitud de cable?
- Amplíe su tabla acercándose lo que más pueda al valor encontrado en el punto anterior.

k. Con la información de la tabla construya una gráfica (utilice papel milimetrado, hoja blanca, hoja de cálculo de Excel).

1. Describa la gráfica que construyó.

m. ¿Qué elementos la caracterizan?

n. Obtenga un modelo matemático para determinar la longitud del cable que se necesita respecto a la posición del punto en tierra que sirve de soporte.

Adaptado de (Santos Trigo, 2014, p. 170)

#### **EVALUEMOS:**

1. En plenaria se socializan las estrategias empleadas y se formalizan lo elementos encontrados

2. ¿Qué sucedería si los postes tuvieran la misma medida?

3. ¿Qué se puede concluir acerca de la ubicación del punto P para determinar la mínima cantidad de cable?

4. ¿Qué aprendió en estas sesiones?

Fuente: Roa (2018)

El análisis que debe realizar el estudiante y las respuestas establecidas a los elementos de la presente actividad son datos fructuosos para la investigación ya que por medio de estas demuestran sus alcances en relación a la resolución de problemas relacionados con áreas como arquitectura, ingeniería y construcción (edificaciones) (PRP), en el segundo ejercicio se plantea que el estudiante por medio de la solución de un problema identifique características relacionadas a la función cuadrática (ICF), de igual forma las situaciones presentadas en la actividad permite que el estudiante tenga un acercamiento a fenómenos cotidianos como la construcción de un puente o la postura de unos postes por medio de procedimientos relacionados con la función cuadrática (CFR). En PISA (2012) se establece que la visión de la matemática funcional está relacionada al uso que le damos a esta, dejando de lado la visión abstracta que tanto dificulta el aprendizaje del alumno y acentuando su visión social y práctica y fomentando el uso de tareas contextualizadas en el aula.

La siguiente actividad se enmarca completamente en el actuar de un estudiante frente a un proceso cotidiano y que a su vez lo encamina a la construcción del concepto y la estructura de la función cuadrática, Tobón (2017) describe que, en la actividad, el docente no explica los conceptos, características y fórmulas de la función cuadrática, afirma que los

estudiantes van construyendo este conocimiento a partir de las respuestas a diversos interrogantes. El desarrollo de la situación problema va acompañada de un análisis detallado para extraer información, de este modo responder a los interrogantes e ir construyendo la función cuadrática paso a paso. La actividad se plantea de la siguiente forma:

Ilustración 23: Actividad asociada a los contextos de la función cuadrática

**Situación problema**

“Una caja sin tapa se fabricará a partir de una hoja rectangular de hoja de lata cortando. Cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si el ancho de la caja es de 3 pulgadas menos que el largo y la caja contiene 280 pulgadas cúbicas. Encuentre las dimensiones de la hoja de lata”.

**Situación problema:**

Halla el perímetro de un trapecio rectángulo sabiendo que su área es de  $60 \text{ cm}^2$ , que la base menor mide  $(x-2)$  cm, la base mayor  $(x+2)$  cm y la altura  $(x-7)$  cm. b) Halla la medida de los ángulos interiores de dicho trapecio.

Fuente: Tobón (2017)

A partir del análisis de la actividad anterior es posible establecer que los estudiantes tendrán un acercamiento a situaciones cotidianas que aportan al aprendizaje y la construcción de la función cuadrática como la construcción de una caja (ICS), de igual forma los desarrollos presentes en la actividad encaminan al estudiante a analizar y relacionar los fenómenos cotidianos con estructuras matemáticas y que las posibles soluciones a problemas de contextos pueden generarse a partir de un objeto matemático como la función cuadrática ya que a través de las preguntas planteadas en la actividad como la construcción de la expresión que represente las medidas de la caja, promueven la comprensión de los fenómenos a través de la función cuadrática (CFR), continuo a esto se presenta una segunda situación problema que permite enfrentar al estudiante a ejercicios donde aplica los procedimientos estructurados anteriormente, es posible identificar que los problemas presentes en la actividad se relacionan con geometría y un proceso natural como la construcción de un objeto

que cotidianamente usamos (PRP). Lo anterior mencionado es soportado de cierto modo por los lineamientos curriculares que plantean como propósito fundamental de la matemática:

Contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas (MEN, 1998, p. 54)

Lo que nos indica la importancia de los elementos pertenecientes a esta categoría y los aportes que generan al aprendizaje de un contenido en específico.

Al concretar las actividades que aportan elementos a la categoría de contextos es posible declarar que las actividades de Rey, et al. (2014), Hernández, et al. (2008) y algunas de las actividades de Roa (2018) no aportan de manera significativa a los contextos de la función cuadrática, ya que sus elementos están enfocados de manera puntual en desarrollos y procesos conceptuales y los sistemas de representación de la función cuadrática.

## **4.2 La función cuadrática: detección de dificultades en su aprendizaje**

En el siguiente apartado se describen los análisis correspondientes a los resultados del instrumento diagnóstico, estructurados en las categorías de análisis relacionadas con el campo conceptual, los sistemas de representación y los contextos de la función cuadrática.

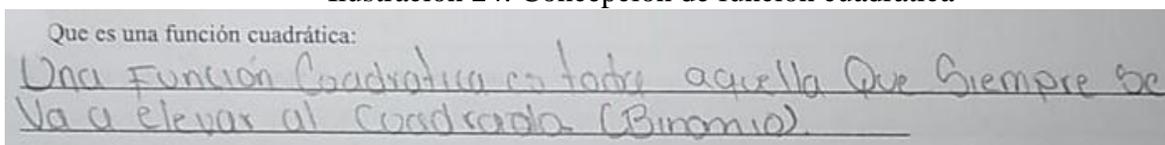
### **1.1.1 Análisis desde el campo conceptual de la función cuadrática**

En esta etapa de análisis, la observación a los resultados propuestos por los sujetos de estudio en el instrumento diagnóstico se enfoca en las actividades que tienen como fin la identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la estructura conceptual de la función cuadrática, en las cuales se denotan elementos que evidencian falencias e información relevante para la investigación. Para dar mayor claridad y objetividad en los análisis y observaciones realizadas a lo largo de la sección, se agrupan los resultados de las

actividades teniendo en cuenta las dificultades identificadas, estas descripciones se presentan de la siguiente forma:

La actividad propuesta por Álvarez (2012), tiene como objetivo identificar que tan lejos está la concepción del estudiante del objeto de estudio, que tipos de formas asimila en torno a la concepción de la función cuadrática, y los elementos que la caracterizan, además de postular procedimientos que llevan al estudiante a construir estructuras que guardan relación con elementos de la función cuadrática, las siguientes ilustraciones corresponden a desarrollos propuestos por los sujetos de estudio:

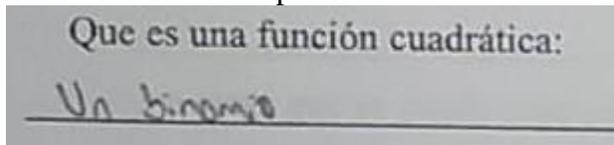
Ilustración 24: Concepción de función cuadrática



Que es una función cuadrática:  
Una Función Cuadrática es toda aquella que siempre se va a elevar al cuadrado (Binomio).

Fuente: Instrumento diagnóstico desarrollado por el estudiante 1

Ilustración 25: Concepción de función cuadrática



Que es una función cuadrática:  
Un binomio

Fuente: Instrumento diagnóstico desarrollado por el estudiante 2

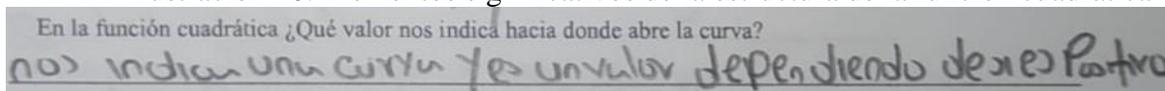
Las anteriores ilustraciones reflejan la postura que tienen los estudiantes en relación al concepto de función cuadrática, estos convergen en las respuestas: “Una función cuadrática es toda aquella que siempre se va a elevar al cuadrado (Binomio)” y “Un binomio”, estas respuestas son incorrectas teniendo en cuenta que el estudiante no tiene claridad acerca del significado del objeto matemático función cuadrática, en vez de esto lo asocia a elementos relacionados con representaciones de la misma (AE1, AE2). De igual forma, se observa que el estudiante entiende que un “binomio” (Expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más términos o monomios) es una función cuadrática, como se menciona

anteriormente, esta respuesta es incorrecta ya que el significado de estos objetos matemáticos no es similar, es posible que el estudiante tenga un acercamiento a elementos algebraicos que en algún momento se relacionan con la función cuadrática mas no la definen (AE3).

Las observaciones anteriores se relacionan con posturas como la de Vinner (1987), quien considera que el estudiante presenta una dificultad al distinguir un objeto matemático de su representación, lo que conlleva a que el estudiante relacione siempre el objeto con las mismas representaciones, convirtiéndolo en un proceso monótono y poco asertivo en cuanto al concepto de función cuadrática. De forma similar, Caicedo (2013) menciona que la diversidad de elementos y representaciones en la enseñanza de la función cuadrática de forma aislada o sin conexión, no aporta a la configuración del concepto, por el contrario, favorece a que el estudiante observe muchos objetos en donde en realidad solo existe uno.

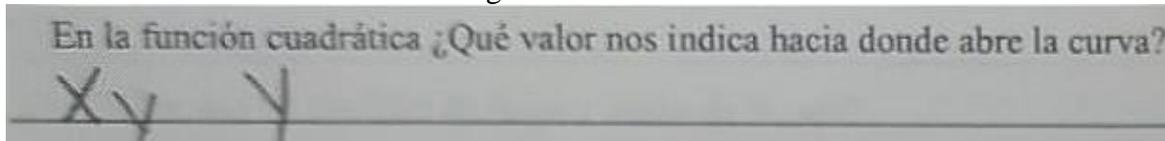
En este orden de ideas, los siguientes desarrollos permiten observar la postura de los estudiantes en torno a elementos significativos en la estructura de la función cuadrática, estas fueron descritas como:

Ilustración 26: Elementos significativos de la estructura de la función cuadrática



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 3

Ilustración 27: Elementos significativos de la estructura de la función cuadrática



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 4

En estos casos los estudiantes reconocen la importancia del signo, mas no identifican si pertenecen a algún elemento de la función cuadrática, tampoco a sus representaciones, por

otro lado, se denota una confusión al relacionar las variables “ $x$ ” e “ $y$ ” con las características que estructuran la función cuadrática (AE1), de forma específica, el estudiante considera que la variable dependiente tiene el mismo comportamiento que la variable independiente y solo estas dos son las responsables de la estructura de la función cuadrática (AE2). Según Hitt (2014) una dificultad presente en este campo se asocia a la equivalencia de notaciones y el importante papel que juegan estos elementos.

En consecuencia, de los anteriores análisis es posible identificar dificultades específicas asociadas al aprendizaje de la estructura conceptual de la función cuadrática, estas atienden a:

- Conflicto asociado al manejo del significado de la función cuadrática.
- Desconocimiento de la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática.

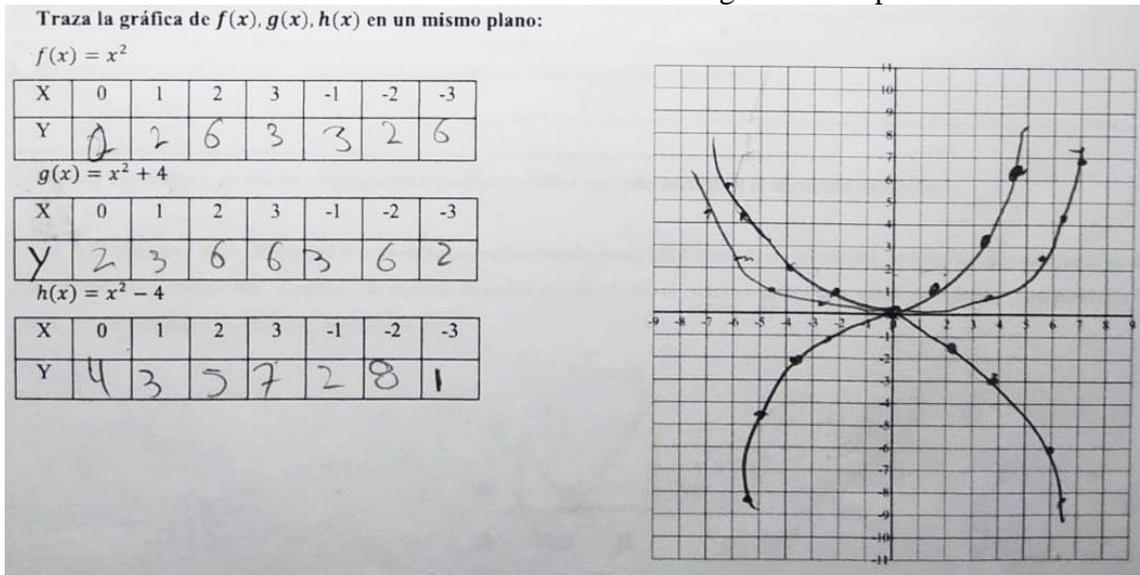
### **1.1.2 Análisis desde los sistemas de representación de la función cuadrática.**

Para esta sección, las dificultades asociadas al aprendizaje de los sistemas de representación de la función cuadrática son el foco de observación, al observar los desarrollos propuestos en el instrumento diagnóstico por parte de los sujetos de estudio fue posible evidenciar falencias e información importante para la investigación.

Los elementos que componen las siguientes actividades tienen como fin identificar las posibles dificultades asociadas al reconocimiento, desarrollo y transformación de los sistemas de representación de la función cuadrática, la actividad se estructura en tres sistemas, transformando el registro algebraico al gráfico, pasando por el tabular al realizar una modificación al primero. Siguiendo a esto es posible encontrar cuestionamientos asociados a los desarrollos realizados inicialmente. Para dar un mejor análisis, las

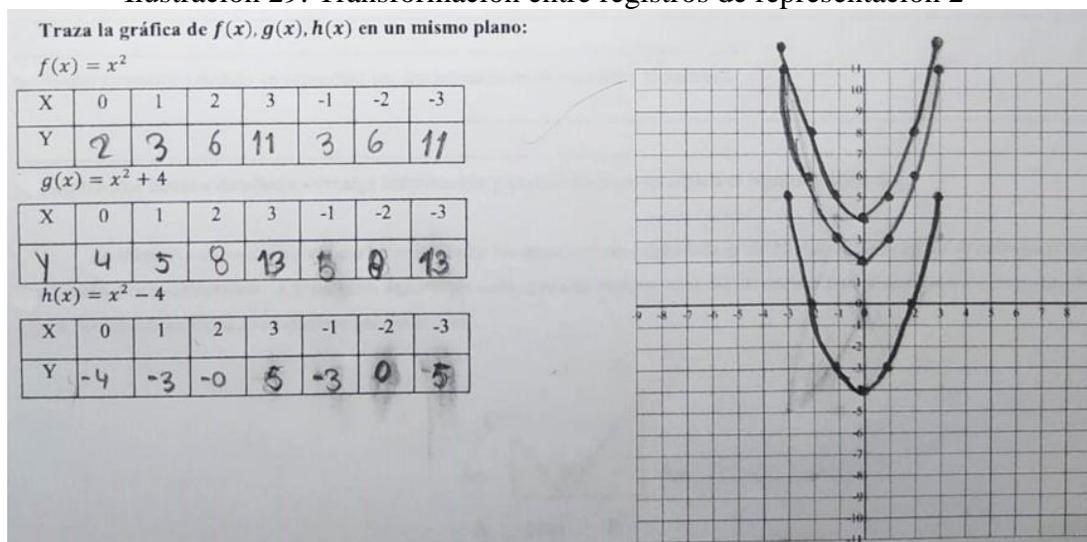
observaciones se realizaron inicialmente a las transformaciones propuestas entre los tres sistemas y posterior a esto los cuestionamientos planteados a los estudiantes:

Ilustración 28: Transformación entre registros de representación



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 5

Ilustración 29: Transformación entre registros de representación 2



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 6

Las anteriores ilustraciones representan tendencias asociadas a las respuestas presentadas por los sujetos de estudio, como se plantea inicialmente, se realiza un análisis a los desarrollos y relaciones de las representaciones algebraicas, tabular y grafica de las tres funciones propuestas:

En esta actividad los cambios entre los registros de representación juegan un papel fundamental, desde una observación inicial es posible evidenciar errores en los resultados propuestos por los sujetos de estudio, partiendo de los registros de representación descritos en la representación tabular se denotan valores incorrectos en cuanto a los resultados de la variable dependiente “ $y$ ”, los elementos resultados de los cambios de registro en las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$ , no son desarrollados teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación, operaciones básicas como la suma y resta de números enteros, de igual forma, se denota que no encuentra un patrón que le permita obtener los registros correctos para la representación tabular ya que parten de una función “ $x^2$ ” con registros incorrectos (AS1, AS2).

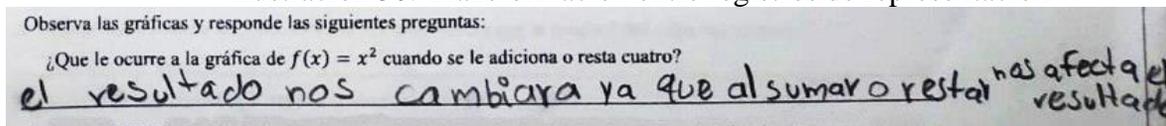
Es posible observar que los registros de representación gráfica tampoco concuerdan con los elementos de las funciones propuestas, en la ilustración 5 los puntos que conforman las parábolas no guardan relación con las parejas ordenadas que se describen en la tabla, fueron propuestas sin ningún registro. De forma similar, es posible observar en la ilustración 6 se realiza una parábola que no corresponde a la función  $f(x)$  ya que los registros algebraicos no son los correctos (AS3), de cierta forma se siguen grafican las parejas ordenadas correctas, mas no son las correspondientes a la respectiva función. Las anteriores descripciones con consideradas por Morales, Alpízar & Fernández (2019) como errores producto de cálculos incorrectos o accidentales “aquellos que se presentan cuando cada paso de la tarea es correcto, o responde a la lógica del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a errores que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas” (p. 123).

Según Irigoyen (2012) los estudiantes pueden presentar dificultad en el manejo del exponente en el término cuadrático, en algunos casos se les dificulta comprender que la representación algebraica de la función cuadrática se estructura con un término cuadrático que puede ser representado como “ $x^2$ ” o en su defecto “ $x \cdot x$ ” acompañado por unos parámetros que generan variaciones en las estructuras que se quieran representar, esto lleva a que el estudiante presente la variable independiente como elemento prioritario y se olvide de su exponente. A partir de las descripciones realizadas anteriormente, es posible establecer las siguientes dificultades específicas asociadas al aprendizaje de los sistemas de representación de la función cuadrática:

- Interpretar la relación entre el parámetro de una función cuadrática con la familia de funciones que genera.
- Dificultad al traducir un registro de representación de la función cuadrática entre los sistemas de representación.

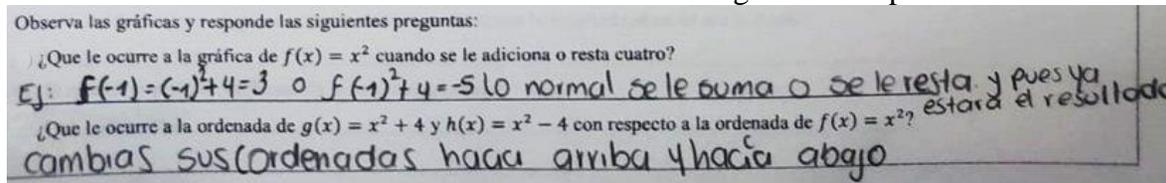
Siguiendo con los elementos que conforman la presente actividad, el estudiante debe responder teniendo en cuenta los resultados planteados en los anteriores ítems, resaltando el manejo de características que estructuran los sistemas de representación de la función cuadrática.

Ilustración 30: Transformación entre registros de representación



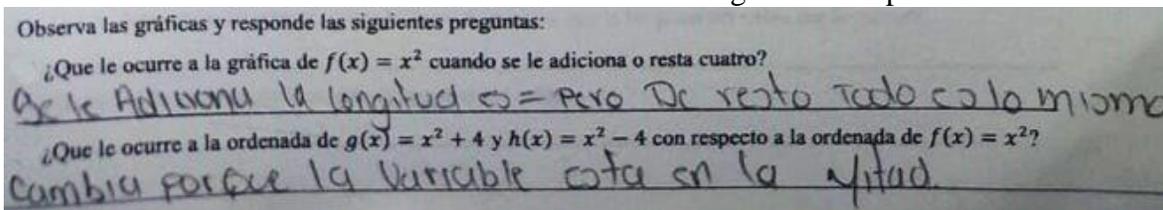
Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 7

Ilustración 31: Transformación entre registros de representación



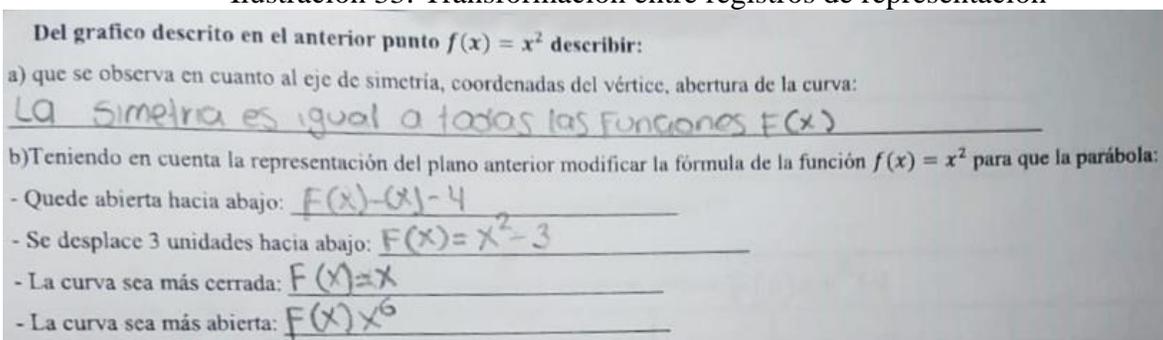
Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 8

### Ilustración 32: Transformación entre registros de representación



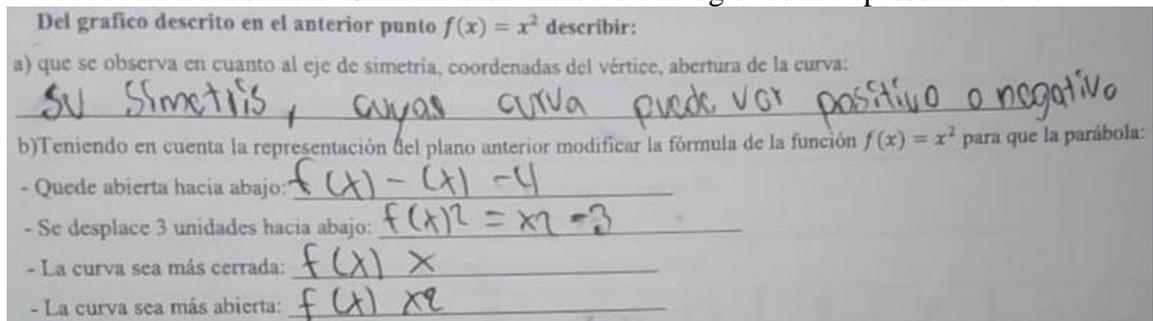
Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 1

### Ilustración 33: Transformación entre registros de representación



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 8

### Ilustración 34: Transformación entre registros de representación 7



Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 9

Las respuestas de los sujetos de estudio toman una posición descriptiva (verbal) y en algunos casos procedimental en cuanto al cuestionamiento realizado en la actividad, en estos es posible apreciar que no responden la pregunta establecida y simplemente divagan sin llegar

a algo concreto, al establecer que “el resultado no cambiara”, o “normal se le suma o se le resta y pues ya estará el resultado” de cierta forma se podría decir que no son correctas y permiten evidenciar una dificultad al reconocer y manejar las características y elementos que estructuran las representaciones de la función cuadrática y las transformaciones entre estas, en este caso al cuestionar que le ocurriría a la representación gráfica de la función cuadrática después de un cambio en sus parámetros (AS1, AS2). Ahora bien, en la segunda cuestión, no es respondida en su totalidad ya que solo se concreta que cambia, mas no se llega a una descripción de los cambios resultantes.

En las ilustraciones 10 y 11 es posible observar que es estudiante no responde de manera completa y concreta el cuestionamiento inicial, ya que se enfocan en describir una respuesta relacionada con la simetría (que es incorrecta) y se omite su opinión en cuanto a las coordenadas del vértice de la parábola y la abertura de esta, demostrando falencias al reconocer y describir el comportamiento de los elementos representativos de la función cuadrática (AS1). Continuo a esto, los desarrollos propuestos por los estudiantes en las cuestiones que relacionan cambios a la representación algebraica de la función  $f(x) = x^2$  para que la parábola de esta tome posiciones y formas específicas son erróneos, los estudiantes realizan una descripción errónea en cuanto a la estructura de la representación algebraica de la función cuadrática, en algunos casos usando el igual (=) y en otros casos omitiéndolo, en otros casos no se tiene en cuenta la potencia 2, (cuadrática) que es elemento representativo de la función cuadrática (AS1), de igual forma, los cambios que se proponen no son los correctos ya que el estudiante modifica el exponente de la variable independiente considerando que esta puede generar los cambios propuestos en la parábola (AS2, AS3).

Para los casos anteriores, es posible observar que la dificultad no radica en procedimientos mal realizados u operaciones incorrectas, para estos casos los estudiantes no tienen claridad acerca del significado, manejo e incidencia de los componentes de la función cuadrática, ni de los cambios entre registros de representación, según Hernández et al., (2008) al responder de esta forma en relación a las cuestiones propuestas en esta actividad

demuestran poco manejo en desarrollos asociados a cambios en la estructura de la función cuadrática.

De forma similar, es posible retomar las palabras de Irigoyen (2012) quien establece que los estudiantes presentan dificultad al comprender y representar el término cuadrático “ $x^2$ ”, ya que el estudiante prioriza la variable independiente y se olvida de su exponente o no lo tiene como elemento representativo, Morales et al., (2019) indican que a los estudiantes se les dificulta identificar el significado de los coeficientes de la función cuadrática y su afectación en las distintas propiedades que la componen, esto se presenta cotidianamente en la traducción o transformación entre los sistemas de representación gráfico y algebraico. A partir de las consideraciones anteriores, es posible establecer las siguientes dificultades específicas:

- Desconocimiento del significado e incidencia de los elementos que componen los sistemas de representación de la función cuadrática.

### 1.1.3 Análisis desde el campo fenomenológico de la función cuadrática

En la presente categoría se describen las observaciones realizadas a los desarrollos propuestos por los sujetos de estudio en el instrumento diagnóstico relacionadas con las dificultades presentes en el manejo de problemas, situaciones y contextos que involucran la función cuadrática. Las observaciones realizadas a estos desarrollos se describen de la siguiente forma:

Analizando las respuestas de los sujetos de estudio que corresponden a las cuestiones que abordan las situaciones, se realizan observaciones a partir de las siguientes actividades:

Ilustración 35: Comprensión del problema

¿Qué te está diciendo el problema?  
Que van a hacer una caja sin tapa

Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por estudiante 5

Ilustración 36: Comprensión del problema

Que datos numéricos te están dando?  
Cuadrado de 1 (compuesto), la suma de 3 (compuesto), 280  
pulgadas

Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 3

Ilustración 37: Comprensión del problema

¿Qué datos tenemos?  
la longitud de los catetos

Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 8

Ilustración 38: Comprensión del problema

¿Cómo crees que se puede resolver la situación?  
debemos encontrar el ancho y el largo a partir de las pulgadas

Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por el estudiante 8

Ilustración 39: Comprensión del problema

¿Cuál es la representación matemática que me permite encontrar dicha información?  
multiplicación y división

Fuente: Instrumento diagnostico desarrollado por estudiante 10

Las anteriores respuestas se caracterizan por proponer una descripción de la información que proporcionan los problemas, de cierta forma la comprensión del problema

y sus respectivos elementos por parte del sujeto de estudio. Se evidencia que en las respuestas existe una postura incorrecta en relación a lo que dicen las respectivas situaciones y sus datos, se describen algunos elementos que relacionan el problema de forma incorrecta y dan una descripción muy vaga e imprecisa de todo lo que se puede interpretar y comprender del mismo (AC2, AC3), en este caso es importante que el estudiante identifique los valores, operaciones y contenido que comprende de la situación, lo anterior puede generar que el estudiante pueda desarrollar un proceso o estrategia que le permita solucionar el problema, o de otro modo lo desarrolle con datos erróneos y con elementos que no se encuentran dentro del contenido del problema.

En relación con lo anterior Tobón (2017) establece que el estudiante puede presentar dificultad con la interpretación de la información, debido a la poca comprensión de lo que representa un valor o una incógnita en la construcción de una función cuadrática para modelar el problema. Complemento a lo anterior, Hernández et al., (2008) plantea que los estudiantes pueden presentar dificultad en responder cuestionamientos acerca de una situación problema planteada, tales como la identificación de las cantidades que intervienen en el desarrollo de la situación, la utilidad de esta información, lo que evidencia la dificultad para adquirir un aprendizaje significativo en la construcción de la función cuadrática desde un campo contextual. Teniendo en cuenta los análisis planteados anteriormente, es posible reconocer las siguientes dificultades específicas:

- Dificultad para identificar y extraer elementos e información de una situación o problema relacionada con la función cuadrática.

Los siguientes desarrollos son asociados con la forma en la que el estudiante relaciona y postula una solución al problema, estas respuestas permiten identificar los alcances del estudiante a la respuesta y desenlace de la situación que plantea la actividad, estos fueron descritos de la siguiente forma:

#### Ilustración 40: Solución a uno de los problemas

¿Cuáles son las medidas de largo y ancho de la caja?  
el ancho de la caja es 3cm y el ancho es menos que el largo

Fuente: Instrumento diagnóstico desarrollado por el estudiante 10

#### Ilustración 41: Solución de uno de los problemas

a) ¿A que distancia se encuentran con respecto a su posición inicial los dos animales a los 5 segundos?  
Antilope = 38,72 m      Guepardo =

Fuente: Instrumento diagnóstico desarrollado por el estudiante 2

#### Ilustración 42: Solución de uno de los problemas

¿Cómo podemos saber que la longitud del cable cambia cuando el punto P se mueve a lo largo del segmento entre los postes?  
hallando la longitud y el punto P  
¿Cómo podemos determinar la distancia entre un poste y el punto P?  
con lo alejado que está el poste del cable y la altura del poste

Fuente: Instrumento diagnóstico desarrollado por el estudiante 3

Las respuestas descritas anteriormente dan a conocer la solución propuesta a los distintos problemas por parte de los sujetos de estudio, al realizar el respectivo análisis es posible evidenciar que los estudiantes no presentan respuestas correctas a las cuestiones planteadas, los tres problemas requieren que el estudiante analice las situaciones, las comprenda y postule los posibles desarrollos y sus respectivas soluciones, para estos casos se observa que el estudiante no comprende la cuestión y responde de manera arbitraria, sin tener en cuenta los procesos ni procedimientos, al no tener una buena identificación de los datos que componen el problema, las estructuras y elementos que le permiten dar solución al problema que en este caso se relacionan con la función cuadrática no se llega a una solución correcta.

En la imagen 45 el estudiante describe datos que proporciona el mismo problema, estos no corresponden al producto de ningún procedimiento, solo trata de repetir contenido

que se encuentra en la descripción del problema (AC2), de igual forma es posible observar que en la cuestión representada en la imagen 46 el estudiante da una respuesta que no coincide con la cuestión en sí, esta respuesta es un dato cercano a los que produce el desarrollo del problema, demostrando que se da utilidad a los recursos que proporciona la situación, mas no sabe cómo encajan en la solución del problema (AC3).

Hernández et al., (2008) quien describe que las situaciones problema pueden ser un punto de interés para el desarrollo de los estudiantes y su aprendizaje significativo en torno a la función cuadrática, sin embargo, los estudiantes presentan dificultades en modelar y aplicar matemáticamente situaciones problema usando la estructura de la función cuadrática, a su vez, en el análisis y la comprensión de un problema que modele la función cuadrática, González (2015) establece que cuando el estudiante se enfrenta a una situación problema relacionada con la función cuadrática puede presentar dificultad al reconocer las relaciones y los elementos que cumplen con las condiciones de la función cuadrática, de igual forma la distinción de una variable o un elemento que configure la estructura de la función cuadrática y no necesariamente de la comprensión del problema como tal. La posible dificultad que se presenta en estos casos corresponde a:

- Falta de entendimiento de los desarrollos y procedimientos que tiene que abordar para solucionar un problema relacionado con la función cuadrática.

#### **1.1.4 Caracterización De Dificultades Presentes En El Aprendizaje De La Función Cuadrática**

Gómez y González (2014) definieron las dificultades de aprendizaje como condiciones que impiden o dificultan la consecución de los objetivos de aprendizaje planificados. La importancia de las dificultades radica en identificarlas, saber qué las provoca y saber superarlas. El autor define los errores como difíciles. Este tipo de error se puede observar directamente en el comportamiento de los escolares, en su reacción equivocada a las preguntas y tareas específicas que les plantea el maestro. Partiendo del planteamiento

anterior, se presentan a continuación las dificultades y errores identificados en los sujetos de estudio, producto de los análisis y observaciones realizadas en la información producto del instrumento diagnóstico:

Tabla 16: Caracterización de Dificultades y errores

No	Dificultad	Error
<b>DI1</b>	Conflicto en torno al manejo del significado de la función cuadrática.	<b>EI1.</b> El estudiante no demuestra comprensión en el concepto de función cuadrática <b>EI2.</b> Relaciona el significado de la función cuadrática con otros objetos o elementos diferentes a esta.
<b>DI2</b>	Desconocimiento de la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática.	<b>EI3.</b> Confunde las magnitudes dependientes e independientes de la función cuadrática. <b>EI4.</b> Se le dificulta manejar la incidencia de los signos de los términos y parámetros que estructuran la función cuadrática.
<b>DI3</b>	Falencias al interpretar la relación entre el parámetro de una función cuadrática con la familia de funciones que genera.	<b>EI5.</b> Presenta confusión al representar los valores al cambiar el termino independiente de la función cuadrática. <b>EI6.</b> No relaciona las funciones con estructuras similares donde solo cambia el termino independiente.
<b>DI4</b>	Dificultad al traducir un registro de representación de la función cuadrática entre los sistemas de representación.	<b>EI7.</b> Presenta errores al desarrollar un valor en el término cuadrático (errores al manejar potenciación) de la representación algebraica de la función cuadrática. <b>EI8.</b> Tiene dificultad para graficar la función cuadrática
<b>DI5</b>	Desconocimiento de la relación de los elementos y características que componen los sistemas de representación de la función cuadrática al traducir un registro de representación	<b>EI9.</b> Confusión al manejar cambios en los parámetros de la representación algebraica de una función cuadrática. <b>EI10.</b> Dificultad al realizar cambios en la parábola de una función cuadrática y representarlos en el sistema de representación algebraico.
<b>DI6</b>	Dificultad para identificar y extraer elementos e información relevante para dar solución a un problema relacionado con la función cuadrática.	<b>EI11.</b> Se le dificulta analizar y comprender el problema o la situación presentada en relación con la función cuadrática. <b>EI12.</b> No reconoce las cuestiones ni los procesos que debe utilizar para dar solución al problema relacionado con la función cuadrática. <b>EI13.</b> Responde de manera arbitraria y errónea sin tener en cuenta procesos, repitiendo la información que se presenta en el problema.

Fuente: Elaboración Propia

## **1.2 Actividades para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática**

En la siguiente sección se detallan los análisis correspondientes a las actividades (tareas), seleccionadas para estructurar la secuencia didáctica, asociadas a las dificultades identificadas y caracterizadas por aportar a la superación de estas dificultades. De forma similar a los anteriores análisis, estos son descritos en torno al campo conceptual, los sistemas de representación y los contextos de la función cuadrática, las tareas se representaron de la siguiente forma:

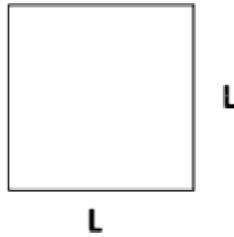
### **1.2.1 Tareas matemáticas configuradas para el campo conceptual de la función cuadrática**

Las tareas relacionadas con este apartado tienen en común que su objetivo de aprendizaje se enfoca en dar al estudiante oportunidades de aprendizaje en torno al significado y manejo de los elementos que dan estructura a la función cuadrática.

La actividad de Fernández (2019) se compone de una estructura sencilla pero que aporta de manera significativa a la comprensión del concepto de función cuadrática, se presenta al estudiante una situación básica de un objeto cotidiano llamado “pared” en el cual por medio de cuestiones y reflexiones el estudiante llega a comprender la estructura de la función cuadrática, esta se representa de la siguiente forma:

Ilustración 43: Tarea 1 para la sesión 1

**PAREDES CUADRADAS**



Tenemos una pared, de la cual se requiere saber su superficie, teniendo en cuenta que la pared tiene lados iguales, (pared cuadrada).

- 1) ¿Cómo hallarías la superficie de la pared ilustrada?
- 2) Si llamamos " $f(x)$ " a la superficie y " $x$ " al lado de la pared, como quedaría constituida la fórmula para hallar la superficie.
- 3) Teniendo en cuenta la estructura anterior, que entiendes por la expresión resultante.
- 4) Que superficies resultarían si la pared tiene lado  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $x=3$

Fuente: Fernández (2019)

Como se observa en la ilustración, la tarea se compone inicialmente por un dibujo que acerca al estudiante a la idea de relacionar la pared de la situación con un cuadrado, esta idea se complementa con el texto que la sigue, posterior a esto es posible encontrar 4 cuestiones en relación con la situación planteada. Al observar el primer cuestionamiento, es posible describir que tiene como finalidad que el estudiante valore, reflexione y exponga su pensamiento en cuanto a cómo abordar la situación, en este caso es de considerar que Fernández (2019) lo plantea de manera inicial para que el estudiante se centre en el objetivo de la situación y al mismo tiempo por medio de las demás cuestiones lo relacione con el objetivo de aprendizaje que es el concepto de la función cuadrática.

A partir del primer cuestionamiento, el estudiante queda con un ideal de los desarrollos que posiblemente le permitan dar solución a la situación, en consecuencia, la tarea realiza un aporte significativo para que el estudiante centre el ideal planteado en la primera cuestión y se apropie de elementos que le permitirán llegar a una estructura fundamental de una función cuadrática a partir de los elementos proporcionados por la tarea (ET1). Posterior al planteamiento por parte del estudiante de una estructura matemática que enmarque la

situación, se da paso a que se realice una reflexión en torno a los resultados obtenidos y por medio de la tercera cuestión describa que entiende por dicha estructura, esto posibilita que el estudiante se apropie del significado de la función cuadrática y lo exprese como tal (ET3).

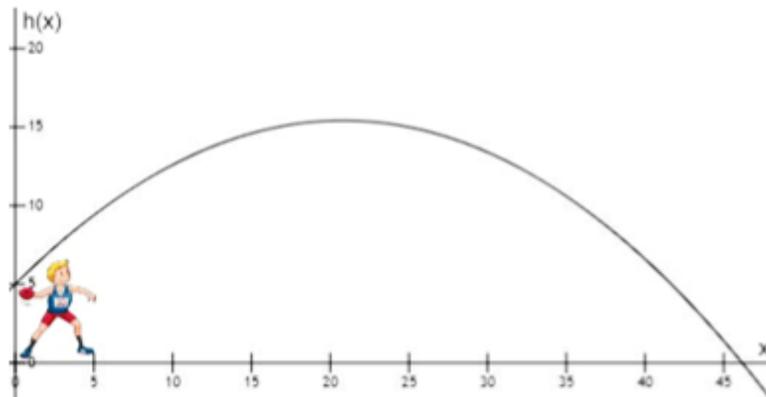
En cuanto a la última cuestión de la presente tarea, es posible observar que por medio de valores reales (constantes) relacionados con la estructura propuesta por el estudiante es posible que maneje y desarrolle las características que componen la función cuadrática desde campos procedimentales, como la ampliación de los valores en las variables independientes de la función (ET2).

De forma similar, la tarea planteada por Fernández et al., (2018) presenta elementos de utilidad en el mejoramiento de las dificultades identificadas y asociadas al campo conceptual de la función cuadrática, al igual que la anterior, esta se desarrolla por medio de una situación problema, representada de la siguiente forma:

## Ilustración 44: Tarea 2 para la sesión 1

### ATLETISMO MATEMÁTICO

El deportista Alexander Ortega presenta una prueba de atletismo moderno que consiste en lanzar un disco a la máxima distancia posible, forma parte de los juegos olímpicos. Alex es un atleta de los juegos olímpicos y su lanzamiento está modelado usando la ecuación  $h(x) = -0,024x^2 + x + 5$  donde  $x$  es la distancia recorrida (metros) y  $h(x)$  la altura del disco lanzado. La siguiente ilustración corresponde a una representación gráfica de esta situación.



- 1) ¿Cuál es la altura del disco respecto al suelo en el momento en que es lanzado?  
*Debe fijar la distancia recorrida en cero.  $x=0$ , y reemplazar en la ecuación presentada*
- 2) ¿Cuál es la distancia que recorrió el disco? Justifique su respuesta  
*Debe fijar la altura en cero,  $h(x)=0$ , y despejar la variable  $x$ .*
- 3) ¿Cómo es la forma de la trayectoria del disco si el término negativo de la ecuación cambia de negativo a positivo?  
*Debe graficar en el mismo plano cartesiano y comparar las representaciones*
- 4) Si el récord de lanzamiento es de 50 metros, ¿habrá el lanzamiento anterior superado el récord? Justifique la respuesta  
*Debe hallar la imagen en 50 metros en la ecuación y comparar con el resultado anterior*
- 5) ¿Cuál es la altura máxima y a qué distancia la logra?  
*Según la forma de la ecuación cuadrática es  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para esta situación  $a = -0.024$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$  reemplazar en  $x = \frac{-b}{2a}$  y encontrar la distancia. Para encontrar la altura reemplace el valor obtenido en la función  $h(x)$ . Esa pareja ordenada será el vértice.*

Fuente: Fernández et al., (2018)

En la situación expuesta es posible observar que se relaciona una situación deportiva con una expresión matemática (ecuación) y un gráfico que acerca al estudiante a las características y elementos representativos de la función cuadrática, esta actividad fue

seleccionada teniendo en cuenta que el objetivo de aprendizaje encaja con la dificultad que se requiere superar, específicamente el desconocimiento y el manejo de las características que estructuran la función cuadrática.

En los cuestionamientos que componen la actividad se incorporan pistas procedimentales que impulsan al estudiante a realizar desarrollos que le permiten establecer soluciones al problema, este modelo es interesante ya que no sigue las pautas cotidianas de una tarea, solo enfocadas en preguntar si el estudiante sabe o no, contrario a esto, la presente tarea aporta algunos pasos pertenecientes a los saberes previos de los estudiantes y los encamina a la comprensión y el manejo de los elementos que le presenta la situación, según Sepúlveda, Medina & Itzel (2009) se consideran que:

Para entender el proceso llevado a cabo por quienes resuelven problemas matemáticos e incidir en la instrucción, es necesario considerar la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar, es decir, se necesita incorporar el conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores y especialistas de las ciencias cognitivas (p. 83).

En relación a lo anterior, el conocimiento que aporta el docente va de la mano con los desarrollos que plantea el estudiante, en el caso del primer cuestionamiento de la tarea, se pide al estudiante realizar una observación y describir un dato numérico que puede hallar identificando el inicio del lanzamiento en la gráfica o desarrollando un proceso como se establece en la pista de la cuestión, esto le permite al estudiante relacionar el inicio de la función con lo que se reconoce como el intercepto con el eje y (ET1), este proceso se refuerza en el segundo cuestionamiento, ya que conlleva a que el estudiante identifique el valor correspondiente a una raíz de la función cuadrática presentada en el problema.

El tercer cuestionamiento está estructurado para que el estudiante identifique la funcionalidad del signo del término cuadrático de la función, ya que de este depende la dirección de la concavidad de la función (ET2), esto mediante el desarrollo de la ecuación

que plantea el problema cambiando el signo inicial y realizando una comparación entre los gráficos resultantes.

Para el caso del cuarto cuestionamiento, solo se debe realizar una comparación con el resultado del segundo cuestionamiento, lo que lleva a que el estudiante reconozca la incidencia de las características y fortalezca la comprensión de cada una de estas (ET1, ET2). Para finalizar la actividad, se establece el quinto cuestionamiento que permite al estudiante adoptar el significado de vértice y punto máximo o mínimo de una función cuadrática, teniendo en cuenta la complejidad del punto, al igual que las demás cuestiones, se ha dado un aporte procedimental con el fin de que el estudiante logre identificar la característica conocida como vértice de la función cuadrática (ET1, ET2).

En este mismo orden de ideas, la tarea propuesta por Santillana (2017) está enfocada en lograr mejorar la comprensión del concepto y las características que componen la función cuadrática, esta tarea tiene elementos diferentes y dinámicos ya que se propone que los estudiantes usen una herramienta virtual (GeoGebra) con el fin de realizar observaciones, desarrollos y conclusiones que permitan apropiarse del significado de la función cuadrática, la tarea es expuesta de la siguiente forma:

## Ilustración 45: Tarea 3 de la sesión 1

### FAMILIA DE FUNCIONES

Utiliza Geogebra para graficar las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano por cada punto. analiza la relación que existe entre cada grupo de funciones:

1.  $y = x^2$ ;  $y = -x^2$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

2.  $y = 2x^2$ ;  $y = -2x^2$ ;  $y = \frac{1}{2}x^2$ ;  $y = -\frac{1}{2}x^2$

3.  $y = -4x^2$ ;  $y = 4x^2$ ;  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ;  $y = \frac{1}{4}x^2$

4.  $y = x^2$ ;  $y = (x - 1)^2$ ;  $y = (x - 1)^2 + 1$

5.  $y = x^2$ ;  $y = -x^2 - x$ ;  $y = -x^2 - x - 1$

Analiza la relación que existe entre cada grupo de funciones y describe tus conclusiones para cada uno de ellos.

Fuente: Elaboración propia.

Es importante aclarar que, para el uso y desarrollo de la presente tarea, se debe orientar a los estudiantes en el uso básico de la herramienta virtual GeoGebra como graficadora de funciones, Opazo, Grajeda & Farfán (2014) postulan que la utilidad de las nuevas tecnologías de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, representa un elemento que aporta a la mejora de estos procesos, esto soportado en que contiene características técnicas que le permiten al estudiando observar las funciones de cualquier clase de manera dinámica y eficiente, específicamente por medio del uso del GeoGebra.

Es posible que la tarea sea observada en un primer momento como un desarrollo procedimental, sin embargo, al utilizar la herramienta GeoGebra los estudiantes pueden reconocer como afecta la variación de los parámetros de la función cuadrática, su comportamiento, además de brindar al estudiante el significado de cada característica que la compone (ET1, ET2, ET3).

### 1.2.2 Tareas matemáticas configuradas para los sistemas de representación de la función cuadrática

En el presente apartado se describen las observaciones realizadas a las tareas relacionadas con el mejoramiento en el aprendizaje de los sistemas de representación de la función cuadrática y los elementos que los componen, siempre enfocadas a adquirir las capacidades y lograr los objetivos necesarios para superar las dificultades encontradas en este campo.

A partir de lo afirmado anteriormente, Huapaya (2012) desarrolla una investigación en el marco de la experimentación de la enseñanza, se hace interesante tomar información y elementos de esta debido a que aborda la función cuadrática y aporta a superar las dificultades de aprendizaje de la misma a través de una serie de actividades, la observación y selección realizada en esta investigación se enfocó en aquella actividad que responde al mejoramiento en los sistemas de representación, para cual desarrolla una tarea situacional con la siguiente descripción:

Ilustración 46: Tarea 1 para la sesión 2

#### **RELACIONES CUADRADAS**

Las siguientes expresiones algebraicas representan la forma en la que un grupo de criadores de conejos obtienen sus crías durante el verano, lastimosamente los resultados (representados en tablas) se confundieron y no se sabe cuál tabla se relaciona con la expresión expuesta, ayuda al grupo de criadores mostrando cual es la tabla correcta y cómo se llegó a esta respuesta. Al encontrar la tabla adecuada representa su gráfica en un plano cartesiano. Nota: Los criadores mencionan que  $x$  es la temporada a averiguar y  $f(x)$  es el resultado esperado.

a)  $f(x) = 2x^2 + 1$

x	1	2	3	4
F(x)	3	5	7	9

x	1	2	3	4
F(x)	3	9	19	33

x	1	2	3	4
F(x)	3	9	12	18

b)  $f(x) = 9 - x^2$

x	1	2	3	4
F(x)	8	7	6	5

x	1	2	3	4
F(x)	8	5	-1	-10

x	1	2	3	4
F(x)	8	5	0	-7

Fuente: Huapaya (2012).

Al realizar la observación de la actividad es posible describir que su estructura general se centra en la solución de un problema de contextual, en el cual el estudiante logra relacionar dos sistemas de representación a través de un método de traducción o desarrollo de registros de representación y por último llevar estos registros a un plano cartesiano, es importante resaltar que a pesar de que la tarea se presenta como un problema cotidiano, el manejo de los sistemas de representación y la transformación entre los registros es el trasfondo de la misma.

Lesh (1997) menciona que las actividades de contexto no deben enfocarse simplemente a ofrecer respuestas a preguntas simples, por el contrario, el objetivo de la actividad debe centrarse en desarrollar construcciones, descripciones y explicaciones que aborden a la estabilidad contextual y en ese sentido los sistemas de representación facilitan la diferenciación e integración de las soluciones a obtener.

Al analizar detalladamente los elementos que componen la tarea, se identifican procesos y particularidades que aportan al mejoramiento en las dificultades identificadas en los sujetos de estudio, Huapaya (2012) describe que cuando los estudiantes leen detenidamente el problema y abordan un tratamiento o procedimiento de tránsito de registros de representación como la evaluación de la función a través de los valores que expone el problema, logran coordinar entre las representaciones los registros adecuados, si el estudiante

logra cuestionarse respecto a los registros tabulares sobrantes y desea comprobar su respuesta, los desarrolla de igual forma repitiendo el mismo procedimiento y descartando resultados erróneos, reforzando su capacidad de convertir un registro del sistema algebraico al tabular y finalmente representarlo en el plano cartesiano (ST2).

Es importante mencionar que la tarea guarda la singularidad de presentar al estudiante los valores y elementos a los que debe llegar, solo debe encontrar el procedimiento adecuado para llegar a la representación correcta (ST3), posiblemente esto brinda al estudiante la posibilidad de no incidir en valores a tientas, dando seguridad para responder al proceso.

De forma similar, la tarea seleccionada guarda un modelo que podría considerarse general al querer abordar el aprendizaje de múltiples contenidos matemáticos, sin embargo, González (2008) aborda de manera singular el propósito específico de encaminar al estudiante a manipular los registros de representación de la función cuadrática a través de la situación y cuestiones del problema, la tarea fue estructurada de la siguiente forma:

## Ilustración 47: Tarea 2 para la sesión 2

### MIRA COMO BAJA

Un balón se deja caer desde la parte más alta de un edificio. La siguiente tabla muestra la distancia recorrida en metros en un tiempo en segundos.

TIEMPO (t)	0	1	2	3	4	5
DISTANCIA (d)	2	3	6	11	18	27

1. ¿Cuántos metros habrá caído después de 6 segundos?
2. ¿Cuántos metros habrá caído después de 13 segundos?
3. Encuentra la expresión algebraica que generalice la relación del tiempo con la distancia
4. A partir de la tabla de valores y la expresión algebraica realiza la gráfica en el plano cartesiano.

Fuente: Elaboración propia.

Como se menciona en el anterior párrafo, es posible que se identifique la actividad como una situación que se aborda en diferentes campos del saber y que posiblemente se considera una tarea en libertad de selección para aplicar y darle diferentes fines, sin embargo, para la presente investigación, se tiene en cuenta el trabajo de González (2008) quien toma el movimiento rectilíneo como un registro representativo que puede tener tratamientos y transformaciones que aportan al mejoramiento del aprendizaje de los sistemas de representación que para este caso en específico se enfoca en la función cuadrática. Soportando lo anterior, Lesh (1997) señala que

Una característica importante de una sociedad tecnificada es que los humanos sabemos cómo crear sistemas que nosotros mismos no sabemos cómo describir, explicar, predecir o controlar. Por ello afirma que algunos objetivos de la enseñanza de la matemática consisten en ayudar a

los estudiantes a desarrollar estructuras potentes o “tecnologías conceptuales” para entender esos sistemas (p. 389).

La actividad permite que el estudiante se enfrente a una situación que cautiva sus proyecciones en una sucesión matemática que a simple vista es sencilla, pero al encontrar el modelo adecuado puede generar en el estudiante la capacidad de convertir los registros de representación de forma eficiente y sin errores, como lo establece el primer y segundo cuestionamiento (ST2, ST3), ahora bien, el tercer y cuarto cuestionamiento permiten que el estudiante compacte estructuras significativas, al proponer una expresión algebraica que relaciona las variables de tiempo y distancia, en las cuales interviene un modelo cuadrático, posterior a este registro en el plano cartesiano (ST1), esto refuerza esta capacidad de conversión entre registros y conlleva a un mejoramiento general en este ámbito considerado fundamental en las tareas seleccionadas.

Así mismo, Sánchez (2019) presenta una actividad secuencial en su investigación, enfocada en la comprensión y el aprendizaje de la parábola a través de la exploración en sus registros de representación, esto es importante ya que es necesario abordar un procedimiento que encamine al estudiante a mejorar la capacidad de reconocimiento de la representación gráfica de la función cuadrática, esta se estructura en 7 pasos con sus respectivas graficas (ver apartado 4.2.2).

Las estrategias que se aborda en la tarea tienen en cuenta los tipos de representación semiótica planteado por Duval (2004) permiten la interpretación de dicho objeto y responden a los propósitos de la investigación, ya que el estudiante no reconoce la parábola y la actividad se enfoca en el mejoramiento de esta dificultad. Al examinar de forma detallada cada paso de la construcción y las cuestiones que se establecen al final para que el estudiante responda, es posible describir que las manualidades y el desarrollo práctico son procesos que motivan e impulsa al estudiante a asimilar información y contenidos que se relacionan con las construcciones, al finalizar la construcción en compañía del docente, se realizan cuestionamientos en torno a la observación que realice el estudiante a su producto final,

llevándolo a reconocer la forma de la parábola y las características que la componen o que se pueden identificar de estas (ST1), facilitando de igual forma el manejo de estas características por parte del estudiante, de igual forma, aporta al alcance de la proyección principal de la actividad, la cual corresponde al reconocimiento de la representación gráfica de la función cuadrática.

### **1.2.3 Tareas matemáticas configuradas para los contextos de la función cuadrática**

Siguiendo con los análisis correspondientes a las tareas que componen la secuencia didáctica, se describen en este caso las relacionadas con el mejoramiento en los contextos de la función cuadrática, a pesar de que la mayoría de las tareas abordadas en los análisis anteriores se estructuran en situaciones, para este caso en específico se analizan aquellas que aportan a superar dificultades relacionadas con la comprensión, manejo, solución de problemas relativos a la función cuadrática.

En relación a lo anterior, la tarea que se describe a continuación pertenece al campo del razonamiento matemático, los problemas sobre el cálculo de edades resultan provechosos debido a su facilidad en el uso de procesos matemáticos y la rápida interpretación por parte de los estudiantes, existen variedad de problemas y situaciones que abarcan este tipo de desarrollo, sin embargo, se tiene en cuenta la estructura planteada por Santillana (2017), teniendo en cuenta que aborda elementos significativos y en afinidad a los objetivos de la investigación, la tarea es presentada de la siguiente forma:

**Ilustración 48: Tarea 1 para la sesión 3**  
**LAS EDADES Y LOS NÚMEROS**

Anastasia tiene 5 años más que Valeria. Si la suma de los cuadrados de sus edades es 53, ¿Cuáles son las edades de Anastasia y Valeria?

- Para aportar al proceso de comprensión y solución del problema se sugiere a los estudiantes seguir la siguiente tabla:

Datos numéricos	Operaciones matemáticas Identificadas	Valores a encontrar	Posible proceso matemático para desarrollar el problema	Resultado en palabras (verbal)

Fuente: Elaboración propia.

Las teorías que postulan la resolución de problemas como un medio de aprendizaje confiable son bastantes, sin embargo, la tarea seleccionada responde a un modelo específico que busca en el estudiante mejoramiento en campos específicos, investigadores como Huapaya (2012) mencionan que la resolución de problemas con estructuras como la que presenta la tarea seleccionada ayuda a que el estudiante interprete, busque, seleccione y aplique datos o herramientas para dar explicación a la situación propuesta, todo este proceso le permite al estudiante definir, transformar y extender sus ideas y conceptos, los cuales presentan un orden, una correlación y una estructura.

En una observación detallada a la tarea, es posible afirmar que parte de una situación cotidiana, lo que contextualiza al estudiante en un ambiente conocido y que genera confianza a la hora de enfrentarse al mismo (CT1), junto a esta situación presentada en un lenguaje natural se estructura un cuadro, la finalidad de este es guiarlo y lograr que siga un modelo organizado y secuencial, la tarea se enfoca en que el estudiante logre identificar información

relevante a partir de los elementos que pide el cuadro, al tener la información seleccionada y organizada tendrá la posibilidad de articularla y abordar un proceso matemático que le permita la solución del problema (CT2), finalmente, le pide al estudiante que describa en palabras una respuesta para el problema, este paso ha representado un punto de dificultad y gracias a estas indicaciones el estudiante logra establecer un registro verbal que responde al problema.

De forma similar, la actividad abordada por Hernández et al., (2008) en su investigación guarda afinidad con el objetivo de la presente investigación, esta contiene tareas que manejan situaciones que aportan al mejoramiento en la solución de problemas relacionados con la función cuadrática, esta se representa de la siguiente forma:

#### Ilustración 49: Tarea 2 para la situación 3

##### **MIDIENDO Y SOLUCIONANDO**

Con una cuerda de 100 metros se debe encerrar una porción regular de un lote de terreno para cultivar, cuyo perímetro (suma de sus lados) debe mantenerse constante, de tal forma que en él se pueda cultivar la mayor cantidad de plantas.

##### **Procedimientos:**

- a) Dibuja un lote cuadrado con 100 metros (usar escalas) de perímetro
- b) Medir el largo y el ancho del lote iniciando con un metro de ancho
- c) Variar cada una de las dimensiones del lote, de tal forma que el ancho aumenta de metro en metro.
- d) Construir una tabla teniendo en cuenta el ancho y el largo.
- e) Hallar el área de cada una de las variaciones del lote (ancho x largo)
- f) Construir una tabla teniendo en cuenta el área y el largo
- g) Hacer una gráfica en el plano cartesiano con los datos anteriores

Fuente: Hernández et al., (2008)

Como se menciona en el análisis de la anterior tarea, para justificar el uso de la solución de problemas como actividad de mejoramiento en los procesos matemáticos, en este

caso la función cuadrática, representan una gran cantidad, sin embargo, para soportar la utilidad de esta tarea Hernández et al, (2008) considera que:

La resolución de problemas seleccionados por el docente a partir de situaciones reales es el comienzo del aprendizaje, el lugar de gestión de los conceptos matemáticos por el alumno, de su apropiación de sus nuevas herramientas procedimentales, del uso del lenguaje convencional, de la resignificación por el alumno de los conceptos en juego, de la evaluación por el docente y de los procesos infantiles en la elaboración del saber (p. 37)

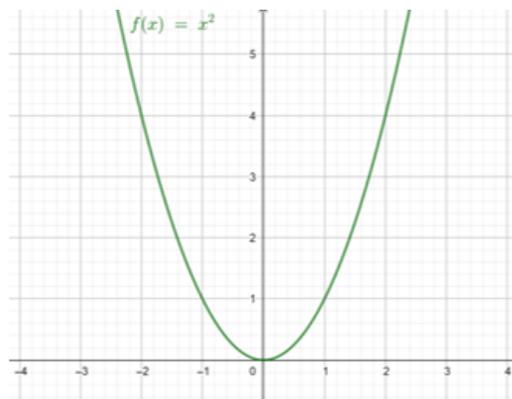
Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, esta actividad despierta en el estudiante la necesidad de cuestionarse y de avanzar en el uso de nuevos elementos para enfrentarse a un problema al cual dará solución. Al observar cada uno de los pasos y de los cuestionamientos que plantea el problema, es posible identificar una guía que proporciona al estudiante herramientas que llevan a la solución del problema, esto representa un gran significado a la hora de comprender la situación en si (CT1), de igual forma cada pauta, cada procedimiento que le pide la tarea al estudiante aporta una conclusión, como las medidas iniciales del lote, las variaciones en sus dimensiones, la comparación entre el área y una de las dimensiones, estos datos son fundamentales, cuando el estudiante logra extraerlos y compararlos genera en el estudiante una reflexión que lo lleva a la solución del problema (CT2), ahora bien, cuando el estudiante reconoce de los valores y magnitudes que le ayudan a modelar los procesos matemáticos, en este caso el largo, el ancho, el perímetro y el área del terreno ha logrado identificar las variables que componen el problema (CT3).

Para finalizar los análisis correspondientes a las tareas que componen la secuencia didáctica, se presenta una actividad con un desarrollo diferente a las anteriores, esta actividad es estructurada con el fin de mejorar el ámbito propositivo del estudiante en torno a los problemas de contexto relacionados con la función cuadrática, esta es presentada de la siguiente forma:

Ilustración 50: Tarea 3 para la sesión 3  
**EL VALOR DE UN PROBLEMA**

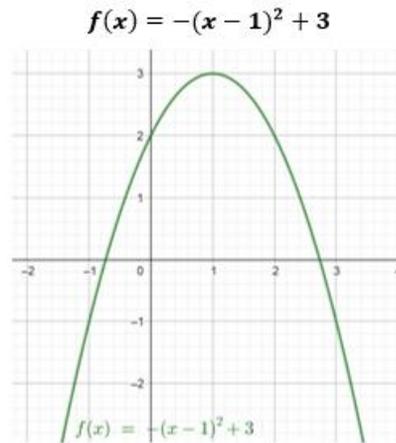
- Se abre espacio de 5 minutos para recordar los usos de la función cuadrática en la vida cotidiana que se presentaron en el video previo a la actividad anterior, pidiendo al estudiante que recuerde mentalmente una de estas.
- Se pide a los estudiantes que observen las siguientes funciones cuadráticas con sus características y sus respectivas gráficas:

$$f(x) = x^2$$



Fuente: Creación propia.

- Vértice: (0,0)
- Concavidad positiva (abre hacia arriba)
- Corte con el eje  $y = 0$
- Corte con el eje  $x = 0$



Fuente: Creación propia.

- Vértice: (1,3)
  - Concavidad negativa (abre hacia abajo)
  - Corte con el eje y = 2
  - Cortes con el eje x = (-0,73;0) y x = (2,73;0)
- A partir de la observación realizada, cada estudiante debe escoger una de las dos funciones cuadráticas y adaptar su representación gráfica a uno de los usos que pensó en el paso anterior.
  - Con la información de las características de la función y la utilidad escogida el estudiante debe proponer una situación básica en la que se relacionen las características de la función cuadrática y el correspondiente uso identificado por el estudiante.
  - El estudiante debe plantear al menos tres cuestiones referentes al problema, que su solución sea producto de la utilización y manejo de la función propuesta inicialmente.

Fuente: Elaboración propia.

La tarea presentada se establece con el fin de que el estudiante analice y postule una construcción propia a partir de las funciones cuadráticas que se le presentan, en este caso la capacidad de crear y de proponer juegan un papel fundamental, ya que son puestas en práctica, la observación del estudiante y la comprensión de los elementos con los que va a trabajar forman las herramientas para poder centrarse en un contexto o una situación. Sepúlveda et al., (2009) menciona que en el uso de tareas contextuales en la enseñanza de las matemáticas no solo implica que el docente sea el único que estructure las situaciones, ya

que los estudiantes presentan curiosidad al comparar los casos con los que se enfrentan en su diario vivir, llevándolos a plantear sistemas, algoritmos y desarrollos en problemas que se encuentran en su pensamiento personal. A partir de lo anterior es importante que el estudiante alcance un nivel propositivo y que le permita apropiarse de procesos como el reconocimiento de información relevante para un problema, los procesos matemáticos necesarios para resolverlos, en este caso elementos asociados a la función cuadrática y el contexto al cual desea enfrentarse (CT1, CT2, CT3).

## CAPITULO V

### 5. SECUENCIA DIDÁCTICA

Para la presente investigación, la secuencia didáctica que aquí se presenta para dar respuesta al objetivo general propuesto aporta al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático función cuadrática. Esta se elabora siguiendo elementos del modelo planteado por Tobón et al., (2010) en conjunto con productos del análisis didáctico de Gómez (2002), se propone hacerla evidente a través de dos documentos, una primera parte se le denomina documento técnico, y una segunda parte denominada documento guía, estos se representan de la siguiente forma:

#### 5.1 Documento Técnico

En este documento se recolecta la información general de las sesiones que componen la secuencia didáctica, se realiza una descripción básica de las tareas, las dificultades, objetivos de aprendizaje, procesos matemáticos, capacidades, dificultades, errores y recursos a utilizar en la secuencia. De igual forma, este documento contiene una descripción de la secuencialidad de las actividades.

Tabla 17: Documento técnico de la secuencia didáctica

<b>IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</b>		
<b>Título:</b> SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONTENIDO MATEMÁTICO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO		
<b>Área:</b> MATEMATICAS	<b>Grado:</b> 9	<b>Objeto Matemático:</b> Función cuadrática
<b>Número de Sesiones:</b> 3	<b>Tiempo por Sesiones:</b> 2 hora	
<b>INTENCIONES FORMATIVAS</b>		

**Propósito de la Secuencia:** Contribuir al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático función cuadrática.

**DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**

**Dificultad 1:** Conflicto en torno al manejo del significado de la función cuadrática.  
**Dificultad 2:** Desconocimiento de la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática.

**Objetivo de Aprendizaje 1:** Identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real

<b>Tarea Matemática</b>	<b>Proceso Matemático</b>	<b>Capacidad Fundamental</b>	<b>Capacidad</b>	<b>Dificultades</b>	<b>Errores</b>
<b>Tarea 1: Paredes Cuadradas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> </ul>	Identifica el significado de la función cuadrática	Presenta deficiencias en el manejo de concepto, contenidos y procedimientos relacionados a la función cuadrática	Confunde la función cuadrática con un binomio algebraico
<b>Tarea 2: Atletismo matemático</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> <li>• Utiliza el lenguaje formal, técnico y las operaciones</li> </ul>	Reconoce la incidencia de los elementos y características que estructuran la función cuadrática		Utiliza los datos incorrectos para lograr establecer el punto máximo y el corte con el eje x
<b>Tarea 3: Familia de funciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> <li>• Modelar</li> <li>• Utiliza el lenguaje formal, técnico y las operaciones</li> </ul>	Interpreta la relación entre los parámetros de la función cuadrática y la familia de funciones que genera		Realiza cambios en los componentes de la función cuadrática y no identifica las características resultantes.

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa herramientas y recursos</li> </ul>			
<p><b>Dificultad 3:</b> Falencias al interpretar la relación entre el parámetro de una función cuadrática con la familia de funciones que genera.</p> <p><b>Dificultad 4:</b> Dificultad al traducir un registro de representación de la función cuadrática entre los sistemas de representación</p> <p><b>Dificultad 5:</b> Desconocimiento de la relación de los elementos y características que componen los sistemas de representación de la función cuadrática al traducir un registro de representación</p>		<p><b>Objetivo de Aprendizaje 2:</b> Representar la función cuadrática en los sistemas algebraicos, tabular y gráfico y realizar transformaciones entre sus registros de representación.</p>			
Tarea Matemática	Proceso Matemático	Capacidad Fundamental	Capacidad	Dificultades	Errores
<p><b>Tarea 1:</b> <b>Relaciones cuadradas</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas</li> <li>• Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas</li> <li>• Dominar procedimientos y algoritmos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> <li>• Representar</li> <li>• Utiliza el lenguaje formal, técnico y las operaciones</li> <li>• Usa herramientas y recursos</li> </ul>	Traduce un registro de representación de la función cuadrática entre los diferentes sistemas	Demuestra falencias al interpretar y representar la función cuadrática desde los sistemas de representación verbal,	Calcula de forma incorrecta la potencia cuadrada al reemplazar un valor
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentar</li> <li>• Modelar</li> <li>• Representar</li> <li>• Utiliza el lenguaje formal,</li> </ul>	Hace conversiones entre diferentes formas de representación de la función cuadrática.		No ubica de forma adecuada la pareja ordenada de una parábola en el plano cartesiano

	matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz	técnico y las operaciones <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa herramientas y recursos</li> </ul>		algebraico y gráfico	
<b>Tarea 3: Construyamos la forma</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentar</li> <li>• Comunicar</li> <li>• Representar <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa herramientas y recursos</li> </ul> </li> </ul>	Reconoce la gráfica de una función cuadrática		No reconoce la parábola como gráfico que representa la función cuadrática
<b>Dificultad 6:</b> Dificultad para identificar y extraer elementos e información relevante para dar solución a un problema relacionado con la función cuadrática.			<b>Objetivo de Aprendizaje 3:</b> Plantear y resolver problemas de contexto relacionados con la función cuadrática utilizando datos e información propuesta en el problema.		
<b>Tarea Matemática</b>	<b>Proceso Matemático</b>	<b>Capacidad Fundamental</b>	<b>Capacidad</b>	<b>Dificultades</b>	<b>Errores</b>
<b>Tarea 1: Las edades y los números</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo.</li> <li>• Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas</li> <li>• Formular, plantear, transformar y resolver</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> <li>• Comunicar</li> <li>• Plantear y resolver problemas.</li> <li>• Representar</li> <li>• Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones</li> </ul>	Identifica características y datos relevantes para la solución de un problema relacionado con la función cuadrática	Dificultad asociada a la interpretación y aplicación de elementos asociados a la función cuadrática en un problema de contexto	Utiliza datos que no están involucrados en el problema para justificar su respuesta

	problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar herramientas y recursos</li> </ul>			
<b>Tarea 2: Midiendo y solucionando</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensar y razonar.</li> <li>• Argumentar</li> <li>• Comunicar</li> <li>• Plantear y resolver problemas.</li> <li>• Representar</li> <li>• Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones</li> <li>• Usar herramientas y recursos</li> </ul>	Utiliza las características y elementos de la función cuadrática para desarrollar problemas		Reconoce solamente la magnitud independiente de la función cuadrática
<b>Tarea 3: El valor de un problema</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentar</li> <li>• Plantear y resolver problemas.</li> <li>• Representar</li> <li>• Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones</li> </ul>	Crea problemas que se puedan modelar mediante funciones cuadráticas.		Propone de manera incorrecta la magnitud dependiente e independiente de la función cuadrática

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar herramientas y recursos</li> </ul>		
<b>SECUENCIALIDAD DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</b>				
<b>Sesión 1:</b> identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real.			<b>Tiempo de la Sesión: 2 Horas cada sesión</b>	
<b>Tarea Matemática</b>	<b>Descripción</b>	<b>Acciones del Profesor</b>	<b>Acciones de los Estudiantes</b>	
<b>Primera: Paredes Cuadradas</b>	Consiste en la construcción de un modelo cuadrático, relacionando las variables del área de una pared cuadrada y un lado cuadrado	1) Expone las características de una pared cuadrada. 2) Socializa la tarea presentada a los estudiantes. 3) Está dispuesto a resolver inquietudes presentadas 4) Realiza una retroalimentación sobre el desarrollo de la actividad	1) Contextualizarse con la actividad a realizar 2) Desarrolla la actividad propuesta. 3) Realiza las pregunta que hayan surgido	
<b>Tránsito a la tarea 2:</b> Al tener claridad sobre el concepto de función cuadrática, el docente expone sus elementos y presenta una situación que permite identificar estos.				
<b>Segunda: Atletismo Matemático</b>	Mediante una situación aplicada al lanzamiento de disco, se identifican los elementos de la función cuadrática.	1) Expone los componentes del plano cartesiano y elementos de la parábola	1) Participa de la exposición del docente sobre los	

		<p>2) Socializa la situación de la tarea y las cuestiones que la componen</p> <p>3) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea</p> <p>4) Retroalimenta la solución de la tarea y formaliza significados matemáticos</p>	<p>elementos de la parábola</p> <p>2) Se contextualiza con la actividad a realizar</p> <p>3) Desarrolla la actividad propuesta</p> <p>4) Realiza las pregunta que hayan surgido</p>
<p><b>Tránsito a la tarea 3:</b> Después de presentar y formalizar los elementos de la función cuadrática, el docente, enseña el manejo de la herramienta web y aplicación Geogebra como graficadora de funciones.</p>			
<p><b>Tercera: Familia de funciones</b></p>	<p>Con el uso de la herramienta Geogebra se representarán varias funciones cuadráticas y se encontrarán similitudes y diferencias.</p>	<p>1) Enseña el manejo de la herramienta Geogebra</p> <p>2) Presenta los ejercicios propuestos</p> <p>3) Está dispuesto a resolver las inquietudes</p>	<p>1) Maneja la herramienta Geogebra</p> <p>2) Desarrolla la actividad propuesta</p> <p>3) Socializa con los compañeros y docente los análisis</p>

		<p>presentadas en el desarrollo de la tarea</p> <p>4) Socializa los análisis obtenidos por los estudiantes en cada familia de funciones y formalizar generalidades</p>	<p>y conclusiones encontrados</p>
<p><b>Recursos a utilizar:</b> Tablero, marcadores, Regla, Curvígrafo, Aplicación Geogebra, Calculadora</p>			
<p><b>Sesión 2:</b> Representar la función cuadrática en los sistemas algebraicos, tabular y gráfico y realizar transformaciones entre sus registros de representación</p>		<p><b>Tiempo de la Sesión: 2 Hora cada sesión</b></p>	
<p><b>Tarea</b> <b>Matemática</b></p>	<p><b>Descripción</b></p>	<p><b>Acciones del Profesor</b></p>	<p><b>Acciones de los Estudiantes</b></p>
<p><b>Primera: Relaciones cuadradas</b></p>	<p>Por medio de la comparación y traducción de registros de representación planteados en la tarea, se escoge el sistema de representación tabular adecuado para la función cuadrática propuesta</p>	<p>1) Refuerza en los estudiantes el proceso de evaluación de una función por medio de un video introductorio.</p> <p>2) Expone los ejercicios a los estudiantes</p> <p>3) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea.</p>	<p>1) Participa en la proyección inicial del video introductorio</p> <p>2) Desarrolla los ejercicios propuestos en la tarea</p> <p>3) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p>

		4) Retroalimenta la solución de la tarea y formaliza las relaciones propuestas en los ejercicios.	
<p><b>Tránsito a la tarea 2:</b> Después de retroalimentar el proceso de las tablas de valores y gráfica de la anterior situación, se pone en contexto la siguiente tarea.</p>			
<p><b>Segunda: Mira como baja</b></p>	<p>Por medio de una tabla de valores el estudiante puede identificar la generalidad en forma algebraica y realizar su gráfica en el plano cartesiano</p>	<p>1) Expone la situación presentada en la tarea</p> <p>2) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea.</p> <p>3) Retroalimenta la solución de la tarea y formaliza las relaciones propuestas en los ejercicios</p>	<p>1) Se contextualiza con la situación presentada</p> <p>2) Desarrolla los ejercicios propuestos en la tarea</p> <p>3) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p> <p>4) Participa y socializa los resultados encontrados</p>
<p><b>Tránsito a la tarea 3:</b> Posterior a la retroalimentación de la actividad anterior, se organizan los estudiantes en grupos de 2, se describe y verifica la lista de materiales a utilizar en la tarea y se da inicio a la descripción de la actividad.</p>			

<p><b>Tercera: Construyamos la forma</b></p>	<p>Se da el paso a paso para construir con algunos elementos de papelería la representación gráfica de la función cuadrática y se identifican algunas características y valores que componen la misma</p>	<p>1) Reúne a los estudiantes en grupos de 2</p> <p>2) Expone el paso a paso para la construcción propuesta</p> <p>3) Acompaña a los estudiantes en cada uno de estos pasos y verifica que se esté desarrollando de forma correcta</p> <p>4) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea.</p> <p>5. Retroalimenta el significado de la forma construida</p>	<p>1) Poseer los materiales para la actividad.</p> <p>2) Desarrollar el paso a paso en acompañamiento del docente</p> <p>3) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p> <p>4) Participa en la socialización del producto de la construcción y las conclusiones a las que llega.</p>
<p><b>Recursos a utilizar:</b> Tablero, marcadores, regla, curvógrafo, papel milimetrado, octavo de icopor, alfileres de cabeza grande, chinchas, lana, lápiz, tv, computadora.</p>			
<p><b>Sesión 3:</b> Plantear y resolver problemas de contexto relacionados con la función cuadrática utilizando datos e información propuesta en el problema</p>		<p><b>Tiempo de la Sesión: 2 hora cada sesión</b></p>	
<p><b>Tarea Matemática</b></p>	<p><b>Descripción</b></p>	<p><b>Acciones del Profesor</b></p>	<p><b>Acciones de los Estudiantes</b></p>

<p><b>Primera: Las edades y los números</b></p>	<p>Mediante el reconocimiento y selección de los datos y operaciones adecuadas el estudiante da solución a una situación de contexto modelada por la función cuadrática</p>	<p>1) Expone la situación problema, leyendo junto a los estudiantes de forma detenida (lenta)</p> <p>2) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea.</p> <p>3) Retroalimentar la solución de la situación problema con los estudiantes.</p>	<p>1) Contextualizarse con la situación expuesta.</p> <p>2) Leer mínimo tres veces el problema.</p> <p>3) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p> <p>4) Participa en la socialización del producto de la construcción y las conclusiones a las que llega.</p>
<p><b>Tránsito a la tarea 2:</b> Posterior a la socialización y retroalimentación de los resultados de la actividad anterior, se presenta a los estudiantes un video que refuerza la observación de la función cuadrática en situaciones de la vida cotidiana, dando paso al planteamiento de la siguiente situación propuesta para la segunda tarea de la sesión.</p>			
<p><b>Segunda: Midiendo y solucionando</b></p>	<p>Haciendo uso de conceptos geométricos como área y perímetro el estudiante da solución a un problema de máximos que modela una función cuadrática</p>	<p>1) Presentar a los estudiantes el video que aborda el uso de la función cuadrática en la vida cotidiana.</p> <p>2) Exponer a los estudiantes la situación problema, leyendo</p>	<p>1) Participar en la proyección del video inicial.</p> <p>2) Contextualizarse con la situación problema.</p>

		<p>junto a estos de forma detenida la situación y las cuestiones que la componen.</p> <p>3) Está dispuesto a resolver las inquietudes presentadas en el desarrollo de la tarea.</p> <p>4) Retroalimentar la solución de la situación problema con los estudiantes.</p>	<p>3) Desarrollar y responder las cuestiones presentadas en el problema.</p> <p>4) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p> <p>5) Participa y socializa los resultados encontrados</p>
<p><b>Tránsito a la tarea 3:</b> Partiendo de la retroalimentación de la situación anterior, el docente comparte las pautas y procesos a seguir para el desarrollo de la siguiente actividad.</p>			
<p><b>Tercera: El valor de un problema</b></p>	<p>Al realizar una observación detallada de los elementos y características de dos funciones cuadráticas propuestas, es estudiante debe proponer una situación de la vida cotidiana en la cual se involucre una de las dos funciones y se debe dar solución al problema propuesto haciendo uso de esta.</p>	<p>1) Presentar a los estudiantes las funciones cuadráticas propuestas</p> <p>2) Explicar el paso a paso de la actividad, acompañando a los estudiantes en cada una de estas.</p> <p>3) Está dispuesto a resolver las inquietudes</p>	<p>1) Desarrollar la actividad propuesta siguiendo las pautas establecidas por el docente</p> <p>2) Expone las dudas al docente en relación a la tarea en caso de que existan</p> <p>3) Participar y socializar los</p>

		<p>presentadas en el desarrollo de la tarea.</p> <p>4) Socializar las soluciones de los estudiantes y retroalimentar explicando y enfatizando en algunas de las soluciones.</p>	<p>resultados de forma grupal y con el docente.</p>
<p><b>Recursos a utilizar:</b> Tablero, marcadores, regla, curvígrafo, tv, pc (puede ser una memoria USB), calculadora.</p>			

Fuente: Elaboración propia.

## 5.2 Documento Guía

El documento guía presenta de forma específica todas las actividades organizadas y articuladas entre sí, de igual forma, presenta el paso a paso que el docente debe seguir para ejecutar las actividades y las sesiones de la secuencia, su estructura se describe de la siguiente forma:

### 5.2.1 Primera Sesión

Identificar los diferentes elementos que caracterizan la función cuadrática, determinar su significado y uso en el entorno real mediado por cambios

#### **Temporalidad y descripción general:**

**INICIO:** Se presenta el objetivo de la sesión, y se pone en contexto al estudiante mediante una situación de la vida cotidiana, los estudiantes resuelven la situación presentada, continuo

a esto, el docente realiza una retroalimentación de la situación para dejar claro el concepto de función cuadrática **Tiempo: 30 minutos.**

**DESARROLLO:** Se explica la estructura de un plano cartesiano y elemento de una parábola, y socializa la situación de la tarea sobre un deportista de atletismo. Los estudiantes resuelven la situación presentada, posterior a ello, el docente realiza la retroalimentación, presentando a los estudiantes los significados y la relación con los elementos de la función cuadrática. **Tiempo: 60 minutos.**

**CIERRE:** Se enseña el uso de la herramienta GeoGebra como graficador de funciones, y plantea la tarea a desarrollar. Seguido a ello, realiza una socialización de las interpretaciones que encontraron los estudiantes y formaliza conceptos. **Tiempo 30 minutos.**

Tiempo total de la sesión: 2 Horas

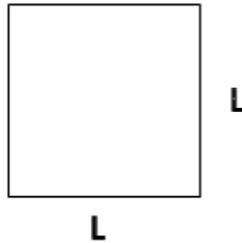
## INICIO

- Mediante una plática entre el docente y los estudiantes se da a conocer lo que se va a trabajar en la sesión.
- Se escribe la situación problema en el tablero y se pide a los estudiantes que enfoquen su mirada hacia una de las paredes del salón con el fin de describir las características que harían a una pared cuadrada

**Situación de la tarea:**

## PAREDES CUADRADAS

Ilustración 51: Pared con lados cuadrados



Fuente: Elaboración propia.

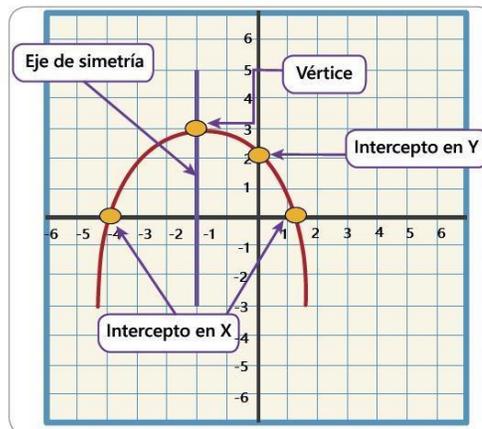
Tenemos una pared, de la cual se requiere saber su superficie, teniendo en cuenta que la pared tiene lados iguales, (pared cuadrada).

- 1) ¿Cómo hallarás la superficie de la pared ilustrada?
  - 2) Si llamamos “ $f(x)$ ” a la superficie y “ $x$ ” al lado de la pared, como quedaría constituida la fórmula para hallar la superficie.
  - 3) Teniendo en cuenta la estructura anterior, que entendemos por la expresión resultante.
  - 4) Qué superficies resultan si la pared tiene lado  $x = 1, x = 2, x = 3$
- Se lee el problema y las cuestiones junto a los estudiantes en voz alta
  - Con las actuaciones de los estudiantes para encontrar las soluciones a las diferentes preguntas planteadas en el contexto de la tarea, se espera que los estudiantes aclaren el concepto de función cuadrática.

### DESARROLLO

- El docente expone los elementos de una parábola, y los elementos del plano cartesiano por medio de la siguiente ilustración

Ilustración 52: Elementos de la parábola en el plano cartesiano



Fuente: Elaboración propia.

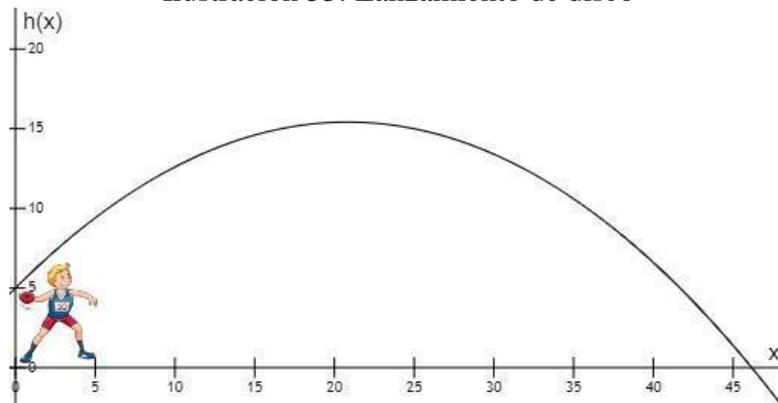
Posterior a la observación y análisis de la ilustración se procede a exponer la situación de la tarea:

**Situación de la tarea:**

### ATLETISMO MATEMÁTICO

El deportista Alexander Ortega presenta una prueba de atletismo moderno que consiste en lanzar un disco a la máxima distancia posible, forma parte de los juegos olímpicos. Alex es un atleta de los juegos olímpicos y su lanzamiento está modelado usando la ecuación  $h(x) = -0,024x^2 + x + 5$  donde  $x$  es la distancia recorrida (metros) y  $h(x)$  la altura del disco lanzado. La siguiente ilustración corresponde a una representación gráfica de esta situación.

Ilustración 53: Lanzamiento de disco



Fuente: Elaboración propia.

- A continuación, se presentan las cuestiones al estudiante junto a las pistas y ayuda, se le explica al estudiante que estas pistas son una guía que puede o no tener en cuenta para el desarrollo de la situación:
  - 1) ¿Cuál es la altura del disco respecto al suelo en el momento en que es lanzado?  
*Debe fijar la distancia recorrida en cero.  $x=0$ , y reemplazar en la ecuación presentada*
  - 2) ¿Cuál es la distancia que recorrió el disco? Justifique su respuesta  
*Debe fijar la altura en cero,  $h(x)=0$ , y despeje la variable  $x$ .*
  - 3) ¿Cómo es la forma de la trayectoria del disco si el término negativo de la ecuación cambia de negativo a positivo?  
*Debe graficar en el mismo plano cartesiano y comparar las representaciones*
  - 4) Si el récord de lanzamiento es de 50 metros, ¿habrá el lanzamiento anterior superado el récord? Justifique la respuesta  
*Debe hallar la imagen en 50 metros en la ecuación y comparar con el resultado anterior*
  - 5) ¿Cuál es la altura máxima y a que distancia la logra?  
*Según la forma de la ecuación cuadrática es  $f(x) = a^2 + bx + c$ , para esta situación  $a = -0.024$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$  reemplazar en  $x = \frac{-b}{2a}$  y encontrará la distancia. Para encontrar la altura reemplace el valor obtenido en la función  $h(x)$ . Esa pareja ordenada será el vértice.*

- Con la situación anterior, el docente debe realizar la retroalimentación, explicando a los estudiantes, que:
- Según la pregunta 1: La altura del disco respecto al suelo es el intercepto con el eje y
- Según la pregunta 2: La distancia que recorrió el disco, es el intercepto con eje x o raíz de la función cuadrática
- Según la pregunta 3: Es posible hallar imágenes, identificar dominio codominio y rango
- Según la pregunta 4: La altura máxima, es el vértice de la parábola.

### **CIERRE**

- El docente enseña el uso la herramienta GeoGebra, presentada en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es>, es necesario aclarar que solo se debe enseñar lo correspondiente a graficar funciones, posterior a esto se presenta la situación a trabajar:

#### **Situación de la tarea:**

### **FAMILIA DE FUNCIONES**

Utiliza GeoGebra para graficar las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano por cada punto. analiza la relación que existe entre cada grupo de funciones:

1.  $y = x^2$ ;  $y = -x^2$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
2.  $y = 2x^2$ ;  $y = -2x^2$ ;  $y = \frac{1}{2}x^2$ ;  $y = -\frac{1}{2}x^2$

3.  $y = -4x^2$ ;  $y = 4x^2$ ;  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ;  $y = \frac{1}{4}x^2$

4.  $y = x^2$ ;  $y = (x - 1)^2$ ;  $y = (x - 1)^2 + 1$

5.  $y = x^2$ ;  $y = -x^2 - x$ ;  $y = -x^2 - x - 1$

Analiza la relación que existe entre cada grupo de funciones y describe tus conclusiones para cada uno de ellos.

- Los estudiantes proceden a avanzar a la sala de informática e ingresar al enlace proporcionado por el docente.
- Después de recibir las indicaciones del docente para el desarrollo del ejercicio, los estudiantes darán respuesta al interrogante planteado.

### 5.2.2 Segunda Sesión

Utilizar diferentes sistemas de representación de la función cuadrática para resolver problemas del contexto real mediados por situaciones de medición y cambio.

#### **Temporalidad y descripción general:**

**INICIO:** El docente presenta el objetivo de la sesión, y se pone en contexto al estudiante mediante la reproducción de un video que explica la evaluación de una función, posterior a esto, se plantea la tarea correspondiente a “relaciones cuadradas”, el docente atenderá las dudas que puedan surgir en torno a la comprensión y desarrollo de la actividad y por último se realiza una retroalimentación de las soluciones de las actividades **Tiempo: 30 minutos.**

**DESARROLLO:** El docente presenta la segunda situación sobre la caída de un balón, representa en el tablero la tabla de valores relacionados con el problema. Los estudiantes

resuelven la situación presentada y socializan los resultados con los compañeros. **Tiempo: 40 minutos.**

**CIERRE:** El docente conforma grupo de 2 estudiantes, expone el listado de materiales que los estudiantes deben tener en su poder para el desarrollo de la actividad, se verifica que todos los grupos cumplan con las condiciones y se expone el paso a paso para la construcción expuesta en la tarea, el docente realiza acompañamiento en cada uno de estos pasos hasta que los estudiantes logren los resultados esperados. Finalizando se realiza una socialización en el grupo de los resultados de las construcciones y se socializan las conclusiones por parte de los grupos, esto se refuerza con una retroalimentación hecha por el docente dejando en claridad en la forma construida y sus características. **Tiempo: 50 minutos.**

Tiempo total de la sesión: 2 Horas

## INICIO

- Partiendo de la explicación del objetivo de la sesión, el docente procede a exponer en sus medios audiovisuales el contenido del video correspondiente al siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=tvUoOZDRAks>

- El cual pertenece al canal Math2me y explica el proceso matemático de evaluar funciones. Posterior a esto se procede a exponer los ejercicios que componen la tarea.

**Situación de la tarea:**

## RELACIONES CUADRADAS

Las siguientes expresiones algebraicas representan la forma en la que un grupo de criadores de conejos obtienen sus crías durante el verano, lastimosamente los resultados

(representados en tablas) se confundieron y no se sabe cuál tabla se relaciona con la expresión expuesta, ayuda al grupo de criadores mostrando cual es la tabla correcta y cómo se llegó a esta respuesta. Al encontrar la tabla adecuada representa su gráfica en un plano cartesiano. Nota: Los criadores mencionan que  $x$  es la temporada a averiguar y  $f(x)$  es el resultado esperado.

a)  $f(x) = 2x^2 + 1$

Ilustración 54: Representación tabular de la función a

x	1	2	3	4
F(x)	3	5	7	9

x	1	2	3	4
F(x)	3	9	19	33

x	1	2	3	4
F(x)	3	9	12	18

Fuente: Huapaya (2012)

b)  $f(x) = 9 - x^2$

Ilustración 55: Representación tabular de la función b

x	1	2	3	4
F(x)	8	7	6	5

x	1	2	3	4
F(x)	8	5	-1	-10

x	1	2	3	4
F(x)	8	5	0	-7

Fuente: Huapaya (2012)

- El docente debe tratar de encaminar a los estudiantes a utilizar el método observado para realizar los desarrollos, sin llegar a declararlo de manera directa.
- Posterior a esto los estudiantes deben representar la tabla considerada correcta en un plano cartesiano.
- Con la situación anterior, el docente debe realizar la retroalimentación, explicando a los estudiantes cómo se traducen los registros de representación de una función cuadrática, y mostrando las correctas formas de representación.

## DESARROLLO

- Se da una breve descripción del objetivo de la tarea y se describe la siguiente situación:

**Situación de la tarea:**

**MIRA COMO BAJA**

Un balón se deja caer desde la parte más alta de un edificio. La siguiente tabla muestra la distancia recorrida en metros en un tiempo en segundos.

Tabla 18: Datos de tarea "Mira como baja"

TIEMPO (t)	0	1	2	3	4	5
DISTANCIA (d)	2	3	6	11	18	27

Fuente: Elaboración propia.

1. ¿Cuántos metros habrá caído después de 6 segundos?
  2. ¿Cuántos metros habrá caído después de 13 segundos?
  3. Encuentra la expresión algebraica que generalice la relación del tiempo con la distancia
  4. A partir de la tabla de valores y la expresión algebraica realiza la gráfica en el plano cartesiano.
- El docente retroalimenta los resultados presentados y formaliza conceptos sobre las diferentes formas de representación de la función cuadrática.

**CIERRE**

- Inicialmente se explica el objetivo de la tarea y se indica a los estudiantes que formen grupos de 2 para el trabajo a realizar. Se describe la siguiente lista de materiales:

Hoja de papel milimétrico, un octavo de icopor, alfileres con cabeza grande, chinchas, lana, regla y lápiz. Al verificar que todos tienen el material procede a dar las indicaciones y el paso a paso de la tarea

**Situación de la tarea:**

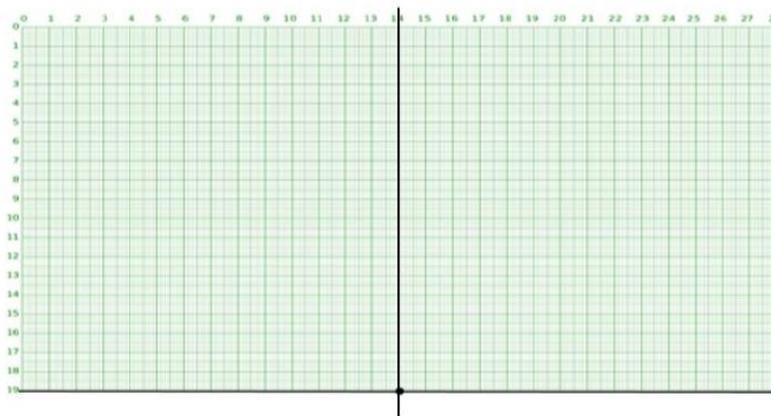
**CONSTRUYAMOS LA FORMA**

- Los estudiantes deben seguir las indicaciones del docente, al mismo tiempo que este realiza la actividad frente a todos.
- El docente debe verificar que, al terminar cada paso todos los grupos deben estar a la par con su construcción.

**Procedimiento:**

Paso 1. Tome una hoja de papel milimétrico en forma horizontal, traza un segmento vertical por la mitad de la hoja y un segmento por el borde inferior de la hoja, ubique el punto de intersección de los dos segmentos; como se representa en la siguiente imagen.

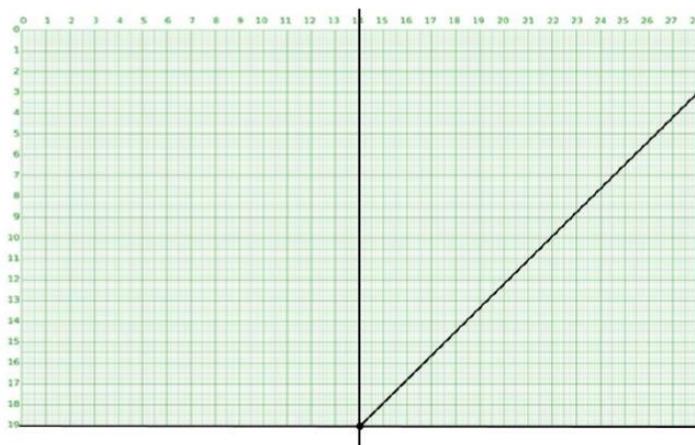
Ilustración 56: Paso 1 de la construcción



Fuente: Elaboración propia.

Paso 2. Tome como origen el punto de intersección obtenido en el paso 1, a partir de este mida un ángulo de 45 grados a los dos lados del segmento vertical ver la siguiente imagen, (tome como centro el segmento vertical y como eje el segmento del borde de la hoja y mide el ángulo hacia el segmento vertical).

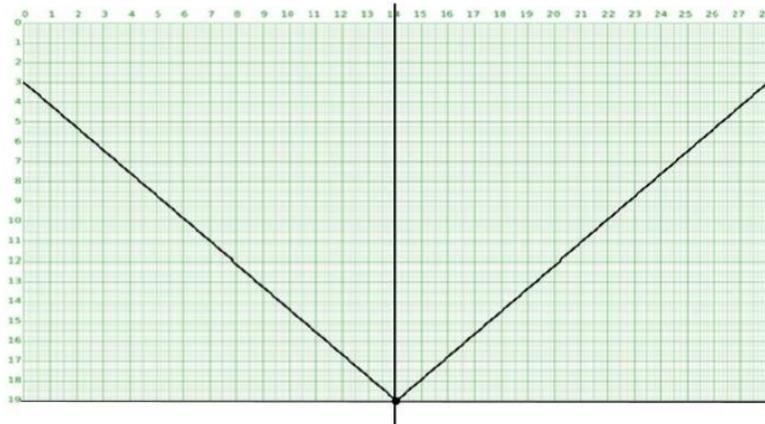
Ilustración 57: Paso 2 para la construcción



Fuente: Elaboración propia.

Paso 3. Trace con la regla un segmento desde el punto de intersección hasta el borde lateral derecho de la hoja que pase por el ángulo medido en el paso 2, realice esto mismo al otro lado del segmento vertical, como se visualiza a continuación.

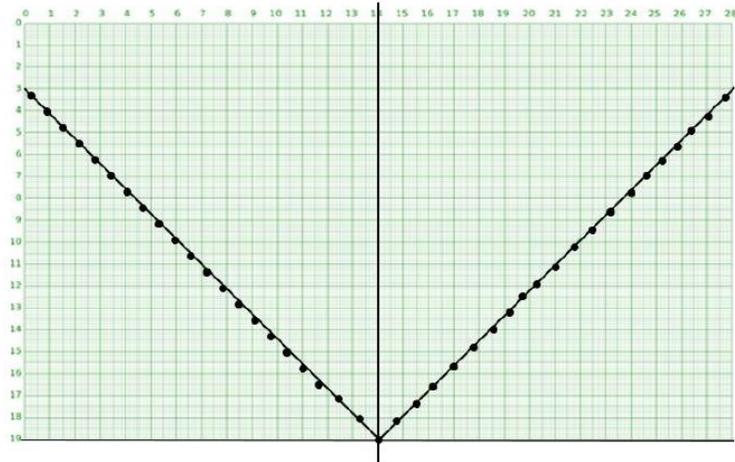
Ilustración 58: Paso 3 para la construcción



Fuente: Elaboración propia.

Paso 4. En cada segmento trazado en el paso 3, marca puntos con un centímetro de separación sobre el segmento a partir del punto de intersección, ver siguiente imagen.

Ilustración 59: Paso 4 para la construcción

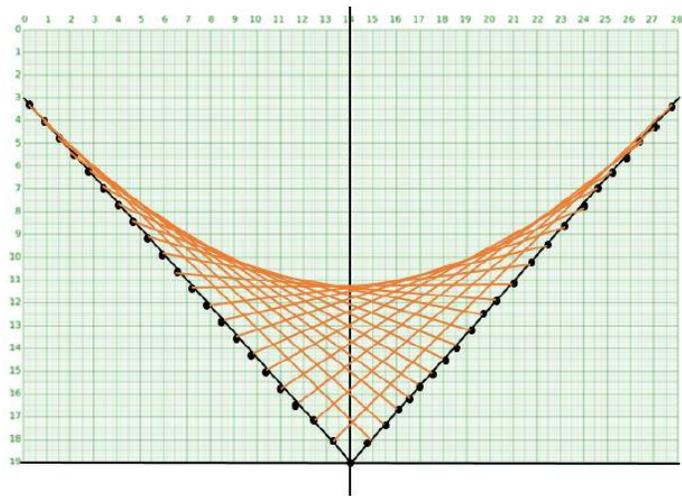


Fuente: Elaboración propia.

Paso 5. Con los chinchas pegue la hoja milimetrada al octavo de cartón paja y luego al icopor. Inserte los alfileres en cada uno de los puntos marcados en el paso 4.

Paso 6. Ate un hilo al último alfiler de uno de los segmentos y páselo por el primer alfiler del segmento contrario, luego páselo por el penúltimo alfiler del segmento inicial y posteriormente por el segundo alfiler del segmento contrario y así sucesivamente hasta completar todos los alfileres atando el hilo al último alfiler, ver la siguiente ilustración.

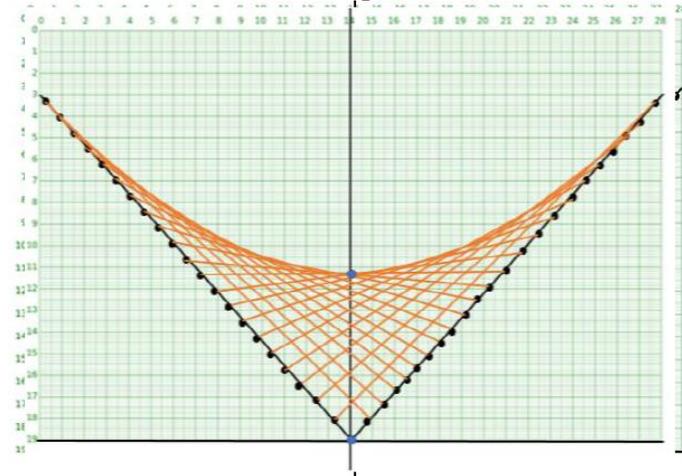
Ilustración 60: Paso 6 para la construcción



Fuente: Elaboración propia

Paso 7. Ubique un punto en la intersección entre la gráfica obtenida y el segmento vertical.

Ilustración 61: Paso 7 para la construcción



Fuente: Elaboración propia

Con base a la construcción realizada responde:

- a) Describa la gráfica que se obtiene y a que función se asemeja

- b) Si plasmamos el dibujo final sobre un plano cartesiano, que parejas ordenadas (puntos del plano) forman la curva representada en la construcción.
- c) Qué sucede si se usan rectas (donde van los alfileres) con ángulos menores de  $45^\circ$
- Al terminar de socializar las construcciones y las conclusiones entre los grupos, el docente formaliza el concepto de la parábola y su forma representativa en el plano cartesiano a partir de la forma construida.

### 5.2.3 Tercera Sesión

Formular y desarrollar modelos que describan los cambios reales entre cantidades físicas y utilizar funciones cuadráticas para resolver problemas.

#### **Temporalidad y descripción general:**

**INICIO:** Se presenta el objetivo de la sesión, y se pone en contexto al estudiante mediante una situación de la vida cotidiana, los estudiantes resuelven la situación presentada, continuo a esto, el docente realiza una retroalimentación de la situación aclarando las conclusiones a las que se pretende llegar con la tarea **Tiempo: 40 minutos.**

**DESARROLLO:** Se realiza una corta reflexión acerca de la utilidad de la función cuadrática en la vida cotidiana por parte del docente, posterior a esto se expone la situación problema y se dan los pasos a realizar por parte de los estudiantes, finalizando la actividad el docente realiza una retroalimentación de la actividad, socializando las respuestas de los estudiantes y formalizando el uso de la función cuadrática en la situación planteada **Tiempo: 40 minutos.**

**CIERRE:** Se explica a los estudiantes que la última tarea de la sesión está diseñada para despertar y resaltar los ámbitos propositivos y de creación de cada uno de ellos, para lo cual se ha diseñado y preparado el problema que, a abordar, siguiente a esto, el docente presenta

la actividad y lee junto a los estudiantes las pautas a seguir, al finalizar la actividad el docente socializa los resultados y realiza una retroalimentación tomando como base las propuestas de los estudiantes. **Tiempo: 40 minutos.**

Tiempo total de la sesión: 2 Horas.

### INICIO

- El docente expone el objetivo de la sesión y presenta la actividad a los estudiantes:

**Situación de la tarea:**

### LAS EDADES Y LOS NÚMEROS

Anastasia tiene 5 años más que Valeria. Si la suma de los cuadrados de sus edades es 53, ¿Cuáles son las edades de Anastasia y Valeria?

- Para aportar al proceso de comprensión y solución del problema se sugiere a los estudiantes seguir la siguiente tabla:

Tabla 19: Tabla de datos a identificar en el problema

Datos numéricos	Operaciones matemáticas Identificadas	Valores a encontrar	Posible proceso matemático para desarrollar el problema	Resultado en palabras (verbal)

Fuente: Elaboración propia.

- Terminada la tarea el docente realiza una retroalimentación de la solución de la situación presentada, describiendo los datos a tener en cuenta para llenar la respectiva tabla y dar solución al problema.

## **DESARROLLO**

- Partiendo de la explicación del objetivo de la actividad, el docente procede a exponer en sus medios audiovisuales el contenido del video correspondiente al siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=InAznYe2klo>

- El video perteneciente al enlace es propiedad del canal “Ariel Alvarado” de YouTube, el cual ejemplifica los usos de la función cuadrática en la vida cotidiana. Posterior a la observación del video, el docente procede a describir una situación problema y una serie de cuestiones que debe abordar el estudiante, expuestas de la siguiente forma:

### **Situación de la tarea**

#### **MIDIENDO Y SOLUCIONANDO**

Con una cuerda de 100 metros se debe encerrar una porción regular de un lote de terreno para cultivar, cuyo perímetro (suma de sus lados) debe mantenerse constante, de tal forma que en él se pueda cultivar la mayor cantidad de plantas.

#### **Procedimientos:**

- a) Dibuja un lote cuadrado con 100 metros (usar escalas) de perímetro
- b) Medir el largo y el ancho del lote iniciando con un metro de ancho

- c) Variar cada una de las dimensiones del lote, de tal forma que el ancho aumenta de metro en metro.
  - d) Construir una tabla teniendo en cuenta el ancho y el largo.
  - e) Hallar el área de cada una de las variaciones del lote (ancho x largo)
  - f) Construir una tabla teniendo en cuenta el área y el largo
  - g) Hacer una gráfica en el plano cartesiano con los datos anteriores
  - h) Identificar cual es la variable dependiente e independiente
  - i) ¿Qué dimensiones debe tener el lote para tener un área máxima?
- Al finalizar el desarrollo de la actividad, el docente realiza una retroalimentación de la situación y de las cuestiones que esta aborda, formalizando y resaltando el uso de la función cuadrática a través de una situación problema.

### **CIERRE**

- El docente expone el objetivo de la sesión y presenta la actividad a los estudiantes:

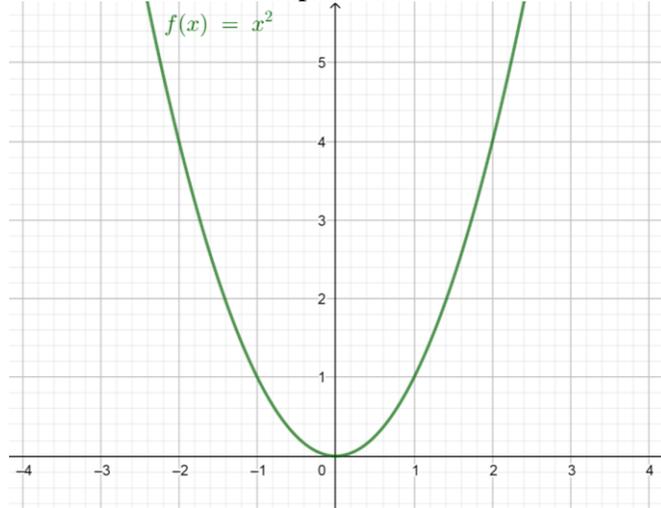
#### **Situación de la tarea:**

### **EL VALOR DE UN PROBLEMA**

- Se abre espacio de 5 minutos para recordar los usos de la función cuadrática en la vida cotidiana que se presentaron en el video previo a la actividad anterior, pidiendo al estudiante que recuerde mentalmente una de estas.
- Se pide a los estudiantes que observen las siguientes funciones cuadráticas con sus características y sus respectivas gráficas:

$$f(x) = x^2$$

Ilustración 62: parábola de función a

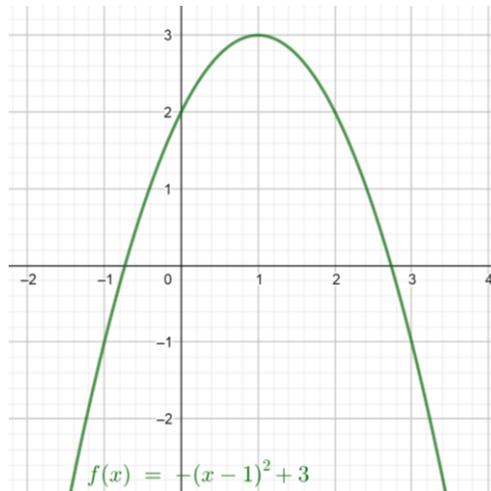


Fuente: Elaboración propia.

- Vértice: (0,0)
- Concavidad positiva (abre hacia arriba)
- Corte con el eje  $y = 0$
- Corte con el eje  $x = 0$

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 3$$

Ilustración 63: Parábola de función b



Fuente: Elaboración propia.

- Vértice: (1,3)

- Concavidad negativa (abre hacia abajo)
  - Corte con el eje  $y = 2$
  - Cortes con el eje  $x = (-0,73;0)$  y  $x = (2,73;0)$
- 
- A partir de la observación realizada, cada estudiante debe escoger una de las dos funciones cuadráticas y adaptar su representación gráfica a uno de los usos que pensó en el paso anterior.
  
  - Con la información de las características de la función y la utilidad escogida el estudiante debe proponer una situación básica en la que se relacionen las características de la función cuadrática y el correspondiente uso identificado por el estudiante.
  
  - El estudiante debe plantear al menos tres cuestiones referentes al problema, que su solución sea producto de la utilización y manejo de la función propuesta inicialmente.

Finalmente, el docente realiza una socialización de las propuestas planteadas por los estudiantes, se realiza una retroalimentación de los casos que están muy apartados del objetivo de la actividad y se resaltan los resultados que acierten para tenerlos como ejemplificación y guía.

## CAPITULO VI

### 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El problema de estudio se centra en determinar una estrategia que permita mejorar el aprendizaje del contenido matemático función cuadrática en los estudiantes de grado 9° de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”, esta iniciativa es generada a partir del bajo índice de comprensión del contenido matemático en el aula de clase y la falta de herramientas e instrumentos didácticos que aporten al aprendizaje y superación de dificultades denotadas en los sujetos de estudio.

En el presente capítulo se describen las conclusiones obtenidas producto de esta investigación, articuladas de acuerdo con los objetivos específicos planteados. Partiendo de los procesos y desarrollos necesarios para el establecimiento del instrumento diagnóstico que al ser gestionado permite identificar las dificultades presentes en los estudiantes en relación con el objeto de estudio. Posteriormente, pasamos a las conclusiones que se extraen de la caracterización de las dificultades identificadas por el instrumento diagnóstico. Por último, las conclusiones se centran en las actividades construidas que constituyen la secuencia didáctica que permite mejorar el aprendizaje de la función cuadrática:

#### **6.1 Objetivo Específico 1: Establecer instrumentos que permitan describir las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, en estudiantes de grado noveno.**

En la búsqueda de datos relevantes para la investigación en diversas fuentes de información, es posible evidenciar la existencia de una cantidad extensa de información dedicada al aprendizaje de la función cuadrática, con diferentes enfoques como el aprendizaje a través de herramientas tecnológicas, la exploración en contextos reales y muchos más, sin embargo, la identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática como objetivo principal no represento un enfoque común en las baterías e instrumentos que se investigaron, dando a entender que la educación matemática presenta menor inclinación por

la identificación de dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática en comparación a los procesos y desarrollos enfocados al aprendizaje de la misma. Al aplicar la rejilla de observación propuesta a partir de los elementos pertenecientes al análisis de contenido de Gómez (2002) se analizan las bases de datos e instrumentos que contienen actividades y tareas que permiten la identificación de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática.

Como resultado del análisis es posible declarar que las tareas relacionadas con la identificación de dificultades en torno al aprendizaje del concepto de función cuadrática se asocia con la estructura algebraica de la función cuadrática, en el apartado 2.1.1 es posible evidenciar que en los textos educativos, las investigaciones y descripciones se toma el concepto de función cuadrática como su representación algebraica, dejando de lado las características y elementos que dan significado a la función cuadrática. Por este motivo las tareas seleccionadas para la identificación de dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de la función cuadrática represento un reto, Van Lamoen (2011) menciona que “los conceptos no se obtienen por medio de asociaciones, sino a través de una operación intelectual, las funciones mentales elementales interactúan y son conducidas por la utilización de palabras para fijar la atención y abstraer ciertos rasgos, sintetizándolos y simbolizándolos” (p. 333).

Las actividades relacionadas con la identificación de dificultades en el aprendizaje de los sistemas de representación se presentaron en mayor cantidad en los instrumentos y baterías, procesos como la traducción de un registro de representación de la función cuadrática entre los diferentes sistemas y el graficar la parábola en el plano cartesiano representaron dificultades posibles de identificar a partir de las actividades seleccionadas, de cierta forma las actividades asociadas a los sistemas de representación presentaron una mayor facilidad al ser seleccionados para establecer el instrumento diagnóstico.

Al igual que los sistemas de representación, las actividades asociadas a la identificación de dificultades en el aprendizaje de los contextos de la función cuadrática

presentaron mayor cantidad, esto debido a que los autores consideran que el reconocimiento de los elementos de la función cuadrática que permiten la solución de una situación problema y asociar la función cuadrática como objeto matemático que permite la solución de un problema son algunas de las dificultades que predominan en los estudiantes, algunos enfoques relacionados con otras ciencias como la física y campos contextuales pertenecientes a la realidad como la construcción y la ingeniería.

Al establecer el instrumento diagnóstico, se procede a ejecutar la gestión de este, para lo cual se sigue el cronograma planteado y las pautas programadas. La sensibilización del instrumento en el aula de la clase y la exposición de los objetivos de la investigación permitió que los estudiantes trabajaran en un ambiente de confianza, demostrando su conocimiento en torno al objeto de estudio. De igual forma, se reconoce la colaboración por parte de los actores y los sujetos de investigación, ya que la disposición fue total desde la primera sesión hasta los agradecimientos finales. En la sesión correspondiente a la aplicación del instrumento fue posible observar que algunos estudiantes presentan las actividades de forma rápida, sin presentar cuestionamientos y entregando el instrumento desarrollado en un tiempo corto, por otro lado, algunos estudiantes se tomaron todo el tiempo de la sesión para el desarrollo. Al terminar el trabajo de gestión del instrumento se sistematizan los desarrollos para facilitar su observación y posteriores análisis.

En consecuencia, la revisión documental realizada a diferentes bases de datos permitió seleccionar actividades relacionadas con la identificación de dificultades, al articularlas en un instrumento diagnóstico se realiza la respectiva gestión siguiendo unas sesiones y parámetros.

## **6.2 Objetivo Específico 2: Caracterización de las dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno.**

Al iniciar con la digitalización de los instrumentos desarrollados por los estudiantes es posible contemplar en un primer momento los postulados y construcciones realizados por

los estudiantes, al analizar estos resultados y caracterizar las dificultades encontradas, es posible observar la postura de los estudiantes ante los conceptos, representaciones y desarrollos que estructuran la función cuadrática, en una descripción general los estudiantes hacen referencia a lo que representan los textos como concepto de la función cuadrática asociando su significado con la representación algebraica y en algún momento con su representación gráfica, por otro lado, las operaciones aritméticas como la suma entre números enteros y la potenciación representaron errores marcados en los desarrollos de los sujetos de estudio.

Los problemas y situaciones relacionadas con la función cuadrática representaron elementos difíciles de extraer, los estudiantes presentan una baja comprensión de lectura, en algunos casos se inventaron datos para tratar de dar una respuesta coherente. las consideraciones finales de los análisis y caracterizaciones correspondientes, se concluye que los estudiantes:

- Presenta conflicto en torno al manejo del significado de la función cuadrática, desconoce la incidencia de los elementos y las características que estructuran la función cuadrática, no interpreta la relación existente entre los parámetros de la función cuadrática y la familia de funciones que genera.
- Se le dificulta traducir un registro de representación de la función cuadrática entre los diferentes sistemas, presentando errores al realizar cálculos algebraicos, identificar las variables dependiente e independiente y representar finalmente la parábola en el plano cartesiano, de igual forma, desconoce la incidencia de los elementos que componen los sistemas de representación de la función cuadrática.
- El estudiante no comprende los problemas ni los asocia con la función cuadrática como elemento de solución, no extrae información ni identifica datos característicos para la solución del problema y que se relacionan con la función cuadrática, no concreta una respuesta adecuada en torno a las cuestiones que presenta el problema.

Las dificultades mencionadas anteriormente fueron organizadas en la Tabla 16, la cual presenta la caracterización de las dificultades y errores producto de la comparación y categorización tomando como fuentes los planteamientos de los autores y la información producto del instrumento diagnóstico.

### **6.3 Objetivo Específico 3: Estructurar las estrategias que contendrá la secuencia didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática.**

Para el cumplimiento de este objetivo específico se utilizó como base el análisis de contenido, el análisis cognitivo y de instrucción de la función cuadrática, además de los planteamientos teóricos y metodológicos establecidos por Tobón et al., (2010) asociados a las características y elementos que estructuran las tareas que componen una secuencia didáctica.

El análisis de contenido de la función cuadrática se adopta como base para la selección de las tareas que permiten el mejoramiento de las dificultades identificadas, partiendo de una revisión crítica con criterios correspondientes al análisis de contenido de la función cuadrática, ya que en este se establecen los elementos considerados en la estructura de una actividad. El análisis cognitivo y de instrucción permitieron configurar y organizar de forma justificada que favorecen el desarrollo de las capacidades y atienden al mejoramiento de las dificultades presentes en los sujetos de estudio. En consecuencia, se realiza un análisis a los elementos que estructuran las tareas, tales como: objetivos de aprendizaje, estándar curricular con el que se relaciona, capacidades que proporciona, competencias, dificultades y errores en los que puede incurrir el estudiante al desarrollar la tarea. teniendo esta información se da una descripción de la secuencialidad y la organización de las tareas por las sesiones de clase.

Ahora bien, para estructurar las tareas se realizó una adaptación de las actividades y tareas pertenecientes a las investigaciones, baterías, publicaciones y textos educativos alineadas con los objetivos de aprendizaje y que abordaron la mayor cantidad de elementos

detectados en el análisis de contenido. Como producto de estos procesos, se establecen 9 tareas que aportan que abordan las características y concuerdan con el objetivo de la investigación, estructuradas bajo el campo conceptual, los sistemas de representación y los contextos de la función cuadrática, es posible observar lo anterior mencionado en el apartado 5.3 donde se da análisis a cada una de estas tareas teniendo en cuenta las categorías de análisis constituidas para el tercer objetivo específico (ver apartado 3.4.3).

Al tener los elementos necesarios (tareas) para la construcción de la secuencia didáctica que permita el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática, se abordan la estructura propuesta por Tobón et al., (2010), la cual permite la construcción de dos documentos que constituyen la secuencia didáctica, el primero denominado Documento Técnico (ver apartado 4.1) compuesto por la descripción general de las actividades, con sus respectivos componentes, la secuencialidad de las tareas descritas en el orden de aplicación, temporalidad, las acciones del docente y el estudiante. El segundo documento se denomina Documento Guía (ver apartado 4.2), el cual expone de forma detallada el paso a paso de las sesiones, la descripción de las tareas con las situaciones, pautas, recomendaciones, preguntas, de cierta manera en este es posible encontrar la información específica que se llevara al aula de clases.

#### **6.4 Objetivo General: Contribuir al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado noveno de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”.**

El cumplimiento de los objetivos específicos permitió dar respuesta a la pregunta de investigación, la cual establecía ¿Cómo una secuencia didáctica contribuye al aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes de noveno grado de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”?, la secuencia didáctica producto de la investigación ha sido construida bajo el modelo de Tobón et al., (2010) articulada con los planteamientos de análisis didáctico de Gómez (2002), partiendo de esto, es posible afirmar que la secuencia

realizada presenta bases teóricas de las cuales es posible observar que al ser aplicadas aportan al mejoramiento del objeto matemático a abordar.

Es posible encontrar una descripción positiva por parte de los autores que manejan el respectivo modelo, con base en estas consideraciones es posible establecer que la secuencia didáctica producto de la investigación es una estrategia que aporta al mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática y que es proyectada para ser aplicada y acogida por profesores en ejercicio de la academia militar “General José Antonio Anzoátegui”.

Complementando las descripciones anteriores, en el análisis correspondiente a las 9 tareas que componen la secuencia didáctica, se observa que cada una de estas tiene la finalidad de ayudar a superar las dificultades presentes en los estudiantes de igual modo proyectan el alcance de diferentes capacidades de aprendizaje relacionadas con la función cuadrática (ver apartado 5.3).

Finalmente, se puede destacar que la secuencia didáctica podría constituir un documento de consulta valioso, para estudiantes los estudiantes de licenciatura en matemáticas, y otros docentes que orienten el contenido matemático en grados superiores como 10° y 11° teniendo en cuenta los insumos conceptuales, procedimentales y estrategias metodológicas que incluye.

## CAPITULO VII

### 7. PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

A partir de los desarrollos, los productos y las conclusiones presentados a lo largo de la investigación, surgen algunas prospectivas que pueden ser abordadas en futuras investigaciones.

- Validar la secuencia didáctica diseñada para el mejoramiento del aprendizaje de la función cuadrática, teniendo en cuenta que en la investigación no se realiza una validación a dicha construcción, este proceso puede ser realizado a partir de juicio de expertos o algún método de validación que se relacione con la secuencia didáctica y sus objetivos de aprendizaje.
- La secuencia didáctica producto de la presente investigación no es aplicada, por tal motivo, podría considerarse la aplicación de esta en los sujetos de estudio pertenecientes a la Institución, esto con el fin de aportar al mejoramiento en el aprendizaje del objeto de estudio.
- La validación de las actividades modificadas y estructuradas para la secuencia didáctica, esto debido a los cambios realizados en los cuestionamientos, datos y estructura de algunas de las tareas, por otro lado, a la pertinencia de dichas actividades con los objetivos de la investigación.
- Crear herramientas didácticas en torno al modelo presentado en la investigación, articulándola o tomándola como guía para próximas construcciones o investigaciones relacionadas con el objeto de estudio.

#### **Recomendaciones:**

Dentro de las consideraciones a tener en cuenta, surgen algunas recomendaciones que podrían tener un impacto positivo si se tienen en cuenta:

- Utilizar material didáctico diferente a los textos escolares en la enseñanza del contenido a abordar.
- Motivar a los estudiantes a proponer y diseñar situaciones en las que apliquen el conocimiento que adquieren.
- Que los docentes consideren dentro de su construcción de tareas matemáticas situaciones contextuales relacionadas con el diario vivir de los estudiantes.

## REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

- Acevedo, G. (2017). *La resolución de problemas para el aprendizaje de funciones*. (Tesis de pregrado), Universidad de Antioquia, Antioquia.
- Aignerren, M. (1999). Análisis de Contenido: Una Introducción. *La sociología en sus escenarios*, (3). Recuperado a partir de <https://revistas.udea.edu.co/index.php/ceo/article/view/1550>.
- Álvarez, R. (2012). *Incidencia de las mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática*. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.
- Alvis, J. (2019). *Desarrollo de la competencia matemática formular y resolver problemas, mediante un modelo de competencias centrado en una visión sociocultural del aprendizaje*. (Tesis de Doctorado), Universidad del Quindío, Armenia - Quindío.
- Aranzazu, C. (2013). *Secuencia Didáctica para la enseñanza de la función cuadrática*. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional de Colombia- Antioquia.
- Arbones, B. (2005). *Detección, prevención y tratamiento de dificultades del aprendizaje* (Vol. 1): Editorial Ideas propias.
- Astorga, A., & Rodríguez, J. (1984). Funciones Reales de Variable Real. *Revista Digital de Matemática*, (6).
- Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*, 7(1), 5-23.
- Barrera, J. (2000). *Metodología de la Investigación*. (Vol. 3): Editorial Sygal.
- Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. (Vol. 1): Editorial CCS.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. (Vol. 2): Editorial La Muralla.
- Briceno, O., & Buendía, G. (2016). *Una secuencia para la introducción de la función cuadrática a través de la resignificación de aspectos variacionales*. (Tesis de Maestría), Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México - México.
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato. *Revista EIME*, 5(16), 274-281.

- Caicedo, S. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática*. (Tesis de Doctorado), Universidad del Tolima, Ibagué - Tolima.
- Cañadas, M., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). *Análisis de Contenido*. Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares. Capítulo 3. Universidad de los Andes, Bogotá D. C.
- Carrillo, B. (2009). Dificultades de aprendizaje matemático. *Revista Innovación y experiencias educativas*, 45(6).
- Castillo, M., Correa, M., & González, K. (2016). *Funciones de una Variable Real: Funciones Polinomiales*. Recuperado de: <https://funciondeunvariablereal.wordpress.com/2016/08/13/funciones-polinomiales/>
- Cornejo, J. (1996). *Técnica de rejilla*. (Vol. 2): Editorial Paidós.
- Covacevich, C. (2014). *Como seleccionar un instrumento para evaluar aprendizajes estudiantiles*. Banco Iberoamericano de desarrollo.
- Dalen, V., & Meyer, W. (2006). La investigación descriptiva. *Manual de técnica de la investigación educacional*. (2).
- Duval, R. (2004). Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales. *Semiosis y Pensamiento Humano*, 25-79.
- Esquer, P. (2014). Propuesta didáctica con funciones cuadráticas de problemas en contexto a Nivel Superior. Reporte de Investigación (Documentación). Instituto Tecnológico de sonora.
- Fernández, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria*. (Tesis de Pregrado), Universidad Internacional de la Rioja.
- Fernández, H., Morales, J., & Quesada, S. (2018). *Análisis didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de materiales didácticos coherentes con el Programa de Estudios de Matemáticas de Costa Rica: el caso de la Función Lineal y la Función Cuadrática*. (Tesis de Pregrado), Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia - Costa Rica.
- Flores, P., Gómez, P., & Marín, A. (2012). *Apuntes sobre análisis de instrucción*. Módulo 4 de MAD. Documento no publicado (Documentación). Universidad de los Andes, Bogotá D.C.

- Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Departamento de matemática educativa.
- Gaitán, J., & Piñuel, J. (1998). *Técnicas de investigación en Comunicación Social*. (Vol. 1): Editorial Síntesis.
- Garay, P. (2019). *Comprensión de función cuadrática y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de primer ciclo de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas*. (Tesis de pregrado), Universidad de San Martín de Porres.
- García Quiroga, B. (2013). Componente de un modelo teórico para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. *Revista Amazonia investiga*, 2(2), 181-194.
- García, B., Coronado, A., Montealegre, Q., Tovar, B., Giraldo, A., Morales, S., & Cortés, D. (2012). *Competencias Matemáticas: Un estudio exploratorio en la educación básica y media*. Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.
- Genicio, M., Lazarte, G., Fortinico, S., & Hernández, C. (2004). Estrategias de enseñanza para la función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(1) Universidad Nacional de Jujuy, Argentina.
- Godino, J. (2007). Un enfoque onto semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *The International Journal on Mathematics Education*, (1-2), 127 - 135.
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1).
- Gómez. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 251-292.
- Gómez, P., Castro, P., Mora, M., Pinzón, A., Torres, F., & Villegas, P. (2014). *Estándares básicos de competencias. Comparación con el estudio PISA y cuestiones para su ajuste*. Documento no publicado (Informe), Universidad de los Andes, Bogotá D.C.
- González, & Gómez. (2014). *Apuntes de Análisis Cognitivo*. Modulo 3 de MAD. Universidad de los Andes.
- González, P. (2015). *Dificultades en el aprendizaje de las funciones matemáticas*. (Tesis de Maestría), Universidad de Cantabria.
- Hernández, W., Márquez, Z., & Quiñonez, G. (2008). *La función cuadrática como marco referencial para el desarrollo del pensamiento variacional, una experiencia con estudiantes de grado 9° de la institución educativa indígena técnica agropecuaria de escobar arriba*. (Tesis de pregrado), Universidad de Sucre.

- Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo. *Revista TICE AMIUTEM*, 2(2), 1-19.
- Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5° de secundaria*. (Tesis de Maestría), Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Hulley, Cummings, Browner, Glady, & Newman. (2007). *Designing clinical research*. (Vol. 3): Editorial Philadelphia.
- Hurtado, J. (2008). *Metodología de la investigación*. (Vol. 4): Editorial Quirón.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2021). *Pruebas Saber*. Recuperado de <https://www.icfes.gov.co/resultados-saber-11>
- Irigoyen, E. (2012). *Resolución de problemas de funciones y gráficas por estudiantes de 3° de E.S.O.* (Tesis de Maestría), Universidad Pública de Navarra.
- Kaput. (1992). Technology and mathematics education. *Revista Journal For Research in Mathematics Education*, 25(6), 1-29.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. (Vol. 1): Editorial Alianza.
- Krause, M. (1995). La Investigación Cualitativa: Un Campo de Posibilidades y Desafíos. *Revista: Temas de Educación*, (7), 19 - 39.
- Lamoén, V. (2011). Construcción del concepto de función cuadrática en estudiantes sordos. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, (2). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. (Vol. 1): Editorial ItMUSA S.A.
- Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 15(3), 377-391.
- Lupiañez, & Rico. (2011). *Análisis Cognitivo en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Universidad de Granada, España.
- Lupiañez, L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas*. (Tesis de Doctorado), Universidad de Granada, España.
- Lupiañez, Rico, Gómez, & Marín. (2002). *Análisis Cognitivo en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Universidad de Granada, España.

- Marín, A. (2013). *El análisis de instrucción: Instrumento para la Formación Inicial de Profesores de Secundaria*. (Vol. 1): Editorial Comares.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas. Recuperado de [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). Educación Virtual o Educación en Línea. Recuperado de <https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-printer-196492.html>.
- Mesa, Y., & Villa, J. (2008). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Universidad de Antioquia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático. Recuperado de [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-67733\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-67733_archivo.pdf)
- Ministerio de Educación, C. y. (2013). Marcos y pruebas de evaluación PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias. Recuperado de <https://goo.gl/IaJzV9>
- Morales, J., Alpízar, M., & Fernández, H. (2019). Limitaciones de aprendizaje que evidencian estudiantes de educación secundaria en el estudio de la función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1).
- Mosquera, M. (2015). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito*. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional de Colombia, Antioquia.
- Norma. (2005). *Matemáticas: Espiral 9*. (Vol. 7): Editorial Norma.
- Norma. (2009). *Matemáticas: Delta 9*. (Vol. 6): Editorial Norma.
- Oaxaca, Carmen, & Bravo. (2015). *Enseñanza de la función cuadrática interpretando su comportamiento al variar sus parámetros*.
- Opazo, C., Grajeda, J., & Farfán, R. (2014). Visualización de la función cuadrática. *Acta Latino Americana de Matemática Educativa*.
- Patton, M. (1987). How to use qualitative methods in evaluation. Newbury Park. Editorial Sage.
- Pecharroman, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos. *Revista de Educación Matemática*, 26(2), 116-117.

- Posada, F., & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. (Tesis de Maestría), Universidad de Antioquia, Medellín.
- Reséndiz, E., & Cantoral, R. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 133-154.
- Reyes, J., & Huerta, J. (2020). El algebra en la vida cotidiana. Recuperado de <https://sites.google.com/site/lasticsenusodelalgebra/>
- Reyes, T. (1999). Métodos cualitativos de investigación: Los grupos focales y el estudio de caso. *Revista Forum empresarial* 4(2), pp. 75-87.
- Rico, L., & Lupiáñez, L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. (Vol. 1): Editorial Alianza.
- Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (Vol. 1): Editorial Horsori.
- Rico, L. (2007). La Competencia Matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L., Lupiáñez, J., Marín, A., & Gómez, P. (2008). *Matemáticas Escolares y Análisis de Contenido con Profesores de Secundaria en Formación*. (Comunicación). Universidad de Granada.
- Rivera. (2009). *Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal*. (Tesis de Doctorado), Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán".
- Roa, N. (2018). *La función cuadrática desde los sistemas de representación simbólico y gráfico*. (Tesis de Maestría) Universidad Externado de Colombia.
- Rodríguez Alveal, F., & Sandoval Rubilar, P. R. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Revista da Avaliação da Educação*. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=219122238011>, 207-235.
- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la Investigación cualitativa*. Editorial Aljibe. Granada, España.

- Rodríguez, L., Aguilar, J., & Anaya, J. (2015). *Visualización de la información. Representación tabular. Administración y organización de datos*, Instituto Tecnológico de Tuxtepec.
- Rodríguez, V. (2014). La formación situada y los principios pedagógicos de la planificación: la secuencia didáctica. *Revista Ra Ximhai*, 10(5), 445-456.
- Ruiz, N. (2009). Medios y recursos para la enseñanza de la geometría en la educación obligatoria. *Revista Electrónica de Didácticas Específicas*, (3), 13-27.
- Sánchez, L. (2019). *La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas*. (Tesis de Maestría), Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Sandín, M. (2003). La enseñanza de la investigación cualitativa. *Revista de Enseñanza Universitaria* (26), 258.
- Santillana. (2016). *Nuevas Matemáticas: Álgebra, geometría y estadística*. (Vol. 3): Editorial Santillana.
- Santillana. (2017). *Hipertexto: Matemática 9*. (Vol.4): Editorial Santillana.
- Sepúlveda, A., Medina, C., & Itzel, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación Matemática* 21(2).
- Socas. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. (Tesis de Doctorado), Universidad de la laguna.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. (Vol. 1): Editorial Cengage.
- Stewart, Rediln, & Watson. (2012). *Pre-Cálculo: Matemáticas para el cálculo*. (Vol. 1): Editorial Cengage Learning Editores S.A.
- Tobón, M. (2017). *Diseño de un proyecto de aula para el aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática bajo el enfoque de resolución de problemas*. (Tesis de Maestría) Universidad Nacional de Colombia.
- Tobón, S., Pimienta, J., & García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. (Vol. 1): Editorial Pearson Hall.
- Yin, R. (2009). *Case Study Research*. (Vol. 1): Editorial Sage.

## ANEXOS

### ANEXO 1: Rejilla de observación para instrumentos de detección de dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática.

CATEGORIA	DESCRIPCIÓN
FUENTE	
ACTIVIDAD	
ESTRUCTURA CONCEPTUAL	<ul style="list-style-type: none"><li>- CAMPO CONCEPTUAL</li><li>- CAMPO PROCEDIMENTAL</li></ul>
SISTEMAS DE REPRESENTACION	<ul style="list-style-type: none"><li>- TIPOS DE REPRESENTACIONES:</li><li>- TRANSFORMACIÓN DE REPRESENTACIONES</li></ul>
CONTEXTOS	<ul style="list-style-type: none"><li>- CONTEXTO MATEMATICO</li><li>- CONTEXTO EXTRAMATEMATICO</li></ul>



ACREDITADA DE  
**ALTA CALIDAD**  
Resolución 11233 / 2018 - MEN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
MAESTRIA EN EDUCACIÓN  
REJILLA DE OBSERVACIÓN  
RESPONSABLE: WILLIAM ANDRES AVILA LEYVA



En la siguiente rejilla de observación se caracterizará la documentación correspondiente a baterías e instrumentos donde se han construido procesos para detectar dificultades asociadas a la función cuadrática según las categorías establecidas.

## **ANEXO 2: Solicitud de permiso a la institución.**

Neiva, 13 de septiembre de 2021

OLGA PATRICIA LUCUARA ZAMBRANO

Rectora

Academia Militar “General José Antonio Anzoátegui”

Asunto: Participación en Proyecto de Investigación de Maestría.

Con la presente me permito hacerle extensivo el saludo y al mismo tiempo manifestarle que yo WILLIAM ANDRES AVILA LEYVA, estudiante de Maestría en Investigación y Educación de la Universidad Sur colombiana, vengo adelantando una investigación relacionada con una *Secuencia Didáctica Para El Aprendizaje Del Contenido Matemático Función Cuadrática En Estudiantes de Grado Noveno En la Academia Militar General José Antonio Anzoátegui*, en la cual nos interesamos en contribuir a una formación integral y comprometida con el mejoramiento continuo, esto a través de las matemáticas, como uno de los fines educativos actualmente. En este sentido, estoy interesado en que su Institución se haga participe de la investigación.

Puntualmente, deseo que se vinculen con la participación activa y constante de un (1) docente y estudiantes de grado noveno. Del mismo modo, tener su consentimiento para poder tener acceso en diferentes oportunidades a las clases de matemáticas del respectivo grado, pues metodológicamente es necesario y en ello se centra la investigación. De lo anterior, solicito cordialmente su colaboración con el fin de realizar el proyecto de Investigación y así poder establecer vínculos en materia académica que permitan cualificar los conocimientos de los estudiantes de grado noveno a fin de identificar las posibles dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática, como también aportar en el aprendizaje significativo de los estudiantes en el área de matemáticas.

Sin otra en particular,



WILLIAM ANDRES AVILA LEYVA

Estudiante de Maestría en Educación e Investigación

### **ANEXO 3: Solicitud de permiso a padres de familia**

#### **DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFIAS Y FIJACIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO PUBLICO**

Con la presente me permito hacerle extensivo un saludo y al mismo tiempo manifestarle que yo WILLIAM ANDRES AVILA LEYVA, estudiante de Maestría en Educación e Investigación de la Universidad Sur colombiana, con autorización formal de la Rectora, vengo adelantando una investigación relacionada con una *Secuencia Didáctica Para El Aprendizaje Del Contenido Matemático Función Cuadrática En Estudiantes de Grado Noveno En la Academia Militar General José Antonio Anzoátegui* en la cual nos interesamos en contribuir a una formación integral de los estudiantes a través de las matemáticas, como uno de los fines actualmente. En ese sentido, estoy interesado en que su hijo se haga participe de la investigación.

De esa manera, yo \_\_\_\_\_, identificado(a) con cedula de ciudadanía número \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ en mi calidad de padre/madre/acudiente \_\_\_\_\_ del (la) estudiante \_\_\_\_\_ identificado con tarjeta de identidad número \_\_\_\_\_, alumno de la Academia Militar “General José Antonio Anzoátegui”, autorizo para que aparezca en las grabaciones y fotografías con fines pedagógicos que se realizarán en los momentos de clase (Presencial o virtual).

Autorizo,

\_\_\_\_\_  
Nombre del padre/madre de familia /acudiente

Cedula de ciudadanía:

## ANEXO 4: Instrumento diagnóstico:



ACREDITADA DE  
**ALTA CALIDAD**  
Resolución 11287/2019 - MEN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
MAESTRIA EN EDUCACIÓN E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA  
PRUEBA DIAGNOSTICA

Objetivo: Identificar posibles dificultades asociadas al aprendizaje de la función cuadrática

Institución: Academia Militar "General José Antonio Anzoátegui"

Docente: Edgar Alfonso Baquero

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

### Defina en sus palabras:

Que es una función cuadrática:

\_\_\_\_\_

En la función cuadrática ¿Qué valor nos indica hacia donde abre la curva?

\_\_\_\_\_

¿Qué formas puede tomar la función cuadrática?

\_\_\_\_\_

Que nombre recibe la curva originada al graficar una función de la forma  $ax^2 + c$

\_\_\_\_\_

### Realice una lectura detallada, extraiga información y realice un buen análisis a la siguiente situación:

*"Una caja sin tapa se fabricará a partir de una hoja rectangular de hojalata cortando cuadrados de 4 centímetros de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si el ancho de la caja es 3 centímetros menos que el largo y la caja contiene 280 pulgadas cúbicas. Encuentre las dimensiones de la hojalata".*

Responder los siguientes interrogantes a partir de la situación planteada:

a) ¿Qué te está diciendo el problema?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué datos numéricos te están dando?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cómo crees que se puede resolver la situación?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cuáles son las medidas de largo y ancho de la caja?

\_\_\_\_\_

**Traza la gráfica de  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  en un mismo plano:**

$$f(x) = x^2$$

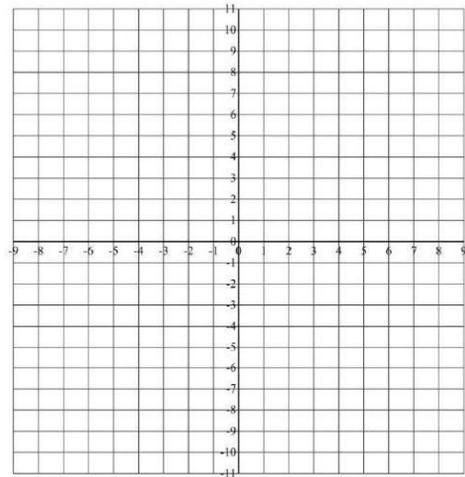
X	0	1	2	3	-1	-2	-3
Y							

$$g(x) = x^2 + 4$$

X	0	1	2	3	-1	-2	-3

$$h(x) = x^2 - 4$$

X	0	1	2	3	-1	-2	-3
Y							



Observa las gráficas y responde las siguientes preguntas:

¿Que le ocurre a la gráfica de  $f(x) = x^2$  cuando se le adiciona o resta cuatro?

¿Que le ocurre a la ordenada de  $g(x) = x^2 + 4$  y  $h(x) = x^2 - 4$  con respecto a la ordenada de  $f(x) = x^2$ ?

Escribe una función de tal manera que generalice lo que observas en su desplazamiento.

**Del grafico descrito en el anterior punto  $f(x) = x^2$  describir:**

que se observa en cuanto al eje de simetría, coordenadas del vértice, abertura de la curva:

Teniendo en cuenta la representación del plano anterior modificar la fórmula de la función  $f(x) = x^2$  para que la parábola:

- Quede abierta hacia abajo: \_\_\_\_\_
- Se desplace 3 unidades hacia abajo: \_\_\_\_\_
- La curva sea más cerrada: \_\_\_\_\_
- La curva sea más abierta: \_\_\_\_\_

**Realice una lectura detallada, extraiga información y realice un buen análisis a la siguiente situación:**

*Si un guepardo inicialmente detenido, comienza a perseguir un antilope que está a 80 metros, en ese mismo instante el antilope emprende su huida. Se cumple la siguiente ecuación  $d = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$  la aceleración del guepardo y el antilope son respectivamente de  $3,19\text{m/s}^2$  y  $2,69\text{m/s}^2$*

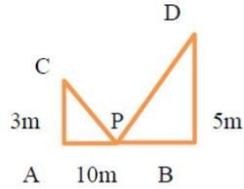
¿A que distancia se encuentran con respecto a su posición inicial los dos animales a los 5 segundos?

¿En qué momento (medido en segundos) los dos animales están separados 10 metros?

---

**Realice una lectura detallada, extraiga información y realice un buen análisis a la siguiente situación:**

*La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, la longitud de cada poste es de 3 y 5 metros respectivamente. A manera de soporte un cable que une la parte superior de los dos postes se sujetara a un punto de la tierra, localizado sobre la línea que une los dos postes.*



¿Dónde debe situarse el punto sobre la tierra de manera que la longitud del cable sea la menor?

---

¿Si cambio la posición de P cambia la longitud del cable?

---

¿Cómo podemos saber que la longitud del cable cambia cuando el punto P se mueve a lo largo del segmento entre los postes?

---

¿Cómo podemos determinar la distancia entre un poste y el punto P?

---

¿Qué datos tenemos?

---

¿Qué sabemos de los triángulos que se forman (ver figura)?

---

¿Qué relación existe entre la longitud del cable y la posición del punto P?

---