



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 3 de noviembre del 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad Neiva-Huila

El (Los) suscrito(s):

Miguel Ángel Pascuas Perdomo, con C.C. No. 1003814815,

Daniel José Berrio Soler, con C.C. No. 1018493314,

\_\_\_\_\_, con C.C. No. \_\_\_\_\_,

\_\_\_\_\_, con C.C. No. \_\_\_\_\_,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o \_\_\_\_\_ titulado La sobreexplotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo, una tragedia de los bienes comunes

presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de

Matemático \_\_\_\_\_;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



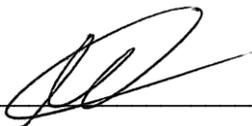
**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 2</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

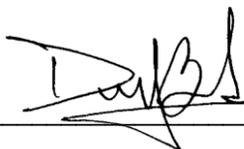
EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Miguel Ángel Pascuas Perdomo

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Daniel José Berrio Soler

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_



**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** *La sobreexplotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo, una tragedia de los bienes comunes.*

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Pascuas Perdomo	Miguel Ángel
Berrio Soler	Daniel José

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Matemático

**FACULTAD:** Ciencias Exactas

**PROGRAMA O POSGRADO:** Matemática Aplicada

**CIUDAD:** Neiva

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 46



**DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO**

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una X):

Diagramas X Fotografías X Grabaciones en discos \_\_\_ Ilustraciones en general \_\_\_ Grabados \_\_\_  
Láminas \_\_\_ Litografías \_\_\_ Mapas X Música impresa \_\_\_ Planos \_\_\_ Retratos \_\_\_ Sin ilustraciones \_\_\_  
Tablas o Cuadros X

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: Word o Lector PDF.

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. <u>Sobreexplotación</u>	<u>Overexploitation</u>	6. <u>Conservacion</u>	<u>Conservation</u>
2. <u>Bienes</u>	<u>Goods</u>	7. <u>Juegos</u>	<u>Games</u>
3. <u>Tragedia</u>	<u>Tragedy</u>	8. <u>Ecuaciones</u>	<u>Equations</u>
4. <u>Comunes</u>	<u>Common</u>	9. <u>Control</u>	<u>Control</u>
5. <u>Protección</u>	<u>Protection</u>	10. <u>Dinámica</u>	<u>Dynamic</u>

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar la problemática de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo desde un enfoque matemático. La Bocatoma El Guayabo se ubica vía San Antonio-Vegalarga a 35 minutos de recorrido aproximadamente desde la ciudad de Neiva-Huila. Se presenta un modelo replicador dinámico que utiliza la teoría de juegos y el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para caracterizar los parámetros que afectan el comportamiento y observar un mejor rendimiento del juego en relación beneficio/sostenibilidad.

Los resultados obtenidos a partir del análisis del modelo replicador dinámico indican que la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo puede tener consecuencias graves en el medio ambiente, como la erosión de terrenos y la desprotección ante inundaciones costeras.

Se presentan alternativas para prevenir la sobreutilización de la arena y proteger los recursos naturales, como la implementación de políticas públicas que promuevan el uso sostenible de los recursos naturales y la educación ambiental para concientizar a la población sobre la importancia de proteger el medio ambiente.



**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

This research paper aims to analyze the problem of overexploitation of sand in Bocatoma El Guayabo from a mathematical approach. This is located via San Antonio-Vegalarga 35 minutes' drive approximately from the city of Neiva-Huila. It presents a dynamic replicator model that uses game theory and qualitative analysis of ordinary nonlinear differential equations to characterize parameters that affect behavior and observe better performance of the game in relation to benefit/sustainability.

The results obtained from the analysis of the dynamic replicator model indicate that overexploitation of sand in Bocatoma El Guayabo can have serious consequences on the environment, such as soil erosion and lack of protection from coastal flooding.

Alternatives are presented to prevent overuse of sand and protect natural resources, such as the implementation of public policies that promote the sustainable use of natural resources and environmental education to raise awareness of the importance of protecting the environment.

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre presidente Jurado: Jasmidt Vera Cuenca

Firma: *Jasmidt Vera C*

Nombre Jurado: Jasmidt Vera Cuenca

Firma: *Jasmidt Vera C*

Nombre Jurado: Juan David Hernandez

Firma: *Juan David Hernandez*



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
MATEMÁTICA APLICADA  
NEIVA-HUILA

2023

**LA SOBREEXPLOTACIÓN DE LA ARENA  
EN LA BOCATOMA EL GUAYABO, UNA  
TRAGEDIA DE LOS BIENES COMUNES**

Autor:

Miguel Ángel Pascuas Perdomo (20171158147)

Daniel José Berrio Soler (20152140744)

Tutor:

Mauro Montealegre Cárdenas

## Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar la problemática de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo desde un enfoque matemático. La Bocatoma El Guayabo se ubica vía San Antonio-Vegalarga a 35 minutos de recorrido aproximadamente desde la ciudad de Neiva-Huila. Se presenta un modelo replicador dinámico que utiliza la teoría de juegos y el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para caracterizar los parámetros que afectan el comportamiento y observar un mejor rendimiento del juego en relación beneficio/sostenibilidad.

Los resultados obtenidos a partir del análisis del modelo replicador dinámico indican que la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo puede tener consecuencias graves en el medio ambiente, como la erosión de terrenos y la desprotección ante inundaciones costeras.

Se presentan alternativas para prevenir la sobreutilización de la arena y proteger los recursos naturales, como la implementación de políticas públicas que promuevan el uso sostenible de los recursos naturales y la educación ambiental para concientizar a la población sobre la importancia de proteger el medio ambiente.

## Abstract

This research paper aims to analyze the problem of overexploitation of sand in Bocatoma El Guayabo from a mathematical approach. This is located via San Antonio-Vegalarga 35 minutes drive approximately from the city of Neiva-Huila. It presents a dynamic replicator model that uses game theory and qualitative analysis of ordinary nonlinear differential equations to characterize parameters that affect behavior and observe better performance of the game in relation to benefit/sustainability.

The results obtained from the analysis of the dynamic replicator model indicate that overexploitation of sand in Bocatoma El Guayabo can have serious consequences on the environment, such as soil erosion and lack of protection from coastal flooding.

Alternatives are presented to prevent overuse of sand and protect natural resources, such as the implementation of public policies that promote the sustainable use of natural resources and environmental education to raise awareness of the importance of protecting the environment.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Ubicación geográfica de la tragedia de los comunes . . . . .	6
2.2. Teoría de Juegos . . . . .	8
2.3. Ecuaciones Diferenciales . . . . .	12
2.4. Dinámica del replicador . . . . .	18
2.5. Modelo de Dinámica de Replicador con Retroalimentación- Evolución de Juegos . . . . .	19
<b>3. Análisis Cualitativo</b>	<b>22</b>
<b>4. Sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo</b>	<b>34</b>
4.1. Solución Óptima . . . . .	37
<b>5. Implementación de código en Python y Pplane</b>	<b>39</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>42</b>

# 1. Introducción

El objetivo de este trabajo de investigación es analizar el problema de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma de El Guayabo desde un enfoque matemático. La extracción excesiva de arena en esta zona ha generado graves consecuencias ambientales, como la erosión de las riberas del río y la disminución de la calidad del agua. Para abordar esta problemática, se ha utilizado la teoría de juegos y el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en un modelo replicador dinámico.

A través de este modelo, se busca identificar las estrategias óptimas para la extracción de arena que permitan mantener un equilibrio sostenible en el uso de los recursos naturales. Además, se presentan alternativas para prevenir la sobreutilización de la arena y proteger los recursos naturales. Este trabajo es de gran importancia para la toma de decisiones en la gestión de los recursos naturales y la protección del medio ambiente.

La investigación se ha llevado a cabo mediante la recopilación de datos de diversas fuentes, como estudios previos, informes gubernamentales y entrevistas con expertos en el tema. Se han utilizado diversas metodologías, como el análisis de datos estadísticos y la simulación de modelos matemáticos, para obtener resultados precisos y confiables.

Los resultados obtenidos indican que la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo es un problema grave que requiere de medidas urgentes para su solución. El modelo replicador dinámico ha permitido identificar las estrategias óptimas para la extracción de arena y prevenir la sobreutilización de los recursos naturales. Además, se han propuesto alternativas para proteger el medio ambiente y garantizar un uso sostenible de los recursos naturales.

En conclusión, este trabajo de investigación aporta información valiosa sobre la problemática de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo y su impacto en el medio ambiente. Los resultados obtenidos pueden ser de gran utilidad para los responsables de políticas públicas y los expertos en la gestión de los recursos naturales.

## 2. Marco Teórico

Ante las preocupantes consecuencias que puede ocasionar el uso excesivo de la arena, el cual se ha triplicado a nivel global, la ONU hace un llamado para que este recurso sea declarado estratégico y regulado a nivel global para hacerlo más sostenible.

Diariamente se extraen 18 kilos de arena y grava por cada habitante del planeta para la fabricación de concreto, asfalto y vidrio. Los cambios en los patrones de consumo, el aumento de la población y el incremento de la urbanización han triplicado su demanda en los últimos 20 años, y actualmente se explota más de la que se produce naturalmente afectando negativamente nuestro planeta. [4]

En lugares como India y China, y otros países en Asia, África y América del Sur, muchas operaciones de extracción de arena no están en línea con las regulaciones de gestión ambiental y ya se han visto impactos sociales.[4]

Por ejemplo, Camboya, Vietnam e Indonesia son las fuentes, legales e ilegales, de materiales agregados para el desarrollo del corredor económico regional y los proyectos de recuperación de tierras en el sudeste asiático. Sierra Leona, Kenia, Tanzania en África y Colombia en América del Sur han sido identificados como lugares que presentan desafíos de sostenibilidad para el sector. [4]

Tras ser Colombia el único país latinoamericano que presenta desafíos ante la sostenibilidad del recurso natural, se identifican allí varios casos de explotación del bien común, que en su mayoría operan de manera ilegal, sin consentimiento alguno de los riesgos que puedan ocasionar. En tanto a producción y extracción del material, Antioquia y Atlántico son identificados como las zonas de mayor impacto social.

Así mismo en el Huila se ve este aprovechamiento desmedido debido a la alta demanda que generan sectores como la construcción, la cual muchas de estas empresas privadas trabajan de forma ilícita, ya que no cuenta con permiso alguno para dichas actividades, de esta manera el problema se sale de control, generando un agotamiento de este recurso ambiental y llevándose consigo un gran beneficio personal, ¿Pero a que costo?, al costo de un deterioro ambiental sin regular las implicaciones que causa este fenómeno. En el Huila los municipios con mayores casos de explotación de la arena son: Campoalegre, Aipe, Palermo y Neiva.

En Neiva hay cerca de 18 proyectos de minería con un subtotal de 1.167 hectáreas en el río Magdalena y el río Ceibas. [5]. El río Ceibas es muy importante para los Neivanos debido que de allí extraen el agua potable para toda su población, por eso es de suma importancia optar por medidas que regulen su contaminación y explotación para garantizar la sostenibilidad de este gran recurso ambiental.

En la Bocatoma El Guayabo yace un gran problema ambiental, una tragedia de los comunes, el cual es la sobreexplotación de la arena cerca al acueducto El Guayabo, el principal recurso afectado por estas actividades es el suelo ya que puede ocasionar erosiones, desprotección ante inundaciones que estas a su vez afectaría el bienestar y salud de todo los neivanos poniendo en peligro la única fuente hídrica potable de Neiva. Por lo tanto, es fundamental encontrar estrategias que ayuden a la sostenibilidad, manteniendo a salvo los recursos comunes.

La tragedia de los comunes, descubierta por Garrett Hardin en 1968, desarrolla la hipótesis del mal uso de los comunes. La propiedad se entiende como una mercancía que no pertenece a nadie, o más bien a todos, ya que no existe un precio que regule su uso. Su ejemplo de un pastor que usa la tierra abierta para alimentar a sus ovejas bien puede compararse con un caso de destrucción ambiental. Bienes comunes como el aire limpio, el uso del océano y sus recursos, las tierras públicas (como los parques y bosques nacionales), la vida silvestre y el espacio están sujetos a la lógica general de la abundancia y la existencia infinita. [1]

## 2.1. Ubicación geográfica de la tragedia de los comunes

La tragedia de los comunes apreciada en el presente proyecto surge a raíz del aprovechamiento de un bien común, en este caso se trata de la arena de río o arena fina, está hecha principalmente de minerales de silicato, esta se compone de rocas trituradas con partículas diminutas de  $2mm$  y  $0,05mm$  de diámetro, extraída sin consentimiento alguno de los riesgos que esto puede generar a raíz de una sobreexplotación de este bien común. Problemática que se vive en la Bocatoma El Guayabo ubicada al oriente de Neiva, aproximadamente a  $18km$  del centro de la ciudad opita, vía San Antonio-Vegalarga a eso de unos 35 minutos de recorrido. La **Figura 1** esboza la ruta geográficamente hacia la Bocatoma El Guayabo.

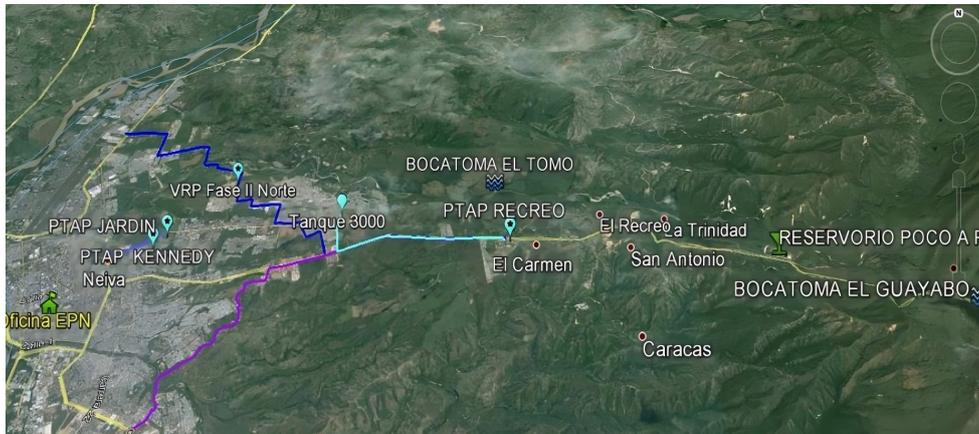


Figura 1: Mapa geográfico de la ruta a la Bocatoma El Guayabo.[3]

La Bocatoma el Guayabo es el primer acueducto encargado de la potabilidad de la fuente hídrica para la ciudad de Neiva, la cual proviene del río Las Ceibas. La cuenca principal del río Las Ceibas yace en el cerro Santa Rosalía, este lo conforman cuatro microcuencas las cuales son La Plata, Motilón, San Bartolo y El Mico. Que a su vez desembocan las quebradas La Plata, La Negra, Motilón, El Siervo, Yarumal, El Cedral, Santa Elena, Balsillitas, Mardroñal, El Guadual, San Bartolo, San Bartolito y El Mico.



Figura 2: Mapa geográfico de la tragedia de los comunes. (Realizado por Google Earth)

De la **Figura 2** observamos el punto en específico de extracción del bien común, ubicado al frente de las compuertas del acueducto de la Bocatoma

El Guayabo, a un costado del río las Ceibas.



Figura 3: Explotación de la arena en el punto de extracción.

Allí se vive el aprovechamiento del recurso natural, la arena, por parte de los explotadores y los dueños del terreno en este caso la CAM. Nótese en la **Figura 3**.

## 2.2. Teoría de Juegos

La teoría de juegos tiene aplicaciones en muchos entornos como es la economía, política, biología, inteligencia artificial. A diferencia de teoría de decisiones ahora estudiamos situaciones en las que hay que tomar decisiones en presencia de otros tomadores de decisiones, la teoría de juegos trata con problemas de optimización interactivos, esto ha disfrutado de una explosión de desarrollos, incluido el concepto de equilibrio de Nash (1950).

La teoría de juegos utiliza modelos y análisis matemático para explicar la lógica de la interacción y de las estrategias que utilizan los individuos al jugar, en otras palabras, estudia la forma en la que los jugadores responden a incentivos y su conducta a la hora de tomar decisiones, al elegir modos alternos para actuar, se debe tomar la consideración en cómo podrían responder otros

a las acciones que se emprendan. Dicha teoría describe la participación social, en donde suele proveernos de predicciones sobre resultados, para predecir un resultado es necesario conocer la estrategia dominante: es aquella estrategia que entrega la mayor utilidad o ganancia, dada la estrategia seleccionada por otra persona. El resultado de un juego en el que cada jugador juega su estrategia dominante es llamado equilibrio en estrategias dominantes.[6]

### **¿Qué es el equilibrio de Nash?**

Es un “concepto de solución” en que los agentes económicos, que interactúan unos con otros, seleccionan su mejor estrategia, dadas las estrategias que todos los demás agentes seleccionaron, y que maximiza sus ganancias en tanto que otros agentes carecen de incentivos para hacer un cambio individual de estrategia. El concepto de equilibrio de Nash (NE) es intuitivamente atractivo. De hecho, es una profecía autocumplida. Para explicar, supongamos que un jugador adivinara las estrategias de los otros jugadores. Una conjetura sería consistente con la maximización del pago y, por lo tanto, sería razonable solo si supone que las estrategias se eligen para maximizar el pago de cada jugador dadas las estrategias elegidas. En otras palabras, con cualquier conjunto de estrategias que no sea un NE, existe al menos un jugador que elige una estrategia que no maximiza los pagos. Además, el NE tiene una propiedad de auto ejecución: ningún jugador quiere desviarse unilateralmente de él, ya que tal comportamiento conduciría a pagos más bajos. Por lo tanto, El equilibrio de Nash parece ser la condición necesaria para la predicción de cualquier comportamiento racional por parte de los jugadores, Aunque atractivo, existen numerosas críticas al concepto NE. Dos problemas particularmente molestos son la inexistencia de equilibrio y la multiplicidad de equilibrios. Sin la existencia de un equilibrio, poco se puede decir sobre el resultado probable del juego. Si hay múltiples equilibrios, entonces no está claro cuál será el resultado.

Una característica interesante del concepto de NE es que la solución óptima del sistema (es decir, una solución que maximiza la suma de los pagos de los jugadores) no necesita ser un NE. Por lo tanto, la toma de decisiones descentralizada generalmente introduce ineficiencia en la cadena de suministro. Hay, sin embargo, algunas excepciones para situaciones en las que la competencia puede resultar en un rendimiento óptimo del sistema. De hecho, es posible que un NE ni siquiera esté en la frontera de Pareto: el conjunto de estrategias de modo que cada jugador puede mejorar solo si otro jugador empeora. Un conjunto de estrategias es óptimo de Pareto si están en la frontera de Pareto; de lo contrario, un conjunto de estrategias es Pareto inferior. Por

lo tanto, un NE puede ser Pareto inferior.

El juego del Dilema del Prisionero es el ejemplo clásico de esto: solo un par de estrategias cuando ambos jugadores “cooperan” es Pareto óptimo, y el único equilibrio de Nash es cuando ambos jugadores “desertan” resultan ser Pareto.[6]

### Juegos estáticos

En los juegos estáticos no cooperativos, los jugadores eligen estrategias simultáneamente y luego se comprometen con las estrategias que eligieron, es decir, se trata de juegos de movimiento simultáneo, de un solo tiro. En Teoría de Juegos no cooperativo busca una predicción racional de cómo se jugará el juego en la práctica. El concepto de solución para estos juegos fue presentado formalmente por John Nash (1950), aunque algunos casos de uso de conceptos similares se remontan a un par de siglos. [6]

### Configuración del juego

La estrategia de un jugador puede considerarse como la instrucción completa sobre qué acciones realizar en un juego. Por ejemplo, un jugador puede dar su estrategia a una persona que no tiene absolutamente ningún conocimiento del pago o las preferencias del jugador y esa persona debería poder usar las instrucciones contenidas en la estrategia para elegir las acciones que el jugador desea. Como resultado, el conjunto de estrategias factibles de cada jugador debe ser independiente de las estrategias elegidas por los otros jugadores, es decir, no se permite que la elección de estrategia de un jugador limite las estrategias factibles de otro jugador. (De lo contrario, el juego está mal definido y los resultados analíticos obtenidos del juego son cuestionables).

En la forma normal, los jugadores eligen estrategias simultáneamente. Las acciones se adoptan después de elegir las estrategias y esas acciones corresponden a las estrategias elegidas. Como alternativa a la selección única de estrategias en la forma normal, también se puede diseñar un juego en la forma extensiva. Con la forma extensiva, las acciones se eligen solo según sea necesario, por lo que las elecciones secuenciales son posibles. Como resultado, los jugadores pueden aprender información entre la selección de acciones, en particular, un jugador puede aprender qué acciones se eligieron previamente o el resultado de un evento aleatorio. La **Figura 4** proporciona un ejemplo de un juego de forma extensiva simple y su representación de forma normal equivalente: hay dos jugadores, el jugador I elige entre {Izquierda, Derecha}

y el jugador II elige entre {Arriba, Abajo}. En la forma extensiva, el jugador I elige primero, luego el jugador II elige después de aprender la elección del jugador I. En la forma normal eligen simultáneamente. La distinción clave entre los juegos de forma normal y extensiva es que, en la forma normal, un jugador puede comprometerse con todas las decisiones futuras. Más adelante mostramos que este poder de compromiso adicional puede influir en el conjunto de equilibrios plausibles.

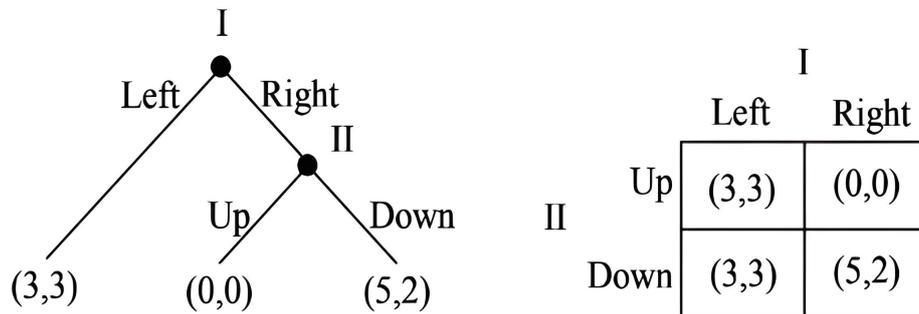


Figura 4: Representación del juego en forma extensiva vs normal.[6]

Un jugador puede elegir una estrategia en particular o un jugador puede elegir seleccionar aleatoriamente entre un conjunto de estrategias. En el primer caso se dice que el jugador elige una estrategia pura mientras que en el último caso el jugador elige una estrategia mixta. Hay situaciones en economía y marketing que han utilizado estrategias mixtas, por ejemplo, no parece razonable sugerir que un gerente debería “lanzar una moneda” entre varios niveles de capacidad. Afortunadamente, los equilibrios de estrategias mixtas no existen en juegos con un único equilibrio de estrategias puras. Por lo tanto, en esos juegos la atención se puede restringir a estrategias puras sin pérdida de generalidad.

En un juego no cooperativo, los jugadores no pueden hacer compromisos vinculantes antes de elegir sus estrategias. En un juego cooperativo, los jugadores pueden hacer compromisos vinculantes. Por lo tanto, en un juego cooperativo, los jugadores pueden realizar pagos adicionales y formar coaliciones. [6]

## 2.3. Ecuaciones Diferenciales

Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Con el objetivo de referirnos a ellas, debemos clasificar las ecuaciones diferenciales por tipo, orden y linealidad.[7]

### Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales

Aquí nos enfocamos en el estudio de las técnicas apropiadas para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$X' = AX + F$$

O en su forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Si el sistema es homogéneo ( $F(t) = 0$ ), su forma matricial es entonces:

$$X' = AX$$

Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal, normalmente no se pueden encontrar soluciones en términos de funciones elementales. En este capítulo estudiaremos que se puede obtener información muy valiosa acerca de la naturaleza geométrica de las soluciones analizando en primera instancia las soluciones constantes especiales llamadas **puntos críticos** y, después, buscando las soluciones periódicas denominadas **ciclos límite**. Se

presentará el importante concepto de estabilidad y se ilustrará con ejemplos de los campos de la física y la biología.[7]

**Tipos de soluciones.** Si  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ , y las derivadas parciales de primer orden  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial P/\partial y$ ,  $\partial Q/\partial x$  y  $\partial Q/\partial y$  son continuas en una región  $R$  del plano, entonces una solución del sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

que satisface  $X(0) = X_0$  es única y constituye uno de los tres tipos básicos

- i) Una solución constante  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = y_0$  (o  $X(t) = X_0$  para toda  $t$ ). Una solución constante se llama punto crítico o punto estacionario. Cuando una partícula se coloca en un punto crítico  $X_0$  (esto es,  $X(0) = X_0$ ), permanece ahí indefinidamente. Por esta razón, una solución constante se conoce también como solución de equilibrio. Observe esto: debido a que  $X'(t) = 0$ , un punto crítico es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

- ii) Una solución  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  que define un arco: una curva plana que no se cruza a sí misma. Por lo tanto, la curva de la **Figura 5 a)** puede ser una solución de un sistema autónomo plano, mientras que la curva de la figura b) no puede ser una solución. Habría dos soluciones que comenzarían a partir del punto  $P$  de la intersección.
- iii) Una solución periódica  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Se le llama ciclo a una solución periódica. Si  $p$  es el periodo de la solución, entonces  $X(t+p) = X(t)$ , y una partícula colocada sobre la curva en  $X_0$  viajará por la curva y regresará a  $X_0$  en  $p$  unidades de tiempo.[7]

### Linealización y estabilidad local

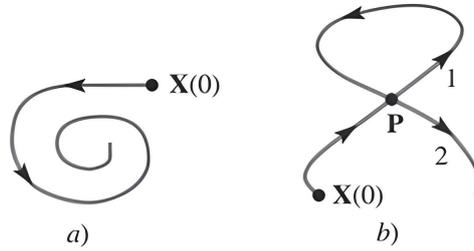


Figura 5: Retrato de fases de sistemas.[7]

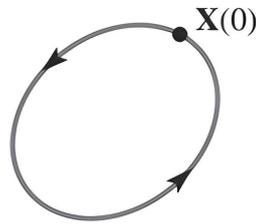


Figura 6: Retrato de fase de una solución periódica, **ciclo**.[7]

### Definición puntos críticos estables

Sea  $X_1$  un punto crítico de un sistema autónomo, y dejemos que  $X = X(t)$  exprese la solución que satisface la condición inicial  $X(0) = X_0$ , donde  $X_0 \neq X_1$ . Decimos que  $X_1$  es un punto crítico estable cuando, dado cualquier radio  $\rho > 0$ , existe un radio correspondiente  $r > 0$  tal que si la posición inicial  $X_0$  satisface  $|X_0 - X_1| < r$ , entonces la solución correspondiente  $X(t)$  satisface  $|X(t) - X_1| < \rho$  para toda  $t > 0$ . Si, además,  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_1$  siempre que  $|X_0 - X_1| < r$ , llamamos a  $X_1$  punto crítico estable asintótico.

Esta definición se ilustra en la **Figura 7** (a). Dado cualquier disco de radio  $\rho$  alrededor del punto crítico  $X_1$ , una solución permanecerá dentro del disco siempre y cuando el valor de  $X(0) = X_0$  sea seleccionado lo suficientemente cerca de  $X_1$ . No es necesario que la solución se acerque al punto crítico para que  $X_1$  sea estable. Los nodos estables, los puntos en espiral estables y los centros son ejemplos de puntos críticos estables de sistemas lineales. Para enfatizar que  $X_0$  debe seleccionarse cercano a  $X_1$ , también se utiliza el término punto crítico estable localmente.

La definición de punto crítico inestable se obtiene al negar la definición

anterior.[7]

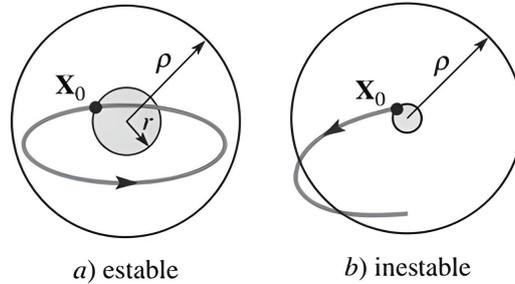


Figura 7: Punto crítico estable e inestable.[7]

### Estabilidad de los sistemas no lineales

**Matriz jacobiana.** Se puede llevar a cabo un análisis similar para un sistema autónomo plano. Una ecuación del plano tangente a la superficie  $z = g(x, y)$  en  $X_1 = (x_1, y_1)$  es

$$z = g(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1)$$

y  $g(x, y)$  puede ser aproximada por su plano tangente en las cercanías de  $X_1$ . Cuando  $X_1$  es un punto crítico del sistema autónomo plano,  $P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) = 0$  y tenemos

$$\begin{aligned} x' = P(x, y) &\approx \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1) \\ y' = Q(x, y) &\approx \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1) \end{aligned}$$

El sistema original  $X' = g(X)$  puede ser aproximado en las cercanías del punto crítico  $X_1$  mediante el sistema lineal  $X' = A(X - X_1)$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce con el nombre de matriz jacobiana en  $X_1$  y se expresa como  $g'(X_1)$ . Si establecemos  $H = X - X_1$ , entonces el sistema lineal  $X' = A(X - X_1)$  se convierte en  $H' = AH$ , que es de la forma del sistema lineal analizado en la sección anterior. El punto crítico  $X = X_1$  para

$X' = A(X - X_1)$  corresponde ahora al punto crítico  $H = 0$  para  $H' = AH$ . Si los valores propios de  $A$  tienen partes reales negativas, entonces, por el Teorema (Criterio de estabilidad de los sistemas lineales),  $0$  es un punto crítico estable asintóticamente para  $H' = AH$ . Si existe un valor propio que tenga parte real positiva,  $H = 0$  es un punto crítico inestable. El teorema siguiente afirma que se puede llegar a la misma conclusión para el punto crítico  $X_1$  del sistema original.[7]

**Clasificación de los puntos críticos.** Es natural preguntarse si es posible inferir más información geométrica acerca de las soluciones cercanas al punto crítico  $X_1$  de un sistema autónomo no lineal a partir de un análisis del punto crítico del sistema lineal correspondiente. La respuesta se resume en la figura siguiente; sin embargo, deben atenderse los comentarios siguientes. Donde  $\Delta$  es el determinante y  $\tau$  la traza de la matriz de los coeficientes constantes del sistema  $A$ . Para así el polinomio característico

$$\lambda^2 + \tau\lambda + \Delta = 0$$

Por lo tanto, los valores propios de  $A$  son  $\lambda = \tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}/2$ .

- i) En cinco casos distintos (nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable y equilibrio) el punto crítico se puede categorizar como el punto crítico en el sistema lineal correspondiente. Las soluciones tienen las mismas características geométricas generales que las soluciones del sistema lineal, y conforme se acercan a las inmediaciones de  $X_1$  el parecido es mayor.
- ii) Si  $\tau^2 = 4\Delta$  y  $\tau > 0$ , el punto crítico  $X_1$  es inestable; sin embargo, para este caso en el límite, todavía no podemos decidir si  $X_1$  es una espiral estable, un nodo inestable o un nodo degenerado inestable. De manera similar, si  $\tau^2 = 4\Delta$  y  $\tau < 0$ , el punto crítico  $X_1$  es estable, pero puede ser una espiral estable, un nodo estable o un nodo degenerado estable.
- iii) Si  $\tau = 0$  y  $\Delta > 0$ , los valores propios de  $A = g'(X)$  son imaginarios puros, y para este caso en el límite  $X_1$  puede ser una espiral estable, una espiral inestable o un centro. De este modo, todavía no es posible determinar si  $X_1$  es estable o inestable.[7]

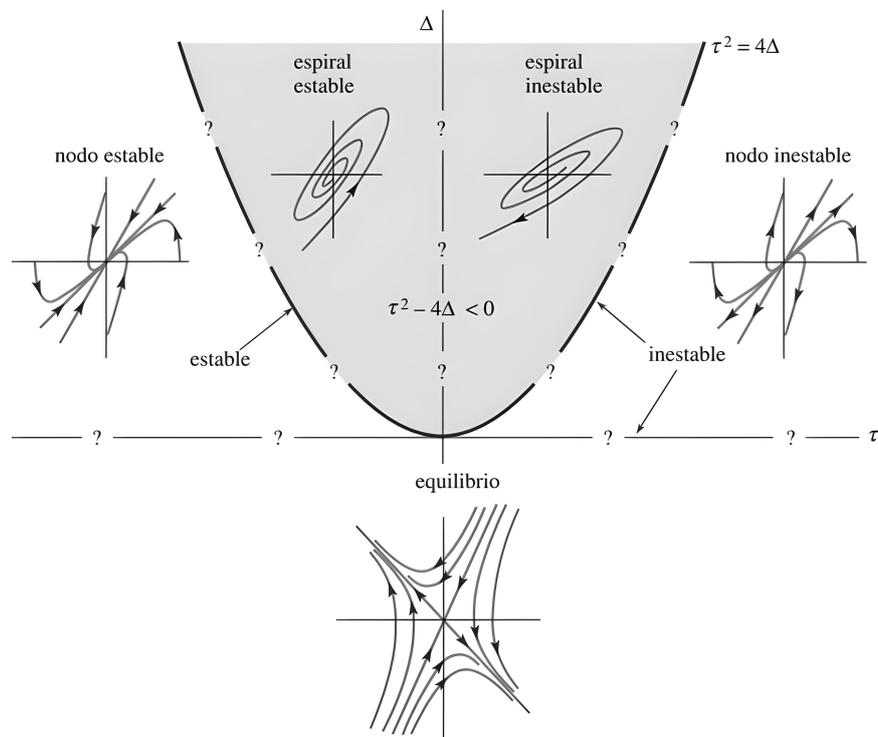


Figura 8: Todas las posibles soluciones de los puntos críticos de un sistema autónomo no lineal.[7]

### Teorema de Linealización de Liapunov y Poincaré.

1. Sea un punto crítico  $(x_0, y_0)$  de un sistema autónomo es asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de la matriz  $A$  poseen parte real negativa (esto es, si el punto crítico  $(0, 0)$  del sistema linealizado es asintóticamente estable).
2. Sea un punto crítico  $(x_0, y_0)$  de un sistema autónomo es inestable si y sólo si la matriz  $A$  del sistema posee un autovalor con parte real positiva (es decir, el punto crítico  $(0, 0)$  es inestable para el sistema linealizado).

Más aún, si los autovalores de  $A$  son distintos entre sí y distintos de cero se puede decir lo siguiente:

- i) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un nodo asintóticamente estable.
- ii) Si  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un nodo inestable.

- iii) Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto silla.
- vi) Si  $\lambda_1$  no es real y  $Re(\lambda_1) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un foco asintóticamente estable.
- v) Si  $\lambda_1$  no es real y  $Re(\lambda_1) > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un foco inestable.[8]

## 2.4. Dinámica del replicador

La ecuación de la dinámica del replicador está dada como:

$$\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x^T Ax)$$

Donde  $x_i$  es la proporción de tipo  $i$  en la población,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es el vector de distribución de tipos en la población, la matriz de pagos  $A$  contiene toda la información de aptitud para la población: la recompensa esperada se puede escribir como  $(Ax)_i$  y la aptitud media de la población en su conjunto se puede escribir como  $x^T Ax$ . [9]

Esta ecuación diferencial define la llamada dinámica del replicador. Es un tipo de dinámica posible, no es el único posible, representa bien comportamientos de individuos que al cruzarse se dividen y de esta forma surgen los descendientes.

Es una simplificación y vale sólo dentro de determinados casos, pero es ampliamente aplicable y permite hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de una población que siga las reglas antes dichas para su reproducción. No obstante comportamientos más complejos, pueden ser muchas veces llevados para estudiar la evolución de la población, luego de hacer algunas simplificaciones, a este tipo de ecuaciones.

Son conocidas algunas relaciones entre equilibrios dinámicos o estados estacionarios de este sistema y los equilibrios de Nash o equilibrios evolutivamente estables. Este tema es de gran interés porque relaciona el comportamiento de poblaciones de individuos y las posibilidades de que estos se vean modificados en un largo período o no, por la aparición de mutaciones, o cambios en el comportamiento por otros motivos. [10]

La ecuación del replicador describe la forma como evoluciona el comportamiento de un grupo de individuos dentro de una población de selección

natural, que refleja una dinámica de juego determinista, monótona y no lineal, en la teoría de juegos evolutivos. Como la ecuación de cuasi especies, en que permite que la función de aptitud incorpore la distribución de los tipos de población en lugar de establecer la aptitud de un tipo particular constante. Esta importante propiedad permite que la ecuación del replicador capture la esencia de la selección. A diferencia de la ecuación de cuasi especies, la ecuación del replicador no incorpora mutación y por eso no es capaz de innovar nuevos tipos o estrategias puras. [9]

## 2.5. Modelo de Dinámica de Replicador con Retroalimentación-Evolución de Juegos

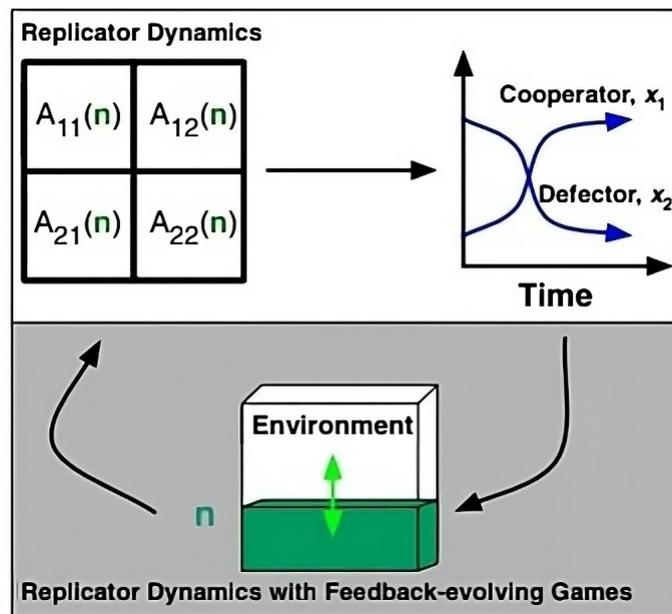


Figura 9: Representación gráfica de la dinámica del replicador. [12]

En la **Figura 9** vemos la dinámica del replicador en juegos que evolucionan (Arriba). En la dinámica del replicador, la matriz de rentabilidad ( $A$ ) determina los cambios dependientes de la frecuencia en las estrategias,  $x_i$  (Arriba y Abajo). En la dinámica del replicador con juegos de retroalimentación-evolución, las frecuencias de las estrategias influyen en el entorno  $n$ , que, a largo plazo, modifica los pagos  $A(n)$ . El sistema acoplado incluye la dinámica de la matriz de rentabilidad y las estrategias.

Donde la matriz de pagos del modelo está dada por las recompensas de los dos jugadores:

$$A(n) = \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix}$$

Consideramos una versión modificada de la dinámica estándar del replicador con un sistema de EDO no lineal donde:

$x(t)$  representa las estrategias de los jugadores (Cooperadores)

$n(t)$  representa el estado ambiental del bien común.

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] \end{cases}$$

dado  $\epsilon > 0$  denota la velocidad relativa por la cual las acciones individuales modifican el estado ambiental y  $\theta > 0$  representa la relación entre las tasas de mejora y las tasas de degradación de cooperadores y desertores, respectivamente. Donde:

$$\begin{aligned} \delta_{PS} &= P - S \\ \delta_{TR} &= T - R \end{aligned}$$

De la matriz de pagos del modelo  $A(n)$ .

El término  $n(n-1)$  en la ecuación asegura que el estado ambiental se limita al dominio  $[0, 1]$ . [12]

### **Condiciones generalizadas para una tragedia oscilante de los bienes comunes.**

Aquí, generalizamos nuestro análisis considerando un modelo de dinámica de replicadores con juegos que evolucionan en retroalimentación con pagos asimétricos, corresponde a la matriz de pagos de la **Figura 9**:

$$A(n) = (1-n) \begin{bmatrix} R_0 & S_0 \\ T_0 & P_0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ T_1 & P_1 \end{bmatrix}$$

Donde  $0 \leq n \leq 1$ . Como antes, suponemos que si  $n=0$  entonces la matriz de rentabilidad tiene un equilibrio de Nash único correspondiente a la dominación cooperativa, es decir,  $R_0 > T_0$  y  $S_0 > P_0$ . Del mismo modo, suponemos que si  $n = 1$ , entonces la matriz de rentabilidad tiene un equilibrio de

Nash único que corresponde a la dominación de desertores, es decir,  $R_1 < T_1$  y  $S_1 < P_1$ . Al romper la simetría de los pagos, podemos explorar casos en los que tanto el signo relativo como la magnitud de los pagos cambian en función del estado ambiental. [12]

### 3. Análisis Cualitativo

El modelo dinámico replicador con retroalimentación en el medio ambiente–evolución del juego esta dado como:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] \end{cases}$$

Donde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  y  $\dot{n} = \frac{dn}{dt}$ .

Procederemos a hallar los puntos de estabilidad de nuestro modelo, es decir, los puntos fijos o puntos de equilibrio. Ello se resuelve igualando nuestras dos ecuaciones a 0.

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) = 0 \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] = 0 \end{cases}$$

De allí analizaremos el comportamiento de nuestra variable “ $n$ ” (recurso natural) respecto a la solución de nuestro anterior sistema.

De la primera ecuación vemos que:

$$(1-2n) = 0 \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

Cuando nuestro recurso natural está en un punto medio. Obtuvimos el primer punto fijo a analizar.

De la segunda ecuación ( $\dot{n}$ ) es evidente que  $n = 0$  (cuando nuestro recurso natural está agotado).

Y por último tenemos que:

$$(1-n) = 0 \rightarrow n = 1$$

Finalmente, cuando nuestro recurso natural está repleto.

Consecuentemente procederemos a realizar su análisis cualitativo en esos tres estados de nuestro sistema para observar el comportamiento de sus puntos fijos o puntos de equilibrio.

### **Estado agotado** ( $n = 0$ )

Sustituyendo el valor de  $n = 0$  en nuestro modelo podemos observar los diferentes valores de  $x$  que cumplen con la condición del sistema para ser puntos fijos o puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) = 0 \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] = 0 \end{cases}$$

Reemplazando vemos que:  $(x, n) = (0, 0)$  y  $(x, n) = (1, 0)$  son puntos fijos en un estado agotado de nuestro sistema.

### **Estado repleto** ( $n = 1$ )

Sustituyendo el valor de  $n = 1$  en nuestro modelo podemos observar los diferentes valores de  $x$  que cumplen con la condición del sistema para ser puntos fijos o puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) = 0 \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] = 0 \end{cases}$$

Reemplazando vemos que:  $(x, n) = (0, 1)$  y  $(x, n) = (1, 1)$  son puntos fijos en un estado repleto de nuestro sistema.

### **Estado intermedio** ( $n = \frac{1}{2}$ )

Sustituyendo el valor de  $(n = \frac{1}{2})$  en nuestro modelo podemos observar los diferentes valores de  $x$  que cumplen con la condición del sistema para ser puntos fijos o puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) = 0 \\ \dot{n} = n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] = 0 \end{cases}$$

Reemplazando vemos que en la segunda ecuación para que se cumpla la igualdad se debe cumplir que:

$$[-1 + (1+\theta)x] = 0 \rightarrow x = \frac{1}{(1+\theta)}$$

Finalmente tenemos

$$(x, n) = \left(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2}\right)$$

que representa a una población mixta de cooperadores y desertores en un ambiente intermedio.

Concluyendo, obtuvimos cinco puntos fijos o puntos de equilibrio de nuestro modelo:

$$(x, n)^* = (0, 0)$$

$$(x, n)^* = (1, 0)$$

$$(x, n)^* = (0, 1)$$

$$(x, n)^* = (1, 1)$$

$$(x, n)^* = \left(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2}\right)$$

Que es evidente que si reemplazamos cada punto fijo o puntos de equilibrio en nuestro modelo veremos que la igualdad se cumple

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) = 0 \\ \dot{n} &= n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] = 0 \end{aligned}$$

Donde  $0 < \epsilon < 1 < ; 0 \leq n \leq 1$  y  $\theta > 0$

Una vez hallados los puntos fijos ahora analizaremos el comportamiento de ellos, sí son estables o inestables. Para ello debemos hallar la matriz Jacobiana de nuestro modelo, entonces procedemos a resolver las derivadas parciales de nuestro sistema:

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial n} \\ \frac{\partial \dot{n}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{n}}{\partial n} \end{pmatrix}$$

Iniciamos con  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} &= x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ &= x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ &= (x-x^2)[\delta_{PS} + x\delta_{TR} - x\delta_{PS}](1-2n) \\ &= (x-x^2)(\delta_{PS} + x\delta_{TR} - x\delta_{PS} - 2n\delta_{PS} - 2nx\delta + 2nx\delta_{PS}) \\ &= x\delta_{PS} + x^2\delta_{TR} - 2x^2\delta_{PS} - 2nx\delta_{PS} - 2nx^2\delta_{TR} + 4nx^2\delta_{PS} - x^3\delta_{TR} \\ &\quad + x^3\delta_{PS} + 2nx^3\delta_{TR} - 2nx^3\delta_{PS} \end{aligned}$$

Derivando parcialmente “ $x$ ”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} &= \delta_{PS} + 2x\delta_{TR} - 4x\delta_{PS} - 2n\delta_{PS} - 4nx\delta_{TR} + 8nx\delta_{PS} - 3x^2\delta_{TR} + 3x^2\delta_{PS} \\ &\quad + 6nx^2\delta_{TR} - 6nx^2\delta_{PS} \end{aligned}$$

Ahora hallamos  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial n}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \dot{x}}{\partial n} &= x\delta_{PS} + x^2\delta_{TR} - x^2\delta_{PS} - 2nx\delta_{PS} - 2nx^2\delta_{TR} + 4nx^2\delta_{PS} - x^2\delta_{PS} \\ &\quad - x^3\delta_{TR} + x^3\delta_{PS} + 2nx^3\delta_{TR} - 2nx^3\delta_{PS} \end{aligned}$$

Derivando parcialmente “ $n$ ”

$$\epsilon \frac{\partial \dot{x}}{\partial n} = -2x\delta_{PS} - 2x^2\delta_{TR} + 4x^2\delta_{PS} + 2x^3\delta_{TR} - 2x^3\delta_{PS}$$

Ahora hallamos  $\frac{\partial \dot{n}}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{n}}{\partial x} &= n(1-n)[-1 + (1+\theta)x] \\ &= n - n^2[-1 + (1+\theta)x] \\ &= n - n^2[-1 + x + \theta x] \\ &= -n + nx + \theta nx + n^2 - n^2x - \theta n^2x \end{aligned}$$

Derivando parcialmente “ $x$ ”

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial x} = n + \theta n - n^2 - \theta n^2$$

Ahora hallamos  $\frac{\partial \dot{n}}{\partial n}$ :

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial n} = -n + nx + \theta nx + n^2 - n^2x - \theta n^2x$$

Derivando parcialmente “ $n$ ”

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial n} = -1 + x + \theta x + 2n - 2nx - 2\theta nx$$

Finalmente, la matriz Jacobiana de nuestro modelo es la siguiente:

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial n} \\ \frac{\partial \dot{n}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{n}}{\partial n} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \delta_{PS} + 2x\delta_{TR} - 4x\delta_{PS} - 2n\delta_{PS} - 4nx\delta_{TR} + 8nx\delta_{PS} - 3x^2\delta_{TR} + 3x^2\delta_{PS} + 6nx^2\delta_{TR} - 6nx^2\delta_{PS}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial n} = -2x\delta_{PS} - 2x^2\delta_{TR} + 4x^2\delta_{PS} + 2x^3\delta_{TR} - 2x^3\delta_{PS}$$

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial x} = n + \theta n - n^2 - \theta n^2 x$$

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial n} = -1 + x + \theta x + 2n - 2nx - 2\theta nx$$

En el análisis de estabilidad de los puntos fijos tendremos dos casos a analizar en cada punto que se deriva de la matriz de pagos asimétricos de los jugadores de nuestro modelo.

### Condiciones generalizadas para una tragedia oscilante de los bienes comunes.

Aquí, generalizamos nuestro análisis considerando un modelo de dinámica de replicadores con juegos que evolucionan en retroalimentación con pagos asimétricos:

$$A(n) = (1 - n) \begin{bmatrix} R_0 & S_0 \\ T_0 & P_0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ T_1 & P_1 \end{bmatrix}$$

Donde  $0 \leq n \leq 1$ . Como antes, suponemos que si  $n = 0$  entonces la matriz de rentabilidad tiene un equilibrio de Nash único correspondiente a la dominación cooperativa, es decir,  $R_0 > T_0$  y  $S_0 > P_0$ . Del mismo modo, suponemos que si  $n = 1$ , entonces la matriz de rentabilidad tiene un equilibrio de Nash único que corresponde a la dominación de desertores, es decir,  $R_1 < T_1$  y  $S_1 < P_1$ . Al romper la simetría de los pagos, podemos explorar casos en los que tanto el signo relativo como la magnitud de los pagos cambian en función del estado ambiental. [12]

Donde vemos que:

Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**.

Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**.

Ahora procederemos a evaluar la estabilidad según los casos anteriores.

Para  $(x, n)^* = (0, 0)$  **Desertores en un ambiente agotado.**

$$J^*(0, 0) = \begin{pmatrix} \delta_{PS} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(0, 0)$  son  $\lambda_1 = \delta_{PS}$  y  $\lambda_2 = -1$  siendo  $\delta_{PS} > 0$  para que nuestro punto fijo sea un punto silla inestable.
- Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(0, 0)$  son  $\lambda_1 = \delta_{PS}$  y  $\lambda_2 = -1$  siendo  $\delta_{PS} < 0$  para que nuestro punto fijo sea un nodo asintóticamente estable.

Para  $(x, n)^* = (1, 0)$  **Cooperadores en un ambiente agotado.**

$$J^*(1, 0) = \begin{pmatrix} \delta_{TR} & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$$

- Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(1, 0)$  son  $\lambda_1 = -\delta_{TR}$  y  $\lambda_2 = \theta$  siendo  $\delta_{TR} > 0$  y  $\theta > 0$  para que nuestro punto fijo sea un punto silla inestable.
- Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(1, 0)$  son  $\lambda_1 = -\delta_{TR}$  y  $\lambda_2 = \theta$  siendo  $\delta_{TR} < 0$  y  $\theta > 0$  para que nuestro punto fijo sea un nodo inestable.

Para  $(x, n)^* = (0, 1)$  **Desertores en un ambiente repleto.**

$$J^*(0, 1) = \begin{pmatrix} -\delta_{PS} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(0, 1)$  son  $\lambda_1 = -\delta_{PS}$  y  $\lambda_2 = 1$  siendo  $\delta_{PS} > 0$  para que nuestro punto fijo sea un punto silla inestable.
- Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(0, 1)$  son  $\lambda_1 = -\delta_{PS}$  y  $\lambda_2 = 1$  siendo  $\delta_{PS} < 0$  y  $\theta > 0$  para que nuestro punto fijo sea un nodo inestable.

Para  $(x, n)^* = (1, 1)$  **Cooperadores en un ambiente repleto.**

$$J^*(1, 1) = \begin{pmatrix} \delta_{TR} & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}$$

- Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(1, 1)$  son  $\lambda_1 = \delta_{TR}$  y  $\lambda_2 = -\theta$  siendo  $\delta_{TR} > 0$  y  $\theta > 0$  para que nuestro punto fijo sea un punto silla inestable.
- Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(1, 1)$  son  $\lambda_1 = \delta_{TR}$  y  $\lambda_2 = -\theta$  siendo  $\delta_{TR} < 0$  y  $\theta > 0$  para que nuestro punto fijo sea un nodo asintóticamente estable.

Para  $(x, n)^* = (\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$  **Población mixta de cooperadores y desertores en un ambiente intermedio.**

$$J^*\left(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\theta^2\delta_{PS}-2\theta\delta_{TR}}{(1+\theta)^3} \\ \frac{1}{4}(1+\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el polinomio característico podemos ver que valores propios de nuestra matriz Jacobiana son los siguientes:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\theta(\delta_{PS} + \delta_{TR})}{2(1+\theta)^2}}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\theta(\delta_{PS} + \delta_{TR})}{2(1+\theta)^2}}$$

- Si  $R < T$  y  $S < P$  es un caso de **Deserción mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$  son dos números complejos iguales, pero de diferente signo. Siendo  $\delta_{PS} > 0$  y  $\delta_{TR} > 0$  entonces  $\delta_{PS} + \delta_{TR} > 0$  y  $\theta > 0$  para que la parte real de nuestro número complejo  $\text{Re}(\lambda) < 0$  entonces finalmente nuestro punto fijo será un foco (espiral) estable. En este punto fijo podemos observar la estabilidad de nuestro sistema, obteniendo así la mejor relación entre beneficio/sostenibilidad, beneficio para los explotadores y sostenibilidad del medio ambiente.
- Si  $R > T$  y  $S > P$  es un caso de **Cooperación mutua**: Los valores propios de nuestra matriz Jacobiana  $J^*(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$  son dos valores iguales, pero de diferente signo. Teniendo en cuenta que  $\delta_{PS} < 0$  y  $\delta_{TR} < 0$  entonces  $\delta_{PS} + \delta_{TR} < 0$  y  $\theta > 0$  para que los valores propios sean de la forma

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\theta(\delta_{PS} + \delta_{TR})}{2(1 + \theta)^2}}$$

y finalmente nuestro punto fijo es un punto silla inestable.

Finalmente se puede decir que obtuvimos 4 puntos fijos “límitrofes”, es decir, (i)  $(x^* = 0, n^* = 0)$  desertores en un ambiente degradado; (ii)  $(x^* = 1, n^* = 0)$  cooperadores en un ambiente de grado; (iii)  $(x^* = 0, n^* = 1)$  desertores en un ambiente de repleto; (iv)  $(x^* = 1, n^* = 1)$  cooperadores en un ambiente repleto. Y también un punto fijo “interior”  $(x^* = \frac{1}{1+\theta}, n^* = \frac{1}{2})$  que representa una población mixta de cooperadores y desertores en un ambiente intermedio.

La dirección de las orbitas en el plano de fase determinado por  $(x, n)$  es en sentido antihorario, es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj. La teoría es la siguiente. Un sistema inicializado internamente, cercano a  $(x = 0, n = 0)$  avanzará a  $(x = 1, n = 0)$ , porque se prefiere la cooperación. Luego, a medida que los cooperadores mejoran el ambiente, el sistema se mueve a la posición  $(x = 1, n = 1)$ . Los desertores invadirán un estado ecológicamente mejorado y el sistema se moverá a un estado cercano a la raíz  $(x = 0, n = 1)$ . Finalmente, en un entorno dominado por desertores, el estado del entorno se deteriorará y el sistema alcanzará la posición  $(x = 0, n = 0)$ . Esta teoría se mantiene en todo el dominio. En la **Figura 10** (parte superior derecha) se evidencia lo anterior expuesto del sistema para el cual se selec-

ciona la matriz de pagos,  $R = 2$ ;  $S = 3$ ;  $T = 6$ ;  $P = 8$ .

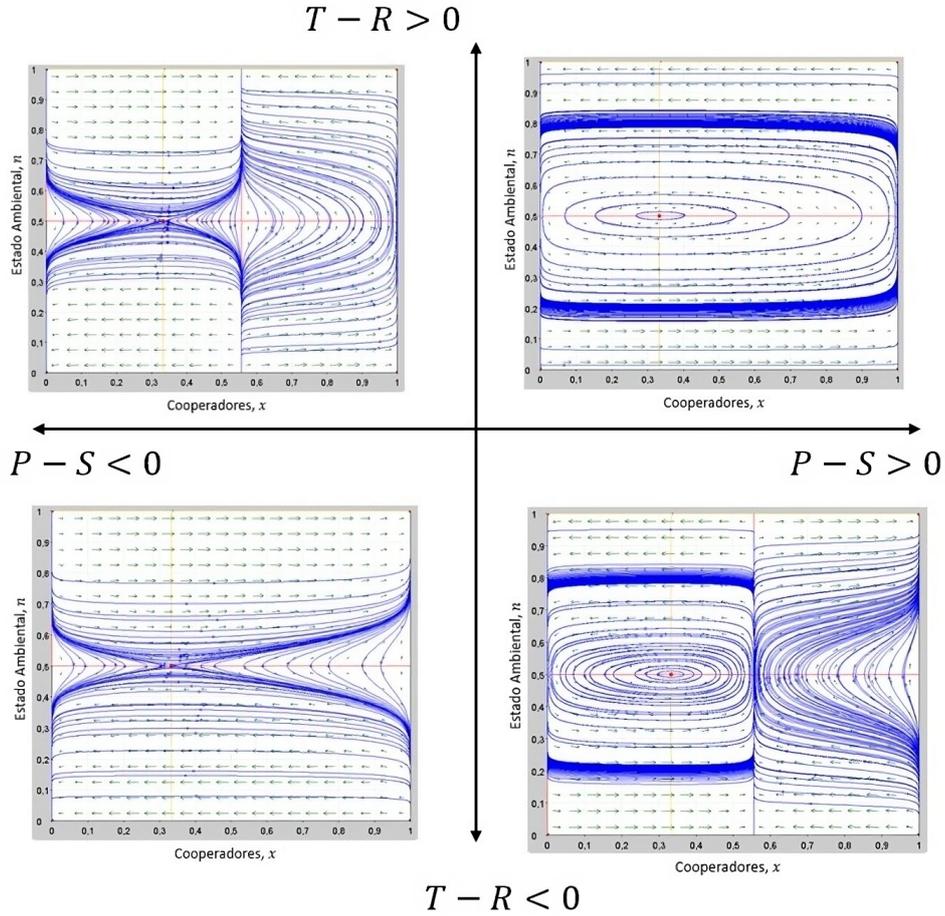


Figura 10: Retratos de fases de las dinámicas obtenidas en nuestro modelo según todas las combinaciones posibles de pagos relacionadas a  $T - R$  y  $P - S$  modelado en **Pplane**.

Ahora bien, analizaremos como afecta en nuestro sistema el parámetro  $\epsilon$  que denota la velocidad relativa por la cual las acciones individuales modifican el estado ambiental, de tal manera que  $0 < \epsilon < 1$  el cambio ambiental es relativamente lento en comparación con el cambio en la frecuencia de los estrategias.

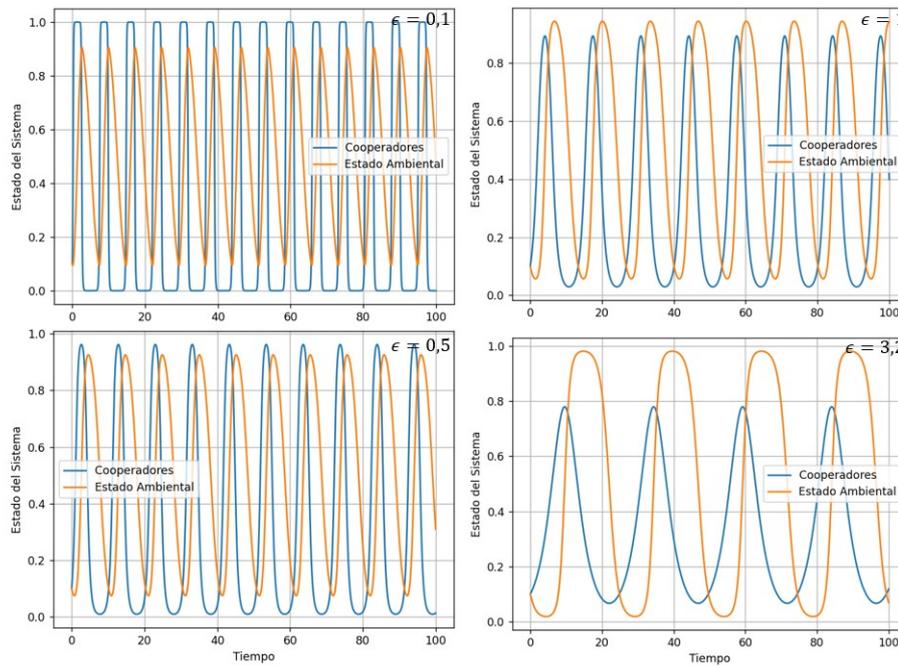


Figura 11: Varianza de la dinámica del sistema dado el cambio de  $\epsilon$  (la velocidad relativa de la estrategia y la dinámica ambiental). El parámetro  $\epsilon$  varía de 0,1 a 4 casos dados. Las anteriores dinámicas corresponden a los valores de  $R = 4$ ;  $S = 7$ ;  $T = 6$ ;  $P = 8$  (Caso de Deserción Mutua) y  $\theta = 2$  modelado en **Python**.

En la **Figura 11** observamos que a un mayor parámetro  $\epsilon$  el cambio de nuestro sistema es más lento en comparación a un parámetro  $\epsilon$  menor, de ahí deducimos que este parámetro controla la perturbación o la dinámica de nuestro sistema a razón de un cambio rápido o un cambio lento.

Y así mismo evidenciar la relevancia de  $\theta$  la relación entre las tasas de mejora y las tasas de degradación de cooperadores y desertores en nuestro sistema.

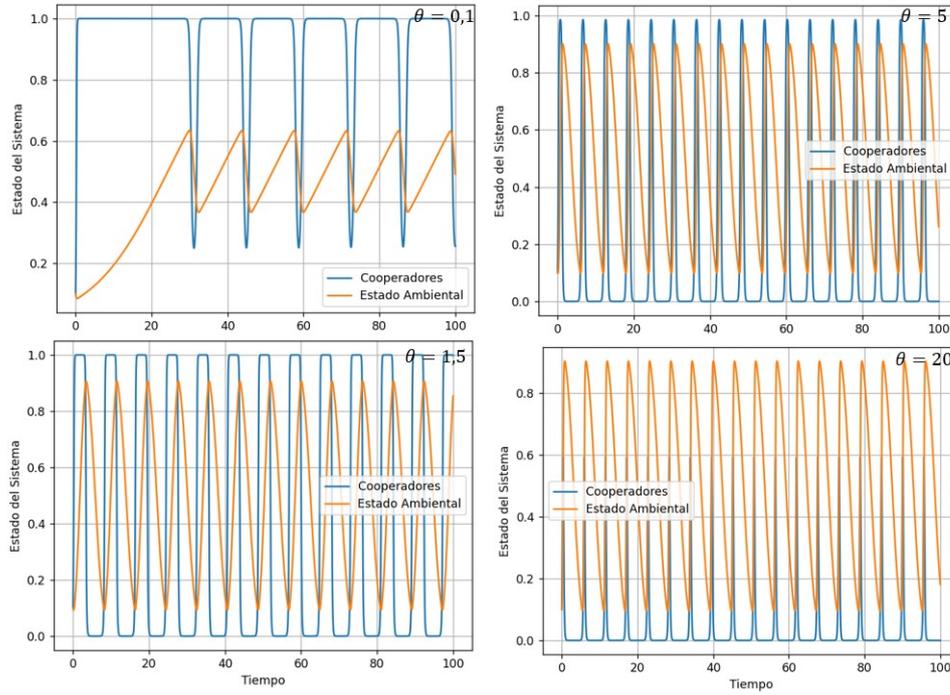


Figura 12: Varianza de la dinámica del sistema dado el cambio de  $\theta$  (la relación entre las tasas de mejora y las tasas de degradación de cooperadores y desertores). El parámetro  $\theta$  varía de 0,1 a 4 casos dados. Las anteriores dinámicas corresponden a los valores de  $R = 4$ ;  $S = 7$ ;  $T = 6$ ;  $P = 8$  (Caso de Deserción Mutua) y  $\epsilon = 0,1$  modelado en **Python**.

Se evidencia en la **Figura 12** que el parámetro  $\theta$  es netamente influyente en nuestro estado ambiental  $n(t)$ , que a un menor parámetro  $\theta$  nuestro estado ambiental tiene una menor variabilidad que en el caso de un mayor valor de  $\theta$ . Se podría decir que es un caso contrario al análisis del parámetro  $\epsilon$ . Por último este parámetro  $\theta$  afecta la ubicación del punto fijo o punto de equilibrio interior

$$(x, n)^* = \left( \frac{1}{1 + \theta}, \frac{1}{2} \right)$$

## 4. Sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo

Aplicaremos el anterior modelo a la problemática en específica la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo.

Según la base de datos obtenida de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo de los explotadores y con la colaboración del Director del Proyecto Ceibas Javier Cardozo (CAM), procederemos a hallar los parámetros necesarios para abarcar el problema;

Sexo	¿Qué tipo de jugador representa?	¿Qué nivel de beneficio obtiene al cooperar con la explotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo?	¿Qué nivel de beneficio obtiene al desertar (NO COOPERAR) con la explotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo?
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	9	4
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	8	7
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	9	1
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	9	2
Masculino	Explotador	10	3
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	10	0
Masculino	Explotador	9	1
Masculino	Aledaño	0	8
Femenino	Aledaño	5	5
Masculino	CAM	8	0

Cuadro 1: Base de datos obtenida en el punto de extracción de la arena en la Bocatoma el Guayabo, tomado de **Excel**.

Evaluamos promedio de los explotadores:

	¿Qué nivel de beneficio obtiene al cooperar con la explotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo?	¿Qué nivel de beneficio obtiene al desertar (NO COOPERAR) con la explotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo?
Promedio de las respuestas de los explotadores	9,6	1,2

Cuadro 2: Promedio de los explotadores realizado en **Excel**.

Con ello llegamos a nuestra matriz de pagos del juego:

	<b>CAM</b>	<b>Explotadores</b>
<b>Cooperar</b>	8	9,6
<b>Desertar</b>	0	1,2

Cuadro 3: Matriz de pagos  $A(n)$  de la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo obtenida de la base de datos del **Cuadro 1**.

Observamos que  $R = 8$ ;  $S = 9,6$ ;  $T = 0$  y  $P = 1,2$ .

Del análisis cualitativo concluimos que se trata de un caso de cooperación mutua, donde tendrá un equilibrio de Nash único cuando el estado ambiental del recurso natural este agotado ( $n = 0$ ).

Tenemos nuestro modelo de replicador dinámico con retroalimentación en medio ambiente:

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ \dot{n} &= n(1-n)[-1 + (1+\theta)x]\end{aligned}$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= x(1-x)[8,4 + (-8 + 8,4)x](1-2n) \\ \dot{n} &= n(1-n)[-1 + (1+\theta)x]\end{aligned}$$

Aquí tomaremos valores cualesquiera de  $\epsilon$  y  $\theta$  ya que no afectaran la parte cualitativa de suma importancia en nuestro sistema debido a que tenemos un caso de Cooperación Mutua, en donde vemos que la estabilidad de nuestro sistema la hallamos en los puntos fijos o puntos de equilibrio:

- i)  $(x, n)^* = (0, 0)$  (nodo asintóticamente estable) Desertores en un ambiente agotado. Aquí los jugadores en un entorno ambiental por debajo de la mitad del recurso de la arena y del punto fijo interior inestable  $(x, n)^* = (\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$  optan por la deserción (no cooperación) de la explotación de la arena debido a que llegará un punto en el que agoten todo el recurso natural, y por ende no habrá explotación. En otras palabras, la dinámica que vemos es que los cooperadores en un ambiente agotado van poco a poco desertando en la explotación para que el recurso natural se retroalimente en el punto máximo del punto fijo interior para que luego nuevamente descienda y se termine de agotar por completo el recurso natural, en este caso la arena.

- ii)  $(x, n)^* = (1, 1)$  (nodo asintóticamente estable) Cooperadores en un ambiente repleto. Aquí veremos un caso contrario al anterior debido a que por encima del punto fijo interior inestable  $(x, n)^* = (\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$  los desertores en un ambiente repleto se verán incitados a la cooperación en la explotación de la arena que esta tendrá un pico mínimo en el punto fijo interior para que luego el estado ambiental aumente y sea estable, es decir hallamos aquí el punto de beneficio y sostenibilidad.

A continuación, veremos algunas dinámicas que ilustren lo anterior dicho:

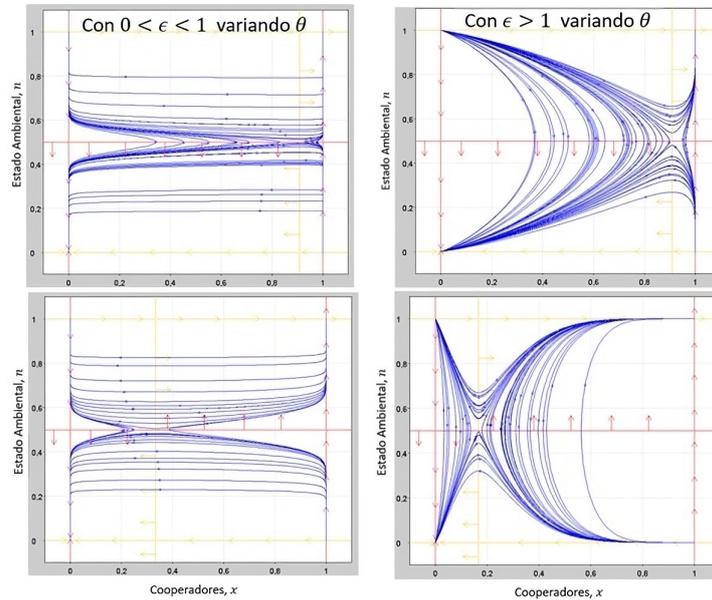


Figura 13: Retratos de fases de la sobreexplotación de la arena en la Boca-toma el Guayabo. Modelado en **Pplane** con la matriz de pagos obtenida en el **Cuadro 3**, variando  $\epsilon$  y  $\theta$ .

Cuando  $0 < \epsilon < 1$  tenemos una dinámica del sistema más lenta mientras que cuando  $\epsilon > 1$  tenemos una dinámica más rápida puesto que  $\epsilon$  denota la velocidad relativa por la cual las acciones individuales modifican el estado ambiental. La variación de  $\theta$  que es la relación entre las tasas de mejora y las tasas de degradación de cooperadores y desertores, respectivamente. Vemos que este parámetro está relacionado con el punto fijo interior afectando su ubicación a razón de  $(x)^* = \frac{1}{1+\theta}$  a medida que  $\theta$  se hace cada vez más grande se ubicará mucho más cerca al 0.

Iniciando nuestro sistema con una condición inicial  $(0,1,0,1)$  por debajo del estado ambiental ( $n = 0,5$ ) obtenemos:

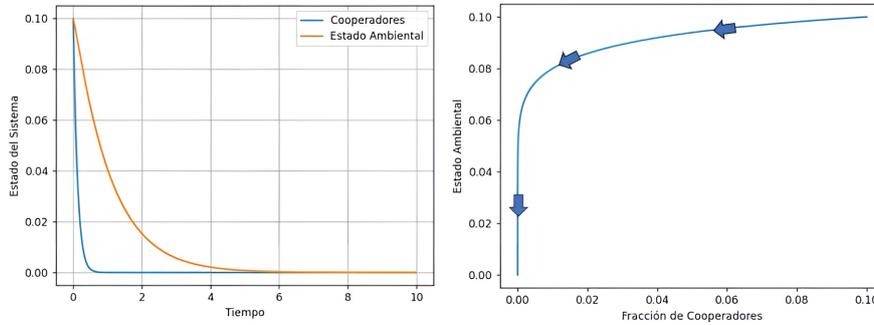


Figura 14: Comportamiento del sistema a través del tiempo. Modelado en **Python** con la matriz de pagos obtenida en el **Cuadro 3**,  $\epsilon = 0,8$  y  $\theta = 2$ .

Vemos claramente que nuestro sistema no sería autosostenible inicialmente con el recurso natural de la arena llegando así al agotamiento de dicho recurso y dejando insatisfecho a los explotadores que se quedarían sin beneficio alguno.

#### 4.1. Solución Óptima

Con una condición inicial  $(0,6,0,6)$  por encima del estado ambiental ( $n = 0,5$ ) obtenemos:

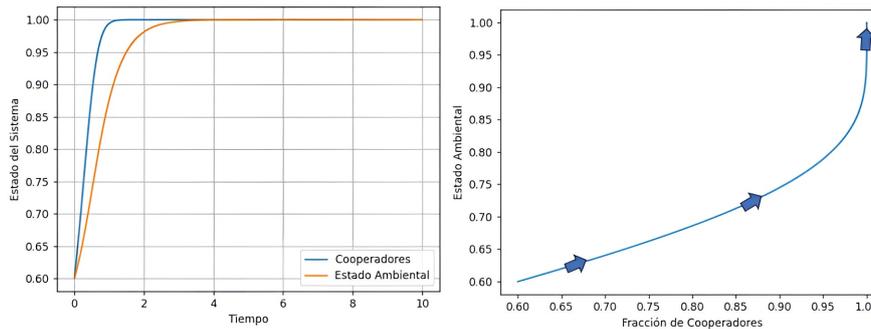


Figura 15: Comportamiento del sistema a través del tiempo. Modelado en **Python** con la matriz de pagos obtenida en el **Cuadro 3**,  $\epsilon = 0,8$  y  $\theta = 2$ .

Aquí se aprecia la estabilidad del sistema y por ende el control óptimo siendo cuando el sistema se inicie con un estado ambiental superior o igual a  $(n = 0,5)$ . Se evidencia en esta dinámica el control óptimo para el estado

ambiental que en este caso es la arena y el beneficio de los explotadores, una relación de beneficio/sostenibilidad (mejor rendimiento del sistema).

Finalmente se relaciona el anterior comportamiento con la problemática abarcada de la explotación de la arena en la Bocatoma el Guayabo siendo autosostenible para el medio ambiente y beneficiosa para esos pocos explotadores, además destacando que todo ese recurso natural es originado por el cauce del río las Ceibas fuente hídrica vital para la capital del Huila. A través de los años se ha venido desarrollando dicha labor sin tener riesgo alguno. Pero al final se logra evidenciar el mejor rendimiento del sistema, que dicha labor es autosostenible y beneficiosa siempre y cuando el parámetro del estado del recurso natural inicial sea ( $n \geq 0,5$ ). Claramente vemos dicha explotación es ejecutada con un buen estado del recurso natural, es decir con ( $n \geq 0,5$ ). De otra manera ya nos veríamos afectados no solo los explotadores y el recurso natural si no todos los Neivanos debido a todos los riegos que traen dicha explotación sin control alguno como, por ejemplo, erosiones de tierras cercanas al río, desbordamientos, hundimientos, etc.

## 5. Implementación de código en Python y Pplane

Código de Python para la resolución del Sistema y sus dinámicas:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *
from pylab import *
from scipy.integrate import odeint

def sistema(x,t):
# Calcular la tasa de cambio de los cooperadores
dx1 = (x[0]*(1-x[0])*(-8.4+(-8+8.4)*(x[0]))*(1-2*x[1]))/0.8
#Calculate the rate of change of the environmental state
dx2 = x[1]*(1-x[1])*(-1+(1+2)*(x[0]))
return array([dx1,dx2])

# Definir el intervalo de tiempo
t = linspace(0,10,10000)

# Definir las condiciones iniciales
x0 = array([0.6,0.6])

# Integrar el sistema de ecuaciones diferenciales
x = odeint(sistema,x0,t)
# Gráfica los resultados
plot(t,x[:,0],label = 'Cooperadores')
plot(t,x[:,1],label = 'Estado Ambiental')
legend()
xlabel('Tiempo')
ylabel('Estado del Sistema')
grid()
show()

# Gráfica el espacio de fase
plt.plot(x[:,0],x[:,1])
plt.xlabel('Fracción de Cooperadores')
plt.ylabel('Estado Ambiental')
plt.show()
```

Obteniendo:

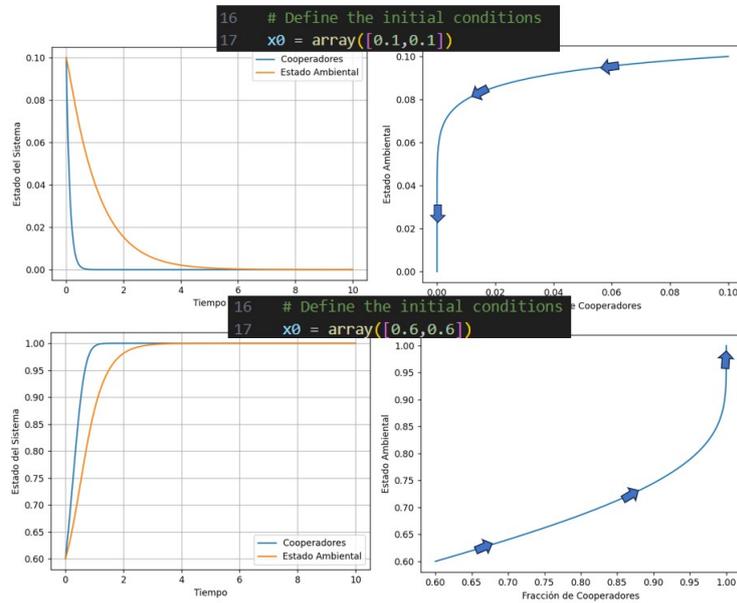


Figura 16: Comportamiento del sistema a través del tiempo. Siendo  $R = 8; S = 9,6; T = 0; P = 1,2; \epsilon = 0,8$  y  $\theta = 2$ .

Para los diagramas de fases usamos el software **Pplane** para una mejor comprensión y distinción de sus pendientes y con el fin de corroborar el estado de sus puntos fijos obtenidos con el análisis propuesto.

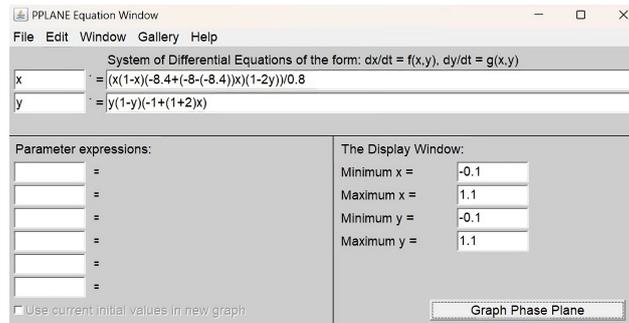


Figura 17: Siendo  $\dot{x} = x'$  y  $\dot{y} = y'$  con  $R = 8; S = 9,6; T = 0; P = 1,2; \epsilon = 0,8$  y  $\theta = 2$ .

Obtenemos:

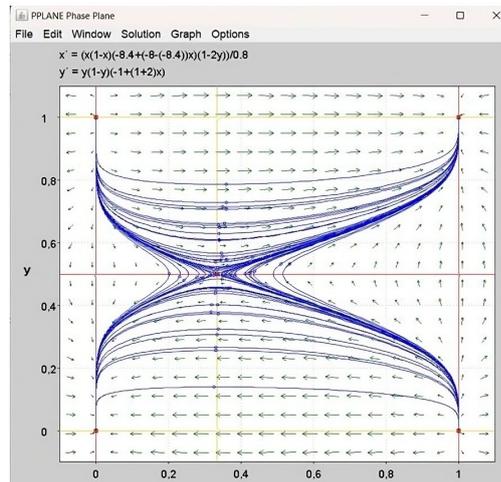
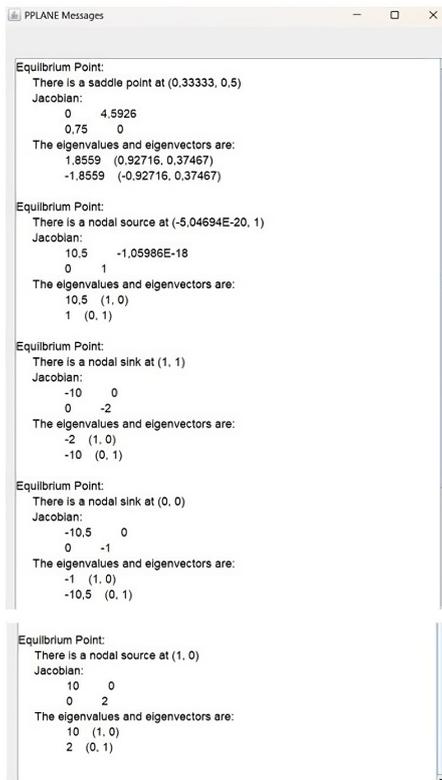


Figura 18: En la parte izquierda vemos la ventana **PPLANE Messages** la cual nos proporciona una información detallada respecto a los puntos de equilibrio o puntos fijos. En la parte derecha tenemos la ventana **PPLANE Phase Plane** que nos brinda un diagrama de fases muy completo e ilustrativo.

## 6. Conclusiones

Tras el análisis elaborado de nuestro sistema dinámico replicador con retroalimentación en el medio ambiente

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= x(1-x)[\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x](1-2n) \\ \dot{n} &= n(1-n)[-1 + (1+\theta)x]\end{aligned}$$

Encontramos que  $\delta_{PS}$ ,  $\delta_{TR}$ ,  $\epsilon$  y  $\theta$  son los parámetros que alteran la dinámica de nuestro sistema, donde  $\delta_{PS}$  y  $\delta_{TR}$  definen en nuestro sistema si se trata de un caso de Deserción mutua ( $R < T$  y  $S < P$ ) ó si es un caso de Cooperación mutua ( $R > T$  y  $S > P$ ) para así evidenciar la dinámica que opten las decisiones de los jugadores.

Nuestro modelo tiene cinco puntos fijos de los cuales, cuatro se definen como puntos fijos “límitrofes”  $((0,0); (1,0); (1,1)$  y  $(0,1))$  ya que están ubicados al límite del dominio y rango de suma importancia en el análisis de nuestro modelo dinámico replicador con retroalimentación en el medio ambiente y un punto fijo “interior”  $(\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{2})$ . De estos puntos fijos en el caso de Deserción mutua todos representan inestabilidad en nuestro sistema, excepto el punto fijo interior, allí hallamos estabilidad y su control óptimo. En el caso de la Cooperación mutua solamente los puntos fijos límitrofes  $(0,0)$  y  $(1,1)$  representan la estabilidad de nuestro sistema y allí encontramos el control óptimo del sistema, como lo evidenciamos en el caso particular de la explotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo.

Finalmente, de la tragedia de los comunes vemos que se trata de un caso de cooperación mutua, es decir, que los dos jugadores en este caso la CAM y los Explotadores sacan provecho de dicha acción sin consecuencia alguna, siempre para satisfacer los intereses personales de cada uno. Las dinámicas que obtuvimos apuntan a la estabilidad y el control óptimo en nuestro sistema en los puntos fijos límitrofes  $(0,0)$  y  $(1,1)$ . Donde el estado ambiental por debajo de  $(n = 0,5)$  tiende a la estabilidad con la deserción (no cooperación) de la explotación de la arena en un entorno ambiental en agotamiento. Ahora un estado ambiental por encima de  $(n = 0,5)$  tiende a la estabilidad con la cooperación en un estado repleto, manteniéndose el sistema y hallando el punto en donde podemos ver la relación de beneficio/sostenibilidad, beneficio para los explotadores y sostenibilidad del recurso ambiental, que en este caso es la arena.

La dinámica de la **Solución Óptima** en un estado ambiental por encima de  $(n = 0,5)$  es la que se relaciona con la tragedia de los comunes, la sobreexplotación de la arena en la Bocatoma El Guayabo donde se aprecia que a través de los años este recurso ambiental se mantendrá debido a que el recurso natural siempre estará por encima de la mitad  $(n \geq 0,5)$ , para ser más precisos este recurso vive en un constante estado ambiental repleto debido a que el cauce del río las ceibas se ocupa de esta labor y minimizando la acción ejercida con el recurso ambiental ya sea de manera legal o ilegal y allí es donde damos por finalizado el caso de sobreexplotación de la arena en ese punto y vemos un control óptimo de explotación.

## Referencias

- [1] Garrett Hardin, The Tragedy of the Commons. Science 162 (1968): 1243–1248
- [2] Javier Cardozo, CAM, Proyecto Ceibas, obtenido de: <https://www.cam.gov.co/>
- [3] Procesos Ceibas, EPN, obtenido de: <https://www.lasceibas.gov.co/assets/Archivos/documentos-ceibas-pdf>
- [4] Organización de las naciones unidas. La explotación insostenible de arena destruye ríos y mares; (2019), obtenido de: <https://news.un.org/es/story/2019/05/1455611>
- [5] Daniela Gutiérrez. 43 proyectos de explotación minera hay en el huila, diario del huila (2022), obtenido de: <https://diariodelhuila.com/43-proyectos-de-explotacion-minera-hay-en-el-huila/>
- [6] Gérard P. Cachon, Serguei Netessine, Game theory in supply chain analysis. University of Pennsylvania (2004)
- [7] Dennis G. Zill y Michael R. Cullen, Ecuaciones diferenciales Matemáticas avanzadas para ingeniería, vol. 1 Ed. Thomson Paraninfo, (2006) Tercera edición
- [8] Estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales, obtenido de: <https://personal.us.es/niejimjim/tema06.pdf>
- [9] Hofbauer, Josef; Sigmund, Karl. Dinámica evolutiva del juego. Boletín de la American Mathematical Society (2003). obtenido de: [https://hmong.es/wiki/replicator\\_dynamics](https://hmong.es/wiki/replicator_dynamics)
- [10] Juan José Jardón Urrieta. La teoría de juegos evolutivos, naturaleza y racionalidad; (2008), obtenido de: <https://www.usc.es/economet/aeadepdf/aeade117.pdf>
- [11] William Andrés Arévalo Terán. Adaptación de un algoritmo de optimización basado en replicadores dinámicos aplicado al control de iluminación de recintos con presencia de individuos; (2020), obtenido de: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78861>
- [12] Alan Hastings. An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback. University of California (2016)

- [13] Luis Arturo Polanía Quiza. Un enfoque cualitativo a las EDO'S y Teoría Wavelets, Universidad Surcolombiana (2011)
- [14] Datos abiertos sobre la extracción / producción de arena de cantera y grava de cantera, obtenido de: <https://www.datos.gov.co/minas-y-energ-a/extracci-n-producci-n-de-arena-de-cantera-y-grava-/t2am-5hht/data>
- [15] Alex figueroba. Teoría de juegos: ¿en qué consiste y en qué ámbitos se aplica?; (2017), obtenido de: <https://psicologiymente.com/social/teoria-de-juegos>
- [16] José Antonio Ludeña. Juegos evolutivos. economipedia.com (2021)
- [17] Víctor Sotomayor, Ecuaciones diferenciales: la herramienta que todo ingeniero debe poseer, obtenido de: <https://edem.eu/ecuaciones-diferenciales-la-herramienta-que-todo-ingeniero-debe-poseer/>
- [18] Paula Nicole Roldán. Tragedia de los comunes. economipedia.com (2016)
- [19] Diario del huila. Sobreexplotación global de la arena; (2022), obtenido de: <https://diariodelhuila.com/sobreexplotacion-global-de-la-arena/>