



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 19 de Septiembre de 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

DORANY ASCENCIO RAMÍREZ,

con C.C. No. 1005728551,

YINETH MEDINA ARCE,

con C.C. No. 36172761,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado.

Titulado **ESTUDIO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL CONTROL BIOLÓGICO DE PLAGAS EN EL CULTIVO DE YUCA** presentado y aprobado en el año **2022** como requisito para optar al título de **MATEMÁTICA**;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Dorany Ascencio Ramírez
cc.1005728551

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: ESTUDIO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL CONTROL BIOLÓGICO DE PLAGAS EN EL CULTIVO DE YUCA

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ascencio Ramírez	Dorany

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Medina Arce	Yineth

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Medina Arce	Yineth

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MATEMÁTICA

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: MATEMÁTICA APLICADA

CIUDAD: NEIVA (HUILA)

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2022

NÚMERO DE PÁGINAS: 30

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas_x_ Fotografías_x_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros_x_



SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: LATEX

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Sistema de ecuaciones	System of equations	6. _____	_____
2. Puntos de equilibrio	Balance points	7. _____	_____
3. Depredador-Presa	Predator - prey	8. _____	_____
4. Modelos matemáticos	Mathematical models	9. _____	_____
5. Runge – Kutta	Runge–Kutta	10. _____	_____

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Se presenta el estudio de la dinámica de un control biológico de plagas en los cultivos utilizando dos tipos de modelos matemáticos, un modelo continuo y un modelo discreto. Se plantea inicialmente el modelo depredador-presa, definido por un sistema de tres ecuaciones diferenciales y en segundo lugar dos modelos multidimensionales no lineales, huésped – parasitoide: Modelo de Nicholson – Bailey y el modelo binomial negativo (Griffiths – May). Se encuentran los puntos de equilibrio de cada uno de los sistemas y a partir de estos resultados se inicia el proceso de inclusión de control al modelo, que busca optimizar la solución del problema, por medio de simulaciones ejecutadas en MATLAB utilizando el método de Runge – Kutta de cuarto orden. En el marco teórico, se plantean las definiciones básicas necesarias y los teoremas más relevantes en la teoría de control óptimo. \par

También se realizó una aplicación para analizar el estado y nivel de producción de yuca en el departamento de Bolívar; con tres modelos continuos (lineal, exponencial y logístico), el dato de la producción de yuca fue brindada por la Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria AGROSAVIA. \par

Otro aspecto que incluye este estudio, es la tabla de vida de la mosca blanca, uno de los principales depredadores de los cultivos de yuca, con ella se elaboró la respectiva matriz de Leslie, se analizó el comportamiento poblacional de esta especie.



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The study of the dynamics of biological control of pests in crops is presented using two types of mathematical models, a continuous model and a discrete model. Initially, the predator-prey model is proposed, defined by a system of three differential equations and secondly, two non-linear multidimensional models, host - parasitoid: Nicholson - Bailey model and the negative binomial model (Griffiths - May). The equilibrium points of each one of the systems are found and from these results the process of inclusion of control to the model begins, which seeks to optimize the solution of the problem, through simulations executed in MATLAB using the Runge - Kutta method. fourth order. In the theoretical framework, the necessary basic definitions and the most relevant theorems in optimal control theory are presented. \par

An application was also made to analyze the state and level of cassava production in the department of Bolívar; with three continuous models (linear, exponential and logistic), the data on cassava production was provided by the Colombian Agricultural Research Corporation AGROSAVIA. \par

Another aspect included in this study is the life table of the whitefly, one of the main predators of cassava crops, with which the respective Leslie matrix was elaborated, the population behavior of this species was analyzed.



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

Empty box for description of the thesis or degree work.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: Diego Fernando Roldán Jiménez

Firma:

Nombre Jurado: Jasmidt Vera Cuenca



UNIVERSIDAD
SURCOLOMBIANA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA - USCO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA MATEMÁTICA APLICADA

ESTUDIO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL
CONTROL BIOLÓGICO DE PLAGAS EN EL CULTIVO DE
YUCA

Estudiante: Dorany Ascencio Ramírez

Neiva - Huila
2022

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA - USCO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA MATEMÁTICA APLICADA

Estudiante: Dorany Ascencio Ramírez

Asesor: Yineth Medina Arce

ESTUDIO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL
CONTROL BIOLÓGICO DE PLAGAS EN EL CULTIVO DE
YUCA

Trabajo de grado presentado al Programa de pregrado en Matemática Aplicada - Departamento de matemáticas y estadística - Universidad Surcolombiana, como requisito parcial para la obtención del título de Matemático.

Neiva - Huila
2022

Resumen

Se presenta el estudio de la dinámica de un control biológico de plagas en los cultivos utilizando dos tipos de modelos matemáticos, un modelo continuo y un modelo discreto. Se plantea inicialmente el modelo depredador-presa, definido por un sistema de tres ecuaciones diferenciales y en segundo lugar dos modelos multidimensionales no lineales, huésped – parasitoide: Modelo de Nicholson – Bailey y el modelo binomial negativo (Griffiths – May). Se encuentran los puntos de equilibrio de cada uno de los sistemas y a partir de estos resultados se inicia el proceso de inclusión de control al modelo, que busca optimizar la solución del problema, por medio de simulaciones ejecutadas en MATLAB utilizando el método de Runge – Kutta de cuarto orden. En el marco teórico, se plantean las definiciones básicas necesarias y los teoremas más relevantes en la teoría de control óptimo.

También se realizó una aplicación para analizar el estado y nivel de producción de yuca en el departamento de Bolívar; con tres modelos continuos (lineal, exponencial y logístico), el dato de la producción de yuca fue brindada por la Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria AGROSAVIA.

Otro aspecto que incluye este estudio, es la tabla de vida de la mosca blanca, uno de los principales depredadores de los cultivos de yuca, con ella se elaboró la respectiva matriz de Leslie, se analizó el comportamiento poblacional de esta especie.

Palabras claves: Sistema de ecuaciones, puntos de equilibrio, depredador-presa, modelos matemáticos y Runge – Kutta.

Abstract

The study of the dynamics of biological control of pests in crops is presented using two types of mathematical models, a continuous model and a discrete model. Initially, the predator-prey model is proposed, defined by a system of three differential equations and secondly, two non-linear multidimensional models, host - parasitoid: Nicholson - Bailey model and the negative binomial model (Griffiths - May). The equilibrium points of each one of the systems are found and from these results the process of inclusion of control to the model begins, which seeks to optimize the solution of the problem, through simulations executed in MATLAB using the Runge - Kutta method. fourth order. In the theoretical framework, the necessary basic definitions and the most relevant theorems in optimal control theory are presented.

An application was also made to analyze the state and level of cassava production in the department of Bolívar; with three continuous models (linear, exponential and logistic), the data on cassava production was provided by the Colombian Agricultural Research Corporation AGROSAVIA.

Another aspect included in this study is the life table of the whitefly, one of the main predators of cassava crops, with which the respective Leslie matrix was elaborated, the population behavior of this species was analyzed.

Key Words: System of equations, balance points, predator - prey, mathematical models and Runge-Kutta.

Índice general

1. Introducción	4
2. Objetivos	5
2.1. Objetivo general:	5
2.2. Objetivos específicos:	5
3. Metodología	6
4. Resultados	7
4.1. Modelos continuos:	7
4.1.1. Estabilidad local del punto crítico E_c :	9
4.1.2. E_c sea estable	9
4.1.3. Inestabilidad Local del punto crítico E_c :	12
4.1.4. Escenarios de extinción	12
4.2. Modelos multidimensionales no lineales:	16
4.2.1. Modelo de Nicholson – Bailey:	16
4.2.2. Modelo binomial negativo (Griffiths – May):	18
4.3. Tabla de vida de la mosca blanca:	18
4.4. Matriz de Leslie:	18
5. Aplicación	21
5.1. Prueba de hipótesis:	23
6. Discusión	28
7. Agradecimientos	29
8. Conclusiones	30

Capítulo 1

Introducción

Nuestro pueblo colombiano se ha caracterizado por ser un país con suelo fértil gracias a los minerales que contiene; el suelo fértil es un organismo vivo y dinámico que proporciona sostén y nutrientes a las plantas, está compuesto por organismos vivos llamados descomponedores y algunas partículas y minerales como el nitrógeno, el fósforo, el potasio, entre otros. La interacción entre los descomponedores, las partículas minerales y el agua es lo que forma el suelo agrícola, tomado de la referencia [1] lamentablemente la problemática de nuestro entorno se basa en las pérdidas de cultivos debido a que se ven afectados por las plagas y enfermedades transfronterizas de las plantas afectan ocasionando en muchas veces la destrucción total del cultivo, lo que ha llevado a los agricultores usar diferentes estrategias para tratar estas plagas, como los insecticidas, fungicidas, pesticidas, etc., todo depende del conocimiento completo que se tenga sobre la plaga a exterminar. Pero el uso de insecticidas, trae problemas ambientales y problemas de salud, por lo que se deben tomar medidas preventivas, tomado de la referencia [2]. Debido a esta problemática se realizó el estudio dinámico de dos tipos modelos matemáticos aplicados al control biológico de las plagas, un modelo continuo y un modelo discreto. Igualmente se determinó el comportamiento del nivel de producción del cultivo de yuca en el departamento de Bolívar para el periodo 2016-2020, con tres modelos de crecimiento poblacional continuos. Finalmente, Con la tabla de vida y la respectiva matriz de Leslie de la mosca se determinó la prevalencia de forma constante de este depredador en los cultivos de yuca de nuestra región.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo general:

Estudiar la dinámica de poblaciones que se relacionan y que ayudan al control de plagas en el cultivo de yuca.

2.2. Objetivos específicos:

- 2.1. Identificar los modelos matemáticos para las poblaciones que se relacionan y que ayudan al control biológico de plagas.
- 2.2. Determinar los puntos de equilibrio biológicamente relevantes y analizar su estabilidad.
- 2.3. Realizar simulaciones con el método de Runge Kutta de cuarto orden para determinar el número de individuos de cada una de las especies en diferentes instantes de tiempo y a partir de esto determinar cuál de estos modelos es el más estable.
- 2.4. Analizar el comportamiento futuro de cada una de las poblaciones “huésped - parásito”.

Capítulo 3

Metodología

El presente proyecto de investigación comprende los siguientes pasos metodológicos: Es una investigación aplicada teniendo en cuenta que mediante modelos se busca predecir y simular la producción de yuca en el departamento de Bolívar, de igual manera es una investigación exploratoria puesto que se pretende analizar aspectos que han sido poco estudiados, apoyados en la recolección de datos que permitirán solucionar la necesidad investigativa propuesta, igualmente es una investigación cuantitativa a causa de que se utiliza gran cantidad de datos y herramientas estadísticas, matemática y tecnológica y esto gracias a la Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria AGROSAVIA y a los recursos bibliográficos que se encuentran en la WED. Se tomó como población la región Caribe de Colombia y la muestra seleccionada en este proyecto es la producción de yuca en el departamento de Bolívar durante los últimos cinco años (2016-2020). Con el fin de recopilar y medir información y así responder a las cuestiones y necesidades del objetivo del proyecto, los instrumentos y técnicas a utilizar fueron; Focus Group, Observaciones, Revisión de registro, Pruebas y herramientas web.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Modelos continuos:

El siguiente sistema es un modelo ecológico biológico, donde $x(t), y(t), z(t)$, representan la densidad poblacional de la yuca, la plaga y el fungicida respectivamente, por lo tanto, no puede tomar valores negativos, tomado de la referencia [3].

$$\begin{cases} x'(t) = x(1-x) - \frac{c_1xy}{x+y} & , \quad x(0) > 0 \\ y'(t) = \frac{m_1xy}{x+y} - d_1y - \frac{c_2yz}{z+y} & , \quad y(0) > 0 \\ z'(t) = \frac{m_2yz}{z+y} - d_2z & , \quad z(0) > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Y tomando las funciones:

$$F_1(x, y, z) = x(1-x) - \frac{c_1xy}{x+y} \quad (4.2)$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{m_1xy}{x+y} - d_1y - \frac{c_2yz}{z+y} \quad (4.3)$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{m_2yz}{z+y} - d_2z \quad (4.4)$$

Para hallar los puntos de equilibrio se igualan las funciones $x'(t), y'(t), z'(t)$ a cero, y al evaluar el punto de equilibrio en la función se tiene que $F_i(x_c, y_c, z_c) = 0$, es decir que su campo vectorial se anula en ese punto.

De la función (4.4), se obtiene:

$$z_c \left(\frac{m_2y_c}{z_c + y_c} - d_2 \right) = 0$$

Como $z_c > 0$, por tanto:

$$\frac{m_2y_c}{z_c + y_c} - d_2 = 0 \quad (4.5)$$

Despejando z_c :

$$z_c = y_c \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} \right) \quad (4.6)$$

Como se tiene que $y_c, z_c > 0$, entonces:

$$\frac{m_2 - d_2}{d_2} > 0 \implies m_2 > d_2$$

De la misma forma se toma que $F_1(x_c, y_c, z_c) = 0$, entonces:

$$x_c \left((1 - x_c) - \frac{c_1 y_c}{x_c + y_c} \right) = 0$$

Como sabemos que $x_c > 0$ y despejando y_c de forma conveniente, obtenemos que:

$$y_c = \frac{(1 - x_c)x_c}{c_1 - (1 - x_c)} \quad (4.7)$$

De forma similar se procede con $F_2(x_c, y_c, z_c) = 0$, para obtener:

$$y_c = x_c \left(\frac{m_1}{d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2}} - 1 \right) \quad (4.8)$$

Sustituyendo por A el segundo factor de (4.8), entonces:

$$A = \frac{m_1}{d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2}} \quad (4.9)$$

Entonces:

$$y_c = x_c(A - 1) \quad (4.10)$$

Como $x_c, y_c > 0$, entonces:

$$A - 1 > 0 \rightarrow A > 1$$

Igualando la ecuación (4.7) y con (4.9) y despejando x_c , se obtiene:

$$x_c = \frac{1}{A}(A - c_1(A - 1)) \quad (4.11)$$

Como $x_c > 0$ y $A > 1$, entonces:

$$A - c_1(A - 1) > 0 \implies A > c_1(A - 1) > 0 \implies \frac{A}{A - 1} > c_1 > 0$$

Luego existe el punto de equilibrio $E_c = (x_c, y_c, z_c)$, definido de siguiente manera:

$$E_c = \begin{cases} x_c = \frac{1}{A}(A - c_1(A - 1)) \\ y_c = x_c(A - 1) \\ z_c = y_c \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} \right) \end{cases}$$

Tomando como condiciones:

$$\begin{cases} 1. & m_2 > d_2 \\ 2. & A > 1 \\ 3. & 0 < c_1 < \frac{A}{A - 1} \end{cases} \quad (4.12)$$

El punto de equilibrio E_c es único, dado que x_c es un punto fijo, y los valores de y_c y z_c depende de x_c , lo que prueba la unicidad de E_c .

4.1.1. Estabilidad local del punto crítico E_c :

$$J(x, y, z) \Big|_{(x_c, y_c, z_c)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} F_1(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_3(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} F_3(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} F_3(x, y, z) \end{bmatrix} \Big|_{(x_c, y_c, z_c)}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_c \left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2} \right) & -\frac{c_1 x_c^2}{(x_c + y_c)^2} & 0 \\ \frac{m_1 y_c^2}{(x_c + y_c)^2} & y_c \left(\frac{-m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(z_c + y_c)^2} \right) & -\frac{c_2 y_c^2}{(z_c + y_c)^2} \\ 0 & \frac{m_2 z_c^2}{(z_c + y_c)^2} & z_c \left(-\frac{m_2 y_c}{(z_c + y_c)^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

El polinomio característico de J este dado por $P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I)$, es decir:

$$P_J(\lambda) = \begin{bmatrix} j_{1,1} - \lambda & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} - \lambda & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P_J(\lambda) = \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 \quad (4.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= -m_{1,1} - m_{2,2} - m_{3,3} \\ A_2 &= m_{2,2} m_{3,3} + m_{1,1} m_{2,2} + m_{1,1} m_{3,3} - m_{1,2} m_{2,1} - m_{2,3} m_{3,2} \\ A_3 &= m_{1,2} m_{2,1} m_{3,3} + m_{1,1} m_{2,3} m_{3,2} - m_{1,1} m_{2,2} m_{3,3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En el criterio de Routh, es necesario y suficiente que todos los elementos en la primera columna del esquema de Routh tengan el mismo signo. Entonces de $P_M(\lambda)$ tenemos:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & A_2 \\ \lambda^2 & A_1 & A_3 \\ \lambda^1 & \frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} & \\ \lambda^0 & A_3 & \end{array} \quad (4.16)$$

4.1.2. E_c sea estable

Para que E_c sea estable se necesita que todos los signos de la primera columna sean positivos, $A_1 > 0, A_3 > 0$ y

$$\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} > 0 \implies A_1 A_2 > A_3 \implies A_2 > 0$$

En la siguiente proposición, se dan las condiciones suficientes para la estabilidad local de E_c .

Proposición 1:

Si $m_{1,1} < 0$ y $m_{2,2} < 0$ entonces E_c es local y asintóticamente estable.

Proposición 2:

Si $c_1 > 1$ entonces $m_{1,1} < 0$ si y solo si $1 < A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}$

Demostración:

Se toma como valido que $c_1 > 1$ y $m_{1,1} < 0$:

$$\begin{aligned} c_1(A-1) &< A((A-1)(1-c_1)+1) \\ A &< \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se supone valido $c_1 > 1$ y por la condición 3 de la ecuación (4.12) se toma que:

$$\begin{aligned} 1 &< A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \\ c_1 > 1 \wedge 1 &< A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} A^2 &< \frac{c_1}{c_1-1} \\ c_1(A-1) &< A^2 \left[\frac{1}{A}(A - c_1(A-1)) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Reemplazando la ecuación (4.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1(A-1) &< A^2 x_c \\ -1 + \frac{c_1 x_c (A-1)}{x_c^2 A^2} &< 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Y como $x_c > 0$, entonces se cumple que:

$$m_{11} = x_c \left(-1 + \frac{c_1 x_c (A-1)}{x_c^2 A^2} \right) < 0$$

Y así queda demostrado la proposición.

Proposición 3:

Sí $0 < c_1 \leq 1$ entonces $m_{1,1} < 0$.

Demostración:

$$A^2 - 1 < A^2 \implies 1 < \frac{A^2}{A^2 - 1}$$

Como $0 < c_1 \leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \leq 1 &< \frac{A^2}{A^2-1} \\ c_1(A-c_1) &< A^2 \left[\frac{1}{A}(A - c_1 A + c_1) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Reemplazando (4.11) en la ecuación anterior, tenemos:

$$-1 + \frac{c_1(A - c_1)x_c}{A^2x_c^2} < 0$$

Y como $x_c > 0$, entonces se cumple:

$$m_{1,1} = x_c \left(-1 + \frac{c_1(A - c_1)x_c}{A^2x_c^2} \right) < 0$$

Y finalmente así queda demostrada nuestra proposición.

Ahora veremos las condiciones para que $m_{2,2} < 0$, tenemos:

$$m_{2,2} = y_c \left(-\frac{m_1x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2z_c}{(y_c + z_c)^2} \right)$$

Y como $y_c > 0$ y queremos que $m_{2,2} < 0$, entonces se debe cumplir:

$$\frac{c_2z_c}{(y_c + z_c)^2} < \frac{m_1x_c}{(x_c + y_c)^2}$$

Reemplazando la ecuación (4.6), tenemos:

$$\frac{c_2 \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c \right)}{\left(y_c + \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c \right) \right)^2} < \frac{m_1x_c}{(x_c + y_c)^2}$$

Reemplazando la ecuación (4.7), tenemos:

$$\frac{\frac{c_2(m_2 - d_2)}{d_2}}{(A - 1)x_c \left(1 + \frac{m_2 - d_2}{d_2} \right)^2} < \frac{m_1x_c}{(x_c + (A - 1)x_c)^2}$$

Es decir, se cumple:

$$\frac{c_2 \left(\frac{m_2}{d_2} - 1 \right)}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} < \frac{m_1(A - 1)}{A^2} \quad (4.21)$$

Reemplazando en (4.9), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{m_1(A - 1)}{A^2} &= m_1 \left[\frac{\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1}{m_1} - \left(\frac{\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1}{m_1} \right)^2 \right] \\ \frac{m_1(A - 1)}{A^2} &= \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 - \frac{1}{m_1} \left(\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Entonces por la relación (4.21), tenemos:

$$\frac{c_2 \left(\frac{m_2}{d_2} - 1 \right)}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} < \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 - \frac{1}{m_1} \left(\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 \right)^2$$

Consideremos la función $g : R \rightarrow R$, definida por:

$$g(t) = -\frac{1}{m_1} \left(\frac{t(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 \right)^2 + \frac{t(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 - \frac{t \left(\frac{m_2}{d_2} - 1 \right)}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} \quad (4.23)$$

Tenemos que:

$$g(c_2) = -\frac{1}{m_1} \left(\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 \right)^2 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 - \frac{c_2 \left(\frac{m_2}{d_2} - 1 \right)}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} > 0$$

En resumen, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4:

Para $g : R \rightarrow R$ definida por (4.23), se cumple:

$$m_{2,2} < 0 \text{ sí y solo si } 0 < g(c_2)$$

$$g(0) = -\frac{d_1^2}{m_1} + d_1 = \frac{d_1(m_1 - d_1)}{m_1}$$

4.1.3. Inestabilidad Local del punto crítico E_c :

Proposición 5:

1. $0 < m_2 - d_2 < m_1 - d_1$
2. $\frac{m_2}{d_2} < (m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)$

Entonces E_c es inestable cuando:

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}$$

Y c_2 está próximo al valor de $\frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}$.

4.1.4. Escenarios de extinción

Estudio del comportamiento asintótico de la solución del sistema (4.1) alrededor de $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_1 = (1, 0, 0)$. Las condiciones que llevan a la extinción de ciertas especies:

1. La extinción de x y en consecuencia la extinción de y e z (Extinción total E_0)
2. La extinción de y , en consecuencia, la extinción de z , pero no de x (estado libre de depredadores E_1)
3. La extinción de z mas no la de x e y . Todo esto ocurre cuando el punto de equilibrio E_c , interior a Ω , no existe.

Una de las características de las cadenas alimenticias simples es el efecto dominó, “Si se extingue algún nivel trófico en nuestra cadena alimenticia, entonces también lo harán los niveles tróficos superiores”.

Proposición 6 (Efecto dominó):

Sean x , y e z las soluciones del sistema (4.1). Entonces:

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Otros casos de extinción.

a) Las condiciones que hacen que el depredador intermedio y superior se extingan:

Lema 1:

Si $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$ donde A esta definido en (4.9). Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

El siguiente teorema sugiere que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo baja (caracterizando por $c_1 < 1$) entonces las presas persistirán.

Teorema 1:

Sea $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$. Tal que si $c_1 < 1$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, 0)$$

Teorema que da las condiciones para la extinción total de las tres especies. Indica que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo alta y agresiva (caracterizado por valores grandes de c_1) y hay poca reposición de las presas para saciar dichas necesidades, entonces las tres especies se extinguirán.

Teorema 2:

Sea $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$. Tal que si:

$$c_1 > 1 + d_1 + c_2 \text{ y } \delta := \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} > \frac{x(0)}{y(0)}$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$$

Si $E_0 = (0, 0, 0)$ fuese un atractor global, entonces el sistema (4.1) estaría experimentando una extinción total. Condiciones bajo las cuales el punto crítico E_0 es un atractor global.

Teorema 3:

Si $c_1 > 1$ y $m_1 \leq \frac{c_1}{c_1 - 1}(d_1 + c_2)$, entonces $E_0 = (0, 0, 0)$ es atractor global. Esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$$

Los (4.1.4) y (4.1.4), probaremos un resultado, un tanto obvio en la extinción del depredador superior. Digamos, si la tasa de muerte del depredador superior no es menor a su tasa máxima de nacidos, entonces se extinguirá.

Lema 2:

Si $m_2 \leq d_2$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Lema 3:

Si $m_2 > d_2$, $A > 1$ y $c_1 \geq \frac{A}{A-1}$, entonces: $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$

Con el siguiente teorema se puede asumir las condiciones que causan la extinción del depredador superior.

Teorema 4:

Si el punto de equilibrio interior E_c no existe, entonces el depredador superior del sistema (4.1) se extinguirá. Específicamente si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $m_2 \leq d_2$.
2. $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$.
3. $m_2 > d_2$, $A > 1$ y $c_1 \geq \frac{A}{A-1}$.

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

En Gráfica de m_1 vs c_1 , se muestra las diferentes regiones en las cuales ocurren los escenarios de extinción (cuando no existe E_c) así como la coexistencia de las tras especies (cuando existe E_c). En la (4.1), se distingue principalmente tres regiones:

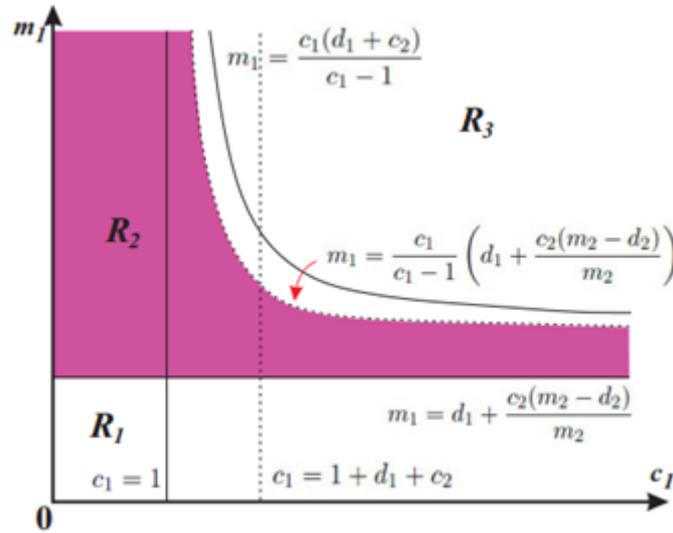


Figura 4.1: Rango de los parámetros para los escenarios de extinción

- $R_1 = \left\{ (c_1, m_1) \mid c_1 \in \langle 0, 1 \rangle, m_1 \leq d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} \right\}$
- $R_2 = \left\{ (c_1, m_1) \mid d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} < m_1 < \left(\frac{c_1}{c_1 - 1} \right) \left(d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} \right) \right\}$.
- $R_3 = \left\{ (c_1, m_1) \mid c_1 > 1, m_1 \geq \frac{c_1(d_1 + c_2)}{c_1 - 1} \right\}$.

Donde:

- R_1 : Es la región en la cual el $(1, 0, 0)$ atrae todas las soluciones del sistema (4.1).
- R_2 : Es la región en la cual E_c existe.
- R_3 : Es la región en la cual $(0, 0, 0)$ atrae a todas las soluciones posibles del sistema (4.1).

Predicciones del comportamiento del sistema (4.1), Con el método de Runge-Kutta de orden cuatro.

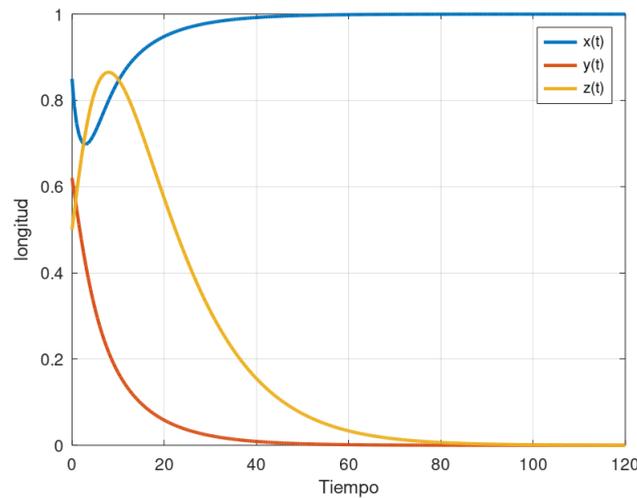


Figura 4.2: Fuente propia, prueba del teorema 1.

En la (4.2) se verifica las hipótesis del (4.1.4), por lo tanto, se extingue el depredador intermedio y superior, lo que implica que el control biológico fue efectivo para los parámetros de $c_1 = 0,7, c_2 = 0,2, d_1 = 0,3, d_2 = 0,5, m_1 = 0,4, m_2 = 0,8$ y una población inicial de $(x_0, y_0, z_0) = (0,85, 0,62, 0,5)$.

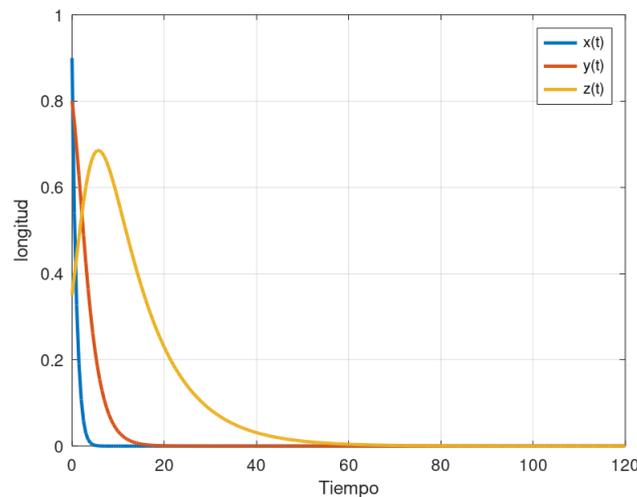


Figura 4.3: Fuente propia, prueba del teorema 2

En la (4.3) se verifica las hipótesis del (4.1.4), por lo tanto, el depredador intermedio acaba a todo el cultivo, lo que implica que el control biológico no fue efectivo, para los parámetros de $c_1 = 1,8, c_2 = 0,4, d_1 = 0,4, d_2 = 0,5, m_1 = 0,4, m_2 = 0,85$ y una población inicial de $(x_0, y_0, z_0) = (0,9, 0,8, 0,35)$.

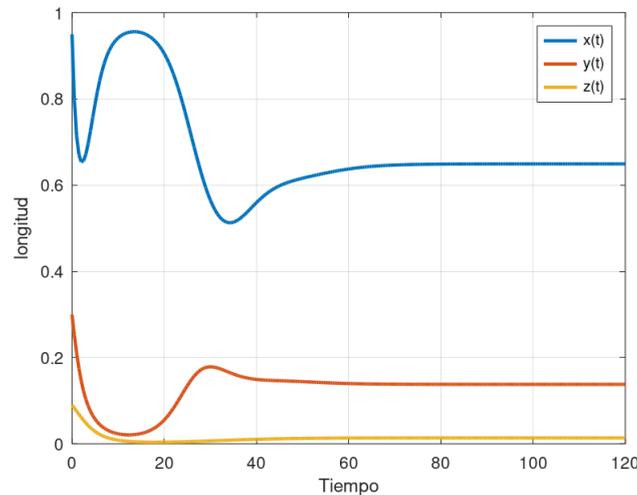


Figura 4.4: Fuente propia, Estabilidad asintótica en E_c

En la (4.4), se puede observar que las poblaciones se estabilizan con el paso del tiempo E_c , lo que significa que las tres especies coexisten, con los parámetros de $c_1 = 2,5, c_2 = 1,7, d_1 = 1,3, d_2 = 1,3, m_1 = 1,5, m_2 = 1,5$ y una población inicial de $(x_0, y_0, z_0) = (0,95, 0,3, 0,05)$.

4.2. Modelos multidimensionales no lineales:

Tomado de la referencia [4]

4.2.1. Modelo de Nicholson – Bailey:

Quienes desarrollaron el modelo matemático discreto huésped - parasitoide, dentro de la variedad de insectos parásitos que ayudan al control de las plagas en los cultivos se encuentran las avispas del género *Trichogramma*, que depositan los huevos en el interior de los huevos del huésped. Dónde:

- x_t : Representa el número de huéspedes en el instante de tiempo t , con constante de crecimiento C .
- y_t : Representa el número de parasitoides, en el instante de tiempo t .

Donde la población de huéspedes:

$$x_t = Cx_{t-1}$$

- Si $C < 1$, la población de huéspedes se extingue de manera natural.
- Si $C > 1$, la población de huésped crece de manera exponencial.

Para poder controlar esta nueva plaga se introduce el parasitoide. Teniendo en cuenta la natalidad de los huéspedes al aniquilar sus huevos, se propuso esta nueva ecuación:

$$x_t = Cx_{t-1}e^{-ay_{t-1}} \quad (4.24)$$

Donde:

- α : Mide la eficiencia del parasitoide. $y_{t-1} > 0$, implica que $e^{-ay_{t-1}}$ toma valores entre 0 y 1.
- $e^{-ay_{t-1}}$: Representa la fracción de huéspedes no parasitados.
- $1 - e^{-ay_{t-1}}$: Representa la fracción de huéspedes parasitados en dicho instante de tiempo.

La ecuación para la población de parasitoides:

$$y_t = Sx_{t-1}(1 - e^{-ay_{t-1}}) \quad (4.25)$$

Donde S es el promedio de huevos viables para los parasitoides por cada huésped infectado.

El sistema de ecuaciones recursivas del modelo:

$$\begin{cases} x_t = Rx_{t-1}e^{-ay_{t-1}} \\ y_t = Sx_{t-1}(1 - e^{-ay_{t-1}}) \end{cases} \quad \forall k > 0 \quad (4.26)$$

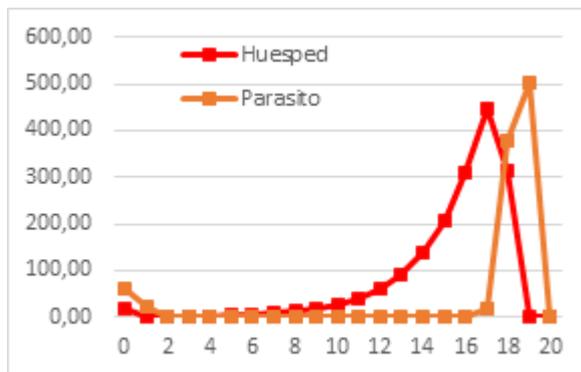
El modelo es inestable, a pequeños cambios en las condiciones iniciales se producen en grandes diferencias de comportamiento.

Los puntos de equilibrio del sistema son:

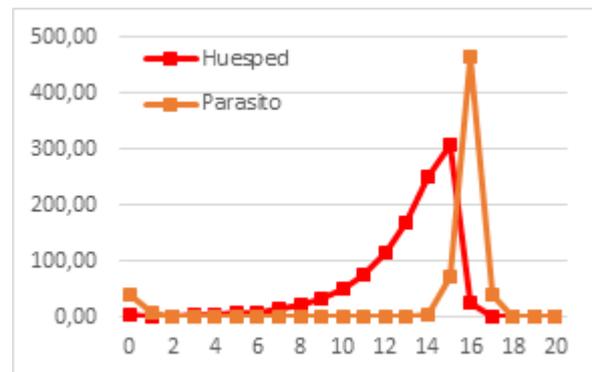
	Punto de equilibrio	Estabilidad
P_1	(0, 0)	Inestable
P_2	$\left(\frac{C \ln C}{aS(C-1)}, \frac{\ln C}{a}\right)$	Estable

Tabla 4.1: Estabilidad del modelo de Nicholson - Bailey

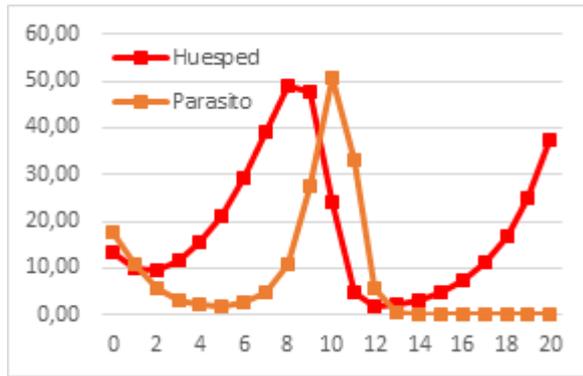
En las siguientes gráficas se presentan distintas proyecciones para el modelo de Nicholson - Bailey, para los valores de los parámetros $C = 1,5, S = 1,6, a = 0,04$ con poblaciones iniciales diferentes.



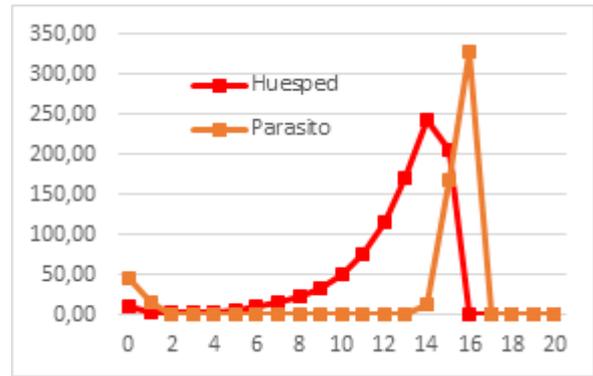
$$(x_0, y_0) = (50, 38)$$



$$(x_0, y_0) = (28, 50)$$



$$(x_0, y_0) = (20, 20)$$



$$(x_0, y_0) = (36, 40)$$

4.2.2. Modelo binomial negativo (Griffiths – May):

Tomado de la referencia [4].

Es una modificación del modelo de Nicholson-Bailey, con él se busca la estabilidad a largo plazo del modelo, con las mismas condiciones anteriores. Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{cases} x_t = Cx_{t-1} \left(1 + \frac{ay_{t-1}}{m}\right)^{-m} \\ y_t = Sx_{t-1} \left(1 - \left(1 + \frac{ay_{t-1}}{m}\right)^{-m}\right) \end{cases} \quad \forall k > 0 \quad (4.27)$$

La diferencia con el modelo anterior está en que se ha sustituido el término $e^{-ay_{t-1}}$ por:

$$\left(1 + \frac{ay_{t-1}}{m}\right)^{-m} \quad \forall m > 0$$

Con lo que representamos la fracción de huéspedes no parasitados. Los parámetros C , S y a siguen siendo los mismos que en el modelo de Nicholson-Bailey.

4.3. Tabla de vida de la mosca blanca:

Tomado de la referencia [5].

x	$s(x)$	$b(x)$	$l(x) = \frac{s(x)}{s(0)}$	$b(x) = \frac{l(x)}{l(x-1)}$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$	$a_i = b(x) \cdot b_i$
0	1000	0	1	0	0	0	0
1	252	21,87	0,252	0,25	5,51	5,51	5,51
2	215	18,74	0,215	0,85	4,03	8,06	15,99
3	166	20,96	0,166	0,77	3,48	10,44	16,18
4	135	23,78	0,135	0,81	3,21	12,84	19,34
5	47	67,45	0,047	0,35	3,17	15,85	23,48

Tabla 4.2: Tabla de vida de la mosca blanca

4.4. Matriz de Leslie:

De la población de mosca blanca está estructurado por edades, de modo que las hembras se clasificaron en seis clases por edades, consideró que todas las clases la misma amplitud,

Tomado de la referencia [4].

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 5,51 & 15,99 & 16,18 & 19,34 & 23,48 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0 \end{pmatrix}$$

Con Matlab, se obtuvo los valores propios y los respectivos vectores propios de la matriz de Leslie:

- Valores propios:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,0207 \\ \lambda_2 &= -0,7837 + 0,8382i \\ \lambda_3 &= -0,7837 - 0,8382i \\ \lambda_4 &= 0,0515 + 0,8563i \\ \lambda_5 &= 0,0515 - 0,8563i \\ \lambda_6 &= -0,5562 \end{aligned}$$

- Vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0,9909 \\ -0,1226 \\ -0,0516 \\ -0,0196 \\ -0,0079 \\ -0,0014 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0,9571 \\ 0,1424 + 0,1523i \\ 0,0104 - 0,1541i \\ -0,0803 + 0,0656i \\ 0,0725 + 0,0098i \\ -0,0129 - 0,0182i \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -0,9571 \\ 0,1424 - 0,1523i \\ 0,0104 + 0,1541i \\ -0,0803 - 0,0665i \\ 0,0725 - 0,0098i \\ -0,0129 + 0,0182i \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0,8753 \\ 0,0153 - 0,2546i \\ -0,2509 - 0,0303i \\ -0,0407 + 0,2232i \\ 0,2080 + 0,051i \\ 0,0259 - 0,0835i \end{pmatrix}$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 0,8753 \\ 0,0153 + 0,2546i \\ -0,2509 + 0,0303i \\ -0,0407 - 0,2232i \\ 0,2080 - 0,051i \\ 0,0259 + 0,0835i \end{pmatrix} \quad v_6 = \begin{pmatrix} -0,4363 \\ 0,1961 \\ -0,2997 \\ 0,4148 \\ -0,604 \\ 0,3801 \end{pmatrix}$$

Como $|\lambda_1| = 2,0207 > |\lambda_i|$ con $i = 2, 3, 4, 5$ y 6 , el valor propio dominante es λ_1 y el

vector propio asociado al λ_1 es $v_1 = \begin{pmatrix} -0,9909 \\ -0,1226 \\ -0,0516 \\ -0,0196 \\ -0,0079 \\ -0,0014 \end{pmatrix}$.

- Cálculo de la Tasa neta de Reproducción: Número de individuos que por término medio tiene una hembra durante toda su esperanza de vida:

$$R = \sum_{x=0}^5 l(x)b(x) = 19,41 > 1$$

Luego, la población crece de manera exponencial.

- Tiempo de generación: Edad media de todas las hijas de todos los individuos producidos en años:

$$G = \frac{\sum_{x=0}^5 (x \cdot l(x)b(x))}{\sum_{x=0}^5 l(x)b(x)} = \frac{52,7}{19,41} = 2,71$$

- Tasa de reproducción: número de Individuos por año:

$$r = \frac{\ln(R)}{G} = \frac{\ln(19,41)}{2,71} = 1,09$$

Como $\lambda_1 > 1$, entonces se puede concluir:

“La población de la mosca blanca nunca va a desaparecer, continuara afectando la producción de la yuca en el departamento del Bolívar”. El crecimiento de la población a futuro es de un 111,2%.

Capítulo 5

Aplicación

La Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria AGROSAVIA, nos facilitó la base de datos de la producción del cultivo de yuca en el departamento del Bolívar. El cultivo de yuca es el quinto bien agrícola que más se produce en el país, después de la caña de panela, el plátano, el arroz y la papa. En el país se producen diferentes variedades de yuca, sin embargo, la producción comercial se divide en dos grandes segmentos, yuca dulce dirigida principalmente para el consumo del ser humano y yuca amarga dirigida a los segmentos industriales de transformación en harinas y almidones.

En Colombia se cultiva yuca en los 32 departamentos, para nuestro estudio se utilizó la producción de yuca en el departamento del Bolívar comprendida en los años 2016 al año 2020.

AÑO	TIEMPO (t)	PRODUCCIÓN P(t)
2016	0	358855
2017	1	343623
2018	2	341576
2019	3	411735
2020	4	421440

Tabla 5.1: Producción de yuca (ton) en el departamento del Bolívar durante 5 años (2016 – 2020)

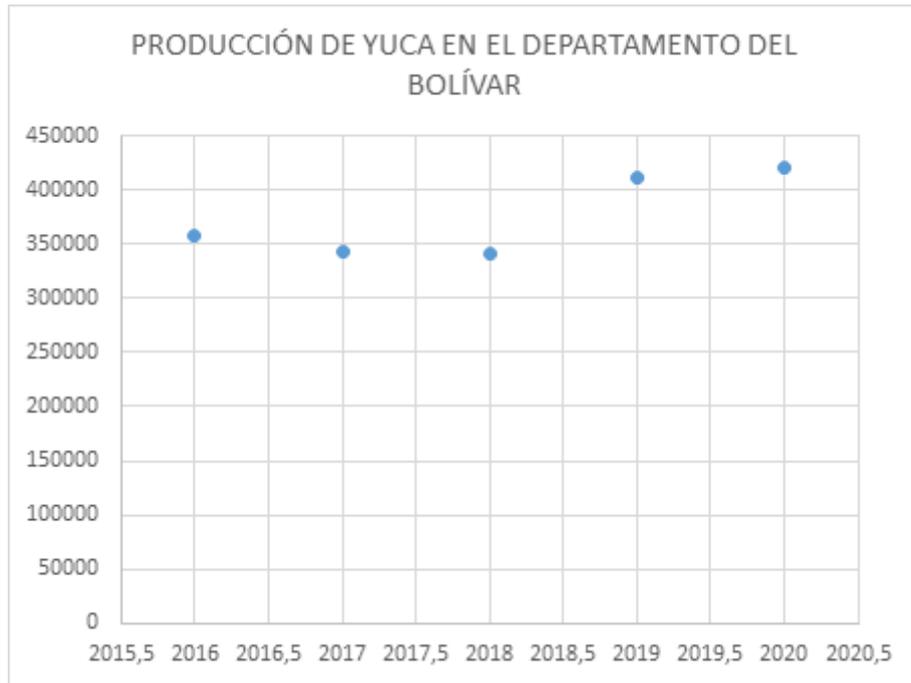


Figura 5.1: Representación gráfica de la producción de yuca (ton) en el departamento de Bolívar durante 5 años (2016-2020)

El gráfico nos permite ver el patrón de comportamiento de los datos, que describen la curva que podría ser de tipo lineal, exponencial o logístico.

La siguiente tabla muestra el valor de cada uno de los parámetros para cada uno de los modelos ajustados para llevar a cabo el análisis de la producción de yuca en el departamento del Bolívar comprendida en el periodo de tiempo 2016 - 2020.

Modelo Lineal	$P(t) = Ax + B$	Parámetros	R^2	A	B
		Estimaciones	0,6367	19328	336789
Modelo Exponencial	$P(t) = P_0 e^{rt}$	Parámetros	P_0	r	
		Estimaciones	358829	0,0502	
Modelo Logístico	$P(t) = \frac{K}{e^{-rt} + 1}$	Parámetros	K	r	c
		Estimaciones	421988	- 1,203	- 0,5941

Tabla 5.2: Valores de las estimaciones de los parámetros de cada modelo de crecimiento ajustados a los datos de producción de yuca en el departamento de Bolívar en el periodo comprendido en los años 2016-2020.

La muestra de producción de yuca en el departamento del Bolívar es pequeña; en el periodo comprendido 2016 al año 2020, se utiliza la t-student con un nivel de confianza del 95 % para verificar la producción de yuca en los últimos 5 años.

$$IC = \left[\bar{y} - t \left(n - 1, \frac{\infty}{2} \right) * ee(\bar{y}) \leq \mu \leq \bar{y} + t \left(n - 1, \frac{\infty}{2} \right) * ee(\bar{y}) \right]$$

$$IC = \left[375446 - t \left(4, \frac{0,05}{2} \right) * 17128 \leq \mu \leq 375446 + t \left(4, \frac{0,05}{2} \right) * 17128 \right]$$

$$IC = [279570 \leq \mu \leq 471322]$$

Con una certeza del 95 %, se puede inferir que la producción de yuca en el departamento de Bolívar, para el periodo 2016 - 2020 estuvo comprendida entre 279570 Ton $\leq \mu \leq$ 471322 Ton

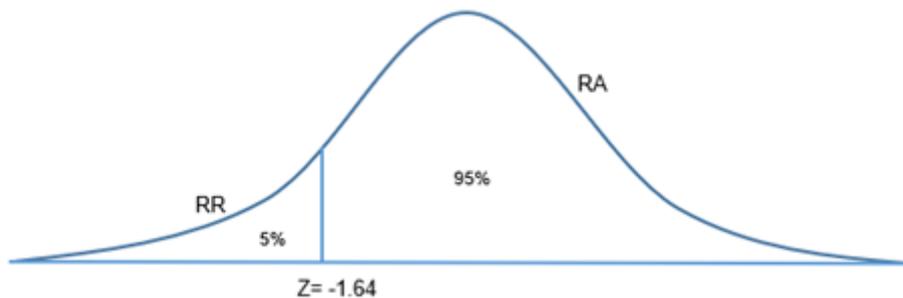
5.1. Prueba de hipótesis:

Dentro de la inferencia estadística, una prueba de hipótesis es un procedimiento para juzgar si una propiedad que se supone en una población estadística es compatible con lo observado en una muestra de dicha población, por ende, se hace un planteamiento de la hipótesis nula y la hipótesis alterna para cada uno de los parámetros de los modelos utilizados en este proyecto para luego lograr determinar la zona de aceptación o rechazo de la hipótesis nula, para todos los parámetros tenemos en cuenta lo siguiente:

Nivel de significancia:

$\alpha = 0,05$ en su forma 5% depende del nivel de confianza del 95%

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases}$$



■ Lineal:

Para el parámetro $A = 19328$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 19328 \\ H_1 : \mu < 19328 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 26,056 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

Para el parámetro $B = 336789$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 336789 \\ H_1 : \mu < 336789 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 2,828 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

Para el parámetro $R^2 = 0,6367$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 0,6367 \\ H_1 : \mu < 0,6367 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 27,471 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

■ Exponencial:

Para el parámetro $P_0 = 358829$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 358829 \\ H_1 : \mu < 358829 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 2,75 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

Para el parámetro $r = 0,0502$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 0,0502 \\ H_1 : \mu < 0,0502 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 28,19 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

■ **Logístico:**

Para el parámetro $K = 421988$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq 421988 \\ H_1 : \mu < 421988 \end{cases}$$

El valor obtenido fue $-1,726$ que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

Para el parámetro $r = -1,203$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq -1,203 \\ H_1 : \mu < -1,203 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 13,56 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

Para el parámetro $c = -0,5941$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu \\ H_1 : \mu < \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu \geq -0,5941 \\ H_1 : \mu < -0,5941 \end{cases}$$

El valor obtenido fue 13,5683 que se encuentra dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula.

La (5.3), muestra la Prueba de Hipótesis para cada uno de los parámetros obtenidos en los modelos de crecimiento, donde H_0 representa la aceptación de la hipótesis nula y H_1 representa el rechazo de la hipótesis nula.

MODELOS	PARÁMETROS	PRUEBA DE HIPÓTESIS
LINEAL	$A = 19328$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
	$B = 336789$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
	$R^2 = 0,6367$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
EXPONENCIAL	$P_0 = 358829$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
	$r = 0,0502$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
LOGÍSTICO	$K = 421988$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
	$r = -1,203$	Aceptación de la hipótesis nula H_0
	$c = -0,5941$	Aceptación de la hipótesis nula H_0

Tabla 5.3: Resultados de la Prueba de Hipótesis para los parámetros obtenidos en el modelo lineal, exponencial y logístico de la producción de yuca en el departamento de Bolívar comprendida en los años 2016 - 2020.

En la siguiente (5.4), podemos ver los comparativos entre la producción de yuca real y la producción de yuca estimadas con el modelo de regresión lineal simple, el modelo exponencial y el modelo Logístico. Se aprecia que para todos los casos los datos se ajustan a los obtenidos en la producción de yuca existente durante el periodo de tiempo 2016 a 2020.

AÑO	TIEMPO	PRODUCCIÓN	LINEAL	EXPONENCIAL	LOGÍSTICO
2016	0	358855	336789	358829	271889
2017	1	343623	356117	377302	361979
2018	2	341576	375445	396726	401976
2019	3	411735	394773	417150	415772
2020	4	421440	414101	438625	420102

Tabla 5.4: Producción de yuca – Modelo de regresión lineal, exponencial, logístico.

Finalmente, veamos el gráfico comparativo entre los datos reales de la producción de yuca en el departamento de Bolívar y los datos teóricos brindados por el modelo de regresión lineal, modelo exponencial y modelo Logístico:

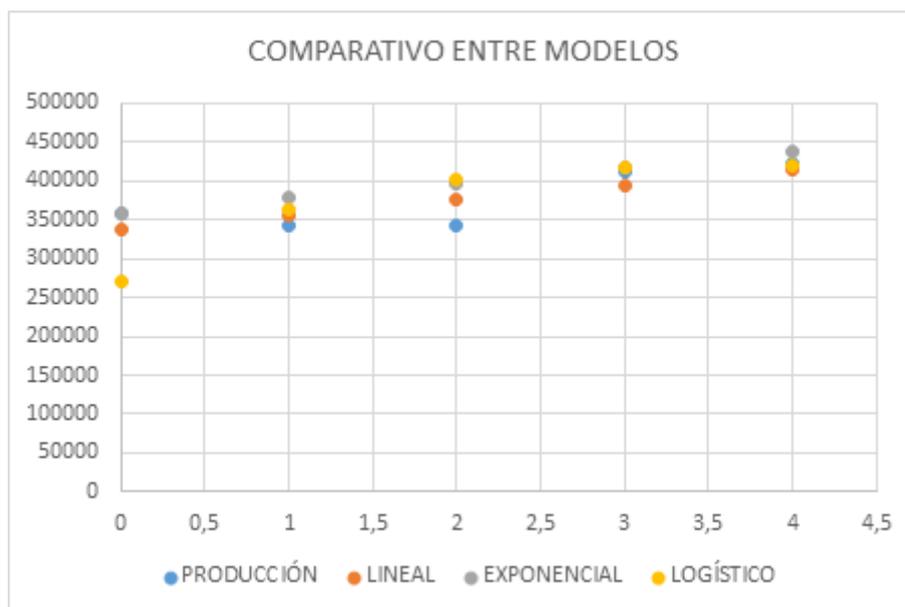


Figura 5.2: Comparativo entre la producción de yuca en el departamento de Bolívar, el modelo de regresión lineal, exponencial y Logístico durante los años 2016-2020.

Cálculo de los residuales para cada uno de los modelos de la producción estimada del cultivo de yuca comprendida en los años 2016-2020.

	PRODUCCIÓN REAL	PRODUCCIÓN ESTIMADA		
TIEMPO (t)	PRODUCCIÓN P(t)	LINEAL \widehat{L}_{rl}	EXPONENCIAL L_E	LOGÍSTICO \widehat{L}_l
0	358855	336789	358829	271889
1	343623	356117	377302	361979
2	341576	375445	396726	401976
3	411735	394773	417150	415772
4	421440	414101	438625	420102

Tabla 5.5: Producción real de yuca y producción estimada de yuca con cada uno de los modelos en el departamento del Bolívar durante los años 2016 a 2020.

	PRODUCCIÓN REAL	RESIDUALES		
TIEMPO (t)	PRODUCCIÓN P(t)	$P(t) - \widehat{L}_{rl}$	$P(t) - L_E$	$P(t) - \widehat{L}_l$
0	358855	22066	26	86966
1	343623	-12494	-33679	-18356
2	341576	-33869	-55150	-60400
3	411735	16962	-5415	-4037
4	421440	7339	-17185	1338

Tabla 5.6: Residuales para cada uno de los modelos.



Figura 5.3: Gráfica que muestra el valor de los residuales del modelo lineal, exponencial y logístico respecto al tiempo

Cálculo de la desviación estándar residual, y de los residuales estandarizados:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
LINEAL	EXPONENCIAL	LOGÍSTICO
23085	22463	53759

Tabla 5.7: Cálculo de la desviación estándar para los residuales encontrados en cada uno de los modelos aplicados en la producción de yuca en el departamento de Bolívar durante los años comprendidos 2016 - 2020.

RESIDUALES			RESIDUALES ESTANDARIZADOS		
LINEAL	EXPONENCIAL	LOGÍSTICO	LINEAL	EXPONENCIAL	LOGÍSTICO
22066	26	86966	0,956	0,001	1,618
-12494	-33679	-18356	-0,541	-1,499	-0,341
-33869	-55150	-60400	-1,467	-2,455	-1,124
16962	1632	-4037	0,735	0,241	-0,075
7339	-17185	1338	0,318	-0,765	0,025

Tabla 5.8: Cálculo de los residuales estandarizados para cada uno de los modelos aplicados en la producción de yuca en el departamento de Bolívar durante los años comprendidos 2016-2020.

En el modelo exponencial, hay un valor de los residuales estandarizados que está entre $R_S < -2$, lo que indica que la producción estimada del cultivo de yuca comprendida en los años 2016 - 2020 en el departamento de Bolívar es atípica.

Capítulo 6

Discusión

En este proyecto se investigó cómo son las relaciones entre huéspedes y parásitos y entre presas y predadores que tiene como finalidad observar el comportamiento de la producción de yuca a largo plazo con diferentes modelos matemáticos, para esto fue necesario tener en cuenta herramientas estadísticas (inferencia estadística; prueba de hipótesis e intervalos de confianza) para cada uno de los parámetros utilizados en cada uno de los modelos y de esta manera tener mayor confiabilidad (95 %) sobre lo estudiado.

Los resultados tienen un nivel de confiabilidad alto (respaldaron la hipótesis) debido a que se utilizó valores reales de la producción de yuca en la región del Caribe (Bolívar), sin embargo, es importante analizar más plagas que afectarían en un futuro la producción de yuca como lo es el gusano de hoja, el Mildiu, entre otras, para observar y analizar qué periodo de vida que tienen apoyados de la matriz de Leslie, y así mismo realizar simulaciones para determinar el número de individuos de cada una de las especies en diferentes instantes. Es de gran importancia estudiar lo que brinda la región del Caribe (Bolívar) esto traerá beneficios para la población colombiana y para cada uno de los agricultores que día tras día se esfuerzan por mejorar la seguridad alimentaria.

Capítulo 7

Agradecimientos

En la realización y ejecución de este proyecto participó la corporación colombiana de investigación agropecuaria AGROSAVIA quien nos facilitó la base de datos de la producción del cultivo de yuca en el departamento de Bolívar durante los años 2016 – 2020, agradecemos su valiosa colaboración.

Capítulo 8

Conclusiones

- De acuerdo con los resultados se concluye que nuestro modelo propuesto permite realizar un control biológico que sirve para exterminar cualquier tipo de plaga que afecte a cualquier cultivo, teniendo como resultado una población que sobrevive a la propagación de la misma y así minimizar el impacto al medio ambiente.
- Se puede concluir que el modelo que mejor se ajusta en la producción de yuca en el departamento de Bolívar es el modelo logístico debido a que se tienen en cuenta más parámetros a la hora del estudio de ella y tiene un sentido más realista.
- Si no se controla a tiempo la plaga (Mosca blanca), esto traerá como consecuencia la extinción del cultivo en muy corto tiempo, debido al crecimiento exponencial que posee dicha plaga.
- Como resultado obtenemos que las principales formas de controlar la plaga (Mosca blanca), es la avispa del género *Trichogramma*, dado que evita que se siga reproduciendo.

Bibliografía

- [1] Saber Noticias. «¿Que es un suelo fértil?» En: (2016).
- [2] Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura plagas y enfermedades de las plantas. «Roma Italia: La FAO en situaciones de emergencias». En: ().
- [3] JR Pérez. «Dinámica del Control Biológico Basado en un Modelo de Cadena Alimenticia Con Tres Niveles Tróficos». Tesis doct. Tesis de licenciatura, UNMSM, Lima Perú, 2014.
- [4] Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico Universidad de Sevilla. «Apuntes de la asignatura». En: (2019).
- [5] JAVIER GARCIA GONZALEZ, EDGAR RICARDO BENITEZ S y ARISTOBULO LOPEZ-AVILA. «Life table of *Delphastus pusillus* (Coleoptera: Coccinellidae) on the whitefly *Trialeurodes vaporariorum* (Hemiptera: Aleyrodidae)». En: *Revista Colombiana de Entomología* 31.2 (2005), págs. 155-160.