



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 01 de noviembre del 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

SONIA LORENA YUSUNGUAIRA PULIDO, con C.C. No. **1.075.319.179**, Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado **ENSAYO PRELIMINAR DE LA DINÁMICA DE CRECIMIENTO DEL CAPAZ (P. GROSSKOPFII) EN SU FASE DE ALEVINO EN CAUITIVERIO**, presentado y aprobado en el año **2023** como requisito para optar al título de **MATEMÁTICA**;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

Vigilada Mineducación



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: *ENSAYO PRELIMINAR DE LA DINÁMICA DE CRECIMIENTO DEL CAPAZ (P. GROSSKOPFII) EN SU FASE DE ALEVINO EN CAUITIVERIO*

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

YUSUNGUAIRA PULIDO

SONIA LORENA

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

MEDINA ARCE

YINETH

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

VERA CUENCA

JASMIDT

MONTEALEGRE CARDENAS

MAURO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MATEMÁTICA

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: PROGRAMA MATEMÁTICA APLICADA

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 73

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas___ Fotografías_X_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X_ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros_X_



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: MINITAB

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Modelo Matemático	Mathematical model
2. Alevino	Alevín
3. Crecimiento	Growth
4. P. Grosskopffi	P. Grosskopffi

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El objetivo de este estudio fue evaluar la precisión de cuatro modelos matemáticos (Malthus, Logístico, Gompertz y Von Bertalanffy) para describir la curva de crecimiento del capaz (*Pimelodus grosskopffii*) en su fase de alevino. Los alevinos provenían de un desove obtenido por reproducción artificial en la Estación Experimental de Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana. Con este fin, se almacenaron en promedio 27 alevinos en frascos de muestras con formol, con un peso promedio inicial de 3,07 g en un tanque con capacidad de 100 larvas por m² los primeros 16 días, para luego, los siguientes 25 días pasaron a un estanque acuático de densidad de 78,4 peces m². Se recogieron en total 16 muestras aleatorias por un periodo de 41 días, los animales fueron alimentados diariamente, utilizando un número de comidas diarias y niveles de proteína adecuados de acuerdo a esta fase.

El modelo Logístico fue el que mejor se adaptó al ajuste de la curva de crecimiento para la fase de alevino. De acuerdo con los parámetros estimados por el modelo, el *Pimelodus grosskopffii* alcanzó una longitud de 6,31229 en dicha etapa. El estudio mostró la utilidad del modelaje matemático como herramienta estratégica de análisis para el estudio del crecimiento de Capaz en su fase de alevino.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The objective of this study was to evaluate the precision of four mathematical models (Malthus, Logístico, Gompertz and Von Bertalanffy) to describe the growth curve of the capaz (*Pimelodus grosskopfii*) in its alevín phase. The fry came from spawning obtained by artificial reproduction at the Hydrobiological Resources Experimental Station of the Surcolombiana University. To this end, an average of 27 fry were stored in sample bottles with formalin, with an initial average weight of 3,07 g in a tank with a capacity of 100 larvae per m² the first 16 days, and then the next 25 days went to an aquatic pond with a density of 78,4 fish m². A total of 16 random samples were collected for a period of 41 days, the animals were fed daily, using a number of daily meals and appropriate protein levels according to this phase.

The Logistic model was the one that best adapted to the adjustment of the growth curve for the alevín phase. According to the parameters estimated by the model, the (*Pimelodus grosskopfii*) reaches a length of 6,31229 in said stage. The study showed the usefulness of mathematical modeling as a strategic analysis tool for the study of the growth of Capaz in its fry phase.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: *Jasmidt Vera C*

Firma: *Jasmidt Vera C*

Nombre Jurado: **JASMIDT VERA CUENCA**

Firma: *Jasmidt Vera C*

Nombre Jurado: **MAURO MONTEALEGRE CARDENAS**

Firma: *mauro montealegre*



**ENSAYO PRELIMINAR DE LA DINÁMICA DE
CRECIMIENTO DEL CAPAZ (P. GROSSKOPFII) EN SU
FASE DE ALEVINO EN CAUITIVERIO**

1 de noviembre de 2023

SONIA LORENA YUSUNGUAIRA PULIDO

ENSAYO PRELIMINAR DE LA DINÁMICA DE CRECIMIENTO DEL CAPAZ (P. GROSSKOPFII) EN SU FASE DE ALEVINO EN CAUITIVERO

Presentado por:

SONIA LORENA YUSUNGUAIRA PULIDO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director de trabajo:

YINETH MEDINA ARCE

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MATEMÁTICA APLICADA
NEIVA-HUILA
COLOMBIA

2023

Agradecimientos

SONIA LORENA YUSUNGUAIRA PULIDO

A mis padres que siempre con su amor incondicional y dedicación me han brindado su apoyo y palabras de aliento para poder cumplir todos mis objetivos personales y académicos. Con su cariño, me impulsan a perseguir mis metas y nunca abandonarlas frente a las adversidades.

A mi tutora, Magister Yineth Medina Arce, agradezco mucho por su dedicación y paciencia, sin sus palabras y correcciones precisas no hubiese podido lograr llegar a esta instancia tan anhelada. Gracias por su guía y todos sus consejos, los llevaré para siempre grabados en la memoria en mi futuro profesional.

Agradezco a *Dios* por permitir darme la oportunidad de realizar esta tesis para obtener mi título profesional de pregrado de "Matemática".

Resumen

El objetivo de este estudio fue evaluar la precisión de cuatro modelos matemáticos (Malthus, Logístico, Gompertz y Von Bertalanffy) para describir la curva de crecimiento del capaz (*Pimelodus grosskopfi*) en su fase de alevino. Los alevinos provenían de un desove obtenido por reproducción artificial en la Estación Experimental de Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana. Con este fin, se almacenaron en promedio 27 alevines en frascos de muestras con formol, con un peso promedio inicial de 3,07 g en un tanque con capacidad de 100 larvas por m^2 los primeros 16 días, para luego, los siguientes 25 días pasaron a un estanque acuático de densidad de 78,4 peces m^2 . Se recogieron en total 16 muestras aleatorias por un periodo de 41 días, los animales fueron alimentados diariamente, utilizando un número de comidas diarias y niveles de proteína adecuados de acuerdo a esta fase.

El modelo Logístico fue el que mejor se adaptó al ajuste de la curva de crecimiento para la fase de alevino. De acuerdo con los parámetros estimados por el modelo, el *Pimelodus grosskopfi* alcanzó una longitud de 6,31229 en dicha etapa. El estudio mostró la utilidad del modelaje matemático como herramienta estratégica de análisis para el estudio del crecimiento de Capaz en su fase de alevino.

Palabras Claves: Modelo matemático, alevino, crecimiento, P. Grosskopfi.

Abstract

The objective of this study was to evaluate the precision of four mathematical models (Malthus, Logistico, Gompertz and Von Bertalanffy) to describe the growth curve of the capaz (*Pimelodus grosskopfii*) in its alevín phase. The fry came from spawning obtained by artificial reproduction at the Hydrobiological Resources Experimental Station of the Surcolombiana University. To this end, an average of 27 fry were stored in sample bottles with formalin, with an initial average weight of 3,07 g in a tank with a capacity of 100 larvae per m^2 the first 16 days, and then the next 25 days went to an aquatic pond with a density of 78,4 *fish m*². A total of 16 random samples were collected for a period of 41 days, the animals were fed daily, using a number of daily meals and appropriate protein levels according to this phase.

The Logistic model was the one that best adapted to the adjustment of the growth curve for the alevín phase. According to the parameters estimated by the model, the (*Pimelodus grosskopfii*) reaches a length of 6,31229 in said stage. The study showed the usefulness of mathematical modeling as a strategic analysis tool for the study of the growth of Capaz in its fry phase.

Key words: Mathematical model, alevín, growth, P. Grosskopfii.

Índice general

1. Contextualización de la investigación	13
1.1. Planteamiento del problema	13
1.2. Objetivos	16
1.2.1. Objetivo general	16
1.2.2. Objetivos específicos	16
1.3. Justificación	17
2. Marco conceptual	19
2.1. Bioecología del Capaz (<i>Pimelodus grosskopfii</i>)	19
2.2. Modelos Matemáticos de Crecimiento	20
2.2.1. Modelo de Malthus	23
2.2.2. Modelo Logístico	26
2.2.3. Modelo de Gompertz	31
2.2.4. Modelo de Von Bertalanffy	35
2.3. Obtención de los parámetros de los modelos matemáticos	39
2.3.1. Modelo de regresión lineal	40
2.3.2. Modelo de regresión no lineal	41
2.3.3. Método de Gauss-Newton	42
2.3.4. Método de Levenberg-Marquardt	43
2.3.5. Coeficiente de determinación R^2	44
2.3.6. Coeficiente de determinación ajustado R^2_{adj}	44
2.3.7. Suma de cuadrados del error (SCE)	45
2.3.8. Coeficiente de correlación de Pearson (r)	45
2.4. Minitab	45

3. Metodología de la Investigación	48
3.1. Tipo de estudio	48
3.2. Ubicación del estudio	48
3.3. Material biológico	49
3.4. Fuentes de investigación	50
3.5. Análisis estadístico	50
4. Análisis Y Resultados	52
4.1. Construcción de los modelos	54
4.1.1. Modelo de Malthus	55
4.1.2. Modelo Logístico	57
4.1.3. Modelo de Gompertz	59
4.1.4. Modelo de Von Bertalanffy	62
4.2. Comparación de los modelos	65
5. Conclusiones	68
Referencias	69

Índice de figuras

2.1. Pimelodus grosskopfii, Steindachner 1879	19
2.2. Curva del modelo de Malthus con $N(0) = 15,58$, $r = 0,58$	25
2.3. Curva del modelo logístico con $K = 800$, $C = 3,82$ y $r = 1,16$	31
2.4. Curva del modelo de Gompertz con $K = 10$, $B = 3$ y $r = 0,05$	34
2.5. Curva del modelo de Von Bertalanffy con $L_{\infty} = 37$, $k = -0,26$ y $t_0 = 0,2$	39
3.1. Imagen ilustrativa de los alevinos de Capaz (Pimelodus grosskopfii)	50
3.2. Funciones no lineales de crecimiento.	51
4.1. Datos de longitud promedios de los alevinos de Capaz, <i>Pimelodus grosskopfii</i> . . .	52
4.2. Longitud de los alevinos de Capaz (Pimelodus grosskopfii)	53
4.3. Estimación del modelo de de Malthus	55
4.4. Tabla de resumen del modelo de Malthus	55
4.5. Gráfica de residuos del modelo de Malthus	56
4.6. Gráficas de probabilidad de residuos del modelo de Malthus	57
4.7. Estimación del modelo logístico	57
4.8. Tabla de resumen Modelo Logístico	58
4.9. Gráficas residuales del modelo logístico	58
4.10. Gráficas de probabilidad de residuos del modelo logístico	59
4.11. Estimación del modelo de Gompertz	60
4.12. Tabla de resumen Modelo de Gompertz	60
4.13. Gráficas residuales del modelo de Gompertz	61
4.14. Gráficas de probabilidad de residuos del modelo de Gompertz	62
4.15. Estimación del modelo de Von Bertalanffy	63
4.16. Tabla de resumen Modelo de Von Bertalanffy	63

4.17. Gráficas residuales del modelo de Von Bertalanffy	64
4.18. Gráficas residuales del modelo de von Bertalanffy	64
4.19. Comparación de cuatro modelos no lineales según sus medidas estadísticas	65
4.20. Estimación de los parámetros de crecimiento según el modelo	66

Introducción

La acuicultura en Colombia se ha convertido en uno de los sectores de la economía que ha venido presentando un importante y significativo nivel comercial anual, este auge se ha centrado en la producción de especies foráneas en su mayoría (Sanabria, 2016) (Cruz-Casallas y cols., 2010). Según cifras reveladas por el Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural, para el 2020, la acuicultura ha sido uno de los sectores más dinámicos del Departamento del Huila registrando un crecimiento del 9 al 10% promedio al año; para el cierre del 2021, realizó un aporte de 73.048 toneladas TM (toneladas métricas), que corresponde al 39% de la producción nacional de productos piscícola en el país. Lo que posiciona al departamento como el principal productor de pescado en el país.

Pimelodus Grosskopfii, conocida como capaz, es endémico de la cuenca Colombiana del río Magdalena-Cauca (Maldonado-Ocampo, Vari, y Usma, 2008), y está categorizado en peligro crítico (CR) con nivel de vulnerabilidad A2d en la lista roja de la IUCN (Villa-Navarro, Usma-Oviedo, Mesa-Salazar, y Sanchez-Duarte, 2016), es un pez de la familia Pimelodidae de hábitos alimenticios omnívoros, propensa a ser carnívora por insectos, macroinvertebrados y peces (Cala, Pérez, y Rodríguez, 1996). A nivel comercial, por la calidad de su carne, la ausencia de espinas intramusculares y su buen precio en el mercado se posiciona como una especie de gran importancia comercial (Valbuena-Villarreal, Zapata-Berruecos, David-Ruales, y Cruz-Casallas, 2012), además ha sido calificada con buena demanda dentro de las posibilidades piscícolas del país (Villa-Navarro, 1999) y como parte de un desarrollo experimental que ha sido constante en los últimos años (Carrera, 2019).

Los modelos matemáticos de crecimiento pueden ser utilizados para entender y predecir el crecimiento de los peces, lo que es importante tanto para la acuicultura, piscicultura y sectores

afines de éstas. Estos modelos se basan en una serie de factores que influyen en el crecimiento de los peces, como la temperatura del agua, la disponibilidad de alimento y el tamaño y la edad del pez. Algunas disciplinas desde hace un tiempo han utilizado los modelos matemáticos de crecimiento, como la ecología, la agronomía, la biología, la piscicultura y la acuicultura.

Para las actividades de cultivo de peces, tener un modelo matemático correctamente ajustado a las necesidades de la empresa o lugar en particular, proporcionará información necesaria para monitorear y explicar patrones observados en campo, como comparar tasas, predecir el comportamiento productivo, brindar apoyo para la toma de decisiones sobre los límites de captura, ganancia diaria de peso, tamaños mínimos y máximos de los peces, analizar el intervalo de tiempo entre el nacimiento y la madurez del animal.

Las funciones que más se han aplicado para estudiar el crecimiento de los animales y especialmente de los peces, son las propuestas por Gompertz en 1825 (Gompertz, 1825), Verhulst en 1838 (Verhulst, 1845), Brody en 1945 (Brody y Lardy, 1946), de Von Bertalanffy en 1957 (Von Bertalanffy, 1938) y la de Richards en 1959 (Richards, 1959), además se han aplicado también funciones lineales, polinómicas, exponenciales entre otras, para tratar de predecir el peso adulto o el grado de madurez, como también el crecimiento del pez a través del tiempo, sin tener que realizar mediciones repetidas o esperar que el animal alcance su madurez para tomar decisiones relacionadas con la producción (Moore, 1985).

La Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos (ESSRH) como parte de su avance experimental dentro de la piscicultura, se ha propuesto como objetivo repoblar las represas del Quimbo (Garzón, Huila) y Betania (Yaguará, Huila) con especies de alevinos nativas de la cuenca del río Magdalena para aumentar su producción y comercio, con el propósito de fomentar el consumo en la región y favorecer al sector pesquero del departamento y del país colombiano.

Por tal iniciativa de la Estación Experimental sobre esta temática de conservación y desarrollo experimental de nuestras especies ícticas nacionales, el objetivo de esta investigación es emplear modelos matemáticos como herramienta fundamental para verificar la dinámica de crecimiento del capaz *Pimelodus grosskopfii* en su fase de alevino en un ambiente en cautiverio. Los modelos

a utilizar para estudiar la curva de crecimiento de nuestra especie son el modelo logístico, el modelo de Malthus, el modelo de Gompertz y el modelo de Von Bertalanffy.

Capítulo 1

Contextualización de la investigación

1.1. Planteamiento del problema

El cultivo de peces es una actividad importante en la producción de especies marinas puesto se ha convertido en una alternativa para satisfacer la demanda creciente de proteína animal; además, ofrece oportunidades de trabajo a familias que viven de la pesca, y sostenibilidad en el medio ambiente poniendo en práctica el uso de tecnologías que disminuyen la contaminación ambiental para llevar a cabo la reproducción y conservación de especies nativas.

En el sector de la piscicultura, las tres fases que componen la crianza de los peces son: alevinaje, recría y engorde. El alevinaje es la primera fase de desarrollo de los peces, que se produce cuando todavía son crías. Esta etapa generalmente se lleva a cabo en criaderos especializados para aumentar la eficiencia de los alevines.

Al ser una de las primeras fases de vida, esta etapa requiere una inversión significativa en términos de tiempo, espacio y recursos, por lo que es importante maximizar la supervivencia y el crecimiento de los peces. La crianza de los alevinos de *Pimelodus grosskopfii* suele realizarse en piscinas o tanques. La ventaja de esta técnica es que pueden controlarse algunas de las variables que afectan a su crecimiento, como la temperatura, calidad de agua y la cantidad de alimento suministrada. Sin embargo, existen otras variables que no pueden ser controladas.

La mayoría de los modelos tienen su origen en la modelización del crecimiento de la pobla-

ción humana, siendo luego utilizadas en diferentes campos de estudio, como en el crecimiento de especies biológicas. Los modelos matemáticos, por tanto, son una herramienta útil para predecir y optimizar el crecimiento y la supervivencia de los alevines en diferentes sistemas de cultivo. De manera que, el éxito de la acuicultura y la piscicultura depende en gran medida del conocimiento y la aplicación de modelos de crecimiento que permitan maximizar la producción y reducir los costos.

Con un modelo de crecimiento correctamente ajustado es posible obtener una predicción de la longitud promedio del *Pimelodus grosskopfii* en función de una o más variables que afectan su crecimiento. Modelos de crecimiento comúnmente empleados en biología son los modelos Richards, Gompertz, Von Bertalanffy y Logístico. Estudios previos han demostrado buenos resultados al ajustar estos modelos al crecimiento de peces y otras especies.

La Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana, se une a estas técnicas de reproducción, con el fin de producir a gran escala alevinos de especies nativas del río Magdalena que se encuentran en cierto grado de amenaza; además de favorecer a la comunidad científica, también se beneficiarán, de manera directa, a los pescadores artesanales de la región debido a que se aumentarán los volúmenes de captura de especies de importancia económica para este grupo poblacional. Esta estancia, busca brindar a la comunidad académica apoyo en proyectos de desarrollo al país, con el fin de impulsar la investigación y fomentar el conocimiento científico en diversas temáticas, especialmente relacionadas con la sostenibilidad, el cuidado del medio ambiente y el avance científico a la piscicultura.

Las especies que se reproducen en la Estación Experimental son: El capaz (*Pimelodus grosskopfii*), dorada (*Brycon moorei*), bocachico (*Prochilodus magdalenae*) y pataló (*Ichthyoelephas longirostris*), criadas en cautiverio en esta estación, las cuales al alcanzar una longitud estándar mayor a 2,2 cm se transportan desde ésta hasta el sitio de siembra, donde terminan su desarrollo y se inicia la repoblación en las cabeceras del río Magdalena o en las zonas que éste ha sido obstruido por los embalses del Quimbo y el de Betania.

Una de las especies nativas de la región del Huila que se produce en la estación experimental es el capaz *Pimelodus grosskopfii*, e interesados por su biología y su desarrollo biológico el trabajo

propone modelos estadísticos que permitan predecir el crecimiento del *Pimelodus grosskopfii* durante su cultivo en la fase de alevino. La implementación de estos modelos matemáticos beneficiara al proceso de cultivo del capaz al mejorar la toma de decisiones y permitir el momento óptimo de cosecha. Por ende, la pregunta de investigación a tratar es:

¿Es posible determinar mediante los modelos matemáticos propuestos la dinámica de crecimiento del capaz (*Pimelodus grosskopfii*) en su fase de alevino en un ambiente en cautiverio?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Analizar mediante la modelación matemática el periodo de crecimiento del capaz (*Pimelodus grosskopfii*) en su fase de alevino, el cual se cultiva en la Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Utilizar la modelización matemática para describir el crecimiento del capaz *Pimelodus grosskopfii* en un ambiente en cautiverio.
- Emplear modelos matemáticos como herramienta (Logístico, Von Bertalanffy y Gompertz) de análisis para estudiar el crecimiento del *Pimelodus grosskopfii* en un ambiente en cautiverio.
- Estudiar el comportamiento de la dinámica de crecimiento mediante la modelación matemática.
- Programar con ayuda de un software matemático los modelos de crecimiento biológico (Logístico, Von Bertalanffy y Gompertz) el comportamiento que modela la dinámica de crecimiento de la especie en su etapa de alevino.

1.3. Justificación

Según la AUNAP, *Autoridad Nacional De Acuicultura y Pesca, 2014*, Colombia es un país tropical con abundantes cuencas hidrográficas que hacen posicionarlo en un lugar destacado en recursos hídricos en el mundo; posee una de las mayores diversidades de peces del planeta y con uno de los más altos índices de biodiversidad. El país cuenta con diversos sistemas hidrológicos diversificados en cuerpos de agua dulce, salobres y marinos, una gran variedad de pisos térmicos con características climáticas estables a lo largo del año, terrenos con aptitud para realizar acuicultura y con una extensa red fluvial que recorre casi todo el país, ofreciendo una gran oportunidad potencial para el desarrollo de la actividad.

Al poseer todos estos recursos hídricos, la pesca se concibe como una alternativa económica importante para los pescadores marinos y ribereños continentales, quienes miles de ellos logran garantías para su seguridad alimentaria por medio de ésta; sin embargo, la pesca, especialmente la continental, se ha estado viendo comprometida por factores externos como la sobrepesca y la contaminación ambiental, observándose que las producciones presentan tendencias decrecientes en los últimos años, haciendo que los pescadores deban buscar otras alternativas de producción de recursos pesqueros, como es el caso de la piscicultura. Dado el potencial continental con el que cuenta Colombia, esta alternativa está demostrando garantizar la seguridad alimentaria, elevando el consumo per-cápita, incrementar la generación de empleo en el campo y mejorando las condiciones de vida de los productores y de su núcleo familiar.

La Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos realiza investigaciones y reproducciones inducidas de especies nativas del río Magdalena que se encuentran en amenaza. A pesar de ser una especie que pueda estar en peligro de extinción por la sobrepesca y el deterioro ambiental ([Mojica y Calle Velez, 2002](#)), el *Pimelodus Grosskopfii* ha tenido buena aceptación por parte de la población por su calidad de carne y su alto valor en el mercado, también ha sido estudiada presentando buen desempeño en el crecimiento de las larvas por medio de dietas secas ([Carrera, 2019](#)), sobre su desempeño productivo ([Carrera y Villarreal, 2015](#)), reportándose protocolos eficientes para su producción en cautiverio ([Valbuena-Villarreal, Zapata-Berruecos, y Cruz-Casallas, 2010](#)) y sobre su desempeño embrionario ([Valbuena-Villarreal y cols., 2012](#)).

Por otro lado, se ha encontrado que la utilidad del modelaje matemático como herramienta

estratégica de análisis para el estudio de crecimiento de especies de peces (Aguilar Aguilar, 2010; Cubas Córdoba, 2020; Amancio, Silva, Fernandes, Sakomura, y Cruz, 2014; Casas, Rodríguez, y Téllez, 2010), demuestra que las funciones matemáticas encontradas permiten obtener una estimación confiable sobre el peso y la longitud que tendrá los peces a través del tiempo, a fin de mejorar la toma de decisiones sobre la producción y conocer más a fondo sobre aspectos biológicos de éstos.

Teniendo en cuenta que hasta el momento se encuentran pocos estudios sobre el crecimiento del capaz en su etapa de alevinaje implementando el modelaje matemático, el objetivo del presente estudio es evaluar el crecimiento del *Pimelodus Grosskopfii* durante su primera fase de vida, tomando un periodo de tiempo de cuarenta y un días, para analizar la curva de crecimiento obtenida por medio de modelos matemáticos de crecimiento.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1. Bioecología del Capaz (*Pimelodus grosskopfii*)

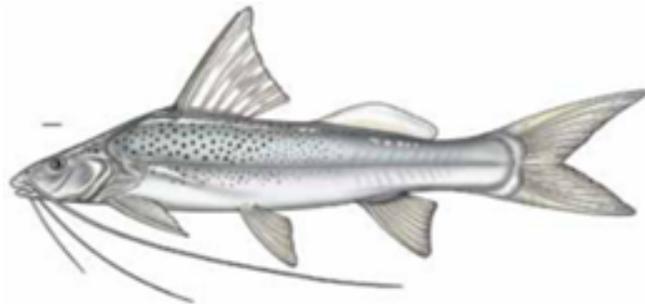


Figura 2.1: *Pimelodus grosskopfii*, Steindachner 1879
Libro rojo de peces dulceacuícolas de Colombia (2012)

De acuerdo con su tamaño, los Siluriformes se han agrupado en grandes, medianos y de pequeño cuerpo. Dentro de este último grupo, el capaz (*Pimelodus Grosskopfii*), es de las especies más conocidas, considerado en la lista de las 30 especies de interés comercial para la cuenca del río Magdalena, según *Pesca y Acuicultura, 2006*.

El capaz (*Pimelodus grosskopfii*) representante de la familia Pimelodidae, es una de las especies ícticas de mayor significado económico que habita en las cuencas del río Magdalena Cauca, San Jorge, Sinú, Cesar, Atrato, Baudó y Catatumbo (Mojica, 1999; Ortega-Lara, Murillo,

Pimienta, y Sterling, 2000), y los embalses de Betania (Huila) y Prado (Tolima) (Villa-Navarro y Losada-Prada, 1999). Esta especie es omnívora y suele alimentarse de insectos, macroinvertebrados y larvas de peces (Villa-Navarro, 1999). Según autores, la talla media reportada en la cuenca del río Magdalena se ha mantenido por encima de los 20 cm LE durante los últimos años de registro (Guzmán y cols., 2011). Sin embargo, para en los embalses de Betania y Prado y en las ciénagas del Magdalena medio, estas tienden a ser mayores (23,5 cm LE, 27,8 cm LE y 31,3 % LE, respectivamente) (Mojica y Calle Velez, 2002).

A nivel comercial, por la calidad de su carne, la ausencia de espinas intramusculares y su buen precio en el mercado se posiciona como una especie de gran importancia comercial (Valbuena-Villarreal y cols., 2012), además ha sido calificada con buena demanda dentro de las posibilidades piscícolas del país (Villa-Navarro, 1999) y como parte de un desarrollo experimental que ha sido constante en los últimos años (Carrera, 2019).

2.2. Modelos Matemáticos de Crecimiento

Los modelos que representan la evolución de una población, la interacción entre especies y el impacto del hombre sobre los ecosistemas naturales han despertado interés no sólo en el campo de la Biología y la Ecología, sino también en la Matemática Aplicada. La dinámica de poblaciones tradicionalmente ha sido el enfoque de estudio de lo que ha venido a llamarse Biomatemática. Ésta hace frente a aspectos biológicos relacionados con el crecimiento de una población con o sin distribución por edad, la interacción de especies y su entorno, poblaciones en peligro de extinción, la explotación de recursos naturales, el crecimiento de células tumorales, propagación de epidemias, la evolución de cepas resistentes a las plaguicidas, los conflictos armados, la drogadicción, etc (Ladino Martínez, 2012).

Aunque no sea posible afirmar cuál fue el primer modelo matemático formulado para la dinámica de poblaciones, el más antiguo que aparece en la literatura es el propuesto por Leonardo de Pisa, conocido comúnmente como Fibonacci, quien, en 1202, intentando resolver un enigma sobre los hábitos de apareamiento de los conejos, estableció un ejercicio de simulación que implica un hipotético crecimiento de una población de estos animales (Murray y Murray, 2003). De su hipótesis surge la famosa serie numérica conocida como sucesión de Fibonacci. Aunque

el modelo está correctamente formulado bajo las hipótesis en que se basa, el resultado es irreal, pues no hay parejas de conejos que se reproduzcan siguiendo la serie. A partir de Fibonacci, el alcance y la evolución los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones han alcanzado un alto grado de sofisticación para que éstos representen de manera satisfactoria las situaciones a modelar.

Siglos posteriores, aparecen modelos matemáticos básicos en dinámica de poblaciones. El modelo de Malthus ([Malthus, 1798](#)), propuesto por Thomas Malthus en 1798, describe cómo se produce el crecimiento de la población humana. Este predice el crecimiento de la población de forma exponencial, establece que la tasa de crecimiento de la población humana es exponencial, mientras que la tasa de crecimiento de los recursos del medio es lineal.

El modelo logístico, introducido por el matemático belga Pierre-François Verhulst en 1838, conocido también como la ecuación logística ([Verhulst, 1838, 1845](#)), modifica el modelo de exponencial de Malthus, y se basa en la idea de que una población no puede crecer de forma ilimitada y entonces se estabilizará eventualmente en un punto de equilibrio. El límite que impone el medio a los recursos naturales en el modelo de Verhulst es conocido como la capacidad de carga o soporte del sistema, la solución del modelo es más cercana a la realidad, ya que no permite que la población crezca infinitamente.

El modelo de Leslie, también conocido como el modelo matricial de Leslie, es un modelo matemático utilizado para describir y predecir el crecimiento y la estructura de edad de una población a lo largo del tiempo ([Leslie, 1945](#)).

El famoso modelo de Lotka-Volterra ([Lotka, 1925](#); [Volterra, 1991](#)), el cual deja a un lado la hipótesis sobre el aislamiento de la población, es útil para comprender la dinámica de poblaciones de presas y depredadores en un ecosistema, y cómo las interacciones entre estas poblaciones pueden afectar su crecimiento y supervivencia a lo largo del tiempo.

Omitir supuestos permite que el modelo sea mucho más cercano a la realidad, pero, también mucho más complejo en la elaboración de una expresión matemática. Esta fue uno de los paradigmas dominantes hasta que, el físico australiano, Robert May, en 1976, publicó un trabajo

que desató un gran cambio en la filosofía de los modelos matemáticos en biología (Bautista Ramos, Enríquez, y Miramontes, 2004). May analizó un modelo muy sencillo de crecimiento de una población de insectos. Este modelo es importante porque permite comprender cómo los cambios en las tasas de natalidad y mortalidad afectan el crecimiento de la población en el tiempo, y con una única diferencia de que en este caso se tiene una población que se reproduce en generaciones separadas, es decir que el tiempo evoluciona de manera discreta (unidades enteras).

Robert mostró cómo la dinámica llega a un régimen caótico por doblamiento del periodo; se tiene en el caos una convivencia de órbitas de todos los periodos y eso le proporciona la riqueza dinámica que lo caracteriza y destaca nítidamente, por un lado, entre las conductas estables y periódicas, y por otra, de los comportamientos azarosos. A pesar de que la noción de caos era conocida desde antes (Miramontes, 1998), se sentaron las bases que rompen paulatinamente la idea de que los fenómenos complejos requieren de modelos complejos, y, por tanto, un mecanismo sencillo puede modelar un fenómeno biológico muy intrincado.

Los modelos de dinámica de poblaciones incluyen parámetros relacionados con la reproducción, el crecimiento, la mortalidad, la depredación, la captura, la explotación, el reclutamiento, la migración, la capacidad de soporte del sistema, las condiciones fisicoquímicas ambientales o la cantidad de alimento disponible. Con la ayuda de simulaciones numéricas es posible validar un modelo, porque comprueba si se han tenido en cuenta los parámetros correspondientes a la dinámica de la situación simulada. Si las condiciones ambientales no se pueden modelar o el modelo no se puede estudiar analíticamente, la única forma de estudiar el modelo es a través del estudio estadístico numérico.

Es conveniente expresar el crecimiento de los peces por medio de una expresión matemática. La condición principal es obtener una fórmula que pueda predecir el tamaño (en longitud o peso) de un pez a una edad determinada, tal fórmula debe coincidir con los datos observados acerca de los tamaños o pesos a ciertas edades, y tener una forma matemática que pueda ser implementada con facilidad para que de rendimiento (Gulland, 1971).

Para el estudio de la dinámica de poblaciones de peces, existen modelos y métodos esta-

dísticos para la evaluación de recursos pesqueros, como lo muestran los trabajos de Sparre y Venema (Sparre y Venema, 1995), Hilborn y Walters (Hilborn y Walters, 2013) Csirke (Csirke, 1980), Plagányi (Plagányi, 2007) o Beverton y Holt (Beverton y Holt, 2012).

Los modelos de Von Bertalanffy y Gompertz son comúnmente usados para describir el crecimiento de peces y especies marinas en la acuicultura, (Araneda, Hernández, Gasca-Leyva, y Vela, 2013). Otros modelos, también han sido considerados apropiados para describir una curva de crecimiento de ciertos peces, como el Exponencial, el Logístico y el polinomial.

Utilizar un modelo matemático para estudiar el crecimiento de un pez, puede variar por especie y también puede variar dentro de la misma especie, ya que interfieren múltiples variables inherentes al organismo (sexo, tamaño, genotipo, etc.) con otras dependientes de las condiciones ambientales (Baldisserotto, 2002). Generalmente, para cada especie se puede usar el mismo modelo matemático con una combinación diferente de parámetros, pero en consecuencia, cada combinación de parámetros resulta una curva distinta (Sparre, 1998).

A continuación, se presentan los modelos que emplearán para el presente estudio.

2.2.1. Modelo de Malthus

El economista inglés Thomas Robert Malthus a través de su obra *An Essay on the Principle of Population* (Malthus, 1798) en 1798, desarrolló uno de los primeros modelos matemáticos que estudiaba de manera adecuada el crecimiento poblacional. Su preocupación respecto a la limitación de los recursos económicos y al incremento de la población humana en ese entonces, lo motivó para desarrollarlo.

Malthus partió del supuesto de que los recursos del ambiente donde se encuentra la población son ilimitados. Definió que la tasa de crecimiento poblacional, es decir, el incremento de población en cada instante de tiempo, es directamente proporcional al tamaño de la población, y a la velocidad con que nuevos individuos nacen, mientras que otros mueren (Chiappa Carrara, Galindo de Santiago, y Cervantes Sandoval, 2009).

El modelo de Malthus puede ser expresado como una ecuación diferencial de primer orden,

así:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (2.1)$$

Donde:

- $\frac{dN(t)}{dt}$ es la tasa de crecimiento instantánea de la población con respecto al tiempo t .
- r es el incremento poblacional, también, es la tasa intrínseca de crecimiento, la cual se calcula realizando la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad, $r = (N - M)$.
- $N(t)$ representa el número de habitantes en la población en el tiempo t .

Solucionando la ecuación diferencial del modelo por el método de variables separables, tenemos:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = r dt \quad (2.3)$$

Integramos en ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int r dt \quad (2.4)$$

tenemos la solución de las dos integrales,

$$\ln(N(t)) = r t + C \quad (2.5)$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la igualdad, para despejar la variable $N(t)$:

$$e^{\ln(N(t))} = e^{r t + C} \quad (2.6)$$

$$N(t) = e^{r t} e^C \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) representa la solución general al modelo de Malthus. Ahora, para el caso cuando $t = 0$, se tiene:

$$N(0) = e^{r \cdot 0} e^C \quad (2.8)$$

$$N(0) = e^{r(0)} e^C \quad (2.9)$$

$$N(0) = e^C \quad (2.10)$$

El término e^C representa el número de organismos $N(0)$ al tiempo inicial cero. Sustituyendo este término en la ecuación (2.7):

$$N(t) = N(0)e^{rt} \quad (2.11)$$

Obtenemos la solución particular para el modelo de Malthus. Donde:

- $N(0)$ representa la población al tiempo cero.
- $N(t)$ representa la población al tiempo t .
- r la tasa de crecimiento de la población.

La gráfica que representa el modelo de Malthus está representada por la siguiente figura

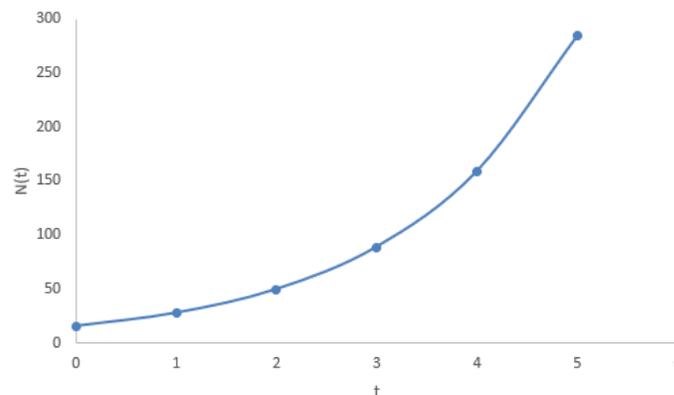


Figura 2.2: Curva del modelo de Malthus con $N(0) = 15,58$, $r = 0,58$.

Elaboración del autor

2.2.2. Modelo Logístico

Basándose de las hipótesis del modelo de Malthus, el matemático y biólogo holandés P. F. Verhulst en 1838, agregó un parámetro de auto-limitación a su modelo, con el fin de que la tasa de crecimiento de la población no incrementara exponencialmente como lo establecía el modelo maltusiano; consideró que el hábitat donde se encuentran los individuos tiene una capacidad de carga llamada K , que representa el tamaño máximo de población que un ambiente en particular puede sostener. Inicialmente, cuando hay pocos individuos y suficientes recursos, la población se incrementará de forma exponencial, sin embargo, en la curva existe un punto de inflexión a partir de la cual la tasa de crecimiento disminuirá. Eventualmente la tasa de crecimiento se estabilizará. Posteriormente, la población se irá amortiguando hasta llegar a K , y el número de individuos permanecerá constante, alcanzado la capacidad de soporte del medio.

Quetelet y su pupilo Verhulst consideraron agregar el parámetro llamado capacidad de carga, K , como una fuerza moderadora de la densidad de la población, de manera que, a medida que la densidad poblacional aumente, la tasa de mortalidad incremente en tanto que la tasa de natalidad disminuya, haciendo que la tasa de crecimiento, r , disminuya hasta cero o inclusive a valores mas bajos (Chiappa Carrara y cols., 2009). Dando así, una nueva expresión para r , con el objetivo de modificar la ecuación de Malthus, $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$.

Como el modelo logístico, es un modelo de población muy simple en el que la tasa de crecimiento per cápita es una función decreciente del tamaño de la población, es posible formular la siguiente ecuación $\mu = r - bN(t)$. Donde μ y r representan tasas de crecimiento poblacional, y $b > 0$ es el parámetro de auto-limitación o coeficiente de fricción que hace decrecer a r a medida que $N(t)$ aumenta. Por otro lado, r y b son independientes.

Sustituyendo r por μ , al modelo de Malthus:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [r - bN(t)]N(t) \quad (2.12)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - bN(t)^2 \quad (2.13)$$

Analizando el significado de los parámetros r y b , se tienen dos casos:

- Para valores pequeño de $N(t)$, es decir, cuando la densidad poblacional es muy pequeña, $N(t) \approx 0$

$$\mu = r - bN(t) \approx r \quad (2.14)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - bN(t)^2 \approx rN(t) \quad (2.15)$$

la dinámica de crecimiento de la población es de tipo exponencial, puesto que el parámetro limitante dependiente de la densidad de la población no existe.

- Cuando la población decrece, es decir, $\frac{dN(t)}{dt} = 0$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - bN(t)^2 = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = [r - bN(t)]N(t) = 0 \quad (2.17)$$

significa que para algún valor N en particular, llamada K , el incremento de la población es nulo. Esto es,

$$\frac{dN(t)}{dt} = [r - bK]K = 0 \quad (2.18)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla, alguno de los términos debe de ser cero,

$$(r - bK)K = 0 \quad (2.19)$$

entonces, debe ser que $K = 0$, lo cual indicaría que no es admisible ningún individuo en el ambiente, o de lo contrario, $K = \frac{r}{b}$, K depende de r , la tasa de crecimiento y de b , que es el parámetro de autolimitación. Esta última densidad de población se conoce de manera específica como capacidad de carga, referida al número máximo de individuos admisibles de una determinada especie que el ecosistema puede sostener.

Despejando a b de la ecuación $K = \frac{r}{b}$, para expresarlo como una constante que dependa de r y K ,

$$b = \frac{r}{K} \quad (2.20)$$

A partir de la ecuación (2.2) sustituimos b por su nueva forma,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - bN(t)^2 \quad (2.21)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \left(\frac{r}{K}\right)N(t)^2 \quad (2.22)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{rN(t)(K - N(t))}{K} \quad (2.23)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N(t)}{K}\right) \quad (2.24)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (2.25)$$

se obtiene la ecuación diferencial logística conocida en muchos textos de ecología y demografía, también aplicada en áreas de las ciencias como las matemáticas, biología y medicina.

De esta expresión, resaltan algunas observaciones importantes:

- Mencionado anteriormente, el parámetro K hace presencia en la ecuación logística si se compara con el modelo de Malthus $\frac{dN(t)}{dx} = rN(t)$, que se refiere al crecimiento máximo de la población, y a grande rasgos representa el número máximo de individuos admisibles. En esta constante se resumen varios factores que influyen en la dinámica de crecimiento de la población, como cambios climáticos, recursos del medio, disponibilidad de alimento, entre otros.
- Para $0 < N(t) < K$ se tiene que $\frac{dN(t)}{dx} > 0$, lo que indica que la población crece.
- Mientras que para $N(t) > K$, se tiene que $\frac{dN(t)}{dx} < 0$ lo que indica que la población decrece.

- Para valores de $N(t) < 0$ se tiene que $\frac{dN(t)}{dx} \approx rN(t)$ tenderá a un crecimiento malthusiano, puesto que $\frac{K-N(t)}{N(t)} \approx 1$.
- La tasa de crecimiento del modelo logístico deja de ser constante, comparada con la tasa del modelo de Malthus, para pasar a autorregularse o estabilizarse de acuerdo al tamaño de la población a cada instante del tiempo, *Tasa de crecimiento* = $r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$.

Luego de haber encontrado el modelo con su interpretación, se procede a encontrar su solución analítica.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K-N}{K} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K-N)}{K} \quad (2.27)$$

$$\frac{KdN}{N(K-N)} = rdt \quad (2.28)$$

$$\int \frac{K}{N(K-N)} dN = \int rdt \quad (2.29)$$

ecuación que se procede a integrar, mientras que el lado derecho la integración es simple, el lado izquierdo se aplica el método de integración por fracciones parciales,

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{N-K} \quad (2.30)$$

operando se obtiene que $A = 1$ y $B = 1$, reescribiendo la ecuación (2.18)

$$\int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{N-K} dN = \int rdt \quad (2.31)$$

$$\ln(N) - \ln(K-N) = rt + C \quad (2.32)$$

donde C es la suma de constantes de integración. Ahora, multiplicando por (-1) para organizar la ecuación anterior y la función exponencial para despejar la variable N ,

$$\ln(K - N) - \ln(N) = C - rt \quad (2.33)$$

se aplica propiedades de los logaritmos al lado izquierdo de la igualdad, pues se tiene una resta de logaritmos

$$\ln\left(\frac{K - N}{N}\right) = C - rt \quad (2.34)$$

empleamos la función exponencial, para poder despejar la variables $N(t)$

$$e^{\ln\left(\frac{K - N}{N}\right)} = e^{C - rt} \quad (2.35)$$

$$\frac{K - N}{N} = e^{C - rt} \quad (2.36)$$

$$K - N = Ne^{C - rt} \quad (2.37)$$

$$K = Ne^{C - rt} + N \quad (2.38)$$

$$K = N(e^{C - rt} + 1) \quad (2.39)$$

$$N(t) = \frac{K}{e^{C - rt} + 1} \quad (2.40)$$

Luego de algunos pasos algebraicos, se obtiene la solución explícita de la ecuación diferencial (2.14), expresión conocida como modelo logístico. Donde:

- $N(t)$ es el número de individuos de la población a un tiempo t , como también, representa la longitud promedio de los alevinos a un tiempo t .
- K es la capacidad de soporte del ambiente, y significa el valor del crecimiento máximo de la población; de igual forma, K es la longitud máxima que los peces puedes alcanzar en su fase de alevino en un ambiente controlado.
- e es la base de los logaritmos naturales.

- C es la constante de integración. Es un valor positivo que depende las condiciones iniciales de $N(0)$.
- r es la tasa de crecimiento.
- t es el tiempo.

La gráfica que representa el modelo logístico está representada por la siguiente figura:

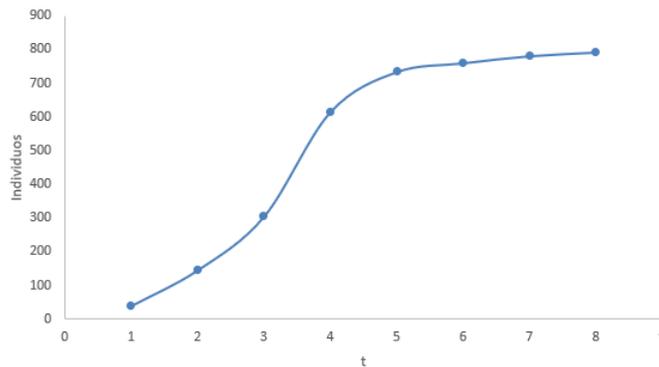


Figura 2.3: Curva del modelo logístico con $K = 800$, $C = 3,82$ y $r = 1,16$.

Elaboración del autor

2.2.3. Modelo de Gompertz

El modelo de Gompertz ha sido utilizado como modelo de crecimiento desde mucho antes, incluso mas tiempo que el modelo logístico. Fue propuesto por Benjamín Gompertz en 1825, para describir la relación entre el aumento de la tasa de mortalidad y la edad en los humanos. En su trabajo, titulado *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies* explicaba esta "ley" teórica de mortalidad: “Es posible que la muerte sea la consecuencia, fundamentalmente, de dos causas que coexisten; la primera es un componente independiente de la edad (factores externos) y la segunda uno dependiente (el deterioro propio del envejecimiento), el cual crece exponencialmente a medida que la edad avanza" (Hooker, 1965). La publicación del documento fue en 1825 por *Philosophical Transactions*, de la Royal Society (Kirkwood, 2015).

La ecuación diferencial del modelo del Gompertz puede verse como un caso particular del modelo logístico generalizado propuesto por Richards (1959),

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \quad (2.41)$$

la expresión anterior incluye los mismos parámetros biológicos que el modelo de Verhulst, la tasa intrínseca de crecimiento r y K como el crecimiento máximo. Se puede apreciar también, que la tasa de crecimiento es de tipo logarítmico, es decir, que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la variable $N(t)$ se acerca a un límite. En un crecimiento logarítmico la tasa de crecimiento se desacelera a medida que la variable se acerca a su máximo valor.

Para poder encontrar la solución analítica de la ecuación diferencial, se procede a utilizar técnicas de integración.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{N(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)}dN(t) = r dt \quad (2.43)$$

$$\int \frac{1}{N(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)}dN(t) = \int r dt \quad (2.44)$$

Aplicando la técnica de integración por sustitución de variables al lado izquierdo y reemplazando en la ecuación anterior,

$$u = N(t) \rightarrow \frac{du}{dt} = dN(t) \rightarrow du = \frac{dN(t)}{dt} dt \quad (2.45)$$

$$\int \frac{du}{u\ln\left(\frac{K}{u}\right)} = \int r dt \quad (2.46)$$

Por un lado,

$$m = \ln\left(\frac{K}{u}\right) \rightarrow dm = -\frac{1}{u} du \quad (2.47)$$

reemplazamos el valor de m , en la integral de al lado izquierdo

$$-\int \frac{dm}{m} = -\ln(u) + C_1 \quad (2.48)$$

$$\int \frac{du}{u \ln\left(\frac{K}{u}\right)} = -\ln\left(\ln\left(\frac{K}{u}\right)\right) + C_1 \quad (2.49)$$

Por otro lado, resolviendo la integral de al lado derecho de la ecuación (2.33)

$$\int r dt = rt + C_2 \quad (2.50)$$

Igualando los resultados de las integrales (2.38) y (2.39)

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{K}{u}\right)\right) + C_1 = rt + C_2 \quad (2.51)$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{K}{u}\right)\right) = -rt + C_3 \quad (2.52)$$

Empleando la función exponencial e , para despejar la variable $N(t)$

$$e^{\ln(\ln(\frac{K}{u}))} = e^{-rt+C_3} \quad (2.53)$$

$$\ln\left(\frac{K}{u}\right) = e^{-rt} e^{C_3} \quad (2.54)$$

$$\ln\left(\frac{K}{u}\right) = C_4 e^{-rt} \quad (2.55)$$

Volviendo a aplicar la función exponencial

$$e^{\ln(\frac{K}{u})} = e^{C_4 e^{-rt}} \quad (2.56)$$

Llamamos a la constante $C_4 = B$

$$\frac{K}{u} = e^{B e^{-rt}} \quad (2.57)$$

$$u = A e^{-B e^{-rt}} \quad (2.58)$$

Dado que $u = N(t)$, tenemos

$$N(t) = Ae^{-Be^{-rt}} \tag{2.59}$$

Se obtiene la función que soluciona la ecuación diferencial de Gompertz, conocida como el modelo de Gompertz. Donde:

- $N(t)$ es el tamaño de la población al tiempo t ; como también, representa la longitud de los alevinos de *Pimelodus Grosskopfii* al tiempo t .
- K es el tamaño máximo de crecimiento de la población, y determina el punto de inflexión en la curva en $\frac{K}{e}$; También representa el tamaño máximo que los peces de *Pimelodus Grosskopfii* pueden alcanzar en su etapa de alevino.
- B es un valor relativo a la asíntota de K , y desplaza al modelo a la izquierda o la derecha.
- r es el coeficiente o la tasa intrínseca de crecimiento, que afecta la forma de la curva.

Esta ecuación ha sido ampliamente utilizado en biología para describir desde el crecimiento de animales, como plantas, aves y peces, hasta el crecimiento de bacterias y tumores en animales.

La gráfica que representa el modelo de Gompertz está representada por la siguiente figura:

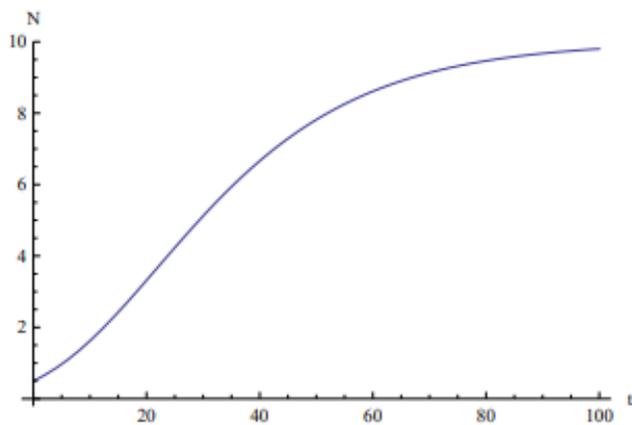


Figura 2.4: Curva del modelo de Gompertz con $K = 10$, $B = 3$ y $r = 0,05$.
 Tomado de Trinidad B. Adalberto (2014).

2.2.4. Modelo de Von Bertalanffy

La Teoría General de Sistemas fue formulada por el biólogo austriaco Ludwing Von Bertalanffy (1901-1972), se presenta como una forma sistemática y científica de aproximación a la realidad, y al mismo tiempo, busca la aplicación de unos mismos modelos en diferentes ciencias, dado que la diferencia de las entidades en cada una, no impide que unas maquetas o modelos creados desde campos científicos diferentes puedan ahorrar esfuerzos para otros, (Galvis, 2014).

En 1938 el biólogo austriaco Karl Ludwing von Bertalanffy introdujo un modelo para estudiar el crecimiento de individuos pertenecientes a poblaciones de animales. Dicho modelo surgió tras una adaptación del modelo logístico de Verhulst. El modelo propuesto inicialmente describe el crecimiento individual, expresado en términos de talla (términos de longitud o peso del individuo) y edad. Para Bertalanffy (1938), el crecimiento orgánico de un organismo está basado en principios biológicos. El crecimiento se basa en la acción encontrada entre los procesos anabólicos (síntesis de sustancias complejas) y catabólicos (descomposición de sustancias complejas en sustancias más simples, en general con liberación de energía). Es decir que el organismo crece cuando la formación sobrepasa a la degradación y se detiene cuando se equilibran ambos procesos. El catabolismo en muchos organismos, es proporcional al volumen (peso) V y el anabolismo es proporcional a la superficie S . (Valle 1986).

Esta relación, expresada matemáticamente es:

$$\frac{dV}{dt} = hS(t) - cW(t) \quad (2.60)$$

donde $S(t)$, $W(t)$, h y c son: el peso y la superficie corporal a la edad t y las tasas de anabolismo y catabolismo del individuo, respectivamente.

Para Poole (Poole, 1974), el modelo cuenta con las siguientes suposiciones:

- El organismo crece isométricamente (el peso incrementa en forma proporcional a la longitud).
- El organismo mantiene una gravedad específica constante.
- La tasa de crecimiento de un individuo no está influida por la densidad de la población.

Ahora bien, se definen las siguientes relaciones :

- El aumento de peso es proporcional a la superficie del organismo (ya que se necesita absorber material del entorno).

$$\Delta W = hS(t) \quad (2.61)$$

- La pérdida de peso es proporcional al volumen del organismo (porque el metabolismo ocurre en todo el volumen) .

$$\Delta W = cV(t) \quad (2.62)$$

- Es necesario especificar la relación entre peso (volumen) V y área S , que podría ser no trivial. Considerando sólo animales euclídeos, típicamente esféricos (Abramson G, 2014):

$$S = aL^2 \quad (2.63)$$

$$V = bL^3 \quad (2.64)$$

Como se desea expresar la ecuación de von Bertalanffy en función de la longitud L , derivamos la ecuación (2.53) con respecto a esta variable:

$$V = bL^3 \quad (2.65)$$

$$\frac{dV}{dt} = 3bL^2 \frac{dL}{dt} \quad (2.66)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.55) en la ecuación diferencial (2.49):

$$\frac{dV}{dt} = hS(t) - cW(t) \quad (2.67)$$

$$3bL^2 \frac{dL}{dt} = haL^2 - cbL^3 \quad (2.68)$$

$$\frac{dL}{dt} = (haL^2 - cbL^3) \left(\frac{1}{3bL^2} \right) \quad (2.69)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{haL^2}{3bL^2} - \frac{cbL^3}{3bL^2} \quad (2.70)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{hac}{3bc} - \frac{cL}{3} \quad (2.71)$$

Dado que el crecimiento es isométrico, $W = bL^3$, y si se renombran las constantes como $L_\infty = \frac{ha}{bc}$ y $k = \frac{c}{3}$, se obtiene la correspondiente ley de velocidad de aumento en la talla del organismo:

$$\frac{dL}{dt} = kL_\infty - kL \quad (2.72)$$

- L_∞ es el valor de L para el que la tasa de crecimiento es nula.
- k es un tercio del ritmo catabólico: $\frac{c}{3}$.

La ecuación (2.61) también se puede escribir como:

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L) \quad (2.73)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como el modelo de Von Bertalanffy (1938), es una de las ecuaciones más utilizadas para describir el crecimiento de los peces y ha sido ampliamente aplicada en la acuicultura y la pesquería.

Solucionando la ecuación diferencial (2.62):

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L) \quad (2.74)$$

$$\frac{dL}{(L_\infty - L)} = k dt \quad (2.75)$$

$$\int \frac{dL}{(L_\infty - L)} = \int k dt \quad (2.76)$$

$$-\ln(L_\infty - L) = kt + C \quad (2.77)$$

$$\ln(L_{\infty} - L) = -kt + C \quad (2.78)$$

$$e^{\ln(L_{\infty} - L)} = e^{-kt + C} \quad (2.79)$$

$$L_{\infty} - L = e^{-kt} e^C \quad (2.80)$$

$$L_{\infty} - L = C e^{-kt} \quad (2.81)$$

$$-L = -L_{\infty} + C e^{-kt} \quad (2.82)$$

$$L = L_{\infty} - C e^{-kt} \quad (2.83)$$

Tomando a $L(0) = 0$, cuando la edad teórica sea $t(0) = t_0$

$$L(t) = L_{\infty} - C e^{-kt} \quad (2.84)$$

$$0 = L_{\infty} - C e^{-kt_0} \quad (2.85)$$

$$-L_{\infty} = -C e^{-kt_0} \quad (2.86)$$

$$L_{\infty} e^{kt_0} = C \quad (2.87)$$

Luego,

$$L(t) = L_{\infty} - \left(L_{\infty} e^{kt_0} \right) e^{-kt} \quad (2.88)$$

$$L(t) = L_{\infty} \left(1 - e^{kt_0} e^{-kt} \right) \quad (2.89)$$

$$L(t) = L_{\infty} \left(1 - e^{-k(t-t_0)} \right) \quad (2.90)$$

Se obtiene la forma general del modelo de Von Bertalanffy. Donde:

- $L(t)$ es la longitud del individuo al tiempo t ; representa la longitud de los alevinos de *Pimelodus Grosskopfii* al tiempo t .
- L_{∞} es la longitud máxima del individuo. Es la asíntota superior paralela al eje x ; También representa el tamaño máximo que los peces de *Pimelodus Grosskopfii* pueden alcanzar en su etapa de alevino.
- k una estimación de la tasa de crecimiento del individuo.
- t representa al tiempo.
- t_0 es el valor teórico del tiempo en el cual la longitud es 0.

La gráfica que representa el modelo de Von Bertalanffy está representada por la siguiente figura:

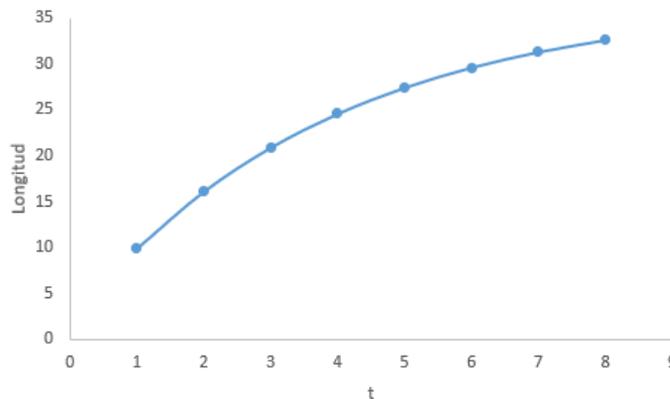


Figura 2.5: Curva del modelo de Von Bertalanffy con $L_{\infty} = 37$, $k = -0,26$ y $t_0 = 0,2$.

Elaboración del autor

2.3. Obtención de los parámetros de los modelos matemáticos

A continuación, se describen los modelos de regresión lineal y no lineal, que son la base de los modelos estudiados.

2.3.1. Modelo de regresión lineal

El modelo de regresión lineal es una técnica estadística utilizada para explicar el comportamiento de y para determinados valores de x . Consiste en una recta que predice el valor de una variable respuesta y a partir de una variable explicativa x , y de un término de error e ; la regresión lineal se basa en la ecuación matemática de una línea recta:

$$y_i = a + bx_i + e_i \quad (2.91)$$

Se define el valor de la predicción como \hat{y}_i

$$\hat{y}_i = a + bx_i \quad (2.92)$$

Donde y_i es la variable dependiente que se pretende explicar, a es la intersección en el eje y_i , b es el coeficiente de regresión que representa el cambio en y_i por unidad de cambio en x_i , x_i es la variable independiente y el término e_i se conoce como término de error o error de predicción y es igual a la diferencia entre el valor que predice el modelo y el valor observado. Representa la parte de y_i que no es explicada por x_i o la influencia de otras variables no contempladas en el modelo.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (2.93)$$

El problema de regresión lineal es la estimación de los parámetros. Se puede resolver con el método de mínimos cuadrados, el cual busca la solución al problema de minimizar la suma de los errores al cuadrado.

$$SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 \quad (2.94)$$

Para analizar el ajuste del modelo, se calcula el coeficiente de determinación R^2 , que mide el grado de dispersión de los valores observados con respecto al modelo. Valores cercanos a 1 indican un mayor grado de ajuste del modelo. Una mayor dispersión indica que el modelo no es

representativo del comportamiento de y_i con respecto a x_i .

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (e_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (2.95)$$

2.3.2. Modelo de regresión no lineal

Un modelo de regresión no lineal es una técnica de análisis estadístico que se utiliza para modelar relaciones entre variables que no se ajustan a una función lineal. A diferencia de los modelos de regresión lineal, que suponen que la relación entre las variables es lineal, los modelos de regresión no lineal utilizan funciones no lineales para representar las relaciones entre las variables. La forma general de un modelo de regresión no lineal está dada por:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \epsilon_i \quad (2.96)$$

Donde f es una función no lineal en sus parámetros y se asume que ϵ_i sigue una distribución normal de media igual a cero y desviación igual a σ^2 . El valor de y_i que predice el modelo está dado por:

$$\hat{y} = f(x_i, \beta) \quad (2.97)$$

Los datos x_i e y_i se relacionan mediante una función no lineal respecto a unos parámetros β desconocidos, estos β se encuentran a través de mínimos cuadrados o bien con otros métodos como máxima verosimilitud.

Se puede resolver con el método de mínimos cuadrados, el cual busca la solución al problema de minimizar la suma de los errores al cuadrado.

$$SCE(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta))^2 \quad (2.98)$$

Linealizando $f(x_i, \beta)$ en el punto β_k , se obtiene el sistema lineal:

$$f(\beta_k) + J(\beta_k)d = 0 \quad (2.99)$$

$$d = \beta - \beta_k$$

Donde $J(\beta_k)$ es la matriz Jacobiano de SCE en el punto β_k . Si la matriz Jacobiano de SCE(β), es singular o no invertible, el problema de optimización se reemplaza por el problema de mínimos cuadrados lineales (Cornejo Zúñiga y Rebolledo Vega, 2016):

$$\min_{d \in \mathbb{R}} \|f(\beta_k) + J(\beta_k)d\| \quad (2.100)$$

2.3.3. Método de Gauss-Newton

El método de Gauss-Newton es un algoritmo iterativo para minimizar una función expectativa de suma de cuadrados. Iterativo ya se debe proporcionar una estimación inicial del vector de parámetros para encontrar una solución.

El método asume que la función expectativa es aproximadamente cuadrática en los parámetros cercanos a la solución óptima. A diferencia del método de Newton, que requiere del cálculo de la matriz Hessiana y que esta sea invertible, la cual no siempre es posible encontrar durante las iteraciones, Gauss-Newton no utiliza la matriz Hessiana completa para el modelo cuadrático, en cambio, utiliza una aproximación de una matriz definida positiva B_k , la cual se va modificando en cada iteración para converger a la verdadera matriz Hessiana (Coleman, 1984), (Frandsen, Jonasson, Nielsen, y Tingleff, 1999), (Lange, 2004).

$$B_k = J_k^T J_k \quad (2.101)$$

La expresión para hallar el paso p_k :

$$J_k^T J_k p_k = -\nabla f_k = J_k^T r_k \quad (2.102)$$

La fórmula general del método de Gauss-Newton es (Cubas Córdoba, 2020; Wolfram, 2017):

$$x_{k+1} = x_k - (J_k^T J_k)^{-1} J_k r_k \quad (2.103)$$

El método de Gauss-Newton se puede interpretar en términos de mínimos cuadrados. Resolver el método de Gauss-Newton es igual que solucionarlo por mínimos cuadrados lineales, es decir, se puede utilizar el método de Gauss Newton es equivalente a emplear una sucesión de ajustes por mínimos cuadrados lineales a una función no lineal (Cubas Córdoba, 2020).

2.3.4. Método de Levenberg-Marquardt

El método de Levenberg-Marquardt es un algoritmo iterativo de estimación no lineal para ajustar modelos matemáticos a datos observados. El objetivo del método de Levenberg-Marquardt es encontrar los valores óptimos de los parámetros de un modelo no lineal mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos, es decir, la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por la función.

Este algoritmo se puede ver como la combinación de dos enfoque de optimización, entre los métodos del gradiente y de Gauss-Newton. Al encontrarse la solución actual lejos del mínimo local, el algoritmo se comporta como el método de gradiente. Sin embargo, si la solución se encuentra cercana al mínimo local, el método presenta un comportamiento similar al método de Gauss-Newton, convergiendo rápidamente (Lastra Cortes y Cornejo Zúñiga, 2003), es decir, dependiendo del valor inicial i , el algoritmo se puede comportar de alguno de los dos métodos mencionados.

Levenberg (1944) y Marquardt (1963) sugirieron calcular la dirección $p_k = \theta - \theta_k$, mediante la solución del problema:

$$\min_{p_k \in R^n} \|f(\theta_k) + J(\theta_k)p\|_2 \quad \text{s. a.} \quad \|p\| \leq \Delta_k \quad (2.104)$$

Donde $\Delta_k > 0$ es el radio de la región de confianza (Lastra Cortes y Cornejo Zúñiga, 2003, 2003).

A continuación se describen algunas técnicas de evaluación del ajuste de los modelos.

2.3.5. Coeficiente de determinación R^2

Una vez que los parámetros del modelo se hayan estimado, es conveniente utilizar una medida sobre la bondad del ajuste total conseguido, el cual mide la variación de la medida, que es expresada y explicada por el modelo. Si todas las observaciones siguen en línea de regresión ajustada, se obtiene el máximo valor de R^2 , que es el valor más cercano a 1. De este modo, cuanto mayor sea el valor este estadístico, el cual está entre 0 y 1, mejor será la predicción del modelo ajustado (Grau y Vanderlinde, 1993; Duffy, Vanderlinde, y Grau, 1994).

Un estadístico que facilita esta medida es el coeficiente de determinación R^2 :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_p - \hat{Y}_o)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_o - \hat{Y}_o)^2} \quad (2.105)$$

Donde (Aguilar Aguilar, 2010; Martínez, Martínez, y cols., 1997):

- $\sum_{i=1}^n (Y_p - \hat{Y}_i)^2$ representa sumatoria de las desviaciones entre los valores predichos Y_p y la media de los valores observados \hat{Y}_o elevadas al cuadrado.
- $\sum_{i=1}^n (Y_o - \hat{Y}_o)^2$ representa sumatoria de las desviaciones entre los valores observados Y_o y la media de los valores observados \hat{Y}_o elevadas al cuadrado.

2.3.6. Coeficiente de determinación ajustado R^2_{ajd}

A diferencia del R^2 , que mide la proporción de la variabilidad de la variable dependiente que es explicada por el modelo de regresión, el $\overline{R^2}$ ajustado ajusta la medida por el número de variables independientes incluidas en el modelo. Es decir, el $\overline{R^2}$ ajustado toma en cuenta el efecto del número de variables independientes sobre la precisión del modelo. Donde \hat{S}_R^2 es la varianza residual y, \hat{S}_y^2 es la cuasivarianza de y

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{\hat{S}_R^2}{\hat{S}_y^2} \quad (2.106)$$

2.3.7. Suma de cuadrados del error (SCE)

Esta medida hace referencia a la sumatoria de las desviaciones entre los valores predichos Y_p y los valores observados Y_o elevadas al cuadrado. Si las observaciones caen sobre la línea de regresión ajustada, entonces $SCE = 0$ (Martínez y cols., 1997; Aguilar Aguilar, 2010).

$$SCE = \sum_{i=1}^n (Y_o - Y_p)^2 \quad (2.107)$$

2.3.8. Coeficiente de correlación de Pearson (r)

El coeficiente de relación de Pearson, es una medida de la estadística descriptiva, se utiliza para medir qué tan fuerte es la relación lineal entre dos variables, y se denota por r . Este coeficiente puede tomar un rango de valores entre -1 a 1 . Un valor de 0 indica que no hay asociación entre las dos variables, un valor menor que 0 indica una relación negativa entre las dos variables; es decir, a medida que el valor de una variable aumenta, el valor de la otra disminuye, y un valor mayor que 0 indica una asociación positiva; es decir, que a medida que el valor de una variable aumenta, también lo hace el valor de la otra variable.

La correlación de Pearson trata de dibujar una línea de mejor ajuste por medio de los datos de las dos variables, y el coeficiente r nos indicará que tan bien se ajustan el conjunto de datos a este nuevo modelo, es decir, qué tan lejos están todos los puntos de datos a esta línea de mejor ajuste.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}} \quad (2.108)$$

2.4. Minitab

Minitab es un software estadístico utilizado para el análisis de datos y la generación de informes. Es una herramienta útil que permite a científicos, investigadores, profesionales e ingenieros a realizar análisis estadísticos, visualizaciones, gráficos, pruebas de hipótesis, pruebas de calidad entre otras funciones que el software ofrece.

Entre las funciones que ofrece Minitab, están:

- **Análisis de datos:** ofrece una amplia gama de herramientas estadísticas básicas y avanzadas para analizar bases de datos, como estadísticas descriptivas, pruebas de hipótesis, análisis de varianza (ANOVA), regresión lineal y no lineal, entre otros.
- **Gráficos y visualizaciones:** facilita la visualización de datos y proporciona una variedad de opciones para crear gráficos para explorar y presentar de manera efectiva, como gráficos de caja y bigotes, gráficos de dispersión, histogramas, gráficos de control y calidad, entre otros.
- **Análisis de calidad:** se usa ampliamente en las áreas de control de calidad y mejora de procesos, proporcionando herramientas como gráficos de control, análisis de capacidad de procesos, diseño de experimentos y análisis de sistemas de medición (MSA).

Es un software estadístico muy completo por su capacidad para realizar análisis estadísticos complejos de manera relativamente sencilla. En el campo estudiantil, Minitab, por su interfaz amigable, es de mucha utilidad al momento de aprender, profundizar e interpretar conceptos estudiados previamente en cursos de estadística, probabilidad y matemáticas. Por tales razones, este software matemático y estadístico se utilizó para este trabajo con el propósito de que facilitara a la interpretación y selección del modelo que mejor se ajusta a la curva de crecimiento para cumplir con el objetivo de esta investigación.

Minitab proporciona los siguientes criterios para la validación de un modelo por medio del método de regresión no lineal:

- **Número de iteraciones:** Este valor indica el número necesario de iteraciones para que el modelo logre convergencia. Para Minitab, este valor es requerido para obtener la suma final de los cuadrados del error (SSE final) aunque no se le atribuye un significado a este número.
- **Suma de los residuos al cuadrado (SSE final):** Esta medida cuantifica la variación en los datos que no es explicada por los predictores del modelo, es decir, es la parte que el conjunto de variables independientes no consigue explicar de la variable independiente. Cuanto mas bajo sea el valor de SSE final, mejor será descrita la respuesta por el modelo. Esta medida también se conoce como la suma de cuadrados del error (SCE) mencionada en la sección anterior.

- **DFE:** Los grados de libertad para el error (DFE) es la cantidad de información de los datos, y es determinado por el número de observaciones al tamaño de la muestra (el número de parámetros).
- **MSE:** Este valor se obtiene dividiendo la suma de los cuadrados del error residual entre los grados de libertad. El MSE es la varianza en torno a la línea de regresión ajustada (valores ajustados) $MSE = \frac{SSE_{final}}{DFE}$.
- **S:** representa la desviación estándar de los datos de una muestra y es una medida importante de bondad de ajuste para un modelo no lineal. La desviación estándar es la medida que nos representa qué tan dispersos están los datos observados de la función de regresión no lineal. S representa la desviación estándar de la distancia entre los valores de datos y de los valores ajustados (de la función de regresión no lineal), se utiliza para evaluar qué tan bien el modelo describe la respuesta y se mide en las mismas unidades de la variable respuesta. Mientras más bajo sea el valor de S, mejor describirá el modelo la respuesta.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

3.1. Tipo de estudio

En este estudio se procesan los datos obtenidos en la caracterización del crecimiento del *Pimelodus grosskopfii* en su primera fase (alevino) de desarrollo de vida, para validar el uso de los modelos matemáticos como una herramienta teórica aplicable para la predicción en el crecimiento del capaz en condiciones de cautiverio.

- **Investigación exploratoria:** Se presenta, en efecto, porque este estudio pretende analizar aspectos que han sido poco estudiados, apoyados en la recolección de datos que permitirán solucionar la necesidad investigativa propuesta.
- **Investigación cuantitativa:** Este proyecto utiliza la investigación cuantitativa dado que utilizará gran cantidad de datos y herramientas estadísticas, matemáticas y tecnológicas.
- **Investigación de campo:** el objetivo se centra en recopilar datos y muestras representativas. A partir del razonamiento hipotético-deductivo, se pretende aplicar medidas estadísticas para analizar los datos.

3.2. Ubicación del estudio

Se tomó como población la especie capaz *Pimelodus grosskopfii* cultivada en la Estación Experimental de Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana, la cual se encuentra

ubicada en el predio “La Granja Experimental”, propiedad de la Universidad Surcolombiana, vereda San Miguel Palermo-Huila y situada a 461 m.s.n.m. en el distrito de riego El Juncal, a siete (7) Kilómetros de la ciudad de Neiva. Esta zona presenta una temperatura ambiental promedio de 28.6°C.

3.3. Material biológico

Los alevinos de capaz fueron obtenidos por reproducción inducida en la Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana. Se tomaron muestras aleatorias durante 41 para obtener información suficiente sobre su primera fase de vida. Las muestras recolectadas se almacenaron en frascos pequeños de plásticos con formol dentro de ellos, para la conservación de los organismos para su posterior análisis y estudios.

La recolección de los datos se realizó de manera manual. Para tomar las medidas de los peces se utilizaron instrumentos de medida como el estereoscopio y una regla metálica. El primero se utilizó para medir a los alevinos que tenían 12 *HPE* (Horas post eclosión) donde eran individuos muy diminutos para ser medidos con la regla. Las condiciones ambientales en las que se encontraron los alevinos de *Pimelodus grosskopfii* fueron las indicadas para un óptimo desarrollo de los individuos, con temperatura promedio de 27,2°C, oxígeno disuelto promedio de 4,93 *mg/l*t y una saturación del oxígeno disuelto de 54,98% en el tanque donde se ubicaban los individuos.

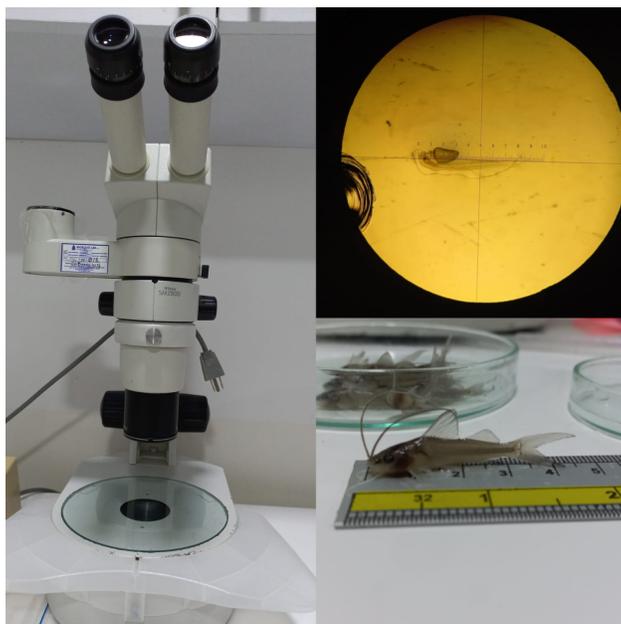


Figura 3.1: Imagen ilustrativa de los alevinos de Capaz (*Pimelodus grosskopfii*)

Elaboración del autor

3.4. Fuentes de investigación

- **Primarias:** Estación Experimental Surcolombiana de Recursos Hidrobiológicos de la US-CO.
- **Secundarias:** Libros, artículos, tesis, registros y demás material que proporcionen información e interpretación relacionada con el tema en materia.

3.5. Análisis estadístico

Para el análisis de las magnitudes de la longitud de los alevinos de *Pimelodus grosskopfii* se emplearon cuatro funciones no lineales de crecimiento que se relacionan a continuación:

Modelo de Malthus (1798)	$L(t) = L(0)e^{rt}$
Modelo Logístico (1838)	$L(t) = \frac{A}{e^{C-rt} + 1}$
Modelo de Gompertz (1932)	$L_t = Ae^{-Be^{-rt}}$
Modelo de Von Bertalanffy (1957)	$L_t = A(1 - e^{-r(t-t_0)})$

Figura 3.2: Funciones no lineales de crecimiento.

Elaboración del autor

En las funciones, $L(t)$ corresponde la longitud al tiempo t , el coeficiente A es la asíntota a la que convergen las longitudes de los peces en la fase a estudiar, e es la base de los logaritmos naturales, r es la tasa de crecimiento, y t_0 es la edad hipotética en la cual la longitud es cero.

Las variables a evaluar, son los parámetros de las funciones mencionadas previamente, las cuales reflejarán una representación aproximada acerca de la longitud que podrán alcanzar los alevinos de *Pimelodus grosskopfii* en un ambiente controlado y en condiciones ambientales favorables. La función que mejor se ajuste a los datos observados, es la que mejor representará la dinámica de crecimiento para el presente trabajo de investigación.

Los criterios utilizados para seleccionar el modelo que mejor describía la curva de crecimiento fueron: coeficiente de determinación ajustado, gráfico de distribución residual, S y MSE .

Capítulo 4

Análisis Y Resultados

El objetivo de la investigación es obtener un modelo de crecimiento que permita predecir el crecimiento de los alevinos de capaz *Pimelodus grosskopfii* en un ambiente en cautiverio de la estación experimental Surcolombiana de recursos hidrobiológicos de la Universidad Surcolombiana.

Se cuenta con información de longitudes promedios recolectados a partir de una reproducción artificial, fueron tomadas quince muestras aleatorias por un periodo de cuarenta y un días de un estanque en que se encontraban desarrollándose los individuos. A continuación, se presenta los datos recolectados de las muestras en la siguiente tabla.

Edad (días)	Longitud Promedio (cm)
1	0,405076923
2	0,525925926
5	0,65
6	0,664705882
9	0,725
10	0,73438
11	0,7583333
12	0,848148148
13	0,890322581
14	0,893333333
15	0,942857143
16	0,95
17	1,12
18	1,1375
30	2,234615385
41	3,215384615

Figura 4.1: Datos de longitud promedios de los alevinos de Capaz, *Pimelodus grosskopfii*
Elaboración del autor

Se presenta la gráfica del crecimiento en longitud del *Pimelodus grosskopfii*, durante sus primeros cuarenta y un (41) días de desarrollo alevino.

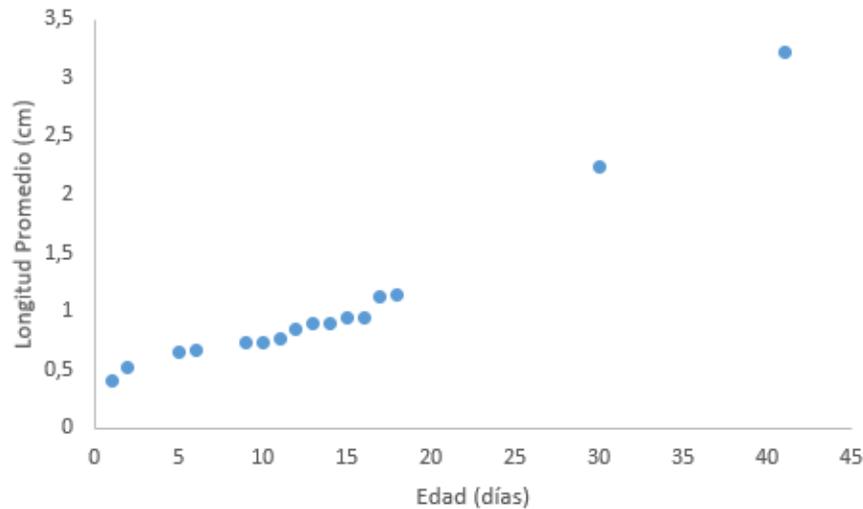


Figura 4.2: Longitud de los alevinos de Capaz (*Pimelodus grosskopfii*)

Elaboración del autor

La figura (4.2), describe que el crecimiento del Capaz durante sus primeros días de vida (fase alevino) es de un tipo exponencial, pues en los peces, al igual que en todos los seres vivos, el tamaño del cuerpo está relacionado con la edad, y a medida que van aumentando de tamaño aumentan de edad al mismo tiempo, aunque este cambio de tamaño no es constante a lo largo de toda la vida del pez, este aumento se refleja en gran parte durante sus primeros años de vida hasta llegar a una madurez adulta, (Csirke, 1980).

En el estanque todos los *Pimelodus grosskopfii* (Steindachner 1879) tienen la misma fecha de siembra, por lo que la variabilidad será muy baja. Cada estanque en la Estación sigue una trayectoria de crecimiento diferente, por lo tanto, cada tanque, lago o estanque acuático sigue su propio modelo o patrón de crecimiento para cada especie que se siembre.

El modelamiento matemático se convierte entonces, en una herramienta de ayuda para describir o simular procesos funcionales en un sistema tecnológico, en donde el cultivo de peces se convierte en un nuevo mecanismo de conservación para aquellas especies las cuales el hábitat en donde viven se encuentra en amenaza (sobrepesca, contaminación de fuentes

hídricas, climas muy áridos, entre otra.). Este instrumento ha sido valioso para desarrollar sistemas de alimentación en diferentes especies de animales (Dumas, France, y Bureau, 2010), para desarrollar un modelo el cual permita tener un control y calidad al agua de los estanques o lagos donde se siembran, desarrollar un modelo que permita monitorear el crecimiento del langostino en una crianza semi-intensiva (Cubas Córdoba, 2020). Por tanto, la utilidad de un modelo de crecimiento en estas instalaciones está en su capacidad de predecir el crecimiento de los días siguientes a cada medición, y así ayudar en la toma de decisiones, como por ejemplo, mejorar las condiciones de la reproducción de capaz en la región.

El objetivo de esta investigación es a partir de los modelos matemáticos propuestos, analizar el modelo que mejor ajuste tuvo para predecir el crecimiento del Capaz en su fase de alevino de acuerdo a los datos observados; se consideró únicamente el tiempo el cual dura su etapa inicial de vida como regresor del modelo. Para la construcción del modelo se utilizó la totalidad de los datos de las muestras recogidas.

Se estimaron los parámetros para cada uno de los modelos de crecimiento estudiados: Gompertz, Von Bertalanffy, Logístico y Malthus. Finalmente, se evaluó el ajuste de la data a cada modelo para identificar los modelos con mejor ajuste.

4.1. Construcción de los modelos

En esta sección se muestran los resultados de ajustar la data para cada modelo en Minitab. El análisis para cada modelo está dividido en cuatro partes:

- Método de estimación.
- Modelo encontrado.
- Significancia.
- Análisis de residuales.

4.1.1. Modelo de Malthus

En la figura 4.3, se observa que la curva en rojo, obtenida con el método de L-M, se ajusta correctamente al comportamiento exponencial de los datos. El modelo encontrado se encuentra descrito en la parte superior de la gráfica.



Figura 4.3: Estimación del modelo de de Malthus
Elaboración del autor

Se presentan las siguientes medidas estadísticas, las cuales nos indican el grado de validación y de ajuste para el modelo de Malthus:

Resumen MALTHUS	
Iteraciones	13
SSE final	0,103366
DFE	14
MSE	0,0073833
S	0,0859216
R^2	0,917570393
$R^2 \text{ ajd}$	0,911682564
Correlación de Pearson	0,958

Figura 4.4: Tabla de resumen del modelo de Malthus
Elaboración del autor

Las gráficas de residuos se utilizan para analizar la bondad de ajuste del modelo de regresión no lineal que se obtuvo. Examinar estas gráficas ayudan a determinar si se cumplen los supuestos de los mínimos cuadrados ordinarios, describen matemáticamente la relación entre una variable

respuesta y una (o más) variable predictora. En la figura 4.5, la gráfica de probabilidad de residuos los datos son asimétricos (Histograma de los residuos), es decir, los residuos están descentrados pero con poca variabilidad, los residuos están distribuidos normalmente (Gráfica de probabilidad normal de los residuos), los residuos presentan una varianza constante (Residuos vs. ajustes) y los residuos son independientes entre sí, pues en la gráfica los datos se ubican aleatoriamente alrededor de la línea central (Residuos vs. orden).

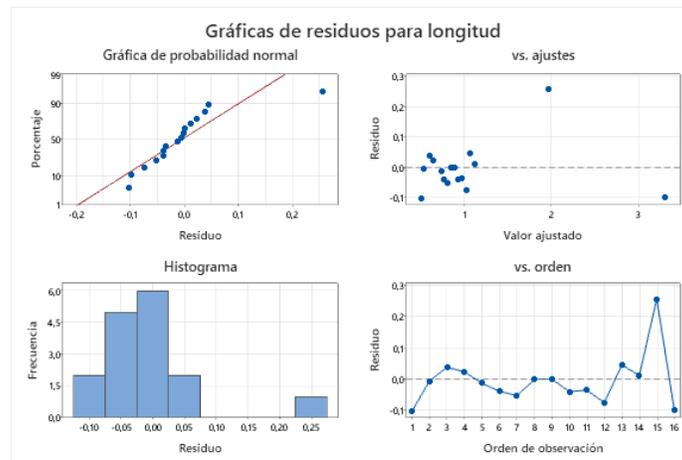


Figura 4.5: Gráfica de residuos del modelo de Malthus
Elaboración del autor

Se puede apreciar en la gráfica 4.6 de probabilidad de residuos, los datos forman una línea aproximadamente recta a lo largo de la línea roja, es un indicativo de que hay normalidad en los datos recolectados, algunos están dispersos o lejos de la recta nos indica que hubo variables externas que no se tuvieron en cuenta para este estudio. Presentando una desviación estándar de 0,08285, y una media $-0,005064$ sugiere que el modelo sobreestima los resultados a los valores reales. La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) con un valor de 0,206 y un valor $p > 0,069$ sugiere que la muestra que se está evaluando no presenta una diferencia significativa entre su distribución empírica y la distribución teórica que se está contrastando. En estos resultados, la hipótesis nula indica que los datos siguen una distribución normal y por lo tanto esto no se puede rechazar. Puesto que el valor p es 0,069, que es mayor que el nivel de significancia de 0,05, lo que sugiere que los datos muestrales tienen buena distribución con respecto a la longitud promedio de los peces.

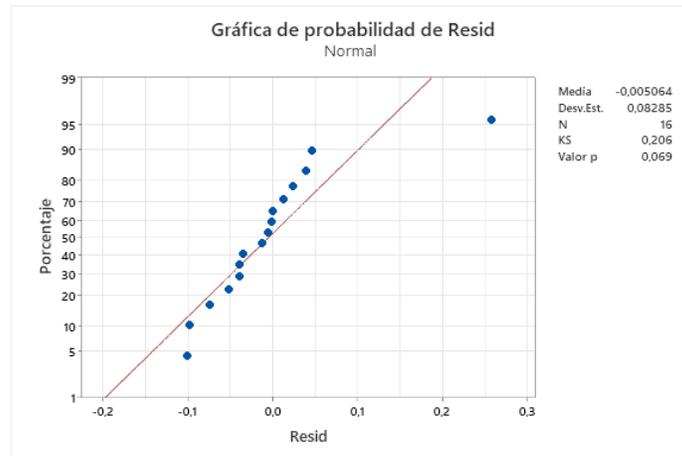


Figura 4.6: Gráficas de probabilidad de residuos del modelo de Malthus
Elaboración del autor

4.1.2. Modelo Logístico

En la figura 4.7, se observa que la curva en rojo, obtenida con el método de L-M, se ajusta correctamente al comportamiento de los datos. La forma de exponencial al principio de la función del modelo logístico, se aprecia en la figura. El modelo encontrado se encuentra descrito en la parte superior de la gráfica.

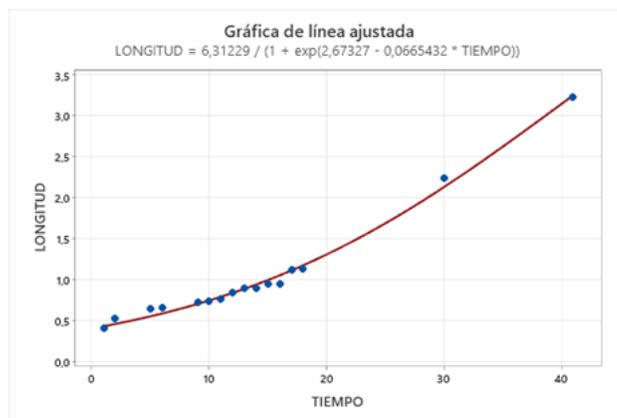


Figura 4.7: Estimación del modelo logístico
Elaboración del autor

Se presentan las siguientes medidas estadísticas, las cuales nos indican el grado de validación y de ajuste para el modelo logístico:

Resumen LOGÍSTICO	
Iteraciones	15
SSE final	0,0511614
DFE	13
MSE	0,0039355
S	0,0627335
R^2	0,950333257
R^2 <i>ajd</i>	0,94678563
Correlación de Pearson	0,975

Figura 4.8: Tabla de resumen Modelo Logístico
Elaboración del autor

Las gráficas de residuos se utilizan para analizar la bondad de ajuste del modelo de regresión no lineal que se obtuvo. Examinar estas gráficas ayudan a determinar si se cumplen los supuestos de los mínimos cuadrados ordinarios, además, describen matemáticamente la relación entre una variable respuesta y una (o más) variable predictora. En la figura 4.16, la gráfica de probabilidad de residuos los datos forman una campana de distribución normal, lo cual nos dice que la calidad del modelo es buena (Histograma de los residuos), los residuos están distribuidos normalmente, ya que siguen a la línea recta (Gráfica de probabilidad normal de los residuos), los residuos presentan una varianza constante (Residuos vs. ajustes) y los residuos son independientes entre sí, pues en la gráfica los datos se ubican aleatoriamente alrededor de la línea central (Residuos vs. orden).

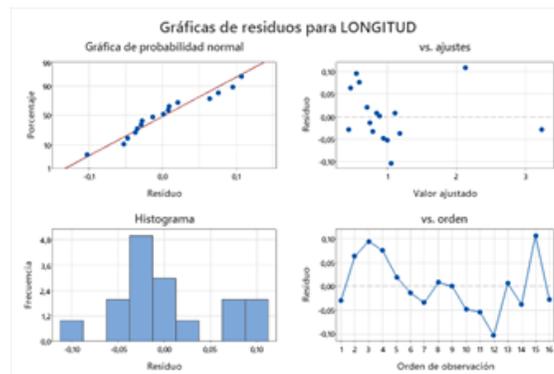


Figura 4.9: Gráficas residuales del modelo logístico
Elaboración del autor

La gráfica de probabilidad de residuos 4.10, los datos forman una línea aproximadamente recta a lo largo de la línea roja, esto indica de que hay normalidad en los datos recolectados. Presentando una desviación estándar de 0,05835, una media de 0,002374. La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) con un valor de 0,145 y un valor $p > 0,150$ sugiere que la muestra que se está evaluando no presenta una diferencia significativa entre su distribución empírica y la distribución teórica que se está contrastando. Puesto que el valor p es 0,150, que es mayor que el nivel de significancia de 0,05, la decisión es que no se puede rechazar la hipótesis nula y por tanto los datos siguen una distribución normal, lo que sugiere que los datos muestrales tienen una buena distribución con respecto a la media de la longitud promedio de los peces.

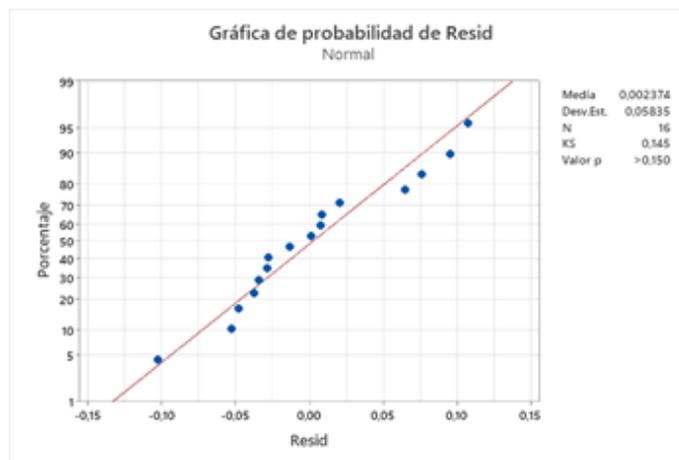


Figura 4.10: Gráficas de probabilidad de residuos del modelo logístico
Elaboración del autor

4.1.3. Modelo de Gompertz

En la figura 4.11 la curva en color rojo corresponde a la función esperada del modelo de Gompertz. Los datos reales se siguen a la curva obtenida con el método de L-M. El modelo obtenido se presenta en la parte superior de la gráfica.

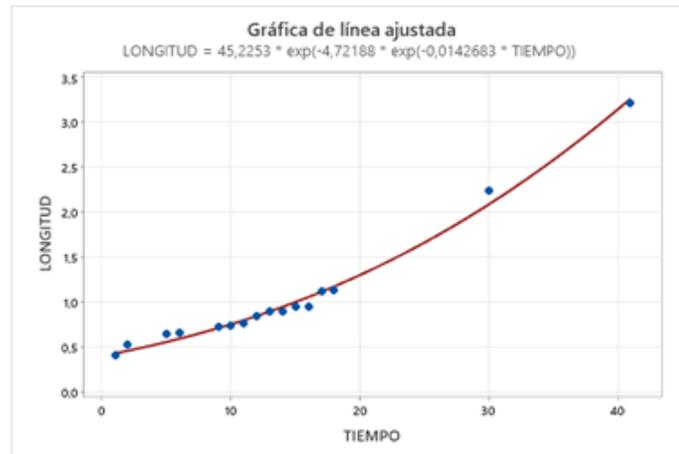


Figura 4.11: Estimación del modelo de Gompertz
Elaboración del autor

Se presentan las siguientes medidas estadísticas, las cuales nos indican el grado de validación y de ajuste para el modelo de Gompertz:

Resumen GOMPERTZ	
Iteraciones	26
SSE final	0,0640860
DFE	13
MSE	0,0049297
S	0,0702118
R^2	0,949064938
R^2 <i>ajd</i>	0,94542633
Correlación de Pearson	0,974

Figura 4.12: Tabla de resumen Modelo de Gompertz
Elaboración del autor

Por otro lado, las gráficas de residuos proporcionan información acerca de la bondad de ajuste de modelo de regresión no lineal que se obtuvo, examinar las gráficas de residuos ayudan a determinar si se cumplen los supuestos de los mínimos cuadrados ordinarios. En la figura 4.13, los residuos del modelo que se obtuvo son asimétricos (histograma); los datos no están distribuidos aleatoriamente, es decir, algunos puntos alejados de la línea implican una distribución con valores atípicos, pero que en general, siguen una distribución normal (gráfico de

probabilidad normal), los residuos están distribuidos aleatoriamente y tienen una varianza constante (residuos vs ajustes), y también los residuos son independientes entre sí (residuos vs orden).

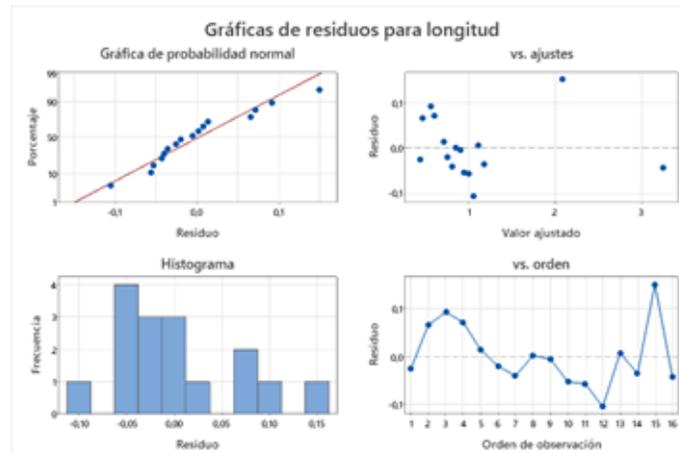


Figura 4.13: Gráficas residuales del modelo de Gompertz

Elaboración del autor

En la gráfica 4.14 de probabilidad de residuos, los puntos aunque estén dispersos siguen la línea recta, esto nos muestra que no hay evidencia de no normalidad en los datos. Presentando una desviación estándar de 0,065, una media 0,0014. La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) con un valor de 0,173 y un valor $p > 0,150$ sugiere que la muestra que se está evaluando no presenta una diferencia significativa entre su distribución empírica y la distribución teórica que se está contrastando. En estos resultados, la hipótesis nula indica que los datos siguen una distribución normal y por lo tanto ésta no se puede rechazar, esto sugiere que los datos recolectados a partir de las muestras presentan una buena distribución con respecto a la media de las longitudes promedios de los peces, puesto que el valor p es 0,150, que es mayor que el nivel de significancia de 0,05.



Figura 4.14: Gráficas de probabilidad de residuos del modelo de Gompertz

Elaboración del autor

4.1.4. Modelo de Von Bertalanffy

En la figura 4.15 se puede observar que la función estimada con el método de L-M tiene una forma lineal, la cual no sigue la forma esperada del modelo de Von Bertalanffy. A pesar de que tiene un valor alto en su coeficiente de determinación, gráficamente no se ajusta a la tendencia de crecimiento de los datos reales. Esto debido a que el modelo de Von Bertalanffy evalúa la curvatura de crecimiento de los peces a lo largo de su vida hasta que llegan a su tamaño máximo, pues en este caso, que la función esperada no resultara de forma curva, nos muestra que el modelo no se ajusta a predecir el crecimiento de los peces de *Pimelodus grosskopfii* en su fase de alevino.

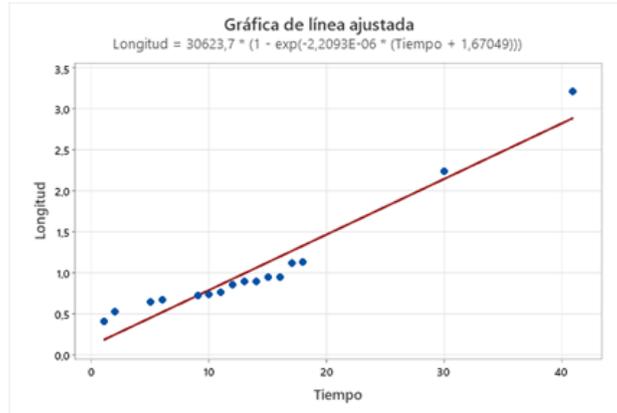


Figura 4.15: Estimación del modelo de Von Bertalanffy
Elaboración del autor

Se presentan las siguientes medidas estadísticas, las cuales nos indican el grado de validación y de ajuste para el modelo de Von Bertalanffy:

Resumen VON BERTALANFFY	
Iteraciones	200
SSE final	0,513935
DFE	13
MSE	0,0395335
S	0,198830
R^2	0,9999711
R^2_{ajd}	0,999969032
Correlación de Pearson	1,000

Figura 4.16: Tabla de resumen Modelo de Von Bertalanffy
Elaboración del autor

Por otro lado, las gráficas de residuos proporcionan información acerca de la bondad de ajuste de modelo de regresión no lineal que se obtuvo, examinar las gráficas de residuos ayudan a determinar si se cumplen los supuestos de los mínimos cuadrados ordinarios. En la figura 4.17, los residuos del modelo que se obtuvo son asimétricos hacia la izquierda (histograma), los datos siguen una distribución normal (gráfico de probabilidad normal), los residuos están distribuidos aleatoriamente y tienen una varianza constante (residuos vs ajustes), y también los residuos son independientes entre sí (residuos vs orden).

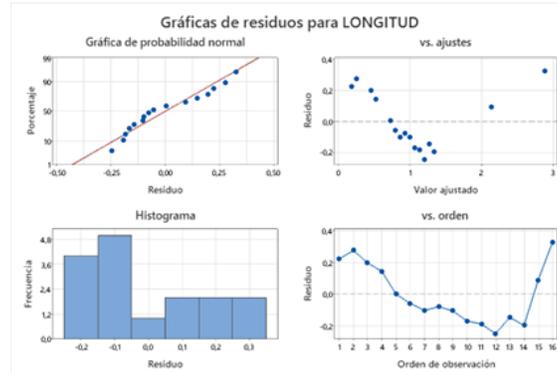


Figura 4.17: Gráficas residuales del modelo de Von Bertalanffy
Elaboración del autor

Se puede apreciar en la gráfica de probabilidad de residuos 4.18, que los puntos siguen una línea recta, por lo tanto, no hay evidencia de no normalidad, valores atípicos o variables no identificadas. Presentando una desviación estándar de 0,1851, lo que indica que los puntos de datos están muy cerca de la media 0,0001933. La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) con un valor de 0,180 y un valor $p > 0,150$ sugiere que la muestra que se está evaluando no presenta una diferencia significativa entre su distribución empírica y la distribución teórica que se está contrastando. Además, al tener un valor p mayor a 0,05, no se encuentra suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que ambas distribuciones son iguales.



Figura 4.18: Gráficas residuales del modelo de von Bertalanffy
Elaboración del autor

4.2. Comparación de los modelos

En esta sección se analizan y comparan los modelos, según su valor de R^2 *ajd*, MSE , S . En la siguiente tabla 4.20 se resumen los valores para cada uno de los modelos de crecimiento.

MÉTODO	MODELOS	R^2
LEVENBERG-MARQUARDT	<i>Malthus</i>	0,917570393
	<i>Logístico</i>	0,950333257
	<i>Gompertz</i>	0,949064938
	<i>Von Bertalanffy</i>	0,9999711

Figura 4.19: Comparación de cuatro modelos no lineales según sus medidas estadísticas

Elaboración del autor

El valor del coeficiente de determinación R^2 se encuentra entre 0,917570393 y 0,9999711, lo cual indica que los cuatro modelos, en general, se ajustan bien a los datos. El valor de R^2 es mayor para el modelo logístico. Además se observa que la diferencia es mínima para cada modelo. El modelo de Von Bertalanffy, aunque presenta un alto R^2 , gráficamente éste no se ajustó a la tendencia de crecimiento de los datos.

En la Tabla 4.20 se detallan los valores estimados de los parámetros y el valor del coeficiente de determinación ajustado de cada modelo de crecimiento.

Modelos	Estimación de los parámetros	R^2 <i>ajd</i>	S	MSE
Malthus	L_0 0,483473	0,911682564	0,0859216	0,073833
	r 0,0469488			
Logístico	A 6,31229	0,946785632	0,0627335	0,0039355
	r 0,0665432			
	C 2,67327			
Gompertz	A 45,2253	0,945426328	0,0702118	0,949064938
	B -4,72188			
	r -0,0142683			
Von Bertalanffy	A 30623,7	0,999969032	0,198830	0,0395335
	r -2,2093E - 06			
	t_0 1,67049			

Figura 4.20: Estimación de los parámetros de crecimiento según el modelo
Elaboración del autor

El valor estimado para el parámetro de crecimiento A van desde 6,31229 hasta 30623,7; para el modelo de Malthus, el valor inicial de L_0 es de 0,483473. El modelo de Von Bertalanffy es el que estima el valor más alto de A , mientras el modelo Logístico obtuvo el menor valor. El valor de la tasa de crecimiento, r , se encuentra entre $-2,2093E - 06$ y 0,0665432. El valor mas alto lo obtuvo el modelo Logístico, esto indica un crecimiento acelerado en los alevinos. Por el contrario, el modelo de Von Bertalanffy obtuvo un valor bajo, lo que indica un crecimiento lento. Los parámetros derivados de la integración C y B de los modelos Logístico y Gompertz, tienen un valor de 2,67327 y $-4,72188$, respectivamente; y, un t_0 con valor de 1,67049 para el modelo de Von Bertalanffy.

El valor del coeficiente de determinación ajustado R^2 *ajd*, se encuentra entre los valores de 0,911682564 y 0,999969032, lo cual indica que los modelos tuvieron un alto grado de ajuste a la data. El R^2 *ajd* más alto lo tiene el modelo de Von Bertalanffy, aunque, mencionado previamente, se concluye que el modelo no representa satisfactoriamente la curva de crecimiento para los alevinos de *Capaz Pimelodus grosskopfii*, en consecuencia, el modelo Logístico, es el que posee un valor alto de R^2 *ajd* en comparación con los demás modelos.

El valor más bajo de S lo obtuvo el modelo Logístico, con 0,0627335, seguido del modelo de

Gompertz. Esta medida representa la desviación estándar de la distancia entre los valores de datos y los valores ajustados, este resultado indica que la desviación estándar de los puntos de datos alrededor de los valores ajustados es 0,0627335. Comparando con los demás modelos, los valores que son menores de 0,0627335 indican un mejor ajuste y los valores mayores indican un ajuste no favorable, es decir, que los datos reales y los datos pronosticados se encuentran o muy cerca o lejos sobre la curva de crecimiento.

El cuadrado medio del error MSE , es la varianza en torno a los valores ajustados. Cuanto menor sea el valor de MSE , mejor se ajustará el modelo a los datos. En ese caso, el modelo Logístico tiene el menor MSE , el segundo mejor es el de Von Bertalanffy, seguido del de Malthus. A pesar de que las gráficas de residuos presenten comportamientos favorables al estudio, es de tener en cuenta que cada estanque tiene su propio patrón de crecimiento, pero con el modelo construido se obtiene una única curva para cada estanque. Debido a esto, en algunos estanques el error de predicción (R^2 , MSE) es muy alto.

Es importante mencionar que los resultados obtenidos no pueden generalizarse a otros conjuntos de datos, por lo que, para evaluar el crecimiento de los peces *Pimelodus grosskopfii* en su fase de alevino cultivados en condiciones distintas, se debe realizar nuevamente el ajuste de los modelos a los datos recolectados.

A medida que los peces crecen, se observa que la variabilidad incrementa. Ya mencionado, el valor del error de predicción del modelo es mayor a medida que los *Pimelodus grosskopfii* alcanzan su madurez. Por ende, la precisión del modelo no es constante, y desmejora a medida que los peces crecen. Los modelos estimados son deterministas, pues, en este caso, dependen únicamente del tiempo. Sin embargo, existen otros factores que influyen en su crecimiento. Se considera, por lo tanto, la adición de más variables en el tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

En términos generales los modelos analizados presentaron un desempeño satisfactorio en el objetivo de describir el crecimiento de los *Pimelodus grosskopfii* en su fase de alevino, además, los modelos evidenciaron tener un alto grado de ajuste para predecir el crecimiento del capaz.

Se realizó la comparación de los modelos construidos, entre los que se encuentran el modelo de Malthus, Logístico, Gompertz y Von Bertalanffy estimados por el método de Levenberg-Marquardt, siendo el modelo Logístico el de mayor ajuste a los datos de crecimiento, puesto que permite obtener mayor precisión en las estimaciones, ya que considera la homocedasticidad de los datos ingresados al modelo, es decir, en la gráficas de residuos se observan que los datos (residuos) están dispersos uniforme y aleatoriamente de los puntos alrededor de la línea horizontal cero, y por tanto se prefiere que los residuos de un modelo tengan una varianza constante (homocedasticidad) para que las inferencias y predicciones del modelo sean válidas.

Este estudio da la oportunidad de resumir el ajuste de un modelo en unos pocos parámetros importantes, características del crecimiento tales como: la tasa de crecimiento, el grado de madurez, el intervalo entre el nacimiento y el tiempo de la fase de alevino. Además, las funciones de crecimiento esperadas evidencian que el crecimiento del capaz es de tipo exponencial al inicio de la fase de alevino. El modelamiento se ha realizado en el software estadístico Minitab. Por lo tanto, es necesario que la persona que opere este modelo conozca la herramienta Minitab a un nivel básico.

Referencias

- Aguilar Aguilar, F. A. (2010). *Modelos matemáticos no lineales como herramienta para evaluar el crecimiento de tilapia roja (oreochromis spp.) y tilapia nilótica (oreochromis niloticus var. chitralada) alimentadas con dietas peletizadas o extruidas* (Tesis Doctoral no publicada).
- Amancio, A. L. d. L., Silva, J. H. V. d., Fernandes, J. B. K., Sakomura, N. K., y Cruz, G. R. B. d. (2014). Utilização de modelos matemáticos no estudo do crescimento corporal de tilápia nilótica da linhagem gift. *Revista Ciência Agronômica*, 45, 257–266.
- Araneda, M. E., Hernández, J. M., Gasca-Leyva, E., y Vela, M. A. (2013). Growth modelling including size heterogeneity: application to the intensive culture of white shrimp (p. vannamei) in freshwater. *Aquacultural engineering*, 56, 1–12.
- Baldisserotto, B. (2002). *Fisiologia de peixes aplicada à piscicultura*. UFSC Santa Maria.
- Bautista Ramos, R., Enríquez, J. R. M., y Miramontes, P. (2004). Las matemáticas y su entorno. *México, DF: Siglo XXI editores*.
- Beverton, R. J., y Holt, S. J. (2012). *On the dynamics of exploited fish populations* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
- Brody, S., y Lardy, H. A. (1946). Bioenergetics and growth. *The Journal of Physical Chemistry*, 50(2), 168–169.
- Cala, P., Pérez, C., y Rodríguez, I. (1996). Aspectos bioecológicos de la población de capaz, pimelodus grosskopfii, (pisces: Pimelodae) en el embalse de betania y parte alta del río magdalena, colombia. *Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas*, 20(77), 319–330.
- Carrera, S. C. (2019). Efectos de la densidad de cultivo y de proteína en la dieta sobre el desempeño del capaz (pimelodus grosskopfii) en estanques.
- Carrera, S. C., y Villarreal, R. D. V. (2015). Desempeño productivo del capaz (pimelodus grosskopfii, steindachner, 1879) bajo diferentes densidades de siembra y de contenido de proteína en la dieta. *Intropica: Revista del Instituto de Investigaciones Tropicales*, 10(1), 20–27.

- Casas, G. A., Rodríguez, D., y Téllez, G. A. (2010). Propiedades matemáticas del modelo de gompertz y su aplicación al crecimiento de los cerdos. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 23(3), 349–358.
- Chiappa Carrara, X., Galindo de Santiago, M., y Cervantes Sandoval, A. (2009). Introducción a los modelos matemáticos de crecimiento con aplicaciones en sistemas biológicos. *Universidad Nacional Autónoma de México*.
- Coleman, T. F. (1984). *Large sparse numerical optimization*. Springer.
- Cornejo Zúñiga, O., y Rebolledo Vega, R. (2016). Estimativa de parâmetros em modelos não lineares: Algoritmos e aplicações. *Revista EIA*(25), 81–98.
- Cruz-Casallas, N. E., Marciales-Caro, L. J., Díaz-Olarte, J. J., Murillo-Pacheco, R., Medina-Robles, V. M., y Cruz-Casallas, P. E. (2010). Desempeño productivo del yaque (*leiarus marmoratus gill*, 1870) bajo diferentes densidades de siembra en estanques en tierra desempeño productivo do yaque (*leiarus marmoratus gill*, 1870) sob diferentes densidades de cultivo em viveiros de terra productive performance of yaque (*leiarus marmoratus gill*, 1870) under different stocking densities in ground ponds.
- Csirke, J. (1980). Introducción a la dinámica de poblaciones de peces (documento técnico de pesca 192). *Roma, Italia: FAO*.
- Cubas Córdoba, A. L. (2020). Modelos estadísticos de crecimiento de los langostinos en una piscifactoría.
- Duffy, L., Vanderlinde, P., y Grau, F. (1994). Growth of listeria monocytogenes on vacuum-packed cooked meats: effects of ph, aw, nitrite and ascorbate. *International Journal of Food Microbiology*, 23(3-4), 377–390.
- Dumas, A., France, J., y Bureau, D. (2010). Modelling growth and body composition in fish nutrition: where have we been and where are we going? *Aquaculture Research*, 41(2), 161–181.
- Frandsen, P. E., Jonasson, K., Nielsen, H. B., y Tingleff, O. (1999). Unconstrained optimization.
- Gompertz, B. (1825). Xxiv. on the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. in a letter to francis baily, esq. frs &c. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*(115), 513–583.
- Grau, F. H., y Vanderlinde, P. B. (1993). Aerobio growth of listeria monocytogenes on beef lean and fatty tissue: equations describing the effects of temperature and ph. *Journal of Food Protection*, 56(2), 96–101.

- Gulland, J. (1971). Manual de métodos para la evaluación de las poblaciones de peces. *Manuales de la FAO de Ciencias Pesqueras spa no. 4.*
- Guzmán, M. Á., Olaya, M., Lasso, C. A., Morales Betancourt, M. A., Santos Calderón, J. M., Uribe Botero, B., ... others (2011). *Catálogos de los recursos pesqueros continentales de colombia.* Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial-Instituto de ...
- Hilborn, R., y Walters, C. J. (2013). *Quantitative fisheries stock assessment: choice, dynamics and uncertainty.* Springer Science & Business Media.
- Ladino Martínez, L. M. (2012). *Modelos de dinámica de poblaciones migratorias con factores de reclutamiento, depredación y captura.* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Castilla-La Mancha.
- Lange, K. (2004). Computational statistics and optimization theory at ucla. *The American Statistician*, 58(1), 9–11.
- Lastra Cortes, G. A., y Cornejo Zúñiga, O. (2003). *Estimación de parametros en modelos no lineales* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Talca (Chile). Escuela de Ingeniería Civil Industrial.
- Leslie, P. H. (1945). On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*, 33(3), 183–212.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology.* Williams & Wilkins.
- Maldonado-Ocampo, J. A., Vari, R. P., y Usma, J. S. (2008). Checklist of the freshwater fishes of colombia. *Biota colombiana*, 9(2).
- Malthus, T. (1798). An essay on the principle of population. printed for j. johnson. *St. Paul's church-yard, London*, 1–126.
- Martínez, B., Martínez, R., y cols. (1997). Diseño de experimentos: Análisis de datos estándar y no estándar.
- Miramontes, P. (1998). Predecir el clima es una cosa, predecirlo correctamente es otra. *Ciencias*(051).
- Mojica, J. I. (1999). Lista preliminar de las especies de peces dulceacuícolas de colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 23(sSuplemento Especial).
- Mojica, J. I., y Calle Velez, J. C. (2002). *Libro rojo de peces dulceacuícolas de colombia.* Instituto Humboldt Colombia.
- Moore, A. (1985). A mathematical equation for animal growth from embryo to adult. *Animal*

- Science*, 40(3), 441–453.
- Murray, J. D., y Murray, J. D. (2003). *Mathematical biology: Ii: Spatial models and biomedical applications* (Vol. 3). Springer.
- Ortega-Lara, A., Murillo, O., Pimienta, C., y Sterling, E. (2000). Los peces del alto cauca, riqueza ictiológica del valle del cauca. *Editorial Imagen Corporativa. Cali, Colombia*, 69.
- Plagányi, É. E. (2007). Models for an ecosystem approach to fisheries.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany*, 10(2), 290–301.
- Sanabria, Y. A. P. (2016). Historia de la acuicultura en colombia. *Revista AquaTIC*(37).
- Sparre, P. (1998). Introduction to tropical fish stock assessment. part 1. manual. *FAO Fish. Tech. Paper*, 306, 1–407.
- Sparre, P., y Venema, S. C. (1995). *Introducción a la evaluación de recursos pesqueros tropicales parte i ømanual* (Inf. Téc.). FAO, Valparaíso (Chile).
- Valbuena-Villarreal, R. D., Zapata-Berruecos, B. E., y Cruz-Casallas, P. E. (2010). Reproducción inducida de capaz (*pimelodus grosskopfii*) con extracto de hipófisis de carpa: reporte preliminar. *Orinoquia*, 14(2), 133–139.
- Valbuena-Villarreal, R. D., Zapata-Berruecos, B. E., David-Ruales, C., y Cruz-Casallas, P. E. (2012). Desarrollo embrionario del capaz *pimelodus grosskopfii* (steindachner, 1879). *International Journal of Morphology*, 30(1), 150–156.
- Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondence mathématique et physique*, 10, 113–129.
- Verhulst, P. F. (1845). Resherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux memoires de l'academie royale des sciences*, 18, 1–41.
- Villa-Navarro, F. (1999). Estudio biológico pesquero de la represa de prado para la determinación de especies promisorias en acuicultura. *Universidad del Tolima, Cortolima, INPA, Gobernación del Tolima y Comité Departamental de Cafeteros del Tolima, Ibague*.
- Villa-Navarro, F., y Losada-Prada, S. (1999). Hábitos alimenticios de *pimelodus grosskopffi* y *ageneiosus caucanus* (pisces: Siluriformes) en la represa de prado (tolima). En *Xxxiv congreso nacional de ciencias biológicas, cali* (p. 224).
- Villa-Navarro, F., Usma-Oviedo, J., Mesa-Salazar, L., y Sanchez-Duarte, P. (2016). *Pimelodus grosskopfii the iucn red list of threatened species 2016: et49829828a61473588 [internet]*.
- Volterra, V. (1991). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically.[reprint

of the translation (nature 118: 558–560) from the 1926 original. *Foundations of ecology*.
University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.

Von Bertalanffy, L. (1938). A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. ii).
Human biology, 10(2), 181–213.

Wolfram, S. (2017). *Wolfram language & system documentation center*.