
	<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS</b>						
	<b>CARTA DE AUTORIZACIÓN</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 1</b>

Neiva, 28 de febrero del 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

El suscrito:

Cristian David Sánchez Medina, con C.C. No. 10.75.292.304, Autor de la tesis y/o trabajo de grado titulado

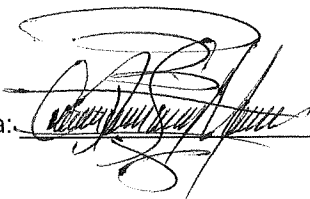
*Solución Numérica de la Ecuación KdV usando el Método de Diferencias Finitas* presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de **Matemático**;

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.






De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

	<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN DE BIBLIOTECAS</b>					   	
	<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 5</b>

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Solución Numérica de la Ecuación KdV usando el Método de Diferencias Finitas

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Sánchez Medina	Cristian David

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Matemático

**FACULTAD:** Ciencias Exáctas y Naturales

**PROGRAMA O POSGRADO:** Matemática Aplicada

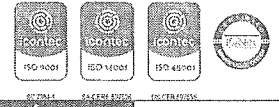
**CIUDAD:** Neiva

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023

**NÚMERO DE PÁGINAS:** 61

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**

Diagramas\_x\_ Fotografías\_x\_ Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general\_\_\_ Grabados\_\_\_  
Láminas\_\_\_ Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_x\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas  
o Cuadros\_x\_

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: Adobe Acrobat Document (PDF)

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN:**

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Ecuación KdV	KdV Equation
2. Aproximación	approximation
3. Diferencias Finitas	Finite Differences
4. Ecuación diferencial Parcial	Partial Differential Equation
5. Onda	Wave
6. Solitón	soliton

**RESUMEN DEL CONTENIDO:**

En este trabajo de grado se desarrollará entorno a la ecuación KdV (Korteweg-de Vries). Esta ecuación posee unas características no muy comunes respecto a otras ecuaciones, pues es una ecuación diferencial parcial no lineal y a su vez describe fenómenos ondulatorios en medios dispersivos. También se desarrollará entorno al método de Diferencias Finitas, que es un método efectivo para solucionar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En el capítulo 1 establecemos algunos preliminares, mencionamos parte de la historia y derivación analítica de la misma. En el capítulo 2 utilizamos una herramienta importante como lo es Método de Diferencias Finitas que permite discretizar ecuaciones diferenciales y desarrollar



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

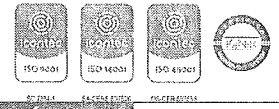
VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 5

un proceso más simple del problema. Allí exponemos el método, damos algunas definiciones de diferencias finitas, las condiciones de frontera, la deducción a partir del primer polinomio de Lagrange y la solución numérica de algunas ecuaciones diferenciales parciales clásicas. Posteriormente en el capítulo 3 implementamos la teoría y exposición del método de diferencias finitas en la ecuación KdV y presentamos algunos esquemas numéricos realizados por algunos matemáticos que mejoraron éste método. terminamos con el capítulo 4 con algunos comentarios y recomendaciones.



**ABSTRACT:**

In this degree project, the KdV equation (Korteweg-deVries). This equation has characteristics that are not very common with respect to others. equations, since it is a nonlinear partial differential equation and in turn describes wave phenomena in dispersive media. It will also take place around Finite Difference method, which is an effective method for solving numerically ordinary and partial differential equations. In chapter 1 we establish some preliminaries, we mention part of the history and analytical derivation of the same. In chapter 2 we use an important tool such as Method of Finite Differences that allows discretizing differential equations and developing a simpler process of the problem. There we expose the method, give some definitions of finite differences, boundary conditions, deduction from the first Lagrange polynomial and the numerical solution of some different equations classic partial cials. Later in chapter 3 we implement the theory and exposition of the finite difference method in the KdV equation and we present some some numerical schemes made by some mathematicians who improved this one method. We end with chapter 4 with some comments and recommendations.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

5 de 5

[Empty box for thesis description]

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre Presidente jurado: Jasmidt Vera Cuenca

Firma:

Nombre del primer jurado: Mauro Montealegre Cárdenas

Firma:

Nombre del segundo jurado: Juan David Hernández

Firma:



*Universidad Surcolombiana*

---

Facultad de Ciencias Exáctas y  
Naturales

Programa de Matemática  
Aplicada

Solución Numérica de la Ecuación  
KdV usando el Método de  
Diferencias Finitas

Cristian David Sánchez Medina

Neiva, Huila  
2023



*Universidad Surcolombiana*

Facultad de Ciencias Exáctas y  
Naturales

Programa de Matemática  
Aplicada

Solución Numérica de la Ecuación  
KdV usando el Método de  
Diferencias Finitas

*Trabajo presentado como requisito de grado  
para optar al título de Matemático*

Cristian David Sánchez Medina  
*20141126497*

Asesor:  
Mg Julio Cesar Duarte Vidal

Neiva, Huila  
2023



# Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

Jefe de Programa

---

Primer Lector

---

Segundo Lector

Neiva, febrero del 2023

# Agradecimientos

En primer lugar, tengo que agradecer a Dios por su infinito amor, misericordia, gracia, bondad y por cada bendición hacía mi. Sin Él nada de esto hubiera sido posible.

A mi familia por ser una de mis más grandes motivaciones para seguir creciendo cada día. Gracias porque ustedes fueron un factor fundamental y esencial durante todo este proceso.

A todos los profesores y docentes de la USCO con los que tuve la oportunidad de crecer académicamente y profesionalmente, nuestros más sinceros sentimientos de gratitud y respeto. En especial, a los profesores Mauricio Penagos, Luis Arturo Polania, Mauro Montealegre Cardenas, Gustavo Londoño, Diego Armando Morales y Esper Andrés Fierro por ayudarnos a ver la matemática no como una ciencia rutinaria y algorítmica, si no como una ciencia donde lo que prevalece es la inferencia, razonamiento, abstracción y el análisis.

Sin duda alguna, a mi asesor, el Mg. Julio Cesar Duarte, por su disposición y colaboración para poder realizar el presente trabajo, y por sus buenos deseos e intenciones para que yo siga creciendo en el campo de las matemáticas puras y aplicadas con su abundante conocimiento y experiencia.

A la USCO, nuestra alma mater, agradezco que me haya abierto sus puertas. Gracias porque en esta institución no sólo crecí académicamente si no que también viví experiencias únicas e irrepetibles que jamás olvidaré.

A nuestro círculo más cercano de compañeros y amigos, en especial, a todos mis colegas con los que pasé ratos muy agradables y divertidos como el grupo de estudios autodenominado *Los Mosqueteros*.

Tal vez falten más personas a las que tengamos que agradecer, a todos gracias, muchas gracias por contribuir de alguna forma con este logro.

# Resumen

## Palabras Claves

Ecuación KdV, Aproximación, Diferencias Finitas, Ecuación Diferencial Parcial, Onda y Solitón.

## Descripción

En este trabajo de grado se desarrollará entorno a la ecuación KdV (Korteweg-de Vries). Esta ecuación posee unas características no muy comunes respecto a otras ecuaciones, pues es una ecuación diferencial parcial no lineal y a su vez describe fenómenos ondulatorios en medios dispersivos. También se desarrollará entorno al método de Diferencias Finitas, que es un método efectivo para solucionar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En el capítulo 1 establecemos algunos preliminares, mencionamos parte de la historia y derivación analítica de la misma. En el capítulo 2 utilizamos una herramienta importante como lo es Método de Diferencias Finitas que permite discretizar ecuaciones diferenciales y desarrollar un proceso más simple del problema. Allí exponemos el método, damos algunas definiciones de diferencias finitas, las condiciones de frontera, la deducción a partir del primer polinomio de Lagrange y la solución numérica de algunas ecuaciones diferenciales parciales clásicas. Posteriormente en el capítulo 3 implementamos la teoría y exposición del método de diferencias finitas en la ecuación KdV y presentamos algunos esquemas numéricos realizados por algunos matemáticos que mejoraron éste método. terminamos con el capítulo 4 con algunos comentarios y recomendaciones.

# Abstract

## Key words

Approximation, Finite Differences, Partial Differential Equation, Numerical Method, Wave and Soliton.

## Description

In this degree project, the KdV (Korteweg-de Vries) equation will be developed. This equation has some characteristics that are not very common with respect to other equations, since it is a nonlinear partial differential equation and in turn describes wave phenomena in dispersive media. In chapter 1 we establish some preliminaries, mention part of the history and analytical derivation of it. In chapter 2 we expose the method, we give some definitions of finite differences, the boundary conditions, the deduction from the first Lagrange polynomial and the numerical solution of some classical partial differential equations. Later in chapter 3 we implement the theory and exposition of the finite difference method in the KdV equation and we present some numerical schemes made by some mathematicians who improved this method.

# Introducción

Durante el último siglo, el uso de modelos matemáticos además de permitir plantear y resolver muchos problemas presentes en la naturaleza, en gran manera ha aumentado y se ha fortalecido hasta el punto de generar teorías fuertes en diferentes campos aplicativos [1], [16]. Por ejemplo, la forma como se agrupan las nubes, la disposición que genera el accionar del viento en la arena y muchos fenómenos más, son prueba de ello. En 1834 el escocés John Scott Russell fue el primero en observar las formaciones físicas en la naturaleza que estudia reacción y dispersión [3], [13].

En estas formaciones se integran tres conceptos, la reacción, es el fenómeno en donde las partículas pueden cambiar su estado, debido a interacciones o simplemente de manera espontánea [16]; la dispersión, es la relación que tiene la velocidad de la onda  $c$  respecto a la longitud de onda  $\lambda$  que se propagan sin cambiar de forma [8]; la no linealidad, no está sujeta al principio de superposición. Un caso particular de las ecuaciones de reacción, dispersión y no linealidad es la ecuación de Korteweg-de Vries o simplemente la ecuación KdV [2], [11], [16], [17], [20].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

El termino  $\partial u/\partial t$  de la ecuación representa la reacción del fenomeno, la no linealidad está representada por el termino  $u(\partial u/\partial x)$  y la dispersión por el termino  $\partial^3 u/\partial x^3$ . Con estos terminos en la ecuación, Korteweg y de Vries demostraron que también esta es una forma de encontrar explícitamente y cerrada soluciones de onda viajera y/u onda solitaria a su ecuación con características muy especiales como retención de su forma en todo momento [8], bien localizada (asintóticamente constante en  $\pm\infty$ ) y en el caso que una onda solitaria traspase a otra, se retiene el tamaño y su forma.

Desde 1895 la ecuación KdV no recibió mayor atención hasta 1965, cuando Zabusky y Kruskal publicaron sus resultados de los experimentos numéricos con esta ecuación [4]. Ellos obtuvieron soluciones aproximadas a la ecuación KdV mostrando que cualquier perfil de onda inicial localizada que evoluciona de acuerdo a la ecuación KdV, genera un conjunto finito de ondas viajeras localizadas de la misma forma que la onda solitaria original, confirmando lo descubierto por Korteweg y de Vries en 1895 [14]. Luego lo ecuación KdV modela los solitones, que son ondas solitarias no lineales que se propagan sin deformarse y exhiben un comportamiento extremadamente inesperado [17].

En consecuencia en el presente trabajo propone una visión alternativa a solucionar la ecuación Kortewek-de Vries, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y la parte general de nuestro modelo, que es estudiar la interacción de soluciones tipo solitón. La ecuación KdV se puede resolver numéricamente empleando varios métodos, como Wavelet-Petrov-Galerkin [8], [26], Elementos Finitos [14], Método Multidimensional de Newton [13], Método de Adomian [12], [21], [23], Método de Colocación de B-spline Cúbico [19], La Transformada de Elzaki [21]. En este trabajo utilizaremos el método de diferencias finitas, el cual es un método planteado por varios matemáticos unidos a esta idea y quienes crearon el Cálculo Variacional y junto a Taylor quien fué un matemático Inglés [18], que añade una nueva rama de las matemáticas que ahora se llama el cálculo de diferencias finitas, quién inventó la integración por partes, y descubrió la famosa fórmula conocida como la expansión de Taylor. Muchos de ellos han usado métodos de aproximación (lo que hoy llamamos “métodos numéricos”) para distintos objetivos, uno de ellos es demostrar la existencia de solución.

En el primer capítulo del trabajo, hablaremos de los preliminares en este proyecto, donde plantearemos el sentido de este proyecto. En consecuencia, se da conceptos básicos y algunas propiedades de las ondas, la historia y definición matemática de solitón. En el segundo capítulo utilizamos una herramienta importante como lo es Método de Diferencias Finitas que permite discretizar ecuaciones diferenciales y desarrollar un proceso más simple del problema. Se realiza la deducción de las fórmulas de Diferencias Finitas, Aplicación de la serie de Taylor, Método de coeficiente indeterminado y aplicación a algunas ecuaciones en derivadas parciales. De igual manera el capítulo tres que se enfoca en la solución de la ecuación KdV por el Método de diferencia finita, donde se reemplaza la ecuación diferencial por ecuaciones en diferencia y mediante un algoritmo de *Octave*, encontramos una aproximación numérica.

# Justificación

El famoso matemático Carl Friedrich Gauss, dijo : *"La carencia de formación matemática se deja reconocer inmediatamente en la desmedida falta de rigor en el cálculo numérico"* [5]. Es por eso que el desarrollo de técnicas numéricas para la obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se ha incrementado en las últimas décadas [5]. Entre estas técnicas están los métodos de elementos finitos, diferencias finitas y en forma más general el método de los residuos ponderados, Método de Adomian. Es claro que en cada método, se realiza su propio estudio detallado de los criterios, eficiencia y convergencia [6].

Debido a las enormes ramificaciones, relaciones y aplicaciones de la ecuación diferencial parcial de Korteweg y de Vries o también llamada KdV en los diferentes campos y aplicaciones de la matemática como: Las imágenes, la física, la medicina, los tsunamis, el camino de la geometría al análisis de ondas de agua, y un tipo de álgebra que se inventó solo sesenta años más tarde, a saber, el tipo de álgebras de Lie infinitas-dimensionales que son hoy en día conocido como álgebras Kac-Moody es necesario dar solución y comprender en que espacios se encuentran estas soluciones [4], [11], [17]. Debido a eso, en este trabajo se estudiará y se dará a conocer paso a paso las soluciones de la ecuación por medio de un método numérico avanzado, llamado diferencias finitas. El método de diferencias finitas se puede trabajar en dos o tres dimensiones que otros no permiten o no pueden. Además, el método es muy fácil de aprender y aplicar para la solución de ecuaciones diferenciales parciales encontradas en el modelado de problemas de ingeniería para geometrías simples, problemas de transporte de calor, masa y cantidad de movimiento. Otro argumento es que este método numérico nos garantiza si hay o no soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales parciales que se están estudiando. Una Razón mas para utilizar este método, es que con operaciones elementales (operaciones aritméticas) resuelve un problema complejo. Un argumento adicional que justifica este trabajo de grado, es que sirve como motivación para realizar e implementar los Métodos Numéricos para la solución de otros problemas en diferentes áreas de la ciencia en más trabajos de grado y tesis por parte de la comunidad estudiantil y docente no solo de la Universidad Surcolombiana, si no también de cualquier persona que lea este trabajo.

# Objetivos

## Objetivo General

Aplicar el método de diferencias finitas para encontrar soluciones numericas a la ecuación Korteweg-de Vries  $KdV$

## Objetivos Específicos

- Interpretar cada uno de los términos de la ecuación  $KdV$ .
- Encontrar una aproximación de la solución de la ecuación  $KdV$ .
- Analizar las soluciones numéricas respecto a la solución analítica.
- Mejorar el método de Diferencias Finitas para que el error sea menor al método inicialmente expuesto.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Ondas Lineales . . . . .	1
1.2. Ondas Dispersivas . . . . .	2
1.2.1. La Ecuación de Onda . . . . .	2
1.2.2. Características de las Ondas Dispersivas . . . . .	3
1.3. Ondas No Lineales . . . . .	4
1.3.1. Historia de la Ecuación KdV . . . . .	4
1.3.2. Solitón . . . . .	5
1.3.3. Derivación de la Ecuación KdV . . . . .	6
<b>2. Diferencias Finitas</b>	<b>11</b>
2.1. Aproximación Numérica de Diferencias Finitas . . . . .	11
2.1.1. Diferencia Finita Adelantada . . . . .	11
2.1.2. Diferencia Finita Atrazada . . . . .	12
2.1.3. Diferencia Finita Centrada . . . . .	12
2.2. Deducción a partir del primer polinomio de Lagrange . . . . .	14
2.3. Aproximación Numérica de Diferencias Finitas para Ecuaciones Di- ferenciales Parciales . . . . .	15
2.4. Métodos Implícitos de Diferencias Finitas . . . . .	16
2.4.1. Método de Greig y Morris . . . . .	17
2.4.2. Método de Goda . . . . .	18
2.5. Método de Coeficientes Indeterminados . . . . .	18
2.6. Aplicación del Método en Algunos Ejemplos . . . . .	19
2.6.1. Ejemplo 1 . . . . .	19
2.6.2. Ejemplo 2 . . . . .	20
2.6.3. Ejemplo 3 (Ecuación Parabólica) . . . . .	22
2.6.4. Ejemplo 4 . . . . .	23
<b>3. Implementación del Método de Diferencias Finitas a la Ecuación KdV</b>	<b>25</b>
3.1. Discretización . . . . .	25
3.1.1. Usando matrices de diferencia . . . . .	27
3.2. Métodos Implícitos de diferencias finitas . . . . .	29
3.2.1. El Metodo de Greig y Morris's . . . . .	29
3.2.2. El Esquema de Goda's . . . . .	31
3.3. Análisis del Error . . . . .	34

---

3.3.1. Convergencia del error . . . . .	35
<b>4. Conclusiones y Comentarios</b>	<b>38</b>
<b>A. Anexos</b>	<b>39</b>
A.1. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación de difusión del ejemplo 4 por medio de diferencias finitas. . . . .	39
A.1.1. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por medio de diferencias finitas. . . . .	40
A.1.2. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de diferencias finitas de Zabusky-Kruskal. . . . .	40
A.1.3. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de Greig y Morris. . . . .	41
A.1.4. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de Goda. . . . .	42
A.2. Tablas y Resultados . . . . .	43
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

# Índice de figuras

1.1.	Gráfico de Solitón en el Plano. $h$ es la altura del canal donde se encuentra el fluido, $a$ es la amplitud del solitón, $g$ es la gravedad y $U$ es el solitón . . . . .	6
1.2.	Solitón $u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)$ en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ con $c = 2$ , $x \in [-50, 200]$ y $t \in [1, 20]$ . . . . .	10
2.1.	Diferencia Finita Adelantada . . . . .	12
2.2.	Diferencia Finita Atrazada . . . . .	12
2.3.	Diferencia Finita Centrada . . . . .	13
2.4.	Discretización de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donde $h$ es el tamaño del paso en la primera componente del dominio $t$ y $k$ es el tamaño del paso en la segunda componente $x$ . . . . .	16
2.5.	Características de la malla de diferencias finitas usando un ordenador. . . . .	21
2.6.	Gráfico de la solución del Ejemplo 4 donde, $0 < z < 1$ , $x(z, 0) = 1$ y $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0$ . . . . .	24
3.1.	Solución analítica (línea magenta) con valores de $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ y Solución numérica (puntos) . . . . .	31
3.2.	Solución analítica (línea verde) con valores de $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ y Solución numérica (puntos) . . . . .	32
3.3.	Solución analítica (línea roja) con valores de $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ y Solución numérica (puntos) . . . . .	33
3.4.	Gráfica del error (línea negra) para $0 \leq t \leq 20$ . . . . .	36
3.5.	Gráfica del error (línea negra) cuando para $0 \leq t \leq 20$ . . . . .	37
3.6.	Gráficas del error cuando $k$ tiende a cero para $0 \leq t \leq 120$ . . . . .	37



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos los preliminares y/o conceptos previos que el lector debe entender para llegar a la comprensión de la ecuación KdV. Presentamos la definición de onda, propiedades y parámetros de las Ondas. También la ecuación clásica de onda con velocidad constante y las características de una onda dispersiva, como también el estudio de Ondas No lineales con sus referentes históricos. Con ello se hace un análisis de los solitones para hallar soluciones de la Ecuación KdV. Adicional a esto, citamos y recomendamos leer algunas referencias que se pueden consultar para ampliar el estudio de este tema.

### 1.1. Ondas Lineales

Una onda se define como el fenómeno ondulatorio y físico por medio del cual se propaga energía sin materia de un punto a otro del espacio a través de algún medio sólido, líquido, gaseoso o a través del vacío.

Para que se produzca una onda es imprescindible y necesario que ocurra una perturbación al sistema, es decir es necesario que se produzca una variación de alguna propiedad física del sistema como la presión, la temperatura, la densidad, la cual la vibración inicial que se produce se transmitirá a lo largo de una región del espacio en forma de energía. [7]

Todas las ondas de la naturaleza disponen de una serie de características o parámetros propios, el conocimiento de dichos parámetros nos permitirá conocer y predecir el comportamiento de la Onda:

**Amplitud (A, C)** Representa la distancia existente entre el punto más alto conocido como cresta y el eje horizontal de la Onda, la amplitud está directamente ligado con la intensidad, en una onda sonora mayor será la intensidad o los decibelios, a mayor amplitud de una onda sísmica mayor será la energía transportada.

**Longitud de Onda ( $\lambda$ )** Representa la distancia entre dos crestas o valles de una onda, dicho parámetro está inversamente ligado con la energía que transporta la onda, a menor longitud mayor energía y a mayor longitud menor es la energía asociada.

**Frecuencia (F)** Representa el número de oscilaciones que ha realizado la onda en un periodo establecido de tiempo.

**Periodo (T)** Representa al tiempo necesario para que una onda complete una oscilación.

Para saber el tipo y clasificación de las ondas con mas detalle puede consultar [1], [7].

## 1.2. Ondas Dispersivas

A continuación se realizará un análisis de la dispersión de una Onda Lineal a partir del estudio de la Ecuación Diferencial Parcial (E.D.P.) de Onda, su significado físico y sus características.

### 1.2.1. La Ecuación de Onda

La ecuación clásica que describe la propagación de una onda con velocidad constante  $c$  es dada por la ecuación diferencial parcial lineal.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (1.1)$$

Para mirar con más detalle la deducción y/o construcción de esta ecuación, véase el capítulo 8 de [1], donde  $u(x, t)$  es la amplitud de la onda y  $c$  es una constante positiva. La solución general de esta ecuación está expresada en términos de variables características  $(x \pm ct)$ ,

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (1.2)$$

Donde  $f$  y  $g$  son funciones que dependen de la combinación lineal de las variables  $x, t$ . Estas funciones representan ondas que se mueven con velocidad constante  $c$  y sin cambio de forma a lo largo del eje  $x$ , tanto en la parte positiva como en la negativa. Las soluciones  $f$  y  $g$  corresponde a dos factores de la ecuación unidimensional se escribe de la forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (1.3)$$

La ecuación lineal de onda más simple es:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (1.4)$$

su solución

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.5)$$

representa una onda que se mueve en la dirección del eje  $x$  positivo, con velocidad constante  $c$  y sin cambio de forma. La solución de la onda lineal más elemental es la plana o armónica, cuya forma es

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - wt)},$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  o unidad imaginaria.

Para comprobar que es solución a la ecuación, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -wAie^{i(kx - wt)}. \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = kAie^{i(kx - wt)}. \quad (1.7)$$

$$-wAie^{i(kx - wt)} = -ckAie^{i(kx - wt)}. \quad (1.8)$$

$$w = ck,$$

$$c = \frac{w}{k}.$$

Donde  $A$ ,  $k$  y  $w$  son constantes;  $k$  es el número de onda y este a su vez se relaciona con la longitud de onda  $\lambda$ ,  $w$  es la frecuencia angular y  $A$  es la amplitud.

### 1.2.2. Características de las Ondas Dispersivas

La ecuación  $c = \frac{w(k)}{k}$  representa la velocidad de la onda viajera. Luego un problema de propagación de ondas es dispersivo si la velocidad de onda depende del número de onda y en particular, si ésta velocidad no es constante. En consecuencia, un caso de onda no dispersivo es  $c = \frac{w(k)}{k} = \text{constante}$ , o lo que es lo mismo,  $w(k)$  es proporcional a  $k$ , es decir  $w(k) = \text{constante} \times k$ . Otro término importante es la velocidad de grupo o velocidad de paquete de ondas que se define por la relación

$$c_g = \frac{dw}{dk}. \quad (1.9)$$

Para el caso que estamos tratando tenemos una relación de onda lineal no dispersiva por la siguiente razón

$$c = \frac{w}{k} = \frac{ck}{k} = \frac{dw}{dk} = c_g \quad (1.10)$$

donde  $c$  es constante, la aceleración de la onda no es cero por lo que la velocidad no es constante, véase [2].

### 1.3. Ondas No Lineales

La importancia de tales fenómenos ha llevado a considerar a las ondas no lineales como entidades fundamentales de los fenómenos ondulatorios. Si las ondas que se propagan en un medio de respuesta no lineal y dispersivo son estables, se llaman solitones [3], [8], [17].

La historia de los solitones está íntimamente relacionada con la historia de la conducción del calor en medios sólidos; además del estudio de la propagación de ondas en la superficie del agua y otros medios.

#### 1.3.1. Historia de la Ecuación KdV

La primera observación de un solo solitón (generalmente denominado onda solitaria) se realizó en 1834 por el ingeniero escocés John Scott Russell mientras trabajaba en el Canal Unión conectando Edimburgo con Glasgow. Estaba tan impresionado por la extraordinaria forma y velocidad constante de la ola, que siguió su propagación durante algunas millas a través del canal. Véase [3], [4], [13] y [27].

Russell describió su asombro con unas palabras:

*“Estaba observando el movimiento de un barco que fue arrastrado rápidamente a lo largo de un canal estrecho por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, no así la masa de agua en el canal que había poner en movimiento; se acumuló alrededor de la proa del barco en un estado de violenta agitación, luego dejándolo atrás repentinamente, rodó hacia adelante con gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria, un montículo de agua redondeado, liso y bien definido, que continuaba su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. Lo seguí a caballo, y lo adelantó todavía rodando a una velocidad de unas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original de unos treinta pies de largo y un pie a un pie y medio de altura. Su altura gradualmente disminuyó, y después de una persecución de una o dos millas la perdí en los sinuosos del canal. Semejante, en el mes de agosto de 1834, fue mi primera entrevista casual con ese singular y hermoso fenómeno que he llamado la Ola de Traslación.”*



Con este entusiasmo, comenzó a investigar un poco sobre estas olas solitarias durante la siguiente década. Sus estudios se encontraron con el escepticismo de la comunidad científica en ese tiempo mientras la gente luchaba por describir sus observaciones. La razón de eso se debió a el hecho de que sus observaciones eran una consecuencia de efectos no lineales que se pensaba ser de importancia secundaria en ese entonces. A pesar de la actitud crítica de sus compañeros, siguió con su investigación y decidió detener sus experimentos sólo cuando dos famosos matemáticos, G.B. Airy y G.G. Stokes, señalaron que sus observaciones estaban en contradicción con sus teorías de ondas de aguas someras. Fue solo en 1877 cuando el científico francés Joseph Valentin de Boussinesq publicó un artículo que incluye algunos términos no lineales en su ecuación de onda, cuya solución exhibió propiedades similares a la onda solitaria originalmente observada por Russell [27]. Sin embargo, su artículo no llamó mucho la atención en Inglaterra. Para entrar en mas detalle tambien puede ver [4].

Cinco años después, Rayleigh confirmó las observaciones de Russell independientemente de Boussinesq obteniendo un perfil de onda solitaria. En 1895 Diederik Johannes Korteweg y Gustav de Vries prosiguieron el trabajo realizado por Rayleigh al incluir el efecto de la tensión superficial que conduce al ahora a la famosa ecuación Koerteweg-de Vries (KdV) [4].

Un ejemplo de solitones que ocurren en la naturaleza son los tsunamis. Incluso aunque los océanos son muy profundos (aproximadamente  $h = 4 \text{ km}$  en promedio), la teoría de las aguas poco profundas, más precisamente, la ecuación KdV, todavía puede aplicarse ya que una ola de tsunami puede alcanzar una extensión de aproximadamente 100 km. La velocidad de propagación es de  $c = 70 \text{ km/h}$  que es muy rápido. Tan pronto como se acercan a la costa, la profundidad y la velocidad de propagación (de la onda) disminuye, por lo que uno podría argumentar intuitivamente que debido a la conservación de la energía una gran ola debe levantarse. El perfil permanente de una solución de solitones de la ecuación de KdV resulta del equilibrio entre dos efectos: no linealidad (proporcional a  $\eta^2$ ) y dispersión (proporcional a  $\eta^3$ ). La no linealidad tiende a comprender la onda, mientras que la dispersión la propaga [3].

### 1.3.2. Solitón

Definimos solitón como la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal que tiene las siguientes propiedades:

1. Representa una onda de forma permanente, o sea de la forma  $f(x - ct)$ , donde  $c$  es una constante real.
2. Es localizada, o sea que  $f(\xi) \rightarrow 0$ , así como todas sus derivadas cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , donde  $\xi$  es la combinación lineal  $x$  y  $-ct$ , es decir  $\xi = x + (-ct) = x - ct$ .
3. Mantiene su misma forma y tamaño cuando interactua con otros solitones, tiene comportamiento de partícula como lo sugiere su nombre.

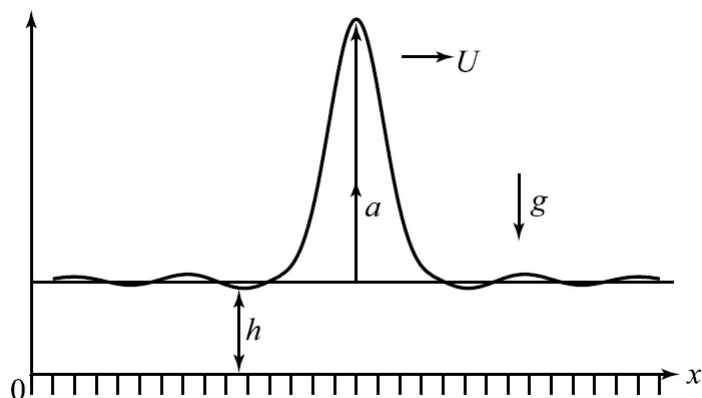


Figura 1.1: Gráfico de Solitón en el Plano.  $h$  es la altura del canal donde se encuentra el fluido,  $a$  es la amplitud del solitón,  $g$  es la gravedad y  $U$  es el solitón

En la Figura 1.1 se presenta con las tres propiedades anteriormente mencionada. Además esta definición y sus propiedades también la puedes encontrar con más detalle en el capítulo 3 de [8]

### 1.3.3. Derivación de la Ecuación KdV

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) admite solución tipo onda solitaria o solitón. Existen varios métodos para obtener tal solución, presentaremos algunos de ellos en este trabajo por motivos de completitud.

Comencemos presentando la solución canónica de la ecuación KdV, para ello suponemos una solución de onda viajera con la estructura

$$u(x, t) = v(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

para alguna función  $v$  y velocidad de onda constante  $c$ . Determinemos  $v$  por sustitución de esta expresión en la ecuación.

Sea  $\xi = x - ct$ , entonces  $u$  es solución de la ecuación KdV siempre que  $v$  satisfaga la ecuación diferencial ordinaria

$$-c \frac{dv}{d\xi} + 6v \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^3v}{d\xi^3} = 0$$

al integrar se obtiene

$$-cv + 3v^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2} = A,$$

donde  $A$  es una constante de integración. Al multiplicar esta última expresión por  $\frac{dv}{d\xi}$ , tenemos

$$-cv \frac{dv}{d\xi} + 3v^2 \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2v}{d\xi^2} \frac{dv}{d\xi} = A \frac{dv}{d\xi},$$

e integrar, se tiene

$$-\frac{c}{2}v^2 + v^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = Av + B,$$

con  $B$  una constante de integración. Como la onda solución es un solitón, entonces cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ ,  $v$ ,  $\frac{dv}{d\xi}$ ,  $\frac{d^2v}{d\xi^2} \rightarrow 0$ , de donde  $A = B = 0$ , vease [8]. Luego

$$-\frac{c}{2}v^2 + v^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dv}{d\xi} = \pm v\sqrt{c-2v}.$$

Al separar variables e integrar se obtiene

$$\xi = - \int \frac{dv}{v\sqrt{c-2v}} + d,$$

$d$  una constante de integración. Haciendo la sustitución

$$v = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 y \quad dv = -c \operatorname{sech}^2 y \tanh y dy$$

y

$$v\sqrt{c-2v} = \frac{c^{3/2}}{2} \operatorname{sech}^2 y \tanh y$$

se obtiene

$$- \int \frac{dv}{v\sqrt{c-2v}} = \frac{2}{\sqrt{c}} y + d$$

Por tanto,

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{c}} y + d \quad \text{o} \quad y = \frac{\sqrt{c}}{2} \xi - d,$$

pero  $y = \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{2v}{c}}$ , luego

$$\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c}}{2} \xi - d\right) = \sqrt{\frac{2v}{c}}$$

vease [8], de donde

$$v(\xi) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2} \xi - d\right).$$

En consecuencia, la solución de la ecuación KdV es

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) - d\right).$$

Como la ecuación KdV es completamente integrable [2], [7], lo que significa que la solución exacta se puede calcular para un valor inicial arbitrario, y además, por la naturaleza de la solución, se puede elegir  $d = 0$ . Obteniéndose así,

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right).$$

En virtud a que  $v > 0$  para todo  $\xi$ , el solitón es una onda de elevación simétrica sobre  $\xi = 0$ , que se propaga en el medio sin cambio de forma con velocidad constante  $c$  proporcional a la amplitud. Por lo tanto, ondas solitarias con gran amplitud se mueven con mayor velocidad que ondas solitarias con menor amplitud.

Si en lugar de  $v = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 y$  hacemos  $v = -\frac{c}{2} \operatorname{csch}^2 y$ , obtenemos otra solución de la ecuación KdV del tipo onda viajera dada por

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right).$$

Nótese que esta solución no es un solitón, debido a que  $u(x, t)$  no es acotada en  $\xi = 0$ .

La ecuación KdV también se puede resolver utilizando la transformación de Bäcklund, para más detalles véase [7] y [12].

Esta transformación consiste en introducir una función  $v$  tal que  $u = v_x$ , donde  $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ .

$$v_{tx} + 6v_x v_{xx} + v_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} [v_t + 3v_x^2 + v_{xxx}] = 0,$$

al integrar con respecto a  $x$  se tiene

$$v_t + 3v_x^2 + v_{xxx} = g(t), \quad (1.11)$$

donde  $g(t)$  es una función de integración. El cambio de variable

$$v^* = v - \int^t g(r) dr$$

elimina  $g$  de la ecuación (1.11). Como la solución  $u$  de la KdV se obtendrá de la solución  $v$  de (1.11) y  $v_x^* = v_x$ , entonces no necesitamos hacer distinción entre  $v^*$  y  $v$ . Luego podemos hacer  $g = 0$  sin pérdida de generalidad.

Existe una transformación de Bäcklund que deja invariante la ecuación. A este tipo de transformación se le llama auto-transformación de Bäcklund, que para la ecuación de Korteweg-de Vries está dada por el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\xi &= -v_x + \beta - \frac{1}{2}(v - \tilde{v})^2 \\ \tilde{v}_\tau &= -v_t + (v - \tilde{v})(v_{xx} - \tilde{v}_{\xi\xi}) - 2(v_x^2 + v_x \tilde{v}_\xi + \tilde{v}_\xi^2) \\ \xi &= x, \quad \tau = t, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde  $\beta$  es un parámetro. Ahora generamos una solución no trivial de la ecuación KdV aplicando la transformación (1.12) con  $\tilde{v} = 0$

$$\begin{aligned} v_x &= \beta - \frac{1}{2}v^2 \\ v_t &= vv_{xx} - 2v_x^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La solución de la primera ecuación se obtiene haciendo  $v(x, t) = z(s)$  con  $s = x - ct$ . Así,

$$v_x = \frac{dz}{ds} = \beta - \frac{1}{2}z^2$$

al separar variables e integrar se tiene

$$\int \frac{dz}{\beta - \frac{1}{2}z^2} = \int ds.$$

Al hacer la sustitución

$$z = \sqrt{2\beta} \tanh y, \quad dz = \sqrt{2\beta} \operatorname{sech}^2 y dy$$

$$\beta - \frac{1}{2}z^2 = \beta(1 - \tanh^2 y) = \beta \operatorname{sech}^2 y,$$

luego

$$\int \frac{dz}{\beta - \frac{1}{2}z^2} = \frac{\sqrt{2\beta}}{\beta} \int dy = \sqrt{\frac{2}{\beta}} y.$$

Por tanto,

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} y = s + c_1$$

donde  $c_1$  es una constante de integración, la cual se puede hacer cero sin pérdida de generalidad. Así,

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{2}} s = \tanh^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{2\beta}} \right)$$

o lo que es lo mismo,

$$z = \sqrt{2\beta} \tanh \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} s \right),$$

luego

$$v(x, t) = \sqrt{2\beta} \tanh \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} (x - ct) \right)$$

pero  $u = v_x$ , por tanto

$$u(x, t) = \beta \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} (x - ct) \right)$$

al hacer  $\beta = c/2$  se tiene

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right).$$

Su grafica la podemos ver en la Figura 1.2. Con un procedimiento igual se obtiene

$$v(x, t) = \sqrt{2\beta} \coth \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} (x - ct) \right)$$

de la que se deduce

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right).$$

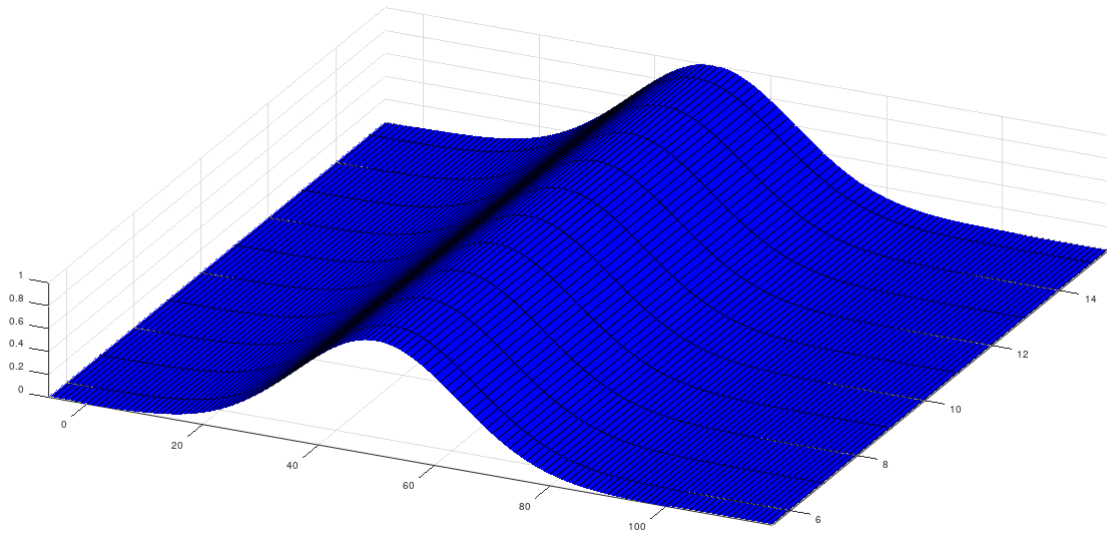


Figura 1.2: Solitón  $u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct)\right)$  en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  con  $c = 2$ ,  $x \in [-50, 200]$  y  $t \in [1, 20]$

# Capítulo 2

## Diferencias Finitas

En este capítulo estudiaremos el método de diferencias finitas, como es de saber es un método numérico utilizado para calcular de manera aproximada las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, usando las ecuaciones de diferencias finitas adelantada, atrasada o centrada.

Debido a la naturaleza de las EDP iniciamos haciendo una aproximación para estas derivadas parciales, realizo la primera aproximación iniciando con una ordinaria y después se generaliza a las parciales con métodos iterativos, dado un Problema de Valor Inicial y de Frontera [11], [14]; mencionamos que en nuestro sistema se empleará polinomios de Taylor, para una ecuación diferencial ordinaria o parcial.

### 2.1. Aproximación Numérica de Diferencias Finitas

Las siguientes tres ecuaciones se toman como diferencias finitas, de esta manera hacemos la aproximación de la derivada con el cálculo de la pendiente de una curva, como se muestra a continuación

#### 2.1.1. Diferencia Finita Adelantada

Recordemos que para el Método de Diferencias Finitas (MDF), se inicia haciendo unas aproximaciones en la derivada ordinaria. En ella se puede hacer de tres formas con la adelantada, atrasada y centrada. En la Figura 2.1 vemos la diferencia finita adelantada, donde se toma un punto  $x$  en el dominio y una distancia  $h$  hacia adelante de este punto  $x$ , luego la aproximación numérica queda de la siguiente manera:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.1)$$

Graficamente queda de la siguiente forma.

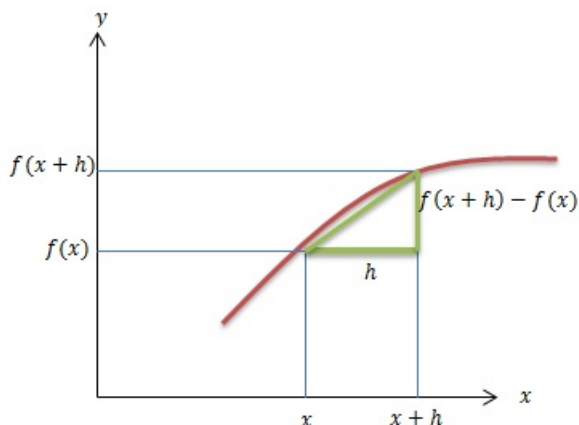


Figura 2.1: Diferencia Finita Adelantada

### 2.1.2. Diferencia Finita Atrazada

En la siguiente Figura 2.2, vemos la diferencia finita atrazada, el cual, significa que tomamos un punto  $x$  del dominio y una distancia  $h$  hacia atrás de este punto  $x$ , luego la aproximación numérica queda de la siguiente manera:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (2.2)$$

La gráfica de esta aproximación es:

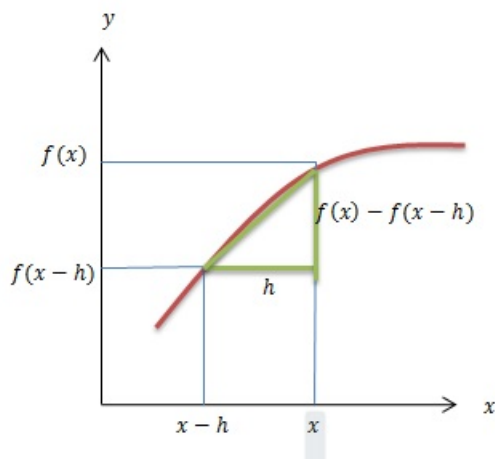


Figura 2.2: Diferencia Finita Atrazada

### 2.1.3. Diferencia Finita Centrada

En la Figura 2.3 vemos gráficamente la diferencia finita centrada significa que tomamos un punto  $x$  en el dominio y una distancia  $h$  hacia atrás y la misma distancia



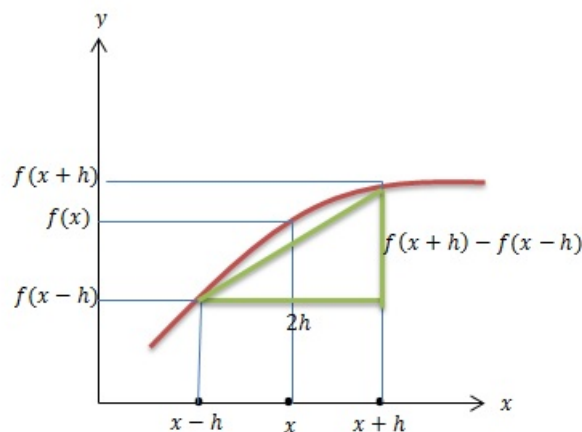


Figura 2.3: Diferencia Finita Centrada

hacia adelante de este punto  $x$ , luego la aproximación queda de la siguiente manera:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (2.3)$$

Usando estas diferencias se discretiza el dominio  $\Omega$  a través de puntos  $x_i$ , de esta manera, el dominio se convierte en una maya de puntos [11], es decir, para cada punto en una variable temporal o espacial, en un determinado intervalo  $(a, b)$

$$x_i = a + ih, \text{ donde } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ y } h = \frac{b-a}{n},$$

además, la función evaluada en el punto  $x_i$ , se representa de la siguiente manera  $f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$ , expresando la aproximación de las derivadas como siguen:

Diferencia Finita Adelantada es  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$

Diferencia Finita Atrazada es  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$

Diferencia Finita Centrada es  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$ .

Es de notar que para derivadas parciales que tienen variables espaciales y temporales, se usa otro tipo de variación en la notación de estas aproximaciones y discretizaciones, donde se estudiará más adelante.

## 2.2. Deducción a partir del primer polinomio de Lagrange

Sea el polinomio  $P_1(x)$  de primer grado, para la función  $f$  en  $x_0$  y  $x_1$  como su termino de error:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi(x)).$$

El polinomio de Lagrange de grado  $n$  es:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i L_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}, \quad (2.4)$$

vease también [5], [6] y [10]

para  $n = 1$  se tiene:

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^1 f_i \prod_{k=0, k \neq i}^1 \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)},$$

$$P_1(x) = f_0 \cdot \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) + f_1 \cdot \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right),$$

$$P_1(x) = f(x_0) \cdot \left(\frac{x-x_1}{-h}\right) + f(x_1) \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right),$$

$$P_1(x) = f(x_1) \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right) - f(x_0) \cdot \left(\frac{x-x_1}{h}\right),$$

$$P_1(x) = \frac{f(x_0+h)(x-x_0) - f(x_0)(x-x_0-h)}{h}.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = f(x_1) \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right) - f(x_0) \cdot \left(\frac{x-x_1}{h}\right) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi(x))$$

Donde  $\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi(x))$  es el error. Para la deducción del error se encuentra en las páginas 196 y 197 del libro [5], o también el capítulo 8 del libro [10].

Al derivar la función  $f$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x))\right] \\
&= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + 2\frac{(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x)) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} \cdot D_x(f''(\xi(x)))
\end{aligned}$$

de modo que

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

### 2.3. Aproximación Numérica de Diferencias Finitas para Ecuaciones Diferenciales Parciales

Para este caso se tiene una función:

$$U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

que es la función que modela un fenómeno físico. Sea la función  $U(x, y)$  diferenciable, se puede representar como:

$$U(x_i, y_i) = U_{i,j},$$

y  $U(ih, jk)$  es denotado por  $U_{i,j}$ , en terminos de un polinomio de Taylor la expresión aproximada  $U_x$  en el vertice  $p_{i,j}$  se escribe  $U_{i,j}$ ,  $U_{i+1,j}$  en diferencias finitas:

Diferencia Finita Adelantada es:

$$U_x \approx \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} \simeq \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j} + O(h)}{h} \quad (2.5)$$

Diferencia Finita Atrazada es:

$$U_x \approx \frac{U(x, y) - U(x-h, y)}{h} \simeq \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j} + O(h)}{h} \quad (2.6)$$

Diferencia Finita centrada es:

$$U_x \approx \frac{U(x+h, y) - U(x-h, y)}{2h} \simeq \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j} + O(h^2)}{2h} \quad (2.7)$$

Recomendamos leer las páginas 602 hasta 605 de [7], [18].

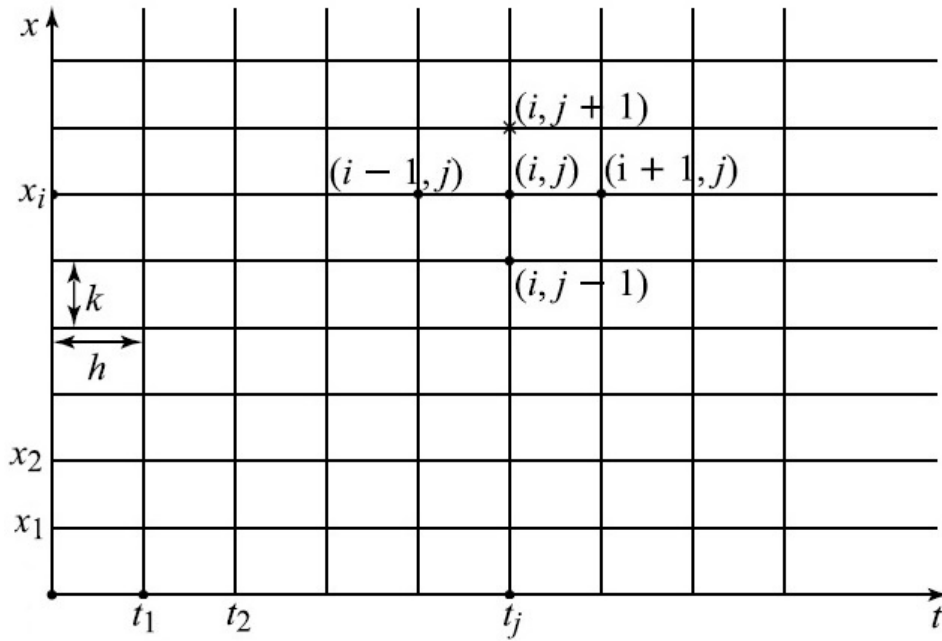


Figura 2.4: Discretización de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  donde  $h$  es el tamaño del paso en la primera componente del dominio  $t$  y  $k$  es el tamaño del paso en la segunda componente  $x$ .

La cantidad  $O(h)$  y  $O(h^2)$  es conocido como el error de truncamiento en el proceso de discretización [11], [14], [18]. Una aproximación similar para  $U_{xx}$  en el vértice  $p_{i,j}$  es:

$$U_{xx} \approx \frac{U(x+h, y) - 2U(x, y) + U(x-h, y)}{h^2} \simeq \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j} + O(h^2)}{h^2} \quad (2.8)$$

Análogamente sucede para el caso de  $U_y$  y  $U_{yy}$  en  $p_{i,j}$ .

## 2.4. Métodos Implícitos de Diferencias Finitas

La determinación numérica de las incógnitas de sistemas lineales, problemas y ecuaciones juega un papel principal en la matemática numérica y aplicada [5]. Por eso al igual que algunas ecuaciones diferenciales ordinarias tienen como solución exacta una expresión de la forma  $f(x, y) = c$ , donde  $x, y$  son variables, y  $c$  es una constante real, que en algunos casos, esta expresión es función implícita si cumplen con las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Hemos realizado esta sección para presentar algunos métodos implícitos de diferencias finitas que también solucionan numéricamente la ecuación KdV, además el lector puede estudiar con mayor detalle y rigor en [9].

### 2.4.1. Método de Greig y Morris

Supongamos que se quiere utilizar el método de diferencias finitas hacia atrás para aproximar  $f^n(x)$ , es decir la  $n$ -ésima derivada. Por el método de Greig y Morris utilizando  $f(x)$ ,  $f(x-h)$ ,  $f(x-2h)$ , ...,  $f(x-(n+1)h)$ , escribimos lo siguiente:

$$f^n(x) \approx \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh)}{h^n}, 0 \leq k \leq n$$

Para  $h > 0$  luego, si se quiere utilizar el método de diferencias finitas hacia adelante para aproximar  $f^n(x)$ . Por el método de Greig y Morris, escribimos lo siguiente:

$$f^n(x) \approx \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h)}{h^n}, 0 \leq k \leq n$$

cuando  $n = 1$ , se tiene la aproximación de  $f'(x)$  y es:

$$f'(x) \approx \frac{\sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} f(x-kh)}{h^1} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h^1}$$

lo cual cumple con la definición y es igual a (2.2).

Cuando  $n = 2$ , se tiene la aproximación de  $f''(x)$  y es:

$$f''(x) \approx \frac{\sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} f(x-kh)}{h^2} = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

lo cual cumple con la definición y es muy parecida a (2.8). Este método es muy utilizado para calcular aproximaciones a la solución exacta de ecuaciones diferenciales parciales que tiene terminos no lineales [14], [25], que son de la forma:  $u^n u_x$  o  $u u_{xx}$ .

Para un tiempo inicial donde haya un producto y uno de sus factores sea  $u$ , hacemos  $u = u_{i,j+1}$ , luego tomamos

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j}}{3}$$

es decir, un promedio de los tres puntos de la fila inmediatamente anterior.

Ahora usando la diferencia finita central del método de Greig y Morris, para terminos no lineales hacemos el cambio de variable es así:

$$\frac{u^{n+1}(x, t)}{n+1} = w(x, t), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right)_x = w_x$$

aplicando la definición (2.3), tenemos que

$$\left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right)_x = \frac{1}{2h} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})$$

### 2.4.2. Método de Goda

Al igual que el método de Greig y Morris, el esquema de Goda's usa la diferencia centrada para terminos de dispersión y una combinación de métodos para terminos no lineales de ecuaciones diferenciales parciales de la forma  $u^n u_x$  [14], [25]. Como es un producto de la función con una de sus derivadas parciales, hay dos aproximaciones diferentes a la función o termino  $u^n$ . La primera se aproxima mediante un promedio explícito hacia adelante así:  $u_{i,j}^n = \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}\right)^n$ . La segunda se aproxima mediante un promedio explícito hacia atras así:  $u_{i,j}^n = \left(\frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2}\right)^n$ .

Ahora usando la diferencia finita central (2.3), el método de Goda para terminos no lineales de la forma  $u^n u_x$  es:

$$u^n u_x = u_x u^n \approx \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}\right) u_{i,j}^n$$

$$u_x u^n \approx \left(\frac{u_{i+1,j} u_{i,j}^n - u_{i-1,j} u_{i,j}^n}{2h}\right)$$

Ahora aplicando las aproximaciones de promedio explícito en la anterior expresión se tiene:

$$u_x u^n \approx \left(\frac{u_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}\right)^n - u_{i-1,j} \left(\frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2}\right)^n}{2h}\right)$$

$$u_x u^n \approx \left(\frac{u_{i+1,j} (u_{i+1,j} + u_{i,j})^n - u_{i-1,j} (u_{i,j} + u_{i-1,j})^n}{2^n 2h}\right) \quad (2.10)$$

## 2.5. Método de Coeficientes Indeterminados

Supongamos que se desea utilizar el método de diferencias finitas hacia atrás para aproximar  $f'(x)$  para un error de segundo orden. Por el metodo de coeficientes indeterminados utilizando  $f(x)$ ,  $f(x-h)$ ,  $f(x-2h)$ , escribimos lo siguiente:

$$f'(x) \approx \gamma_1 f(x) + \gamma_2 f(x-h) + \gamma_3 f(x-2h)$$

Podemos utilizar la serie de Taylor en  $x$  para obtener un sistema de ecuaciones,

$$\gamma_1 f(x) + \gamma_2 f(x-h) + \gamma_3 f(x-2h) = \gamma_1 f(x) + \gamma_2 [f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x)]$$

$$+ \gamma_3 [f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x) - \frac{8h^3}{6} f'''(x)] + O(\max|\gamma_i| h^4)$$

La combinación de aproximar  $f'(x)$ . Por lo que escribimos

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$$

$$-h\gamma_2 - 2h\gamma_3 = 1$$

$$h^2\gamma_2 + 2h^2\gamma_3 = 0.$$

Resolviendo este sistema, tenemos  $\gamma_1 = \frac{-3}{2h}$ ,  $\gamma_2 = \frac{2}{h}$ ,  $\gamma_3 = \frac{-1}{2h}$ . Por lo tanto, obtenemos la formula para diferencia hacia atras en orden de  $O(h^2)$

$$f'(x) = \frac{-3}{2h}f(x) + \frac{2}{h}f(x-h) + \frac{f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$$

escrito de otra forma,

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h} + O(h^2)$$

**Nota:** La serie de Taylor y el método de diferencias finitas asume que la función varía de forma continua, dicho esto, no existen discontinuidades [5], [6].

## 2.6. Aplicación del Método en Algunos Ejemplos

### 2.6.1. Ejemplo 1

Obtener una estimación numérica de la ecuación diferencial

$$y''(x) = y(x) \tag{2.11}$$

La solución exacta de la ecuación es

$$y(x) = e^x \tag{2.12}$$

como puede comprobarse facilmente. Siguiendo la idea expuesta mas arriba, vamos a ver cual seria la traducción algebraica de la ecuación diferencial o, lo que es lo mismo, la traducción algebraica de la condición: "la segunda derivada de la función incógnita en un punto dado es igual a esa misma función en ese punto"[9], o, equivalentemente, la traducción algebraica de que la curvatura de  $y(x)$  por  $x_m$  es proporcional a  $y_m$ . Tomaremos en este ejemplo  $h = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{3}$ . Sabemos que podemos aproximar la derivada  $y''_m$  de  $y(x)$  en  $x_m$  mediante la formula de la derivada central de tres puntos:

$$y''_m \simeq \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} \tag{2.13}$$

Luego la "traducción algebraica" de la ecuación diferencial es el punto generico  $x_m$  es

$$\frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} = y_m \tag{2.14}$$

Particularizando esta expresión en cada uno de los puntos del discretizado en  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  se obtiene el siguiente sistema algebraico:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1, \\
\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} &= y_1, \\
\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} &= y_2, \\
y_3 &= e.
\end{aligned}$$

De este modo tenemos un sistema algebraico con cuatro valores a determinar,  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  y cuatro ecuaciones a satisfacer. La solución de este sistema (recuérdese que  $h = 1/3$ ) es:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \frac{1 - 2y_1 + 1,94773}{(\frac{1}{3})^2} = 1,397 \\
y_2 &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = \frac{1,39561 - 2y_2 + e}{(\frac{1}{3})^2} = 1,949 \\
y_3 &= e.
\end{aligned}$$

### 2.6.2. Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de diferencia finitas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (2.15)$$

con las siguientes condiciones:

$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son condiciones iniciales que dependen de la variable  $x$ .

Aplicando el uso de la malla rectangular tenemos  $h = \delta x$ ,  $k = \delta t$ ,  $u_{i,j} = u(ih, jk)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq j < +\infty$ , la aproximación de la diferencia central a la ecuación (2.13) es

$$\frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = \frac{c^2}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

o también

$$u_{i,j+1} = \varepsilon^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1 - \varepsilon^2)u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad (2.16)$$

donde  $\varepsilon \equiv (ck)/h$  y es llamado *parametro de Courant* [7]. Esta fórmula explícita nos permite determinar los valores aproximados en los puntos o nodos de la Figura 2.5 en las líneas  $t = 2k, 3k, 4k, \dots$ , en  $t = k$  ha sido adquirido. Los valores aproximados de los datos iniciales en la línea  $t = 0$  son

$$u_{i,0} = f_i, \quad \frac{1}{k^2}(u_{i,1} + u_{i,-1}) = g_{i,0} \quad (2.17)$$



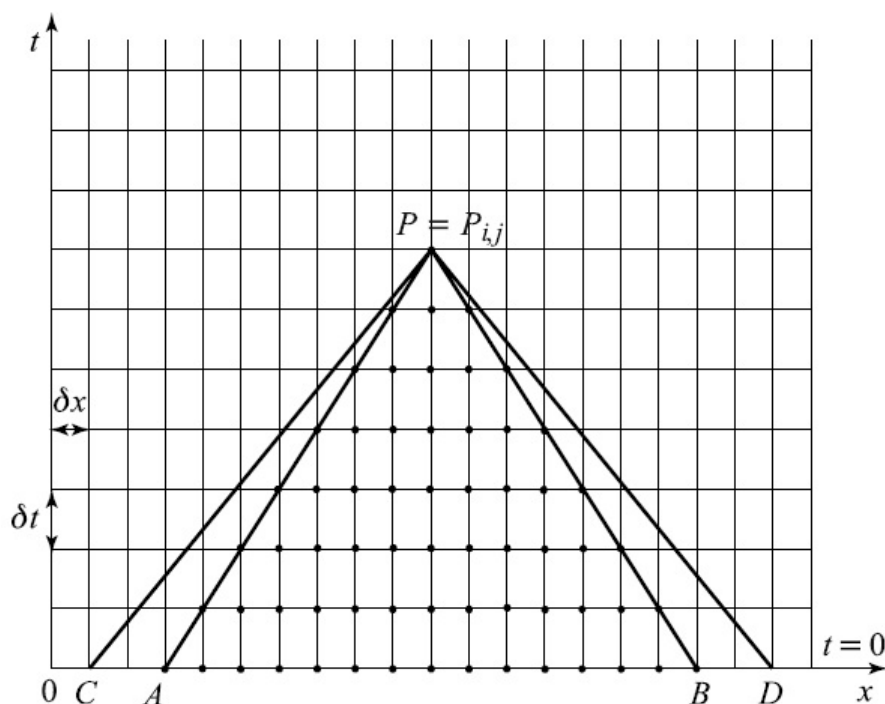


Figura 2.5: Características de la malla de diferencias finitas usando un ordenador.

para que el segundo resultado de

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg_{i,0} \quad (2.18)$$

cuando  $j = 0$  en (2.16) y (2.18) se utiliza obtenemos

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}\varepsilon^2(f_{i-1} + f_{i+1}) + (1 - \varepsilon^2)f_i + kg_{i,0} \quad (2.19)$$

este resultado determina los valores de la cuadrícula en la línea  $t = k$

El valor de  $u$  en  $P_{i,j+1}$  se obtiene en términos de su calculando previamente los valores en  $P_{i+1,j}$ ,  $P_{i,j}$  y  $P_{i,j-1}$ , que se determinan a partir de valores calculados en las líneas  $t = (j-1)k$ ,  $(j-2)k$ ,  $(j-3)k$ . Por lo tanto, el cálculo de las líneas  $t = 0$  y  $t = k$  sugiere que  $u$  en  $P_{i,j}$  representará una función de los valores de  $u$  dentro del dominio delimitado por las líneas dibujado hacia  $t = 0$  de  $P$  cuyos gradientes son  $+\varepsilon$  como se muestra en la figura anterior. Así, las regiones triangulares  $PAB$ ,  $PCD$  representan los dominios de dependencia en  $P$  de las soluciones de la ecuación en diferencias finitas (2.14) y la ecuación diferencial (2.13). Por analogía con la característica real las rectas  $PC$  y  $PD$  de la ecuación diferencial, las rectas  $PA$  y los  $PB$  se denominan características numéricas. Por lo tanto, se sigue de la figura que  $\triangle PAB$  se encuentra dentro de  $\triangle PCD$ , lo que significa que la solución del sistema de diferencias finitas en  $P$  se mantendría sin cambios incluso cuando las condiciones iniciales modifican

$x_i - t_j$	$x_{i=0} = 0,0$	$x_{i=1} = 0,1$	$x_{i=2} = 0,2$	$x_{i=3} = 0,3$	$x_{i=4} = 0,4$	$x_{i=5} = 0,5$
$t_{j=1} = 0,1$	0	0.2939	0.5590	0.7695	0.90	0.9511
$t_{j=2} = 0,2$	0	0.25	0.4577	0.6545	0.7695	0.8090
$t_{j=3} = 0,3$	0	0.1817	0.3455	0.4756	0.5590	0.5878
$t_{j=4} = 0,4$	0	0.9045	0.7695	0.25	0.2939	0.3090
$t_{j=5} = 0,5$	0	0	0	0	0	0

Cuadro 2.1: Resultados Numéricos del Ejemplo 4,  $x$  es la variable espacial,  $t$  es la variable temporal,  $0 \leq i \leq 5$ ,  $1 \leq j \leq 5$

los datos a lo largo de  $PA$  y  $PB$ . En 1928 Courant, Friedrichs y Lewy demostraron que la solución del sistema de diferencias finitas converge al sistema de ecuaciones diferenciales ya que  $h$  y  $k$  tienden a cero siempre que el dominio de dependencia de la ecuación en diferencias se encuentra dentro de la ecuación diferencial parcial [9]. Esta condición de convergencia se conoce como la condición  $CFL$ , lo que significa  $\frac{1}{c} \geq \frac{k}{h}$ , es decir,  $0 < \epsilon \leq 1$ .

### 2.6.3. Ejemplo 3 (Ecuación Parabólica)

En éste ejemplo daremos solución a un prototipo de problema de difusión, consideramos lo siguiente:

$$u_t = su_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad (2.20)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{para todo } t$$

Donde  $f(x)$  es una función dada.

La aproximación explícita en diferencias finitas es:

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{s}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

o también de la siguiente manera

$$u_{i,j+1} = \epsilon(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1 - 2\epsilon)u_{i,j} \quad (2.21)$$

donde  $\epsilon = \frac{ks}{h^2}$ . Esta fórmula explícita de diferencias finitas da valores aproximados

de  $u$  en  $t = (j + 1)k$  en términos de valores en  $t = jk$  con  $u_{i,0} = f_i$ , por lo tanto  $u_{i,j}$  se puede obtener para todo  $j$  mediante el uso sucesivo de (2.20)

Los problemas de estabilidad y convergencia de la ecuación parabólica son similares a los de la ecuación de onda. Se puede demostrar que la solución de la ecuación

en diferencias finitas converge a la de la ecuación diferencial sistema (2.19) ya que  $h$  y  $k$  tienden a cero siempre que  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . En particular, cuando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , la ecuación (2.20) toma una forma simple

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (2.22)$$

Esto se llama fórmula explícita de Bender-Schmidt que determina la solución en  $(x_i, t_{j+1})$  como la media de los valores en los puntos de la cuadrícula  $(i + 1, j)$ .

#### 2.6.4. Ejemplo 4

Vamos utilizar un código en *Octave* para solucionar el siguiente problema por medio diferencias finitas (DF).

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}; \quad 0 < z < 1; \quad 0 < t < 2 \\ x(z, 0) &= 1; \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0; \quad x(0, t) = g_0(t); \quad x(1, t) = g_1(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde,  $\frac{\partial x}{\partial t}$  es la razón de cambio en un punto respecto al tiempo,  $\frac{\partial x}{\partial z^2}$  es la conducción térmica respecto al espacio,  $x(0, t) = g_0(t)$  y  $x(1, t) = g_1(t)$  son funciones de una variable como condiciones iniciales.

Si la derivada espacial de segundo orden en ecuaciones diferenciales parciales (edp) se aproxima por 3 puntos en el esquema centrado, y produce el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-2,t} \\ x_{N-1,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} g_0(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ 0 \\ g_0(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

la siguiente expresión se puede usar en el cálculo de la aproximación en diferencias finitas del operador de la derivada de segundo orden en el punto 1 y N - 1,

$$x_{1,t} = \frac{x_{0,t} - 2x_{1,t} + x_{2,t}}{\Delta z^2} \quad (2.25)$$

si en las condiciones iniciales  $x_0 = x_1$  tenemos que la ecuación (2.26) se puede escribir de la siguiente manera:

$$x_{1,t} = \frac{-x_{1,t} + x_{2,t}}{\Delta z^2} \quad (2.26)$$

En la sección (A.1) presentamos el código en el software Octave que se utilizó para simular y solucionar este ejemplo. También en el Cuadro (A.1) se muestran los valores que arrojó el software de la variable  $z$ , estos valores se encuentran gráficamente en la Figura (2.6).

Luego los valores de la solución numérica de la ecuación (2.24) por medio de diferencias finitas que arroja el código en *Octave* están consignados en el Cuadro (A.2) de los Anexos

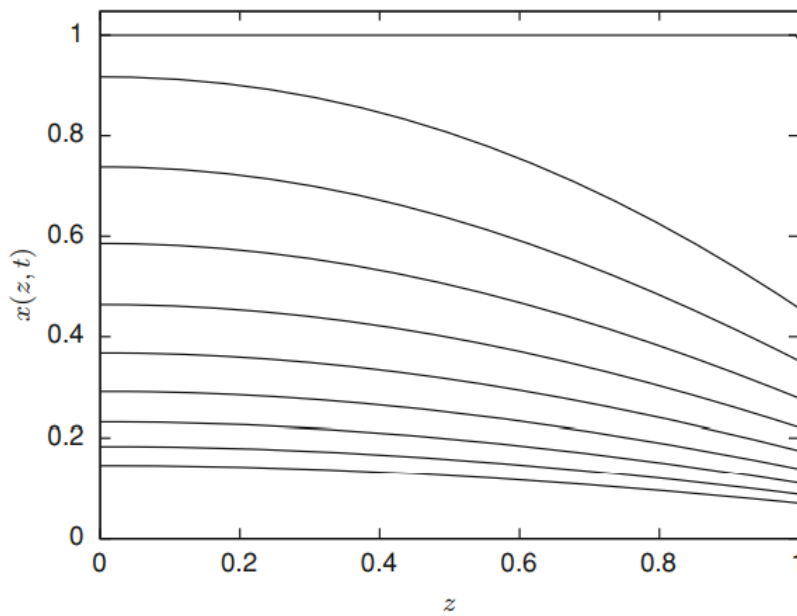


Figura 2.6: Gráfico de la solución del Ejemplo 4 donde,  $0 < z < 1$ ,  $x(z, 0) = 1$  y  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0$

# Capítulo 3

## Implementación del Método de Diferencias Finitas a la Ecuación KdV

El método consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados.

### 3.1. Discretización

De acuerdo con nuestra ecuación KdV:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3.1)$$

Se desea encontrar una función  $u(x, t)$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual resuelve la ecuación diferencial parcial (3.1)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.2)$$

Se reemplazará el punto  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  por una aproximación basada en diferencias finitas deducida de la expansión en una fórmula de Taylor [11], [14], donde  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ .

$$u_x(x_0, t_0) \approx \frac{u(x_0 + h, t_0) - u(x_0, t_0)}{h} \quad (3.3)$$

$$u_t(x_0, t_0) \approx \frac{u(x_0, t_0 + k) - u(x_0, t_0)}{k} \quad (3.4)$$

$$u_{xxx}(x_0, t_0) \approx \frac{u(x_0 + h, t_0) - 3u(x_0, t_0) + 3u(x_0 - h, t_0) - u(x_0 - 2h, t_0)}{h^3} \quad (3.5)$$

sustituyendo en la ecuación KdV (3.2), tenemos las diferencias finitas:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + u_{i,j} \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right] + \frac{u_{i+1,j} - 3u_{i,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h^3} = 0. \quad (3.6)$$

Haciendo uso de la factorización la ecuación (3.6) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{u_{i,j+1}}{k} + u_{i,j} \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{3}{h^3} - \frac{1}{k} \right] + \frac{u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h^3} = 0.$$

Ahora si a la ecuación (3.2) agregamos parametros  $\alpha$  y  $\beta$  a los terminos de no linealidad y dispersión [18] tenemos lo siguiente:

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (3.7)$$

luego las diferencias finitas asociadas a la ecuación (3.7) son:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \alpha u_{i,j} \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right] + \beta \frac{u_{i+1,j} - 3u_{i,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h^3} = 0 \quad (3.8)$$

vamos a despejar el punto  $u_{i+1,j}$  de la ecuación (3.8), obtenemos la siguiente expresión:

$$u_{i+1,j} = \frac{h^3}{\beta k} (u_{i,j-1} - u_{i,j}) + \frac{\alpha h^2}{\beta} (u_{i-1,j} u_{i,j}) - \frac{\alpha h^2}{\beta} (3u_{i,j} - 3u_{i-1,j} + u_{i-2,j}). \quad (3.9)$$

Factorizando algunos términos resulta que

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} \left( -\frac{h^3}{\beta k} + \frac{\alpha h^2}{\beta} u_{i-1,j} - \frac{\alpha h^2}{\beta} u_{i,j} + 3 \right) - 3u_{i-1,j} + u_{i-2,j} + \frac{h^3}{\beta k} u_{i,j-1}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} (\eta + \xi u_{i-1,j} - \xi u_{i,j} + 3) - 3u_{i-1,j} + u_{i-2,j} - \eta u_{i,j-1}$$

donde  $\eta = -\frac{h^3}{\beta k}$  y  $\xi = -\frac{\alpha h^2}{\beta}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$

como el método diferencias finitas es iterativo, vamos a darle ciertos valores al subíndice  $j$ , es decir a variar al subíndice  $j$  y mantener constante al subíndice  $i$

si  $i = 0$  y  $j = 0$  entonces

$$u_{1,0} = u_{0,0} (\eta + \xi u_{-1,0} - \xi u_{0,0} + 3) - 3u_{-1,0} + u_{-2,0} - \eta u_{0,-1}$$

si  $i = 0$  y  $j = 1$  entonces

$$u_{1,1} = u_{0,1} (\eta + \xi u_{-1,1} - \xi u_{0,1} + 3) - 3u_{-1,1} + u_{-2,1} - \eta u_{0,0}$$

si  $i = 0$  y  $j = 2$  entonces

$$u_{1,2} = u_{0,2}(\eta + \xi u_{-1,2} - \xi u_{0,2} + 3) - 3u_{-1,2} + u_{-2,2} - \eta u_{0,1}$$

si  $i = 0$  y  $j = m$  entonces

$$u_{1,m} = u_{0,m}(\eta + \xi u_{-1,m} - \xi u_{0,m} + 3) - 3u_{-1,m} + u_{-2,m} - \eta u_{0,m-1}$$

La anterior iteración se puede escribir como un sistema y queda así:

$$\begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta + \xi u_{-1,0} - \xi u_{0,0} + 3 & \cdots & & & 0 \\ & 0 & & & \cdot \\ & \cdot & \cdots & & \cdot \\ & \cdot & \cdots & & \cdot \\ & \cdot & \cdots & & \cdot \\ & \cdot & \cdots & & \cdot \\ & 0 & \cdots & \eta + \xi u_{-1,m} - \xi u_{0,m} + 3 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{0,m} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} u_{-1,0} \\ u_{-1,1} \\ u_{-1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{-1,m} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} u_{-2,0} \\ u_{-2,1} \\ u_{-2,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{-2,m} \end{bmatrix} - \eta \begin{bmatrix} u_{0,-1} \\ u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{0,m-1} \end{bmatrix} .$$

### 3.1.1. Usando matrices de diferencia

Consideremos de nuevo una diferencia hacia atrás de primer orden y escribamos  $y' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ . Si  $y$  es representado como un vector columna [12], así  $y = [u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n}]^T$ , también podemos escribir:  $y' \approx \frac{1}{h} D y$  donde  $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta t$  y  $D$  es la diferencia matriz dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, para calcular  $f(u)_x = \frac{f(u_{i,j}) - f(u_{i,j-1})}{h}$  podemos escribir:

$$f(u)_x = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u_{i,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(u_{i,j-1}) \\ f(u_{i,j}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(u_{i,n}) \end{bmatrix}$$

De manera similar, podemos usar una formulación matricial para escribir  $y''' = \frac{1}{h^3} D^3 y$ . Entonces para  $u_{xxx}$  tenemos:

$$u_{xxx} = \frac{1}{h^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j-2} \\ u_{i,j-1} \\ u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n} \end{bmatrix}$$

En total, tenemos el siguiente esquema de pasos:

$$\begin{bmatrix} u_{i+1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i+1,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n} \end{bmatrix} - \frac{k}{h} D \begin{bmatrix} f(u_{i,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(u_{i,j}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(u_{i,n}) \end{bmatrix} - \frac{k}{h^3} D^3 \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde

$$D^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



En nuestro algoritmo, sin embargo,  $u$  es un vector fila, por lo que tomamos la transpuesta de las matrices definidas anterior para calcular las diferencias finitas [12]. Entonces, para la primera diferencia, tenemos:

$$f(u)_x = \frac{1}{h} [f(u_{i,1}) \quad \dots \quad f(u_{i,n})] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.2. Métodos Implícitos de diferencias finitas

La determinación numérica de las incógnitas de sistemas lineales, problemas y ecuaciones juega un papel principal en la matemática numérica y aplicada [5]. Por eso al igual que algunas ecuaciones diferenciales ordinarias tienen como solución exacta una expresión de la forma  $f(x, y) = c$ , donde  $x, y$  son variables, y  $c$  es una constante real, que en algunos casos, esta expresión es función implícita si cumplen con las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Hemos realizado esta sección para presentar algunos métodos implícitos de diferencias finitas que también solucionan numéricamente la ecuación KdV, además el lector puede estudiar con mayor detalle y rigor en [9].

### 3.2.1. El Método de Greig y Morris's

La ecuación KdV escrita  $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ , tenemos:

$$uu_x = \frac{(u^2)_x}{2}$$

Como el término no lineal de la ecuación que estamos trabajando es  $uu_x$ , es de la forma  $u^n u_x$  para  $n = 1$ . Ahora aplicamos la definición de la ecuación (2.9) a este término, y tenemos:  $w(x, t) := \left(\frac{u^{1+1}(x,t)}{1+1}\right) = \frac{u^2(x,t)}{2}$ , [14]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &\approx \frac{1}{2h} \left(\frac{(u_{i+1,j})^2}{2} - \frac{(u_{i-1,j})^2}{2}\right), \\ \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &\approx \frac{1}{4h} \left(\frac{(u_{i+1,j})^2}{1} - \frac{(u_{i-1,j})^2}{1}\right) \end{aligned}$$

con error de truncación de  $O(h^2)$ . Usando el esquema de diferencia hacia adelante en el tiempo, y una diferencia central con el término lineal, tenemos el método explícito, (para mayor comprensión de esta formulación le invitamos a ver la página 21 de [14])

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + \frac{(k)(u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j})}{2(h)^3} = 0 \quad (3.11)$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} - u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{2(h)^3}(-u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \left[ -\frac{k}{h}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{k}{2(h)^3} \right] - \frac{k}{2(h)^3}(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{(k)(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})}{2(h)^3} \quad (3.12)$$

Ahora la solución numérica para la ecuación (3.7), es:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\alpha k}{h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{(\beta k)(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})}{2(h)^3}$$

usando las matrices en diferencias para la solución numérica por el método de Greig y Morris, se tiene el siguiente esquema:

$$\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n-1} \end{bmatrix} - \frac{\alpha k}{2h} \begin{bmatrix} w_{i+1,0} - w_{i-1,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{i+1,n} - w_{i-1,n} \end{bmatrix} - \frac{\beta k}{2h^3} M^3 \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a ver gráficamente las soluciones analíticas de (3.7) y las aproximaciones a esta usando el método de Greig y Morris.

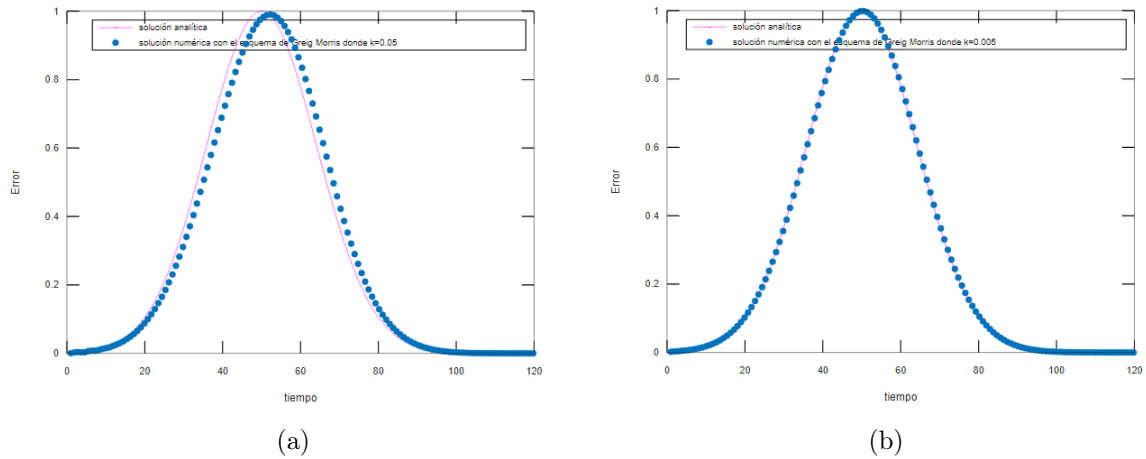


Figura 3.1: Solución analítica (línea magenta) con valores de  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  y Solución numérica (puntos)

### 3.2.2. El Esquema de Goda's

La ecuación (3.7) que estamos estudiando tiene un termino no lineal y es  $uu_x$ . Este termino es de la forma  $u^n u_x$ . El esquema o método de Goda usa la diferencia

centrada para terminos no lineales de ecuaciones diferenciales parciales. Para hallar soluciones numéricas de la ecuación (3.7), usamos la definición (2.10) en el termino no lineal [14], luego:

$$uu_x = u_x u = u_x u^1 \approx \left( \frac{u_{i+1,j}(u_{i+1,j} + u_{i,j})^1 - u_{i-1,j}(u_{i,j} + u_{i-1,j})^1}{2^1 2h} \right)$$

$$uu_x = u_x u = u_x u^1 \approx \left( \frac{u_{i+1,j}(u_{i+1,j} + u_{i,j}) - u_{i-1,j}(u_{i,j} + u_{i-1,j})}{4h} \right)$$

Ahora la solución numérica para la ecuación (3.7), es:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\alpha k}{4h} (u_{i+1,j}(u_{i+1,j} + u_{i,j}) - u_{i-1,j}(u_{i,j} + u_{i-1,j})) - \frac{(\beta k)(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j})}{2(h)^3}$$

usando las matrices en diferencias para la solución numérica por el método de Goda, se tiene el siguiente esquema:

$$\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n-1} \end{bmatrix} - \frac{\alpha k}{2h} \begin{bmatrix} z_{i+1,0} - z_{i-1,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{i+1,j-1} - z_{i-1,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{i+1,n-1} - z_{i-1,n-1} \end{bmatrix} - \frac{\beta k}{2h^3} M^3 \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i,n-1} \end{bmatrix}$$

donde  $z_{i+1,j} = u_{i+1,j}(u_{i+1,j} + u_{i,j})$  y  $z_{i-1,j} = u_{i-1,j}(u_{i-1,j} + u_{i,j})$

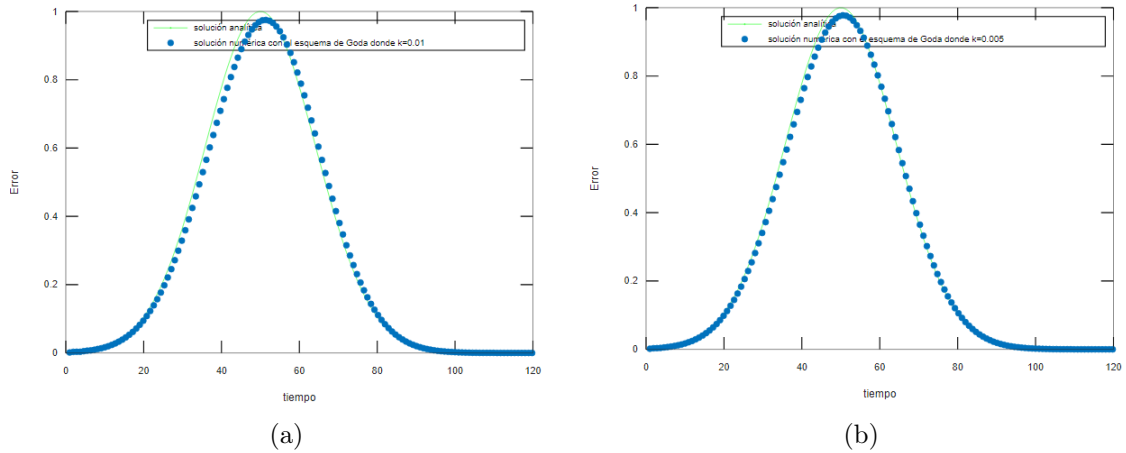


Figura 3.2: Solución analítica (línea verde) con valores de  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  y Solución numérica (puntos)

**Teorema 3.2.1.** *El error de truncamiento local del método implícito linealizado a la ecuación KdV es de  $O((h)^2 + (k)^2)$*

*Demostración.* Una demostración mas exhaustiva de este teorema se encuentra en [11], [18]. Siguiendo el sistema pentadiagonal (3.7), lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{H_x(u_{l,n+1} - u_{l,n})}{2hk} + \frac{\delta_x^2}{2(h)^2}(2f_{l,n} + \Delta t(f_l)_l^n) + \frac{\delta_x^4}{2(h)^4}(u_{l,n} - u_{l,n+1}) = 0 \quad (3.14)$$

suponemos que la solución exacta  $u(x, t)$  de la ecuación KdV se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación (3.2) de la expansión de Taylor

$$u(lh, (n+1)k) = u(lh, nk) + (h)u_l(lh, nk) + \frac{1}{2}(k)^2(u_{ll}(lh, nk)) + O((k)^2)$$

ahora derivando, tenemos:

$$\begin{aligned} & (u_t(lh, nk) + f_x(lh, nk) + u_{xxx}(lh, nk))_x + \frac{1}{2}h(u_t(lh, nk)) + \\ & f_x(lh, nk) + u_{xxx}(lh, nk))_{tx} + O((h)^2 + (k)^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

porque  $u(lh, nk)$  es la solución exacta de la ecuación KdV, tenemos

$$u_t(lh, nk) + f_x(lh, nk) + u_{xxx}(lh, nk) = 0 \quad (3.16)$$

de las ecuaciones (3.9) y (3.10) podemos concluir que el error de truncamiento del método es  $O((h)^2 + (k)^2)$   $\square$

A continuación presentamos las gráficas de los resultados que arrojó *Octave* en la solución del problema

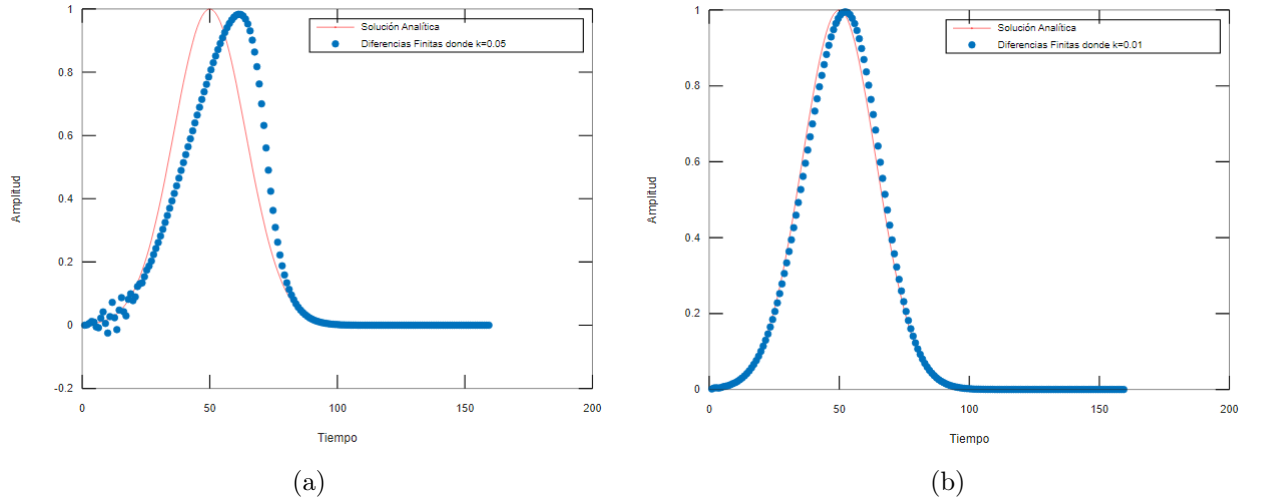


Figura 3.3: Solución analítica (línea roja) con valores de  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  y Solución numérica (puntos)

la curva continua de color rojo es la solución analítica de la ecuación KdV y la punteada es la solución numérica encontrada.

### 3.3. Análisis del Error

En ésta sección mostraremos la relación entre los resultados numéricos y analíticos ya adquiridos en las secciones anteriores, usamos las normas del error  $L_2$  Y  $L_\infty$ . Las normas están definidas de la siguiente manera [18]:

$$L_2 = \|u^e - u^N\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^n |u_j^e - u_j^N|^2}$$

donde  $u^e$  es la solución analítica y  $u^N$  es la solución numérica. Luego

$$L_\infty = \|u^e - u^N\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n} |u_j^e - u_j^N|$$

Teniendo en cuenta esta información, vamos a hallar la norma del error en algunos puntos, debemos de aclarar, que en este caso estamos hallando el error de  $u_{i,j}$  cuando está variando respecto al tiempo, es decir, solo el subíndice  $j$ . En el punto número  $u_{j=51}$ , la solución numérica es igual a 0.95477 y la solución analítica (exacta) es igual a 0.9975, por lo tanto la norma  $L_2$  del error en el punto  $u_{j=51}$  es:

$$L_2 = \|u^e - u^N\|_2 = \sqrt{\sum_{j=51}^{51} |u_{51}^e - u_{51}^N|^2} = \sqrt{\sum_{j=51}^{51} |0,9975 - 0,95477|^2} = 0,04273$$

Es de notar que el cálculo anterior fué en un solo punto. La norma  $L_2$  nos permite también conocer el error en la cantidad de puntos que queremos tomar, es decir, podemos calcular el error en un solo punto y también calcular el error conjunto o en grupo en todos los puntos obtenidos por el método. Hicimos la prueba hallando el error conjunto de los 30 primeros puntos, es decir el error desde  $u_{j=1}$  hasta  $u_{j=30}$  de la solución numérica. Los resultados se encuentran en la tabla A.3.

Luego de hacer los respectivos cálculos, tenemos que la norma del error conjunto de los 30 primeros punto es:

$$L_2 = \|u^e - u^N\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{20} |u_j^e - u_j^N|^2} = \sqrt{2,3942e - 05} = 0,004892$$

Hacemos saber que la notación  $\sqrt{2,3942e - 05} = \sqrt{2,3942 * 10^{-5}} = \sqrt{0,00002394}$ .

Ahora miraremos si el error se puede *acotar* o *limitar*, es decir, encontrar  $w \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\|u^e - u^N\|_\infty \leq w$ , para  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Como la solución de la ecuación (3.7) es  $u^e = u(x, t) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\beta}}(x - ct)\right)$ , donde  $\frac{3c}{\alpha}$  es la amplitud del solitón [17], [21], [22], [26], [27], y que  $\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\beta}}(x - ct)\right) \leq 1$ , entonces por definición:

$$\|u^e - u^N\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \left| u^e - \left( u_j^n - \alpha \frac{k}{2h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \aleph \right) \right| \quad (3.17)$$

donde  $\aleph = \beta \frac{k(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{2(h)^3}$ . siguiendo con el desarrollo de 3.17, tenemos que:

$$\|u^e - u^N\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \left| u^e - u_j^n + \alpha \frac{k}{2h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \aleph \right|$$

agrupando algunos terminos, se tiene

$$\|u^e - u^N\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \left| (u^e - u_j^n) + \left( \alpha \frac{k}{2h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right) + \aleph \right| \quad (3.18)$$

en virtud a las propiedades de valor absoluto, aseguramos que

$$\|u^e - u^N\|_\infty \leq |u^e - u_j^n| + \left| \alpha \frac{k}{2h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right| + |\aleph|$$

En seguida vamos a hacer las siguientes consideraciones

$$\begin{aligned} i) \quad & |u^e - u_j^n| \leq \frac{3c}{\alpha} \\ ii) \quad & \left| \alpha \frac{k}{2h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right| \leq \frac{3c\alpha}{\alpha} = 3c \\ iii) \quad & |\aleph| = \left| \beta \frac{k(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{2(h)^3} \right| \leq \frac{3c\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

aplicando transitividad de desigualdades, los incisos *i*, *ii*, *iii* nos garantizan que:

$$\|u^e - u^N\|_\infty \leq \frac{3c}{\alpha} + 3c + \frac{3c\beta}{\alpha}$$

$$\|u^e - u^N\|_\infty \leq 3c \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

concluimos que  $\|u^e - u^N\|_\infty$  está acotado, y que  $w = 3c \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)$ , es decir que el valor de la cota depende de la velocidad del solitón y los parámetros de dispersión y no linealidad para  $0 < k < (h)^3 < 1$ .

### 3.3.1. Convergencia del error

Teniendo en cuenta las normas ya definidas, vamos a mirar la convergencia del error. Se sabe que en  $L_2$  está definida así:  $\|u^e - u^N\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^n |u_j^e - u_j^N|^2}$ . Como la solución numérica es la ecuación (3.12) la sustituimos por la expresión  $u^N$ , y la solución exacta (analítica) es  $u(x, t) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\beta}} (x - ct) \right)$ .

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\|u^e - u^N\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^n \left| u^e - \left( u_j^n - \alpha \frac{k}{2h} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \beta \frac{k(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{2(h)^3} \right) \right|^2}$$

$$\|u^e - u^N\|_\infty = \left| u^e - \left( u_j^n - \alpha \frac{k}{2h} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \beta \frac{k(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{2(h)^3} \right) \right| \quad (3.19)$$

Luego a esta expresión hallamos el límite cuando  $k$  tiende a cero y tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| u^e - \left( u_j^n - \alpha \frac{k}{2h} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \beta \frac{k(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{2(h)^3} \right) \right| = 0 \quad (3.20)$$

Como converge a 0 [18], esto nos indica que las *diferencias finitas* si es un método **efectivo** y **consistente** para hallar aproximaciones a la solución analítica.

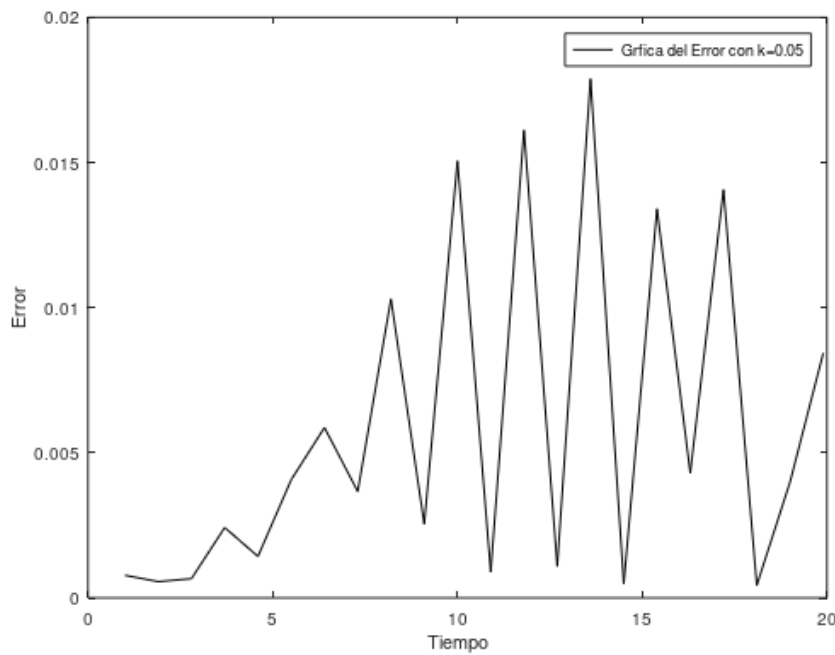


Figura 3.4: Gráfica del error (línea negra) para  $0 \leq t \leq 20$



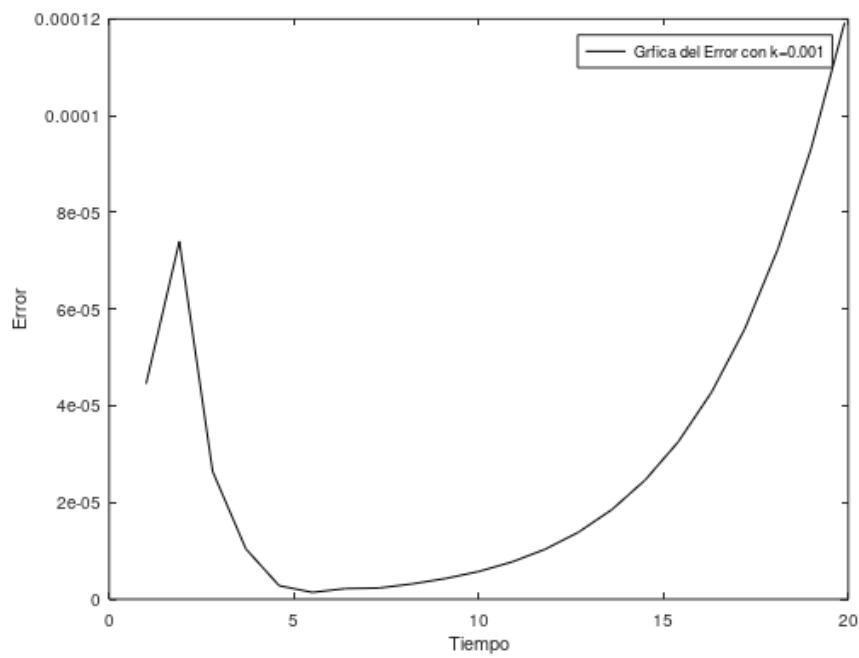


Figura 3.5: Gráfica del error (línea negra) cuando para  $0 \leq t \leq 20$

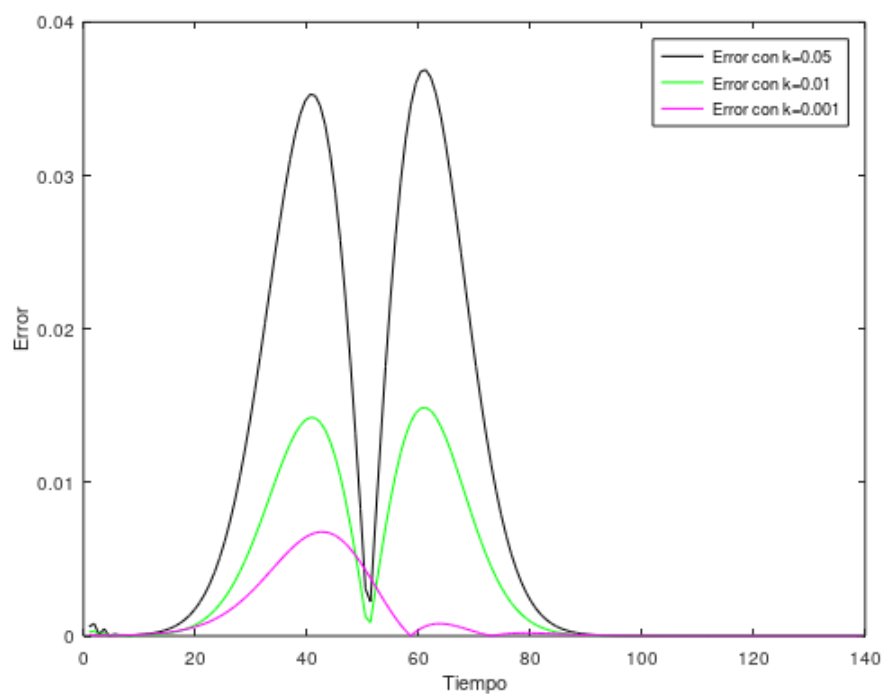


Figura 3.6: Gráficas del error cuando  $k$  tiende a cero para  $0 \leq t \leq 120$

# Capítulo 4

## Conclusiones y Comentarios

En este trabajo se encontró una solución y/o aproximación numérica, a través del método de diferencia finita a la ecuación diferencial parcial Korteweg-de Vries ( $KdV$ ). Las soluciones numéricas y exactas, se calculan con éxito. De acuerdo a la implementación de este método numérico y su desarrollo se pudo analizar junto a sus condiciones iniciales y de contorno, el proceso de discretización usando el método para encontrar el conjunto de valores que se ajustan a las restricciones y/o condiciones iniciales. Es decir, resolviendo dicha ecuación diferencial en una ecuación en diferencia. El método de diferencias finitas es eficiente y fácil de aplicar a la ecuación  $KdV$  y también a problemas con ecuaciones diferenciales parciales. La aproximación de solución numérica a la solución analítica depende de los valores de  $\Delta t$  y  $\Delta x$  que se escoja, y tiene una relación directamente proporcional, o sea que mientras más aproximen a cero, más cerca a la solución analítica cumpliendo con nuestro objetivo general. También podemos concluir que este trabajo es un buen candidato para considerarse como una buena motivación y realizar trabajos a futuro en el área de métodos numéricos, es decir, solucionar numéricamente ecuaciones diferenciales parciales que tienen términos de reacción y no linealidad como la ecuación Fisher-KPP, hallar la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que modelan procesos estocásticos como la ecuación de Black-Scholes, solucionar ecuaciones diferenciales parciales que tienen términos de reacción y dispersión en 2 dimensiones como la ecuación Kadomtsev-Petviashvili. Un comentario adicional, queremos que este trabajo impulse en un futuro a experimentar solucionando la ecuación  $KdV$  implementando otros métodos numéricos, como el método de elementos finitos (MEF), el método de elementos finitos multiescala, el método Petrov-Galerkin-Wavelet, el método de Lax-Friedrichs, el método pseudo-espectral de Fourier y muchos más.

# Apéndice A

## Anexos

### A.1. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación de difusión del ejemplo 4 por medio de diferencias finitas.

```
1 clear all
2 close all
3 %set global variables
4 global alpha
5 global n D2 dz
6 %model parameter
7 alpha = 2;
8 %spatial domain
9 z0 = 0.0;
10 zL = 1.0;
11 %uniform spatial grid
12 n = 201;
13 dz = (zL-z0)/(n-1);
14 z = [z0:dz:zL ] ;
15 %initial conditions (interior points)
16 x = ones(n-2,1);
17 %differentiation matrix (interior points)
18 D2 = diag(+1*ones(n-3,1), -1) + ...
19 diag(-2*ones(n-2,1),0) +...
20 diag(+1*ones(n-3 ,1) ,1);
21 D2(1 ,1:2) = [-1 +1];
22 gamma = 1/(1+alpha*dz)-2;
23 D2(n-2,n-3:n-2) = [+1 gamma ] ;
24 D2 = D2 / ( dz*dz );
25 %call to ODE solver
26 tout=[0:0.2:2]
27 xout=0.005
28 %boundary conditions at z = z0
```

```

29 x0 = xout (: ,1);
30 % boundary conditions at z = zL
31 xn = xout*(n-2)/(1+alpha*z ) ;
32 % plot results
33 xsol = [x0 :xout: xn ];
34 plot(z , xsol , '.. ')
35 xlabel( ' z ');
36 ylabel( ' x(z , t ) ');
37 title ( 'Diffusion equation ')

```

### A.1.1. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por medio de diferencias finitas.

```

1 % Finite difference time-stepping for 1-D KdV equation
2 %  $u_t + (3u^2)_x + u_{xxx} = 0$ 
3 % Parameters
4 dx=.9;
5 dt=.05;
6 nts=40;
7 a=[1];
8 b=[1 -1];
9 c=[1];
10 d=[1 -3 3 -1];
11 r=1:dx:300;
12 % Gaussian initial data:
13 u0=1*exp(-(.05*(r-50)).^2);
14 u=u0;
15 % Computing finite differences:
16 for k=1:nts
17 u=u-(dt/dx)*filter(b, a, 3*(u .* u))-(dt/(dx*dx*dx))*filter(d, c, u);
18 end
19 plot(r, u0, r, u)

```

### A.1.2. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de diferencias finitas de Zabusky-Kruskal.

```

1
2     N = 1000;
3     T = 10.0;
4     p = 100;
5     h = 2*p/N;

```

```

6  j = N;
7  J = [0:1:j-1];
8  x = 2 * pi * J / N;
9  x
10 for ii = 1:j
11 xx(ii) = p * (x(ii)/pi - 1);
12 end
13 %Set initial condition .
14 for i = 1: j
15 u1(i) = 2*(sech(xx(i)))^2;
16 end
17 dt = h^3 / (4+6*(h^2*max(u1)));
18 for i = 1:j
19 u2(i) = 2*(sech(xx(i) - 4 *dt)).^2;
20 end
21 time = dt;
22 counter = 0;
23 b2 = -dt/(h) * 2;
24 v2 = dt/(h^3);
25 while time<(T)
26 time = time + dt;
27 u(1) = u1(1) + b2*((u2(2))^2 - (u2(j))^2) - v2 *(u2(3) - 2*u2(2)
28 + 2*u2(j) - u2(j-1));
29 u(2) = u1(2) + b2*((u2(3))^2 - (u2(1))^2) - v2 *(u2(4) - 2*u2(3)
30 + 2*u2(1) - u2(j));
31 u(j-1)=u1(j-1) + b2* ((u2(j))^2 - (u2(j-2))^2) - v2 *(u2(1) -
32 2*u2(j) + 2*u2(j-2) - u2(j-3));
33 u(j) = u1(j) + b2*((u2(1))^2 - (u2(j-1))^2) - v2 *(u2(2) - 2*u2(1)
34 + 2*u2(j-1) - u2(j-2));
35 for i = 3:j-2
36 u(i) = u1(i) + b2*((u2(i+1))^2 - (u2(i-1))^2) - v2 *(u2(i+2)
37 - 2*u2(i+1) + 2*u2(i-1) - u2(i-2));
38 end
39 counter = counter + 1;
40 u1 = u2;
41 u2 = u;
42 end
43 u_ans = 2*(sech(xx - 4*time)).^2;
44 time
45 error = max(abs(u_ans - u))
46 plot(xx, u, '--', xx, u_ans, '-')
```

### A.1.3. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de Greig y Morris.

```

1 % Finite difference esquema de Greig & Morris KdV equation
```

```

2 %u_t + (3u^2)_x + u_xxx = 0
3 % Parameters
4 dx=.9;
5 dt=.05;
6 nts=40;
7 a=[1];
8 b=[1 -1];
9 c=[1];
10 d=[1 -2 2 -1];
11 r=1:dx:120;
12 % Gaussian initial data:
13 u0=1*exp(-(.05*(r-50)).^2);
14 u=u0;
15 % Computing finite differences:
16 for k=1:nts
17 u=u-(dt/(4*dx))*filter(b, a, 1*(u .* u))-(dt/(2*dx*dx*dx))*filter(d, c, u);
18 end
19 plot(r, u0, 'm', r, u, 'r')
20 space(3cm)
21 xlabel('tiempo')
22 ylabel('Error')

```

#### A.1.4. Código en Octave para la solución numérica de la ecuación KdV por el método de Goda.

```

1 % Finite difference time-stepping for 1-D KdV equation
2 %u_t + (3u^2)_x + u_xxx = 0
3 % Parameters
4 dx=.9;
5 dt=.05;
6 nts=40;
7 a=[1];
8 b=[1 -1];
9 c=[1];
10 d=[1 -2 2 -1];
11 r=1:dx:120;
12 % Gaussian initial data:
13 u0=1*exp(-(.05*(r-50)).^2);
14 u=u0;
15 % Computing finite differences:
16 for k=1:nts
17 u=u-(dt/(dx))*filter(b, a, 1*(u .* u))-(dt/(2*dx*dx*dx))*filter(d, c, u);
18 end
19 plot(r, u0, 'm', r, u, '*')

```

0	0.0050	0.0100	0.0150	0.0200	0.0250	0.0300	0.0350
0.0400	0.0450	0.0500	0.0550	0.0600	0.0650	0.0700	0.0750
0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050	0.1100	0.1150
0.1200	0.1250	0.1300	0.1350	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550
0.1600	0.1650	0.1700	0.1750	0.1800	0.1850	0.1900	0.1950
0.2000	0.2050	0.2100	0.2150	0.2200	0.2250	0.2300	0.2350
0.2400	0.2450	0.2500	0.2550	0.2600	0.2650	0.2700	0.2750
0.2800	0.2850	0.2900	0.2950	0.3000	0.3050	0.3100	0.3150
0.3200	0.3250	0.3300	0.3350	0.3400	0.3450	0.3500	0.3550
0.3600	0.3650	0.3700	0.3750	0.3800	0.3850	0.3900	0.3950
0.4000	0.4050	0.4100	0.4150	0.4200	0.4250	0.4300	0.4350
0.4400	0.4450	0.4500	0.4550	0.4600	0.4650	0.4700	0.4750
0.4800	0.4850	0.4900	0.4950	0.5000	0.5050	0.5100	0.5150
0.5200	0.5250	0.5300	0.5350	0.5400	0.5450	0.5500	0.5550
0.5600	0.5650	0.5700	0.5750	0.5800	0.5850	0.5900	0.5950
0.6000	0.6050	0.6100	0.6150	0.6200	0.6250	0.6300	0.6350
0.6450	0.6500	0.6550	0.6600	0.6650	0.6700	0.6750	0.6800
0.6850	0.6900	0.6950	0.7000	0.7050	0.7100	0.7150	0.7200
0.7250	0.7300	0.7350	0.7400	0.7450	0.7500	0.7550	0.7600
0.7650	0.7700	0.7750	0.7800	0.7850	0.7900	0.7950	0.8000
0.8050	0.8100	0.8150	0.8200	0.8250	0.8300	0.8350	0.8400
0.8450	0.8500	0.8550	0.8600	0.8650	0.8700	0.8750	0.8800
0.8850	0.8900	0.8950	0.9000	0.9050	0.9100	0.9150	0.9200
0.9250	0.9300	0.9350	0.9400	0.9450	0.9500	0.9550	0.9600
0.9650	0.9700	0.9750	0.9800	0.9850	0.9900	0.9950	1

Cuadro A.1: Valores que arrojó el software *Octave* de la variable  $z$  del ejemplo 4

## A.2. Tablas y Resultados

5.0000e-03	1.0000e-02	1.5000e-02	2.0000e-02	2.5000e-02
3.0000e-02	3.5000e-02	4.0000e-02	4.5000e-02	5.0000e-02
5.5000e-02	6.0000e-02	6.5000e-02	7.0000e-02	7.5000e-02
8.0000e-02	8.5000e-02	9.0000e-02	9.5000e-02	1.0000e-01
1.0500e-01	1.1000e-01	1.1500e-01	1.2000e-01	1.2500e-01
1.3000e-01	1.3500e-01	1.4000e-01	1.4500e-01	1.5000e-01
1.5500e-01	1.6000e-01	1.6500e-01	1.7000e-01	1.7500e-01
1.8000e-01	1.8500e-01	1.9000e-01	1.9500e-01	2.0000e-01
2.0500e-01	2.1000e-01	2.1500e-01	2.2000e-01	2.2500e-01
2.3000e-01	2.3500e-01	2.4000e-01	2.4500e-01	2.5000e-01
2.5500e-01	2.6000e-01	2.6500e-01	2.7000e-01	2.7500e-01
2.8000e-01	2.8500e-01	2.9000e-01	2.9500e-01	3.0000e-01
3.0500e-01	3.1000e-01	3.1500e-01	3.2000e-01	3.2500e-01
3.3000e-01	3.3500e-01	3.4000e-01	3.4500e-01	3.5000e-01
3.5500e-01	3.6000e-01	3.6500e-01	3.7000e-01	3.7500e-01
3.8000e-01	3.8500e-01	3.9000e-01	3.9500e-01	4.0000e-01
4.0500e-01	4.1000e-01	4.1500e-01	4.2000e-01	4.2500e-01
4.3000e-01	4.3500e-01	4.4000e-01	4.4500e-01	4.5000e-01
4.5500e-01	4.6000e-01	4.6500e-01	4.7000e-01	4.7500e-01
4.8000e-01	4.8500e-01	4.9000e-01	4.9500e-01	5.0000e-01
5.0500e-01	5.1000e-01	5.1500e-01	5.2000e-01	5.2500e-01
5.3000e-01	5.3500e-01	5.4000e-01	5.4500e-01	0.5000e-01
5.5500e-01	5.6000e-01	5.6500e-01	5.7000e-01	5.7500e-01
5.8000e-01	5.8500e-01	5.9000e-01	5.9500e-01	6.0000e-01
6.0500e-01	6.1000e-01	6.1500e-01	6.2000e-01	6.2500e-01
6.3000e-01	6.3500e-01	6.4000e-01	6.4500e-01	6.5000e-01
6.5500e-01	6.6000e-01	6.6500e-01	6.7000e-01	6.7500e-01
6.8000e-01	6.8500e-01	6.9000e-01	6.9500e-01	7.0000e-01
7.0500e-01	7.1000e-01	7.1500e-01	7.2000e-01	7.2500e-01
7.3000e-01	7.3500e-01	7.4000e-01	7.4500e-01	7.5000e-01
7.5500e-01	7.6000e-01	7.6500e-01	7.7000e-01	7.7500e-01
7.8000e-01	7.8500e-01	7.9000e-01	7.9500e-01	8.0000e-01
8.0500e-01	8.1000e-01	8.1500e-01	8.2000e-01	8.2500e-01
8.3000e-01	8.3500e-01	8.4000e-01	8.4500e-01	8.5000e-01
8.5500e-01	8.6000e-01	8.6500e-01	8.7000e-01	8.7500e-01
8.8000e-01	8.8500e-01	8.9000e-01	8.9500e-01	9.0000e-01
9.0500e-01	9.1000e-01	9.1500e-01	9.2000e-01	9.2500e-01
9.3000e-01	9.3500e-01	9.4000e-01	9.4500e-01	9.5000e-01
9.5500e-01	9.6000e-01	9.6500e-01	9.7000e-01	9.7500e-01
9.8000e-01	9.8500e-01	—	—	—

Cuadro A.2: valores arrojados por *Octave* que son solución numérica por medio de diferencias finitas de (2.24)



---

2.3020e-03	3.3735e-03	3.6739e-03	4.7016e-03	5.7788e-03	7.0740e-03
8.6243e-03	1.0472e-02	1.2664e-02	1.5252e-02	1.8295e-02	2.1855e-02
2.6003e-02	3.0811e-02	3.6361e-02	4.2735e-02	5.0022e-02	5.8314e-02
6.7703e-02	7.8283e-02	9.0148e-02	1.0339e-01	1.1809e-01	1.3434e-01
1.5219e-01	1.7172e-01	1.9297e-01	2.1597e-01	2.4073e-01	2.6725e-01

Cuadro A.3: Error conjunto de los 30 primeros puntos,  $u_j$  para  $1 \leq j \leq 30$

# Bibliografía

- [1] Takeuchi, Yu. Ramirez, Arturo. Ruiz, Carlos J. *Ecuaciones Diferenciales*, 1994. Limusa Editores.
- [2] Kevorkian, J. Pinter. *Partial Differential Equations: Analytical Solutions Techniques*, 2000. Springer-Verlag New York.
- [3] Marin, F. *Solitons: Historical and Physical Introduction*, 2011. Springer, New York.
- [4] Schalch, N. *The Korteweg-de Vries Equation*, 2018. ETH Zürich.
- [5] Mantilla Prada, Ignacio. *Análisis Numérico; 1 ed*, 2004. Universidad Nacional de Colombia.
- [6] Burden, Richard. Faires J Douglas. *Análisis Numérico 7 ed*, Thomson Learning.
- [7] Debnath, Lokenath. Myint, Tyn. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. 4 ed*, Department of Mathematics University of Texas.
- [8] Duarte Vidal, Julio Cesar. Fierro, Esper Andrés. *Método Wavelet-Petrov-Galerkin en la solución numérica de la ecuación KdV*, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Eafit, Medellín.
- [9] Bravo Yuste, Santos. *Métodos Matemáticos Avanzados Para Científicos E Ingenieros*, Universidad de Extremadura, Servicio de publicaciones, 2006.
- [10] Kress, Rainer. *Numerical Analysis. Graduate Text in Mathematics*, Editorial Board, 1991.
- [11] Feng, Bao. Mitsui, Taketomo *A finite difference method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili equations*, journal of computational and applied mathematics, Japan 1998.
- [12] Morgan, Hannah. *Numerical Solutions to the KdV Equation*
- [13] Shaw, Tiffany. *On solving the Korteweg-de Vries equation using a finite difference technique and a multi-dimensional Newton's method to investigate the effects of soliton collision* Diciembre 2002
- [14] Johansen, Brian R. *Numerical Investigations of the Korteweg-de Vries Equation*, Memorial University of Newfoundland, Computational Science, Junio 2008.

- [15] Estefandiari, Ramin. *Numerical Methods For Engineers and Scientists Using MATLAB; Second Edition*, CRC Press. Taylor and Francis Group.
- [16] Morales Mosquera, Diego Armando. *Método de Elementos Finitos - Wavelets en la solución numérica de la ecuación Fisher-KPP*, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Eafit, Medellín.
- [17] Drazin, P. G. Johnson, R. S. *Solitons: An Introduction.*, Second Edition, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [18] Yokus, A. Bulut, H. *Numerical simulation of KdV equation by finite difference method*, Department of Mathematics, Firat University, Turkey 2018.
- [19] Ozer, S. *An effective numerical technique for the Rosenau-KdV-RLW equation*, Department of Mathematics, İnönü University. Malatya, Turkey 2018.
- [20] Saglam Özkan, Y. Yasar\*, E. Çelik, N. *On the exact and numerical solutions to a new (2 + 1)-dimensional Korteweg-de Vries equation with conformable derivative*. Nonlinear Engineering 2021.
- [21] Olufemi Elijah, I. *Approximate Analytical Solution of Nonlinear Differential Equations using Elzaki Transform. Case study: Korteweg-de Vries (KdV) Equations*. Lappeenranta University of Technology , Computational Engineering and Technical Physics, 2018.
- [22] Jafari, H. Firoozjaee, M A. *Homotopy Analysis Method For Solving KdV Equations*. University of Mazandaran, 2010.
- [23] Kolebaje, O. Oyewande, O. *Numerical Solution of the Korteweg De Vries Equation by Finite Difference and Adomian Decomposition Method*. University of Ibadan, Nigeria.
- [24] Khandaker, MD. Bin-Hafiz, E. Sazzad, L *Second Order Scheme For Korteweg-de Vries (KdV) Equation*. Department of Mathematics, Jahangirnagar University, Bangladesh, 2019.
- [25] Greig, I. Morris, J, L. *A hopscotch method for the Korteweg-de-Vries equation*. Journal of Computational Physics, 20(1):64–80, 1976.
- [26] Gazi, S B. Karam Ali, K. *New exact solutions and numerical approximations of the generalized KdV equation* Computational Methods for Differential Equations, Department of Mathematics, Faculty of Science and Art, Veli University, Turkey 2021.
- [27] Brauer, Klaus. *The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation* University of Osnabrück - Germany, 2000.