



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 15 de mayo del 2023

Señores  
Centro De Información Y Documentación  
Universidad Surcolombiana  
Neiva, Huila

El suscrito:

Diego Andres Cangrejo Medina con C.C. No. 1075321070, Autor de la tesis del trabajo de grado titulado **Modelamiento del riesgo financiero de un portafolio a través de copulas**, presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de Matemático

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

**Est:** Diego Andres Cangrejo Medina

**Código:** 20162152014

**Email:** u20162152014@usco.edu.co

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**



**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-06**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**2 de 2**

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Modelamiento del riesgo financiero de un portafolio a través de copulas.**

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cangrejo Medina	Diego Andres

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
N. A	N. A

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cangrejo Esquivel	Alvaro Javier



PARA OPTAR AL TÍTULO DE: **Matemático**

FACULTAD: **Ciencias Exactas**

PROGRAMA O POSGRADO: **Matemática Aplicada**

CIUDAD: **Neiva**

AÑO DE PRESENTACIÓN: **2023**

NÚMERO DE PÁGINAS: **54**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas X Fotografías\_\_\_ Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general\_\_\_ Grabados\_\_\_  
Láminas\_\_\_ Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas  
o Cuadros\_\_\_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: **Rstudio**

MATERIAL ANEXO: **N. A**

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

**Español**

**Inglés**

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. Valor en Riesgo (VaR)               | Value at Risk (VaR)                   |
| 2. Copulas                             | Copulations                           |
| 3. Simulación Montecarlo               | Monte Carlo Simulation                |
| 4. Simulación histórica                | Historical simulation                 |
| 5. Dependencia                         | Dependency                            |
| 6. Backtesting                         | Backtesting                           |
| 7. Tasa representativa del mercado TRM | Representative rate of the market TRM |
| 8. Precio del café                     | Price of coffee                       |
| 9. BIC - AIC                           | BIC – AIC                             |



<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>3 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En este documento se presenta medidas utilizadas para cuantificar el valor en riesgo (VaR) de mercados asociados a un activo financiero, teniendo así un portafolio con dos variables como el precio del Café y la tasa representativa del mercado (TRM) tomado de un periodo de ocho meses desde agosto del 2021 a mayo del 2022, Con el objetivo de encontrar un modelo bivariado que explique el comportamiento de estas variables y permita hacer predicciones sobre ellas, se realiza un proceso de selección a diferentes funciones cópula (elípticas y arquimedianas), encontrando que la cópula Clayton es la que proporciona los mejores resultados para las distribuciones marginales propuestas, mediante pruebas de bondad de ajuste. Finalmente se presenta un análisis del backtesting indicando que las metodologías aplicadas o la copula seleccionada para cuantificar nuestro portafolio muestra un desempeño satisfactorio, de este modo se obtienen resultados más realistas y se evita la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.



**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

This document presents measures used to quantify the value at risk (VaR) of markets associated with a financial asset, thus having a portfolio with two variables as the price of coffee and the representative market rate (TRM) taken from a period eight months from August 2021 to May 2022, with the aim of finding a bivariate model that explains the behavior of these variables and allows making predictions about them, a selection process is carried out for different copula functions (elliptic and Archimedean), finding that the Clayton copula is the one that provides the best results for the proposed marginal distributions, through goodness-of-fit tests. Finally, an analysis of the backtesting is presented, indicating that the methodologies applied or the copula selected to quantify our portfolio shows a satisfactory performance, in this way more realistic results are obtained and overestimation or underestimation of the portfolio's value at risk is avoided.

**APROBACION DE LA TESIS**

Diego Gerardo Roldan Jimenez

**Nombre Jurado:** Diego Gerardo Roldan Jiménez

Diego Gerardo Roldan Jimenez

**Nombre presidente Jurado:** Diego Gerardo Roldan Jiménez

**Nombre Jurado:** Jaime Polania Perdon



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA - USCO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA MATEMÁTICA APLICADA

Modelamiento del riesgo financiero de un portafolio a través de  
copulas

Estudiante:

Diego Andres Cangrejo Medina

Neiva - Huila  
2023

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA - USCO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA MATEMÁTICA APLICADA

Estudiante:

Diego Andres Cangrejo Medina

Asesor: Alvaro Javier Cangrejo Esquivel

Modelamiento del riesgo financiero de un portafolio a través de  
copulas

Trabajo de grado presentado al programa de pregrado en Matemática Aplicada - departamento de matemáticas y estadística - Universidad Surcolombiana, como requisito parcial para la obtención del título de Matemático.

Neiva - Huila  
2023

# Resumen

En este documento se presenta medidas utilizadas para cuantificar el valor en riesgo (VaR) de mercados asociados a un activo financiero, teniendo así un portafolio con dos variables como el precio del Café y la tasa representativa del mercado (TRM) tomado de un periodo de ocho meses desde agosto del 2021 a mayo del 2022, Con el objetivo de encontrar un modelo bivarado que explique el comportamiento de estas variables y permita hacer predicciones sobre ellas, se realiza un proceso de selección a diferentes funciones cópula (elípticas y arquimedianas), encontrando que la cópula Clayton es la que proporciona los mejores resultados para las distribuciones marginales propuestas, mediante pruebas de bondad de ajuste. Finalmente se presenta un análisis del backtesting indicando que las metodologías aplicadas o la copula seleccionada para cuantificar nuestro portafolio muestra un desempeño satisfactorio, de este modo se obtienen resultados más realistas y se evita la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.

**Palabras clave:** Valor en Riesgo (VaR), Copulas, simulación Montecarlo, simulación histórica, dependencia, backtesting, tasa representativa del mercado TRM, precio del café, BIC-AIC.

# Abstract

This document presents measures used to quantify the value at risk (VaR) of markets associated with a financial asset, thus having a portfolio with two variables such as the price of coffee and the representative market rate (TRM) taken from a period of eight months from August 2021 to May 2022. With the aim of finding a bivared model that explains the behavior of these variables and allows making predictions about them, a selection process is carried out for different copula functions (elliptic and Archimedean), finding that the Clayton copula is the one that provides the best results for the proposed marginal distributions, through goodness-of-fit tests. Finally, an analysis of the backtesting is presented, indicating that the methodologies applied or the copula selected to quantify our portfolio shows a satisfactory performance, in this way more realistic results are obtained and overestimation or underestimation of the portfolio's value at risk is avoided.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Planteamiento Del Problema . . . . .	7
1.2. Justificación . . . . .	8
1.3. Antecedentes . . . . .	9
1.4. Objetivos Del Estudio . . . . .	11
1.4.1. Objetivo General . . . . .	11
1.4.2. Objetivos Especificos . . . . .	11
<b>2. Marco Teorico</b>	<b>12</b>
2.1. Riesgo Financiero . . . . .	13
2.1.1. Riesgo De Credito . . . . .	13
2.1.2. Riesgo De Liquidés . . . . .	13
2.1.3. Riesgo Legal . . . . .	14
2.1.4. Riesgo Operacional . . . . .	14
2.1.5. Riesgo De Mercado . . . . .	14
2.2. Dependencia . . . . .	15
2.3. Volatilidad . . . . .	15
2.4. Análisis Marginal . . . . .	15
2.5. La Distribución De Perdidas y Ganancias . . . . .	16
2.6. Medidas De Riesgo . . . . .	16
2.7. La Desviación Estándar . . . . .	16
2.8. Valor en Riesgo (VaR) . . . . .	17
2.9. Modelos Analíticos De Formas Paramétricas . . . . .	17
2.10. Modelos Por Simulación . . . . .	18
2.10.1. Simulación Histórica . . . . .	18
2.10.2. Simulación Monte Carlos . . . . .	18
2.11. Distribución Marginal . . . . .	19
2.11.1. Función De Distribución Marginal . . . . .	19
2.12. Modelo De Backtesting Para El VaR . . . . .	20
2.13. Funciones Copula . . . . .	20
2.14. Conceptos Básicos . . . . .	20
2.15. Funciones Cópula y Variables Aleatorias . . . . .	21
2.16. Tipos De Funciones Cópula . . . . .	22
2.17. Funciones Cópula de la Familia Arquimediana . . . . .	22
2.18. Funciones Cópula Elípticas . . . . .	23
2.18.1. Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) . . . . .	23
2.19. Funciones cópula y medidas de dependencia . . . . .	24
2.20. Medidas Gráficas De Dependencia . . . . .	26

2.21. Inferencia Sobre El Parámetro De Dependencia En Funciones Cópula . . . .	27
2.22. Métodos de Optimización en R . . . . .	29
<b>3. Metodología</b>	<b>31</b>
3.1. Enfoque de investigación . . . . .	31
3.2. Area De Estudios Y Recolecion De Datos . . . . .	32
3.3. Análisis Exploratorio . . . . .	32
3.4. Determinación de las distribuciones marginales . . . . .	34
3.5. Análisis de la dependencia entre las series de retornos del café y la tasa representativa del mercado (TRM) . . . . .	38
3.5.1. Propuesta inicial del conjunto de familias de cópulas . . . . .	39
3.5.2. Estimación de parámetros de las funciones cópula y las distribuciones marginales . . . . .	39
3.5.3. Selección de la función cópula mas adecuada . . . . .	40
<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Análisis exploratorio . . . . .	41
4.2. Relación entre Café y TRM . . . . .	43
4.2.1. Criterio de selección de la función cópula . . . . .	44
4.2.2. Prueba de desempeño(Backtesting) del $VaR_\alpha$ . . . . .	48
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>

# Índice de figuras

2.1. Chi - Plot para variables independientes . . . . .	27
2.2. Chi - Plot para variables dependientes . . . . .	27
3.1. ACF Y PACF para la TRM en el periodo de estudio . . . . .	33
3.2. ACF Y PACF para la CAFE en el periodo de estudio . . . . .	33
3.3. Histograma . . . . .	36
3.4. Cuantiles Normales . . . . .	37
3.5. Tasa representativa del mercado (TRM) y café , gráfico de dispersión . . . . .	38
4.1. Diagrama de cajas y alambres del Café . . . . .	42
4.2. Diagrama de cajas y alambres del TRM . . . . .	42
4.3. Chi-Plot para el precio del Café y del TRM en el periodo de agosto del 2021 al marzo del 2022 . . . . .	44
4.4. Gráfico de puntos para $n = 161$ simulaciones . . . . .	46
4.5. Gráfico de puntos para $n = 1000$ simulaciones . . . . .	47
4.6. Gráfico Backtesting para los valores simulados por la copula Clayton y los observados . . . . .	49

# Índice de Tablas

2.1. Resumen de las principales funciones cópula . . . . .	24
3.1. Resumen de las principales Distribuciones . . . . .	38
3.2. Distribuciones condicionales cópulas . . . . .	40
4.1. Periodo del Café 2021 - 2022 . . . . .	43
4.2. Periodo del TRM 2021-2022 . . . . .	43
4.3. $T$ de Kendal 2021-2022 . . . . .	43
4.4. Valores funciones cópula . . . . .	45
4.5. Valores-p obtenidos en las pruebas de backtesting para el VaR . . . . .	48

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteamiento Del Problema

La ciencia de datos es hoy en día una herramienta fundamental para la explotación de datos y la generación de conocimiento. Entre los objetivos que persigue se encuentra la búsqueda de modelos que describan patrones y comportamientos a partir de la naturaleza propia de los datos, con el fin de tomar decisiones o hacer predicciones. En el área financiera se ha experimentado un enorme crecimiento al extenderse el acceso a grandes volúmenes de datos e incluso su tratamiento en tiempo real, requiriendo de técnicas sofisticadas que puedan tratar con los problemas prácticos como escalabilidad, robustez ante errores, adaptabilidad con modelos dinámicos, etc. Según la literatura existen numerosos grupos de investigación de diferentes áreas (computación, estadística, matemáticas, ingeniería, etc.) que trabajan en la propuesta de nuevos algoritmos, técnicas de computación e infraestructuras para la captura, almacenamiento y procesado de los datos, etc. [1].

Por ende, el comportamiento de las series financieras es unas de las principales preocupaciones de los inversionistas al momento de comprar acciones, tasas de cambios, bonos, entre otros, es de vital importancia tener un conocimiento aproximado del riesgo que presentan las inversiones que realizan. Una de las opciones para medir el riesgo de mercado, es investigar el comportamiento de los precios de mercado y considerar la serie de retornos como una buena aproximación para la volatilidad. Muchos investigadores aseguran que la volatilidad debe ser calculada de manera temporal [2, 3, 4], por lo que se han desarrollado diversos modelos de volatilidad heterocedastica, cuya estimación de parámetros se realiza a través del método de máxima verosimilitud o métodos bayesianos [5].

Sin embargo, para ajustar dichos modelos de volatilidad heterocedastica es necesario validar, mediante una prueba estadística, que la serie de retornos al cuadrado, al suponer que su media poblacional es nula para todo tiempo, posea rezagos significativos en sus autocorrelaciones seriales a través de la prueba Ljung-Box. En caso que la serie no posee rezagos, no es conveniente ajustar esta clase de modelos para estimar la volatilidad [6].

Por otro lado, autores como [7] proponen modelos de riesgo usando copulas para el calculo del VaR, dichos autores proponen modelos GARCH (1,1) para la estimación de la volatilidad. En la práctica se suele medir la dependencia entre variables aleatorias a través del coeficiente de correlación lineal, pues dicho coeficiente carece de sentido pues es aplicable únicamente cuando las variables aleatorias siguen una distribución normal multivariada. En consecuencia, estudios han demostrado que la dependencia entre las rentabilidades de los activos financieros es no lineal, y posiblemente asimétrica. En concordancia es de gran interés estudiar este tipo de fenómenos con la finalidad de proporcionar nuevos escenarios

en presencia o no de evento extremos.

Así mismo, [7] proponen una metodología en la estimación del VaR siguiendo los siguientes pasos:

1. Identificación de portafolio y la serie de retornos de las variables en estudio.
2. Ajuste de un modelo de volatilidad para los retornos asociados al portafolio, GARCH(1,1)
3. Proponer y seleccionar el modelo copula que se mejor se ajusta.
4. Estimar del valor en riesgo de acuerdo a la estructura de dependencia.

Por tanto, el siguiente trabajo de grado busca ¿Cómo estimar el valor en riesgo de un portafolio en el mercado colombiano a través de copulas?, por consiguiente el valor en riesgo explora a través de la teoría copulas como una medida de dependencia entre las variables de un portafolio de activos. Es decir, la idea es analizar la información del portafolio para identificar si dicha información presenta cambios estadísticamente significativos en la estimación del Value at Risk (VaR).

## 1.2. Justificación

Las pérdidas ocasionadas por el riesgo de crédito, entendiéndolo como la perdida potencial que se obtiene por motivos del incumplimiento en una transacción (Cerezo, Bielsa y Ramon 2011, citado por [8]), son un tema central en el análisis de las instituciones financieras. No administrar correctamente este riesgo que ocasiona perdidas en el valor patrimonial de la compañía, problemas en la liquidez y solvencia. De acuerdo a [9] se refiere al riesgo de crédito como el evento en el cual una segunda parte no puede pagar los términos previamente acordados, por ello se lo conoce también como riesgo de incumplimiento. Por otro lado,[10] indica como el incumplimiento de las obligaciones con lleva a las empresas a una perdida igual a la cantidad adeudada por el deudor menos una cantidad de recuperación.

La presencia de proyectos de inversión dentro de las empresas es parte de sus metas y tanto para el mercado financiero es una tarea experimentar periodos de corto y largo plazos que les permita observar en cuanto cambia el precio de un activo durante el tiempo que se destina, en otras palabras las entidades financieras en las empresas o mercados hacen que sean cada vez más sensibles a la volatilidad de los precios de los instrumentos financieros que poseen en sus portafolios de inversión, surgiendo así el llamado riesgo de mercado o el Valor en Riesgo (VaR), “se define como la máxima perdida que se puede tener en la inversión de un portafolio con un determinado nivel de confianza”-[11], por ende es la medida más comúnmente utilizada en la finanzas de la actualidad; Existen varios enfoques para la estimación del VaR, como la Simulación Histórica la cual se basa en el comportamiento de la historia de los datos [12], asumiendo que los datos históricos de los rendimientos tienden a repetirse en el futuro, Los métodos de Monte Carlos permite simular trayectorias para los diferentes factores de riesgo a través de la generación de escenarios probables y aleatorios, dada una distribución de probabilidad. por último, los métodos paramétricos asumen normalidad multivariada para el caso del análisis de riesgo de una cartera de activos.

La teoría de la cópula es una herramienta fundamental en el modelado multivariante de distribuciones. Permite la definición de la distribución conjunta a través de las distribuciones marginales y la dependencia entre las variables. [13]. Recientemente la teoría de la cópula

se ha extendido al caso condicional, permitiendo el uso de cópulas para modelar estructuras dinámicas. Variación de tiempo en la primera y segundos momentos condicionales es ampliamente discutido en la literatura, por lo que permite la variación temporal en la dependencia condicional parece ser natural.

Dentro de las funciones de copulas existen varias familias que agrupan los diferentes tipos de copulas existentes, cada una de ellas contienen características particulares que se adaptan a las diferentes distribuciones y de acuerdo al comportamiento de los datos utilizados para su construcción logran captar múltiples tipos de dependencia. Así como es posible elegir una cópula elíptica, también se pueden elegir cópulas de la familia arquimediana que son asimétricas y paramétricas, dentro de esta familia de cópulas existen diferentes clases, las más comunes y utilizadas son: la cópula de Gumbel, la cópula Clayton y la cópula Frank, ya que la naturaleza es asimétrica y esto asigna una probabilidad a valores extremos que puedan ocurrir en el mercados; Es decir, captura las fluctuaciones o variaciones bruscas o repentinas que se pueden dar en los mercados, ya sean al alza o a la baja,[14].

[15] usaron las copulas Frank, Gumbel, Clayton y t-student en tres diferentes distribuciones marginales: la empírica, la uniforme y la t-student, para medir el riesgo de un portafolio de activos conformado por dos acciones colombianas. Observaron que la copula Clayton tuvo resultados similares a la simulación histórica, lo que indica que el calculo del VaR es mejor a través de la copula Frank y Gumbel.

En el análisis de VaR es frecuente encontrar que los rendimientos de las variables del portafolio sigan distribuciones diferentes a la normal. En este tipo de series de datos es común observar altos niveles de curtosis lo que evidencia la presencia de colas pesadas, es decir que los eventos extremos tienen una probabilidad de ocurrencia más alta según [12]. Para la modelación de estas colas pesadas, la teoría del valor extremo (EVT, por sus siglas en inglés) ha sido ampliamente estudiada, dado que esta herramienta se enfoca en la obtención del mejor estimado posible del área de la cola de la distribución (McNeil, 1999, como se citó en [12]).

En concordancia con[16], si bien el EVT complementa al modelo de VaR, explicando los eventos extremos de una distribución, es un enfoque que no debe ser usado separadamente, dado que no resuelve otros problemas de las series financieras como el de la dependencia.

Así mismo, [17] realizan la estimación del VaR para el problema de cartera. La cartera considerada se formula como una combinación lineal de varias variables aleatorias. Se observa que el VaR se define comúnmente para una sola variable aleatoria. El punto innovador de esta investigación es que estas variables aleatorias no se suponen necesariamente independientes, sino que pueden tener una posible relación no lineal. Aunque el supuesto de independencia se utiliza muy a menudo en el análisis financiero, se cree que muchos fenómenos muestran algunas características de dependencia. Para tratar la dependencia no lineal, se utilizan métodos de funciones de cópula. Estos estudios empíricos muestran la eficacia de los métodos basados en cópulas en comparación con algunas metodologías de referencia.

### 1.3. Antecedentes

Estudiar la dependencia de variables de un portafolio de activos es muy frecuente a la hora de evaluar los riesgos, por eso un riesgo financiero puede ser definido como la volatilidad de los resultados esperados, en particular el riesgo de mercado se refiere a la posibilidad de sufrir pérdidas en los mercados financieros, como es en el caso de [18] donde destaca en su trabajo

de metodologías de medición de riesgos de mercado el método de varianza-covarianzas, la Simulación Histórica y la Simulación de Montecarlo mostrando que no existe una que pueda ser aceptada como la correcta, pues cada una tiene sus fortalezas y debilidades.

En el caso de [19] trabajaron en Medición del VaR en los portafolios de acciones del mercado colombiano, Tomando los datos de la Bolsa de Valores de Colombia en el mercado público accionario aplicando los métodos de Simulación Histórica, Simulación de Montecarlo y Varianza-Covarianza donde la elección del método depende ampliamente de la composición del portafolio, siendo así la Simulación de Montecarlo como la mejor opción para cuantificar el VaR entre los tres métodos estudiados debido a que es el más exacto pues posee el enfoque más completo si la modelación se desarrolla correctamente.

Para el caso de la valoración del riesgo utilizando copulas se tiene a [14] quien modelo una aplicación al sector financiero de México entre (2002-2008) como lo ha dicho a lo largo de toda la investigación es importante valorar los riesgos de forma adecuada y oportuna es primordial, ya que de esas valoraciones depende en gran medida, la estabilidad de los mercados financieros, así que se consideró importante dejar claras las definiciones más relevantes. Sugiere que cuando se observa que las marginales se distribuyen de forma normal se obtienen aproximaciones más precisas que con la distribución uniforme, tanto en el periodo completo como en los subperiodos, ya que el ajuste uniforme sobrevalora en exceso los riesgos, colocando a un posible inversor en una posición extremadamente conservadora. La cópula elegida para trabajar el portafolio fue Gaussiana, ya que es una cópula versátil y ampliamente utilizada en la práctica. Para escoger tanto la distribución como la cópula adecuada, los resultados se contrastaron con los obtenidos de forma empírica, con los respectivos backtesting y con los mínimos errores cuadráticos medios. Se ha podido constatar, que cuando se implementa la metodología de cópulas en las estimaciones se obtienen beneficios a la hora de valorar el riesgo, sin embargo, no presenta grandes diferencias con respecto a las valoraciones realizadas por el método tradicional de simulación histórica.

Para [8] que trabajo una aplicación de la teoría de cópulas a un portafolio de crédito de consumo ecuatoriano. Para la aplicación primero se estimaron las distribuciones marginales de la tasa de incumplimiento y del monto de exposición con base en la información histórica; luego, se construyeron cópulas y se aplicó el Teorema de Sklar a través de modelos de distribuciones multivariadas de cópulas (MVDC). Posteriormente, conociendo la estructura de dependencia, se estimó la pérdida total de la cartera, máxima pérdida, Credit VaR y Expected Shortfall (ES); considerando también un nivel de confianza. Finalmente, al comparar las estimaciones de los MVDC con la metodología del organismo de control ecuatoriano, se demostró que esta última subestima la pérdida esperada, indicadores de riesgo y eventos de pérdida extrema. Al no predecir los eventos extremos ósea las colas, se subestiman las pérdidas potenciales y aumenta el nivel del riesgo.

Como en el caso de [7], en su documento se describen diversas metodologías que permiten calcular dos medidas utilizadas para cuantificar el riesgo de mercado asociado a un activo financiero: el valor en riesgo, VaR y el Expected Shortfall, ES. Los métodos analizados se dividen en dos grupos. En el primer grupo, compuesto por las metodologías de normalidad, simulación histórica y teoría del valor extremo (EVT), no se modelan las dependencias existentes en el primer y segundo momento condicional de la serie. En el segundo grupo, las metodologías ARMA-GARCH y ARMA-GARCH-EVT modelan los dos tipos de dependencias, mientras RiskMetrics modela solo la segunda. Estas metodologías fueron aplicadas a las variaciones diarias de la tasa interbancaria para el periodo de (1995-2004) El desempeño o backtesting del VaR calculado para diferentes metodologías en los años 2003 y 2004 muestran que las mejores son aquellas que modelan la dependencia de la varianza condicional,

tales como los modelos RiskMetrics, ARMA-GARCH y ARMA-GARCH-EVT. Las técnicas con el peor desempeño son la de simulación histórica, la EVT sin modelar dependencia y la basada en el supuesto de normalidad.

En otro caso como en el trabajo de investigación que hicieron [15] utilizaron portafolios conformados por dos activos riesgosos con acciones colombianas, Entre los métodos de medición del VaR están la simulación histórica, la Simulación Montecarlo, los modelos paramétricos y los modelos de duración y convexidad. Para el cálculo del VaR se requiere modelar los retornos del portafolio y hallar la distribución de pérdidas que los describe. Tradicionalmente, se han supuesto retornos con distribución normal, pero la evidencia empírica rechaza esta hipótesis. Durante los últimos años se han adelantado investigaciones para calcular el VaR utilizando “cópulas”. Estas determinan la estructura de dependencia del portafolio y de los activos riesgosos que lo conforman, sin partir de supuestos sobre sus distribuciones. De este modo se obtienen resultados más realistas y se evita la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.

Para el estudio propusieron que el método de cópulas presentó unos resultados más realistas que el método tradicional de simulación histórica, dado que este último sobrestimaba el valor en riesgo del portafolio. Más aun, entre las cópulas utilizadas, la de Clayton arrojó resultados muy cercanos a la simulación histórica para las tres distribuciones marginales asumidas en los portafolios (empírica, uniforme y t-student), por lo que, al parecer, es más adecuado el cálculo del VaR con las cópulas de Frank y Gumbel-Hougaard. Estas presentaron resultados muy similares cuando se calcularon con distribuciones marginales empíricas y uniformes. Por otro lado, se recurrió a la t-student porque esta distribución representa adecuadamente las colas pesadas, que en la investigación se presentaron en todos los activos riesgosos analizados; además, por la no independencia de los datos.

## 1.4. Objetivos Del Estudio

### 1.4.1. Objetivo General

Modelar el valor en riesgo (VaR) de un portafolio de activos financieros en el mercado colombiano a través de copulas.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Modelar la volatilidad para las variables que conforman el portafolio según su naturaleza.
- Estimar el valor en riesgo (VaR) a través de una función copula de la familia elíptica y arquimediana.
- Comparar los resultados propuestos por medio de una prueba de desempeño (Back-testing).

# Capítulo 2

## Marco Teorico

La inestabilidad que existe en los mercados hoy en día, hace que las investigaciones de la medición de Riesgos financieros sean de importancia. Por ello, el mundo de las finanzas se ha preocupado por desarrollar un sistema de medición que cuantifique de forma apropiada y precisa los riesgos a los que se está expuesto, para así poder gestionarlos y predecirlos lo más acertadamente posible.

De acuerdo con [20] La crisis financiera represento el motor que incentivo la necesidad de la medición agregada de los riesgos financieros, y aunque la medición de estos no constituye una línea de investigación tan amplia, al menos no en el caso colombiano, se puede observar a nivel internacional la existencia de autores que han encaminado su foco investigativo al desarrollo de instituciones y técnicas que permitan afianzar la relevancia de estas cuantificaciones agregadas.

El capital mínimo exigido por el regulador de una entidad financiera está determinado por los riesgos que enfrenta sus portafolios, gracias a Harry Markowitz quien fue reconocido como el padre de la teoría moderna de portafolio según [21]. Markowitz estudio el proceso de selección eficiente para una cartera de inversión y recomienda que los inversionistas deben evaluar el riesgo y el rendimiento de su cartera en un todo y no de los títulos individuales, Unos de los principales retos de investigación para la economía en el área financiera, consiste en alcanzar una mayor comprensión sobre el riesgo y su incidencia en las expectativas de inversión de los agentes económicos.

Por otra parte, el capital regulatorio que debe tener toda entidad financiera está determinado por el portafolio de activos que lo conforman, de esta manera el capital puede disminuir en caso que el riesgo del portafolio asociado a cada activo no sea administrado correctamente, y las perdidas excedan el valor de capital requerido en un tiempo determinado. Así mismo se pueden presentar perdidas en el valor de los activos de un portafolio, causado por movimientos adversos de los factores que determinan el precio de los activos, lo cual está asociado al riesgo de mercado que debe administrar una entidad financiera.

Con el fin de estimar correctamente los riesgos asociados a un portafolio existen diferentes medidas que permiten cuantificar la exposición de este, ante perdidas inesperadas. Para [22] el valor en riesgo (VaR) es una de las medidas más importantes del riesgo de mercado y el VaR condicional (CVaR) ha surgido como complemento del VaR. Proporciona una mayor medida conservadora de las pérdidas relativas al VaR.

Unos de los principales retos de investigación para la economía en el área financiera, consiste en alcanzar una mayor comprensión sobre el riesgo y su incidencia en las expectativas de inversión de los agentes económicos, para ello daremos un abre bocas de los tipos de Riesgo Financiero.

## 2.1. Riesgo Financiero

El término riesgo financiero se refiere a la pérdida potencial o falta de rentabilidad, o sea la privación de la posibilidad de ingresos adicionales. Riesgo también puede definirse como la volatilidad o dispersión de los flujos financieros inesperados o, en términos generales, como la incertidumbre que se tiene sobre resultados futuros. Según [21], la definición de riesgo está relacionada con la variabilidad del valor futuro de una posición, debido a cambios en el mercado o por eventos con incertidumbre que pueden causar pérdida o poner en peligro la toma de decisiones en las inversiones. Diferentes autores se han enfocado en la exploración de los tipos de riesgos de diferente naturaleza. pueden ser clasificados de manera general en cinco grandes grupos: riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo legal, riesgo operacional y riesgo de mercado.

### 2.1.1. Riesgo De Credito

Es un sector importante de las inversiones está sujeto al riesgo de que el deudor de una obligación no pueda cumplir con la misma. Para una institución bancaria, cada crédito que otorga está expuesto en mayor o menor medida a la probabilidad de incumplimiento en el pago por parte del acreditado.[2] nos describe que el riesgo de crédito es la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte, pudiéndose subdividir en riesgo emisor, riesgo contraparte y riesgo país.

- **Riesgo Emisor:** Es la pérdida potencial por falta de pago del obligado directo. En los mercados bursátiles existen calificadoras las cuales son empresas especializadas en la medición del riesgo de crédito, dando calificaciones específicas para el emisor y la emisión de que se trate.
- **Riesgo Contraparte:** Es la pérdida potencial ocasionada por la falta de pago de un intermediario. En la adquisición de un título de deuda del Gobierno Federal a una Casa de Bolsa, se considera que dicho título está libre de riesgo emisor, sin embargo, existe la posibilidad de que la contraparte (Casa de Bolsa) no pueda cubrirnos el título al vencimiento por diversos motivos que pueden ir desde fallas operativas hasta quiebra o suspensión de pagos.
- **Riesgo País:** Este riesgo se refiere a la pérdida potencial en virtud de que un emisor o contraparte se encuentre radicado en un país que imponga controles e incluso prohibiciones respecto a la salida de divisas, lo que ocasionaría que, aun cuando el emisor o contraparte estén dispuestos y puedan honrar su deuda, les sea imposible hacerlo. Las calificadoras de valores también realizan la calificación del riesgo país.

### 2.1.2. Riesgo De Liquides

Este riesgo se deriva de la necesidad de cerrar una posición en un cierto instante de tiempo. Este tipo de riesgo asume dos formas: liquidez mercado/producto y flujo de efectivo/financiación. La primera forma se presenta cuando una transacción no puede ser cerrada a los precios vigentes en el mercado debido a un bajo nivel de operaciones en éste. La segunda forma se refiere a la incapacidad de conseguir financiación necesaria, lo cual puede llevar a forzar una liquidación anticipada, transformando las pérdidas potenciales en pérdidas reales[14].

En cambio, para [2] nos dice algo similar que los faltantes de liquidez en los mercados financieros deben ser cubiertos en forma inmediata. En resumen, la materialización de este riesgo se puede presentar en dos situaciones: La obtención de recursos a un alto costo y la venta de activos con pérdida.

### **2.1.3. Riesgo Legal**

Es la pérdida potencial por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables y la aplicación de sanciones, en relación con las operaciones que las instituciones llevan a cabo,[2].

Para [14] escribe que es el riesgo que supone la realización de una pérdida cuando una operación no se puede ejecutar por no existir una formalización clara o no ajustarse al marco legal establecido, bien sea de ámbito financiero, civil o legal. Éste también incluye el riesgo regulatorio y fiscal.

### **2.1.4. Riesgo Operacional**

Es la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los sistemas de información, en los controles internos o por errores en el procesamiento de las operaciones. También incluye las fallas humanas, el fraude y desastres ocasionados por fuerzas naturales y accidentes, que impidan continuar con las operaciones o que reduzcan la capacidad operativa.

Los riesgos operativos en la mayoría de los casos se cuentan dentro de los riesgos no cuantificables en virtud de la complejidad para estimar la probabilidad de ocurrencia y la magnitud de las pérdidas,[2].

### **2.1.5. Riesgo De Mercado**

En los mercados financieros, como en cualquier otro mercado, los precios están sujetos a las fuerzas de la oferta y la demanda. La variabilidad de los precios, conforman el factor del riesgo de mercado. La cual están representados por las tasas de interés o precio del dinero, los tipos de cambio que están el precio de las divisas. Parafraseando a [2] El riesgo de mercado está implícito en todo tipo de operaciones financieras, ya que todas ellas están sujetas a tasa de interés, precios o tipos de cambio. Las posiciones de divisas están expuestas a la alza o baja de los tipos de cambio.

Por otra parte, para [23] tiene que ver con fluctuaciones de las inversiones en la bolsa de valores, también hacen parte de este las fluctuaciones de precios de insumo y de productos, la tasa de cambio y las tasas de interés.

*¿Qué es dependencia en finanzas?* Desde el punto de vista financiero se dice que es un acuerdo donde una de las partes esta obligada a proveer dinero o recursos a otra persona, que se ha declarado incapaz de sostener sus gastos.

En los mercados financieros, se pueden encontrar diversos factores de riesgo que interactúan con los instrumentos financieros de una cartera de inversión, por esto se han desarrollado herramientas que permitan identificar y modelizar esa interacción. Así que, es necesario aclarar el concepto de dependencia y los métodos de aproximarla, ya que una estructura de dependencia identificada y tratada de forma idónea ayudará a llevar a cabo una medición de riesgos con mayor precisión. También cabe advertir que en el contexto financiero la estructura de dependencia varía con la volatilidad que presenta el mercado.

## 2.2. Dependencia

En finanzas, existen gran cantidad de factores de riesgo que interactúan constantemente dentro de un portafolio. En consecuencia, se han desarrollado herramientas apropiadas para modelar dicha interacción, en este plano el concepto de dependencia juega un papel fundamental, las funciones cópula se trabaja el concepto de dependencia, el cual se refiere a medidas como el  $\rho$  de Spearman y  $\tau$  de Kendall. Sin embargo [24] inició con el estudio de la dependencia de los factores de riesgos analizando el problema de correlación del incumplimiento. Para estudiar la cartera de crédito especificó una distribución conjunta con distribuciones marginales conocidas a partir de la función de cópula.

Para [14] en los mercados financieros, se pueden encontrar diversos factores de riesgo que interactúan con los instrumentos financieros de una cartera de inversión, por esto se han desarrollado herramientas que permitan identificar y modelizar esa interacción. Así que, es necesario aclarar el concepto de dependencia y los métodos de aproximarla, ya que una estructura de dependencia identificada y tratada de forma idónea ayudará a llevar a cabo una medición de riesgos con mayor precisión.

También cabe advertir que en el contexto financiero la estructura de dependencia varía con la volatilidad que presenta el mercado.

## 2.3. Volatilidad

Para [14] nos dice que, a lo largo de la literatura, diversos autores han brindado múltiples formas de interpretar el significado de la volatilidad. Entre otros, para [25], la volatilidad es “una medida estadística de dispersión de la distribución esperada de los rendimientos de un activo; cuanto mayor es la variabilidad, mayor es la dispersión de la distribución de los rendimientos esperados y viceversa”; siendo una medida estadística de cuanto cambia el precio de un activo durante un periodo de tiempo determinado.

Cabe mencionar que el concepto de volatilidad debe ser tratado con mucha cautela, ya que existen varios tipos de volatilidad, tales como la implícita, histórica y prevista. Al mismo tiempo, se debe tomar en cuenta que no existe una única metodología que permita aproximar la estimación de la volatilidad, ya que siempre se debe estimar porque generalmente no viene determinada, debido a que no es una variable directamente observable. Por ello, es necesario definir a qué tipo de volatilidad se hace referencia, el periodo de estudio y las necesidades que se presentan.

## 2.4. Análisis Marginal

El análisis marginal es fundamental para las estrategias de producción y operaciones así permite fijar un precio competitivo y proyectar los beneficios estimados del negocio. [26] propone el estudio del análisis marginal para la toma de decisiones sobre costos y precios. Así mismo, [27], define el análisis marginal de la siguiente forma “( $\dots$ ) El análisis marginal estudia el aporte de cada producto/servicio/cliente a las utilidades de la empresa. Permite, por ejemplo, contestar las siguientes preguntas: ¿A partir de qué volumen mínimo de ventas conviene lanzar un nuevo producto?, ¿Conviene dejar de producir un determinado producto existente?, ¿Realmente le conviene a la empresa estar atendiendo a un determinado cliente?,

¿Convendría cerrar directamente una fábrica o sucursal?, ¿Cuánto tengo que vender para que convenga continuar?[28].

## 2.5. La Distribución De Perdidas y Ganancias

En la administración de riesgo, es frecuente referirse a la distribución de pérdidas y ganancias, entendiendo esta como la distribución de probabilidad de los retornos de un activo o portafolio específico. En particular, los administradores de riesgo se interesan en las pérdidas mayores. De esta forma, los modelos estadísticos son construidos frecuentemente a partir del negativo de los retornos, concentrándose en la cola derecha de la distribución. La principal excepción a esta metodología se encuentra en el análisis de tasas de interés, las cuales presentan una relación inversa con el valor del activo, [7].

## 2.6. Medidas De Riesgo

Existen diferentes formas para medir el riesgo de mercado de un activo o portafolio. Una forma de medirlo es a través de la función de distribución de probabilidad de las pérdidas y ganancias de los activos, utilizando estimadores de algunos parámetros de dicha distribución tal como la desviación estándar ( $\sigma$ ) o de estadísticos como cuantiles de la distribución ( $q_\sigma$ ), [7].

## 2.7. La Desviación Estándar

Una forma simple de medir el riesgo de un activo es a través de la volatilidad de sus retornos, ya que cuando un activo tiene alta volatilidad, su resultado presenta una mayor incertidumbre. Una posible aproximación a la volatilidad es la desviación estándar del activo. Si se supone que los retornos de los activos provienen de una distribución normal, la cual se encuentra definida por su media y su varianza, entonces se puede encontrar con facilidad la probabilidad de que el retorno se encuentre dentro de un rango específico, [7].

La varianza de una variable aleatoria  $X$  está definida como:

$$V(x) \equiv \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

En el caso de un portafolio con  $k$  activos y posiciones constantes en el tiempo, el valor esperado y la varianza de su retorno  $N_t$  son:

$$\begin{aligned} E(N_t) &= \omega' \mu \\ V(N_t) &= \omega' \sum \mu \end{aligned}$$

Donde la desviación estándar del portafolio está definida por:

$$\sigma = \sqrt{(V(N_t))}$$

## 2.8. Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo (VaR) se define como la máxima pérdida posible de un portafolio, dados un nivel de confianza y un periodo de tenencia. En términos estadísticos, el VaR corresponde al  $\alpha$  - esimo cuantil ( $Q_\alpha$ ) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los  $(1 - \alpha)$  % peores casos de la distribución. De este modo, la pérdida de una inversión no puede exceder el VaR con probabilidad  $\alpha$  [7]. En la literatura han sido ampliamente aceptados dos grandes grupos de modelos tradicionales de medición del Valor en Riesgo: los modelos analíticos de formas paramétricas y los modelos por simulación [15]).

## 2.9. Modelos Analíticos De Formas Paramétricas

los modelos de forma paramétrica, son los modelos que calculan el VaR partiendo de un supuesto para la función de pérdida y ganancia dicho supuesto es la suposición de distribuciones normales o T-student, donde la distribución de la función de pérdida y ganancia puede ser descrita por sus dos primeros momentos (media y varianza) y a partir de esto construir el VaR. en la T-student para determinados grados de libertad, se presenta una curtosis más alta que la de la distribución normal y por este motivo los eventos extremos tienden mayor probabilidad de ocurrencia. de esta manera el VaR podrá ser calculado así para el caso de una distribución t.

$$\begin{aligned} P[r_t \leq VaR] &= P \left[ \frac{r_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR - \mu}{\sigma} \right] = 1 - \alpha \\ \frac{VaR - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(\alpha) = Z_\alpha \\ VaR &= \mu + \sigma Z_\alpha \\ P[r_t \leq VaR] &= 1 - \alpha \\ VaR &= t_p^{-1}(\alpha) \equiv Z_\alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde:

$r_t$  Son los retornos de los activos.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  Es la función inversa de la distribución normal acumulada.

$Z_\alpha$  Es el  $\alpha$  - esimo cuantil de una distribución normal estándar.

$t_v^{-1}(\cdot)$  Es la función inversa de la distribución t  $t(v, \alpha)$  Es el  $\alpha$  - esimo cuantil de una distribución t con v grados de libertad.

Según [15] se observa que el VaR con distribución t es más alto que el VaR que asume normalidad. En consecuencia, el VaR por normalidad subestima el riesgo en casos donde la distribución de pérdidas y ganancias presenta colas pesadas. Estas “colas gruesas o pesadas” son preocupantes, porque el VaR pretende capturar precisamente el comportamiento del rendimiento del portafolio en la cola izquierda. Con colas gruesas, un modelo basado en la aproximación normal subestima la proporción de datos extremos, y por tanto, el verdadero valor del riesgo, de acuerdo con Jorion (citado por [18]:192). Las correlaciones en la mayoría

de tales casos tienden a aumentar significativamente, sin permitir el efecto de diversificación.

A este grupo pertenecen también los llamados modelos de varianzas y covarianzas, donde se parte de datos históricos para construir una matriz de correlaciones en un periodo de tenencia y los retornos de los activos se distribuyen normalmente. En este caso, el VaR es un múltiplo de la desviación típica del portafolio, que parte de la matriz de varianzas - covarianzas de los activos riesgosos que componen el portafolio. Así, el VaR será:

$$VaR = P_0 \alpha \sigma_p$$

$P_0$  Es el valor inicial del portafolio

$\alpha$  Es el nivel de confianza seleccionado

$\sigma_p$  Es la desviación típica del portafolio

En estos modelos se supone que la volatilidad de los retornos es constante en el tiempo, lo que no es necesariamente cierto. Por tal motivo se hace la modelación de la volatilidad ( $\sigma$ ) a través de modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heterocedasticity Models) y GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) que suponen varianza condicional no constante[29].

## 2.10. Modelos Por Simulación

### 2.10.1. Simulación Histórica

El modelo por simulación histórica parte de datos históricos de la serie de retornos de los activos financieros, los cuales no dependen de ningún supuesto sobre su distribución. El VaR es calculado como el  $\alpha$  - esimo percentil de la distribución empírica de pérdidas y ganancias, bajo el supuesto que la distribución no cambia en el tiempo [7]. En este caso, se utilizan datos del pasado como una predicción de lo que ocurriría en el futuro. Con eso se valoran los portafolios y se replican diferentes pautas temporales, de periodos anteriores, en las variables asumidas como activos riesgosos.

La simulación histórica es un método relativamente simple, fácil de implementar y tiene la ventaja de que no es necesario asumir que las rentabilidades siguen una distribución normal como lo mencionamos anteriormente, por lo que es posible reflejar la distribución de rentabilidades completas, tal y como se habría producido con anterioridad.

La simulación histórica omite situaciones con volatilidad temporalmente elevada, es decir, muestra debilidad en cuanto a la predicción de eventos extremos, y además se puede volver incómodo para carteras grandes con complicadas estructuras.

### 2.10.2. Simulación Monte Carlos

Se vinculan también los métodos de Montecarlo que permiten simular trayectorias para los diferentes factores de riesgo a través de la generación de escenarios probables y aleatorios, dada una distribución de probabilidad[12]. En análisis de riesgos es frecuente encontrar que

los rendimientos de los activos financieros sigan distribuciones diferentes a la normal.

La simulación de Monte Carlo se basa en la generación de escenarios aleatorios futuros y se requieren conocimientos de la distribución probabilística de dichos escenarios, que se suelen suponer normales o lognormales, con matrices de covarianzas estimadas a partir de series históricas de rendimientos.

La simulación de Monte Carlo es similar a la simulación histórica, sólo que en este caso los cambios hipotéticos de los precios se crean como realizaciones de un proceso estocástico propuesto.

Según[14] El estimador del VaR por el método de simulación de Monte Carlo siempre tiene un error que se debe a la variabilidad de la muestra; conforme el número de simulaciones aumenta, el estimador converge a su valor verdadero, normalmente a una velocidad equivalente a la raíz cuadrada del número de escenarios. Sin embargo, el uso de un mayor número de escenarios puede hacer excesivamente lentos los cálculos, con mínimos beneficios marginales en términos de precisión.

## 2.11. Distribución Marginal

Es la distribución de probabilidad de un subconjunto de variables aleatorias de un conjunto de variables aleatorias. En los escenarios donde la función de distribución  $F(x, y)$  del par de variables aleatorias  $(X, Y)$ , es dada, se hace posible obtener la función de distribución de cada una de las variables aleatorias independientes, de la siguiente manera.

### 2.11.1. Función De Distribución Marginal

Dado el par de variables aleatorias  $(X, Y)$ , con función de distribución  $F(x, y)$ . Entonces la función:

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Se le llama función de distribución marginal de  $X$  De igual forma es posible definir la función de distribución marginal de  $Y$  como sigue:

$$F(Y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

En general, se definen las distribuciones marginales como las distribuciones por separado de cada una de las componentes de la V.a. bidimensional.

Dada la función de distribución conjunta de  $(X, Y)$ ,  $F(x, y)$ , se define la función de distribución marginal de  $X$  como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty) = P(X \leq x, Y \leq +\infty), x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, la función de distribución marginal de  $Y$  viene dada por:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y), y \in R$$

## 2.12. Modelo De Backtesting Para El VaR

Para [29]; nos indica que el backtesting es una etapa fundamental en la implementación de modelos de riesgo de mercado se encuentra en la aplicación de pruebas de desempeño o backtesting, Después de estudiar y analizar los métodos de estimación del VaR, es conveniente comprobar y contrastar los resultados. Por ello, se verifica que tan efectivos son el Var y el ES para identificar los riesgos subyacentes dentro del portafolio. Estas pruebas requieren estimaciones recursivas del VaR para un período de tenencia dado.

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BSC) ha recomendado el Backtesting con el fin de verificar la precisión del VaR obtenido. Dicha verificación también es de gran interés para los gestores y analistas de riesgos, ya que requieren contrastar y corroborar que su modelo pronostique de forma acertada y anticipada el número de ocasiones en que se ha excedido el VaR.

Es un proceso basado únicamente en observaciones pasadas, que sirve para confirmar si el cálculo del VaR es acertado con respecto a los resultados de pérdidas y ganancias observadas. Esta prueba consiste en contabilizar cuantas veces las pérdidas observadas exceden el VaR o, dicho de otra manera, Backtesting es una contrastación empírica que se lleva a cabo comparando los resultados obtenidos cada día frente al VaR estimado para determinar el número de ocasiones en que las pérdidas son superiores a él.

## 2.13. Funciones Copula

El termino copula fue introducido por [30], hace referencia a una función de distribución conjunta cuyas marginales son uniformes en el intervalo  $[0,1]$ , o funciones de distribución de cualquier variable como se verá más adelante. En esta investigación nos enfocaremos en las funciones Copula bivariantes o multivariado.

## 2.14. Conceptos Básicos

### Definición 2.14.1

Se dice que  $C$  es una copula bivalente si cumple las siguientes propiedades:

- $C$  es una subcópula bivalente cuyo dominio es  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Para todo  $u, v$  en  $I$ ,  $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ ;  $C(u, 1) = u$  y  $C(1, v) = v$
- Para todo  $u_1, u_2, v_1, v_2$  en  $I$  tal que  $u_1 < u_2$  se cumple que  $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$ .

### Teorema 2.14.2

Sea  $C$  una cópula. Para todo  $v \in I$ , la derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial u}C(u; v)$  existe para todo  $u \in I$ . Para todo  $u$  y  $v \in I$ , se cumple que,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u}C(u; v) \leq 1$$

De manera análoga, dado  $u \in I$ , la función  $\frac{\partial}{\partial u}C(u; v)$  existe para todo  $u \in I$  y también se cumple que,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u}C(u; v) \leq 1$$

Además, las funciones  $v \rightarrow \frac{\partial}{\partial v}C(u; v)$  y  $u \rightarrow \frac{\partial}{\partial u}C(u; v)$  están bien definidas y son no decrecientes casi por todas partes en  $I$ , excepto en un conjunto de medida nula. (Ver demostración en: ([31]pág 14)

### Teorema 2.14.3

Sea  $C$  una cópula. Si  $\frac{\partial}{\partial v}C(u; v)$  y  $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}C(u; v)$  son continuas en  $I^2$ , y  $\frac{\partial}{\partial v}C(u; v)$  existe para todo  $u \in I = [0, 1]$ , cuando  $v = 0$ , entonces  $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}C(u; v)$  y  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}C(u; v)$  existen en  $[0, 1]^2$  y,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}C(u; v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}C(u; v)$$

## 2.15. Funciones Cópula y Variables Aleatorias

Se entiende por variable aleatoria (v.a) a una variable cuyos posibles valores quedan determinados por una cierta función de distribución de probabilidad, la cual hace referencia a una función que asigna para todo  $x \in \mathbb{R}$ , la probabilidad  $F_X(x) = p(X \leq x)$ , siendo esta una función continua por la derecha y no decreciente, además de cumplir  $F_X(-\infty) = 0$  y  $F_X(\infty) = 1$ , para dos o más v.a, el objetivo del análisis del comportamiento conjunto quedará determinado por la función de distribución conjunta[31].

### Definición 2.15.1

Una función de distribución bivalente es una función  $H : [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$  que cumple las siguientes condiciones:

- $H$  es una función no decreciente respecto a las dos variables.
- $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  y  $H(-\infty, \infty) = 1$

Como el dominio de  $H$  es todos  $\mathbb{R}^2$ , sus marginales  $F$  y  $G$  quedan determinadas de la forma  $F_X(x)H(x, \infty)$  y  $G_Y(y) = H(\infty, y)$ . Se puede comprobar que  $F$  y  $G$  son funciones de distribución.

Las funciones cópula son de hecho funciones que justifican la correspondencia entre un valor dado de la función de distribución conjunta  $H_{X_Y}(x, y)$  y pares ordenados de las funciones

de distribución marginales  $F_X(x)$  y  $G_Y(Y)$ .

El problema ahora es conocer como podemos determinar la función de distribución bivariente  $H - X_Y(x, y)$  conociendo solo las marginales  $F_X(x)$  y  $G_Y(Y)$ . Dicho de otro modo queremos responder la pregunta; ¿Es posible relacionar directamente la distribución bivariente con las marginales? Una posible y sencilla respuesta se da en el caso de que las v.a  $X$  y  $Y$  sean independientes.

### **Teorema 2.15.2**

Sean  $(X, Y)$  dos variables aleatorias, estas son independientes sí y solamente sí:

$$H_{XY}(x, y) = F_X(x)G_Y(Y)$$

En este sentido la función de distribución bivariada no tiene ninguna influencia de las marginales y es ahí donde yace el problema de tratar con variables aleatorias que si presentan dependencia. Entre las posibles alternativas se tiene el uso de regresión, funciones de distribución condicionadas, funciones características o *Funciones Cópula*.

Por tanto las funciones cópula son una seria alternativa para modelar la dependencia de dos variables aleatorias. A continuación se enuncia el teorema de Sklar, el cual explica la importancia de las funciones cópula para modelar una distribución bivariente a partir de sus marginales.

### **Teorema 2.15.3 (Sklar, 1959)**

Sea  $H_{XY}(x, y)$  una función de distribución bivariada cuyas funciones de distribución marginal son  $F_X(x)$  y  $G_Y(y)$ , entonces existe una función cópula  $C$ , tal que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$H_{XY}(x, y) = C(F_X(x), G_Y(y))$$

Contrariamente,

$$C(F_X(x), G_Y(y)) = C(u, v) = H(x, y) = H(F_u^{-1}(u), G_v^{-1}(v))$$

Además, si  $F_X(x)$  y  $G_Y(y)$  son continuas, la cópula  $C(u, v)$  es única. Dicho de otro modo,  $C(u, v)$ , queda determinada de forma única en  $Ran(F) \times Ran(g)$ .

Finalmente, según el teorema integral de probabilidad  $u = F_X(x)$  y  $v = G_Y(y)$  se distribuyen uniforme  $(0, 1)$ , y así se concluye que cualquier par de funciones de distribución acumulada puede ser utilizada para crear una función cópula con las condiciones dadas en (2.14)

## **2.16. Tipos De Funciones Cópula**

## **2.17. Funciones Cópula de la Familia Arquimediana**

La familia de cópulas arquimediana tiene un gran número de campos de aplicación como son: Finanzas, Geoestadística, entre otros. El motivo, por el cual el campo de la aplicación de esta familia sea tan grande es debido a que es de fácil implementación, fácil acotación y simulación, y flexibilidad [32].

Una función cópula  $C$  es llamada Arquimediana si existe una función continua estrictamente

decreciente y convexa  $\phi[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  con  $\phi(0) = 1$  y  $\phi(1) = \infty$ , tal que  $C$  puede escribirse de la forma:

$$C(u, v) = \phi[-1](\phi(u) + \phi(v))$$

Donde,  $\phi$  es llamado generador arquimediano de  $C$  y  $\phi[-1]$  es su pseudo-inversa. Según [31] existen cerca de 22 funciones cópula pertenecientes a la familia Arquimediana, en este estudio se trabajará con las funciones cópula Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton pertenecientes a la familia Arquimediana. (2.1)

## 2.18. Funciones Cópula Elípticas

Las funciones cópula elípticas pertenecen a distribuciones elípticas, estas tienen como característica la representación de relaciones de dependencia simétricas sin importar la cola que se analice de las distribuciones implicadas [33].

En este trabajo se utilizarán dos de estas, la función cópula Gaussiana y la t-student, las cuales son una extensión de las distribuciones normal y t-student respectivamente (2.1).

La **cópula gaussiana** bivariada está definida por:

$$C(u, v) = \phi(\phi^{-1}(u) + \phi^{-1}(v))$$

Donde,  $\phi$  es la función de distribución normal multivariada con vector de medias  $\mu^T = (0, 0)$  con matriz de covarianzas  $\Sigma$ , tal que  $\text{diag}(\Sigma) = 1$ .

La **cópula t-student** bivariada está definida de la siguiente manera:

$$C(u, v) = t_v, R(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v))$$

Donde  $t_v^{-1}$  es la inversa de la distribución t-student.

### 2.18.1. Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

Según [31] contiene como miembros todas las cópulas con secciones cuadráticas tanto en  $u$  como en  $v$ . Esta familia fue discutida por Morgenstern (1956), Gumbel (1958) y Farlie (1960), sin embargo parece que la publicación más antigua es de Eyraud (1938). Esta cópula modela dependencia débil con un  $\tau$  de Kendall que está entre  $-\frac{2}{9}$  y  $\frac{2}{9}$ .

La fórmula de la cópula FGM, así como un resumen de la información de las funciones cópula Arquimedianas y Elípticas se muestra en la (tabla 2.1).

Función cópula	$\phi$	$\mathbb{C}(u, v)$	Rango de $\theta$
Clayton	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\max \left\{ \left( (u^{-\theta} + v^{-\theta} + 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right) \right\}$	$\theta \in [-1, \infty)$
Gumbel - Hougart	$(-\log(t))^{\theta}$	$\exp \left\{ - \left[ (-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$\theta \geq 1$
Frank	$-\log \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$-\frac{1}{\theta} \log \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$\theta \in (-\infty, \infty)$
Gaussiana	-	$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2 + 2\theta xy}{2(1-\theta^2)} \right)$	$\theta \in [-1, 1]$
Student	-	$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2 + 2\theta xy}{r(1-\theta^2)} \right)^{-\frac{r+2}{2}}$	$\theta \in [-1, 1]$
FGM	-	$uv [1 + \theta(1-u)(1-v)]$	$\theta \in [-1, 1]$

Tabla 2.1: Resumen de las principales funciones cópula

## Cópula empírica

Las cópulas empíricas fueron estudiadas por Deheuvels en 1969, la idea consiste en construir una función cópula a partir de valores muestrales recolectados de las variables aleatorias, sin establecer dependencia de ningún parámetro. Esta cópula es de gran importancia en la selección de cópulas dentro de una familia candidata [34].

Sea  $N$  una muestra de tamaño  $n$  obtenida de una distribución bivalente, la cópula empírica  $C_n$  esta dada por:

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_k \leq x(i), y_k \leq y(i))$$

donde  $x(i)$  y  $x(j)$  son los estadísticos de orden de la muestra.

## 2.19. Funciones cópula y medidas de dependencia

Se ha recalado que la función cópula es, en sí misma una caracterización de la dependencia de un par de variables aleatorias  $(X; Y)$ , por lo que tendría sentido usarlas para medir, cual sería ese grado de dependencia. En esta sección se explica el papel que adoptan las cópulas en el estudio de la dependencia y la relación que guardan con los conocidos coeficientes no paramétricos de dependencia,  $\rho$  de *Spearman* y  $\tau$  de *Kendall*, ambos relacionados a una forma de dependencia conocida como concordancia.

La propiedad más importante que tienen estas medidas de dependencia, es que permanecen invariantes por medio de aplicaciones estrictamente crecientes que actúen sobre las variables aleatorias. Teniendo en cuenta que el termino correlación es manejado exclusivamente para medidas de relación lineal como el coeficiente de Pearson, con las funciones cópula se trabaja el concepto de dependencia, el cual se refiere a medidas como el  $\rho$  de *Spearman* y  $\tau$  de *Kendall*.

## Tau de Kendall

Esta es una medida íntimamente relacionada con los conceptos de concordancia y discordancia.

### Definición 2.17.1

Sean  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$ , dos observaciones de un par de variables aleatorias continuas  $(X, Y)$ . Entonces,  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$  son concordantes si  $x_i < x_j$  y  $y_i < y_j$ , o si  $x_i > x_j$  y  $y_i > y_j$ . De manera análoga  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$  son discordantes si  $x_i < x_j$  y  $y_i > y_j$ , o si  $x_i > x_j$  y  $y_i < y_j$ .

### Definición 2.17.2

Tau de Kendall muestral Sea una muestra aleatoria  $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)$  de  $n$  observaciones de un vector aleatorio continuo  $(X, Y)$ ; tendremos pues  $nC_2$  pares distintos de  $(x_i; y_i)$  y  $(x_j; y_j)$  de observaciones de la muestra. Sea  $c$  el número de pares concordantes y  $d$  el número de pares discordantes. Se define el Tau de Kendall como:

$$\tau = \frac{c - d}{c + d}$$

### Teorema 2.17.3

**Tau de Kendall poblacional usando funciones cópula** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas cuya cópula es  $C$ . Entonces la versión poblacional del tau de Kendall para  $X$  e  $Y$  viene dada por la expresión.

$$\begin{aligned}\tau_{X,Y} &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1\end{aligned}$$

## Rho de Spearman

Esta cantidad está definida también a partir de la concordancia/discordancia, al igual que el  $\tau$  de Kendall. Para obtener la versión poblacional del coeficiente  $\rho$  de Spearman, introducimos  $(X_1; Y_1)$ ,  $(X_2; Y_2)$  y  $(X_3; Y_3)$  vectores aleatorios e independientes con distribución conjunta  $H_{XY}$  (cuyas marginales son de nuevo  $F_X$  y  $G_Y$ ) y cuya cópula es  $C$ ; la versión poblacional de dicho coeficiente está caracterizada por ser proporcional a la probabilidad de la concordancia menos la probabilidad de la discordancia de dos vectores aleatorios  $(X_1; Y_1)$  y  $(X_2; Y_2)$ .

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0])$$

Donde el 3 en esta ecuación actúa como constante de normalización.

### Teorema 2.17.4

Rho de Spearman poblacional a partir de una función cópula: Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas cuya cópula es  $C$ . Entonces la versión poblacional del coeficiente rho de Spearman

para  $X$  e  $Y$  viene dada por:

$$\rho_{XY} = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) du dv - 3$$

## 2.20. Medidas Gráficas De Dependencia

El Chi-plot fué propuesto originalmente por [35] y la construcción de esta herramienta se basa en el estadístico chi-cuadrado, conocido por su utilidad en el estudio de la dependencia de dos variables aleatorias representadas por una tabla de doble entrada (más conocidas como tablas de contingencia). Para calcular los chi-plots se procede de la siguiente manera [32].

- Calcular los  $H_i, F_i$  y  $G_i$ , así : Sean  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  una muestra aleatoria de una función de distribución conjunta (continua)  $H$  del par de variables  $(X, Y)$ , y sea  $I(A)$  una función indicadora del evento  $A$ . Para cada observación  $(x_i, y_i)$ :

$$H_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i)$$

$$F_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(X_j \leq X_i)$$

$$G_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(Y_j \leq Y_i)$$

- [35] Propone graficar los pares  $(\lambda_j, \chi_i)$ , donde:

$$X_i = \frac{H_i - F_i G_i}{\sqrt{F_i(1-F_i)G_i(1-G_i)}}$$

$$\lambda_i = 4 \operatorname{sgn}(\tilde{F}_i \tilde{G}_i) \max(\tilde{F}_i^2, \tilde{G}_i^2)$$

Donde  $\tilde{F}_i = F_i - \frac{1}{2}$ ;  $\tilde{G}_i = G_i - \frac{1}{2}$  para  $i \in 1, \dots, n$

Se puede demostrar que bajo el supuesto de  $X$  e  $Y$  son independientes,  $\chi_i$  se distribuye asintóticamente normal;  $\chi \sim N(0, \frac{1}{n-1})$ , por tanto con un nivel de significancia  $\alpha$ , las bandas de confianza se construyen de la siguiente manera (ver demostración en [36]).

$$\left( -\frac{z_1 - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{n-1}}, \frac{z_1 - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{n-1}} \right)$$

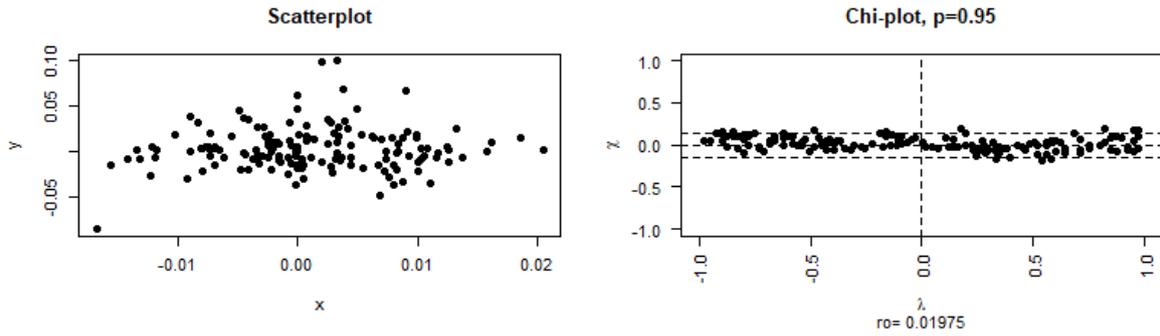


Figura 2.1: Chi - Plot para variables independientes

El Chi-Plot es un diagrama de dispersión de los pares  $(\lambda_i, \chi_i)$ , donde  $\lambda_i$  es una medida de distancia de la observación  $(X_i, Y_i)$ , al centro de los datos. Para ilustrar el método se tiene las siguientes gráficas de referencia tomadas de [32], la (2.1) muestra un Chi - Plot típico cuando las variables son independientes, se observan los puntos dentro de las bandas, indicando esto que hay independencia entre las variables.

La (2.2) muestra un chi-plot donde las variables estudiadas son dependientes y los puntos se encuentran fuera de las bandas:

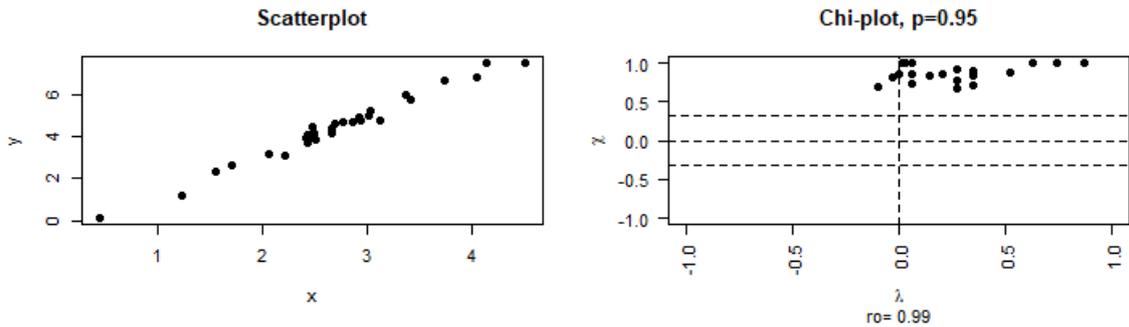


Figura 2.2: Chi - Plot para variables dependientes

## 2.21. Inferencia Sobre El Parámetro De Dependencia En Funciones Cópula

Como se plantea en [37] una cópula es una sencilla representación de un modelo multivariante y por tanto es natural pensar que puede ser factible aplicar el método de estimación asintótica de máxima verosimilitud (**MLE** por sus sigas en ingles) para estimar sus parámetros poblacionales ó el método de momentos.

### Estimación Por El Método De Momentos

En general, para cualquier familia de cópulas se tendrá que  $\tilde{\theta} = g(\tau)$  para alguna función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  asociada a la cópula escogida. Ya que  $\tau$  está basado en rangos, esta estrategia de estimación puede ser construída como una adaptación no paramétrica del célebre método de los momentos. Dicho de otra forma, si  $\tilde{\theta} = g(\tau)$  para alguna función diferenciable  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $\tilde{\theta} = g(\tau)$  puede considerarse como el estimador de  $\theta$  basado en el tau

de Kendall.

La popularidad de  $\tilde{\theta}$  como un estimador del parámetro de dependencia  $\theta$  proviene en parte del hecho de que el tau de Kendall se puede calcular sin problemas para muchos modelos de cópula paramétricos.

El método consiste en igualar el  $\tau$  de Kendall o el  $\rho$  de Spearman poblacionales, de cada función cópula, calculados según los teoremas 2.17.3 y 2.17.4 (ver medidas poblacionales para cópula estudiada en la tabla 2-1); con los estimadores muestrales y despejar el parámetro de dependencia.

## Método MLE Caso Paramétrico

Se denota  $L_n(\theta)$  a la verosimilitud de  $n$  observaciones para un vector de parámetros  $\theta$  y la log-verosimilitud se denota por  $l_n(\theta)$ , la cual esta definida como:

$$l_n(\theta) = \sum_{i=1}^n l_i(\theta)$$

Entonces  $\hat{\theta}_{MLE} = \text{máx} l_n(\theta)$  para  $\theta \in \Omega$ , donde  $\Omega$  es el espacio paramétrico de  $\theta$ . En el caso de una función cópula la log-verosimilitud viene dada por:

$$l_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(c(F_{x1}(x_{1i}), F_{x2}(x_{2i}))) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \log(f_{xj}(x_{ij}))$$

Donde  $c$  es la función de densidad de la cópula  $C$ , dada por:

$$c(F(x_1), F(x_2)) = \frac{\partial^2(C(x_1), F(x_2))}{\partial F(x_1)\partial F(x_2)}$$

## Inferencias Para Marginales IFM

El método de máxima verosimilitud visto anteriormente puede llevar una carga computacional muy pesada, sin embargo con la función cópula se dividen los parámetros de las distribuciones marginales y los parámetros de la estructura de dependencia [34], dicho esto, se puede escribir la log verosimilitud presentada en la ecuación (2.21) de la siguiente manera:

$$l_n(\theta) = \sum_{t=1}^n \ln c(F(x_{1t}; \theta_1), F(x_{2t}; \theta_2)) + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^2 \ln f_i(x_{it}, \theta_i)$$

Siendo  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ . El proceso se divide en dos pasos:

- 1 Realizar las estimaciones de las distribuciones marginales:

$$\hat{\theta}_i = \text{máx} \sum_{t=1}^n \ln f_i(x_{it}, \theta_i) \longrightarrow \forall_i = 1, 2$$

- 2 Estimar  $\alpha$  luego de hacer las estimaciones anteriores.

$$\hat{\alpha} = \text{máx} \sum_{t=1}^n \ln c(F(x_{1t}; \hat{\theta}_1), F(x_{2t}; \hat{\theta}_2))$$

## Selección De La Cópula

Anteriormente, se presentaron diferentes procedimientos para la estimación de una cópula de forma paramétrica o semi-paramétrica. Sin embargo,[29] estos procedimientos suponen que se conoce de antemano el tipo de cópula que describe correctamente la estructura de dependencia que existe entre las series analizadas. En general, este supuesto no se cumple, por lo que es necesario obtener algún tipo de criterio que permita escoger una cópula específica entre el conjunto de todas las cópulas posibles. Algunos de los criterios más conocidos son:

**Log verosimilitud y criterios de información.** [38] propone el uso de dos estadísticos como criterios para comparar varias cópulas y entre estas seleccionar la más apropiada. El primero de ellos es el valor de la función de log verosimilitud evaluada donde  $\hat{\theta}$  corresponde al estimador de máxima verosimilitud. El segundo estadístico sugerido por [38] es el criterio de información de Akaike (AIC por sus siglas en inglés), definido como  $AIC = \ell - n_p$ , donde  $n_p$  corresponde al número de parámetros estimados en el modelo. Esta última definición difiere de la definición usual de este criterio de información donde  $AIC = -2\ell + 2n_p$ ; sin embargo, [38] propone la primera definición de este criterio, como una especie de log verosimilitud penalizado por el número de parámetros estimados.

Adicional a los anteriormente mencionados,[39] utilizan otro criterio de información para la selección de la cópula. Este criterio de información es el Criterio Bayesiano (BIC por sus siglas en inglés).

$$\begin{aligned}AIC &= -2\ell + 2n_p \\BIC &= -2\ell + n_p \log(n)\end{aligned}$$

donde  $n_p$  representa el número de parámetros estimados y  $n$  es el tamaño de la muestra.

## 2.22. Métodos de Optimización en R

Las funciones de log verosimilitud  $l_n(\theta)$  presentadas en la sección 2.21 deben ser maximizadas mediante métodos numéricos. Los métodos de optimización existentes se centran en la minimización general de funciones no lineales de  $p$  parámetros, donde al menos uno de dichos  $p$  parámetros podrían ser acotados. Para maximizar se debe minimizar el negativo de la función objetivo. En términos matemáticos, el problema de optimización se especifica como hallar.

$$x^* = \operatorname{argmin}(l_n(\theta))$$

Para realizar la optimización se utiliza el método **BFGS** el cual es un método que no requiere derivadas analíticas. **BFGS** es un algoritmo de tipo quasi-Newton en el sentido que no se usa la matriz Hessiana. En su lugar se construye una matriz definida positiva de forma iterativa en cada paso. Puede demostrarse que esta matriz converge a la Hessiana en la solución del problema, bajo determinadas condiciones, que no siempre se cumplen. En todo caso el hecho que la matriz construida en el algoritmo no siempre converge a la Hessiana no afecta la búsqueda de la solución. En el algoritmo **BFGS** siempre se busca un mínimo global de la función objetivo. Si lo que se desea es un máximo, como en el caso de la estimación máximo verosímil, basta cambiar el signo de la función objetivo [40].

El algoritmo se basa en el siguiente proceso. En el paso  $t$  se selecciona una dirección de búsqueda dada por la solución de la ecuación

$$B_t P_t = -\nabla f(x_t)$$

Donde en donde  $f$  es la función objetivo y  $B_t$  es una aproximación de la matriz Hessiana, la cual es actualizada iterativamente.  $\nabla f(x_t)$  es el gradiente de  $f$  evaluado en  $x_t$ .

Una línea de búsqueda en la dirección  $P_t$  es usada para encontrar el siguiente punto  $x_{t+1}$ .

La matriz  $B_t$  es actualizada mediante la utilización de dos matrices

$$B_{t+1} = b_t + U_t + V_t$$

Donde  $U_t$  y  $V_t$  son simétricas de rango uno, pero tienen diferentes bases. La condición de quasi-Newton impuesta sobre esta actualización está dada por

$$B_{t+1}(x_{t+1} - x_t) = \nabla f((x_{t+1} - \nabla f(x_t)))$$

A partir de un valor inicial  $x_0$  y una matriz Hessiana aproximada  $B_0$  se repiten los siguientes pasos hasta que  $x_t$  converge a la solución.

1. Obtener una solución  $P_t$  resolviendo  $B_t P_t = -\nabla f(x_t)$
2. Efectuar una búsqueda lineal para encontrar un aceptable tamaño de salto  $\alpha_k$  en la dirección encontrada en el primer paso, entonces actualizar  $x_{k+1} = x_t + \alpha_k p_t$ .
3. Sea  $s_t = \alpha_t P_t$
4.  $y_t = \nabla f(x_{t+1} - \nabla f(x_t))$
5.  $B_{t+1} = B_t + \frac{y_t y_t^T}{y_t^T s_t} - \frac{B_t s_t s_t^T B_t}{s_t^T B_t s_t}$

La implementación técnica del algoritmo BFGS puede llegar a ser muy larga y engorrosa, sin embargo. En esta tesis se trabajó con la implementación de R, debida a (Nash, Varadhan, Grothendieck, Nash, y Yes, 2012; citado por [41]).

# Capítulo 3

## Metodología

La tasa de cambio representativa del mercado (TRM) es la cantidad de pesos colombianos por un dólar de los Estados Unidos. La TRM se calcula con base en las operaciones de compra y venta de divisas entre intermediarios financieros que transan en el mercado cambiario colombiano, con cumplimiento el mismo día cuando se realiza la negociación de las divisas [42]. Actualmente la Superintendencia Financiera de Colombia es la que calcula y certifica diariamente la TRM con base en las operaciones registradas el día hábil inmediatamente anterior. La experiencia exportadora de la economía colombiana ha estado tradicionalmente influenciada por la actividad cafetera; su consolidación del café como producto de exportación se dio a partir de la segunda mitad del siglo *XIX* durante el periodo de expansión que experimentó la economía mundial, que permitió que los hacendados colombianos del noroccidente del país encontraran atractivas oportunidades en el mercado internacional [43].

Colombia es el tercer país productor de café y el mayor productor de café suave en el mundo. Los principales países importadores del café de Colombia son Estados Unidos, Canadá, Alemania, Japón, Países Bajos y Bélgica. La producción de cafés especiales en el país se ha consolidado y departamentos como el Huila, Antioquia, Tolima, Cauca y Caldas siguen liderando [44].

### 3.1. Enfoque de investigación

El presente trabajo de investigación tiene un enfoque cuantitativo, la cual se utilizó herramientas como análisis de información secundaria (Hernández-Sampieri, Fernández, Baptista, 2014) ya que dicha información fue extraída de las páginas web de los entes de control financiero como Banco de la República y Bolsa de valores de Colombia.

La mayoría de estudios financieros se realizan sobre retornos y no sobre precios. Por lo tanto, el interés se centra en revisar los datos reportados en las páginas web mencionadas anteriormente de variables macroeconómicas como TRM y el Café durante el periodo de tiempo de Agosto 2021 a Mayo 2022, el desarrollo del trabajo no se implementó metodologías asociadas al muestreo estadístico ya que la información del periodo seleccionado es de interés en su totalidad, para efecto de realizar la estimación de los hiperparámetros de las distribuciones de probabilidad y para el ajuste del modelo.

## 3.2. Area De Estudios Y Recolecion De Datos

Para observar y analizar el comportamiento que muestra el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional a través de cópulas como medida de dependencia entre variables se ha llevado a cabo la implementación de dichas metodologías a Colombia como representante de un país emergente de América Latina, debido a la inestabilidad que existe hoy en día en los mercados financieros y por la importancia que los países en vías de desarrollo han alcanzado en el ámbito global, además las economías emergentes muestran comportamientos anormales debido a su naturaleza y, por ello, se requieren aproximaciones flexibles y precisas que sean capaces de capturar estos comportamientos asimétricos.

Para realizar esta investigación, se ha seleccionado y definido una cartera formada por dos activos financieros, en la cual se medirá el riesgo de mercado a través de las metodologías expuestas en el capítulo anterior. Se han elegido dos instituciones o individuos que realizan transacciones de productos financieros y que cotizan en el bolsa de valores de Colombia . Específicamente, los datos de acceso público que reposan en la página web de la bolsa de valores de Colombia y el Banco de la república para las variables macroeconómicas de la TRM, y el precio del CAFÉ durante el periodo Agosto 2021 a Marzo 2022.

## 3.3. Análisis Exploratorio

En esta fase se realizó el análisis descriptivo de las dos series de datos que conforman el portafolio; dicha información contiene los precios diarios de cierre de cada uno de los activo (CAFÉ, TRM), por lo que la ventana de tiempo en estudio corresponde al periodo comprendido entre el 12 de Agosto de 2021 y el 31 de Marzo del 2022 así que cada serie tiene un total de 161 observaciones.

Ahora, una vez tenemos la serie de precios de cierres para los dos activos financieros, se procede a evaluar la serie de retornos a partir de dichos precios, es decir los retornos del activo se define como la utilidad generada sobre una inversión de capital o una inversión en valores, es decir:

$$R_t = P_t - P_{t-1}/P_{t-1}$$

Finalmente, la idea de trabajar con los retornos es que dicha información presenta un mejor comportamiento o proceso de apalancamiento del activo a través del tiempo. En la figura 3-1 y 3-2, se observa que ni en la ACF ni en la PACF de cada una de la serie de retornos, tanto para los precios de cafe como la TRM, presentan algún rezago que tenga autocorrelaciones significativas, por lo tanto no fue necesario realizar un modelo previo de series temporales para corregir el efecto de la correlación temporal.

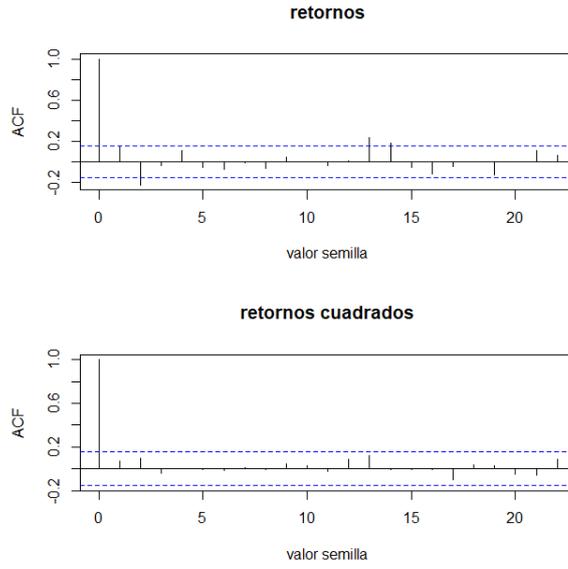


Figura 3.1: ACF Y PACF para la TRM en el periodo de estudio

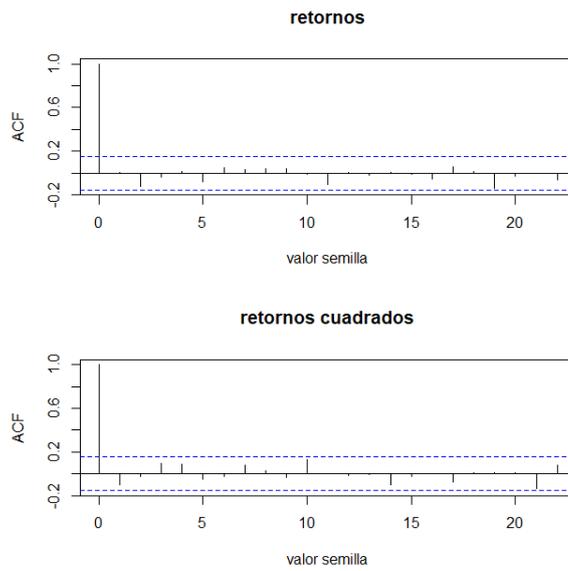


Figura 3.2: ACF Y PACF para la CAFE en el periodo de estudio

### 3.4. Determinación de las distribuciones marginales

Se realizó una revisión bibliográfica para conocer las distribuciones marginales que han sido empleadas para modelar en diferentes variables de riesgo financiero, para ello citamos a [14] que eligió a México debido a la inestabilidad que existe hoy en día en los mercados financieros y por la importancia que los países en vías de desarrollo han alcanzado en el ámbito global, además las economías emergentes muestran comportamientos anormales debido a su naturaleza y, por ello, se requieren aproximaciones flexibles y precisas que sean capaces de capturar estos comportamientos asimétricos.

Además de que es interesante observar como era la valoración del riesgo antes de que iniciaran los problemas financieros vigentes. Las cópulas utilizadas son las siguientes: Gaussiana, t-Student, Frank, Gumbel y Clayton, ya que son las más representativas de las familias a las que pertenecen; las dos primeras pertenecen a la familia elíptica y las últimas a la familia arquimediana. Para esta última familia, es indispensable el parámetro  $\theta$ , porque representa el nivel o grado de dependencia, éste se obtuvo a partir de la  $\tau$  de Kendall porque de esta forma no ha sido necesario asumir normalidad de rendimientos previamente.

Las valoraciones seleccionadas como adecuadas para ambas relaciones, se obtuvieron a través de cópulas arquimedianas, Clayton y Frank, quizá porque éstas se encargan de la dependencia no lineal, además, toman en cuenta las asimetrías de los rendimientos. La cópula Clayton da prioridad a la dependencia que sucede en la cola izquierda, mientras que la Frank se enfoca en el centro de la distribución.

Para [29] estudiaron el Valor en Riesgo (Var) de un portafolio conformado por tres activos representativos del mercado colombiano: el índice General de la Bolsa de Colombia (IGBC), la tasa representativa del mercado (TRM) y un producto representativo del mercado de deuda, un título de deuda del Gobierno Nacional (TES) con vencimiento de 10 años. Para este trabajo se seleccionó el período diario comprendido entre el 8 de octubre de 2002 y el 31 de mayo de 2007, para un total de 1135 observaciones.

En particular, al evaluar el valor en riesgo (VaR) derivado de la cópula y compararlas con el desempeño de otras metodologías comúnmente aplicadas para el cálculo de esta medida, los resultados son contundentes. En primer lugar, las técnicas que tienen en cuenta que los momentos condicionales de los activos (media y varianza) no son constantes en el tiempo, muestran un desempeño superior con respecto a las metodologías que no consideran este tipo de dinámicas.

En segundo lugar, los modelos de medición de riesgo que realizan supuestos más realistas sobre las funciones de distribución marginales de las series (por ejemplo, aquellos que se alejan del supuesto de normalidad de cada uno de los retornos de los activos), si bien pueden ser más costosos en términos computacionales, cuantifican de mejor manera el riesgo del portafolio. En este sentido, los modelos derivados de la cópula ofrecen una estructura analítica flexible que resulta apropiada para la medición de riesgo.

Estos resultados son un indicio de la distribución a utilizar para las marginales, sin embargo también se usan otras distribuciones para comprobar mediante métodos de bondad de ajuste, si en realidad son estas las que mejor se ajustan a las variables en nuestro estudio.

La figura 3-3 muestra el histograma de las variables, así como las funciones de densidad de las diferentes distribuciones, las cuales fueron gráficas usando los parámetros de las estimaciones por máxima verosimilitud. En nuestro histograma de la TRM se observa que, los datos de la serie de retornos de la TRM son Normales que tiene un comportamiento que parece ser simétrico, por lo cual se probaron distribuciones que se ajusten a esta forma como: Una distribución Normal y una distribución t-studen que como podemos ver se interponen entre ellas mismas, También se probó una Weibull ya que ha sido comúnmente empleada, pero debido a su forma esta no es una buena candidata.

Para nuestra otra variable, el ajuste de distribuciones en ella se encontró que, los retornos al precio del el CAFE tiene un comportamiento que parece ser simétrico, es por esto que se probó también en ella una distribución Normal y una distribución T-studen por lo que una de interpone sobre la otra, además de otras distribuciones asimétricas, como la Weibull y la Gamma ya que esta es comúnmente usada para modelar esta variable, pero para nuestro caso no fue necesario.

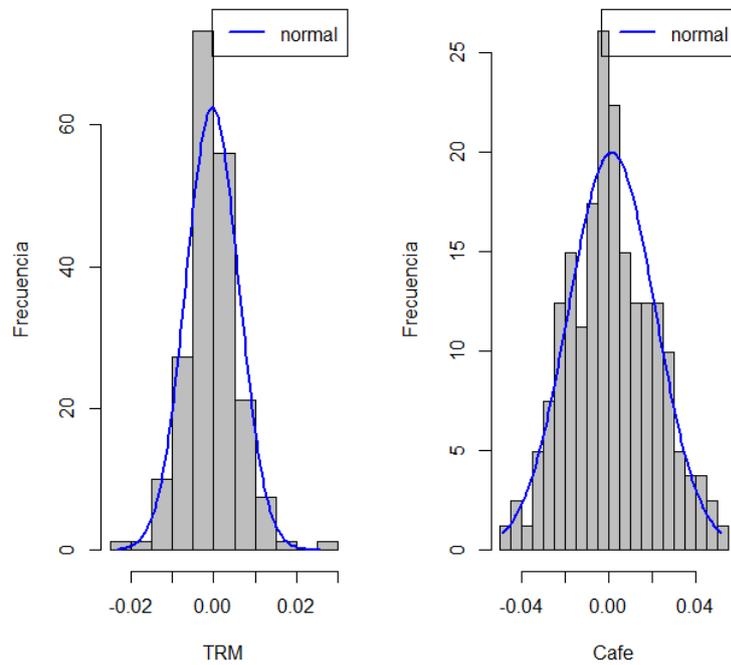


Figura 3.3: Histograma

En cuanto a la TRM, se observó que la distribución Normal, fue la que mejor se ajustó al comportamiento de la variable, observando muy poca diferencia.

Para el CAFÉ se observó que, el mejor comportamiento lo presentó la distribución Normal se podría afirmar inicialmente que la distribución Normal es la mejor, sin embargo, como se observó en la gráfica las colas son muy pesadas, por tanto, esta distribución presentó una varianza muy grande, lo cual podría generar problemas a la hora del análisis con las funciones cópula.

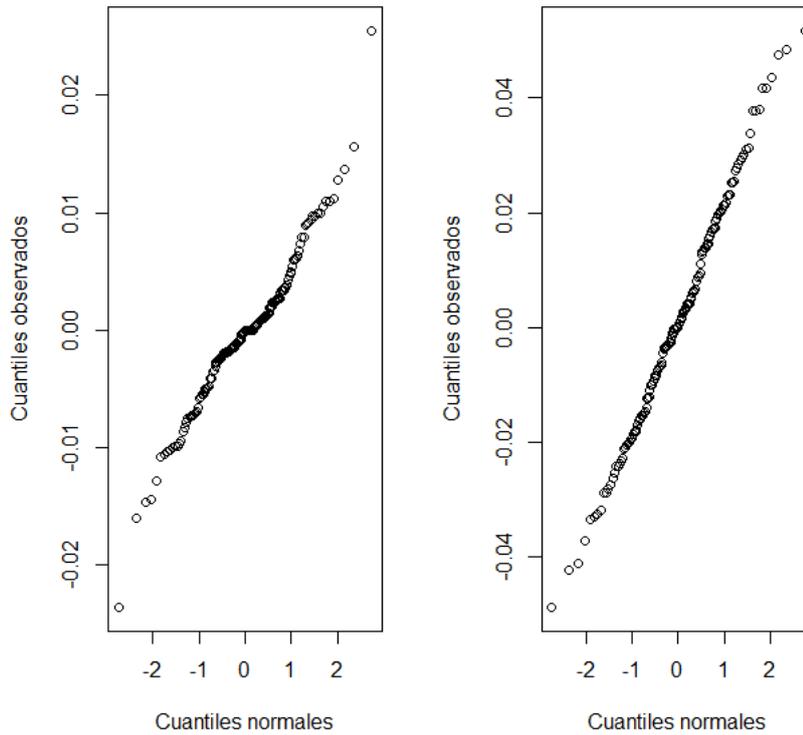


Figura 3.4: Cuantiles Normales

En la figura 3-4, se muestra el ajuste de los datos a las distribuciones propuestas, corroborando lo analizado con los histogramas, ya que solo utilizamos la distribución normal se puede observar que para el TRM tiene un comportamiento ligeramente asimétrico, tanto de lo contrario para nuestra variable del CAFE nuestra gráfica tiende a ser lineal, lo que nos indica que sería una buena distribución para nuestras dos variables .

Finalmente, se realizó la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, la cual tiene el siguiente contraste de hipótesis.

$$H_0 : \text{ Los datos se ajustan a la distribución } \quad (*1)$$

$$H_1 : \text{ Los datos no se ajustan a la distribución } \quad (*)$$

Los resultados de la prueba Kolmogorov-smirnov se muestran en la tabla 3-1. Observando el valor-p de la prueba, se tiene que, ninguna de las distribuciones propuestas rechaza  $H_0$ , sin embargo, como el estadístico de kolmogorov-smirnov es una medida de discrepancia entre la distribución empírica y la teórica propuesta, es natural pensar que entre menor sea la distancia se tendrá un valor-p más alto.

Observando el p-valor para la Normal no se rechaza la  $H_0$ .

Distribución	TRM (P-Valor)	Café (P-Valor)
Normal	0.1266	$2,775e^{12}$
Tstudent	$2,2e^{16}$	$2,2e^{16}$

Tabla 3.1: Resumen de las principales Distribuciones

Finalmente se tiene las siguientes variables aleatorias

$$\begin{aligned}
 X : \text{ Tasa representativa del mercado (TRM)} & \quad X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2) \\
 Y : \text{ Precio del Café} & \quad Y \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad de la distribución normal, está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

### 3.5. Análisis de la dependencia entre las series de retornos del café y la tasa representativa del mercado (TRM)

Para conocer de manera inicial la estructura de dependencia entre X e Y, y así proponer un conjunto inicial de funciones cópula que reflejen dicha dependencia, se realizó el gráfico de dispersión mostrado en la figura 3-5, en el cual se observó una relación inversa.

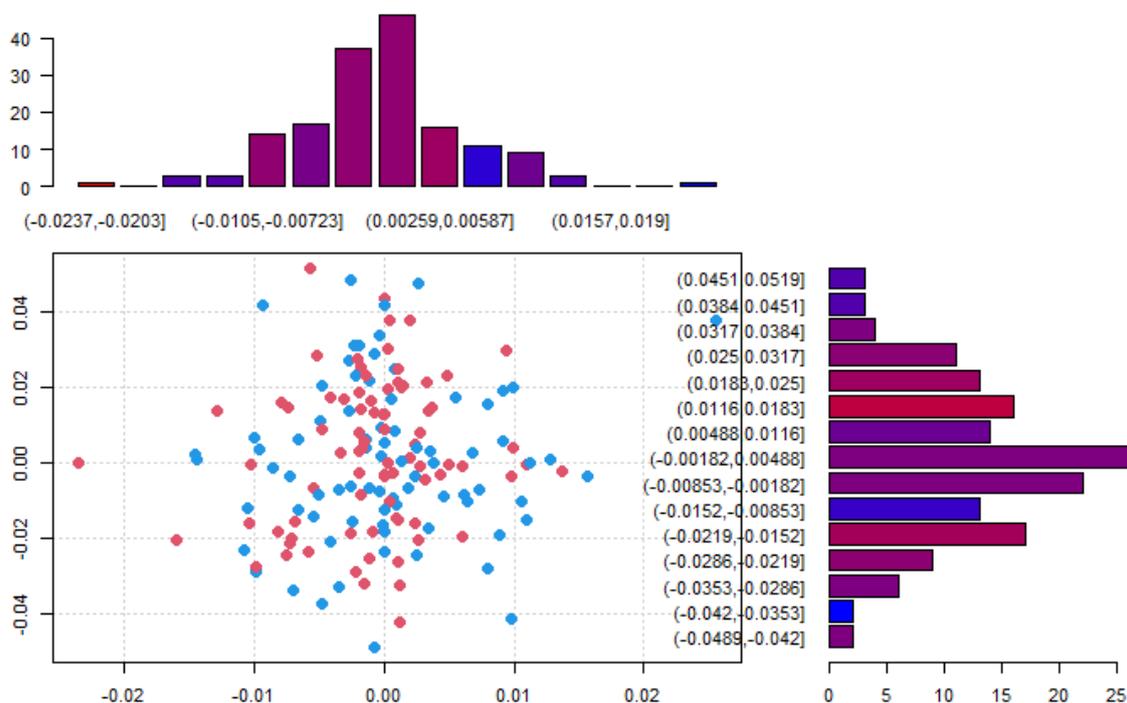


Figura 3.5: Tasa representativa del mercado (TRM) y café , gráfico de dispersión

La figura 3.5 nos da un indicio de la estructura de dependencia y por ende del tipo de función cópula que modela dicha estructura de dependencia entre las series de retornos del Café y la TRM, puesto que al presentar una relación negativa está puede ser modelada por copulas de la familia elíptica como la Gaussiana y la T-student considerando una dependencia lineal o por funciones copulas de la familia Arquimediana como: copulas Clayton o la copula Frank.

### 3.5.1. Propuesta inicial del conjunto de familias de cópulas

Basados en los documentos y artículos consultados, [45] modelaron la dependencia entre precipitación y temperatura evaluando cópulas arquimedianas y elípticas, llegando a la conclusión, mediante pruebas de bondad de ajuste y criterios de información que la cópula t-student, la cual es una cópula elíptica, es la que mejor se ajusta. De [14] estudio los rendimientos de una cartera con acciones de la Bolsa Mexicana de Valores sigue dos distribuciones elegidas: normal o uniforme. La cópulas elegida para las estimaciones es la Gaussiana, ya que es una cópula versátil y ampliamente utilizada en el práctica.

Para escoger tanto la distribución como la cópula adecuada, los resultados se contrastaron con los obtenidos de forma empírica, con los respectivos backtesting y con los mínimos errores cuadráticos medios. Se ha podido constatar, que cuando se implementa la metodología de cópulas en las estimaciones se obtienen beneficios a la hora de valorar el riesgo, sin embargo, no presenta grandes diferencias con respecto a las valoraciones realizadas por el método tradicional de simulación histórica.

Ademas [46] probaron lassiguientes cópulas de la familia arquimediana: Clayton, Gumbel-Hougaard y una cópula con generador cotangente llamada COT-CÓPULA la cual fue la que mejor se ajustó a los datos. También se propone como candidata la cópula FGM puesto que es una función cópula utilizada para modelar dependencias débiles [31].

Finalmente las familias cópula con las que se trabajó fueron:

- Cópula Arquimediana: Clayton, Gumbel Hougaard, Frank.
- Cópula Elíptica: Gaussiana, Student
- Cópula FGM

### 3.5.2. Estimación de parámetros de las funciones cópula y las distribuciones marginales

La estimación de parámetros se realizó mediante el método de máxima verosimilitud el cual estima de manera conjunta los parámetros de las distribuciones marginales y el parámetro de dependencia, la idea es encontrar los valores de  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\alpha}_2$  y  $\hat{\beta}_2$ , que maximicen la función de verosimilitud:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{25} c(F_x(x_i), G_y(y_i)) + \sum_{i=1}^{25} f_x(x_i) + \sum_{i=1}^{25} g_y(y_i)$$

Donde  $c(F_X(x_i), G_Y(y_i))$  es la copula de densidad,  $f(x)$  es la función de densidad de la distribución Gamma y  $g(y)$  es la función de densidad de la distribución Weibull. Por ejemplo, si la copula propuesta es la FGM, la función de verosimilitud seria la siguiente.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{25} 1 + \theta(1 - 2F(x_i))(1 - 2G(y_i)) + \sum_{i=1}^{25} \frac{1}{\beta_1^{\alpha_1} \gamma(\alpha_1)} x_i^{\alpha_1-1} e^{-\frac{x_i}{\beta_1}} + \sum_{i=1}^{25} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{y_i}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} e^{-\left(\frac{y_i}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}}$$

Y posteriormente se deben encontrar los parámetros que maximizan dicha función, para este fin, se utiliza el algoritmo BFGS descrito en capítulo 2.

### 3.5.3. Selección de la función cópula mas adecuada

De las funciones cópula propuestas anteriormente se realizó un método gráfico y un método analítico para seleccionar la más adecuada, basados en metodologías propuestas por [33] y [34], estos métodos se describen a continuación.

**Gráfico basado en la función de distribución condicional  $Y|X$ :** Para este método se utilizó el hecho de que la cópula condicional  $C(F(X), G(Y)) = H_{Y|X}(X, Y)$  se distribuye  $unif(0, 1)$ , por tanto un gráfico QQ-plot de  $H_{Y|X}(X, Y)$  aplicado sobre los datos observados  $x$  e  $y$  contra los cuantiles de una distribución uniforme debe ajustarse a la línea recta  $y = x$  si la cópula aplicada se ajusta al modelo adecuadamente [34].

La cópula condicional sobre  $Y$  no es mas que la derivada con respecto a  $v$  de la función cópula, como se muestra a continuación.

$$P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)} = \frac{\partial}{\partial F(x)} \frac{C(F(x), G(y))f(x)}{f(x)} = \frac{\partial C}{\partial u} C(u, v)$$

En la tabla (3-2) se muestran las cópulas condicionales de cada una de las propuestas, es decir, la derivada de estas con respecto a  $v$ .

Función	Cópula condicionada $P(V \leq u U = u)$
Clayton	$u^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1+\theta}{\theta}}$
Frank	$\frac{(e^{-\theta u} - 1) e^{-\theta v}}{(e^{-\theta} - 1) \left( \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{(e^{\theta} - 1)} + 1 \right)}$
Gumbel	$\frac{\exp\left(-((-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta})^{1/\theta}\right) \left[ ((-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta})^{-1+\frac{1}{\theta}} \right] (-\log(v))^{-1+\theta}}{v}$
FGM	$u(1 + \theta(-1 + u)(-1 + 3v))$
Gaussiana	$\Phi\left(\frac{(x-\theta y)}{\sqrt{(1-\theta^2)}}\right)$
Student	$\Phi\left(\frac{x-\theta y}{\sqrt{((r+\phi(x)^2)(1-\theta^2))/(r+1)}}\right)$

Tabla 3.2: Distribuciones condicionales cópulas

Este método puede proporcionar una idea bastante buena de cuál es la cópula más apropiada, pero es muy subjetivo y puede variar según la persona que observe la gráfica, para eliminar esta subjetividad se realizó una prueba de hipótesis para corroborar si la distribución de  $C(F(x), G(y))$  se aproxima a una  $Unif(0, 1)$  [33].

**Contraste Kolmogorov-Smirnov:** En este caso  $C(F(x_i), G(y_i))$  proporciona la muestra de valores con la cual se construye la función de distribución empírica  $F_n$ . El objetivo es ver si está se parece a la función de distribución de una uniforme  $(0, 1)$ . Así, la cópula cuya condicionada  $C_1$  que nos proporcione un valor del estadístico de más pequeño, será aquella donde la muestra de valores se aproxime más a una distribución uniforme y por tanto, la más apropiada para representar la relación entre  $X$  e  $Y$  [33].

# Capítulo 4

## Resultados

Este capítulo presenta desde la procedencia de los datos a modelar, realizando una descripción básica de cada serie de retornos de las variables en estudio (Tasa representativa del mercado (TRM) y precio del Café) y su relación, la identificación de la cópula más adecuada, hasta la modelación conjunta de ellas con la función cópula elegida. Todo esto se presenta tomando como ejemplo el mes de agosto, así finalmente se presenta el resumen de este mismo proceso para todos los demás meses.

### 4.1. Análisis exploratorio

La base de datos que se tomaron son de acceso público que reposan en la página web de la bolsa de valores de Colombia y el Banco de la república para las variables macroeconómicas de la TRM y el precio de Café a los cuales se les evaluó la serie de retornos a cada una; extendiéndonos un poco y resaltando, el café también dio origen a la que tal vez ha sido la agroindustria rural más importante en términos de ingresos, empleo, estabilidad, el procesamiento del grano en la finca (lavado, despulpada, secado y en algunos casos trilla). Finalmente, el café logró articular de manera más estable a la economía con el mercado externo; sirviendo de alguna manera de instancia de aprendizaje y conocimiento para muchos comerciantes y empresarios que después incursionarían en el sector industrial.

En la figura 4.1 se tiene que la serie de retornos del Café para el mes de octubre del 2021 presentan buenos índices en el mercadeo, mientras que en el mes de diciembre del 2021 a marzo del 2022 se mantienen estables, entre el mes de septiembre y noviembre del 2021 presenta cierres bajos en precios.

Ahora, observando el comportamiento de la serie para la TRM, en la figura 4.2, se presenta un crecimiento en las alzas de los meses de agosto a noviembre del 2021, mientras que en el mes de diciembre del 2021 presentó una pequeña caída, que seguidamente tomó un incremento en el mes de enero del 2022.

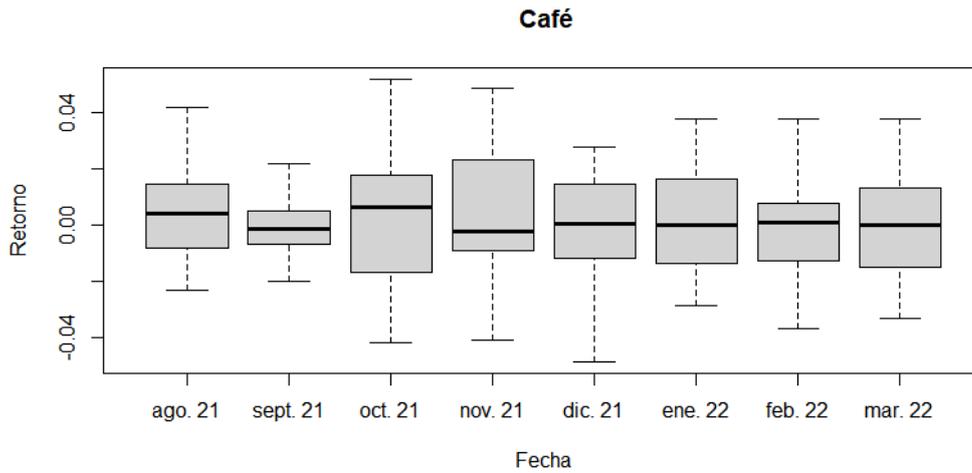


Figura 4.1: Diagrama de cajas y alambres del Café

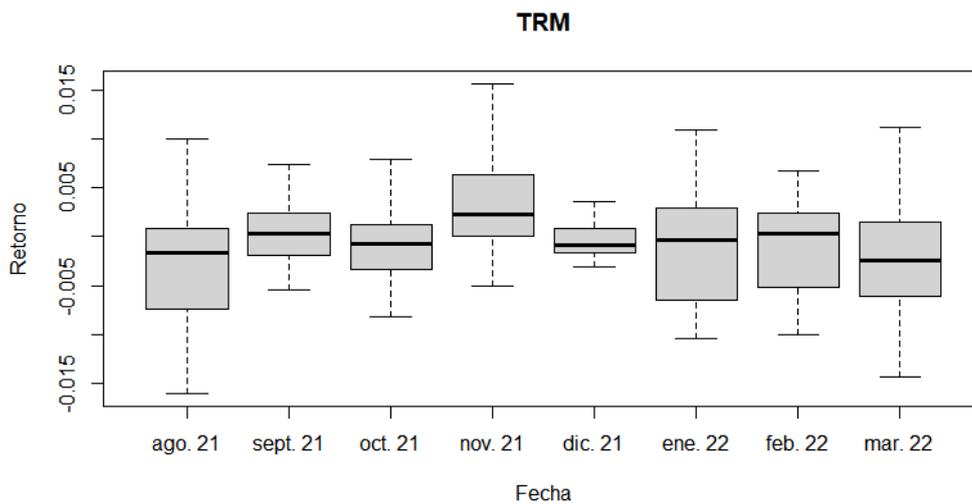


Figura 4.2: Diagrama de cajas y alambres del TRM

En la tabla 4.1, se presentan las estadísticas descriptivas para las series en estudio por mes, de manera general se observa que para el café el precio promedio mas alto fue del (6.6%) preceptuando el mes de noviembre y la mas baja fue en el mes de febrero con un (-1.74%) En una distribución con sesgo negativo, la cual la media tendrá un valor menor que la mediana, donde se percibe una caída de precio. ahora miremos la variabilidad, que se torno mas alta fue en el mes de noviembre con el 2,46% lo que podemos decir que para el café el mes de noviembre obtuvo un muy buen precio para ese año, mirando la tabla del TRM que se relacionan un poco con el café, el mes donde el promedio fue mas alto es en enero con un (3.7%) y la mas baja fue en el mes de agosto con un (-0,31%), la variabilidad mas alta la presento en el mes de enero con 8.8% y las mas baja fue en el mes de septiembre con 3,7%, siguiendo una relación con nuestras variables el mes donde se obtuvo a un buen precio tanto el café como la TRM fue en enero.

MES	Agosto	Septiembre	Octubre	noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo
Media	0,0037	0,0002	0,0026	0,0066	-0,0012	0,0021	-0,0174	-0,0012
Varianza	0,0003	0,0002	0,0006	0,0006	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
Des.Estan	0,0178	0,015	0,0245	0,0246	0,0194	0,0181	0,0186	0,0209
Mediana	0,0041	-0,0012	0,0063	-0,0026	0,0004	-0,0001	0,1106	0
Min	-0,0231	-0,0262	-0,0422	-0,041	-0,0487	-0,0286	-0,5036	-0,0335
Max	0,0416	0,0311	0,0518	0,0484	0,0277	0,0378	0,511	0,0379

Tabla 4.1: Periodo del Café 2021 - 2022

MES	Agosto	Septiembre	Octubre	noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo
Media	-0,0031	0,0003	-0,0009	0,003	-0,0003	0,037	-0,0009	-0,0018
Varianza	0,0338	0,0097	0,0103	0,0171	0,0253	0,0527	0,017	0,0496
Des.Estan	0,007	0,0037	0,0039	0,005	0,0061	0,0088	0,005	0,0085
Mediana	-0,0016	0,0003	-0,0008	-0,0023	-0,0008	0,0691	0,0003	-0,0023
Min	-0,016	-0,0086	-0,0082	-0,005	-0,0128	-0,1402	-0,01	-0,0236
Max	0,0099	0,0073	0,0079	0,0156	0,0137	0,3454	0,0067	0,0112

Tabla 4.2: Periodo del TRM 2021-2022

## 4.2. Relación entre Café y TRM

Dado que no se puede asumir que el comportamiento de los datos puede modelarse usando una distribución normal, se calculó el  $\tau$  de Kendall para observar el nivel de concordancia que existen entre estas dos variables, puesto que el coeficiente de correlación de Pearson trabaja con el supuesto de normalidad y relaciones lineales. Los resultados del  $\tau$  de Kendall se muestran en la tabla 4.3.

Análisis de las asociaciones entre la serie del precio del Café y la TRM total mensual, usando el  $\tau$  de Kendall.

MES	Agosto	Septiembre	Octubre	noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo
$\tau$	0,06813187	-0,4155844	-0,2877558	-0,3615088	-0,07735743	0,4550583	0,2385965	0,3202372
P-valor	0,8201	0,0622	0,2059	0,1074	0,7318	0,0438	0,3238	0,1363

Tabla 4.3:  $T$  de Kendal 2021-2022

La tabla 4.3 muestra el valor p asociado al tau de Kendall muestral ( $\tau$ ), con el objetivo de hacer inferencias sobre el poblacional ( $\tau$ ), el cual tiene el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

Dicho valor p indica que los meses de Agosto, Septiembre, Octubre, Noviembre, Diciembre, Febrero y Marzo no presentaron dependencia significativa, o dicha dependencia es muy baja utilizando un nivel de significancia de 5%, esto puede indicar que una copula de la familia arquimediana puede ajustarse bien a estos meses debido a que su naturaleza es modelar dependencias débiles, mientras que en Enero tuvo una dependencia significativa.

La figura 4.3 muestra el resultado del chi-plot descrito en la sección 2.20 realizado tanto a la serie de retornos del Café como la TRM, se puede observar que precio del Café y del TRM, se puede observar que algunos puntos se salen de las bandas de confianza (aunque muy pocos) hacia la parte negativa y tanto positiva, esto indica que también con el chi-plot se detecta por lo menos una débil dependencia significativa entre estas dos variables.

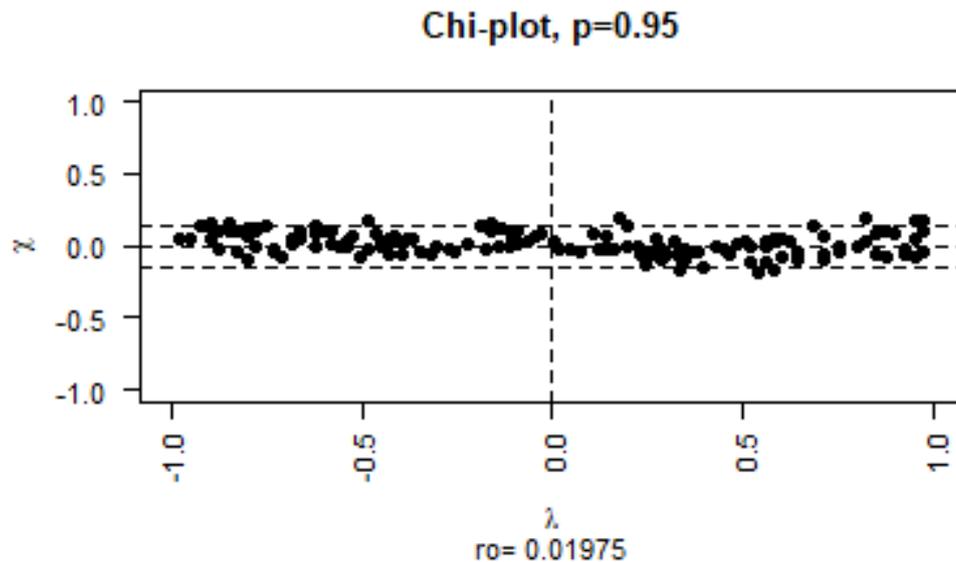


Figura 4.3: Chi-Plot para el precio del Café y del TRM en el periodo de agosto del 2021 al marzo del 2022

#### 4.2.1. Criterio de selección de la función cópula

Como ya se ha mencionado antes, las cópulas candidatas fueron: Clayton, Frank, Gumbel, Gaussiana y t-student. La selección de la que mejor se ajustó, se realizó mediante el criterio de información Bayesiana (BIC) y el criterio de Akaike (AIC), los resultados se observan en la tabla 4.4. En consecuencia, se logró evidenciar que la copula Clayton es la que mejor se ajusta según el comportamiento natural de los datos, es decir dicha función logra modelar de manera más plausible la dependencia entre las series en estudio.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussiana	T student
Estadístico	0.08126934	NA	0.03904797	0.08888137	0.08888137
$\alpha$	0.1329	0.3794	1.01	0.07756	0.07747
Log(verosimilitud)	0.901298	0.327024	0.02588511	0.4342667	0.2681184
df	1	1	1	1	2
BIC	3.278808	4.427356	5.029634	4.212871	9.626572
AIC	0.1974041	1.345952	1.94823	1.131467	3.463763

Tabla 4.4: Valores funciones cópula

Finalmente, se realizaron dos escenarios de simulación para  $n = 161$  y  $n = 1000$  para cada función cópula propuesta con sus respectivos parámetros estimados, el objetivo de este gráfico fue encontrar la función copula demostrado en gráfico de puntos, cuyos valores simulados (puntos grises) sean lo mas cercano posible al gráfico de los valores observados (puntos negros), y de esta manera tener como referencia un criterio de selección gráfico. por tanto, se puede observar que la copula Gumbel presento muy mal ajuste, esto se debe a que su parte negativa tiene una forma que casi nunca se ve en la practica. también se observo que la copula Clayton presento una nube sin ningún tipo de dependencia, este es el resultado esperado puesto que dicha función copula no posee parte negativa en su dominio.

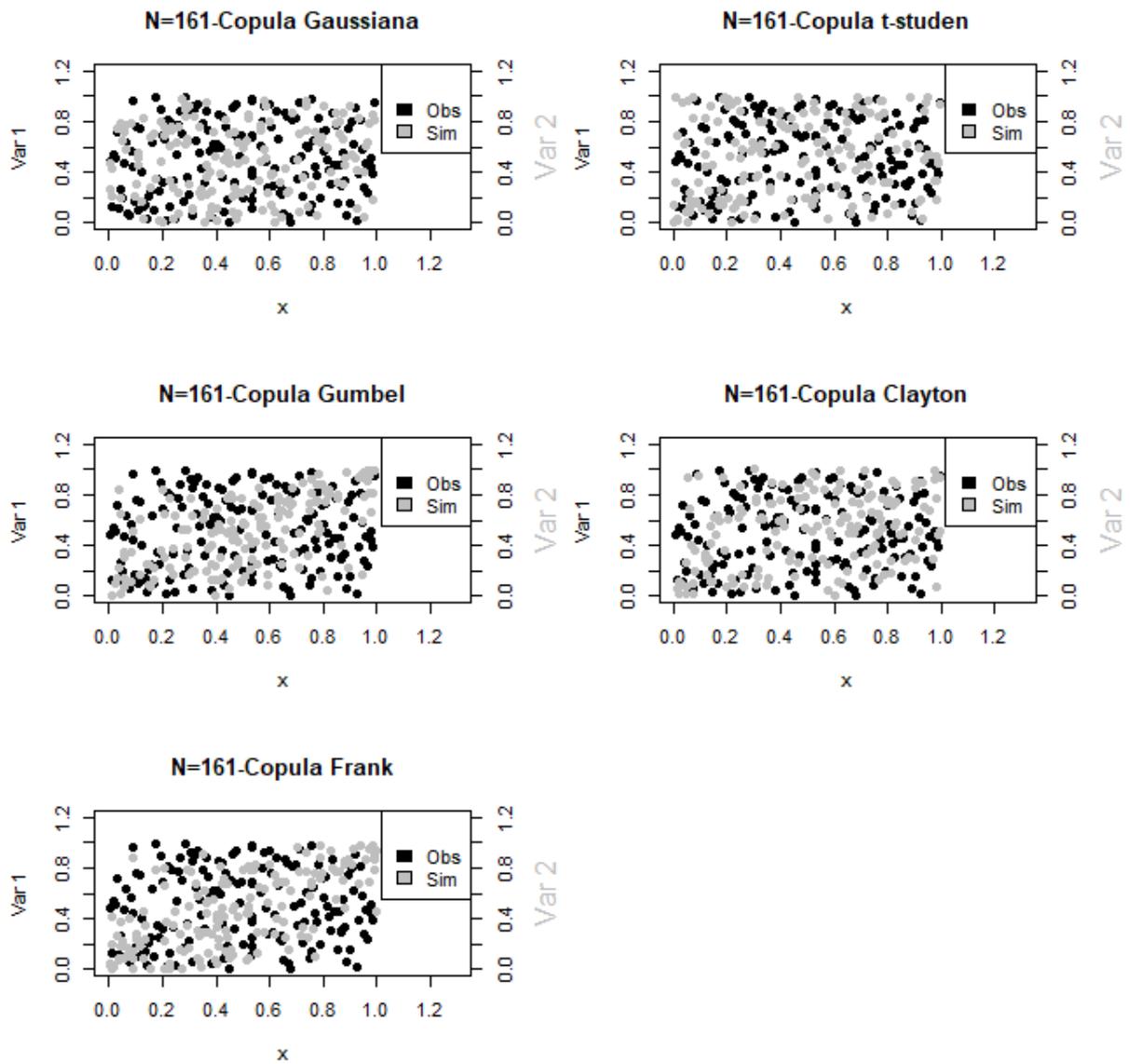


Figura 4.4: Gráfico de puntos para  $n = 161$  simulaciones

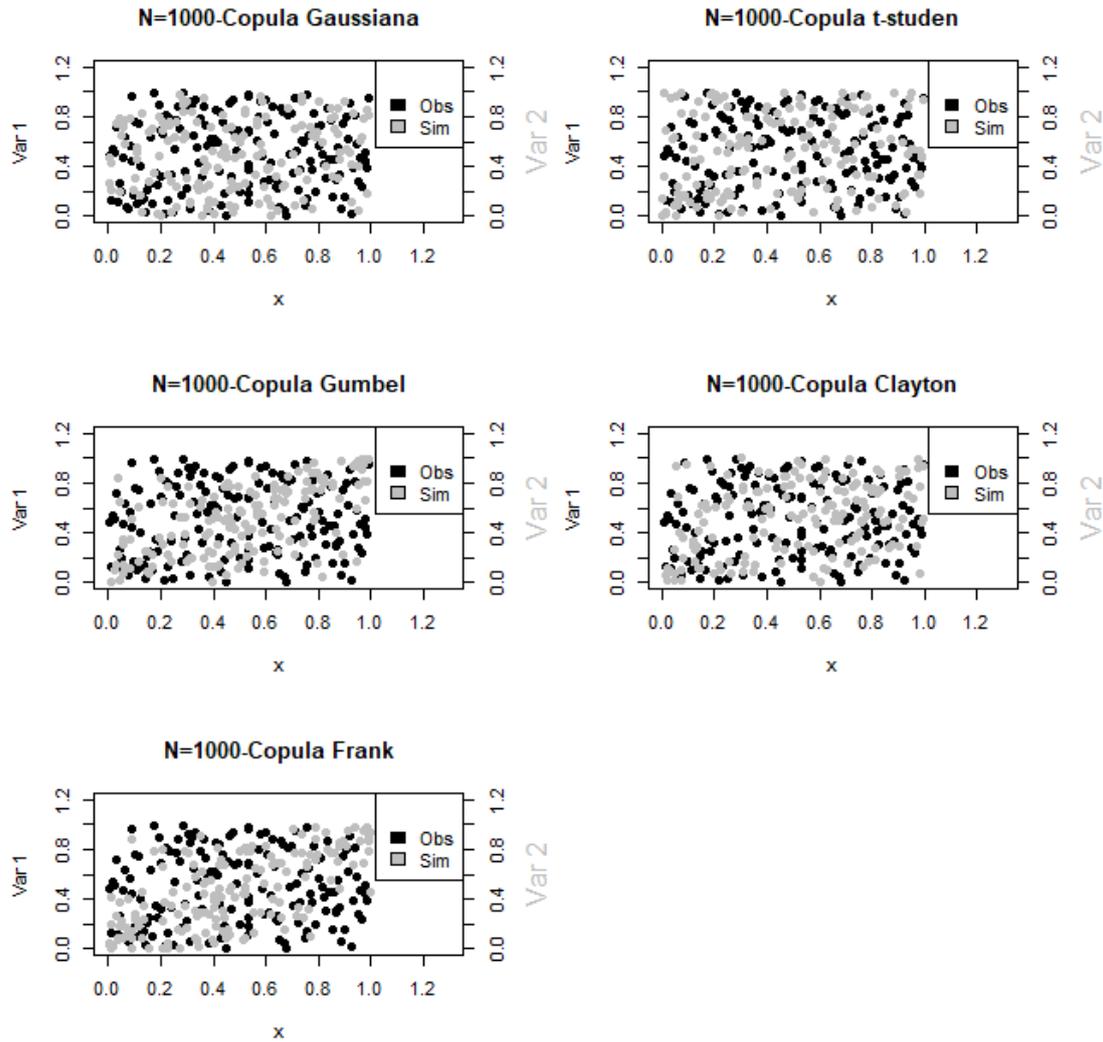


Figura 4.5: Gráfico de puntos para  $n = 1000$  simulaciones

Considerando que la función cópula Clayton fue la cópula elegida, el modelo es aquel donde:

$$C(u, v) = \max \left[ (u^{-\alpha} + v^{-\alpha})^{\frac{-1}{\alpha}}, 0 \right]$$

Cuyo rango para  $\alpha$  es  $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ .

Esta cópula se reduce a la cópula producto si  $\alpha = 0$ , al limite inferior de fréchet si  $\alpha = -1$  y al limite superior de fréchet si  $\alpha \rightarrow \infty$ , por lo tanto mediante la cópula Clayton es:

$$C(u, v) = \max \left[ (u^{-0,1329} + v^{-0,1329})^{\frac{-1}{0,1329}}, 0 \right]$$

Por ultimo, después de seleccionar la función copula más apropiada, es posible utilizar esta para la medición de riesgo de mercado, en particular, el calculo del valor en riesgo (VaR) los resultados se presentan en la siguiente tabla.

	Nivel de confianza		
	95 %	97,5 %	99 %
Clayton	0.0376	0.0495	0.0531
VaR clásico	0.0445	0.0582	0.0625

Tabla 4.5: Valores-p obtenidos en las pruebas de backtesting para el VaR

De acuerdo a los resultados presentados en la en la Tabla 4.5, se observa con un nivel de confianza del 95 %, el VaR obtenido a través de la copula Clayton 0,0376. En otras palabras, para un portafolio con un valor total de 300 millones de pesos repartidos por igual entre los dos activos (TRM y Café), se espera que la máxima pérdida del portafolio no supere los 112.800 pesos.

Por otro lado, si evaluamos la máxima pérdida del portafolio a través de la forma clásica o paramétrica según la ecuación (2.1), 0.04454 es decir se espera que la pérdida al utilizar la estimación paramétrica no supere los 133.620 pesos.

#### 4.2.2. Prueba de desempeño (Backtesting) del $VaR_\alpha$

En el capítulo 2 hacemos inferencia a la prueba de desempeño del Backtesting y del VaR para un portafolio compuesto por dos activos: el Café y la Tasa representativa del mercado (TRM) y un nivel de confianza de 95 %, a continuación se evalúa el uso de las copulas en la medición de riesgo de mercado utilizando las pruebas de desempeño (Backtesting) presentadas en la Sección 2.12, estas pruebas, por un lado permiten establecer si la copula seleccionada exhiben un desempeño satisfactorio comparando con otro método estándar de medición de riesgo de mercado, por otro lado, se convierte en un criterio adicional para la selección de la copula.

Los resultados de la pruebas de desempeño del VaR calculado por nuestra copula Clayton, con una confianza de ( $\alpha = 95\%$ ;  $\alpha = 97,5\%$ ;  $\alpha = 99\%$ ), donde en el siguiente gráfico es posible observar como el valor simulado (Azul), tiende al mismo sesgo que el valor observados (rojo), lo que nos indica nuestro backtesting, que las metodologías aplicadas o la copula seleccionada para cuantificar nuestro portafolio muestra un desempeño satisfactorio.

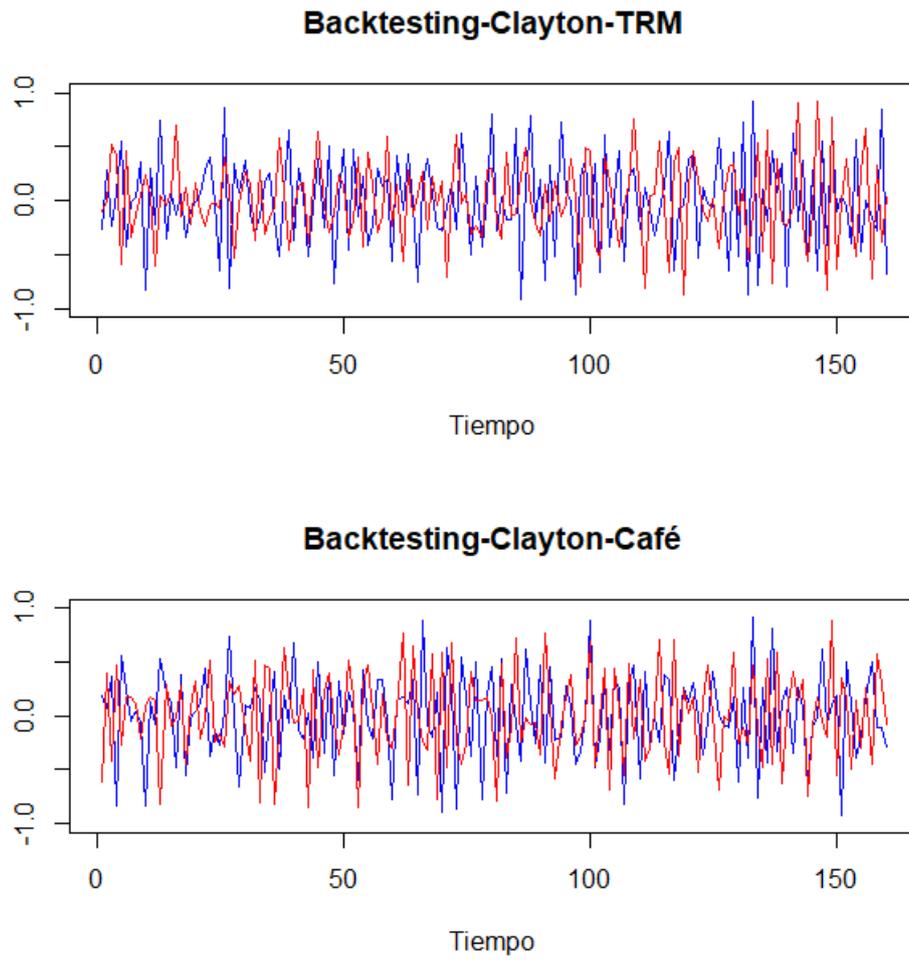


Figura 4.6: Gráfico Backtesting para los valores simulados por la copula Clayton y los observados

# Capítulo 5

## Conclusiones

Dado que los modelos de volatilidad condicional o estocástica son útiles para estimar la volatilidad temporal de un activo. Sin embargo, cuando no existen autocorrelaciones significativas en la serie de retornos al cuadrado del precio de los activos, no tiene sentido ajustar un modelo de volatilidad, por lo que se debe considerar como constante y aplicar técnicas de estimación clásicas o bayesianas. Esto se debe a que la serie de rendimientos mostrada en la Figura 3.3 no muestra variaciones significativas, es decir, los precios no muestran máximos ni mínimos significativos y pueden ajustarse a una distribución normal.

Las cópulas que se implementaron para el desarrollo del trabajo fueron: la Gaussiana, t-Student, Clayton, Gumbel y Frank. No fue necesario partir de supuestos de normalidad para las variables del portafolio, de esta manera la copula Clayton fue la que obtuvo un mejor desempeño, es decir, dicha copula presentó una mayor plausibilidad en cuanto a las métricas del BIC y AIC como criterio de selección. La correlación entre los activos riesgosos se calculó a través del  $\tau$  de Kendall, así mismo, la estructura de dependencia del portafolio y los activos que lo conforman no dependía de la correlación individual, sino de la estructura de dependencia arrojada por el parámetro  $\alpha$ , estimado a través de las cópulas.

En particular, al evaluar las estimaciones del VaR derivados de la copula Clayton se propusieron escenarios de simulación donde se observó que dicho modelo logra capturar mejor la dependencia entre las variables de estudio. En concordancia, al realizar la medida de desempeño de las estimaciones a través del Backtesting se logró evidenciar que la serie pronosticada logra ajustarse muy bien a los comportamientos presentado en la serie de datos observada. Así mismo, se logró determinar que al utilizar la estimación de VAR a través de métodos paramétricos o clásicos estos presentan una pérdida mayor comparada con las estimaciones a través de las funciones copula.

Finalmente, nuestros resultados nos permiten concluir que es posible obtener estimaciones de muy buen rendimiento para el VAR, utilizando las funciones copulas. Por otro lado, nuestros resultados tienen usos potenciales en la gestión de riesgos, aunque no consideramos problemas de cartera, es posible llevar a cabo dichas extensiones, además de considerar una ventanas de tiempos diferentes como pos y pre-pandemia (COVID 19).

# Bibliografía

- [1] J. orn Rank. «Copulas in financial risk management.» En: *Mathematical Finance* (2000).
- [2] Juan Gaytán Cortés. «Clasificación de los riesgos financieros». En: *Mercados y negocios* 38 (2018), págs. 123-136.
- [3] Christian Cortes Garcia y Alvaro Cangrejo Esquivel. «Modelo de volatilidad en un mercado financiero colombiano». En: *Comunicaciones en Estadística* 11.2 (2018), págs. 191-218.
- [4] Christian Camilo Cortes Garcia y Alvaro Javier Cangrejo Esquivel. «Propuesta de un modelo de volatilidad a los precios de cierre en las acciones CÉMEX LATAM HOLDINGS durante el periodo 15/noviembre/2012 al 27/octubre/2017». En: *Ingeniería y Región* 19 (2018), págs. 22-34.
- [5] Álvaro Cangrejo Esquivel y R Tovar. «Estimación de la volatilidad en una ecuación diferencial estocástica utilizando estimación clásica y bayesiana». En: (2022).
- [6] Álvaro Cangrejo Esquivel y Christian Cortes García. «Classical and bayesian volatility in Colombia financial market». En: (2022).
- [7] Luis Fernando Melo Velandia. «Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: Una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia». En: *Borradores de Economía; No. 343* (2005).
- [8] Alexander Andrade Córdor. «Valor en riesgo de crédito y déficit esperado aplicando cópulas». En: *Estudios de la Gestión: revista internacional de administración* 9 (2021), págs. 81-108.
- [9] Kevin Sheppard. «Value-at-Risk, Expected Shortfall and Density Forecasting». En: *UNIVERSITY OF OXFORD* 10 (2009).
- [10] Moorad Choudhry. *An introduction to value-at-risk*. John Wiley & Sons, 2013.
- [11] Daniel Triana et al. «Estimación Bayesiana para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) en modelos de series financieras con relaciones de dependencia no lineal en Colombia». En: *Comunicaciones en Estadística* 11.2 (2018), págs. 171-189.
- [12] Beatriz Helena Manosalva. «Aplicación de la teoría del valor extremo y cópulas multivariadas para la medición del VaR de un portafolio de monedas de países latino-americanos (Application of Extreme Value Theory and Multivariate Copula for VaR Measurement of a Currencies Portfolio of Latin American Countries)». En: (2020).
- [13] Helder P Palaro y Luiz Koodi Hotta. «Using conditional copula to estimate value at risk». En: *Journal of Data Science* 4 (2006), págs. 93-115.

- [14] Plascencia Cuevas y Tania Naiezhda. «Valoración del riesgo utilizando cópulas como medida de la dependencia: aplicación al sector financiero mexicano (2002-2008)». En: (2009).
- [15] Gabriel Ignacio Torres Avendaño y Ana Milena Olarte Cadavid. «Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas». En: *AD-minister* 15 (2009), págs. 113-136.
- [16] PAUL EMBRECHT. «Extreme value theory: Potential and limitations as an integrated risk management tool». En: (2000).
- [17] Andres Mauricio Molina. «Estimation of Value at Risk and Conditional Value at Risk». Tesis doct. CHUO UNIVERSITY, 2021.
- [18] John Jairo Salinas Ávila. «Metodologías de medición del riesgo de mercado». En: *Innovar* 19.34 (2009), págs. 187-199.
- [19] Valentina Ospina Duque y Victoria Eugenia Tangarife Trujillo. «Medición del VaR en los portafolios de acciones-Mercado Colombiano». En: (2008).
- [20] Norbey Molina Otero. «Medición conjunta del riesgo de mercado y riesgo de crédito en algunas entidades bancarias colombianas.» En: (2016).
- [21] Philippe Artzner et al. «Coherent measures of risk». En: *Mathematical finance* 9.3 (1999), págs. 203-228.
- [22] Zongrun Wang, Yanbo Jin y Yanju Zhou. «Estimating portfolio risk using GARCH-EVT-copula model: An empirical study on exchange rate market». En: *Advances in neural network research and applications*. Springer, 2010, págs. 65-72.
- [23] Maribel Albarracín Muñoz, Fernando García y Claudia Juliana García. «RIESGO FINANCIERO: UNA APROXIMACIÓN CUALITATIVA AL INTERIOR DE LAS MIPYMES EN COLOMBIA (Financial Risk: A Qualitative Approach to MSMEs in Colombia)». En: *Aglala Issn* (2017), págs. 2215-7360.
- [24] David X Li. «On default correlation: A copula function approach». En: *The Journal of Fixed Income* 9.4 (2000), págs. 43-54.
- [25] José Ramón Aragonés y Carlos Blanco. «Valor en Riesgo». En: *Aplicación a la gestión empresarial. Pirámide, Madrid* (2000).
- [26] Yardin Amaro. «El análisis marginal». En: *Buenos Aires: Osmar Buyatti* (2012).
- [27] Roger Cohen. «Análisis marginal». En: *Argentina: Facultad de ingeniería, Universidad de Buenos Aires* (2011).
- [28] Viviana Lambretón Torres y Gabriela Garza Fernández. *Información financiera en los negocios*. Pearson Educación, 2016.
- [29] Oscar Becerra, Luis Melo et al. «Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones». En: *Borradores de economía* 489 (2008), págs. 1-93.
- [30] M Sklar. «Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges». En: *Publ. inst. statist. univ. Paris* 8 (1959), págs. 229-231.
- [31] Roger B. Nelsen. «An introduction to copulas». En: *Springer Science & Business Media* (2007).
- [32] C Ayyad, J Mateu y E Porcu. «Inferencia y modelización mediante cópulas». En: *Trabajo de investigación, Universitat Jaume, Departamento de Matemáticas, Castellón* (2008).

- [33] Daniel Velez Serrano. «Teoría de cópulas aplicada a la predicción». En: (2007).
- [34] Diana Carolina. Moreno Chavarro. «Método para elegir una cópula arquimediana óptima.» Tesis doct. Univesidad Nacional de Colombia, 2012.
- [35] NI Fisher y P Switzer. «Chi-plots for assessing dependence». En: *Biometrika* 72.2 (1985), págs. 253-265.
- [36] Vitor AA Marchi, Francisco AR Rojas y Francisco Louzada. «The chi-plot and its asymptotic confidence interval for analyzing bivariate dependence: An application to the average intelligence and atheism rates across nations data». En: *Journal of Data Science* 10.4 (2012), págs. 711-722.
- [37] Christian Genest, Kilani Ghoudi y L-P Rivest. «A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions». En: *Biometrika* 82.3 (1995), págs. 543-552.
- [38] Harry Joe. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC press, 1997.
- [39] Eric Zivot y Jiahui Wang. «Vector autoregressive models for multivariate time series». En: *Modeling financial time series with S-PLUS®* (2006), págs. 385-429.
- [40] Luisa Fernanda Parra Arboleda. «Modelamiento conjunto del número de siniestros y pagos por reclamación en seguros mediante una cópula mixta desde la perspectiva frecuentista y bayesiana». En: *Departamento de Estadística* (2015).
- [41] Wilmar Sepúlveda Herrera y Lina Marcela Garzón Muñoz. «Modelación conjunta de variables meteorológicas medidas en la estación la sirena en el Valle del Cauca a través de funciones cópula». En: (2017).
- [42] Superintendencia financiera de Colombia. *Tasa Representativa del Mercado (TRM - Peso por dólar)*. Superintendencia financiera de Colombia, 2022.
- [43] Fabián Alexis Salazar Gallego et al. «Café de Colombia, análisis de los principales productores de café del mundo». B.S. thesis. Escuela de Economía, Administración y Negocios. Facultad de Negocios~, 2021.
- [44] Fabian vanegas. *Ranking de los departamentos productores de café en Colombia*. <https://www.yoamoelcafedecolombia.com/2021/03/03/ranking-de-los-departamentos-productores-de-cafe-en-colombia/>, 2021.
- [45] Rong-Gang Cong y Mark Brady. «The interdependence between rainfall and temperature: copula analyses». En: *The Scientific World Journal* 2012 (2012).
- [46] Vadoud Najjari, Hasan Bal y Salih Celebioglu. «Modeling of dependence structures in meteorological data via archimedean copulas». En: *UPB Sci. Bull., Series D* 75.3 (2013), págs. 131-138.