



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 06/02/2024

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Sergio Andres Hernandez Walteros, con C.C. No. 1006456905,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o _____

titulado Disco de acreción alrededor de un agujero negro rotante soportado por un campo
electromagnético no lineal

presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de

Físico;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

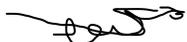
2014

PÁGINA

2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Sergio Andrés Hernandez

Firma:  _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 5

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Hernandez Walteros	Sergio Andres

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 5

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2024

NÚMERO DE PÁGINAS: 69

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas_x__ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros_x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: latex

MATERIAL ANEXO: PDF

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria): ninguno

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. __Física Teórica	_theoretical physic	6. _____	_____
2. Relatividad General	General Relativity	7. _____	_____
3. _____	_____	8. _____	_____
4. _____	_____	9. _____	_____
5. _____	_____	10. _____	_____

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La relatividad general (GR) es una teoría clásica de la gravedad, la cual describe los fenómenos mecánicos y electromagnéticos que suceden en el espaciotiempo, en presencia de un cuerpo gravitatorio. La solución más sencilla a las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica de Schwarzschild, la cual explica la geometría del espaciotiempo al exterior de un objeto esféricamente simétrico y estático, el cual está dotado únicamente de masa. No obstante, existen dos métricas que generalizan dicho espaciotiempo, la primera es la métrica de Kerr, la cual dota al objeto de rotación, y la segunda es la métrica de Kerr-Newman la cual además de poseer



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 5
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

rotación posee una carga electromagnética. Los objetos producto de estas soluciones son llamados comúnmente como agujeros negros. Debido a la curvatura generada por los agujeros negros, estos atraen hacia si materia circundante, ya sea en forma de gas o polvo la cual orbita alrededor de él, por lo tanto, se generan a su alrededor objetos conocidos como discos de acreción, los cuales poseen ciertas propiedades físicas, como lo es el flujo a través de las caras del disco, su temperatura, y la luminosidad observada. Teniendo en cuenta todo lo anterior, este trabajo de grado se va a enfocar en el comportamiento de las magnitudes físicas del disco, previamente dichas, para las dos métricas rotantes generales de GR (Kerr y Kerr-Newman) y el comportamiento de este para un agujero negro soportado por campos electromagnéticos no lineales (Solución exacta acoplada con electrodinámica no lineal (NLE)).



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 5
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

General relativity (GR) is a classical theory of gravity, which describes the mechanical and electromagnetic phenomena occurring in spacetime in the presence of a gravitating body. The simplest solution to Einstein's field equations is the Schwarzschild metric, which explains the geometry of spacetime outside a spherically symmetric and static object, which is endowed only with mass. However, there are two metrics that generalize such spacetime, the first is the Kerr metric, which endows the object with rotation, and the second is the Kerr-Newman metric which in addition to having rotation has an electromagnetic charge. Objects resulting from these solutions are commonly referred to as black holes. Due to the curvature generated by black holes, they attract to themselves surrounding matter, either in the form of gas or dust, which orbits around them, therefore, objects known as accretion disks are generated around them, which have certain physical properties, such as the flux through the disk faces, their temperature, and the observed luminosity. Taking into account all the above, this work will focus on the behavior of the physical quantities of the disk, previously mentioned, for the two general rotating metrics of GR (Kerr and Kerr-Newman) and the behavior of this for a black hole supported by nonlinear electromagnetic fields (exact solution coupled with nonlinear electrodynamics (NLE)).

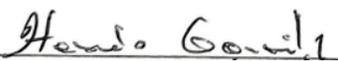


DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	5 de 5
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

APROBACION DE LA TESIS

Nombre presidente Jurado: Hernando Gonzales Sierra

Firma: 

Nombre Jurado: Nora Eva Bretón

Firma: 

Nombre Jurado: Gustavo Gutiérrez Cano

Firma: 

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



**Disco de acreción alrededor de un agujero negro rotante
soportado por un campo electromagnético no lineal**

Trabajo de Grado para optar al título de Físico(a)

Desarrollado por:

Sergio Andrés Hernández

Código: 20181167066

Firma: _____



Director: Pedro Mario Cañate

Firma: _____

Área: Relatividad General

Neiva-Huila
30 de octubre de 2023

DEDICATORIA

A mi madre que desde pequeño me ha inculcado que soy capaz de lo que me proponga, sin ella, sin su esfuerzo, y sin su dedicación hacia mi, yo no sería lo que soy hoy día. A mi padrastro, que ha sido una inspiración para mi en lo académico, su vida me ha enseñado, que siempre hay tiempo para aprender, y que el trabajo duro, el estudio y la dedicación siempre tienen sus recompensas. A mis colegas de estudio y en especial a mi amigo Pablo, que me ha acompañado todos estos años a través de las aulas. A la señora Inocencia y su familia que me acogieron como si fuera su propio hijo.

AGRADECIMIENTOS

Primero, a mis padres por siempre confiar en mi y que sin su esfuerzo económico y emocional, yo no estaría culminando mi carrera universitaria. Además, a la señora inocencia, por su generosidad de brindarme un lugar que puedo llamar mi segundo hogar. Agradezco a mi director de tesis, el cual ha sido un gran maestro, aconsejándome en cada instancia de mi proceso formativo. Por ultimo, a la Universidad Surcolombiana que me permitió cumplir un sueño que tenía desde niño, el cual era poder ser llamado físico.

RESUMEN

En este Trabajo de Grado se halló el flujo de energía a través de las caras del disco de acreción, la temperatura del disco y la eficiencia de transformar la materia en reposo en radiación para un agujero negro de Kerr, Kerr-Newman y uno acoplado con electrodinámica no lineal (NLE), usando el modelo de Novikov-Thorne. Para ello, se hallaron las características de las partículas de prueba en la órbita ecuatorial circular, las cuales son su velocidad angular, energía específica, momento angular específico y la órbita circular estable más interna (ISCO). Se logró identificar, inicialmente que el ISCO se corre a radios cada vez más pequeños al aumentar los parámetros como la carga (en el caso de Kerr-Newman) y el NLE β (caso electromagnético no lineal), luego, que al considerar espaciotiempos más generales como lo son el de Kerr-Newman y el acoplado con NLE el flujo de energía y la temperatura aumenta significativamente a comparación con el de Kerr. Por último, la eficiencia aumenta en gran medida en el caso de Kerr-Newman al variar la carga, y para el caso NLE solo hay valores físicamente razonable en $\beta = 0,1$.

ABSTRACT

In this work, the energy flux through the faces of the accretion disk, the disk temperature and the efficiency of transforming matter at rest into radiation for a Kerr black hole, Kerr-Newman and one coupled with nonlinear electrodynamics (NLE), using the Novikov-Thorne model, were found. For this purpose, the characteristics of the test particles in the circular equatorial orbit were found, which are their angular velocity, specific energy, specific angular momentum and the innermost stable circular orbit (ISCO). It was identified, initially, that the ISCO runs at increasingly smaller radii with increasing parameters such as the charge (in the Kerr-Newman case) and the NLE (nonlinear electromagnetic case), then, when considering more general spacetimes such as Kerr-Newman and coupled with NLE, the energy flow and the temperature increase significantly compared to Kerr. Finally, the efficiency increases greatly in the Kerr-Newman case as the load is varied, and for the NLE case there is only a reasonable physical value at $\beta = 0,1$.

Índice General

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivos del Trabajo de Grado	1
1.1.1. Objetivo General	1
1.1.2. Objetivos Específicos	1
2. Método Teórico	2
2.1. Variedad Diferencial	2
2.1.1. Geometría de Riemann	2
2.1.2. Espacio tangente	3
2.2. Espacio dual	3
2.3. Formas diferenciales	3
2.4. La métrica	4
2.5. Símbolos de Christoffel	5
2.6. Tensor de curvatura de Riemann	5
2.7. Tensor de Ricci	6
2.8. Invariante de curvatura de Riemann	6
2.9. Ecuación de Einstein	6
2.10. Espaciotiempos con simetría esférica	6
2.11. Geometría de Schwarzschild	8
2.11.1. Métrica de Schwarzschild	8
2.12. Agujeros negros en Rotación	10
2.12.1. Geometría de Kerr	10
2.12.2. Métrica de Kerr	10
2.12.3. Coordenadas de Boyer-Lindquist	11
2.12.4. Horizonte de sucesos	11
2.12.5. Métrica de Kerr-Newman	12
2.12.6. Órbitas en el espacio ecuatorial	13
2.13. Discos de acreción delgados alrededor de objetos compactos	14
2.13.1. El modelo de Novikov-Thorne	14
2.14. Agujero negro estacionario acoplado con NLE	15
2.14.1. Métrica simétricamente esférica	16
2.14.2. Métrica estacionaria con simetría axial	16
3. Metodología	19
3.1. Disco de acreción delgado para la métrica de Kerr	19
3.1.1. Orbitas ecuatoriales para la métrica de Kerr	19
3.1.2. Modelo de Novikov-Thorne para la métrica de Kerr	21

3.2. Disco de acreción delgado para la métrica de Kerr-Newman	22
3.2.1. Órbitas ecuatoriales para la métrica de Kerr-Newman	22
3.2.2. Modelo de Novikov-Thorne para la métrica de Kerr-Newman	24
3.3. Disco de acreción delgado para agujeros negros acoplados con NLE	25
3.3.1. Órbitas ecuatoriales para agujeros negros acoplados con NLE	26
3.3.2. Modelo de Novikov-Thorne para agujeros negros soportados en NLE	27
3.4. Método computacional	28
4. RESULTADOS	29
4.1. Resultado 1: Agujero negro de Kerr	29
4.1.1. Órbitas ecuatoriales	29
4.1.2. Propiedades físicas del disco de acreción	32
4.2. Resultado 2: Agujero negro de Kerr-Newman	34
4.2.1. Órbitas ecuatoriales	34
4.2.2. Propiedades físicas del disco de acreción	39
4.3. Resultado 3: Agujero negro acoplado con NLE	42
4.3.1. Órbitas ecuatoriales	42
4.3.2. Propiedades físicas del disco de acreción	45
5. CONCLUSIONES	48
6. Apéndice	49
6.1. Determinante de la métrica NLE	49

Índice de Figuras

2.1. Las dos posibles asíntotas del agujero negro rotante estacionario soportado por electrodinámica no lineal. Dependiendo del signo de F_0 la asíntota es diferente, para F_0 positivos existen dos horizontes de eventos, interno y externo (línea sólida), mientras que para F_0 negativos la solución tiene 3 horizontes de eventos (línea punteada): interno, externo y cosmológico. Los parámetros fijos son $m = 1$; $\beta = 0,5$ y $F_0 = \pm 0,8$	18
4.1. La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.	30
4.2. La Energía específica $\tilde{E}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.	30
4.3. El momento angular específico $\tilde{L}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.	31
4.4. La segunda derivada del potencial efectivo para la métrica de Kerr, para diferentes valores de a . Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.	31
4.5. El flujo de energía $F(r)$ de un disco alrededor de un agujero negro de Kerr con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$, para distintos valores de a . La línea vertical punteada representa el ISCO para cada caso.	33
4.6. La temperatura del disco $T(r)$ para un agujero negro de Kerr con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$, para distintos valores de a . La línea vertical punteada representa el ISCO para cada caso	33
4.7. La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra la velocidad angular variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.	35

4.8. La energía específica $\tilde{E}(r)$ e las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra la energía específica variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 36

4.9. El momento angular específico $\tilde{L}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra el momento angular específico variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 37

4.10. La segunda derivada del potencial efectivo para la métrica de Kerr-Newman. La grafica superior varia a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras la grafica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$ 38

4.11. El flujo de energía $F(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro de Kerr-Newman con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$. La gráfica superior muestra el flujo de energía variando a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 40

4.12. La temperatura del disco $T(r)$ para un agujero negro de Kerr-Newman con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$. La gráfica superior muestra la temperatura variando a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 41

4.13. La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y dejando fijo $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 42

4.14. La energía específica $E(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y fijando $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 43

4.15. El momento angular específico $L(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y fijando $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 43

4.16. La segunda derivada del potencial efectivo para el agujero negro rotante acoplado con NLE para $a = 0,3$, $F_0 = 0,4$ y diferentes valores del parámetro NLE β . Las líneas verticales representan el ISCO en cada caso. 44

- 4.17. El flujo de energía $F(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro acoplado con NLE con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ y $F_0 = 0,4$, para diferentes valores del parametro β . El parametro de rotación fue fijado en $a = 0,3$ (gráfica superior) y $a = 0,1$ (gráfica inferior), respectivamente. En cada caso, la curva solida representa un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las lineas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 46
- 4.18. La temperatura $T(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro acoplado con NLE con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, para diferentes valores del parametro β y $F_0 = 0,4$. El parametro de rotación fue fijado en $a = 0,3$ (gráfica superior) y $a = 0,1$ (gráfica inferior), respectivamente. En cada caso, la curva solida representa un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las lineas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso. 47

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La relatividad general (GR) es una teoría clásica de la gravedad, la cual describe los fenómenos mecánicos y electromagnéticos que suceden en el espaciotiempo, en presencia de un cuerpo gravitatorio. La solución más sencilla a las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica de Schwarzschild, la cual explica la geometría del espaciotiempo al exterior de un objeto esféricamente simétrico y estático, el cual está dotado únicamente de masa. No obstante, existen dos métricas que generalizan dicho espaciotiempo, la primera es la métrica de Kerr, la cual dota al objeto de rotación, y la segunda es la métrica de Kerr-Newman la cual además de poseer rotación posee una carga electromagnética. Los objetos producto de estas soluciones son llamados comúnmente como agujeros negros. Debido a la curvatura generada por los agujeros negros, estos atraen hacia si materia circundante, ya sea en forma de gas o polvo la cual orbita al rededor de el, por lo tanto, se generan a su alrededor objetos conocidos como discos de acreción, los cuales poseen ciertas propiedades físicas, como lo es el flujo a través de las caras del disco, su temperatura, y la luminosidad observada. Teniendo en cuenta todo lo anterior, este trabajo de grado se va a enfocar en el comportamiento de las magnitudes físicas del disco, previamente dichas, para las dos métricas rotantes generales de GR (Kerr y Kerr-Newman) y el comportamiento del mismo para un agujero negro soportado por campos electromagnéticos no lineales (Solución exacta acoplada con electrodinámica no lineal (NLE)).

1.1. Objetivos del Trabajo de Grado

1.1.1. Objetivo General

- Determinar el flujo de energía emitido a través de las caras de un disco de acreción en un agujero negro soportado por un campo electromagnético no lineal

1.1.2. Objetivos Específicos

- Determinar la temperatura local del disco de acreción
- Determinar la eficiencia de transformación de materia en reposo en radiación
- Comparar y analizar los resultados con otros discos de soluciones rotantes

Capítulo 2

Método Téorico

Relatividad General suele parecer un campo de la física complicado, ya que para su correcto entendimiento es necesario tener bases matemáticas en geometría diferencial, que los físicos no acostumbran poseer.

2.1. Variedad Diferencial

En general, una variedad diferencial n-dimensional es un espacio topológico que localmente se considera Euclidiano, esto quiere decir, que aunque globalmente sea curvo, si se ve de cerca debe parecerse a \mathbb{R}^n ; dicha variedad esta equipada con una familia (U_i, φ_i) donde U_i es un subconjunto abierto de la variedad y φ_i es un homeomorfismo (mapa suave, donde su inversa también es suave) de U_i a $U_i' \in \mathbb{R}^n$. Esto nos indica que la variedad posee un conjunto de puntos parametrizables de forma continua, en donde el número de parámetros independientes indica la dimensión y las coordenadas de esta [1].

Si tenemos dos puntos dentro de una variedad n-dimensional con coordenadas x^μ , separados de forma infinitesimal tal que

$$\begin{aligned} a &\rightarrow x^\mu, \\ b &\rightarrow x^\mu + dx^\mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por lo que, la geometría local de la variedad en el punto a se define por medio de una función razonable la cual depende de las coordenadas tal que

$$ds^2 = f(x^\mu, dx^\mu), \tag{2.2}$$

donde ds^2 describe un elemento de línea (distancia) entre dos puntos en la variedad (en este caso a y b).

2.1.1. Geometría de Riemann

En relatividad general es indispensable el concepto de variedad diferencial, ya que esta existe justamente en una de ellas, llamada hipersuperficie la cual posee propiedades geométricas ya definidas, por ende la geometría a usar es la de Riemann donde el elemento de línea tiene la forma [2]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad ds^2 > 0. \tag{2.3}$$

Específicamente los elementos de línea para relatividad general ds^2 pueden ser

$$ds^2 < 0, \quad ds^2 = 0, \quad ds^2 > 0, \quad (2.4)$$

y se conocen como variedades pseudo-Riemannianas.

2.1.2. Espacio tangente

Si tenemos un punto arbitrario dentro de la variedad, es posible trazar un plano euclidiano tangente a la superficie donde habite la variedad, en donde se puede construir un conjunto de vectores denominados vectores tangentes, de la forma [1]

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.5)$$

donde A^μ son los componentes del vector y $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ es la base del espacio vectorial, esto quiere decir que si la base es 4, entonces [1]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\} \rightarrow \{ \partial_\mu \}, \quad (2.6)$$

reescribiendo el vector tangente tenemos

$$A = A^\mu \partial_\mu. \quad (2.7)$$

En relatividad general, los vectores se ubican en un punto dado del espaciotiempo, por lo que, se les denomina 4-vectores.

2.2. Espacio dual

Con el espacio tangente ya definido, es posible definir el cotangente a este [1]. Para ello es necesario contar con conjunto de vectores que cumplan la siguiente propiedad

$$\hat{\theta}(\hat{e}_\alpha) = \delta_\alpha^\beta, \quad (2.8)$$

donde \hat{e}_α es la base para cuatro vectores del espacio tangente, donde $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$. Por lo tanto, se puede pensar que para coordenadas rectangulares, \hat{e}_1 es el vector que apunta a lo largo del eje x . De forma que, un vector cotangente tiene de manera general la siguiente forma

$$B = B_\alpha \hat{\theta}^\alpha. \quad (2.9)$$

2.3. Formas diferenciales

Las formas diferenciales son objetos matemáticos especiales usados para describir espacios vectoriales, estos son usados en el cálculo de varias variables y el que nos interesa el cálculo tensorial [2]. De forma general las formas (formas diferenciales) p -formas son tensores del tipo $(0, p)$ y son totalmente antisimétricos. En este contexto los escalares son 0-formas, los vectores cotangentes o duales 1-formas y así sucesivamente hasta n -formas, para una variedad n -dimensional [1]

$$\begin{aligned}
0 - \text{forma} &= \text{funcion escalar}, \\
1 - \text{forma} &= \omega_{\alpha_1} dx^{\alpha_1}, \\
2 - \text{forma} &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha_1 \alpha_2} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2}, \\
3 - \text{forma} &= \frac{1}{6} \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
p - \text{forma} &= \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Esto puede ser aplicado a diferentes geometrías en relatividad general, como lo puede ser la geometría de Schwarzschild [1]

$$\begin{aligned}
\theta^0 &= -e^{f(r,t)} dt, \\
\theta^1 &= e^{g(r,t)} dr, \\
\theta^2 &= r^2 d\theta, \\
\theta^3 &= r^2 \sin^2 \theta d\phi.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora, el numero de p -formas linealmente independientes en un espacio vectorial n -dimensional esta dado por

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{2.12}$$

Entonces si estamos en relatividad general, donde se trabaja con 4-dimensional, la ecuación (2.11) nos dice que existe una 0-formas, cuatro 1-formas, seis 2-formas, cuatro 3-formas y una 4-formas y para $p > n$ no existe ninguna [1].

2.4. La métrica

En el calculo euclidiano, el concepto de métrica es algo bien definido y conocido, ya que si se tienen dos puntos se puede saber su distancia por medio de esta, sin embargo en relatividad general este concepto de distancia esta en espacios no euclidianos, por lo que se necesita del calculo tensorial, siendo esta una herramienta más formal que nos sirve tanto para espacios euclidianos como para no euclidianos. En general, la métrica es un tensor simétrico, covariante de segundo orden, invariante bajo transformaciones de coordenadas y usualmente no degenerado, lo que nos indica que su determinante no desaparece, este se representa de la siguiente manera [1]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.13}$$

Ahora, la distancia en un espacio euclidiano en coordenadas rectangulares va tal que

$$ds^2 = g_{xx} dx^x dx^x + g_{yy} dx^y dx^y + g_{zz} dx^z dx^z, \tag{2.14}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.15}$$

donde las componentes de la métrica (g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}) son iguales a 1, y además si hacemos una transformación de las coordenadas a esféricas tenemos que [1]

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Por lo tanto, la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.\tag{2.17}$$

Sin embargo, hay superficies como lo pueden ser una esfera bidimensional en donde la suma de los ángulos de un triángulo no suman 180 grados, estas son denominadas superficies no euclidianas, hay que aclarar que el ds^2 no hace referencia a un cuadrado o a un diferencial de una función por ejemplo, simplemente es la notación que se usa para describir toda la información entre dos puntos, si esto es llevado a relatividad general nos indica la información espaciotemporal, en otras palabras, sucesos que pasaron, pasan o pasaran en un espacio dado [1].

2.5. Símbolos de Christoffel

Como sabemos la métrica nos da la información de la geometría en nuestra variedad, por lo que si queremos saber como se comporta la curvatura dentro de ella, es necesario usar formalismos que nos permitan entender como se genera esto, para ello es necesario comprender que la curvatura se da a través de un elemento matemático llamado conexión, esta nos permite relacionar vectores en los espacios tangentes de puntos cercanos. Hay una conexión única que se puede construir a través y esta se encuentra en un objeto llamado símbolos de Christoffel, el cual esta dado tal que así [1]

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}),\tag{2.18}$$

podría parecer un tensor por la notación, pero realmente no lo es, es por ello, que se le denomina objeto o símbolo, una característica de estos es que los dos primeros índices son simétricos, por lo que

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}.\tag{2.19}$$

2.6. Tensor de curvatura de Riemann

A partir de la conexión se obtiene el tensor de curvatura de Riemann, este nos indica cualquier cosa que queramos saber sobre la curvatura en la variedad [1]

$$R^{\beta}_{\mu\nu\alpha} = \partial_{\mu} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\nu\mu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha},\tag{2.20}$$

este tensor, solo será nulo en el caso en que la métrica sea perfectamente plana (espacio de Minkowski), además en las ecuaciones de Einstein hay cierta relación entre las componentes de este tensor y el tensor de energía-momento [1].

2.7. Tensor de Ricci

El tensor de Riemann puede ser contraído de dos formas [1], la primera cuando los índices β y μ se igualan, tal que

$$R^\beta_{\beta\nu\alpha} = 0, \quad (2.21)$$

y la segunda cuando los índices β y ν se iguala, generando el tensor de Ricci

$$R^\beta_{\mu\beta\alpha} = R_{\mu\alpha}. \quad (2.22)$$

Una característica especial del tensor de Ricci es que este es simétrico, por lo que

$$R_{\mu\alpha} = R_{\alpha\mu}. \quad (2.23)$$

2.8. Invariante de curvatura de Riemann

Si contraemos nuevamente el tensor de Riemann o contraemos por primera vez el de Ricci, surge un invariante de curvatura, este no sufre variaciones a cambios de coordenadas y por lo tanto es una magnitud fija en cada punto de la variedad [1]

$$g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} = R. \quad (2.24)$$

2.9. Ecuación de Einstein

Si juntamos los objetos matemáticos que han sido descritos con anterioridad, podemos formar las ecuaciones de Einstein, esta nos describe como una distribución de materia y/o energía generan la geometría que podemos observar en el universo; estas ecuaciones son mejor conocidas como ecuaciones de campo de Einstein [3]

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (2.25)$$

donde c es la velocidad de la luz, G es la constante gravitacional de Newton, $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein, $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura y $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento, este conteniendo tanto materia como energía (radiación electromagnética).

2.10. Espaciotiempos con simetría esférica

Para llegar a una primera solución en relatividad general es importante considerar los espaciotiempos mas simples, en este caso seria un espacio tiempo con simetría esférica, en donde, se analiza que sucede al exterior de un objeto con dicha simetría y únicamente dotado de masa [1], aunque puede llegar a ser simple es de suma importancia ya que estas soluciones se pueden aproximar a objetos celestes como lo pueden ser planetas como la tierra o estrellas como el sol. Para la construcción de la métrica es importante considerar lo siguiente

$$x^0 = t, \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad (2.26)$$

donde las únicas invariantes rotacionales de las coordenadas espaciales x^i y sus diferenciales son [4]

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad x \cdot d\vec{x}. \quad (2.27)$$

Con estas consideraciones podemos hallar la forma más general de una métrica espacialmente isotrópica [4]

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dt \vec{x} \cdot d\vec{x} + C(r, t)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(r, t)d\vec{x}^2, \quad (2.28)$$

donde A , B , C y D so funciones arbitrales de r y t . Transformando a coordenadas polares [4]

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta, \quad (2.29)$$

se obtiene que

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, \quad x \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.30)$$

La métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)r dt dr + (C(r, t)r^2 + D(r, t)) dr^2 + D(r, t)r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.31)$$

donde $C(r, t)r^2 + D(r, t)$, $B(r, t)r$ y $D(r, t)r^2$ pueden ser escritas como funciones de r y t

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dt dr + C(r, t)dr^2 + D(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.32)$$

Si definimos una nueva coordenada radial $\bar{r} = D(r, t)$ y de igual forma, las funciones A , B , C en funciones de \bar{r} y t [4]

$$ds^2 = -A(\bar{r}, t)dt^2 + B(\bar{r}, t)dt d\bar{r} + C(\bar{r}, t)d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.33)$$

Ahora, definiendo una nueva coordenada temporal tal que

$$d\bar{t} = \Phi(\bar{r}, t) \left[A(\bar{r}, t)dt - \frac{1}{2}B(\bar{r}, t)d\bar{r} \right], \quad (2.34)$$

donde $\Phi(\bar{r}, t)$ es una factor de integración. Elevando al cuadrado, se obtiene

$$d\bar{r} = \Phi^2 \left(A^2 dt^2 - AB dt d\bar{r} + \frac{1}{4}B^2 d\bar{r}^2 \right), \quad (2.35)$$

A partir de esto se puede deducir que

$$-A^2 dt^2 + B dt d\bar{r} = -\frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 + \frac{B}{4A} d\bar{r}^2. \quad (2.36)$$

Reemplazando (2.36) en (2.33) tenemos que

$$ds^2 = -\frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 + \frac{B}{4A} d\bar{r}^2 + C(\bar{r}, t)d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.37)$$

agrupando términos, nos queda que

$$ds^2 = -\frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 + \left(\frac{B}{4A} + C(\bar{r}, t) \right) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.38)$$

Definiendo nuevamente que $\bar{A}(\bar{r}, t) = \frac{1}{A\Phi^2}$ y que $\bar{B}(\bar{r}, t) = \frac{B}{4A} + C(\bar{r}, t)$ se obtiene la métrica general para un espaciotiempo con simetría esférica [4]

$$ds^2 = -\bar{A}(\bar{r}, t)d\bar{t}^2 + \bar{B}(\bar{r}, t)d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.39)$$

esta puede ser escrita de una forma más familiar tal que

$$ds^2 = -g_{tt}(t, r)dt^2 + g_{rr}(t, r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

2.11. Geometría de Schwarzschild

Es de entender que darle solución a las ecuaciones de Einstein es una ardua tarea, esto por su alto grado de no linealidad, por lo que resulta conveniente tener en cuenta ciertas simetrías en la geometría del espacio tiempo que hagan esta tarea mas sencilla, es por eso que para Schwarzschild se dispone una geometría con simetría esférica la cual fue descrita anteriormente, y ya que esta métrica se evalúa al exterior de un objeto únicamente dotado de masa, se entiende que el exterior es netamente vacío [4].

2.11.1. Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein para un cuerpo esférico [1]. Por comodidad se reescribe la ecuación (2.40) de la siguiente manera

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.41)$$

donde $\alpha(r, t)$ y $\beta(r, t)$ son funciones desconocidas dependientes de t y r , las componentes del tensor métrico, pueden ser expresadas en forma de matriz diagonal de la siguiente manera [1]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

de forma clara se aprecian los coeficientes covariantes no nulos, mientras que los contra-variantes están expresados de la siguiente forma

$$g^{00} = -e^{-2\alpha(r,t)}, \quad g^{11} = e^{-2\beta(r,t)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.43)$$

Para hallar las funciones desconocidas $\alpha(r, t)$ y $\beta(r, t)$ es necesario solucionar las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Como la solución se halla al exterior de un objeto únicamente dotado de masa y en vacío entonces [1]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.45)$$

si multiplicamos por los componentes de la métrica contra-variante tenemos que

$$R_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\nu} R = 0, \quad (2.46)$$

$$R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = 0. \quad (2.47)$$

Si expandimos sobre los índices

$$R - \frac{1}{2} R (g_{00}g^{00} + g_{11}g^{11} + g_{22}g^{22} + g_{33}g^{33}) = 0, \quad (2.48)$$

$$R = 0. \quad (2.49)$$

La expresión (2.49) implica que

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.50)$$

Ahora si queremos determinar los componentes del tensor de Ricci primero debemos determinar los símbolos de Christoffel [1]

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right), \quad (2.51)$$

al tener los símbolos de Christoffel podemos hallamos las componentes del tensor de curvatura de Riemann

$$R^{\beta}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}, \quad (2.52)$$

y, por ultimo, a partir de este, se obtienen las componentes de Ricci [1]

$$R_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}. \quad (2.53)$$

Si igualamos las ecuaciones (2.50) y (2.53) nos genera un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden tal que así [1]

$$R_{tt} = - \left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta} \right] + e^{2(\beta-\alpha)} \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 + \frac{2}{r}\alpha' \right] = 0, \quad (2.54)$$

$$R_{rr} = - \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 - \frac{2}{r}\beta' \right] + e^{2(\beta-\alpha)} \left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta} \right] = 0, \quad (2.55)$$

$$R_{tr} = \frac{2}{r}\dot{\beta} = 0, \quad (2.56)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r(\beta' - \alpha') - 1] + 1 = 0, \quad (2.57)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 0. \quad (2.58)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos la métrica de Schwarzschild, la cual no depende del tiempo, en otras palabras, es una solución estática, esta es la única solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío [1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.59)$$

2.12. Agujeros negros en Rotación

2.12.1. Geometría de Kerr

En las secciones anteriores se mostró la métrica de Schwarzschild la cual describe curvaturas generadas por cuerpos únicamente dotados de masa y en vacío, aunque esta solución es importante, en general, los objetos astronómicos están rotando continuamente esto provoca que no sean perfectamente esféricos y que por ende tengan simetría axial respecto a su eje de rotación, por lo que surge la necesidad de encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que tengan dicha simetría y comportamiento, para que esto se dé se precisa que los coeficientes métricos g_{00} y g_{33} sean independientes de la métrica [4]

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta). \quad (2.60)$$

Un objeto en rotación se puede expresar con el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\phi - \omega dt)^2 + Cdr^2 + Dd\theta^2, \quad (2.61)$$

donde A, B, C, D y ω son funciones desconocidas que dependen de r y θ , así pues los coeficientes covariantes son

$$g_{tt} = -A + B\omega^2, \quad g_{t\phi} = -2B\omega, \quad g_{\phi\phi} = B, \quad g_{rr} = C, \quad g_{\theta\theta} = D, \quad (2.62)$$

donde $\omega = \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$, si el objeto no rota entonces $\omega = 0$ y entonces $g_{t\phi} = 0$ [4].

2.12.2. Métrica de Kerr

El elemento de línea para un espaciotiempo general, estacionario y con simetría axial esta dado de la siguiente manera [5]

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.63)$$

este es equivalente a la ecuación (2.60)

$$g_{tt} = -A + B\omega^2, \quad g_{t\phi} = -2B\omega, \quad g_{\phi\phi} = B, \quad g_{rr} = C, \quad g_{\theta\theta} = D, \quad (2.64)$$

donde ω es el momento angular y A, B, C, D son funciones que dependen de r y θ . Para proporcionarle sentido físico a la métrica esta debe satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein, así pues como con Schwarzschild, se inicia calculando los símbolos de Christoffel $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ para (2.62), a partir de estos calcular el tensor de curvatura de Riemann $R^\beta_{\mu\nu\alpha}$ y por ultimo, obtener el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Como con Schwarzschild, se precisa conocer la geometría del espaciotiempo por lo que al resolver las ecuaciones de campo en vacío se consigue lo siguiente [4]

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.65)$$

La derivación algebraica para hallar al completo la métrica de Kerr es muy extenso y complejo, ya que se precisa de métodos adicionales a los expuestos anteriormente para determinar todas

las incógnitas de la métrica¹. Por lo que al realizar la correcta derivación se puede llegar a la primera versión de la geometría del espacio tiempo de Kerr, escrita de la siguiente manera [6]

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2 + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.66)$$

La solución describe un agujero negro de masa m y velocidad angular a , además si $a = 0$ esta solución recupera la métrica de Schwarzschild, además que para r muy grandes esta es aproximadamente Minkowskiana [4]. Una cualidad interesante de esta métrica es que al igual que Schwarzschild la cual es la única solución exacta con simetría esférica para las ecuaciones de campo de Einstein, esta es la única solución exacta con simetría axial para las ecuaciones de campo de Einstein [4].

2.12.3. Coordenadas de Boyer-Lindquist

Una forma útil de reescribir la métrica de Kerr es en coordenadas de Boyer-Lindquist, la cual esta descrita de la siguiente manera [7].

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.67)$$

donde M es la masa del agujero negro y Σ y Δ son

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.68)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.69)$$

Estas coordenadas a comparación a las descritas en (2.64) minimizan el número de componentes no diagonales de la métrica, ya que en este sistema coordenado solo hay uno de ellos siendo el $dt d\phi$. En particular este sistema ayuda a analizar el comportamiento asintótico y a comprender la diferencia entre el horizonte de sucesos y la ergosfera [6].

2.12.4. Horizonte de sucesos

Si se observa la ecuación (2.65) se puede notar que si Σ y Δ tienden a cero, entonces los coeficientes de la métrica tienden a infinito, esto nos permitiría intuir que dicha métrica es singular en $\Sigma = \Delta = 0$, sin embargo, si analizamos el invariante de curvatura $R = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$ revela que la única singularidad física se presenta únicamente cuando $\Sigma \rightarrow 0$ [4]. Para notar esto de forma más clara, es necesario observar la métrica en coordenadas de Kerr (2.68)

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} d\mu d\tilde{\phi} + \Sigma d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} d\tilde{\phi}^2, \quad (2.70)$$

donde se observa que $\Delta = 0$ no tiene problema y que, es esta la que representa el horizonte de sucesos en la métrica de Kerr

¹Para la derivación completa de la métrica, se recomienda consultar la tesis *Romero Madrid, C. F. (2018). Derivation of the Metric of Reissner-Nordström and Kerr-Newman Black Holes.*

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2.71)$$

si se desarrolla esta ecuación se obtiene que

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.72)$$

Así pues, se puede concluir que la métrica de Kerr tiene dos horizontes de sucesos [4]

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}, \quad r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.73)$$

este horizonte tiene un caso especial y es cuando $a = M$, en dicho caso se considera que el agujero negro es extremo, ya que ambos horizontes se solapan y es por ello que toma la siguiente forma

$$r = M. \quad (2.74)$$

2.12.5. Métrica de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman describe la solución más general de un espaciotiempo estacionario y asintóticamente plano para las ecuaciones de Einstein-Maxwell en relatividad general [8], ya que esta toma en consideración la energía de campo de un campo electromagnético.

El proceso algebraico para llevar a cabo la derivación de esta métrica puede ser extenso y en cierta forma complicado ², incluso hay que usar algoritmos externos para su derivación, así pues la métrica de Kerr-Newman esta descrita de la siguiente manera [7]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4ar \sin^2 \theta (M - Q^2/(2r))}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 r \sin^2 \theta (M - Q^2/(2r))}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.75)$$

donde Q es la carga del agujero negro del agujero negro y Σ y Δ son

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2, \quad (2.76)$$

a partir de este elemento de línea se pueden hacer ciertas consideraciones la primera es que si $Q \rightarrow 0$ o $a \rightarrow 0$ entonces recuperamos las métricas de Kerr y Reissner-Nordström respectivamente y en el caso de aplicar ambas consideraciones se recuperaría la de Schwarzschild. A partir de Σ es posible hallar el horizonte de sucesos el cual es descrito cuando $\Sigma = 0$ ya que en dicha región parece haber una singularidad adicional, además de la singularidad de curvatura, ya que si observamos las componentes de la métrica [8]

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}. \quad (2.77)$$

Se vuelve singular cuando $\Delta = 0$, ahora si determinamos las raíces de Δ tenemos que

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (2.78)$$

estos nos indica que al igual que la métrica de Kerr se tienen dos horizontes de eventos, y que esta existe cuando $Q^2 + a^2 \leq M^2$.

²Para la derivación completa de la métrica, se recomienda consultar la tesis *Romero Madrid, C. F. (2018). Derivation of the Metric of Reissner-Nordström and Kerr-Newman Black Holes.*

2.12.6. Órbitas en el espacio ecuatorial

La métrica de Kerr al no tener una simetría esférica genera propiedades interesantes en la órbita ecuatorial, ya que las partículas de gas en un disco delgado siguen las geodésicas de dichas órbitas [7]. Para observar esto es necesario tener el elemento de línea de un espaciotiempo general el cual sea estacionario y axialmente simétrico el cual puede ser escrito de la siguiente forma [5]

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.79)$$

donde los coeficientes de la métrica son independientes de t y de ϕ , esto nos da dos constantes de movimiento, las cuales son la energía y el momento angular por unidad de masa en reposo [5]

$$g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = -\tilde{E}, \quad (2.80)$$

$$g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = \tilde{L}, \quad (2.81)$$

donde el punto denota la derivada respecto al parámetro afín τ . Si usamos las ecuaciones (2.80) y (2.81) se encuentran los componentes de la 4-velocidad \dot{x}^μ como

$$\dot{t} = \frac{\tilde{E}g_{\phi\phi} + \tilde{L}g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (2.82)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\tilde{E}g_{t\phi} + \tilde{L}g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (2.83)$$

por la condición de normalización $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$, se obtiene que [5]

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = V_{eff}(r, \theta), \quad (2.84)$$

donde el potencial efectivo está dado así [5]

$$V_{eff}(r, \theta) = -1 + \frac{\tilde{E}^2g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi} + \tilde{L}g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (2.85)$$

para órbitas circulares en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$), para $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$, se tiene que $V_{eff}(r) = 0$, y para $\ddot{r} = \ddot{\theta} = 0$, se necesita que $V_{eff,r} = 0$ y $V_{eff,\theta} = 0$ [5]. Usando el elemento de línea (2.75) y las condiciones anteriores, es posible hallar la energía específica y el momento angular específico para las partículas de prueba en las órbitas circulares, sin embargo es más sencillo usar la ecuación de la geodésica [5]. La componente radial de la ecuación de la geodésica con las condiciones $\dot{r} = \dot{\theta} = \ddot{r} = 0$ para órbitas circulares ecuatoriales nos permite hallar la velocidad angular $\Omega = \dot{\phi}/\dot{t}$ [7]

$$\Omega_{\pm} = \frac{-g_{t\phi,r} \pm \sqrt{(g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}, \quad (2.86)$$

donde el $+$ representa órbitas co-rotantes, esto quiere decir que el momento angular es paralelo al giro del agujero negro, mientras que el $-$ indica órbitas contra-rotantes, o sea, momento angular anti-paralelo al giro del agujero negro. A partir de la condición de normalización con $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ y las ecuaciones (2.80) y (2.81) se halla la energía específica y el momento angular específico

para una partícula de prueba la cual sigue una órbita circular en un potencial gravitacional generado por un objeto masivo [5]

$$\tilde{E} = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (2.87)$$

$$\tilde{L} = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}. \quad (2.88)$$

Si se tienen partículas de prueba en un potencial gravitacional de un cuerpo central, la órbita circular estable más interna también conocida como radio ISCO esta definida como [5]

$$V_{\text{eff},rr} |_{r=r_{\text{isco}}} = \frac{1}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \left[\tilde{E}^2 g_{\phi\phi,rr} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi,rr} + \tilde{L}^2 g_{tt,rr} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})_{,rr} \right] |_{r=r_{\text{isco}}} = 0, \quad (2.89)$$

como las órbitas circulares ecuatoriales son inestables para $r < r_{\text{isco}}$, el ISCO determina el borde interior de los discos de acreción delgados en el modelo de Novikov-Thorne. Como caso particular el ISCO para la métrica de Kerr esta dada por la siguiente ecuación [7]

$$\begin{aligned} r_{\text{ISCO}} &= 3M + Z_2 \mp \sqrt{(3M - Z_1)(3M + Z_1 + 2Z_2)}, \\ Z_1 &= M + (M^2 - a^2)^{1/3} [(M + a)^{1/3} + (M - a)^{1/3}], \\ Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

2.13. Discos de acreción delgados alrededor de objetos compactos

La teoría estándar para la descripción de los discos de acreción geoméricamente delgados y ópticamente gruesos es la de Novikov-Thorne [9] el cual es una generalización relativista del de Shakura-Sunyaev [10]. Este modelo esta formulado para un espaciotiempo estacionario axisimétrico y asintóticamente plano, en donde la estructura radial promediada en el tiempo se deduce a partir de la conservación de la masa en reposo, la energía y el momento angular [7].

2.13.1. El modelo de Novikov-Thorne

Existen varias versiones del modelo, así pues se seguirán las descritas en [5] las cuales son:

- El espaciotiempo descrito para el cuerpo central debe ser estacionario axisimétrico y asintóticamente plano.
- La autogravedad del disco es despreciable, por lo que la masa del disco no influirá en la métrica que se use.
- El disco de acreción es geoméricamente delgado, esto quiere decir, que el tamaño de su longitud vertical h es muy pequeña comparada con la de su longitud horizontal, $h \ll r$.
- El radio del ISCO determina el borde interior del disco y las partículas que orbitan alrededor del objeto central compacto, se mueven entre el ISCO y el borde exterior del disco.

- La superficie del disco es perpendicular al spin del agujero negro, esto quiere decir que, el disco de acreción se encuentra en el plano ecuatorial.
- Se asume que la radiación electromagnética emitida desde la superficie del disco tiene un espectro de cuerpo negro, resultado del equilibrio hidrodinámico y térmico del disco.
- El disco está en un estado estacionario, por lo que su tasa de acreción de masa \dot{M} no cambia con el tiempo.

Con estas consideraciones hechas es posible encontrar las características físicas del disco. El flujo de energía radiante puede ser encontrado por medio de las ecuaciones de conservación de la masa en reposo, la energía específica y el momento angular específico de las partículas del disco de la siguiente forma [5]

$$F(r) = -\frac{\dot{M}_0 \Omega_r}{4\pi \sqrt{-g} (\tilde{E} - \Omega \tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r \left(\tilde{E}(\kappa) - \Omega(\kappa) \tilde{L}(\kappa) \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \tilde{L} d\kappa, \quad (2.91)$$

donde \dot{M}_0 es la tasa de acreción de masa del agujero negro. Debido al equilibrio térmico del disco, es posible usar la ley de Stefan-Boltzmann para hallar la temperatura de este [5]

$$F(r) = \sigma_{SB} T(r)^4, \quad (2.92)$$

donde $\sigma_{SB} = 5,67 \times 10^{-5} \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzman. A partir de la temperatura es posible hallar la luminosidad observada $L(\nu)$ la cual tiene un espectro de cuerpo negro con corrimiento al rojo [5]

$$L(\nu) = 4\pi d^2 I(\nu) = \frac{8\pi h \cos \gamma}{c^2} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_0^{2\pi} \frac{\nu_e^3 \kappa}{\exp\left[\frac{h\nu_e}{k_B T}\right] - 1} d\kappa d\phi \quad (2.93)$$

Donde d es la distancia al centro del disco, γ el ángulo de inclinación del disco (que en este caso es 0), r_{in} y r_{out} son los bordes interior y exterior del disco respectivamente, h la constante de Planck y k_B la constante de Boltzman. Un aspecto importante de la ecuación (2.93) es la frecuencia emitida $\nu_e = \nu(1+z)$ donde el factor de corrimiento al rojo z puede ser escrito de la siguiente forma [5]

$$1+z = \frac{1 + \Omega(\kappa)\kappa \sin \phi \sin \gamma}{\sqrt{-g_{tt}(\kappa) - 2g_{t\phi}(\kappa)\Omega(\kappa) - g_{\phi\phi}(\kappa)\Omega^2(\kappa)}}. \quad (2.94)$$

2.14. Agujero negro estacionario acoplado con NLE

En Relatividad General y en otras teorías alternativas de la gravedad existen problemas y en particular en los fenómenos físicos de los agujeros negros, uno de ellos es la singularidad gravitacional, la cual esta presente dentro del horizonte de eventos, como lo son en las soluciones de Schwarzschild, Kerr o Kerr-Newman [11]. Ya que la singularidad del agujero negro es una región en donde la teoría de la relatividad general y otras teorías alternativas no funcionan, es necesario el uso de nuevas herramientas para evitar dicho problema [11].

2.14.1. Métrica simétricamente esférica

En 1998 fue presentada por primera vez la fuente de los agujeros negros tipo “Bardeen” [12] en donde se presenta el elemento de línea (2.93), este describe un agujero negro regular en donde la fuente es un campo electrodinámico no lineal

$$g = - \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{q^2 r^2}{(r^2 + q^2)^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{q^2 r^2}{(r^2 + q^2)^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.95)$$

donde el campo eléctrico asociado esta dado por

$$E = qr^4 \left(\frac{r^2 - 5q^2}{(r^2 + q^2)^4} + \frac{15}{2} \frac{m}{(r^2 + q^2)^{7/2}} \right). \quad (2.96)$$

Esta solución fue muy importante en su momento, ya que evitaba el problema de la singularidad, satisfacía la condición de energía débil y de forma asintótica se comportaba como la solución de Reissner-Nordström.

2.14.2. Métrica estacionaria con simetría axial

De forma similar a la métrica (2.93) surge una solución exacta para el caso estacionario con simetría axial, este presentando fenómenos más interesantes como lo puede ser la presencia de un disco de acreción, sin embargo, esta es singular al igual que la métrica de Kerr de anillo $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$. La métrica que representa este espaciotiempo esta dada de la siguiente forma [13]

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a^2 + r^2}{a} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{Q(r)} dr^2 - \frac{Q(r)}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2, \quad (2.97)$$

donde ρ esta definida tal que $\rho(\theta, r) := \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$ y $Q(r)$ tal que

$$Q(r) = \frac{\kappa F_0}{2} (1 - \beta r^2)^2 - 2Mr + r^2 + a^2, \quad (2.98)$$

$$F_0 = f_1 y_1 - g_1 x_1.$$

Esta solución esta caracterizada por cinco parámetros físicos, los cuales son su masa gravitacional M , las cargas magnéticas y eléctricas f_1 y g_1 descritas en F_0 , el parámetro que describe la electrodinámica no lineal (NLE) β y el momento angular a [14]. Al igual que la métrica de Kerr presenta un espaciotiempo axialsimétrico y estático.

Horizonte de eventos

El horizonte de eventos esta dado por las raíces polinómicas de $Q(r) = 0$ (ver 2.1), por las soluciones reales y positivas de [14]

$$\frac{\kappa F_0 \beta^2}{2} r^4 + (1 - \kappa F_0 \beta) r^2 - 2mr + \frac{\kappa F_0}{2} + a^2 = 0. \quad (2.99)$$

En general habrán 4 raíces dependiendo del valor de β y el signo del parámetro F_0 , para esto se analizarán dos casos, cuando F_0 es positivo o negativo

Para el caso $F_0 > 0$, el comportamiento es anti- de Sitter, y el campo electromagnético imita la constante cosmológica tal que [14]

$$\Lambda = -\frac{3}{2}\kappa F_0 \beta^2, \quad (2.100)$$

habrán dos valores posibles para r , $r_{1,2}^{crit}$ y dos valores para β , $\beta_{1,2}^{crit}$, en donde solo habrá una raíz real de $Q(r) = 0$, estos valores estarán determinados por $Q(r^{crit}, \beta^{crit}) = 0$ y $\partial_r Q(r^{crit}, \beta^{crit}) = 0$ [14], tal que

$$\begin{aligned} \frac{\kappa F_0 \beta^2}{2} r^4 + (1 - \kappa F_0 \beta) r^2 - 2mr + \frac{\kappa F_0}{2} + a^2 &= 0, \\ 2\kappa F_0 \beta^2 r^3 + 2(1 - \kappa F_0 \beta) r - 2m &= 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para la segunda expresión los valores de β pueden ser obtenidos tal que [14]

$$\beta_{1,2} = \frac{\kappa F_0 \pm \sqrt{\kappa F_0 [4(m-r)r + \kappa F_0]}}{2\kappa r^2 F_0} \quad (2.102)$$

Sustituyendo estos valores en la primera expresión de la ecuación (2.98) y resolviendo la ecuación cuadrática de r , obtenemos diferentes valores para β tal que [14]

- $-\beta < \beta_1^{crit}$ no tiene raíces reales.
- $-\beta = \beta_1^{crit}$ una raíz real positiva degenerada.
- $-\beta_1^{crit} < \beta < \beta_2^{crit}$ dos raíces reales positivas.
- $-\beta = \beta_2^{crit}$ una raíz real positiva degenerada.
- $-\beta > \beta_2^{crit}$ no tiene raíces reales.

El caso $F_0 < 0$ tiene un comportamiento asintótico de Sitter, y el campo electromagnético actúa como la constante cosmológica tal que [14]

$$\Lambda = -\frac{3}{2}\kappa F_0 \beta^2 \quad (2.103)$$

En este caso existen tres raíces reales, las cuales representan el horizonte interno, externo (horizonte de eventos) y el horizonte cosmológico [14].

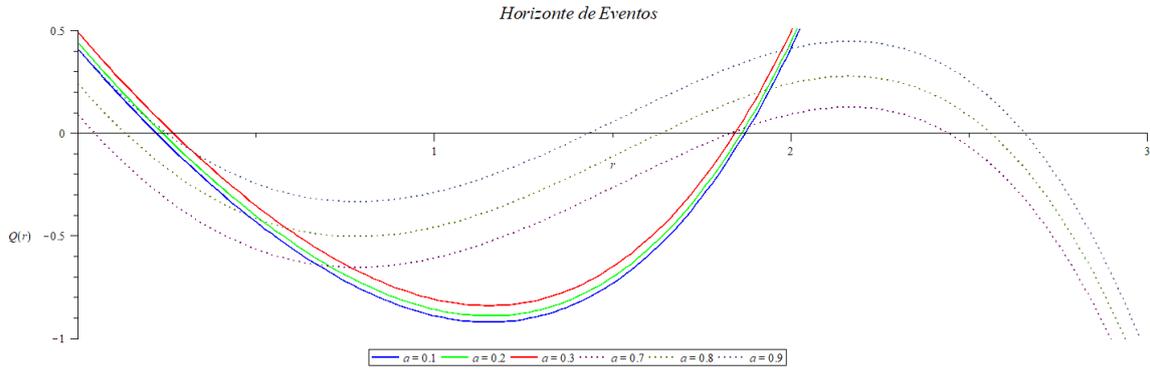


Figura 2.1: Las dos posibles asíntotas del agujero negro rotante estacionario soportado por electrodinámica no lineal. Dependiendo del signo de F_0 la asíntota es diferente, para F_0 positivos existen dos horizontes de eventos, interno y externo (línea sólida), mientras que para F_0 negativos la solución tiene 3 horizontes de eventos (línea punteada): interno, externo y cosmológico. Los parámetros fijos son $m = 1$; $\beta = 0,5$ y $F_0 = \pm 0,8$.

Capítulo 3

Metodologia

3.1. Disco de acreción delgado para la métrica de Kerr

Conforme la teoría y lo expuesto en la sección (2.12.6) es necesario contar con una métrica general para un espaciotiempo estacionario y con simetría axial (ecuacion 2.79), con la que es posible hallar las orbitas en el espacio ecuatorial. Dicho esto, se usó el elemento de linea (3.1) el cual corresponde a la métrica de Kerr escrita en coordenadas de Boyer-Lindsquist

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ y a es el momento angular.

3.1.1. Orbitas ecuatoriales para la métrica de Kerr

Para facilitar los procesos algebraicos se tomó la masa geométrica $M = 1$, al trabajar en orbitas ecuatoriales $\theta = \pi/2$ por lo que, los componentes de la métrica (3.1) son los siguientes

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \frac{2}{r}, \\ g_{t\phi} &= -\frac{2a}{r}, \\ g_{rr} &= \frac{r^2}{r^2 - 2r + a^2}, \\ g_{\theta\theta} &= r^2, \\ g_{\phi\phi} &= r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Derivando respecto a r se tiene que

$$\begin{aligned}
g_{tt,r} &= -\frac{2}{r^2}, \\
g_{t\phi,r} &= -\frac{2a}{r^2}, \\
g_{rr,r} &= \frac{2r}{a^2 + r^2 - 2r} - \frac{r^2(2r - 2)}{(a^2 + r^2 - 2r)^2}, \\
g_{\theta\theta,r} &= 2r, \\
g_{\phi\phi,r} &= 2r - \frac{2a^2}{r^2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Reescribiendo los componentes en su forma matricial, y sacando el determinante de esta se tiene que

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{r} & 0 & 0 & -\frac{2a}{r} \\ 0 & \frac{r^2}{r^2 - 2r + a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{2a}{r} & 0 & 0 & r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

resolviendo se tiene que

$$g = -r^4. \tag{3.5}$$

Considerando la ecuación (2.86) de la sección (2.12.6) la cual describe la velocidad angular para partículas de prueba en la orbita ecuatorial circular y reemplazando las derivadas de los componentes g_{tt} , $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ de la métrica anteriormente expuesta (3.1) en la velocidad angular, se tiene lo siguiente.

$$\Omega = -\frac{\sqrt{\frac{1}{r}r^2 - a}}{-r^3 + a^2}. \tag{3.6}$$

Una vez calculada Ω , se halla tanto la Energía específica \tilde{E} (ecuación 2.87) como el momento angular específico \tilde{L} (ecuación 2.88)

$$\tilde{E} = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{r}ar + r^3 - a^2 - 2r^2}}{(-r^3 + a^2) \sqrt{\frac{r^2(2\sqrt{\frac{1}{r}}a^3 + 6\sqrt{\frac{1}{r}}ar^2 + r^4 - 3a^2r - 3r^3 - 3a^2)}{(-r^3 + a^2)^2}}}, \tag{3.7}$$

$$\tilde{L} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{r}a^2r^2 + \sqrt{\frac{1}{r}r^4} + 2\sqrt{\frac{1}{r}a^2r - a^3 - 3ar^2}}{(-r^3 + a^2) \sqrt{\frac{r^2(2\sqrt{\frac{1}{r}}a^3 + 6\sqrt{\frac{1}{r}}ar^2 + r^4 - 3a^2r - 3r^3 - 3a^2)}{(-r^3 + a^2)^2}}}. \tag{3.8}$$

A partir de Ω , \tilde{E} y \tilde{L} es posible hallar la orbita circular estable a partir de la segunda derivada del potencial efectivo $V_{\text{eff},rr}$, pero, para el caso particular de Kerr es posible hallar dicha orbita a partir de la ecuación (2.90), que en este caso tendrá una pequeña variación ya que estamos considerando la masa geométrica

$$\begin{aligned}
r_{\text{ISCO}} &= 3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \\
Z_1 &= 1 + (1 - a^2)^{1/3} [(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}], \\
Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.1.2. Modelo de Novikov-Thorne para la métrica de Kerr

Para analizar las características físicas de los discos de acreción y en particular los que se forman en el agujero negro de Kerr, es esencial usar las expresiones descritas en la sección (2.13), como lo son el flujo de energía radiante $F(r)$ y la temperatura $T(r)$

$$F(r) = -\frac{\dot{M}_0 \Omega_r c^2}{4(r_g)^2 \pi \sqrt{-g} (\tilde{E} - \Omega \tilde{L})^2} \int_{r_{\text{ISCO}}}^r \left(\tilde{E}(\kappa) - \Omega(\kappa) \tilde{L}(\kappa) \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \tilde{L} d\kappa, \tag{3.10}$$

$$F(r) = \sigma_{SB} T(r)^4, \tag{3.11}$$

para recuperar la dimensionalidad ignorada en las orbitas ecuatoriales, es esencial añadir a estas cantidades las siguientes consideraciones, primero multiplicar el flujo de energía radiante por la velocidad de la luz al cuadrado, y segundo dividirla por el factor r_g y elevarlo al cuadrado, dicho factor viene dada de la siguiente forma

$$r_g = \frac{MG}{c^2} \tag{3.12}$$

donde M es la masa del agujero negro, G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. Para calcular $F(r)$ es necesario tener la primera derivada de la velocidad angular $\Omega(r)$ y del momento angular específico \tilde{L}

$$\Omega_r = \frac{3}{2} \frac{2\sqrt{\frac{1}{r}} ar^2 - r^3 - a^2}{(h_1)^2 \sqrt{\frac{1}{r}}}, \tag{3.13}$$

$$\tilde{L}_r = -\frac{h_5}{h_1 \sqrt{r^2 h_2}} - \frac{3r^2 h_3}{(h_1)^2 \sqrt{r^2 h_2}} + \frac{h_3}{2h_1} \frac{2rh_2 + r^2 h_4 + 6r^4 \frac{h_2}{h_1}}{(r^2 h_2)^{3/2}}, \tag{3.14}$$

con

$$\begin{aligned}
h_1 &= -r^3 + a^2, \\
h_2 &= \frac{2\sqrt{\frac{1}{r}} a^3 + 6\sqrt{\frac{1}{r}} ar^2 + r^4 - 3a^2 r - 3r^3 - 3a^2}{(h_1)^2}, \\
h_3 &= \sqrt{\frac{1}{r}} a^2 r^2 + \sqrt{\frac{1}{r}} r^4 + 2\sqrt{\frac{1}{r}} a^2 r - a^3 - 3ar^2, \\
h_4 &= \frac{-\frac{a^3}{\sqrt{\frac{1}{r} r^2}} - \frac{3a}{\sqrt{\frac{1}{r}}} + 12\sqrt{\frac{1}{r}} ar + 4r^3 - 3a^2 - 9r^2}{(h_1)^2}, \\
h_5 &= -\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{r}}} + 2\sqrt{\frac{1}{r}} a^2 r - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\sqrt{\frac{1}{r}}} + 4\sqrt{\frac{1}{r}} r^3 - \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{r}}} + 2\sqrt{\frac{1}{r}} a^2 - 6ar.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Con las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.8), (3.13), (3.14) y conociendo el ISCO es posible conocer los aspectos físicos del disco de acreción, ya que reemplazando estos en (3.10) y (3.11), obtenemos el flujo de energía y la temperatura; el comportamiento de dichas cantidades físicas serán discutidas en la sección (4.1) en donde se mostraran las gráficas que describen dichas magnitudes.

3.2. Disco de acreción delgado para la métrica de Kerr-Newman

Del mismo modo que en la sección (3.1.) es necesario contar con un elemento de línea con el cual sea posible hallar órbitas en el espacio ecuatorial, para esto se contara con con la métrica (3.16), la cual corresponde a la métrica de Kerr-Newman escrita en coordenadas de Boyer-Lindquist.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4ar \sin^2 \theta (M - Q^2/(2r))}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 r \sin^2 \theta (M - Q^2/(2r))}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.16)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2r(M - Q^2/(2r)) + a^2$, Q es la carga del agujero negro y a es el momento angular.

3.2.1. Órbitas ecuatoriales para la métrica de Kerr-Newman

Para facilitar los procesos algebraicos se tomara la masa geométrica $M = 1$, ya que se trabajara en órbitas circulares ecuatoriales $\theta = \pi/2$, por lo tanto los componentes de la métrica (3.16) son los siguientes

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \frac{2}{r} - \frac{Q}{r^2}, \\ g_{t\phi} &= -\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2}, \\ g_{rr} &= \frac{r^2}{\gamma}, \\ g_{\theta\theta} &= r^2, \\ g_{\phi\phi} &= r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2Q^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

siendo $\gamma = 2Q^2 + a^2 + r^2 - 2r$. Para cálculos posteriores es necesario contar con las primeras y segundas derivadas de los componentes de la métrica, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 g_{tt,r} &= -\frac{2}{r^2} + \frac{aQ^2}{r^3}, \\
 g_{t\phi,r} &= -\frac{2a}{r^2} - \frac{2aQ^2}{r^3}, \\
 g_{rr,r} &= \frac{2r}{\gamma} - \frac{r^2(2r-2)}{\gamma^2}, \\
 g_{\theta\theta,r} &= 2r, \\
 g_{\phi\phi,r} &= 2r - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{2a^2Q^2}{r^3},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

y

$$\begin{aligned}
 g_{tt,rr} &= \frac{4}{r^3} - \frac{6Q}{r^4}, \\
 g_{t\phi,rr} &= -\frac{4a}{r^3} + \frac{6aQ^2}{r^4}, \\
 g_{rr,rr} &= \frac{2}{\gamma} - \frac{2r(5r-4)}{\gamma^2} + \frac{2r^2(2r-2)^2}{\gamma^3}, \\
 g_{\theta\theta,rr} &= 2, \\
 g_{\phi\phi,rr} &= 2 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{2a^2(2+r)}{r^3} - \frac{6a^2Q^2}{r^4},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora para hallar el determinante de los componentes de la métrica, es necesario reescribir estos en su forma matricial, tal que

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{r} - \frac{Q}{r^2} & 0 & 0 & -\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \\ 0 & \frac{r^2}{r^2+a^2+2Q^2-2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} & 0 & 0 & r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2Q^2}{r^2} \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

$$g = -\frac{Q^4a^2 - Q^2a^2r^2 + a^2r^4 + r^6 - Q^3a^2 - 2Q^2a^2r + Qa^2r^2 + Qr^4 - 2r^5 + 2Qa^2r}{Q^2 + a^2 + r^2 - 2r}, \tag{3.21}$$

siendo g el determinante de la métrica. Para verificar que el determinante es correcto, este debe recuperar Kerr (ec 3.5), para lo cual $Q = 0$, en ese caso la ecuación (3.21) toma la siguiente forma

$$g|_{Q=0} = -\frac{a^2r^4 + r^6 - 2r^5}{a^2 + r^2 - 2r} \tag{3.22}$$

simplificando se tiene que

$$g|_{Q=0} = -\frac{r^4(a^2 + r^2 - 2r)}{a^2 + r^2 - 2r} \tag{3.23}$$

por lo tanto

$$g|_{Q=0} = -r^4 \tag{3.24}$$

Considerando la ecuación (2.86) de la sección (2.12.6) la cual describe la velocidad angular para partículas de prueba en la orbita ecuatorial circular y reemplazando las derivadas de las componentes g_{tt} , $g_{\phi\phi}$ y $g_{t\phi}$ (ecuación 3.18) en la velocidad angular, se tiene lo siguiente

$$\Omega = \frac{\sqrt{\frac{Q^4 a^2 - Q^3 a^2 - Q^2 a^2 r - Q r^4 + r^5 + Q a^2 r}{r^6}} r^3 + a Q^2 - a r}{Q^2 a^2 + r^4 - a^2 r}. \quad (3.25)$$

Una vez calculada Ω , es posible calcular la energá especifica \tilde{E} (ecuación 2.87) y el momento angular especifico \tilde{L} (ecuación 2.88)

$$\tilde{E} = -\frac{\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) - 1 + \frac{2}{r} - \frac{Q}{r^2}}{\sqrt{\Omega^2 \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - 2\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) + 1 - \frac{2}{r} + \frac{Q}{r^2}}}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{L} = -\frac{\Omega \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - \frac{2a}{r} - \frac{aQ^2}{r^2}}{\sqrt{\Omega^2 \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - 2\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) + 1 - \frac{2}{r} + \frac{Q}{r^2}}}. \quad (3.27)$$

A partir de Ω , \tilde{L} y \tilde{E} es posible hallar el ISCO, igualando a cero la segunda derivada del potencial efectivo y evaluando esta en r_{ISCO} , $V_{\text{eff},rr} |_{r=r_{\text{ISCO}}} = 0$, tal que

$$r_{\text{ISCO}} = \left[\tilde{E}^2 g_{\phi\phi,rr} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi,rr} + \tilde{L}^2 g_{tt,rr} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})_{,rr} \right] |_{r=r_{\text{ISCO}}} = 0. \quad (3.28)$$

3.2.2. Modelo de Novikov-Thorne para la métrica de Kerr-Newman

Al obtener el comportamiento del gas (partículas de prueba) en las orbitas circulares ecuatoriales, es posible analizar las características físicas del disco de acreción formado por este, y en este caso particular los formados en el agujero negro de Kerr-Newman. Para ello es necesario contar con las cantidades descritas en la sección 3.2.1 y las primeras derivadas de la velocidad angular Ω y del momento angular especifico \tilde{L} .

$$\Omega_r = \frac{\frac{r^3 f_1}{2f_2} + 3f_2 r^2 - a}{f_3} - \frac{(f_2 r^3 + aQ^2 - ar)(4r^3 - a^2)}{(f_3)^2}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{L}_r = \frac{f_4 g_{\phi\phi} - \Omega f_3 f_6 g_{\phi\phi} + \Omega f_5 + g_{t\phi,r}}{\sqrt{\Omega^2 g_{\phi\phi} - 2\Omega g_{t\phi} - g_{tt}}} - \frac{(\Omega g_{\phi\phi} - g_{t\phi}) f_7}{2(\Omega^2 g_{\phi\phi} - 2\Omega g_{t\phi} - g_{tt})^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.30)$$

donde

$$f_1 = \frac{-Q^2 a^2 - 4Qr^3 + 5r^4 + Qa^2}{r^6} - \frac{6(Q^4 a^2 - Q^3 a^2 - Q^2 a^2 r - Qr^4 + r^5 + Qa^2 r)}{r^7}, \quad (3.31)$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{Q^4 a^2 - Q^3 a^2 - Q^2 a^2 r - Qr^4 + r^5 + Qa^2 r}{r^6}}, \quad (3.32)$$

$$f_3 = Q^2 a^2 + r^4 - a^2 r, \quad (3.33)$$

$$f_4 = \frac{\frac{r^3 f_1}{2f_2} + 3f_2 r^2 - a}{f_3}, \quad (3.34)$$

$$f_5 = 2r + \frac{a^2}{r} - \frac{a^2(2+r)}{r^2} + \frac{2a^2 Q^2}{r^3}, \quad (3.35)$$

$$f_6 = 4r^3 - a^2, \quad (3.36)$$

$$f_7 = -\Omega f_3^2 f_4 g_{\phi\phi} + 2\Omega^2 f_3 f_6 g_{\phi\phi} - \Omega^2 f_5 - 2f_4 g_{t\phi} + 2\Omega f_3 g_{t\phi} f_6 - 2\Omega g_{t,r} + \frac{g_{t\phi,r}}{a}. \quad (3.37)$$

Con las ecuaciones (3.21), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), dándole valores a a y a Q y reemplazando en las siguientes ecuaciones es posible conocer los aspectos físicos del disco de acreción en un agujero negro de Kerr-Newman, como lo son el flujo de energía a través de las caras del disco y la temperatura

$$F(r) = -\frac{\dot{M}_0 \Omega_r}{4\pi \sqrt{-g} (\tilde{E} - \Omega \tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isico}}}^r \left(\tilde{E}(\kappa) - \Omega(\kappa) \tilde{L}(\kappa) \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \tilde{L} d\kappa, \quad (3.38)$$

$$F(r) = \sigma_{SB} T(r)^4, \quad (3.39)$$

para recuperar la dimensionalidad ignorada en las orbitas ecuatoriales, es esencial añadir a estas cantidades las siguientes consideraciones, primero multiplicar el flujo de energía radiante por la velocidad de la luz al cuadrado, y segundo dividirla por el factor r_g y elevarlo al cuadrado, dicho factor viene dada de la siguiente forma

$$r_g = \frac{MG}{c^2}, \quad (3.40)$$

donde M es la masa del agujero negro, G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz.

3.3. Disco de acreción delgado para agujeros negros acoplados con NLE

El elemento de línea que describe esta solución viene dada por la siguiente ecuación

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a^2 + r^2}{a} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{Q(r)} dr^2 - \frac{Q(r)}{\rho^2} \left(dt - a \sin^2 \theta d\phi \right)^2, \quad (3.41)$$

donde ρ esta definida tal que $\rho(\theta, r) := \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$ y $Q(r)$ tal que

$$Q(r) = \frac{\kappa F_0}{2} (1 - \beta r^2)^2 - 2mr + r^2 + a^2, \quad (3.42)$$

$$F_0 = f_1 y_1 - g_1 x_1.$$

3.3.1. Órbitas ecuatoriales para agujeros negros acoplados con NLE

Para el cálculo de las órbitas, consideraremos lo siguiente: la masa geométrica $m = 1$ y al estar en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Por consiguiente, los componentes covariantes de la métrica (3.41) son

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -\frac{Q - a^2}{r^2}, \\
g_{t\phi} &= \frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a, \\
g_{rr} &= \frac{r^2}{Q(r)}, \\
g_{\theta\theta} &= r^2, \\
g_{\phi\phi} &= \frac{(r^2 + a^2)^2}{r^2} - \frac{a^2Q}{r^2},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

considerando las primeras y segundas derivadas, tenemos

$$\begin{aligned}
g_{tt,r} &= -\frac{Q_r}{r^2} + \frac{2(Q - a^2)}{r^3}, \\
g_{t\phi,r} &= \frac{a(F_0\beta^2r^4 - F_0 + 2r)}{r^3}, \\
g_{rr,r} &= \frac{2r}{Q} - \frac{r^2Q_r}{Q^2}, \\
g_{\theta\theta,r} &= 2r, \\
g_{\phi\phi,r} &= -\frac{F_0a^2\beta^2r^4 - 2r^4 - F_0a^2 + 2a^2r}{r^3},
\end{aligned} \tag{3.44}$$

y

$$\begin{aligned}
g_{tt,rr} &= -\frac{Q_{rr}}{r^2} + \frac{4Q_r}{r^3} - \frac{6Q}{r^4}, \\
g_{t\phi,rr} &= \frac{a(F_0\beta^2r^4 + 3F_0 - 4r)}{r^4}, \\
g_{rr,rr} &= \frac{2}{Q} - \frac{r(4Q_r - rQ_{rr})}{Q^2} + \frac{2r^2(Q_r)^2}{Q^3}, \\
g_{\theta\theta,rr} &= 2, \\
g_{\phi\phi,rr} &= -\frac{F_0a^2\beta^2r^4 - 2r^4 + 3F_0a^2 - 4a^2r}{r^4},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde $Q_r = -2\kappa F_0(-\beta r^2 + 1)\beta r - 2 + 2r$ y $Q_{rr} = 4\kappa F_0\beta^2r^2 - 2\kappa F_0(-\beta r^2 + 1)\beta + 2$ siendo las primeras y segundas derivadas de $Q(r)$ respectivamente.

Reescribiendo los componentes en su forma matricial y obteniendo su determinante tenemos que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{Q-a^2}{r^2} & 0 & 0 & \frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a \\ 0 & \frac{r^2}{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ \frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a & 0 & 0 & \frac{(r^2+a^2)^2}{r^2} - \frac{a^2Q}{r^2} \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

$$g = -r^4, \quad (3.47)$$

siendo g el determinante de la métrica¹. Considerando la ecuación (2.86) de la sección (2.12.6) la cual describe la velocidad angular para partículas de prueba en la orbita circular ecuatorial y reemplazando las derivadas de las componentes g_{tt} , $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ (ecuación 3.41) en la velocidad angular, se tiene lo siguiente

$$\Omega = \frac{F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{F_0 \beta^2 \kappa r^4 - F_0 \kappa + 2r}{r^2} r^3 - F_0 a \kappa + 2ar}}{F_0 a^2 \beta^2 \kappa r^4 - F_0 a^2 \kappa - 2r^4 + 2a^2 r}. \quad (3.48)$$

Una vez obtenido Ω , es posible calcular la energía específica \tilde{L} (ecuación 2.85) y el momento angular específico \tilde{E} (ecuación 2.86)

$$\tilde{E} = -\frac{-\frac{Q-a^2}{r^2} + \Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right)}{\sqrt{-\frac{Q-a^2}{r^2} - 2\Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right) - \Omega^2\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{L} = \frac{\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a + \Omega\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{Q-a^2}{r^2} - 2\Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right) - \Omega^2\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}}. \quad (3.50)$$

A partir de Ω , \tilde{L} y \tilde{E} es posible hallar el ISCO, igualando a cero la segunda derivada del potencial efectivo y evaluando esta en r_{ISCO} , $V_{\text{eff},rr} |_{r=r_{\text{isco}}} = 0$, tal que

$$r_{\text{ISCO}} = \left[\tilde{E}^2 g_{\phi\phi,rr} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi,rr} + \tilde{L}^2 g_{tt,rr} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})_{,rr} \right] |_{r=r_{\text{isco}}} = 0. \quad (3.51)$$

3.3.2. Modelo de Novikov-Thorne para agujeros negros soportados en NLE

Para describir las propiedades físicas del disco de acreción, como lo son el flujo de energía $F(r)$ y la temperatura $T(r)$, es necesario contar con las cantidades físicas de las partículas de prueba descritas en la sección anterior (3.3.1.), además de las primeras derivadas de la velocidad angular Ω y el momento angular específico \tilde{L} .

$$\Omega_r = \frac{4F_0 a \beta^2 \kappa r^3 - \frac{\sqrt{2}r^3}{2} A_2 - 3\sqrt{2}r^2 A_1 + 2a - \Omega A_4}{A_3}, \quad (3.52)$$

$$L_r = \frac{\Omega_{,r} g_{\phi\phi} + \Omega g_{\phi\phi,r} + g_{t\phi,r}}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}} - \frac{(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega) \left(-2\Omega\Omega_{,r} g_{\phi\phi} + \frac{2g_{\phi\phi}\Omega^2 A_4}{A_3} - \Omega^2 g_{\phi\phi,r} - 2g_{t\phi}\Omega_{,r} + \frac{2g_{t\phi}\Omega A_4}{A_3} - 2\Omega g_{t\phi,r} + g_{tt,r} \right)}{(-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.53)$$

donde

¹Para ver el proceso paso a paso, ir al apéndice A.1.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sqrt{\frac{F_0\beta^2\kappa r^4 - F\kappa + 2r}{r^2}}, \\
A_2 &= \frac{\left(\frac{4F_0b^2\kappa r^3 + 2}{r^2} - \frac{2(F_0\beta^2\kappa r^4 - F_0\kappa + 2r)}{r^3}\right)}{A_1}, \\
A_3 &= F_0a^2\beta^2\kappa r^4 - F_0a^2\kappa - 2a^4 - 2r^4 + 2a^2r, \\
A_4 &= 4F_0a^2\beta^2\kappa r^3 - 8r^3 + 2a^2.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Una vez obtenidas las derivadas de la velocidad angular y el momento angular específico, las magnitudes físicas calculadas en la sección anterior (3.3.1) y dándole valores a las constantes β , F_0 , a , m y k es posible hallar el flujo de energía $F(r)$ y la temperatura $T(r)$

$$F(r) = -\frac{\dot{M}_0\Omega_r}{4\pi\sqrt{-g}(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r \left(\tilde{E}(\kappa) - \Omega(\kappa)\tilde{L}(\kappa)\right) \frac{\partial}{\partial\kappa} \tilde{L} d\kappa, \tag{3.55}$$

$$F(r) = \sigma_{SB}T(r)^4. \tag{3.56}$$

Para recuperar la dimensionalidad ignorada en las orbitas ecuatoriales, es esencial añadir a estas cantidades las siguientes consideraciones, primero multiplicar el flujo de energía radiante por la velocidad de la luz al cuadrado, y segundo dividirla por el factor r_g y elevarlo al cuadrado, dicho factor viene dada de la siguiente forma

$$r_g = \frac{MG}{c^2}, \tag{3.57}$$

donde M es la masa del agujero negro, G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz.

3.4. Método computacional

Para la solución de todas las ecuaciones de la sección 3 y la obtención de las gráficas expuestas en la sección 4 fueron empleadas herramientas computacionales, específicamente el software Maple 18, en donde se introdujeron las ecuaciones de las orbitas circulares ecuatoriales $\Omega(r)$, $\tilde{E}(r)$, $\tilde{L}(r)$, $V_{\text{eff,rr}}$ para cada una de las métricas, posteriormente, se introdujo las formulas del modelo de Novikov-Thorne $F(r)$, $T(r)$ y ϵ . No se empleo ningún método computacional en específico para la solución de las integrales, ya que el software Maple fue suficiente para la solución de las mismas

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1. Resultado 1: Agujero negro de Kerr

4.1.1. Orbitas ecuatoriales

Considerando las magnitudes obtenidas para la métrica de Kerr en la sección (3.1.1), las cuales son

$$\Omega = -\frac{\sqrt{\frac{1}{r}r^2 - a}}{-r^3 + a^2} \quad (4.1)$$

$$\tilde{E} = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{r}ar} + r^3 - a^2 - 2r^2}{(-r^3 + a^2) \sqrt{\frac{r^2(2\sqrt{\frac{1}{r}}a^3 + 6\sqrt{\frac{1}{r}}ar^2 + r^4 - 3a^2r - 3r^3 - 3a^2)}{(-r^3 + a^2)^2}}} \quad (4.2)$$

$$\tilde{L} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{r}a^2r^2} + \sqrt{\frac{1}{r}r^4} + 2\sqrt{\frac{1}{r}a^2r} - a^3 - 3ar^2}{(-r^3 + a^2) \sqrt{\frac{r^2(2\sqrt{\frac{1}{r}}a^3 + 6\sqrt{\frac{1}{r}}ar^2 + r^4 - 3a^2r - 3r^3 - 3a^2)}{(-r^3 + a^2)^2}}} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} r_{\text{ISCO}} &= 3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \\ Z_1 &= 1 + (1 - a^2)^{1/3} [(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}], \\ Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estas nos indican las propiedades físicas del gas que se junta al rededor del agujero negro, como lo es su velocidad angular Ω , su energía específica \tilde{E} , su momento angular específico \tilde{L} y la ubicación del ISCO para un valor dado del parámetro de rotación a . Se consideran orbitas co-rotantes (signo positivo), esto quiere decir que el momento angular es paralelo al spin del agujero negro, por lo que el gas seguirá la misma dirección de la rotación del agujero negro. Considerando que el disco rota lentamente (el parámetro de rotación a es pequeño) y la masa

del agujero negro $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ propuesta en [5] se tienen las siguientes representaciones gráficas.

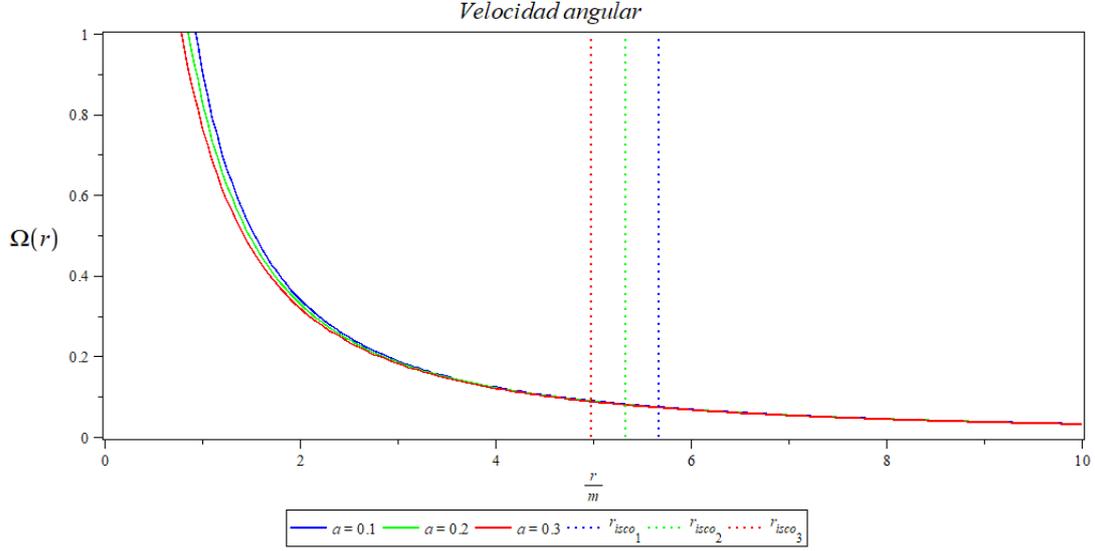


Figura 4.1: La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.

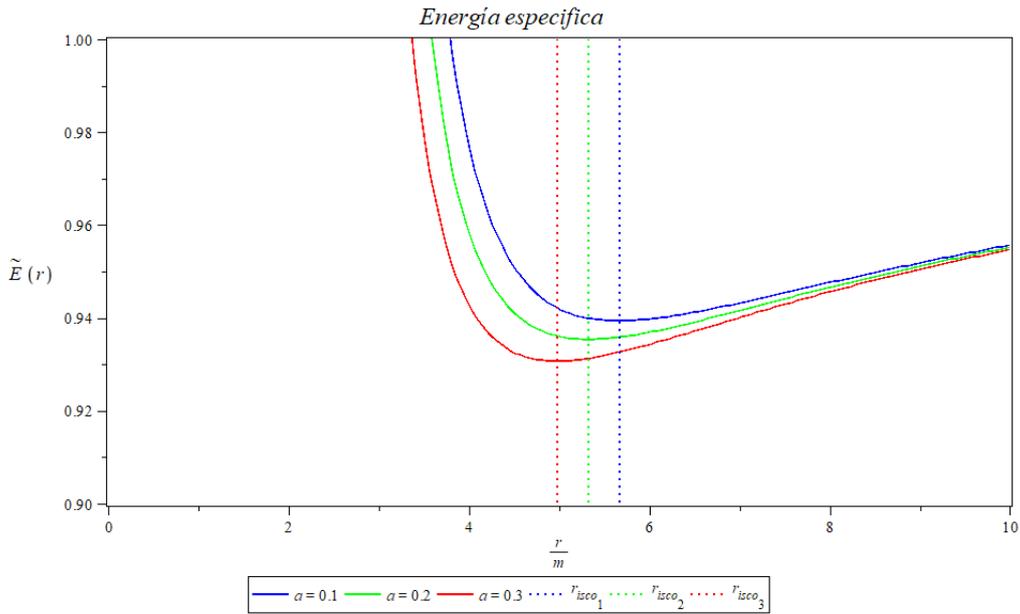


Figura 4.2: La Energía específica $\tilde{E}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.

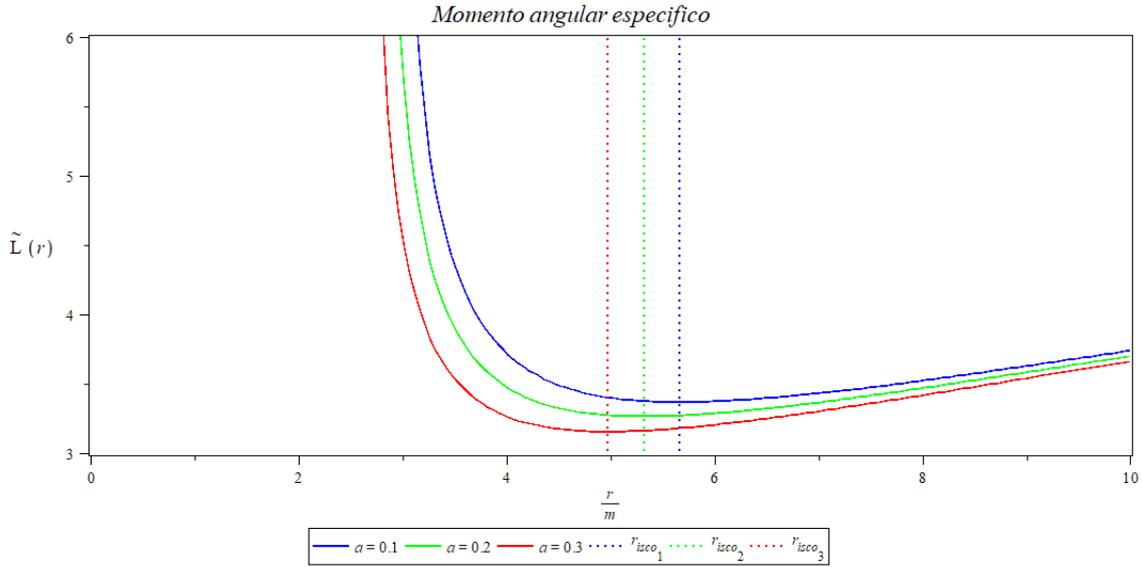


Figura 4.3: El momento angular especifico $\tilde{L}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_{\odot}$ mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de a . Las líneas verticales punteadas representan la ubicación del ISCO en cada caso.

Las figuras 4.1, 4.2, 4.3 muestran la velocidad angular, la energía específica y el momento angular específico de las partículas de prueba que rotan alrededor de un agujero negro de Kerr para diferentes valores de a , respectivamente. En primer lugar podemos ver que al tomar valores más grandes del parámetro de rotación las cantidades decrecen, teniendo mínimos cada vez más pequeños, por otra parte podemos observar como el ISCO se vuelve cada vez más grande, cuando a es más pequeño, esto nos indica que entre más rápido rote el agujero negro, las partículas de gas y polvo se pueden acercar cada vez más al agujero negro, siendo la proximidad más cercana cuando $a = m$, la cual corresponde al caso extremo. El ISCO es determinado a partir de la segunda derivada del potencial igualada a cero (ecuación 2.87 sección 2.12.6), por lo que el comportamiento de V_{eff} se ve representado en la figura 4.4 para diferentes valores de a . Como es evidente, para valores más grandes de a el ISCO va decreciendo siendo más pequeño en $a = m$, cabe recalcar que el ISCO está determinado en los cortes del potencial cuando este es cero.

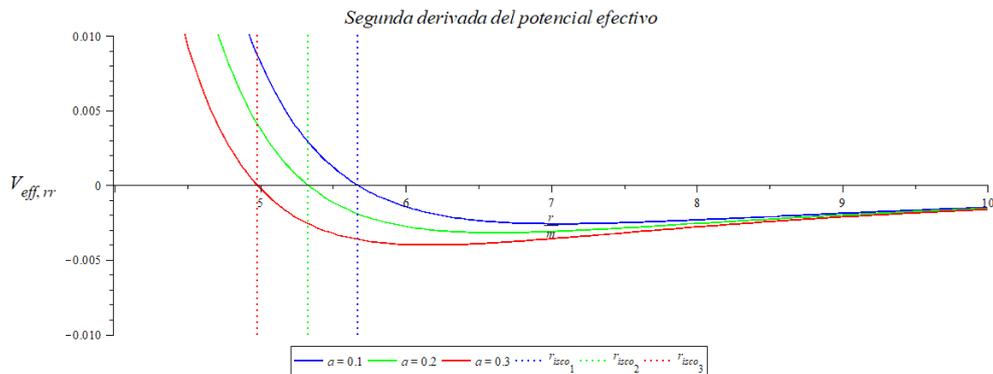


Figura 4.4: La segunda derivada del potencial efectivo para la métrica de Kerr, para diferentes valores de a . Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

Una magnitud importante es la capacidad del agujero negro de convertir la masa en reposo en radiación, esta viene dada de la siguiente manera, siempre y cuando la absorción del agujero negro sea despreciable,

$$\epsilon = 1 - \tilde{E}_{isco} \quad (4.5)$$

donde \tilde{E}_{isco} es la energía específica de las partículas de prueba medidas en el ISCO. Para ello en el cuadro 4.1 se presentan los resultados de la eficiencia radiativa ϵ para distintos valores de a .

a	$\frac{r_+}{m}$	$\frac{r_{isco}}{m}$	ϵ
0,1	1,995	5,669	0,0606
0,2	1,980	5,329	0,0646
0,3	1,954	4,978	0,0694

Cuadro 4.1: r_{isco} del disco de acreción y la eficiencia para un agujero negro de Kerr

Se observa que entre mayor sea el parámetro de rotación disminuye el horizonte de eventos exterior, esto es gracias a que la métrica de Kerr recupera Schwarzschild cuando $a = 0$, es allí cuando el horizonte es $2M$. Sucede lo mismo para el ISCO, cuando $a = 0$ el ISCO es $6M$ que es el valor que toma para la métrica de Schwarzschild. Lo importante de aumentar el parámetro de rotación viene cuando analizamos la eficiencia radiativa, ya que esta incrementa al incrementar el parámetro siendo 6% para $a = 0,1$ y $6,9\%$ para $a = 0,3$, esto nos indica que entre más rápido rote el agujero negro, mejor sera su capacidad de transformar materia en reposo en radiación, esto para el caso co-rotante.

4.1.2. Propiedades físicas del disco de acreción

Para mostrar la distribución del flujo de energía para el agujero negro de Kerr, consideraremos la masa total y el ratio de acreción de [5], la cual es $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ y $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$, respectivamente, que en unidades de acreción de Eddington es $\dot{M} = 3,36 \times 10^{-4} M_{\text{Edd}}$, la cual esta en el rango para agujeros súper masivos.

Teniendo en cuenta lo expuesto en [15] en donde se presenta una relación entre la parte interior del disco (ISCO) y la parte exterior del disco r_{out} se tiene que $\chi = \frac{r_{out}}{r_{in}}$, en donde χ puede ser fijado a un valor arbitrario, por ejemplo $\chi = 10$, esto nos indicaría que el disco de acreción terminaría en $r_{out} = 10r_{in}$, dependiendo este del valor del ISCO. Por otro lado, el disco podría ser infinito, siempre y cuando hubiera infinito gas alrededor de él, sin embargo entre más grande sea el disco, cuando $r \rightarrow r_{out}$ este sera más opaco, esto puede ser apreciado, tanto en el flujo de energía, como en la temperatura, que a radios mayores estos valores disminuyen.

El flujo de energía sobre las caras del disco esta dado por la figura 4.5 en donde se varia el parámetro de rotación de 0,1 a 0,3,

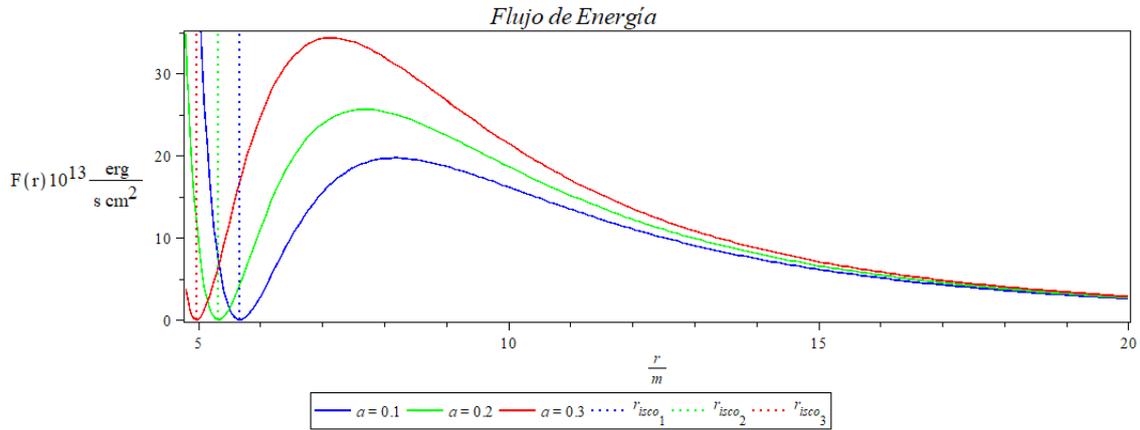


Figura 4.5: El flujo de energía $F(r)$ de un disco alrededor de un agujero negro de Kerr con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, para distintos valores de a . La línea vertical punteada representa el ISCO para cada caso.

como podemos observar para valores mayores de a la energía procedente del disco es mayor, esto se debe a que el agujero negro presenta una mayor eficiencia radiativa, juntando más masa y transformando dicha masa en radiación (energía).

El comportamiento de la temperatura del disco es mostrada en la figura 4.6 donde podemos observar que aumentando el parámetro de rotación a , aumenta la temperatura. Siendo su punto máximo cerca al borde interior del disco.

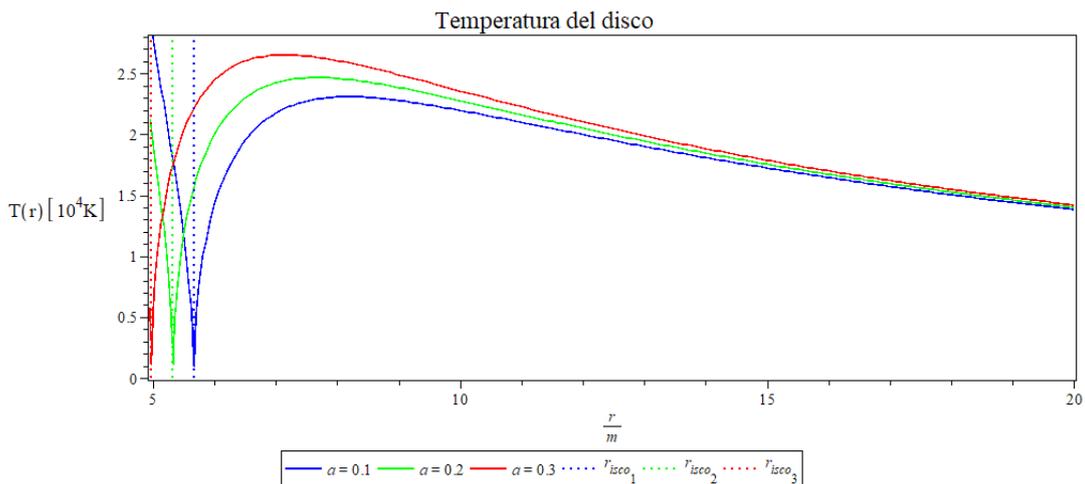


Figura 4.6: La temperatura del disco $T(r)$ para un agujero negro de Kerr con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, para distintos valores de a . La línea vertical punteada representa el ISCO para cada caso

Se analizo de manera aproximada donde está ubicado el valor máximo tanto del flujo de energía como el de la temperatura y para ello se construyo el siguiente cuadro

a	$\frac{r_{isco}}{m}$	$\frac{r_{Fmax}}{m}$	$\frac{r_{Tmax}}{m}$
0,1	5,669	8,1624	8,1802
0,2	5,329	7,7005	7,6339
0,3	4,978	7,1707	7,1712

Cuadro 4.2: Ubicación del flujo y la temperatura máxima del disco de acreción para un agujero negro de Kerr

se puede observar que no hay una correlación entre la localización del punto máximo del flujo de energía y la temperatura. Primero, los valores no son iguales (aunque hayan sido hallados de manera aproximada) segundo, la localización del punto maximo de la temperatura no siempre se da a una distancia mayor, esto se puede ver en $a = 0,2$ donde la ubicación de la temperatura es menos comparada con la del flujo.

4.2. Resultado 2: Agujero negro de Kerr-Newman

4.2.1. Órbitas ecuatoriales

Considerando las magnitudes obtenidas para la métrica de Kerr-Newman en la sección (3.2.1), las cuales son

$$\Omega = \frac{\sqrt{Q^4 a^2 - Q^3 a^2 - Q^2 a^2 r - Q r^4 + r^5 + Q a^2 r} r^3 + a Q^2 - a r}{Q^2 a^2 + r^4 - a^2 r}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{E} = -\frac{\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) - 1 + \frac{2}{r} - \frac{Q}{r^2}}{\sqrt{\Omega^2 \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - 2\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) + 1 - \frac{2}{r} + \frac{Q}{r^2}}}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{L} = -\frac{\Omega \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - \frac{2a}{r} - \frac{aQ^2}{r^2}}{\sqrt{\Omega^2 \left(r^2 + \frac{a^2(2+r)}{r} - \frac{a^2 Q^2}{r^2} \right) - 2\Omega \left(-\frac{2a}{r} + \frac{aQ^2}{r^2} \right) + 1 - \frac{2}{r} + \frac{Q}{r^2}}}, \quad (4.8)$$

Estas nos indican las propiedades físicas del gas que se junta al rededor del agujero negro de Kerr-Newman, como lo son su velocidad angular Ω , su energía específica \tilde{E} y su momento angular específico \tilde{L} , al igual que en los resultados de Kerr, se consideran orbitas co-rotantes. Considerando que el agujero rota lentamente, se tiene las siguientes representaciones gráficas

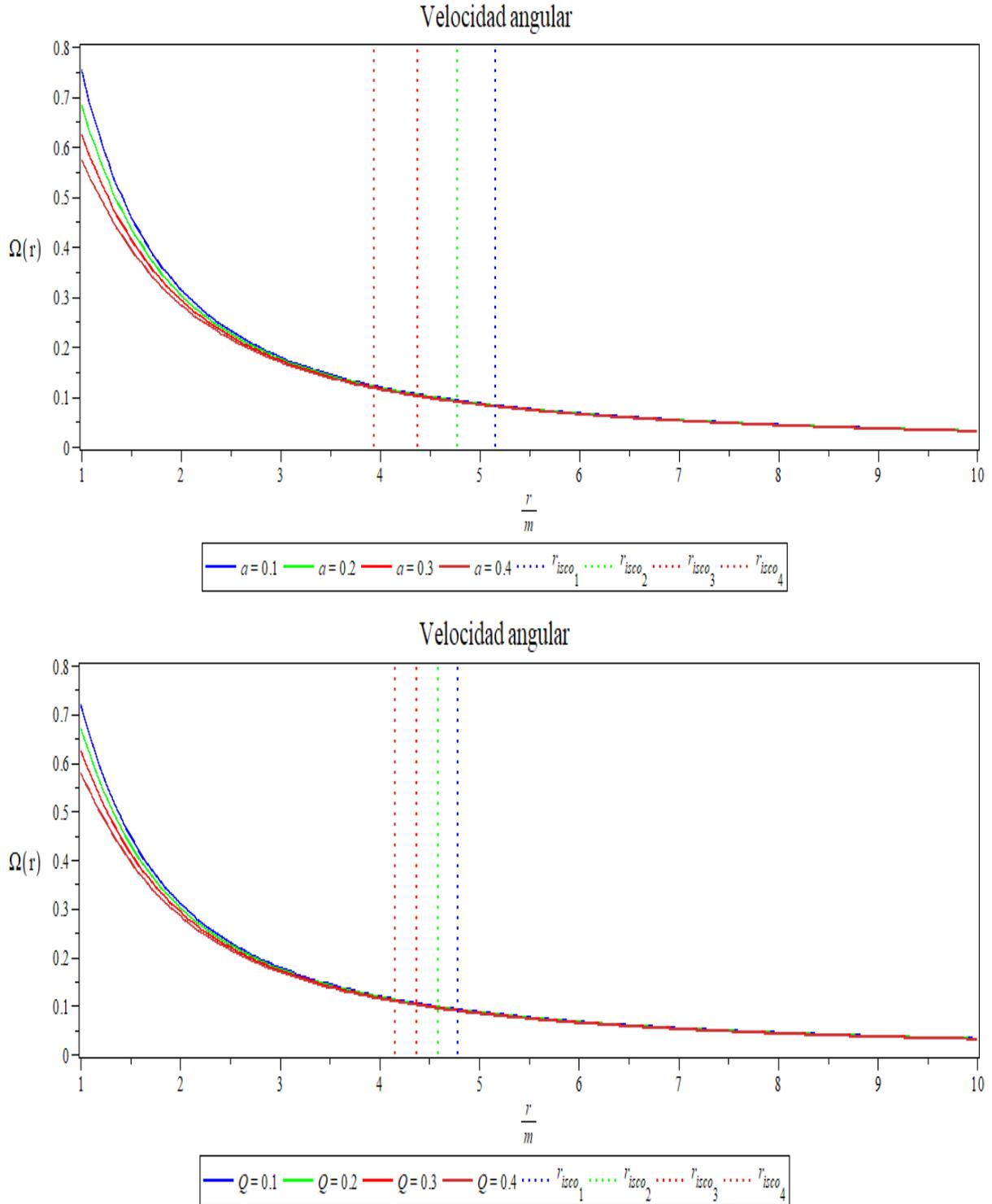


Figura 4.7: La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra la velocidad angular variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

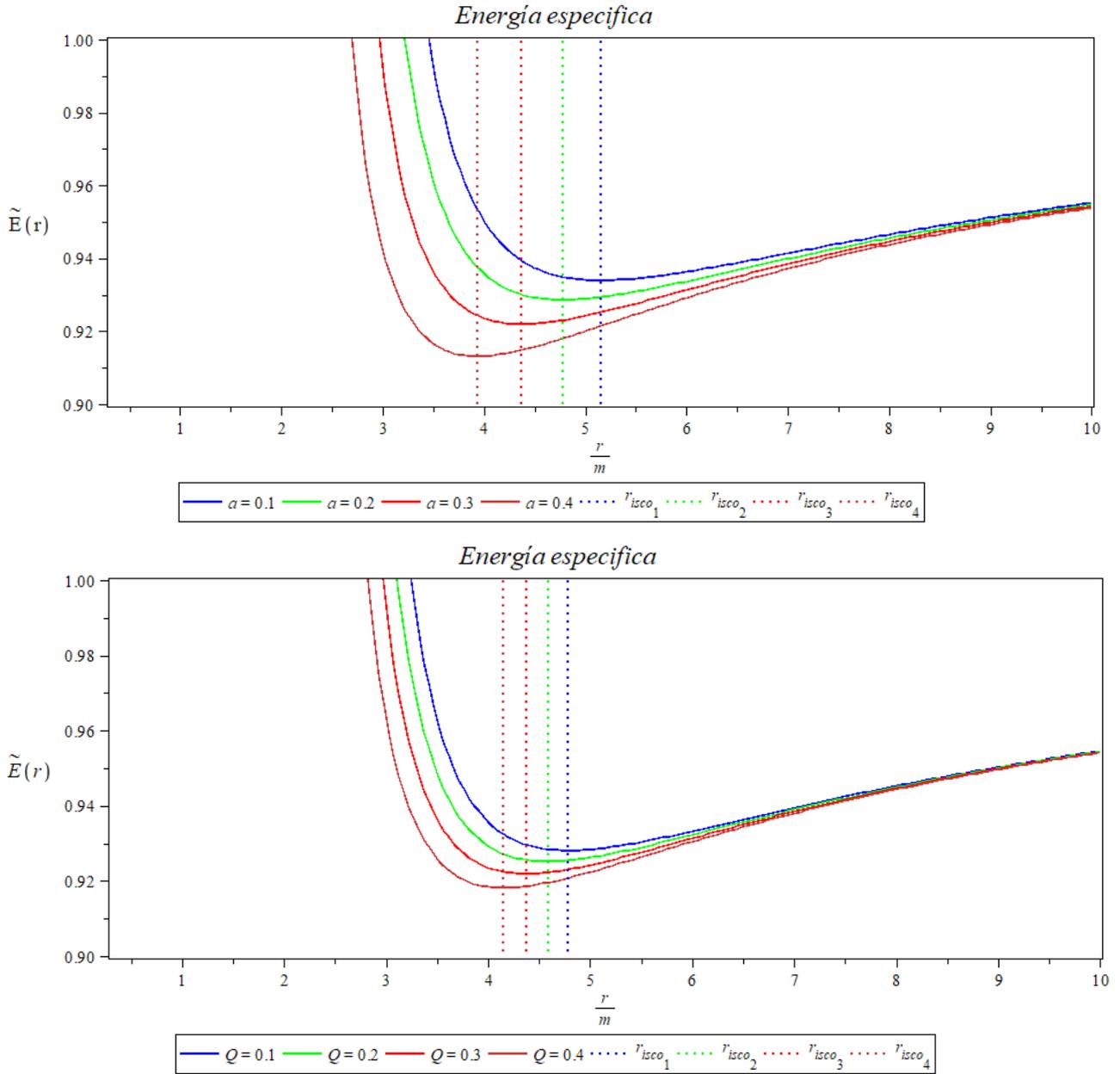


Figura 4.8: La energía específica $\tilde{E}(r)$ e las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra la energía específica variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varía Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

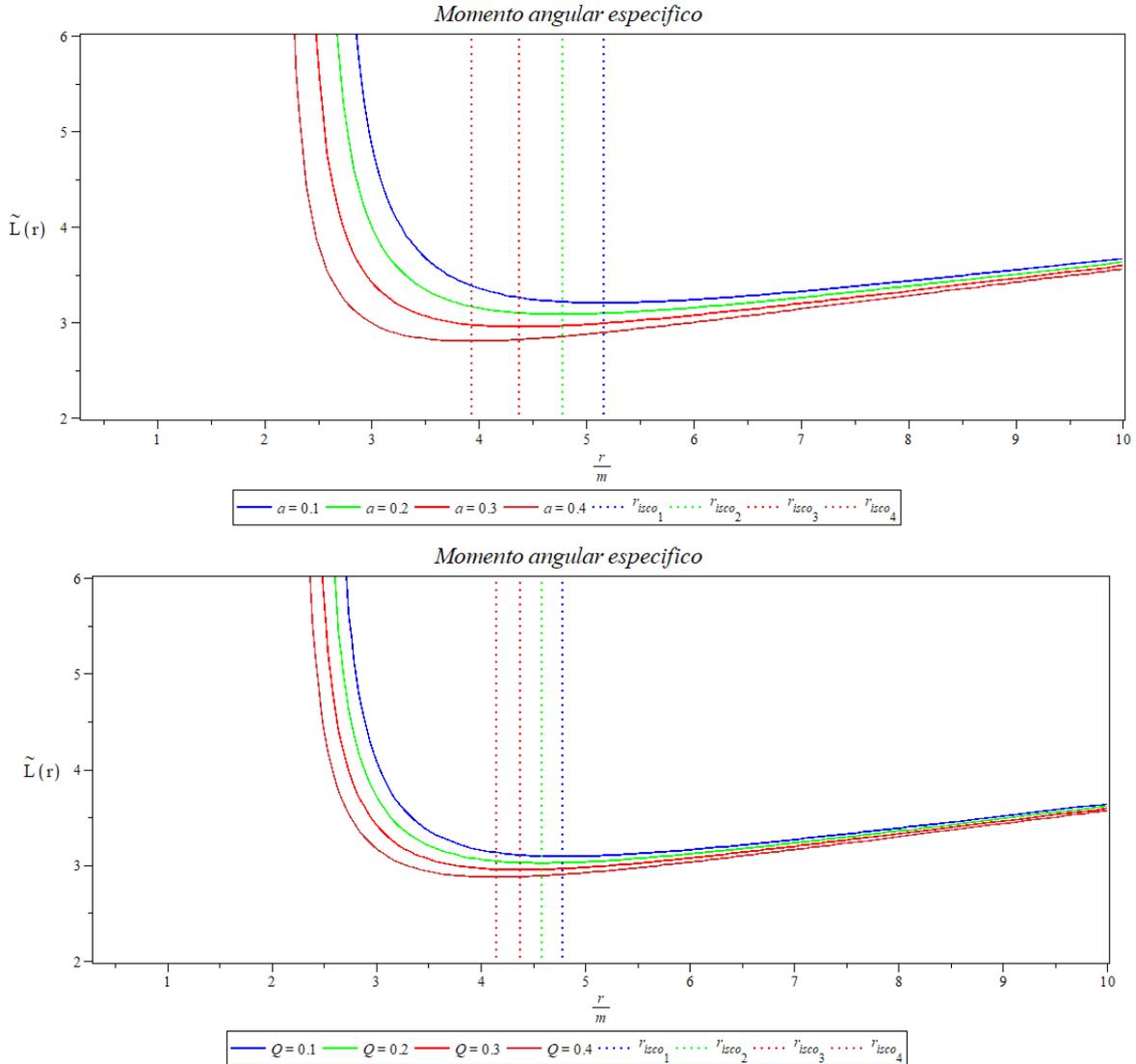


Figura 4.9: El momento angular específico $\tilde{L}(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman que rota lentamente, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ mostrado como función de la coordenada radial r . La gráfica superior muestra el momento angular específico variando a y con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

Las figuras 4.7, 4.8, 4.9 muestran la velocidad angular, la energía específica y el momento angular específico de las partículas de prueba que rotan alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman para diferentes valores de a y Q . Podemos observar que aunque se haga una variación similar dejando fijo a en 0,3 variando Q de 0,1 a 0,4 y posteriormente se fije Q en 0,3 variando a de 0,1 a 0,4, hay una fuerte relación entre el parámetro de rotación y dichas magnitudes físicas, siendo mayores estas cantidades cuando se varia a y se deja fija Q . El ISCO es determinado a partir de la segunda derivada del potencial e igualando esta a cero (ecuación 2.87 sección 2.12.6), por lo que el comportamiento de $V_{\text{eff,rr}}$ se ve representado en la figura 4.10, donde se ve la misma relación con el parámetro a , donde el ISCO se ve influenciado de mayor manera por el parámetro de rotación, que por la carga del agujero negro.

Para revisar la eficiencia en cada uno de los casos, el cuadro 4.3 fue construido, comparando la eficiencia en Kerr y en Kerr-Newman, se observa que la carga afecta directamente en la eficiencia del agujero negro de convertir materia en reposo en radiación. Podemos observar que para el espaciotiempo de Kerr, aumentando el factor a la eficiencia incrementa de un 6 % a un 7,5 %. Del mismo modo sucede en el caso del espaciotiempo de Kerr-Newman, con la diferencia que incrementando la carga a $Q = 0,4$ la eficiencia aumenta de 6,8 % para $a = 0,1$ a 9,2 % para $a = 0,4$.

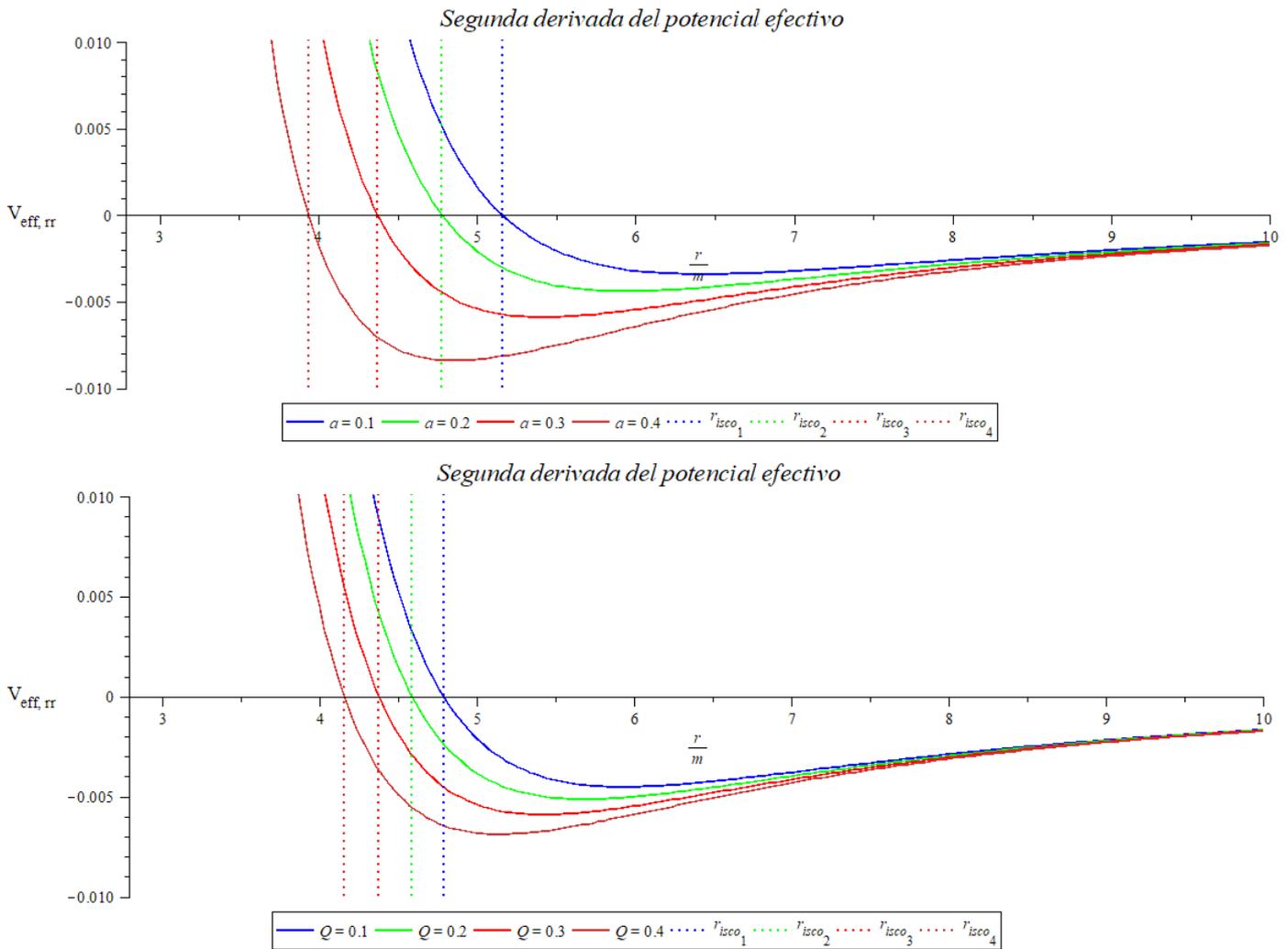


Figura 4.10: La segunda derivada del potencial efectivo para la métrica de Kerr-Newman. La grafica superior varia a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras la grafica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$.

a	Q	$\frac{r_+}{m}$	$\frac{r_{\text{isco}}}{m}$	ϵ
0,1	—	1,995	5,669	0,0606
	0,1	1,9899	5,5060	0,0622
	0,2	1,9746	5,3365	0,0640
	0,3	1,9486	5,1600	0,0660
	0,4	1,911	4,9751	0,0682
0,2	—	1,980	5,329	0,0646
	0,1	1,9746	5,1531	0,0666
	0,2	1,9591	4,9702	0,0689
	0,3	1,9327	4,7795	0,0714
	0,4	1,8944	4,5795	0,0742
0,3	—	1,954	4,978	0,0694
	0,1	1,9486	4,7857	0,0719
	0,2	1,9327	4,5851	0,0748
	0,3	1,9055	4,3752	0,0780
	0,4	1,8660	4,1539	0,0818
0,4	—	1,917	4,614	0,0750
	0,1	1,9110	4,3996	0,0784
	0,2	1,8944	4,1746	0,0823
	0,3	1,8660	3,9367	0,0868
	0,4	1,8246	3,6820	0,0923

Cuadro 4.3: r_{isco} del disco de acreción y la eficiencia para un agujero negro de Kerr-Newman

4.2.2. Propiedades físicas del disco de acreción

Para mostrar la distribución del flujo de energía para el agujero negro de Kerr-Newman, consideraremos una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ y un ratio de acreción de la masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$, que en unidades de acreción de Eddington es $\dot{M} = 3,36 \times 10^{-4} M_{\text{Edd}}$, la cual esta en el rango para agujeros súper masivos.

El flujo de energía sobre las caras del disco esta dado por la figura 4.11, como se puede ver, el flujo se ve influenciado de mayor manera por el parámetro de rotación, que por la carga del agujero negro, siendo la aportación de la carga mas pequeña. De un modo similar sucede en la figura 4.12, la cual representa el comportamiento de la temperatura del disco, esto nos indica que aunque la carga tenga una aportación en las propiedades físicas del disco, es el parámetro de rotación el que influencia de gran manera a dichas propiedades, y esto se debe a que el disco rota mucho más rápido, atrayendo así más materia y siendo más eficiente en transformar materia en reposo en radiación.

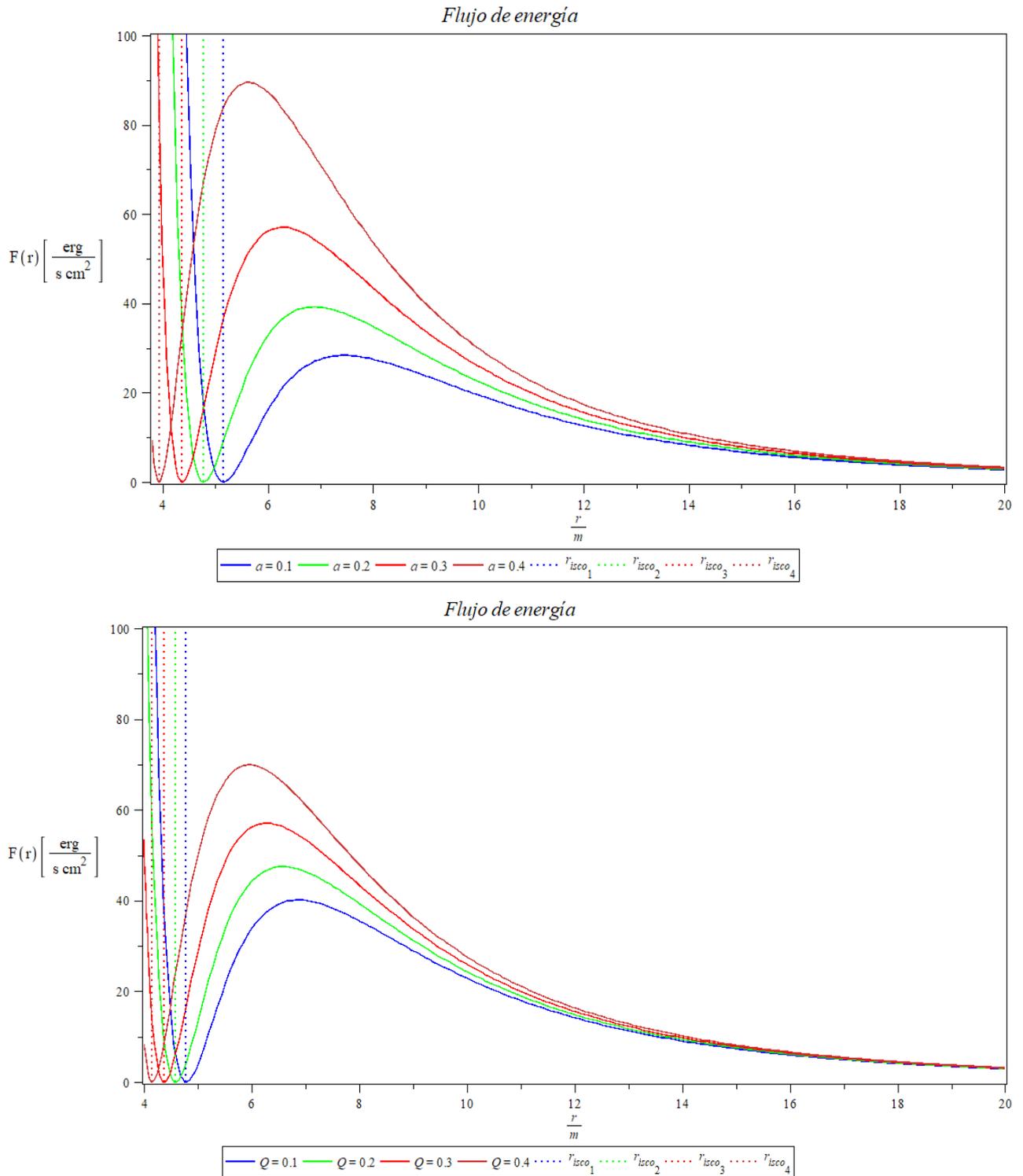


Figura 4.11: El flujo de energía $F(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro de Kerr-Newman con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$. La gráfica superior muestra el flujo de energía variando a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

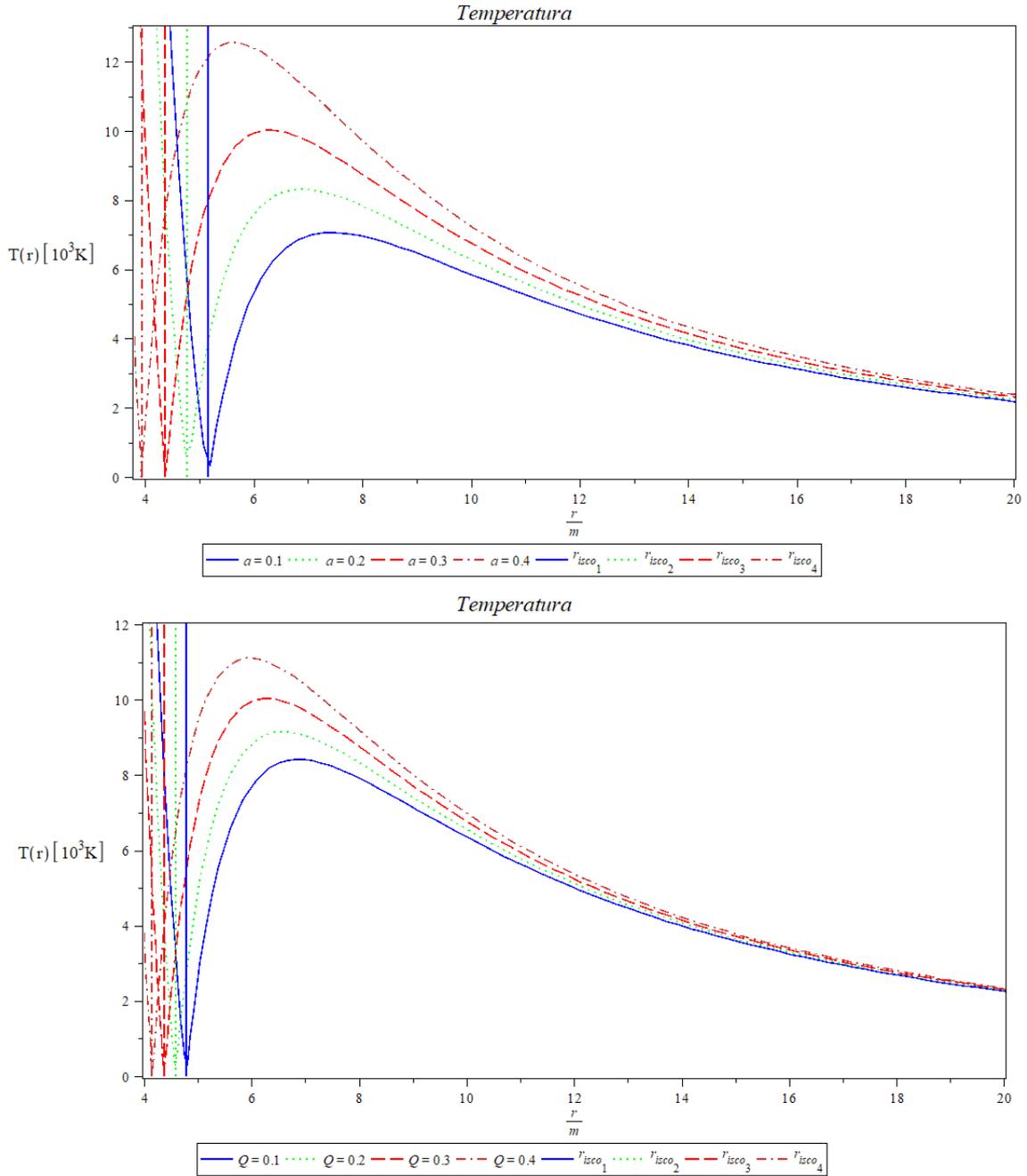


Figura 4.12: La temperatura del disco $T(r)$ para un agujero negro de Kerr-Newman con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$. La gráfica superior muestra la temperatura variando a con un valor fijo de $Q = 0,3$, mientras que la gráfica inferior varia Q con un valor fijo de $a = 0,3$. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

4.3. Resultado 3: Agujero negro acoplado con NLE

4.3.1. Orbitas ecuatoriales

Considerando las magnitudes obtenidas para la solución exacta de un agujero negro acoplado con NLE en la sección (3.3.1) las cuales son

$$\Omega = \frac{F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{F_0 \beta^2 \kappa r^4 - F_0 \kappa + 2r}{r^2} r^3 - F_0 a \kappa + 2ar}}{F_0 a^2 \beta^2 \kappa r^4 - F_0 a^2 \kappa - 2r^4 + 2a^2 r}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{E} = -\frac{-\frac{Q-a^2}{r^2} + \Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right)}{\sqrt{-\frac{Q-a^2}{r^2} - 2\Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right) - \Omega^2\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{L} = \frac{\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a + \Omega\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{Q-a^2}{r^2} - 2\Omega\left(\frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a\right) - \Omega^2\left(\frac{(a^2+r^2)^2}{r^2} - \frac{aQ}{r^2}\right)}}, \quad (4.11)$$

las cuales nos indican las propiedades físicas del gas que se agrupa alrededor del agujero negro, como lo son su velocidad angular Ω , su energía específica \tilde{E} , su momento angular específico \tilde{L} . Se consideran orbitas co-rotantes (signo positivo), esto quiere decir que el momento angular es paralelo al spin del agujero negro, por lo que el gas seguirá la misma dirección de rotación del agujero negro. Considerando que el disco rota lentamente (el parámetro de rotación a es pequeño) y fijando la $F_0 = 0,4$ se tienen las siguientes representaciones gráficas.

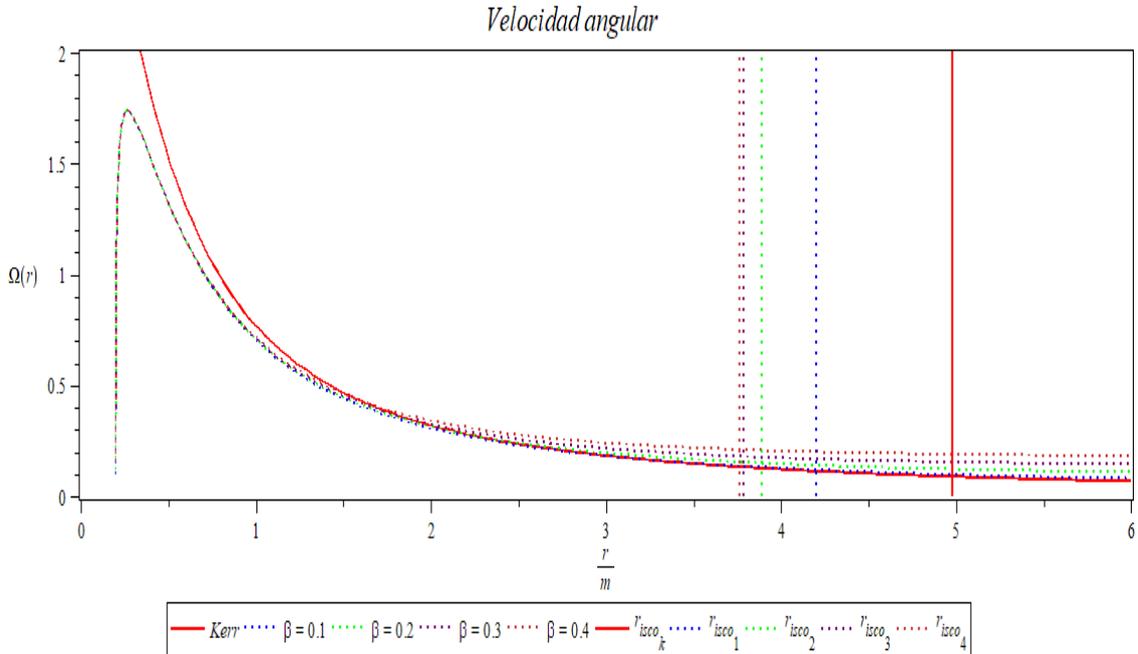


Figura 4.13: La velocidad angular $\Omega(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y dejando fijo $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

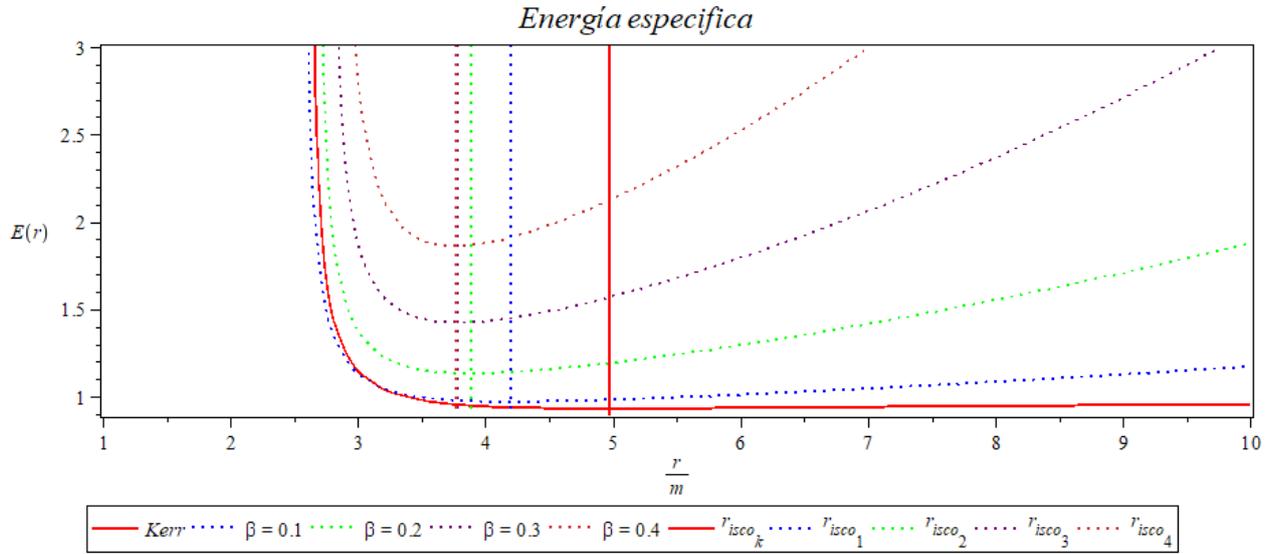


Figura 4.14: La energía específica $E(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y fijando $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

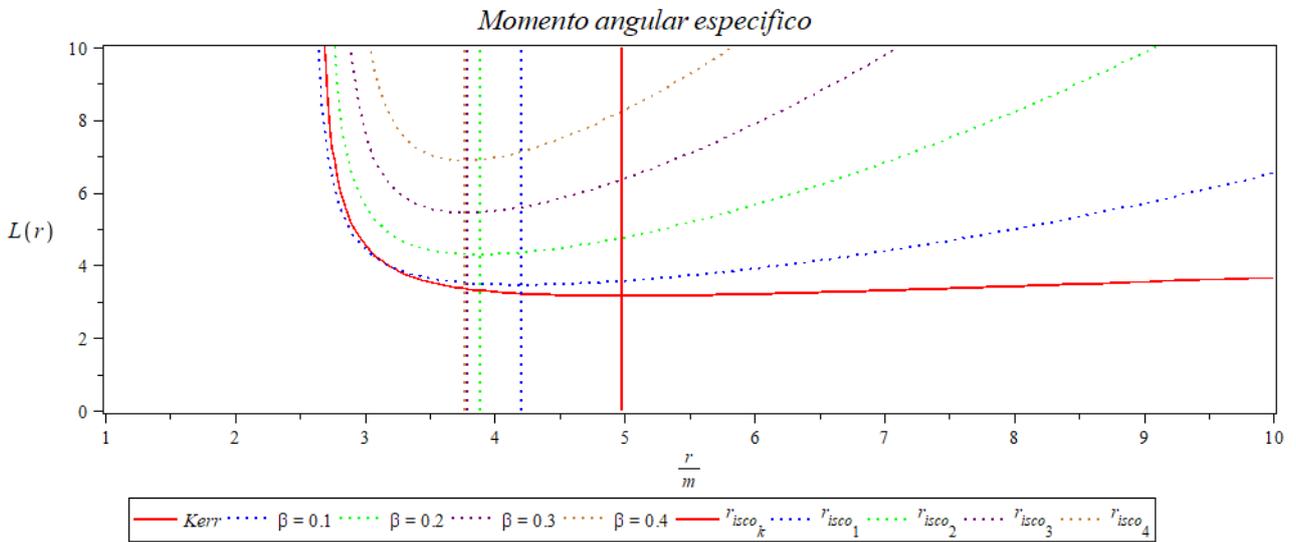


Figura 4.15: El momento angular específico $L(r)$ de las partículas de prueba alrededor de un agujero negro rotante acoplado con NLE, con una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$, mostrado como función de la coordenada radial r para diferentes valores de β y fijando $F_0 = 0,4$, comparado con un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las líneas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

La figura 4.13, 4.14 y 4.15 muestran la velocidad angular, la energía específica y el momento angular específico respectivamente, para las partículas de prueba del agujero negro rotante acoplado con NLE, con $a = 0,3$ y diferentes valores del parámetro β . De igual forma, muestra una comparativa con el resultado correspondiente de un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Se puede observar que para la velocidad angular existe una relación entre aumentar el parámetro β y la conservación de esta misma a mayores distancias, esto nos indica que aunque la velocidad angular sea menor para el caso NLE respecto al de Kerr, esta decrece más lentamente. Se identifica que para la energía específica y el momento angular específico aumentar el parámetro β corresponde un aumento significativo de estas mismas comparado con el caso de Kerr. Del mismo modo, el comportamiento del $V_{\text{eff,rr}}$ para $a = 0,3$ y diferentes valores de β fueron graficados en la figura 4.16, representando la dependencia del r_{isco} al parámetro de acoplamiento NLE. Como se observa al aumentar β sus cortes con cero se desplazan a radios más pequeños, por lo que cuentan con ISCO más pequeños comparado con Kerr.

Para revisar la eficiencia de transformar masa en reposo en radiación el cuadro 4.4 fue construido, podemos observar que para valores mayores a 0,1 en el parámetro β la eficiencia da valores negativos, esto puede ser producto del modelo usado, ya que podemos observar que entre mayor sea el parámetro de rotación los valores negativos se acercan cada vez más a cero.

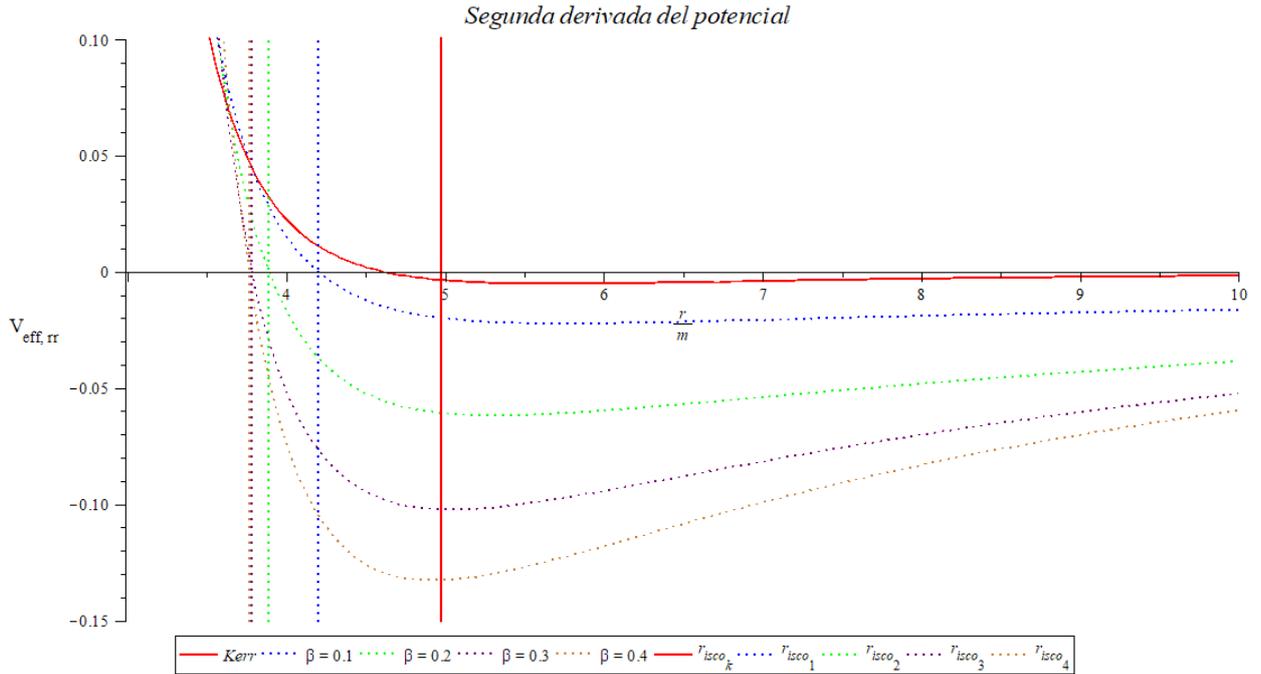


Figura 4.16: La segunda derivada del potencial efectivo para el agujero negro rotante acoplado con NLE para $a = 0,3$, $F_0 = 0,4$ y diferentes valores del parámetro NLE β . Las líneas verticales representan el ISCO en cada caso.

a	β	$\frac{r_+}{m}$	$\frac{r_{\text{isco}}}{m}$	ϵ
0,1	—	1,995	5,669	0,0606
	0,1	1,9559	4,6603	0,0042
	0,2	1,9906	4,2970	-0,2031
	0,3	1,9913	4,2106	-0,5868
	0,4	1,9647	4,2460	-1,1990
0,2	—	1,980	5,329	0,0646
	0,1	1,9392	4,4400	0,0165
	0,2	1,9748	4,0996	-0,1678
	0,3	1,9767	3,9996	-0,5027
	0,4	1,9514	4,0047	-1,0218
0,3	—	1,954	4,978	0,0694
	0,1	1,9107	4,2023	0,0298
	0,2	1,9478	3,8920	-0,1324
	0,3	1,9517	3,7842	-0,4228
	0,4	1,9286	3,7659	-0,8615
0,4	—	1,917	4,614	0,0750
	0,1	1,8690	3,9421	0,0442
	0,2	1,9084	3,6700	-0,0965
	0,3	1,9154	3,5605	-0,3459
	0,4	1,8954	3,5255	-0,7142

Cuadro 4.4: r_{isco} del disco de acreción y la eficiencia para un agujero negro de Kerr-Newman, dejando fijo $F_0 = 0,4$.

4.3.2. Propiedades físicas del disco de acreción

Para mostrar la distribución del flujo de energía a través de las cara del disco en la solución acoplada con NLE se considero una masa total de $M = 2,5 \times 10^6 M_\odot$ y un ratio de acreción de la masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$, que en unidades de acreción de Eddington es $\dot{M} = 3,36 \times 10^{-4} M_{\text{Edd}}$, la cual esta en el rango para agujeros súper masivos. El flujo de energía a través de las caras del disco para $a = 0,3$ y $a = 0,1$ y diferentes valores de β ha sido gráficoado en la figura 4.17. Como se puede ver, para un valor fijo del parámetro de rotación, aumentar el valor del párametro β corresponde a una mayor energía emanada del disco para un agujero negro acoplado con NLE en comparación a uno de Kerr. El efecto del parámetro NLE es mas significativo en agujeros negros que rotan mas rapidamente, ya que al comparar ambas gráficas para el mismo aumento en el parámetro β hay una mayor cantidad de flujo de energía, esto provoca que el ISCO se corra cada vez más a radios más pequeños. De igual forma podemos observar que la posición radial del valor máximo del flujo varia de acuerdo a β , para valores mas grandes la posición es mas cercana al ISCO, esto significa que la mayoría de la radiación es emitida por la parte interior del disco de acreción.

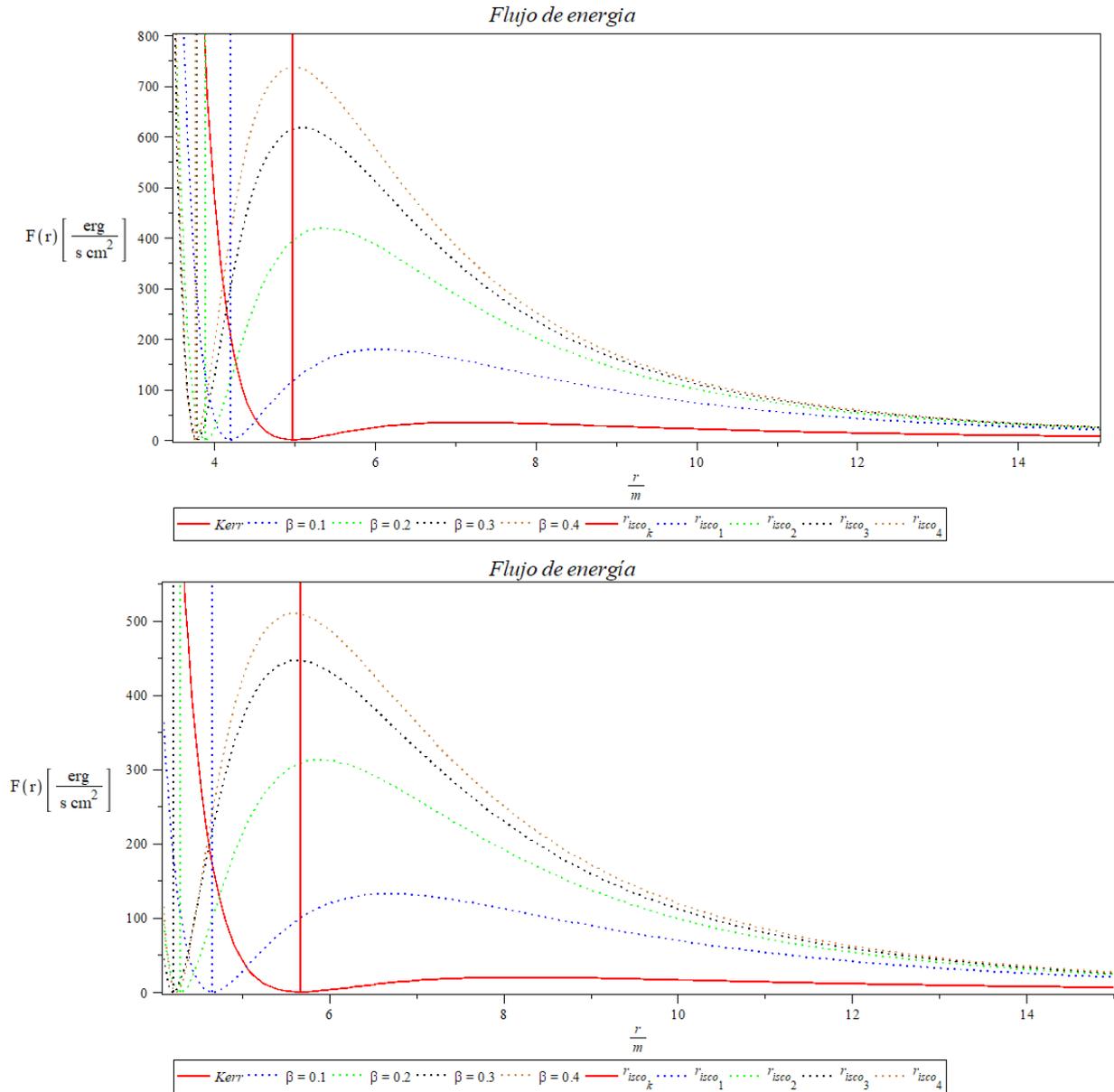


Figura 4.17: El flujo de energía $F(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro acoplado con NLE con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ y $F_0 = 0,4$, para diferentes valores del parametro β . El parametro de rotación fue fijado en $a = 0,3$ (gráfica superior) y $a = 0,1$ (gráfica inferior), respectivamente. En cada caso, la curva solida representa un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las lineas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

El comportamiento de la temperatura del disco es mostrada en la figura 4.18, donde las mismas características pueden ser vistas. Incrementando el parámetro β la temperatura del disco aumenta y los valores máximos se acercan hasta el borde interior del disco. Además, al incrementar el parámetro β se nota que los discos rotando al rededor del agujero negro acoplado con NLE son mucho mas calientes que los de Kerr.

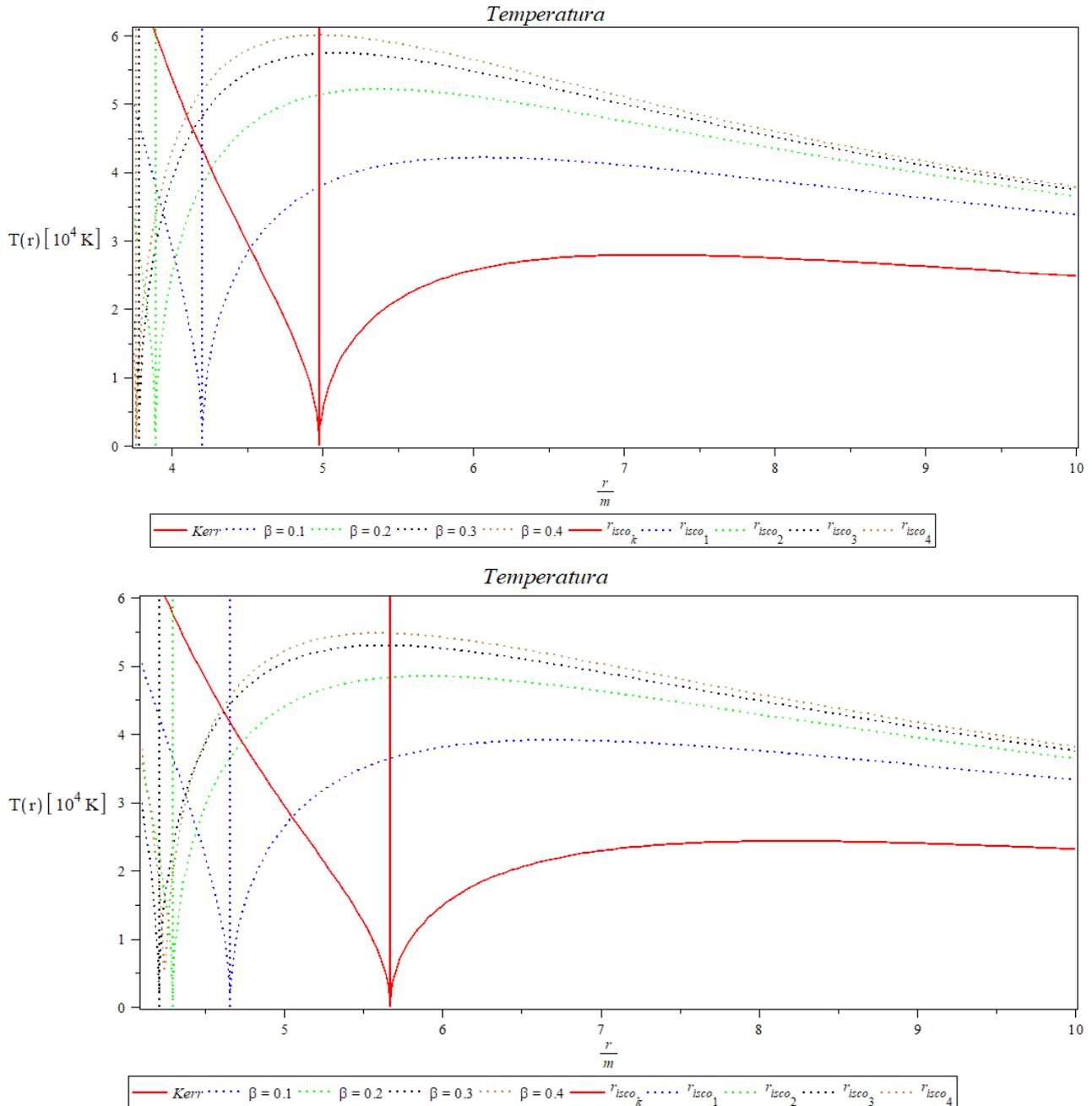


Figura 4.18: La temperatura $T(r)$ de un disco al rededor de un agujero negro acoplado con NLE con un ratio de acreción de masa de $\dot{M} = 2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, para diferentes valores del parametro β y $F_0 = 0,4$. El parametro de rotación fue fijado en $a = 0,3$ (gráfica superior) y $a = 0,1$ (gráfica inferior), respectivamente. En cada caso, la curva solida representa un agujero negro de Kerr que rota lentamente. Las lineas verticales representan la ubicación del ISCO en cada caso.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

- El modelo de Novikov-Thorne da una representación aceptable de las características físicas de un disco de acreción al rededor de una métrica rotante. Aunque, su costo operacional para determinar dichas características es alto.
- Se halló, que pequeños cambios en los componentes de la métrica, como lo son considerar ciertas generalidades como la carga, pueden variar en gran manera la magnitud de las características del disco de acreción que se genera.
- Independientemente de la métrica usada, el parámetro de rotación a tiene una influencia mayor en las características halladas, esto se puede ver en la métrica de Kerr-Newman, ya que variando a y dejando fijo Q , se consiguen magnitudes mayores que en el caso contrario, dejando fija a y variando Q .
- El ISCO se ve influenciado de gran manera al considerar métricas más generales, esto se puede ver en los cuadros expuestos en las secciones (4.2.1.) y (4.3.1.), ya que al variar los parámetros Q o β el ISCO se iba corriendo a radios mas pequeños.
- Se observo que, el agujero negro acoplado con NLE tiene en general un flujo de energía a través de las caras del disco y una temperatura mayor que la que se encuentra en un disco alrededor de un agujero negro de Kerr.
- Al analizar las eficiencias de transformar materia en reposo en radiación ϵ para el agujero negro acoplado con NLE, se tuvieron eficiencias negativas para valores del parámetro NLE mayores a 0,1 en $a = 0,1$ hasta $a = 0,4$, esto puede ser debido a que el modelo no funciona correctamente, o a que la teoría esta planteada de manera errónea.

Capítulo 6

Desarrollo de algunos calculos

6.1. Determinante de la métrica NLE

En la sección 3.3.1 se escribió la siguiente matriz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{Q-a^2}{r^2} & 0 & 0 & \frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a \\ 0 & \frac{r^2}{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ \frac{aQ}{r^2} - \frac{a^3}{r^2} - a & 0 & 0 & \frac{(r^2+a^2)^2}{r^2} - \frac{a^2Q}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

la cual presenta los componentes de la métrica NLE expuesta en la sección 3.3, donde $Q(r) = \frac{\kappa F_0}{2} (1 - \beta r^2)^2 - 2Mr + r^2 + a^2$ y a es el parametro de rotación. A continuación se presentara el paso a paso para calcular el determinante de dicha métrica, para ello se empleo el método de eliminación de Gauss. Primero, se convirtió la matriz en una matriz triangular, ya que si en un determinante a una fila o a una columna se le suma otra paralela multiplicada por un número no nulo, el determinante no varía. El determinante de la matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal superior, por lo que se multiplica la siguiente expresión (ecuación 6.2) a la fila 1 y dicho resultado se le resta a la fila 4

$$\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \quad (6.2)$$

$$F_4 - \left(\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \right) F_1 \rightarrow F_4 \quad (6.3)$$

para el primer elemento de la fila 4 se tiene lo siguiente

$$a_{4,1} = \left(\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2} \right) - \frac{\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2}}{\frac{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r}{2r^2}} \cdot \left(\frac{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r}{2r^2} \right), \quad (6.4)$$

$$a_{4,1} = \frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2} - \frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2} = 0, \quad (6.5)$$

los elementos $a_{4,2} = a_{4,3} = 0$ y el ultimo elemento queda de la siguiente manera

$$a_{4,4} = \frac{-F_0 a^2 \kappa - F_0 a^2 \beta^2 \kappa r^4 + 2r^4 + 2a^2 r^2 + 2F_0 a^2 \beta \kappa r^2 + 4ar^2}{2r^2} - \frac{\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2}}{\frac{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r}{2r^2}} \cdot \left(\frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2} \right) \quad (6.6)$$

$$a_{4,4} = \frac{(-F_0 a^2 \kappa - F_0 a^2 \beta^2 \kappa r^4 + 2r^4 + 2a^2 r^2 + 2F_0 a^2 \beta \kappa r^2 + 4ar^2) (F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r)}{2r^2 (F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r)} - \frac{(F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar)^2}{2r^2 (F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r)}, \quad (6.7)$$

al desarrollar el cuadrado, multiplicar la primera parte y restar, nos queda que $a_{4,4}$ es

$$a_{4,4} = \frac{-F_0 \beta^2 \kappa r^6 - 2F_0 \beta \kappa r^4 + 2r^4 - 4r^3 + 2a^2 r^2 + F_0 \kappa r^2}{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r}. \quad (6.8)$$

Ahora reescribiendo la matriz y hallando su determinante (producto de los elementos de la diagonal superior) se tiene que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-F_0 \kappa - F_0 \beta^2 \kappa r^4 + 2F_0 \beta \kappa r^2 - 2r^2 + 4r}{2r^2} & 0 & 0 & \frac{F_0 a \kappa + F_0 a \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 a \beta \kappa r^2 - 4ar}{2r^2} \\ 0 & \frac{2r^2}{2a^2 + F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_0 \beta^2 \kappa r^6 - 2F_0 \beta \kappa r^4 + 2r^4 - 4r^3 + 2a^2 r^2 + F_0 \kappa r^2}{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$g = \frac{-F_0 \kappa - F_0 \beta^2 \kappa r^4 + 2F_0 \beta \kappa r^2 - 2r^2 + 4r}{2r^2} \cdot \left(\frac{2r^2}{2a^2 + F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \right) \cdot r^2 \cdot \left(\frac{F_0 \beta^2 \kappa r^6 - 2F_0 \beta \kappa r^4 + 2r^4 - 4r^3 + 2a^2 r^2 + F_0 \kappa r^2}{F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^2 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \right), \quad (6.10)$$

al cancelar el numerador del primer termino con el denominador del 4 termino nos queda un -1 . Sacando factor común de r^2 se tiene lo siguiente

$$g = \frac{-r^2 r^2 (F_0 \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r + 2a^2 + F_0 \kappa)}{2a^2 + F_0 \kappa + F_0 \beta^2 \kappa r^4 - 2F_0 \beta \kappa r^2 + 2r^2 - 4r} \quad (6.11)$$

por lo que al final nos queda que el determinante para la métrica NLE es

$$g = -r^4 \quad (6.12)$$

Bibliografía

- [1] Sean M Carroll. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. Addison Wesley, 101, 2004.
- [2] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. Annals of Mathematics, pages 645–680, 1936.
- [3] Cosimo Bambi. Introduction to general relativity: a course for undergraduate students of physics. Springer, 2018.
- [4] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University Press, 2006.
- [5] Mohaddese Heydari-Fard, Malihe Heydari-Fard, and Hamid Reza Sepangi. Thin accretion disks around rotating black holes in 4 d einstein–gauss–bonnet gravity. The European Physical Journal C, 81(5):473, 2021.
- [6] Matt Visser. The kerr spacetime: A brief introduction. arXiv preprint arXiv:0706.0622, 2007.
- [7] Cosimo Bambi. Black holes: a laboratory for testing strong gravity, volume 10. Springer, 2017.
- [8] Tim Adamo and Ezra T Newman. The kerr-newman metric: a review. arXiv preprint arXiv:1410.6626, 2014.
- [9] Igor D Novikov and Kip S Thorne. Astrophysics of black holes. Black holes (Les astres occlus), 1:343–450, 1973.
- [10] NI Shakura and RA Sunyaev. Black holes in binary systems: Observational appearances. In Symposium-International Astronomical Union, volume 55, pages 155–164. Cambridge University Press, 1973.
- [11] S Shankaranarayanan and Joseph P Johnson. Modified theories of gravity: Why, how and what? General Relativity and Gravitation, 54(5):44, 2022.
- [12] Eloy Ayon-Beato and Alberto Garcia. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. Physical review letters, 80(23):5056, 1998.
- [13] Alberto A Garcia-Diaz. Stationary rotating black hole exact solution within einstein–nonlinear electrodynamics. arXiv preprint arXiv:2112.06302, 2021.
- [14] Nora Breton, Gustavo Gutierrez-Cano, and Alberto A Garcia-Diaz. Motion of the charged test particle in the spinning nonlinear electromagnetic black hole. Physical Review D, 106(2):024056, 2022.

- [15] James B Dove, Jörn Wilms, Michael Maisack, and Mitchell C Begelman. Self-consistent thermal accretion disk corona models for compact objects. ii. application to cygnus x-1. The Astrophysical Journal, 487(2):759, 1997.