



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 7 de junio de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

**Juan Diego Zambrano Barrios**, con C.C. No.1075545852,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado **Espectro de Transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasiperiódico con secuencia Thue-Morse**.

Presentado y aprobado en el año **2023** como requisito para optar al título de **Físico**;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**



**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-06**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**2 de 2**

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: **Juan Diego Zambrano Barrios**

Firma: *Juan Zambrano*



**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-07**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**1 de 5**

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Espectro de Transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periodico con secuencia Thue-Morse.

**AUTOR O AUTORES:** Juan Diego Zambrano Barrios

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Zambrano Barrios	Juan Diego

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
No aplica	No aplica

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Segovia Chavez	Francis Armando

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Físico

**FACULTAD:** Ciencias Exactas y Naturales

**PROGRAMA O POSGRADO:** Física

**CIUDAD:** Neiva

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023

**NÚMERO DE PÁGINAS:** 49

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 5

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una **X**):

Diagramas  Fotografías  Grabaciones en discos  Ilustraciones en general  Grabados   
Láminas  Litografías  Mapas  Música impresa  Planos  Retratos  Sin ilustraciones  Tablas  
o Cuadros

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: Wolfram Mathematica 11.3, OriginLab.

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

Español

1. Cristal Fotónico
2. Método de la Matriz de Transferencia
3. Modelo de dos fluidos
4. Transmitancia
5. Superconductor
6. Secuencia Thue-Morse

Inglés

- Photonic glass  
Transfer Matrix Method  
Two-fluid model  
Transmittance  
Superconductor  
Thue-Morse sequence

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En este trabajo de grado se pretende usar el método de la matriz de transferencia y el modelo de dos fluidos de Gorter-Casimir, para calcular el espectro de transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periódico (CF-1D), compuesto por las capas de materiales superconductores ( $\text{YBa}_{2}\text{Cu}_{3}\text{O}_{7-x}$ ) y semiconductores (GaAs). Donde la celda unitaria del cristal estará rodeada por aire y la disposición de las capas del cristal fotónico se encontrarán gobernadas por la secuencia Thue-Morse; se evidencio que la respuesta de la constante dieléctrica del semiconductor dependen solamente de la presión y temperatura, mientras que la del superconductor únicamente de su temperatura de funcionamiento. Se encontró que el espectro de transmitancia se desplazó hacia longitudes de ondas más altas conforme se fue aumentando temperatura y longitudes ondas menores al variar la presión de las capas, además de que los picos de la transmisión muestran una división al incrementar la longitud de la secuencia Thue-Morse.



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 5

Empty box for the description of the thesis or degree work.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

In this degree project, the intention is to use the transfer matrix method and the Gorter-Casimir two-fluid model to calculate the transmittance spectrum of a one-dimensional quasi-periodic photonic crystal (CF-1D), composed of layers of superconducting ( $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ) and semiconductor (GaAs) materials. Where the unit cell of the crystal would be surrounded by air and the disposition of the layers of the photonic crystal would be governed by the Thue-Morse sequence; It was evidenced that the response of the dielectric constant of the semiconductor depends only on the pressure and temperature, while that of the superconductor only depends on its operating temperature. It was found that the transmittance spectrum



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

4 de 5

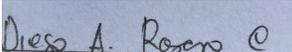
shifted towards higher wavelengths as the temperature increased and lower wavelengths as the pressure of the layers varied, in addition to the fact that the peaks of transmission show a split with increasing length of the Thue-Morse sequence.

#### APROBACIÓN DE LA TESIS

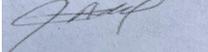
Nombre Presidente Jurado: No aplica

Firma:

Nombre Jurado: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: 

Nombre Jurado: Gerardo Rivera Barrera

Firma: 

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**

**DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO**



SC-7384-1 SA-CERES 507526 OS-CER 507535

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>5 de 5</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



UNIVERSIDAD  
**SURCOLOMBIANA**

---

---

**ESPECTRO DE TRANSMITANCIA DE UN CRISTAL FOTÓNICO  
UNIDIMENSIONAL CUASI-PERIÓDICO CON SECUENCIA  
THUE-MORSE**

**Juan Diego Zambrano Barrios**

Universidad Surcolombiana  
Facultad de ciencias Exactas y Naturales, Programa de Física.  
Neiva, Colombia  
2023



**ESPECTRO DE TRANSMITANCIA DE UN CRISTAL FOTÓNICO  
UNIDIMENSIONAL CUASI-PERIÓDICO CON SECUENCIA  
THUE-MORSE**

**Juan Diego Zambrano Barrios**

Tesis de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**FÍSICO**

Director:  
Doctor Francis Armando Segovia Chavez

Línea de Investigación:  
Óptica  
Grupo de Investigación:  
Física Teórica

Universidad Surcolombiana  
Facultad de ciencias Exactas y Naturales, Programa de Física  
Neiva, Colombia  
2023



## Dedicatoria

A mis padres, cuyas canas en sus cabellos soy una de la razones.

Estudia mucho lo que sea de interés para ti y hazlo de la forma más indisciplinada, irreverente y original posible.

Richard Feynman



# Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres y a mi hermana por el apoyo incondicional, además de mis dos amigas de Perú que fueron un gran apoyo académico y sentimental durante toda la carrera y esencialmente en el desarrollo de este proyecto. También agradezco a mi asesor Francis Armando Segovia por toda su colaboración, enseñanza y tiempo, que me ayudaron a crecer académicamente permitiéndome fortalecer mis conocimientos y culminar con gratitud este trabajo de grado. Finalmente, agradezco a todos mis compañeros, docentes y entidades de la universidad Surcolombiana, y al grupo de semillero de Física Matemática quienes me ayudaron en mi crecimiento profesional.



## Resumen

En este trabajo de grado se pretende usar el método de la matriz de transferencia y el modelo de dos fluidos de Gorter-Casimir, para calcular el espectro de transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periódico ( $CF-1D$ ), compuesto por las capas de materiales superconductores ( $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ) y semiconductores ( $GaAs$ ). Donde la celda unitaria del cristal estará rodeada por aire y la disposición de las capas del cristal fotónico se encontrarán gobernadas por la secuencia Thue-Morse; se evidencio que la respuesta de la constante dielectrica del semiconductor dependen solamente de la presión y temperatura, mientras que la del superconductor únicamente de su temperatura de funcionamiento. Se encontró que el espectro de transmitancia se desplazo hacia longitudes de ondas más altas conforme se fue aumentando temperatura y longitudes ondas menores al variar la presión de las capas, además de que los picos de la transmisión muestran una división al incrementar la longitud de la secuencia Thue-Morse.

**Palabras clave:** Cristal fotónico, Método de la Matriz de Transferencia, Modelo de dos fluidos, Transmitancia, Superconductor, Secuencia Thue-Morse.

# Abstract

In this degree project, the intention is to use the transfer matrix method and the Gorter-Casimir two-fluid model to calculate the transmittance spectrum of a one-dimensional quasi-periodic photonic crystal ( $CF-1D$ ), composed of layers of superconducting ( $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ) and semiconductor ( $GaAs$ ) materials. Where the unit cell of the crystal would be surrounded by air and the disposition of the layers of the photonic crystal would be governed by the Thue-Morse sequence; It was evidenced that the response of the dielectric constant of the semiconductor depends only on the pressure and temperature, while that of the superconductor only depends on its operating temperature. It was found that the transmittance spectrum shifted towards higher wavelengths as the temperature increased and lower wavelengths as the pressure of the layers varied, in addition to the fact that the peaks of transmission show a split with increasing length of the Thue-Morse sequence.

**Keywords:** Photonic glass, Transfer Matrix Method, Two-fluid model, Transmittance, Superconductor, Thue-Morse sequence.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Objetivos . . . . .	5
1.1.1. Objetivo General . . . . .	5
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	5
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. ¿Qué son los Cristales Fotónicos? . . . . .	6
2.1.1. Banda Fotónica prohibida . . . . .	7
2.2. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	7
2.3. Ondas Electromagnéticas . . . . .	8
2.3.1. Condiciones de contorno . . . . .	9
2.4. Formulas de Fresnel para la reflexión y transmisión . . . . .	11
2.4.1. Reflexión y transmisión de las ondas P (onda TM) . . . . .	11
2.4.2. Reflexión y transmisión de las ondas S (onda TE) . . . . .	14
2.5. Matriz dinámica . . . . .	17
2.6. Sistema de Multicapas . . . . .	18
2.6.1. Método de matriz $2 \times 2$ . . . . .	19
2.6.2. Método de la Matriz de Transferencia . . . . .	21
2.7. Modelo de Gorter-Casimir . . . . .	23
2.7.1. Permitividad relativa de un material superconductor . . . . .	24
2.8. Modelo semiconductor . . . . .	28
2.9. Secuencia Thue-Morse . . . . .	28
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>30</b>
3.1. Efecto de la Secuencia Thue-Morse . . . . .	31
3.2. Efecto del Ángulo de incidencia . . . . .	34
3.3. Efecto del espesor de la capa $A$ y $B$ . . . . .	36

---

3.4. Efecto de la Presión . . . . .	39
<b>4. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>40</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	40
4.2. Recomendaciones . . . . .	41
<b>A. Anexo: Producto de matrices Dinámicas</b>	<b>42</b>
A.1. Para Ondas tipo P . . . . .	42
A.2. Para Ondas tipo S . . . . .	43

# Lista de Figuras

<b>2-1.</b>	Representación esquemática de un CF-1D, CF-2D y CF-3D. El color diferente representa materiales con diferentes constantes dieléctricas [41]. . . . .	7
<b>2-2.</b>	Reflexión y transmisión de ondas P. [44] . . . . .	11
<b>2-3.</b>	Reflexión y transmisión de ondas S. [44] . . . . .	14
<b>2-4.</b>	Geometría de una monocapa con el método matricial. [44] . . . . .	19
<b>2-5.</b>	Estructura de una multicapa [44] . . . . .	21
<b>2-6.</b>	Ilustración esquemática de las estructuras cuasiperiódicas: (a) Fibonacci, (b) Thue-Morse, (c) Periodo doble. [19] . . . . .	29
<b>3-1.</b>	Cristal fotónico unidimensional cuasiperiódico con secuencia de Thue-Morse $S_3$ .	31
<b>3-2.</b>	Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D a incidencia normal para la secuencia $S_3$ y Periódica con $N=14$ . El espesor de la capa semiconductor y superconductor son $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , con temperatura de funcionamiento $T = 80K$ y presión $P = 20kbar$ . . . . .	32
<b>3-3.</b>	a) Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D con Periodicidad $N = 14$ , b) transmisión del cristal fotónico superconductor 1D para la secuencia Thue-Morse $S_3$ en función de su temperatura. El espesor de las capas semiconductoras y superconductoras son $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , bajo incidencia normal y presión $P = 20kbar$ . . . . .	32
<b>3-4.</b>	Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D a incidencia normal para las secuencias $S_3$ , $S_4$ y $S_5$ , con espesores de $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , a $T = 80K$ y $P = 20kbar$ . . . . .	33
<b>3-5.</b>	a) Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D para la polarización $TE$ , b) Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D para la polarización $TM$ en función de su ángulo de incidencia. Con secuencia Thue-Morse $S_3$ y espesores $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , a $T = 80K$ y $P = 20kbar$ . . . . .	34
<b>3-6.</b>	Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la incidencia para las polarizaciones $TE$ y $TM$ . Con secuencia Thue-Morse $S_3$ y espesores de las capas $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , a $T = 80K$ y $P = 20kbar$ .	35

---

<b>3-7.</b> Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la capa semiconductor con a) periodicidad $N = 14$ y b) secuencia Thue-morse $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa superconductora igual a $d_B = 20nm$ , a $T = 80K$ y $P = 20kbar$ . . . . .	37
<b>3-8.</b> Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la capa superconductora con a) periodicidad $N = 14$ y b) secuencia Thue-morse $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa semiconductor igual a $d_A = 100nm$ , a $T = 80K$ y $P = 20kbar$ . . . . .	38
<b>3-9.</b> Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la presión para una a) periodicidad $N = 14$ y b) secuencia Thue-morse $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa semiconductor y superconductora igual a $d_A = 100nm$ y $d_B = 20nm$ , con temperatura de funcionamiento de $T = 80K$ . . . . .	39

# Lista de Tablas

3-1. Valores constantes para el calculo de la constante dieléctrica del <i>GaAs</i> [49, 50].	30
3-2. Secuencias de Thue-Morse. . . . .	31

# 1. Introducción

El presente trabajo realiza una introducción al comportamiento de la propagación de la radiación electromagnética sobre diferentes medios, es decir, sistemas construidos por materiales que exhiben características atractivas al paso de la radiación, específicamente semiconductores y superconductores. Cabe aclarar que tanto el espesor de las capas como las propiedades físicas de los medios toman gran importancia en la aparición de fenómenos de interferencia y brechas prohibidas. Pues desde los trabajos de Yablonovitch [1] y John [2] en 1987 acerca de las estructuras dieléctricas periódicas tridimensionales, se llegó a la existencia de un rango de frecuencia en el que la propagación de la luz está prohibida en cualquier dirección, es decir, para estructuras dieléctricas periódicas artificiales, existe una brecha de banda fotónica [3]. Posteriormente, estas estructuras pasaron a conocerse bajo el nombre de cristales fotónicos (*CFs*). Los *CFs* son sistemas formados por arreglos periódicos de materiales con diferentes respuestas ópticas [4], en particular, de su índice de refracción. Si la emisión espacial del índice de refracción ocurre en una dirección privilegiada, el sistema se denomina cristal fotónico unidimensional (*1D*); igualmente, si la emisión ocurre en dos (2) y tres (3) direcciones privilegiadas, el sistema se denomina, respectivamente, cristal fotónico bidimensional (*2D*) o cristal fotónico tridimensional (*3D*) [5]. La propiedad más relevante de los *CFs* con periodicidad de largo alcance es la presencia de regiones prohibidas o denominadas Photonic Band Gaps (*PBG*) o brechas de bandas fotónicas en español (*BBFs*), donde la luz no puede propagarse y la transmitancia cae a cero [6]. Adicionalmente, si al sistema se le agrega un defecto que rompa la periodicidad del cristal, pueden llegar a parecer regiones conductoras dentro de las *BBFs* que permitan el flujo de las ondas electromagnéticas, conociéndose esto como modos de defecto localizado [7].

La existencia de las *BBFs* está relacionada con la simetría de traslación espacial y sus propiedades dependen de las características físicas de los materiales constitutivos del sistema y de sus propiedades geométricas [8]. Dado a estas propiedades geométricas y físicas, es que los *CFs* – *1D* han tenido bastante atención en los últimos 20 años [9]. Teniendo múltiples aplicaciones en la fabricación de filtros de banda estrecha, espejos omnidireccionales, filtros ópticos multicanal y monocanal, así como también los cristales fotónicos compuestos por materiales superconductores y dieléctricos [10, 11]. Recientemente, los *CFs* – *1D* compuestos por materiales superconductores están atrayendo un interés considerable debido a las pequeñas pérdidas que generan estos materiales en comparación con los metales [12]. Además de que han despertado una gran atracción en el estudio de la nanofotónica, ya que

---

representan resistencia cero, aún por debajo de su temperatura crítica ( $T_c$ ) característica, es decir, presenta menor pérdida de ondas electromagnéticas en comparación con los metales y los dieléctricos [13, 14].

El 1 de enero de 1865, James Clerck Maxwell publicó su artículo titulado “*dynamical theory of the electromagnetic field*” [15], en el cual explicaba que la luz es una onda electromagnética que se propagaba en el espacio, presentando sus famosas “*ecuaciones de Maxwell*” como modelo matemático. Resaltándose la aplicabilidad de estas ecuaciones en el modelo teórico de los  $CFs$ , pues sirvieron para impulsar el estudio de la propagación electromagnética a través de medios periódicos en una, dos y tres dimensiones, donde fue útil recurrir a la teoría matricial y a las propiedades de las matrices conocidas como matrices de transferencia, las cuales constituyen el tema central del proyecto, ya que son usadas en la solución de problemas de propagación como: electrones a través de barreras o pozos de potencial. Pero existiendo aun así múltiples métodos de solución a las ecuaciones Maxwell, tales como: elementos finitos, ondas planas, aproximación cuasicristalina, dispersión múltiple, entre otros [16, 17].

El tema de los Cuasicristales alcanzó su impulso por primera vez gracias al trabajo de Schechtman y sus colaboradores en 1984, titulado “*Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*” [18] en el cual trabajaron en aleaciones metálicas de aluminio y manganeso ( $Al - Mn$ ) que mostraban datos de difracción de electrones muy sorprendentes e interesantes. Al momento de examinar la aleación solidificada con un microscopio electrónico, se reveló una nueva estructura, la cual exhibía una simetría quíntuple, que está prohibida en los cristales ideales, y un orden de largo alcance, que falta en los sólidos amorfos. De manera que su orden no era ni verdaderamente amorfo ni cristalino [19]. Posteriormente, los estudios teóricos desarrollados por Levine y Steinhardt [20] explicaron estos tipos de simetría a través de las teselas aperiódicas  $2D$  y  $3D$  de Penrose [21] en sus patrones de difracción, obteniendo predicciones cualitativamente similares a las observaciones de Schechtman. En consecuencia, el Premio Nobel de Química de 2011 se concedió a Shechtman por el descubrimiento de los cuasicristales, y el Premio Buckley de Física de 2010 a Levine y Steinhardt por su análisis teórico.

El descubrimiento de los cuasicristales en la materia condensada inicio un nuevo campo de investigación en la fotónica. El primer ejemplo de un sistema aperiódico en poseer un orden de largo alcance en el campo de la óptica, fue descrito por Kohmoto y compañía [22]. Los cuales propusieron una estructura de cuasicristal  $1D$  (o cuasicristal fotónico) que utilizaba multicapas dieléctricas para formar la secuencia de Fibonacci. Posterior a ello, se han diseñado y estudiado por medios ópticos una amplia gama de cuasicristales fotónicos y otras estructuras aperiódicas deterministas con orden de largo alcance, siendo las secuencias matemáticas más empleadas en el estudio de los  $CFs$ : Thue-Morse, Fibonacci, Dodecanacci y Rudin Shapiro [23, 25].

Los cuasicristales fotónicos de dimensiones superiores, como  $2D$  y  $3D$ , ofrecen mayor fle-

xibilidad que las estructuras unidimensionales en el diseño de su geometría y sus posibles aplicaciones. Por ejemplo, existen diversos cuasicristales  $1D$  compuestos por la estructura de la secuencia de Fibonacci que pueden ampliarse a  $2D$ . Sin embargo, las reglas de diseño se vuelven cada vez más complejas a medida que se considera la gama más amplia de estructuras aperiódicas deterministas [26, 27]. Es por esto que la fabricación de cuasicristales fotónicos  $2D$  y  $3D$  toma un enfoque más común a la implicación de escritura directa con láser [28, 29] o la interferencia entre múltiples haces de láser [30, 32]. Estos procedimientos pueden llevarse a cabo en muchos sistemas de materiales, incluido el curado de uno o dos fotones de polímeros sensibles a la luz ultravioleta [33, 34], o el uso de cristales fotorrefractivos [32, 35]. Una alternativa a estos enfoques consiste en la reproducción litográfica directa de un patrón cuasiperiódico [36].

Los cuasicristales fotónicos tridimensionales fueron demostrados experimentalmente por primera vez por Weining Man y compañía [37], los cuales utilizaron la estereolitografía para crear una estructura icosaédrica mediante fotopolimerización ultravioleta. El cuasicristal tenía 12 ejes de simetría quintuples, 15 triples y 30 dobles. Utilizando medidas de transmisión por microondas, alrededor de un eje de rotación quintuple y un eje de rotación doble, encontraron una zona de Brillouin efectiva relativamente bien definida, a pesar de la mayor densidad de puntos discretos en el espacio recíproco. También descubrieron que la zona de Brillouin efectiva era casi esférica, con sólo una pequeña diferencia (17%) en el centro de la pseudoescapada. Sin embargo, no pudieron encontrar una brecha de banda completa; de hecho, la cuestión de si puede existir una brecha fotónica completa en los cuasicristales fotónicos sigue sin resolverse.

Todo esto ha facilitado múltiples avances en la demostración y utilización de las propiedades de interferencia en la óptica de los cuasicristales fotónicos. Los cuales siguen desarrollándose en varias áreas de la óptica, tales como la emisión de fotoluminiscencia y la superradiancia, la transmisión anómala a través de estructuras plasmónicas, la propagación de ondas en guías de ondas y la acción del láser [38].

Es así como en este proyecto de grado se desea calcular el espectro de transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasiperiódico, compuesto por capas semiconductoras ( $GaAs$ ) y superconductoras ( $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ). Empleando los métodos de la matriz de transferencia para la polarización de la transversal eléctrica y magnética, así como también una revisión al modelo de dos fluidos de Gorter-Casimir para la temperatura crítica ( $T_c$ ) del superconductor. Todo ello siguiendo la secuencia Thue-Morse para las disposiciones de las capas del  $CFs$ , y teniendo en cuenta los efectos que causan parámetros físicos como la temperatura y la presión al espectro de transmisión. El documento se encuentra distribuido de la siguiente manera: en el capítulo 2 presentamos el marco teórico necesario para el desarrollo del proyecto. En el capítulo 3 se presenta los resultados y un breve análisis de estos. Por último, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones y recomendaciones finales del proyecto.

## **1.1. Objetivos**

### **1.1.1. Objetivo General**

Estudiar el comportamiento del espectro de transmitancia al variar la temperatura, ángulo de incidencia, espesores de de los materiales, presión y secuencia Thue-Morse en las capas de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periódico, empleando el método de la matriz de transferencia.

### **1.1.2. Objetivos específicos**

- Calcular el espectro de transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periódico empleando el método de la matriz de transferencia y el modelo de los dos fluidos.
- Estudiar el comportamiento de la transmisión cuando se varia el espesor de los materiales y como se comporta este a diferentes rangos de longitudes de onda, empleando el software Wolfram Mathematica 11.3.
- Analizar el comportamiento del espectro de transmitancia al aumentar o disminuir la secuencia Thue-Morse y al variar parámetros físicos como presión y temperatura.

## 2. Marco teórico

### 2.1. ¿Qué son los Cristales Fotónicos?

Los cristales fotónicos son materiales dieléctricos periódicamente estructurados, los cuales llegan a actuar como cristales para los fotones. Siendo desarrollados con el fin de diseñar materiales que respondieran a las ondas de luz en un rango deseado de frecuencias, reflejándolas perfectamente o permitiéndoles propagarse solo en ciertas direcciones, o llegando incluso a confinarlas dentro de un volumen específico [39].

Los *CFs* están constituidos por una distribución periódica de dieléctricos, metales e incluso en ocasiones superconductores (como es nuestro caso); y se les caracteriza por la modulación periódica de la constante dieléctrica a lo largo de una, dos o tres direcciones del espacio. Desde su descubrimiento en 1987 por John y Yablonovitch, se ha debatido mucho sobre ellos. Inicialmente, Sajeev John estudió la localización de ondas electromagnéticas en materiales dieléctricos con tamaños de características comparables a la longitud de onda [2], mientras que Eli Yablonovitch investigó la emisión espontánea inhibida de un átomo dentro de espejos dieléctricos [1]. Desde entonces, han surgido muchas aplicaciones, como fibras de cristales fotónicos, fuentes de luz blanca, filtros sintonizables, entre muchos otros [40].

Los *CFs* son estructuras del orden del micrómetro o del nanómetro de forma que las ondas electromagnéticas con longitudes de onda en el rango visible se verán afectadas con efectos análogos a los que sufre un electrón en un potencial periódico. La modulación periódica de la constante dieléctrica en una, dos o tres direcciones resulta ser el origen de los cristales fotónicos unidimensionales (*CFs* – *1D*), bidimensionales (*CFs* – *2D*) y tridimensionales (*CFs* – *3D*), ver figura [2-1]. Los *CFs* se presentan como materiales prometedores habiéndose desarrollado un gran número de aplicaciones tecnológicas, asimismo no son solo estructuras artificiales, ya que se han encontrado también en la naturaleza donde han servido de inspiración a la tecnología.



**Figura 2-1.:** Representación esquemática de un CF-1D, CF-2D y CF-3D. El color diferente representa materiales con diferentes constantes dieléctricas [41].

### 2.1.1. Banda Fotónica prohibida

Los *CFs* al ser sistemas formados por arreglos periódicos de distintos materiales con diferentes respuestas ópticas, han impactado al mundo tecnológico por el descubrimiento de las brechas de bandas fotónicas (*BBFs*) que estas estructuras poseen y que se pueden describir como intervalos de frecuencia, en los cuales la propagación de la radiación electromagnética está prohibida [39]. Las *BBFs* o simplemente bandas fotónicas prohibidas (*BFPs*) dependen del factor de ocupación de los materiales que componen el *CF*, además de sus diferencias entre los índices de refracción y de las geometrías usadas en la disposición de dichos materiales. Por tal motivo, es de especial interés el comprender como se pueden controlar las *BFPs* sin llegar a modificar los *CFs*; esto con el propósito de optimizar aplicaciones de interés en la industria. Muchos autores han propuesto modificar las *BFPs* con la variación de las propiedades ópticas de los materiales que forman los *CFs*, mediante la aplicación de agentes externos, tales como: campos magnéticos o eléctricos, variaciones de temperatura y presión hidrostática para mencionar algunas de ellas.

## 2.2. Ecuaciones de Maxwell

En 1864 James Clerk Maxwell publicó en su artículo “Una teoría dinámica del campo electromagnético”, las ecuaciones básicas del campo electromagnético [15]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2-4)$$

Las ecuaciones de Maxwell son de mucha importancia ya que son las encargadas de describir la propagación de la radiación electromagnética en un medio, además de estudiar su interacción y comportamiento. Se sabe que para medios lineales, isótropos y homogéneos se cumple  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  corresponden a los vectores de campo eléctrico y magnético respectivamente,  $\mathbf{D}$  es el campo de desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{B}$  es el campo de inducción magnética y  $\epsilon$ ,  $\mu$  como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente. Este trabajo trata del comportamiento de la luz en interacción con la materia desde el punto de vista de la luz como una onda electromagnética.

### 2.3. Ondas Electromagnéticas

Las ecuaciones de (2-1) a (2-4) son un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Al desacoplar este sistema, resultan dos ecuaciones diferenciales lineales independientes de segundo orden. Aplicando el operador rotacional a la ec.(2-3):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

De la propiedad:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

Al emplear la ecuación (2-4), nos queda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2-5)$$

Al realizar exactamente el mismo procedimiento con la ecuación (2-4) llegaremos a

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (2-6)$$

Estas ecuaciones idénticas (una para  $\mathbf{E}$  y otra para  $\mathbf{B}$ ) relacionan la segunda derivada espacial parcial de los campos con su segunda derivada temporal parcial. Estas ecuaciones de onda derivadas de las ecuaciones de Maxwell son indicativas del carácter ondulado de los campos

electromagnéticos en la materia [43]. Es decir, los campos eléctrico y magnético obedecen a ecuaciones de onda y se propagan como ondas a la velocidad:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (2-7)$$

Siendo

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu} \quad (2-8)$$

El índice de refracción del material. Como para las ondas electromagnéticas en la materia las amplitudes del campo eléctrico son aproximadamente  $c$  veces la amplitud del campo magnético (a grandes rasgos, una diferencia de ocho órdenes de magnitud), toda la óptica está relacionada con el campo eléctrico. Es decir que en la óptica las permeabilidades de los materiales son cercanas a  $\mu_0$ . En este sentido  $\mu \approx \mu_0$ ,  $n \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r}$ , donde  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  es la permitividad relativa del medio.

### ■ Ondas planas monocromaticas

La solución más sencilla de la ecuación (2-5) se da para el caso de la onda plana monocromática. Este tipo de ondas son matemáticamente fáciles de describir y todos los conceptos importantes referente a este trabajo pueden ser ampliamente analizados sobre la base de este tipo de ondas. Para ello consideramos una onda plana electromagnética monocromática de frecuencia angular  $\omega$ , un vector de onda  $\mathbf{k}$  y una amplitud  $E_0$ , descrita por:

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2-9)$$

Una función similar se define para el campo magnético [42].

$$\mathbf{B}(r, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2-10)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es la coordenada espacial y refiriéndonos a ondas lineales polarizadas. Donde la polarización viene dada por la orientación de  $E_0$ .

#### 2.3.1. Condiciones de contorno

Es bien sabido que cuando una onda electromagnética encuentra una interfaz entre dos medios, una fracción de la energía asociada a la onda incidente se refleja desde la interfaz, y el resto de la energía se transmite a través de la interfaz, dando lugar a una onda reflejada y

transmitida respectivamente. Al resolver el problema de las amplitudes relativas de las ondas reflejadas y transmitidas con respecto a la onda incidente, nos ocupamos de un problema de condiciones de contorno. La relación de las amplitudes reflejadas y transmitidas con la amplitud incidente se rige por las ecuaciones de Maxwell.

Iniciamos considerando el problema de reflexión y refracción para ondas planas monocromáticas en un límite plano entre dos medios isotrópicos homogéneos 1 y 2. La onda entrante se encuentra con la interfaz desde el lado izquierdo en el medio 1, dando lugar a una onda reflejada de regreso al medio 1, y una onda transmitida al medio 2. Las condiciones de contorno generales dicen:

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_1^\perp = \epsilon_2 \mathbf{E}_2^\perp \quad (2-11)$$

$$\mathbf{B}_1^\perp = \mathbf{B}_2^\perp \quad (2-12)$$

$$\mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel \quad (2-13)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel \quad (2-14)$$

Aquí, los símbolos  $\perp$  y  $\parallel$  denotan, respectivamente, las componentes perpendiculares y paralelas del campo a la interfaz, y el subíndice denota los medios de propagación. En este caso, los campos con subíndice 1 corresponden a la superposición de las ondas entrante ( $\mathbf{E}_i$ ) y reflejada ( $\mathbf{E}_r$ ), mientras que los campos con subíndice 2 corresponden a la onda transmitida ( $\mathbf{E}_t$ ). Entonces, las condiciones de contorno se pueden reescribir como:

$$\epsilon_1 (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)^\perp = \epsilon_2 \mathbf{E}_t^\perp \quad (2-15)$$

$$(\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r)^\perp = \mathbf{B}_t^\perp \quad (2-16)$$

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)^\parallel = \mathbf{E}_t^\parallel \quad (2-17)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r)^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_t^\parallel \quad (2-18)$$

Donde  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , representan las constantes de permitividad y permeabilidad de los respectivos medios.

## 2.4. Formulas de Fresnel para la reflexión y transmisión

### 2.4.1. Reflexión y transmisión de las ondas P (onda TM)

Las ondas P también se conocen como ondas magnéticas transversales (TM) porque el campo magnético  $\mathbf{H}$  es perpendicular al plano de incidencia.

Haciendo referencia a la figura [2-2], consideramos la reflexión y la refracción de las ondas P, donde todos los vectores de campo eléctrico están en el plano de incidencia y los vectores de campo magnético son perpendiculares al plano de incidencia, dando un flujo de energía positivo en la dirección de propagación.

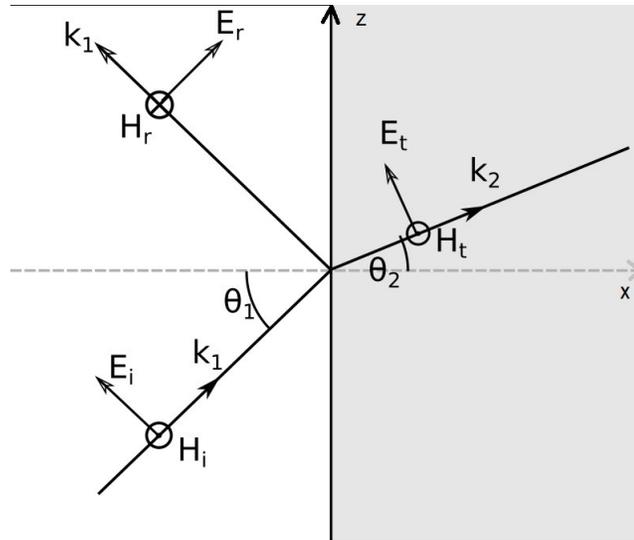


Figura 2-2.: Reflexión y transmisión de ondas P. [44]

En esta geometría, las cuatro condiciones de contorno se leen:

$$\epsilon_1 (-\mathbf{E}_i \sin \theta_i + \mathbf{E}_r \sin \theta_i) = -\epsilon_2 \mathbf{E}_t \sin \theta_t \quad (2-19)$$

$$0 = 0 \quad (2-20)$$

$$\mathbf{E}_i \cos \theta_i + \mathbf{E}_r \cos \theta_i = \mathbf{E}_t \cos \theta_t \quad (2-21)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{E}_t \quad (2-22)$$

Donde la expresión (2-19) la podemos reescribir como:

$$-\epsilon_1 \sin \theta_i (-\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = \epsilon_2 \mathbf{E}_t \sin \theta_t$$

$$\epsilon_1 \sin \theta_i (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \epsilon_2 \mathbf{E}_t \sin \theta_t$$

Empleando la Ley de Snell  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i}$

$$\epsilon_1 (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \epsilon_2 \mathbf{E}_t \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i}$$

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}$$

Definiendo el valor  $\beta = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}$ , obtenemos:

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = \beta \mathbf{E}_t \tag{2-23}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la ecuación (2-21), obtendremos lo siguiente:

$$\cos \theta_i (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = \mathbf{E}_t \cos \theta_t$$

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Si definimos  $\alpha = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$ , llegaremos a:

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \alpha \mathbf{E}_t \tag{2-24}$$

Ahora, sumando las expresiones (2-23) y (2-24):

$$\alpha \mathbf{E}_t + \beta \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{E}_t (\alpha + \beta) = 2\mathbf{E}_i$$

$$\frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_i} = \frac{2}{\alpha + \beta} \quad (2-25)$$

Ahora vamos a reemplazar (2-24) en (2-23) de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = \beta \left( \frac{\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r}{\alpha} \right)$$

$$\frac{\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r}{\beta} - \frac{\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r}{\alpha} = 0$$

$$\mathbf{E}_i \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) - \mathbf{E}_r \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

Llegando así a:

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}_i} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad (2-26)$$

De donde sabemos que los coeficientes de reflexión y transmisión están dados por:

$$r_p = \frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}_i} \quad , \quad t_p = \frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_i} \quad (2-27)$$

Reemplazando  $\alpha$  y  $\beta$  se obtiene

$$r_p = \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}}$$

$$r_p = \frac{\epsilon_1 n_2 \cos \theta_t - \epsilon_2 n_1 \cos \theta_i}{\epsilon_1 n_2 \cos \theta_t + \epsilon_2 n_1 \cos \theta_i}$$

Escribiendo  $\epsilon_1$  en términos de  $\epsilon_2$  y simplificando llegamos a:

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (2-28)$$

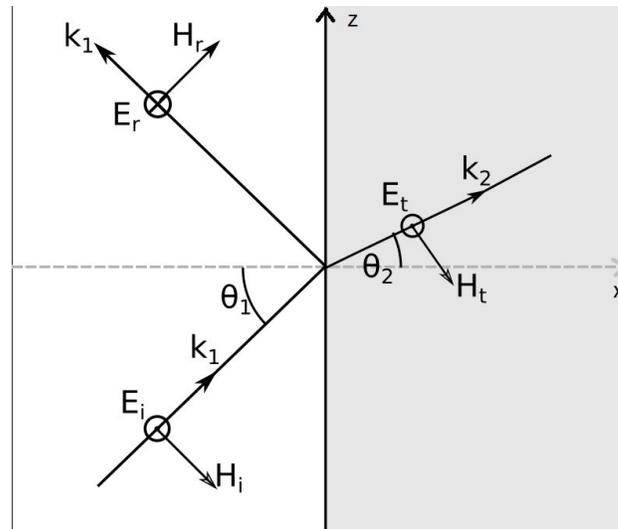
Siendo el coeficiente de reflexión para ondas P u onda (TM), hacemos lo mismo para determinar el coeficiente de la transmisión.

$$t_p = \frac{2}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}}$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (2-29)$$

Encontrando así el coeficiente de reflexión y transmisión para ondas P u onda (TM) o más conocidas como fórmulas de Fresnel para  $\mathbf{E}$  paralelos al plano de incidencia.

### 2.4.2. Reflexión y transmisión de las ondas S (onda TE)



**Figura 2-3.:** Reflexión y transmisión de ondas S. [44]

Las ondas S también se conocen como ondas eléctricas transversales (TE) porque el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es transversal al plano de incidencia. Como vemos de la figura [2-3], todos los vectores de campo eléctrico son perpendiculares al plano de incidencia y los vectores de campo magnético se eligen para dar un flujo de energía positivo en la dirección de los vectores de onda. Aplicando las condiciones de contorno obtenemos:

$$0 = 0 \quad (2-30)$$

$$\mathbf{B}_i \sin \theta_i + \mathbf{B}_r \sin \theta_i = \mathbf{B}_t \sin \theta_t \quad (2-31)$$

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \quad (2-32)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (-\mathbf{B}_i \cos \theta_i + \mathbf{B}_r \cos \theta_i) = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_t \cos \theta_t \quad (2-33)$$

Reescribiendo en términos del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , obtenemos:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i \sin \theta_i + \mathbf{E}_r \sin \theta_i) = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{E}_t \sin \theta_t \quad (2-34)$$

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \quad (2-35)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i \cos \theta_i - \mathbf{E}_r \cos \theta_i) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{E}_t \cos \theta_t \quad (2-36)$$

De la ecuación (2-36), podemos obtener:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{E}_t \cos \theta_t$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{E}_t \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Lo cual se llega a traducir en términos de  $\alpha$  y  $\beta$  como:

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = \alpha \beta \mathbf{E}_t \quad (2-37)$$

De donde sumaremos la expresión anterior con la ecuación (2-35)

$$\alpha \beta \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{E}_t (\alpha \beta + 1) = 2\mathbf{E}_i$$

$$\frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_i} = \frac{2}{\alpha\beta + 1} \quad (2-38)$$

Lo cual vendría siendo:

$$t_s = \frac{2}{\alpha\beta + 1} \quad (2-39)$$

De la expresión (2-44) tenemos:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sin \theta_i (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sin \theta_t \mathbf{E}_t$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \mathbf{E}_t$$

Si aplicamos la ley de Snell y luego reescribimos la expresión en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ , llegaremos a:

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}_i} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \quad (2-40)$$

$$r_s = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \quad (2-41)$$

Reescribiendo la expresión (2-39)

$$t_s = \frac{2}{1 + \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}\right) \left(\frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}\right)}$$

$$t_s = \frac{2\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i}{\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i + \epsilon_2 n_1 \cos \theta_t}$$

Haciendo que  $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1$ , llegaremos a:

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (2-42)$$

Siendo este el coeficiente de transmisión para ondas S u onda (TE), hacemos exactamente el mismo proceso para determinar el coeficiente de reflexión.

$$r_s = \frac{1 - \frac{\epsilon_2 n_1 \cos \theta_t}{\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i}}{1 + \frac{\epsilon_2 n_1 \cos \theta_t}{\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i}}$$

$$r_s = \frac{(\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i - \epsilon_2 n_1 \cos \theta_t) \epsilon_1 n_2 \cos \theta_i}{(\epsilon_1 n_2 \cos \theta_i + \epsilon_2 n_1 \cos \theta_t) \epsilon_1 n_2 \cos \theta_i}$$

Lo cual es equivalente a:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (2-43)$$

Encontrando así el coeficiente de reflexión y transmisión para ondas S u onda (TE) o más conocidas como fórmulas de Fresnel para  $\mathbf{E}$  perpendicular al plano de incidencia.

## 2.5. Matriz dinámica

De las ecuaciones (2-21) y (2-22), de donde evaluamos las condiciones de contorno para las ondas polarizadas P. Asumiremos ahora, por simetría, una onda entrante artificial del medio 2 al medio 1. La cuales identificaremos como amplitudes reflejadas primadas, generando que podamos reescribir nuestras ecuaciones (2-21) y (2-22) como:

$$\mathbf{E}_i \cos \theta_i + \mathbf{E}_r \cos \theta_i = \mathbf{E}_t \cos \theta_t + \mathbf{E}'_r \cos \theta_t \quad (2-44)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (\mathbf{E}_t - \mathbf{E}'_r) \quad (2-45)$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \cos \theta_i \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} & -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{E}'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_t & \cos \theta_t \\ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} & -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \end{pmatrix}$$

Aquí identificamos la matriz dinámica  $D_{p,i}$  para ondas P como:

$$D_{p,i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \cos \theta_i \\ \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} & -\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \end{pmatrix} \quad (2-46)$$

En términos del índice de refracción:

$$D_{p,i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \cos \theta_i \\ n_i & -n_i \end{pmatrix} \quad (2-47)$$

Donde  $i$  se refiere al medio ( $i = 1, 2$ ) y al ángulo. Por otro lado, siguiendo la misma geometría que para la onda tipo P, podemos obtener las condiciones de contorno modificadas para las ondas tipo S como:

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}'_r \quad (2-48)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{E}_i \cos \theta_i - \mathbf{E}_r \cos \theta_i) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (\mathbf{E}_t \cos \theta_t - \mathbf{E}'_r \cos \theta_t) \quad (2-49)$$

Expresando de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i & -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{E}'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t & -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t \end{pmatrix}$$

Identificando de esta forma, la matriz dinámica  $D_{s,i}$  para ondas tipo S:

$$D_{s,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \theta_i & -\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (2-50)$$

Y en términos del índice de refracción como:

$$D_{s,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_i \cos \theta_i & -n_i \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (2-51)$$

## 2.6. Sistema de Multicapas

Buscaremos calcular la reflectancia y la transmitancia en función de los parámetros de la onda incidente y de los sistemas estratificados como lo son: el número de capas, los materiales y sus espesores.

Tomaremos el plano de incidencia como el plano  $x - y$  y las interfaces que conectan las diferentes capas se eligen para que sean paralelas al plano  $y - z$ . De manera, que siguiendo esta geometría, nuestro campo eléctrico puede ser escrito como:

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}(x) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (2-52)$$

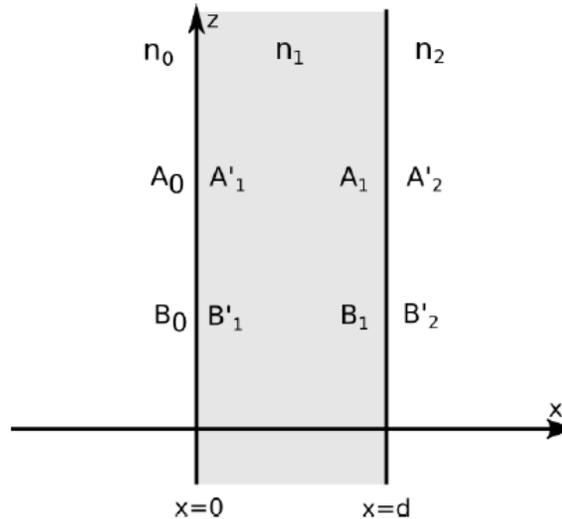
Siendo  $\beta$  la constante de propagación y dada por:

$$\beta = \left( \frac{n_0 \omega}{c} \right) \sin \theta_0 \quad (2-53)$$

Donde  $n_0$  y  $\theta_0$  son el índice de refracción y el ángulo de incidencia de en el medio incidente respectivamente. Se estableció de esta forma, ya que según la Ley de Snell, la componente  $z$  del vector de propagación es constante, mientras que las discontinuidades en la estructura se encuentran a lo largo del eje  $x$  [42]. Por lo tanto, solo consideramos la componente  $x$  en la fase espacial de la onda de propagación.

### 2.6.1. Método de matriz $2 \times 2$

Consideraremos una monocapa de índice de refracción  $n_1$  entre dos medios semi-infinitos, el medio incidente de índice de refracción  $n_0$  y el sustrato de índice de refracción  $n_2$ , tal y como se muestra en la figura [2-4].



**Figura 2-4.:** Geometría de una monocapa con el método matricial. [44]

Entendiéndose de la figura que una onda entrante viaja desde el lado izquierdo del medio con un índice de refracción  $n_0$  y se transmite a través del medio  $n_1$ , de manera, que la onda transmitida a la capa sufre muchas reflexiones en cada una de las interfaces límites, dando lugar a una superposición de ondas viajeras que van del lado izquierdo al lado derecho,

al mismo tiempo que también se presenta una superposición de ondas que van de derecha a izquierda. De tal forma, que una colección de ondas emerge de la capa hacia el medio incidente o lo que llamamos ondas reflejadas, y otro conjunto de ondas emerge hacia el sustrato, las ondas transmitidas.

Por lo tanto, nos interesan seis ondas: tres que viajan hacia la derecha y están etiquetadas con amplitudes  $A$ , y tres que regresan a la izquierda y están etiquetadas con amplitudes  $B$ . Resaltando que la onda con amplitud  $B_2$  no tiene significado físico (no hay una onda entrante del lado derecho del sustrato ya que se considera que es infinito), pero mantendremos esta onda artificial por ahora solo para dar simetría a las ecuaciones de las condiciones de contorno. Posteriormente bajaremos esta amplitud a cero para recuperar el significado físico en la solución del problema. Las amplitudes sin primar representan las amplitudes de las ondas justo en el lado izquierdo de las interfaces, mientras que las primadas serian básicamente lo opuesto, las amplitudes de la onda justo en el lado derecho de las interfaces. De manera que las condiciones de contorno son:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{E}_r \end{pmatrix} D_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{E}'_r \end{pmatrix} D_2 \quad (2-54)$$

Siendo  $D_1$  y  $D_2$  son las matrices dinámicas en cada medio para la respectiva polarización de las ondas. Empleando la expresión anterior en nuestro problema real tenemos que:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} D_0 = \begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \end{pmatrix} D_1 \quad (2-55)$$

Donde las amplitudes del medio 0, pueden ser expresadas en términos de las matrices dinámicas y las amplitudes del medio 1:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = D_0^{-1} D_1 \begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \end{pmatrix} \quad (2-56)$$

Una vez examinado lo que está sucediendo en el primer límite, podemos describir que esta sucediendo en la capa, para eso podemos hacer algo similar:

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (2-57)$$

Donde  $P_1$  es la matriz de propagación del medio 1 y está establecida como:

$$P_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_1} \end{pmatrix} \quad (2-58)$$

Siendo  $\phi = k_{1x}d$ , depende del espesor de la capa ( $d$ ) y de la componente  $x$  del vector de onda ( $k_{1x}$ ). Para finalizar, analizando la ultima interfaz del sistema como:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix} \quad (2-59)$$

Entonces, las amplitudes están relacionadas por:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = D_0^{-1} D_1 P_1 D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix} \quad (2-60)$$

De donde sabemos que este producto de matrices dinámicas<sup>1</sup> lo podemos expresar como:

$$D_i^{-1} D_j = D_{ij} = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad (2-61)$$

De manera que la expresión (2-60), nos queda:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = D_{01} P_1 D_{12} \begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix} \quad (2-62)$$

### 2.6.2. Método de la Matriz de Transferencia

Ahora utilizaremos la formulación matricial para resolver las amplitudes del campo eléctrico de cualquier medio estratificado isotrópico. Dado que, cuando el número de capas es demasiado grande, el análisis se vuelve muy complicado debido al gran número de ecuaciones involucradas. Por esta razón, utilizaremos un nuevo método matricial, conocido como método de la matriz de Transferencia (MMT).

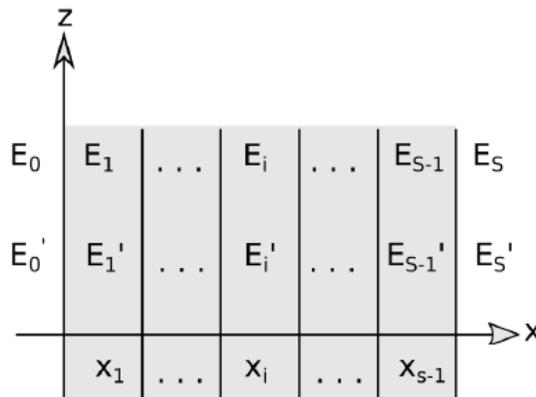


Figura 2-5.: Estructura de una multicapa [44]

<sup>1</sup>para el procedimiento detallado, ver el apéndice A

Para la estructura de la figura [2-5], nuestro propósito es buscar una expresión que nos permita determinar las amplitudes de las ondas en cada una de las capas, así como los coeficientes de Fresnel en función de la amplitud de la onda incidente. Para ello emplearemos el método de la matriz ( $2 \times 2$ ) que usamos en la sección anterior para una sola capa, ya que este método se puede generalizar para cualquier sistema multicapa.

En cuanto a nuestro sistema de la figura [2-5], vemos que  $E_i$  y  $E'_i$  son las amplitudes de las ondas viajeras derecha e izquierda presentes en cada una de las capas. Se logra apreciar que en el primer medio con índice de refracción  $n_0$  (o el aire en nuestro caso práctico) hay dos ondas:  $E_0$  que es la amplitud de la onda incidente que determinamos y  $E'_0$  que es la amplitud de la onda reflejada del sistema, y uno adicional que es la amplitud de la onda transmitida al sustrato  $E_s$ .

Siguiendo el mismo sentido que en la sección anterior, la expresión general que relaciona todas las amplitudes, viene dada por:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = D_0^{-1} \prod_{l=1}^{s-1} (D_l P_l D_l^{-1}) D_s \begin{pmatrix} E_s \\ E'_s \end{pmatrix} \quad (2-63)$$

Donde a la expresión  $D_0^{-1} \prod_{l=1}^{s-1} (D_l P_l D_l^{-1}) D_s$  recibe el nombre de matriz de transferencia del sistema (MTS), cuyo resultado está estipulado como:

$$D_0^{-1} \prod_{l=1}^{s-1} (D_l P_l D_l^{-1}) D_s = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

De manera que la expresión (2-63) se reescribe como:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_s \\ E'_s \end{pmatrix} \quad (2-65)$$

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s M_{11} + E'_s M_{12} \\ E_s M_{21} + E'_s M_{22} \end{pmatrix} \quad (2-66)$$

Suponiendo que la amplitud de la onda incidente  $E_0 = 1$  y que  $E'_0 = 0$  porque no hay una onda entrante desde el sustrato. Se puede establecer, que  $E_s$  es el coeficiente de la transmitancia y  $E'_0$  es el coeficiente de reflectancia del sistema, y están dados por las siguientes expresiones:

$$T = \frac{1}{|M_{11}|^2} \quad ; \quad R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2 \quad (2-67)$$

## 2.7. Modelo de Gorter-Casimir

Después del descubrimiento de la superconductividad del  $H_g$  a la temperatura del  $H_e$  líquido en 1911 por H. Kamerlingh Onnes, muchos grupos de investigación han intentado desarrollar materiales superconductores. La principal motivación es formar superconductores que tengan una temperatura de transición superconductor (  $T_c$  ) cercana a la temperatura ambiente. Esta es la temperatura por debajo de la cual cierto material se convierte en perfecto conductor de electricidad. Hasta ahora, el  $T_c$  más alto alcanzable es  $203K$  en  $H_2S$  a alta presión [45]. El modelo de dos fluidos de Gorter-Casimir (GC) es uno de los modelos que permite determinar la densidad de los portadores superconductores en función de la temperatura, siendo este el primer modelo fenomenológico antes de la teoría de la superconductividad introducida por Ginzburg y Landau en 1950. Por lo tanto, para describir algunas propiedades de los superconductores, por ejemplo, el comportamiento de la variación del campo crítico ( $H_c$ ) con la temperatura, el salto de calor específico en  $T_c$  y la variación de temperatura de la profundidad a la que penetra el campo magnético en un superconductor, el modelo de dos fluidos es un buen enfoque analítico desde el punto de vista de la termodinámica de equilibrio [46, 47].

En dicho modelo se consideran dos fluidos electrónicos con propiedades diferentes: uno de ellos describe las propiedades de los electrones en el estado normal, mientras que el segundo fluido describe las propiedades de los portadores en el estado superconductor [8]. En 1934, Gorter y Casimir propusieron la densidad de energía libre de Helmholtz en fase superconductor como:

$$F(x, T) = x^{\frac{1}{2}} f_n(T) + (1 - x) f_s(T) \quad (2-68)$$

Donde  $x$  es la fracción de electrones normales ( $\frac{N_n}{N}$ ) y  $(1 - x)$  es la fracción de superelectrones ( $\frac{N_s}{N}$ ) en fase superconductor. Siendo  $N$ ,  $N_n$  y  $N_s$ , el número de electrones totales, electrones normales y superelectrones respectivamente.

Con la energía libre para los electrones en estado normal y la energía de condensación de los electrones normales en superelectrones ( $\beta$ ) dada por las expresiones:

$$f_n(T) = -\frac{\gamma}{2} T^2 \quad ; \quad f_s = -\beta \quad (2-69)$$

Gorter y Casimir habían considerado sólo el calor específico normal por mol de electrones de conducción  $C_e = \gamma T$ . De manera que, si los electrones de conducción tienen masas efectivas  $m^*$  que difieren de las masas de electrones libres  $m$ , el coeficiente de calor específico de los electrones de conducción  $\gamma$ , estará dado por [48]:

$$\gamma = \frac{m^*}{m} \gamma_0$$

Con  $\gamma_0 = 4.93 \frac{R}{T_F}$ , siendo  $T_F$  la temperatura de Fermi.

Al minimizar la energía libre de la expresión (2-68) con respecto a  $x$  se llega a la conclusión que la fracción de electrones normales que minimiza la energía libre presenta la siguiente dependencia con la temperatura [8] :

$$x_n = \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (2-70)$$

Donde temperatura crítica del superconductor estar'a dada por  $T_c = \sqrt{\frac{4\beta}{\gamma}}$ , y al emplear esto, podemos escribir la densidad de portadores superconductores como:

$$x_s = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (2-71)$$

De tal forma que a la temperatura crítica se rompa la superconductividad y ya no hayan electrones en el estado superconductor.

### 2.7.1. Permitividad relativa de un material superconductor

Vamos a considerar que la permitividad dieléctrica del sistema superconductor, puede ser representada como la suma de dos términos:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_s$$

Donde  $\varepsilon_n$  es la permitividad dieléctrica correspondiente a los portadores en el estado normal, es decir, aquellos que tienen carga  $e_n$  y masa  $m_n$ . Por otro lado,  $\varepsilon_s$  es la permitividad dieléctrica asociada a los portadores en el estado superconductor, que tienen una carga  $e_s$  y una masa  $m_s$ .

Dado que el movimiento de los portadores normales es disipativo, la ecuación del movimiento de una carga es:

$$\mathbf{F} = -e_n \mathbf{E}$$

Donde  $\mathbf{E}$  representa la presencia de un campo eléctrico oscilatorio, de manera que nuestra ecuación se reescribe como:

$$m_n \mathbf{r}_n'' = -e_n E_0 e^{-i\omega t}$$

Y teniendo en cuenta los efectos disipativos, nuestra expresión puede tomar la forma de:

$$m_n \mathbf{r}_n'' = -m_n \gamma_n \mathbf{r}_n' - e_n E_0 e^{-i\omega t} \quad (2-72)$$

Cuya solución esta dada por:

$$\mathbf{r}_n = -\frac{e_n}{m_n} \left( \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} E_0 e^{-i\omega t} \right) \quad (2-73)$$

Ya que  $n_n$  es el número de portadores normales en unidad de volumen, podemos decir que la polarización tendrá la forma de:

$$\mathbf{P}_n = n_n e_n \mathbf{r}_n$$

Que es lo mismo a decir;

$$\mathbf{P}_n = -\frac{e_n^2 n_n}{m_n} \left( \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} E_0 e^{-i\omega t} \right) \quad (2-74)$$

Sin embargo, el movimiento de los portadores superconductores no es disipativo, de manera, que su ecuación de movimiento, sera la de una carga aislada:

$$m_s \mathbf{r}_s'' = -e_s E_0 e^{-i\omega t} \quad (2-75)$$

Cuya solución, esta dada por:

$$\mathbf{r}_s = -\frac{e_s}{m_s} \left( \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \quad (2-76)$$

Y lo que conlleva a la siguiente expresión para la polarización asociada a la dinámica del sistema superconductor:

$$\mathbf{P}_s = -\frac{e_s^2 n_s}{m_s} \left( \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \quad (2-77)$$

Siendo  $n_s$  la densidad del número de portadores superconductores.

De tal manera, que si sumamos ambas polarizaciones, encontraremos una polarización total del sistema:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_s = -\frac{e_n^2 n_n}{m_n} \left( \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} E_0 e^{-i\omega t} \right) - \frac{e_s^2 n_s}{m_s} \left( \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_s = -E_0 e^{-i\omega t} \left\{ \left( \frac{e_n^2 n_n}{m_n} \right) \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} - \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{e_s^2 n_s}{m_s} \right) \right\} \quad (2-78)$$

Pero sabemos de la definición que la polarización del sistema, esta dada por la susceptibilidad eléctrica del sistema y por la constante dieléctrica del vacío [8]. Por la expresión:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 X E_0 e^{-i\omega t} \quad (2-79)$$

De manera que al reemplazar ambas expresiones podamos obtener una expresión para la susceptibilidad eléctrica:

$$\varepsilon_0 X E_0 e^{-i\omega t} = -E_0 e^{-i\omega t} \left\{ \left( \frac{e_n^2 n_n}{m_n} \right) \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} + \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{e_s^2 n_s}{m_s} \right) \right\}$$

$$X = - \left\{ \left( \frac{e_n^2 n_n}{m_n \varepsilon_0} \right) \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} + \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{e_s^2 n_s}{m_s \varepsilon_0} \right) \right\}$$

De donde encontramos las frecuencias de plasma características:

$$\omega_{pn}^2 = \frac{e_n^2 n_n}{m_n \varepsilon_0} \quad ; \quad \omega_{ps}^2 = \frac{e_s^2 n_s}{m_s \varepsilon_0} \quad (2-80)$$

Y la expresión para la susceptibilidad eléctrica del sistema nos queda:

$$X = - \left\{ \frac{\omega_{pn}^2}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \right\} \quad (2-81)$$

Ahora asumiremos que el conjunto de portadores está inmerso en un medio con permitividad dieléctrica relativa ( $\varepsilon_r$ ), de manera que:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\infty + X$$

Donde  $\varepsilon_\infty$  es la permitividad dieléctrica no dispersiva asociada al medio dieléctrico en el cual están inmersos los portadores. Al reemplazar se obtiene;

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_{pn}^2}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (2-82)$$

Adicionalmente, si llegamos a considerar frecuencias tales que  $\frac{\omega_p^2 \gamma_n}{\omega^2 + i\gamma_n^2 \omega} \ll 1$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma_1 \omega} - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (2-83)$$

Donde  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ . Y observándose que la expresión, además de presentar la dispersión temporal (dependencia explícita con la frecuencia  $\omega$ ), la permitividad dieléctrica depende de la temperatura, entendiéndose que dicha expresión es válida únicamente para temperaturas por debajo de la temperatura crítica.

Si en la ecuación (2-83) consideramos que  $T \ll T_c$ , es decir, la densidad de los portadores normales es muy pequeña y la densidad de los portadores superconductores depende débilmente de la temperatura, y además que  $\varepsilon_\infty = 1$ ; entonces la permitividad dieléctrica relativa toma la forma:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (2-84)$$

De donde sabemos que:

$$\omega_{ps} = \frac{c}{\lambda_L}$$

Siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $\lambda_L$  la profundidad de penetración de London dependiente de la temperatura, y definida por la expresión:

$$\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2}} \quad (2-85)$$

Donde la profundidad de penetración de London de nuestro superconductor a la temperatura de  $T = 0$  es  $\lambda_0 = 200nm$ . De manera que podemos obtener la permitividad relativa del material superconductor como:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{c^2}{\omega^2 \lambda_L^2} \quad (2-86)$$

## 2.8. Modelo semiconductor

De los trabajos de Samara [49] y Elabsy [50] sobre la constante dieléctrica del *GaAs*, podemos describir la respuesta óptica de la capa semiconductor como:

$$\varepsilon_r(P, T) = \left( \varepsilon_0 + Ae^{\frac{T}{T_0 P}} \right) e^{-\alpha P} \quad (2-87)$$

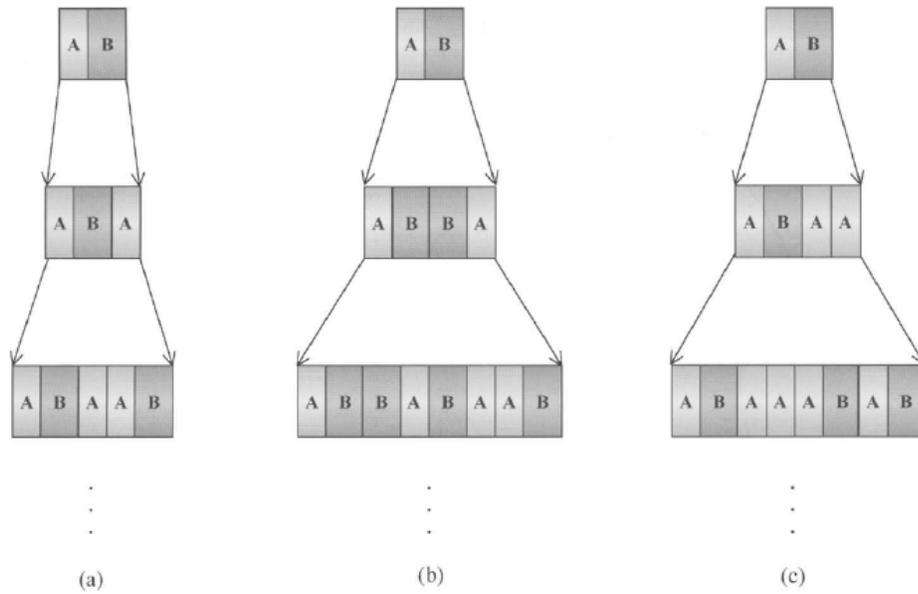
Donde  $\varepsilon_0 = 12.446$ ,  $A = 0.21125$ ,  $T_0 = 240.7$  K, y  $\alpha = 0.00173 \text{ kbar}^{-1}$ . Siendo esta expresión ajustada de los trabajos de Samara y Elabsy en función de la presión y la temperatura. De manera que el índice de refracción se pueda calcular como  $\sqrt{\varepsilon_r}$  [51].

## 2.9. Secuencia Thue-Morse

La secuencia de Thue-Morse surgió como resultado de estudios sistemáticos de cadenas aperiódicas iniciados por Thue [52] en 1906. Sus resultados parecen haber sido redescubiertos muchas veces desde entonces, pero la contribución más importante para aplicar y comprender esta secuencia fue realizado en 1921 por Morse bajo el tema de la dinámica topológica [19]. Aunque hay varias formas de definir la sucesión de Thue-Morse, es fácil demostrar que son equivalentes entre sí. Por lo tanto, tomando su forma más simple, la sucesión de Thue-Morse puede definirse mediante las relaciones recursivas:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-1}^+ \quad y \quad S_n^+ = S_{n-1}^+S_{n-1} \quad (2-88)$$

Para  $n \geq 1$  y según la figura [2-6] con  $S_0 = A$  y  $S_0^+ = B$ . Una forma alternativa y quizás más sencilla de construir esta secuencia es a través de las reglas de inflación  $A \rightarrow AB$  y  $B \rightarrow BA$ .



**Figura 2-6.:** Ilustración esquemática de las estructuras cuasiperiódicas: (a) Fibonacci, (b) Thue-Morse, (c) Periodo doble. [19]

De acuerdo la figura [2-6:(b)], las generaciones de Thue-Morse son:

$$S_0 = A, \quad S_1 = AB, \quad S_2 = ABBA, \quad S_3 = ABBABAAB, \quad \text{etc.} \quad (2-89)$$

El número de bloques construidos en este sistema cuasiperiódico aumenta con  $n$  como  $2^n$ , mientras que la relación entre el número de bloques de construcción A y el número de bloques de construcción B es constante e igual a la unidad.

### 3. Resultados y discusión

Nuestro objeto de estudio se compone por capas de un material semiconductor y superconductor, donde la capa  $A$  representa a nuestro semiconductor  $GaAs$ , cuya respuesta óptica estará dada por su constante dieléctrica en función de la presión y la temperatura (Ec. 2-87):

$$\varepsilon_r(P, T) = \left( \varepsilon_0 + Ae^{\frac{T}{T_0}} \right) e^{-\alpha P}$$

De donde se emplearan los datos de la Tabla [3-1] para el respectivo cálculo. Por otro lado, la capa  $B$  representa la capa superconductora del  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  y la respuesta electromagnética vendrá dada por la expresión de la constante dieléctrica sin pérdida (Ec. 2-86), deducida mediante el modelo de dos fluido:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{c}{\omega^2 \lambda_L^2}$$

Sabiendo que el  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  tiene una temperatura crítica de  $T_c = 92K$  y su profundidad de penetración a  $T = 0K$  es  $\lambda_0 = 200nm$ , y su temperatura de funcionamiento  $T = 80K$  [53, 54].

**Tabla 3-1.:** Valores constantes para el calculo de la constante dieléctrica del  $GaAs$  [49, 50].

Material	$\varepsilon_0$	$A$	$T_0$	$\alpha$
$GaAs$	12.446	0.21125	240.7K	0.00173Kbar <sup>-1</sup>

Los materiales  $A$  y  $B$  anteriormente mencionados se encuentran alternados cuasiperiódicamente por la secuencia Thue-Morse que se muestra en la Tabla [3-2].

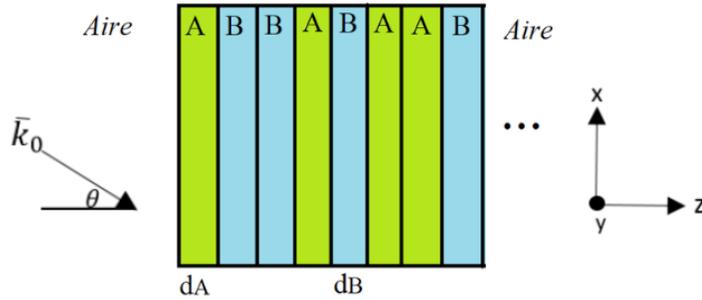
De manera que la estructura a estudiar presentada en la figura [3-1] es un cristal fotónico unidimensional cuasiperiódico correspondiente a la secuencia de Thue-Morse  $S_3$  con un patrón homogéneo en el plano  $xy$ . Donde  $d_A$  y  $d_B$  representan los espesores de la capa  $A$  y  $B$  respectivamente.

De esta forma se procede a calcular la respuesta de la transmisión, mostrando los efectos de la secuencia Thue-Morse y la particular diferencia que posee esta de una estructura periódica

**Tabla 3-2.:** Secuencias de Thue-Morse.

$n$	$S_n$	$S_n^\dagger$	Secuencia	Capas
1	$S_1 = S_0 S_0^\dagger$	$S_1^\dagger = S_0^\dagger S_0$	$S_0 S_0^\dagger$	AB
2	$S_2 = S_1 S_1^\dagger$	$S_2^\dagger = S_1^\dagger S_1$	$S_1 S_1^\dagger$	ABBA
3	$S_3 = S_2 S_2^\dagger$	$S_3^\dagger = S_2^\dagger S_2$	$S_2 S_2^\dagger$	ABBABAAB
4	$S_4 = S_3 S_3^\dagger$	$S_4^\dagger = S_3^\dagger S_3$	$S_3 S_3^\dagger$	ABBABAABBAABABBA

con  $N = 14$  capas. Señalaremos como afecta el ángulo de incidencia para polarización  $TE$  y  $TM$  de la onda incidente; y la variación de los espesores de las capas superconductor y semiconductor, además, identificaremos el efecto que las cantidades físicas como temperatura y presión pueden generar en la respuesta de transmisión de la matriz.

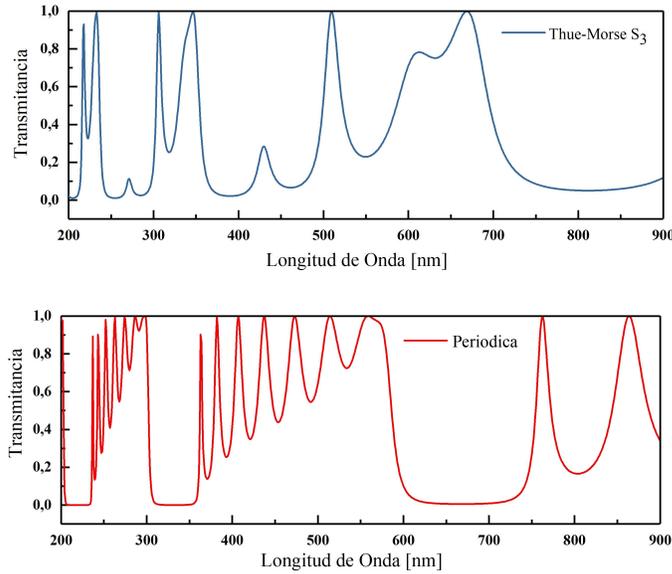


**Figura 3-1.:** Cristal fotónico unidimensional cuasiperiódico con secuencia de Thue-Morse  $S_3$ .

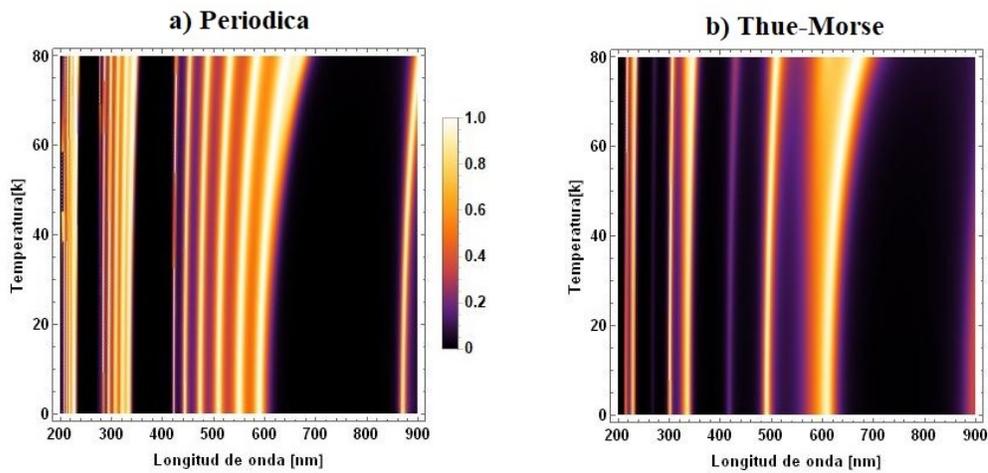
### 3.1. Efecto de la Secuencia Thue-Morse

La figura [3-2] muestra la transmisión para la secuencia Thue-Morse  $S_3$  y secuencia con periodicidad  $N = 14$  en función de la longitud de onda, bajo una incidencia normal y espesores  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ . Evidenciándose en la Thue-morse la presencia de 6 brechas de banda fotónicas, siendo la primera entre  $200nm$  y  $213nm$  ubicada en la región del ultravioleta con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 13nm$  y otra entre  $368nm-415nm$  la cual posee el mayor ancho de banda de las seis con  $\Delta\lambda = 47nm$ . A diferencia de la periódica que muestra 3 brechas de bandas fotónicas definidas, localizándose la primera de ella en  $206nm$  y  $235nm$  con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 29nm$  y otro dentro del rango visible de  $614nm-726nm$ , teniendo este el mayor ancho de banda de los tres con  $\Delta\lambda = 112nm$ . Entendiéndose de esta manera, que al emplear la secuencia Thue-morse se lograra una mayor aparición de brechas

de bandas fotónicas pero siendo sus respectivos anchos de banda menores que al emplearse una matriz compuesta con secuencia periódica.

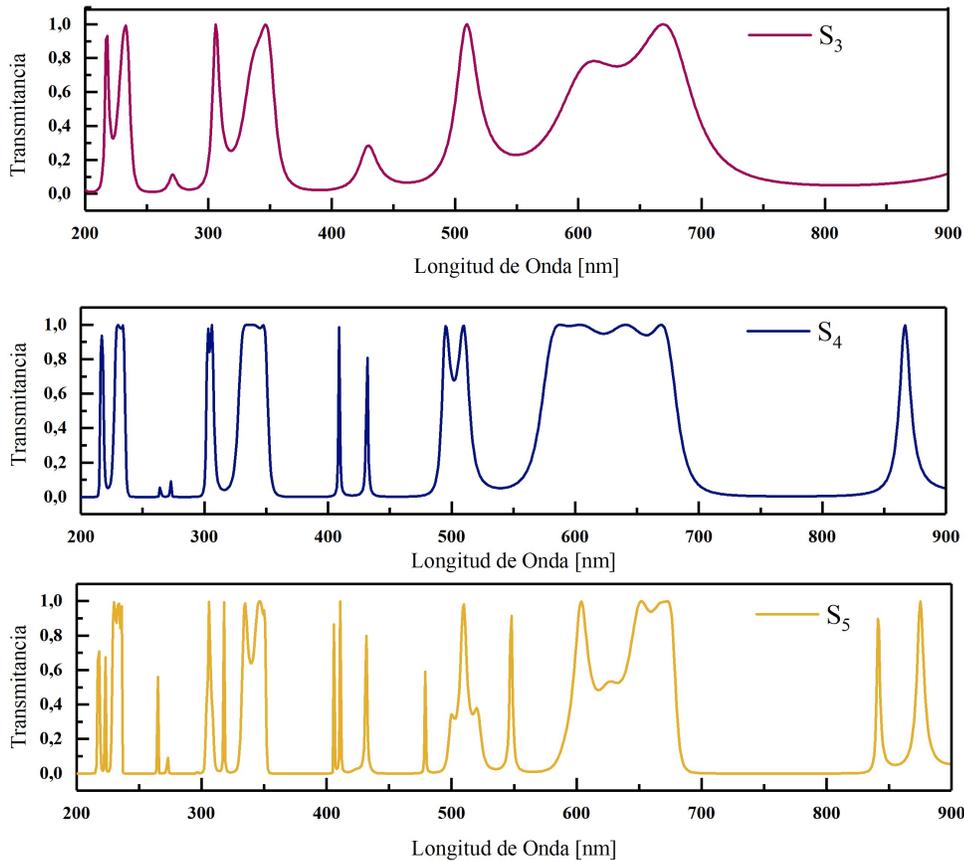


**Figura 3-2.:** Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D a incidencia normal para la secuencia  $S_3$  y Periódica con  $N=14$ . El espesor de la capa semiconductor y superconductor son  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , con temperatura de funcionamiento  $T = 80K$  y presión  $P = 20kbar$ .



**Figura 3-3.:** a) Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D con Periodicidad  $N = 14$ , b) transmisión del cristal fotónico superconductor 1D para la secuencia Thue-Morse  $S_3$  en función de su temperatura. El espesor de las capas semiconductoras y superconductoras son  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , bajo incidencia normal y presión  $P = 20kbar$ .

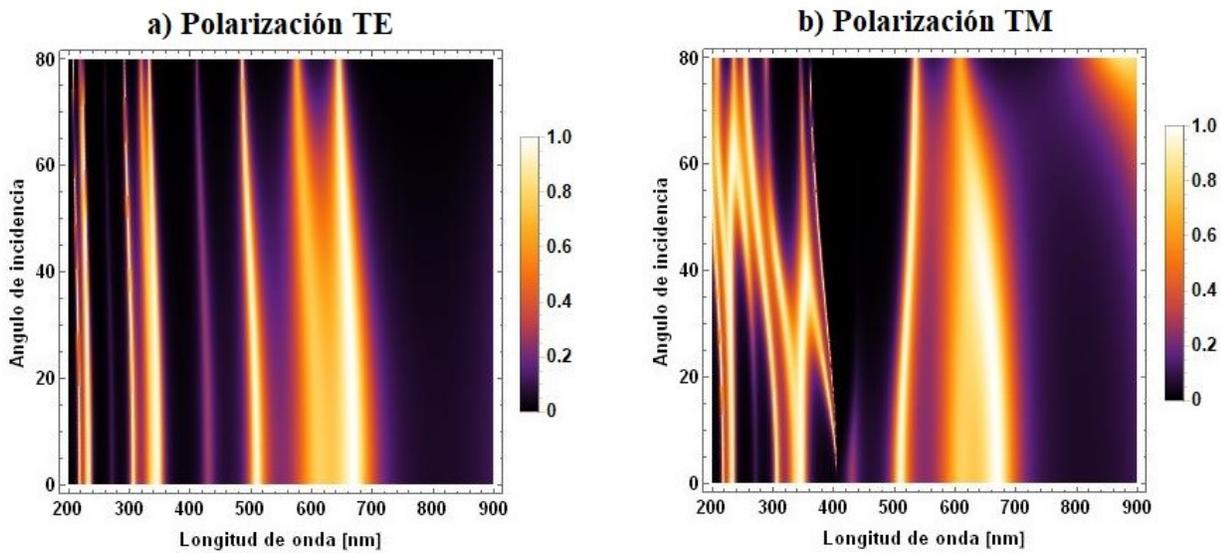
De la figura [3-3] se representa el espectro de transmitancia en función del aumento de temperatura (entre  $0k$  y  $80k$ ), manteniendo constante los espesores de  $GaAs$  en  $100nm$  y  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  en  $20nm$ . Notando en [3-3:(a)] un pequeño cambio del espectro de transmitancia hacia regiones de longitudes de onda largas cuando  $\lambda > 420nm$ , lo que se puede atribuir a un aumento en la constante dieléctrica del superconductor o del semiconductor al aumentarse la temperatura. Por otro lado, en [3-3:(b)] también se logra apreciar el corrimiento a mayores valores de longitudes de onda con el aumento de la temperatura, con la particularidad de que en la región de  $533nm$  a  $576nm$  aparece una  $BBF$  debido a la secuencia Thue-Morse, dado que en la secuencia periódica el espectro es continuo. Además en [3-3:(b)] se logra apreciar claramente que en la región de  $763$  a  $865nm$  se trata de una  $BBF$  con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 102nm$ , ancho de banda que no se alcanzaba a ver claramente en la figura [3-2]. Por otro lado, en la figura [3-3:(a)], podemos observar que el espectro de transmitancia posee 3 brechas y que efectivamente son de mayor ancho de banda que en la Thue-Morse, donde se logran apreciar ciertos rangos de transmisión en medio de las  $BBF$ .



**Figura 3-4.:** Transmisión del cristal fotónico superconductor 1D a incidencia normal para las secuencias  $S_3$ ,  $S_4$  y  $S_5$ , con espesores de  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , a  $T = 80K$  y  $P = 20kbar$ .

De la figura [3-4] se determino el espectro de transmitancia para las secuencias Thue-Morse  $S_3$ ,  $S_4$  y  $S_5$  bajo incidencia normal, apreciándose que entre más se aumente la secuencia Thue-Morse y por ende, haya mayor números de capas superconductoras y semiconductoras, las  $BBF$  se harán más visibles, en otras palabras, conformen se aumente la secuencia la aparición de nuevos Gaps se hará más frecuente, junto con la disminución de los anchos de banda en los picos de transmisión, pues se logra apreciar como se vuelven más delgados. Notando que en la  $S_4$  el espectro de transmisión se mantiene continuo en el rango de  $580-675nm$ , es decir, en el rango visible. Pero este espectro de transmisión se corta en la  $S_5$  al originarse una nueva formación de  $BBF$  en medio de ese rango.

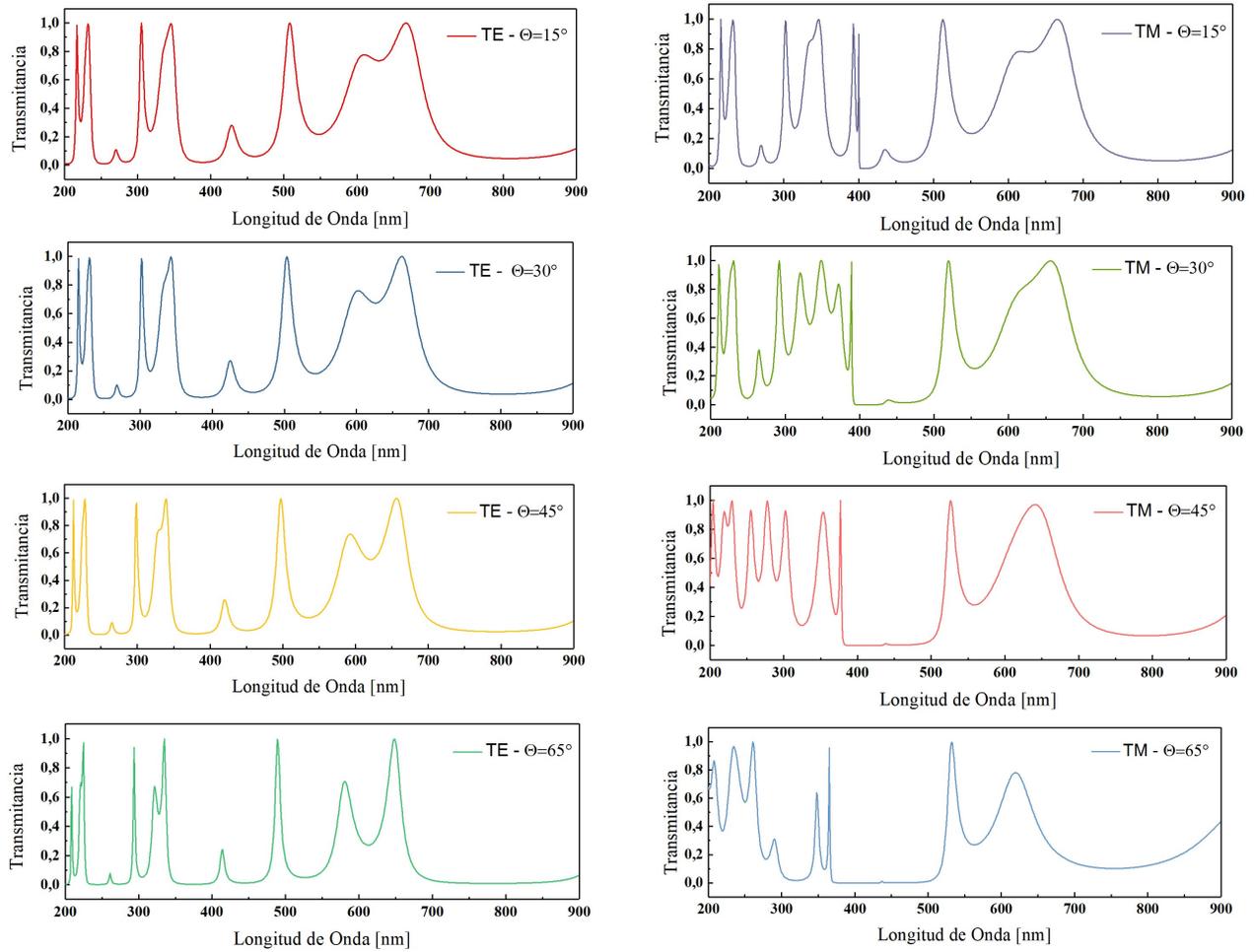
### 3.2. Efecto del Ángulo de incidencia



**Figura 3-5.:** a) Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D para la polarización  $TE$ , b) Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D para la polarización  $TM$  en función de su ángulo de incidencia. Con secuencia Thue-Morse  $S_3$  y espesores  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , a  $T = 80K$  y  $P = 20kbar$ .

El espectro de transmitancia para las polarizaciones  $TE$  y  $TM$  con un aumento en el ángulo de incidencia se muestra en la figura [3-5]. Donde podemos observar que los bordes de las  $BBF$  son sensibles a un aumento en el ángulo de incidencia. La figura [3-5:(a)] muestra los resultados del espectro para la polarización  $TE$  cuando los espesores de los materiales  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  y  $GaAs$  son de  $20$  y  $100nm$ , respectivamente. Para  $\theta = 0^\circ$ , obtuvimos seis  $BBF$  entre los cuales el primero es para longitudes de onda menores a  $212nm$ , el segundo es para la región ultravioleta con bordes entre  $239$  y  $271nm$ , destacándose una pequeña señal

de transmisión en  $272nm$  y volviendo a caer a cero la transmitancia a los  $281nm$  con la aparición de la tercera *BBF*. Para  $\theta = 70^\circ$ , se puede observar que la transmisión se corta aun más al formarse 8 *BBF*, en donde, las *BBF* de la regiones de  $239$  y  $281nm$  para cuando el ángulo de incidencia era de  $\theta = 0^\circ$  se combinaron en una sola aumentando su ancho de banda hasta los  $\Delta\lambda = 59nm$ . Además, de la aparición de 2 nuevas *BBF*, ubicándose la primera de ellas en las regiones de  $507nm$  y  $562nm$ , y otra en  $593nm - 633nm$ . Llegándose a notar de forma clara cuando  $\theta = 80^\circ$ .



**Figura 3-6.:** Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la incidencia para las polarizaciones *TE* y *TM*. Con secuencia Thue-Morse  $S_3$  y espesores de las capas  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , a  $T = 80K$  y  $P = 20kbar$ .

Por otro lado, la figura [3-5:(b)] muestra los resultados del espectro para la polarización *TM* y con los mismos espesores de las capas. Donde se puede ver de manera clara que al aumentar el ángulo de incidencia, los bordes de estas *BBF* se desplazan hacia longitudes de onda más cortas. Esto dado a que, la *BBF* en la región de  $719 - 900nm$  cuando  $\theta = 0^\circ$  se desplazo a  $645 - 788nm$  para un ángulo de incidencia igual  $\theta = 80^\circ$ . Así mismo, se destaco la existencia

de una *BFF* que se incrementaba según fuera aumentando el ángulo de incidencia, puesto que, al ser su ángulo de incidencia  $\theta = 0^\circ$  se obtuvo un ancho de banda igual  $\Delta\lambda = 15nm$ , pero cuando  $\theta = 80^\circ$  su ancho de banda llegó a ser de  $\Delta\lambda = 158nm$ .

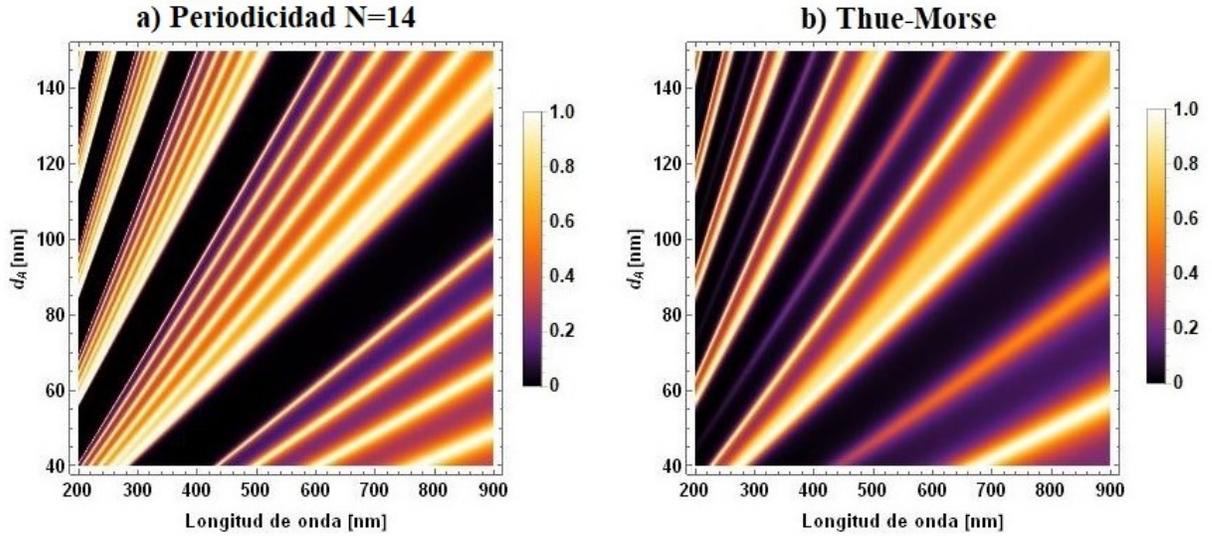
Los espectros de transmisión de las polarizaciones *TE* y *TM* en diferentes ángulos de incidencia de  $15^\circ$ – $65^\circ$  con  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$  a  $T = 80K$  se muestran en la Figura [3-6]. Para la polarización *TE* se puede ver un cambio a longitudes de ondas más bajas en las *BFF* pero expandiendo sus anchos de banda. A  $15^\circ$ , se pudo identificar un total de 6 *BFF*, estando ubicada una de ellas en el rango de 363 a 409nm, con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 46nm$ , además de contar con 6 picos de transmisión. Pero como se evidencio en la figura [3-5], las *BFF* son completamente sensibles al ángulo de incidencia, en  $\theta = 65^\circ$ , podemos observar la misma *BFF* desplazada a frecuencias más bajas, al contar con bordes superior e inferior de 338 y 407nm, con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 69nm$  y 8 picos de transmisión definidos, mayor que para la incidencia de  $15^\circ$ . De igual forma para la polarización *TE* se puede evidenciar que la banda de transmisión se desplazada a frecuencias más bajas, en otras palabras, los picos de transmisión en la figura se vuelven mas delgados, siendo a los  $15^\circ$  los bordes superior e inferior de la banda de transmisión de 502 y 515nm, con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 13nm$ . A diferencia de cuando  $\theta = 65^\circ$ , cuyos bordes superiores e inferiores fueron de 487 y 492nm, con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 5nm$ , menor que los casos anteriores.

En el comportamiento de las *BFF* de la polarización *TM*, los gaps también se desplazan a regiones de menor longitud de onda como en el caso de *TE* y los bordes superior e inferior de la banda de transmisión también se desplazan a longitudes de onda más bajas, pero el ancho de banda de estos casos no parece a verse disminuido sino que pareciera ampliarse. Para  $\theta = 15^\circ$  se evidencian cuatro picos de transmisión en la región ultravioleta, mientras que, para  $\theta = 30^\circ$ , se alcanzan a notar 5 picos, con anchos de bandas mayores, pues para el pico de transmisión con bordes superiores e inferiores de 227 y 234nm (para  $\theta = 15^\circ$ ), se obtuvo un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 7nm$ , por otro lado, para  $\theta = 30^\circ$  el pico de transmisión resulto con bordes superiores e inferiores iguales a 224 y 233nm, y con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 9nm$ . Resultando en que efectivamente los bordes superior e inferior de la banda de transmisión también se desplazan a longitudes de onda más bajas, pero el ancho de banda en estos casos se amplía. Cabe resaltar la sensibilidad de la *BFF* a los cambios del ángulo de incidencia, pues se ve claramente como para un polarización *TM*, el gaps de la región de 400 a 500nm aumenta bastante su ancho de banda.

### 3.3. Efecto del espesor de la capa *A* y *B*

Los dos paneles de la figura [3-7] muestran los efectos sobre el espectro de transmitancia para una incidencia normal cuando aumentamos el espesor del material semiconductor para una Periodicidad  $N = 14$  y secuencia Thue-Morse  $S_3$ . En la figura [3-7:(a)], la temperatura de funcionamiento es de 80K, el espesor de la capa superconductora  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  permanece

constante en  $d_B = 20nm$  y el espesor de la capa semiconductor  $GaAs$  aumenta de 40 a  $150nm$ . Podemos observar que hay una  $BFF$  con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 124nm$  y que los bordes en el rango del ultravioleta se pueden observar a 297 y  $421nm$  cuando  $d_A = 40nm$ . Al aumentar el grosor del semiconductor, se puede observar un cambio a longitudes de onda largas de las  $BFF$  junto con un aumento de ancho de banda en la transmisión, además, de la aparición de nuevos espacios donde la transmisión cae a cero. Ya que para  $d_A = 60nm$  se obtuvieron 2  $BFF$ , la primera pudiéndose observar a 205 y  $287nm$ , y la segunda ubicándose a 412 y  $576nm$  con un ancho de  $\Delta\lambda = 164nm$ , pero cuando  $d_A = 140nm$  se obtiene un total de 4  $BFF$ .

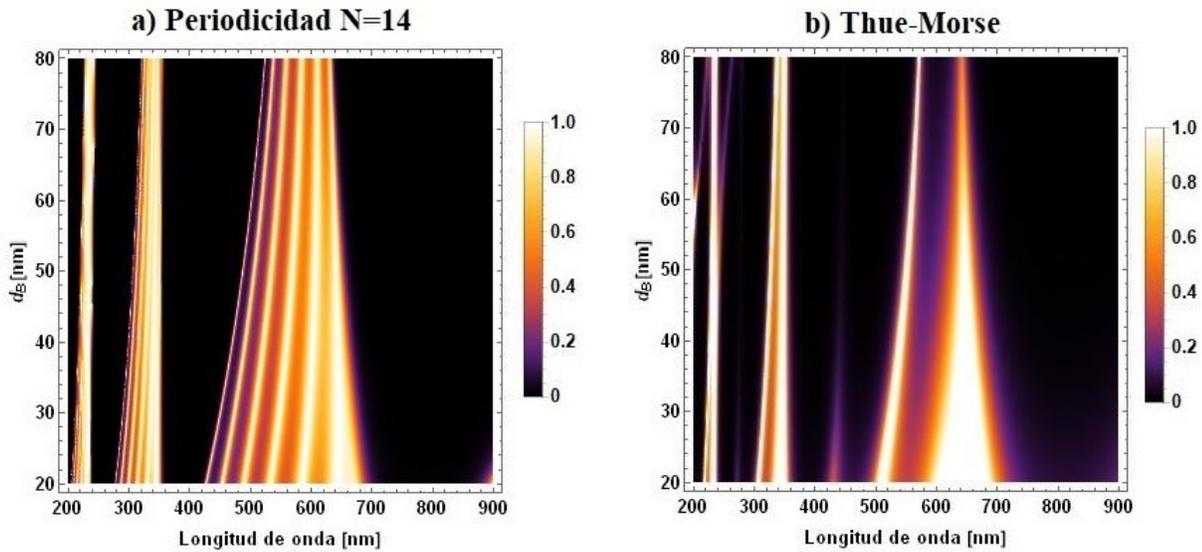


**Figura 3-7.:** Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la capa semiconductor con a) periodicidad  $N = 14$  y b) secuencia Thue-Morse  $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa superconductor igual a  $d_B = 20nm$ , a  $T = 80K$  y  $P = 20kbar$ .

En la figura [3-7:(b)], la secuencia Thue-Morse  $S_3$  genera que la periodicidad se rompa al generarse nuevas  $BFF$  en regiones donde la transmisión era distinta de cero cuando la secuencia entre capas era periódica. Para cuando  $d_A = 40nm$  se obtuvo una primera  $BFF$  con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 40nm$  en la región de 175 a  $215nm$ ,  $BFF$  que no existía para este rango cuando se empleó una película de periodicidad  $N = 14$ . De igual manera que en la figura [3-7:(a)], cuando aumentamos el espesor de la capa semiconductor bajo una secuencia Thue-Morse, las  $BFF$  se desplazaron hacia longitudes de ondas más largas aumentando el ancho de banda de la transmisión. Esto con la particularidad que abran pequeñas regiones donde la transmisión no es máxima ni tampoco cae a cero originando una  $BFF$ , esto para longitudes de onda de 468 a  $592nm$  para  $d_A = 40nm$ .

La figura [3-8] muestran los efectos sobre el espectro de transmitancia para una incidencia

normal cuando aumentamos el espesor del material superconductor para una Periodicidad  $N = 14$  y secuencia Thue-Morse  $S_3$ . En la figura [3-8:(a)], la temperatura de funcionamiento es de  $80K$ , el espesor de la capa semiconductor permanece constante en  $d_A = 100nm$  y el espesor de la capa superconductora aumenta de  $20$  a  $80nm$ . Podemos observar que el ancho de banda de la transmisión disminuye conforme se aumente el espesor de la capa superconductora, pues cuando  $d_B = 20nm$  se obtiene para el rango visible un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 271nm$  con bordes de transmisión en  $422$  y  $693nm$ . En cambio cuando  $d_B = 80nm$ , su ancho de banda disminuye a  $\Delta\lambda = 119nm$  con bordes de transmisión en  $538$  y  $657nm$ .

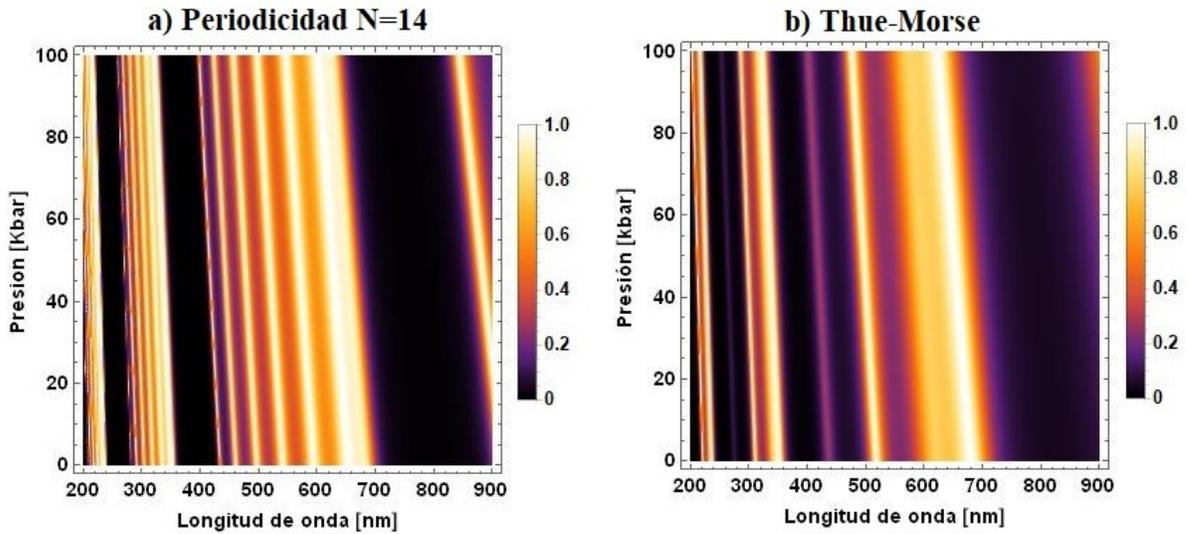


**Figura 3-8.:** Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la capa superconductora con a) periodicidad  $N = 14$  y b) secuencia Thue-morse  $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa semiconductor igual a  $d_A = 100nm$ , a  $T = 80K$  y  $P = 20kbar$

Destacándose que para una periodicidad  $N = 14$  de las capas, se evidenciaran  $4 BFF$  sin importar el espesor de la capa de superconductora, caso distinto que para una secuencia cuasiperiódica como es la Thue-Morse de la figura [3-8:(b)], donde para  $d_B = 20nm$  se evidencian  $6 BFF$ , pero cuando  $d_B = 50nm$  se obtienen solamente  $4 BFF$  similar que para una secuencia periódica. Y si llegamos a  $d_B = 70 - 80nm$  se logran presenciar pequeños picos de transmisión en longitudes de onda de  $100$  a  $200nm$  que buscan desplazarse hacia longitudes de onda largas. De igual forma, se evidencia la desaparición de picos de transmisión en el rango visible y la aparición de una nueva  $BFF$  con bordes de  $607$  a  $656nm$  que cortan el ancho de banda de la transmisión que se mostraba en una secuencia periódica.

### 3.4. Efecto de la Presión

Por ultimo, analizamos el espectro de transmitancia al variar la presión, tal y como se ve en la figura [3-9]. Donde aumentamos la presión de  $0kbar$  a  $100kbar$  tanto para la secuencia Thue-Morse como para una con periodicidad  $N = 14$ , evidenciándose de [3-9:a)] la presencia de 3 *BFF* definidas las cuales a medida que se aumenta la presión presentan corrimiento a longitudes de onda menores, pues cuando la presión era de  $0kbar$  se obtuvo una *BFF* con un ancho de banda de  $\Delta\lambda = 162nm$  en la región de  $725$  a  $887nm$ ; pero cuando incrementamos la presión a  $100kbar$ , la *BFF* se corrió a una region de  $660$  a  $819nm$ , con un ancho de banda  $\Delta\lambda = 159nm$ . De manera que al aumentar la presión dentro de la película, las *BFF* presentaran un corrimiento a longitudes de ondas menores sin llegar a presentar cambios relevantes en sus anchos de bandas. Llegando esto a presenciarse nuevamente en la [3-9:b)], con la particularidad que la secuencia Thue-Morse permite la aparición de múltiples *BFF* a diferencia de una múlticapa periódica.



**Figura 3-9.:** Espectro de transmitancia de un cristal fotónico superconductor 1D variando la presión para una a) periodicidad  $N = 14$  y b) secuencia Thue-morse  $S_3$ . Bajo incidencia normal y espesor de la capa semiconductor y superconductor igual a  $d_A = 100nm$  y  $d_B = 20nm$ , con temperatura de funcionamiento de  $T = 80K$ .

# 4. Conclusiones y recomendaciones

## 4.1. Conclusiones

En el presente trabajo a partir de la implementación del método de la matriz de transferencia, el cual se presenta como una herramienta efectiva en el tratamiento de problemas de propagación de ondas para diferentes dimensiones y junto con el modelo de dos fluidos de Gorter-Casimir, el cual fue de utilidad para describir la respuesta dielectrica del superconductor, se realizó un estudio teórico al espectro de transmitancia de un cristal fotónico unidimensional cuasi-periódico con secuencia Thue-Morse. El  $CF - 1D$  cuasi-periódico se caracterizó por su modulación de capas con materiales semiconductores como el  $GaAs$  y superconductores como  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ , formando una estructura cuasi-periódica perfectamente ordenada y asimétrica. Donde se determino que el efecto de la Thue-Morse en el sistema multicapa facilitara la aparición de brechas de bandas fotónicas, pero siendo sus respectivos anchos de bandas menores que si comparamos con un sistema regido por una periodicidad. Por otra parte, se evidencio que entre mayor sea la secuencia Thue-Morse empleada, más números de  $BFF$  se tendrán y más delgados serán los picos de transmisión.

También se mostró que al incrementar el ángulo de incidencia, las  $BFF$  presentaban corrimiento a longitudes de onda más cortas sin importar su polarización. Con la particularidad que al implementar la polarización  $TM$  el ancho de banda de los picos de transmisión tienden aumentar, a diferencia de la polarización  $TE$ , los cuales se mostraban cada vez más delgados y en consecuencia, sus anchos de banda disminuían.

Adicional a esto, se analizo la respuesta de la transmisión al aumentar los espesores de las capas semiconductoras y superconductoras, donde se evidencio que al aumentar el espesor del material semiconductor aparecieron nuevas  $BFF$  y todas estas presentaban un corrimiento a longitudes de ondas más grandes, junto con la particularidad de que el ancho de banda de la transmisión aumentaba sin importar que la secuencia fuera periódica o Thue-Morse. En concordancia, al aumentar el espesor de la capa superconductora se identifico que el ancho de banda de la transmisión tendía a disminuirse, de manera que facilitaba la aparición de nuevas  $BFF$  y que a su vez, estas aumentarían su tamaño.

Finalmente, se analizaron los resultados al variar parámetros físicos como lo son la temperatura y la presión, donde, se llego a que al aumentar la temperatura del sistema, las  $BFF$  presentaban corrimiento a mayores longitudes de ondas sin importar si la secuencia

era periódica o Thue-Morse. Caso contrario se reflejo en la presión, cuyas  $BFF$  presentaban corrimiento a menores longitudes de onda a medida que se aumentaba la presión entre en las capas.

## 4.2. Recomendaciones

Esperamos que estos resultados puedan ser tomados en cuenta para el desarrollo de aplicaciones potenciales en dispositivos optoelectrónicos y se recomienda extender el tema de cristales fotónicos a el tratamiento a estructuras cuasi-periódicas en dos y tres dimensiones, puesto que la mayor parte de las aplicaciones ópticas se encuentran en sistemas multidireccionales, así como a estructuras con imperfecciones o dopajes. También se recomienda la posibilidad del estudio de cristales fotónicos con características atractivas como permitividades negativas, medios dispersivos, materiales magnéticos, metálicos o magneto-resistentes, entre otros. Además de la posibilidad de emplear modulaciones distintas como la cantor, ya que presenta aplicaciones en dispositivos ópticos como filtros con frecuencias específicas.

# A. Anexo: Producto de matrices Dinámicas

Las matrices Dinámicas viene dada por las ecuaciones (2-47) y (2-51) para las ondas P y S respectivamente. Utilizando estas ecuaciones y los coeficientes de reflexión y transmisión para cada caso. Realizaremos el procedimiento para deducir la definición dada en la sección 2.6.1 por la ecuación (2-61). En otras palabras, buscaremos mostrar esta definición:

$$D_{12} = D_1^{-1}D_2$$

## A.1. Para Ondas tipo P

Sabemos que las matrices dinámicas para  $D_1$  y  $D_2$  están dadas por la expresión (2-47):

$$D_{p,i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \cos \theta_i \\ n_i & -n_i \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \cos \theta_i \\ n_1 & -n_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_t & \cos \theta_t \\ n_2 & -n_2 \end{pmatrix}$$

Pero dado que necesitamos la inversa de  $D_1$ , realizamos su respectivo calculo encontrando primero su determinante y luego su inversa:

$$\det(D_1) = -n_1 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_i = -2n_1 \cos \theta_i$$

$$D_1^{-1} = -\frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \begin{pmatrix} -n_1 & -\cos \theta_i \\ -n_1 & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

Teniendo entonces:

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cos \theta_i} & \frac{1}{2n_1} \\ \frac{1}{2 \cos \theta_i} & -\frac{1}{2n_1} \end{pmatrix}$$

Realizando ahora el producto de las matrices  $D_1^{-1}$  y  $D_2$ :

$$D_1^{-1}D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cos \theta_i} & \frac{1}{2n_1} \\ \frac{1}{2 \cos \theta_i} & -\frac{1}{2n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_t & \cos \theta_t \\ n_2 & -n_2 \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1}D_2 = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_t}{2 \cos \theta_i} + \frac{n_2}{2n_1} & \frac{\cos \theta_t}{2 \cos \theta_i} - \frac{n_2}{2n_1} \\ \frac{\cos \theta_t}{2 \cos \theta_i} - \frac{n_2}{2n_1} & \frac{\cos \theta_t}{2 \cos \theta_i} + \frac{n_2}{2n_1} \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1}D_2 = \begin{pmatrix} \frac{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_i} & \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_i} \\ \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_i} & \frac{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_i} \end{pmatrix}$$

Simplificando y factorizando la expresión llegaremos a:

$$D_1^{-1}D_2 = \frac{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \\ \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} & 1 \end{pmatrix}$$

De donde sabemos gracias a las expresiones (2-28) y (2-29), que corresponde a valores de la reflexión y transmisión. Reemplazando tenemos:

$$D_1^{-1}D_2 = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

## A.2. Para Ondas tipo S

Un procedimiento similar ocurre para las ondas tipo S, de donde sabemos que  $D_1$  y  $D_2$  están dadas por la expresión (2-51):

$$D_{s,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_i \cos \theta_i & -n_i \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_1 \cos \theta_i & -n_1 \cos \theta_i \end{pmatrix} ; \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_2 \cos \theta_t & -n_2 \cos \theta_t \end{pmatrix}$$

Dado que necesitamos la inversa de  $D_1$ , procedemos a encontrarla:

$$\det(D_1) = -n_1 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_i = -2n_1 \cos \theta_i$$

$$D_1^{-1} = -\frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \begin{pmatrix} -n_1 \cos \theta_i & -1 \\ -n_1 \cos \theta_i & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \end{pmatrix}$$

Al realizar el producto de matrices nos daremos cuenta que:

$$D_1^{-1} D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2n_1 \cos \theta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_2 \cos \theta_t & -n_2 \cos \theta_t \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1} D_2 = \begin{pmatrix} \frac{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}{2n_1 \cos \theta_i} & \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{2n_1 \cos \theta_i} \\ \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{2n_1 \cos \theta_i} & \frac{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}{2n_1 \cos \theta_i} \end{pmatrix}$$

Al emplear las expresiones (2-42) y (2-43), podemos reescribir esta ecuación como:

$$D_1^{-1} D_2 = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

# Bibliografía

- [1] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2059. (1987).
- [2] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2486. (1987).
- [3] K. Edagawa. Photonic crystals, amorphous materials, and quasicrystals, *Sci. Technol. Adv. Mater.* 15 034805. (2014).
- [4] D. C. Velasco and N. P. Montenegro. Estudio de las propiedades ópticas de estructuras fotónicas con inclusiones de grafeno y variación espacial gradual de sus materiales, Universidad del Valle. (2019).
- [5] Kazuaki Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals, Second Edition*, Springer, Optical Sciences, (2005).
- [6] R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, and J. D. Joannopoulos. Nature of the photonic band gap: some insights from a field analysis, *J. Opt. Soc. Am. B* 10, 328-332. (1993).
- [7] E. Abdel-Rahman and A. Shaarawi. Defect mode in periodic and quasiperiodic one-dimensional photonic structures. *J Mater Sci: Mater Electron* 20, 153-158. (2009).
- [8] M. R. Morante, and J. G. Echeverri. Transmisión de ondas electromagnéticas a través de cristales fotónicos periódicos y cuasiperiódicos dieléctrico-superconductor, Universidad del Valle. (2019).
- [9] R. Lifshitz. What is a crystal, *Condensed Matter Physics*, *Phys. Rev. Lett.* 114-36. (2007).
- [10] Alexey V. Kavokin, Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P. Laussy, *Microcavities, Second Edition*, Oxford Science, (2017).
- [11] X. Y. Dai, Y. J. Xiang, and S. C. Wen. Broad Omnidirectional Reflector in the One-Dimensional Ternary Photonic Crystals Containing Superconductor, *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 120, 17-34. (2011).

- 
- [12] F. S. Chaves and H. V. Posada. Transmittance spectrum of a superconductor-semiconductor quasiperiodic one-dimensional photonic crystal. *Physica C: Superconductivity and Its Applications*, Volume 563, p. 10-15. (2019).
- [13] J. Qiao and C. Y. Yang. High-Tc superconductors on buffered silicon: materials properties and device applications, *Materials Science and Engineering: R: Reports*, Volume 14, Issue 4. (1995).
- [14] Rainer Wesche, *High-Temperature Superconductors: Materials, Properties, and Applications*, *Electronic Materials: Science & Technology*, Springer, Boston, MA, (1998).
- [15] J. Maxwell. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. (1865).
- [16] J. M. Cabrera, *Óptica electromagnética, Vol.II: Materiales y aplicaciones*, Addison-Wesley iberoamericana española, Madrid-España, (2000).
- [17] F. Brechet, J. Marcou, D. Pagnoux, and P. Roy. Complete Analysis of the Characteristics of Propagation into Photonic Crystal Fibers, by the Finite Element Method, *Optical Fiber Technology*, Volume 6, Issue 2. (2000).
- [18] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* 53. (1984).
- [19] E. L. Albuquerque, M. G. Cottam, *Polaritons in periodic and quasiperiodic structures*, 1st Edition, Elsevier B.V., (2004).
- [20] D. Levine and P. J. Steinhardt. Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures, *Phys. Rev. Lett.* 53, 2477. (1984).
- [21] V. E. Korepin. Quasiperiodic tilings and quasicrystals, *J. Math. Sci.* 41, 956-966. (1988).
- [22] M. Kohmoto, B. Sutherland, and K. Iguchi. Localization of optics: Quasiperiodic media, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2436. (1987).
- [23] F. S. Chaves, H. V. Posada, Y. Trabelsi, and N. B. Ali. Transmittance spectrum in a one-dimensional photonic crystal with Fibonacci sequence superconductor-semiconductor, *Optik*, Volume 217, 164803. (2020).
- [24] C. Nayak, A. Aghajamali, M. Solaimani, J. K. Rakshit, D. Panigrahy, K. V. P. Kumar, and B. Ramakrishna. Dodecanacci superconductor-metamaterial photonic quasicrystal, *Optik*, Volume 222, 165290. (2020).

- 
- [25] H. A. Gómez, J. Escorcia, C.A. Duque and M.E. Mora. Analysis of light propagation in quasiregular and hybrid Rudin-Shapiro one-dimensional photonic crystals with superconducting layers, *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications*, Volume 27. (2017).
- [26] X. Fu, Y. Liu, B. Cheng and D. Zheng. Spectral structure of two-dimensional Fibonacci quasilattices, *Phys. Rev. B* 43, 10808. (1991).
- [27] R. Lifshitz. The square Fibonacci tiling, *J. Alloy. Compd.* 342, 186–190. (2002).
- [28] E. Jurdik, G. Myszkiewicz, J. Hohlfeld, A. Tsukamoto, A. J. Toonen, A. F. van Etteger, J. Gerritsen, J. Hermsen, S. Goldbach-Aschemann, W. L. Meerts, H. van Kempen, and Th. Rasing. Quasiperiodic structures via atom-optical nanofabrication, *Phys. Rev. B* 69, 201102(R). (2004).
- [29] A. Ledermann, L. Cademartiri, M. Hermatschweiler, C. Toninelli, G. A. Ozin, D. S. Wiersma, M. Wegener and G. V. Freymann. Three-dimensional silicon inverse photonic quasicrystals for infrared wavelengths. *Nature Mater.* 5, 942–945. (2006).
- [30] L. Levi, M. Rechtsman, B. Freedman, T. Schwartz, O. Manela and M. Segev. Disorder-Enhanced Transport in Photonic Quasicrystals, *Science* 332, 1541–1544. (2011).
- [31] X. Wang, C. Y. Ng, W. Y. Tam, C. T. Chan and P. Sheng. Large-area two-dimensional mesoscale quasi-crystals. *Adv. Mater.* 15, 1526–1528. (2003).
- [32] B. Freedman, R. Lifshitz, J. W. Fleischer and M. Segev. Phason dynamics in nonlinear photonic quasicrystals. *Nature Mater.* 6, 776–781. (2007).
- [33] A. Harb, F. Torres, K. Ohlinger, Y. Lin, K. Lozano, D. Xu and K. P. Chen. Holographically formed three-dimensional Penrose-type photonic quasicrystal through a lab-made single diffractive optical element, *Opt. Express* 18, 20512–20517. (2010).
- [34] D. Shir, H. Liao, S. Jeon, D. Xiao, H. T. Johnson, G. R. Bogart, K. H. A. Bogart and J. A. Rogers. Three-dimensional nanostructures formed by single step, two-photon exposures through elastomeric Penrose quasicrystal phase masks. *Nano Lett.* 8, 2236–2244. (2008).
- [35] B. Freedman, G. Bartal, M. Segev, R. Lifshitz, D. N. Christodoulides and J. W. Fleischer. Wave and defect dynamics in nonlinear photonic quasicrystals, *Nature* 440, 1166–1169. (2006).
- [36] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis and D. N. Christodoulides. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices, *Nature* 422, 147–150. (2003).

- 
- [37] W. Man, M. Megens, P. J. Steinhardt and P. M. Chaikin. Experimental measurement of the photonic properties of icosahedral quasicrystals. *Nature* 436, 993–996. (2005).
- [38] Z. V. Vardeny, A. Nahata and A. Agrawal. Optics of photonic quasicrystals, *Nature Photonics* volume 7, pages177–187. (2013).
- [39] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press. (1995).
- [40] R. B. Wehrspohn, A. V. Rhein and T. Geppert. *Photonic Crystals: Principles and Applications*, *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, Elsevier. (2006).
- [41] C. Fenzl, T. Hirsch and O. S. Wolfbeis. Photonic crystals for chemical sensing and biosensing. *Angewandte Chemie (International ed. in English)*. (2014).
- [42] P. Yeh, *Optical waves in layered media*, vol. 61. Wiley-Interscience, (2005).
- [43] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall of India, (1989).
- [44] P. A. Triana and C. A. Herreño. Electric field profile in multilayer structures, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (2018).
- [45] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov and S. I. Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system, *Nature* 525, 73–76. (2015).
- [46] S. Pal, K. Ganguly, A. Basu and U. D. Sharma. Gorter-Casimir two fluid model revisited and possible applications to superconductivity, *International Journal of Innovative Research in Physics*, Volume 1, Number 1, pp. 17-26(10). (2019).
- [47] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, (1996).
- [48] Charles P. Poole Jr., Horacio A. Farach, Richard J. Creswick, and Ruslan Prozorov, *Superconductivity*, Academic Press (Elsevier), 2nd Ed. (2007).
- [49] G. A. Samara. Temperature and pressure dependences of the dielectric constants of semiconductors, *Phys. Rev. B.* 27, 3494. (1983).
- [50] A. M. Elabsy. Hydrostatic pressure dependence of binding energies for donors in quantum well heterostructures, *Phys. Scr.* 48 376. (1993).
- [51] R. I. Cottam and G. A. Saunderson. The elastic constants of *GaAs* from 2K to 320K, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 6, 2105. (1973).
- [52] A. Thue, *Norske Vididensk. Selsk. Skr. I.7.* (1906).

- 
- [53] L. E. González, J. E. Ordoñez, G. Zambrano, and N. P. Montenegro. *YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub>/BaTiO<sub>3</sub> 1D Superconducting Photonic Crystal with Tunable Broadband Response in the Visible Range*, J Supercond Nov Magn 31. (2018).
- [54] O. G. Vendik, I. B. Vendik and D. I. Kaparkov. Empirical model of the microwave properties of high-temperature superconductors. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 46(5), 469–478. (1998).