



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 5 de junio de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Carlos Eduardo Cerón Rojas, con C.C. No. 1080266622,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado

Titulado Extracción de energía de objetos ultra compactos presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de Físico; Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Carlos Eduardo Cerón Rojas

Firma: Carlos Eduardo Cerón Rojas.

Vigilada Mineducación



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Extracción de energía de objetos ultra compactos

AUTOR O AUTORES: Carlos Eduardo Cerón Rojas

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cerón Rojas	Carlos Eduardo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias exactas y naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2023

NÚMERO DE PÁGINAS: 88

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas x Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___
Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros x

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:



PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español

Inglés

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| 1. Vector covariante | Covariant Vector |
| 2. Tétrada | Tetrad |
| 3. 1-formas de curvatura | 1-forms of curvature |
| 4. 2-formas de curvatura | 2-forms of curvature |
| 5. Vector tangente | Tangent Vector |

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se estudió el proceso de Penrose para la métrica de Kerr y para un agujero de tipo Black-Bounce-Kerr. Para ello, primero se derivó la métrica de Schwarzschild usando las ecuaciones de estructura de Cartan, luego, se empleó el algoritmo de Newman-Janis para generar la métrica de Kerr y, posteriormente, se estudió el proceso de Penrose. Por último, se calculó la eficiencia para ambos casos y se logró inferir que al eliminar la singularidad no aumenta la eficiencia.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work the Penrose process for the Kerr metric and for a Black-Bounce-Kerr type hole was studied. To do this, first the Schwarzschild metric was derived using the Cartan structure equations, then the Newman-Janis algorithm was used to generate the Kerr metric and, later, the Penrose process was studied. Finally, the efficiency was calculated for both cases and it was possible to infer that eliminating the singularity does not increase the efficiency.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado:

Firma: Miguel Ángel Cruz Bererra

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



Extracción de energía de objetos ultra compactos

Trabajo de Grado para optar al título de Físico(a)

Desarrollado por: Carlos Eduardo Cerón Rojas

Código: 20172161595

Firma: _____

Director: PhD. Pedro Mario Cañate Cassere

Firma: _____

Área: Relatividad General

Neiva-Huila
18 de mayo de 2023

DEDICATORIA

A mis queridos padres, quienes siempre confiaron en mí y me motivaron cada día para seguir estudiando y no rendirme. A mi tía, Leny Rojas, y a mi padrino, su esposo, que siempre estuvieron al pendiente de mí, confiando en mí cada instante de mi vida y formación. A mis hermanas, que me brindaron su apoyo cada vez que lo necesitaba.

AGRADECIMIENTOS

Primero, agradezco a mis padres, quienes me proporcionaron todo lo necesario para estar hoy en día culminando mi carrera universitaria. Además, es de mi entero agrado agradecer a mi tía porque siempre me ayudó cuando más lo necesitaba. Agradezco también a mi tutor y profesor de tesis que me asesoró en todo momento durante el desarrollo de la tesis. Por último, le doy las gracias a la Universidad Surcolombiana por abrirme sus puertas y brindarme el mejor conocimiento durante mi formación académica.

RESUMEN

En este trabajo se estudió el proceso de Penrose para la métrica de Kerr y para un agujero de tipo Black-Bounce-Kerr. Para ello, primero se derivó la métrica de Schwarzschild usando las ecuaciones de estructura de Cartan, luego, se empleó el algoritmo de Newman-Janis para generar la métrica de Kerr y, posteriormente, se estudió el proceso de Penrose. Por último, se calculó la eficiencia para ambos casos y se logró inferir que al eliminar la singularidad no aumenta la eficiencia.

ABSTRACT

In this work the Penrose process for the Kerr metric and for a Black-Bounce-Kerr type hole was studied. To do this, first the Schwarzschild metric was derived using the Cartan structure equations, then the Newman-Janis algorithm was used to generate the Kerr metric and, later, the Penrose process was studied. Finally, the efficiency was calculated for both cases and it was possible to infer that eliminating the singularity does not increase the efficiency.

Índice General

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivos del Trabajo de Grado	1
1.1.1. Objetivo General	1
1.1.2. Objetivos Específicos	1
2. MÉTODOS TEÓRICOS	3
2.1. Variedad diferenciable	4
2.1.1. Geometría de Riemann	4
2.1.2. Espacio tangente	5
2.2. Espacio dual	5
2.3. Formas diferenciales	5
2.3.1. Producto exterior	6
2.3.2. Derivada exterior	8
2.4. La métrica	8
2.5. Símbolos de Christoffel	9
2.6. Tensor de curvatura de Riemann	10
2.7. Tensor de Ricci	10
2.8. Invariante de curvatura de Riemann	11
2.9. Ecuación de Einstein	11
2.10. Espaciotiempos esféricamente simétricos	11
2.11. Geometría de Schwarzschild	13
2.11.1. Métrica de Schwarzschild	13
2.11.2. Coodenadas de Eddington-Finkelstein	15
2.12. Ecuaciones de estructura y componentes del tensor de Riemann	17
2.12.1. Formas de curvatura	18
2.12.2. Ecuaciones de estructura de Cartan	19
2.13. Algoritmo de Newman-Janis	20
2.14. Agujeros negros en rotación	23
2.14.1. Geometría de Kerr	23
2.14.2. Métrica de Kerr	24
2.14.3. El horizonte de sucesos	25
2.14.4. Propiedades de los coeficientes de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist	26
2.14.5. Superficie límite estacionaria	26

2.14.6. La ergosfera	27
2.15. Proceso de Penrose	28
2.15.1. Extracción de energía	29
2.15.2. Eficiencia del proceso de Penrose	29
2.16. Black-Bounce	29
2.16.1. Black-Bounce-Schwarzschild	29
2.16.2. Black-Bounce-Kerr	30
3. METODOLOGÍA	32
3.1. Derivación de la métrica de Schwarzschild	33
3.1.1. Primera ecuación de estructura de Cartan	33
3.1.2. Segunda ecuación de estructura de Cartan	42
3.1.3. Tensor de curvatura de Ricci	44
3.1.4. Solución de las ecuaciones de Einstein en vacío	46
3.2. Algoritmo de Newman-Janis	51
3.3. Proceso de Penrose	57
3.3.1. Extracción de energía	58
3.4. Proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr	60
3.4.1. Extracción de energía	62
4. RESULTADOS Y ANÁLISIS	65
4.1. Resultado 1: derivación de la métrica de Schwarzschild	66
4.2. Resultado 2: derivación de la métrica de Kerr	71
4.3. Resultado 3: proceso de Penrose	72
4.4. Resultado 4: proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr	73
5. CONCLUSIONES	75
A. Desarrollo de algunos cálculos	76
A.1. Verificación de las propiedades de simetría y anti-simetría de las <i>2-formas de curvatura</i>	76
A.2. Tensor de Ricci	77

Índice de Figuras

3.1.	<i>Energía de la partícula de escape en función de r</i>	59
3.2.	<i>Energía de escape para diferentes valores de l en el Black-Bounce-Kerr</i>	64
4.1.	<i>La curva representa la energía de la partícula de escape y la recta vertical es el horizonte de eventos</i>	72
4.2.	<i>Curvas de la energía de la partícula de escape para diferentes valores de l</i>	74

INTRODUCCIÓN

La relatividad general es una teoría de gravitación formulada por Albert Einstein en 1915, que describe las propiedades de los fenómenos mecánicos y electromagnéticos, el espacio y tiempo, en presencia de un cuerpo gravitatorio. De esta forma, la solución más sencilla de las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica de Schwarzschild que explica la geometría del espaciotiempo en el exterior de un cuerpo gravitatorio esféricamente simétrico y estático. No obstante, la solución a las ecuaciones de campo de Einstein para un cuerpo gravitatorio rotante da como resultado la métrica de Kerr, la cual se considera como la versión general a la métrica de Schwarzschild, pues describe la geometría del espaciotiempo de un cuerpo gravitatorio en rotación. Por lo tanto, ambas métricas proporcionan adecuadamente la geometría del espaciotiempo de un agujero negro. Por otro lado, poco después del descubrimiento de la métrica de Kerr, Penrose demostró que es posible extraer energía y momento angular de un agujero negro rotante y, como consecuencia de esto, se reduciría su masa y momento angular. Teniendo en cuenta todo lo anterior, este proyecto se va a enfocar en la explicación del proceso de Penrose para extraer energía y momento angular de un agujero negro en rotación y el comportamiento del mismo si se aplica a un agujero negro regular (Black-Bounce).

En este trabajo se va a emplear la notación del libro de Carroll [4], de modo que, la firma métrica será $(-+++)$ y, para mayor comodidad, se van a emplear las unidades naturales, $c = G = 1$. Además, la coordenada temporal estará representada por $x^0 = x^t = t$ y las coordenadas espaciales, en coordenadas esféricas, por $x^1 = x^r = r$, $x^2 = x^\theta = \theta$ y $x^3 = x^\phi = \phi$.

1.1. Objetivos del Trabajo de Grado

1.1.1. Objetivo General

- Estudiar el proceso Penrose

1.1.2. Objetivos Específicos

- *Solucionar las ecuaciones de campo de Einstein en vacío en la región exterior de un cuerpo esférico y dotado únicamente de masa, mediante las ecuaciones de estructura de Cartan.*
- *Derivar la métrica de Kerr a partir de la métrica de Schwarzschild aplicando el algoritmo de Newman-Janis.*

- *Estudiar el proceso de Penrose para la métrica de Kerr.*
- *Aplicar el proceso de Penrose a un agujero negro regular del tipo Black-Bounce-Kerr*

MÉTODOS TEÓRICOS

- 2.1 Variedad diferenciable
- 2.2 Espacio dual
- 2.3 Formas diferenciales
- 2.4 La métrica
- 2.5 Símbolos de Christoffel
- 2.6 Tensor de curvatura de Riemann
- 2.7 Tensor de Ricci
- 2.8 Invariante de curvatura de Riemann
- 2.9 Ecuación de Einstein
- 2.10 Espaciotiempos esféricamente simétricos
- 2.11 Geometría de Schwarzschild
- 2.12 Ecuaciones de estructura y componentes del tensor de Riemann
- 2.13 Algoritmo de Newman-Janis
- 2.14 Agujeros negros en rotación
- 2.15 Proceso de Penrose
- 2.16 Black-Bounce

La teoría de la relatividad general suele parecer muy complicada, ya que, para su entendimiento se requieren bases matemáticas de geometría diferencial, la cual, no suele ser familiar para la mayoría de los físicos [4].

2.1. Variedad diferenciable

En general, una variedad es un espacio topológico que localmente se considera Euclidiano, aunque, globalmente, se curve o deforme; dicho de otro modo, una variedad es un conjunto de puntos parametrizable de forma continua y el número de parámetros independientes es la dimensión y las coordenadas de la variedad [9][10][11]. En este caso, el interés general se basa en el estudio de aquellas variedades cuya estructura es suave, de manera que se puedan establecer todas las características del cálculo [9].

Si dos puntos p y q se encuentran en una variedad de n -dimensión y coordenadas x^α , separados de forma infinitesimal [12].

$$p \longrightarrow x^\alpha \quad (2.1)$$

$$q \longrightarrow x^\alpha + dx^\alpha \quad (2.2)$$

La geometría local de la variedad en el punto p se determina definiendo una función razonable dependiente de las coordenadas [12].

$$ds^2 = f(x^\alpha, dx^\alpha) \quad (2.3)$$

Donde ds^2 es el elemento de línea (distancia) entre el punto p y q [12]. Por ejemplo, la superficie de una esfera es una variedad diferenciable cuyos parámetros independientes son θ y ϕ , por tanto, es una variedad de dimensión dos [11].

2.1.1. Geometría de Riemann

En la teoría de la relatividad general es indispensable el concepto de variedad, pues el espacio-tiempo se interpreta como una hipersuperficie con propiedades geométricas definidas [11][12]. Es por esto que, para desarrollar esta teoría, se limita la atención a las variedades de Riemann donde el elemento de línea tiene la forma [11][12]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{Donde } ds^2 > 0 \quad (2.4)$$

Específicamente, la métrica de las variedades consideradas en relatividad especial y relatividad general puede ser [11][12]:

$$g < 0, \quad g = 0, \quad g > 0 \quad (2.5)$$

Y son conocidas como variedades pseudo-Riemannianas [11][12].

2.1.2. Espacio tangente

El espacio tangente es un plano Euclidiano en cualquier punto arbitrario de la variedad que es localmente tangente a la superficie; en el cual, se pueden definir un conjunto de vectores locales denominados vectores tangentes que, por lo general, cumplen las reglas del algebra vectorial y son de la forma [4][12].

$$A = A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.6)$$

Donde A^α representa las componentes del vector tangente y $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ es la base del espacio vectorial [4][13].

$$\text{Base} \longrightarrow \{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \longrightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\} \longrightarrow \{\partial_\alpha\} \quad (2.7)$$

Los vectores tangentes o contra-variantes también pueden escribirse [4][13]:

$$A = A^\alpha \partial_\alpha \quad (2.8)$$

En la teoría de la relatividad general, los vectores están ubicados en un punto dado del espaciotiempo y se denominan 4-vectores [4].

2.2. Espacio dual

Después de definir el espacio tangente, se puede definir el espacio cotangente o dual a este [4]. Para su construcción concreta se exige que el conjunto de vectores base cumpla la siguiente propiedad [4]:

$$\hat{\theta}^\alpha(\hat{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad (2.9)$$

A manera general un vector dual tiene la forma [4]:

$$\omega = \omega_\alpha \hat{\theta}^\alpha \quad (2.10)$$

2.3. Formas diferenciales

Las formas diferenciales son objetos matemáticos anclados a un espacio vectorial que se manifiestan en el cálculo de varias variables y cálculo tensorial [14]. Analíticamente, las formas diferenciales p -formas son tensores de tipo $(0, p)$ antisimétricos y, de manera formal, son más sencillas a la hora de manipular con el *cálculo exterior* [4][15]. En tal caso, se pueden definir 0 -formas, 1 -formas \dots n -formas para un espacio o variedad n -dimensional [4][15]:

$$0\text{-forma} = \text{función escalar} \quad (2.11)$$

$$1\text{-forma} = \omega_{\alpha_1} dx^{\alpha_1} \quad (2.12)$$

$$2\text{-forma} = \frac{1}{2} \omega_{\alpha_1 \alpha_2} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \quad (2.13)$$

$$3\text{-forma} = \frac{1}{6} \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} \quad (2.14)$$

$$\cdot \quad (2.15)$$

$$\cdot \quad (2.16)$$

$$\cdot \quad (2.17)$$

$$k\text{-forma} = \frac{1}{k!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} \quad (2.18)$$

La base coordenada de las *1-formas* está dada por [15]:

$$\omega^\alpha = dx^\alpha \quad (2.19)$$

y se puede aplicar a la geometría de Schwarzschild o un espaciotiempo esféricamente simétrico [15]

$$\theta^0 = -e^{f(r,t)} dt \quad (2.20)$$

$$\theta^1 = e^{g(r,t)} dr \quad (2.21)$$

$$\theta^2 = r^2 d\theta \quad (2.22)$$

$$\theta^3 = r^2 \sin^2 \theta d\phi \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

El número de *p-formas* linealmente independientes en un espacio vectorial n -dimensional está dado por [4]:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2.25)$$

Si se trabaja en la teoría de la relatividad general, donde el espaciotiempo es 4-dimensional, entonces, siguiendo la ecuación (2.25) existen una *0-formas*, cuatro *1-formas*, seis *2-formas*, cuatro *3-formas*, una *4-forma* y para $p > n$ no existe ninguna *p-forma* [4].

2.3.1. Producto exterior

Dada una *p-forma* Ω_α y una **q-forma** Ω_β se puede definir el producto exterior o producto wedge ($\Omega^1 \wedge \Omega^2$) para formar una $(p+q)$ -*forma* [4][13]

$$\Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge \Omega_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \Omega_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} \otimes \Omega_{\beta_1 \dots \beta_q]} \quad (2.26)$$

Por ejemplo, si se tienen dos *1-formas*, Ω^1 y Ω^2 , tal que [4][15][13]:

$$\Omega^1 = A_\alpha dx^\alpha \quad (2.27)$$

$$\Omega^2 = B_\beta dx^\beta \quad (2.28)$$

El producto exterior $\Omega^1 \wedge \Omega^2$

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = A_\alpha dx^\alpha \wedge B_\beta dx^\beta \quad (2.29)$$

Utilizando la ecuación (2.26) se obtiene:

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = 2 A_{[\alpha} dx^\alpha \otimes B_{\beta]} dx^\beta \quad (2.30)$$

Siguiendo la definición de tensores antisimétricos, se sabe que [4]:

$$A_{[\alpha} dx^\alpha \otimes B_{\beta]} dx^\beta = \frac{1}{2} (A_\alpha dx^\alpha \otimes B_\beta dx^\beta - A_\beta dx^\beta \otimes B_\alpha dx^\alpha) \quad (2.31)$$

$$A_{[\alpha} dx^\alpha \otimes B_{\beta]} dx^\beta = \frac{1}{2} (A_\alpha B_\beta dx^\alpha \otimes dx^\beta - A_\beta B_\alpha dx^\beta \otimes dx^\alpha) \quad (2.32)$$

Reemplazando la ecuación (2.32) en (2.30)

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} (A_\alpha B_\beta dx^\alpha \otimes dx^\beta - A_\beta B_\alpha dx^\beta \otimes dx^\alpha) \quad (2.33)$$

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = A_\alpha B_\beta dx^\alpha \otimes dx^\beta - A_\beta B_\alpha dx^\beta \otimes dx^\alpha \quad (2.34)$$

Entonces, se deduce que [15]:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha \quad (2.35)$$

Si Ω^1 , Ω^2 y Ω^3 son p -forma, q -forma y k -forma, el producto exterior cumple las siguientes propiedades [15][14]:

$$1). (a\Omega^1 + b\Omega^2) \wedge \Omega^3 = a\Omega^1 \wedge \Omega^3 + b\Omega^2 \wedge \Omega^3$$

$$2). (\Omega^1 \wedge \Omega^2) \wedge \Omega^3 = \Omega^1 \wedge (\Omega^2 \wedge \Omega^3)$$

$$3). \Omega^1 \wedge \Omega^2 = (-1)^{pq} \Omega^2 \wedge \Omega^1$$

$$4). \Omega^1 \wedge \Omega^1 = 0$$

$$5). (a\Omega^1 + b\Omega^2) \wedge \Omega^1 = b\Omega^2 \wedge \Omega^1$$

$$6). a\Omega^1 \wedge \Omega^2 = \Omega^1 \wedge (a\Omega^2) = a(\Omega^1 \wedge \Omega^2)$$

2.3.2. Derivada exterior

La derivada exterior es un operador que amplía el concepto de diferencial de una función escalar f [16]. Así pues, la aplicación de la derivada exterior a una p -forma genera una $(p+1)$ -forma y, para una 0 -forma está definido como [16][15]:

$$df = \partial_\alpha f dx^\alpha \quad (2.36)$$

Sea una p -forma $\Omega = \Omega_\alpha dx^\alpha$, la derivada exterior de Ω es [16]:

$$d\Omega = d\Omega_\alpha \wedge dx^\alpha \quad (2.37)$$

La derivada exterior de un producto exterior entre la p -forma Ω^1 y la q -forma Ω^2 es [4][15]:

$$d(\Omega^1 \wedge \Omega^2) = d\Omega^1 \wedge \Omega^2 + (-1)^p \Omega^1 \wedge (d\Omega^2) \quad (2.38)$$

Para cualquier forma Ω , se cumple que [4][15]:

$$d(d\Omega) = 0 \quad (2.39)$$

La derivada exterior de una 1 -forma por una función cumple [4][15]:

$$d(f\Omega) = df \wedge \Omega + f d\Omega \quad (2.40)$$

2.4. La métrica

En la geometría Euclidiana el concepto de métrica es fundamental y básicamente es la distancia entre dos puntos [17]. No obstante, en algunas aplicaciones más formales, el concepto de distancia es no euclidiano y para ello, se acude al cálculo tensorial porque este ofrece una herramienta que estudia formulaciones tanto euclidianas como no euclidianas [17]. En general, la métrica es un tensor simétrico covariante de segundo orden e invariante bajo transformación de coordenadas y se representa en forma tensorial como [4][17]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.41)$$

El elemento de línea en un espacio euclidiano en coordenadas rectangulares es [4]:

$$ds^2 = g_{xx} dx^x dx^x + g_{yy} dx^y dx^y + g_{zz} dx^z dx^z \quad (2.42)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.43)$$

Donde las componentes del tensor métrico (g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}) son iguales a 1 y transformando a coordenadas esféricas se tiene [4]:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.44)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.45)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.46)$$

Por tanto, se deduce que [4]:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.47)$$

Sin embargo, existen superficies en donde la suma de los ángulos de un triángulo no suman 180 y la circunferencia de un círculo es diferente de $2\pi r$ y se denominan espacios no euclidianos [4][11][12]. Un ejemplo de una variedad no euclidiana es la superficie de una esfera bidimensional, considerada como el lugar geométrico de los puntos en \mathbb{R}^3 a una distancia r del origen y está representada por el elemento de línea [4]:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \text{Para } \rightarrow r = 1 \quad (2.48)$$

El término "ds" no es el cuadrado o diferencial de algo, solo es la notación del tensor métrico que se interpreta como la longitud infinitesimal entre dos puntos y contiene toda la información que describe la geometría de la variedad [17][4]. En relatividad general, la métrica proporciona una noción de pasado y futuro permitiendo calcular la longitud de camino de dos partículas de prueba [4].

2.5. Símbolos de Christoffel

Dadas las características definidas anteriormente sobre la métrica, es importante estudiar como medir la curvatura de una variedad en un punto arbitrario [4][12].

Establecida una métrica, no es fácil notar si este tiene curvatura, pues una variedad plana puede parecer muy complicada en distintos sistemas de coordenadas y, debido a esto, se utiliza la métrica para hallar la conexión, que es la manifestación de la curvatura en una variedad y se puede expresar [4]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (2.49)$$

La definición más apropiada de la igualdad (2.49) es *conexión métrica* y está representada por el objeto matemático $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$ conocido como símbolo de Christoffel,¹ además, se concluye que estos se anulan en todo sistema de coordenadas en donde las componentes del tensor métrico son constantes [4][12][17]. En una variedad general de Riemann se tiene la expresión [12]:

$$T^{\alpha}_{\beta\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \quad (2.50)$$

¹La notación hace pensar que el símbolo de Christoffel es un tensor pero en realidad es un objeto o un símbolo

Donde $T_{\beta\mu}^{\alpha}$ representa las componentes de un tensor de tipo (1, 2) denominado *tensor de torsión* [12]. En relatividad general, los símbolos de Christoffel son simétricos en los dos primeros índices ya que se asume que en las variedades que aquí se consideran la torsión es nula, por lo tanto [12][17]:

$$\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} = \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} \quad (2.51)$$

2.6. Tensor de curvatura de Riemann

A partir de la conexión métrica se obtiene el tensor de curvatura de Riemann, el cual reúne toda la información de la curvatura de una variedad en un punto cualquiera y está dado por la expresión [4][12]:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \quad (2.52)$$

En relatividad general, el tensor de curvatura de Riemann finalmente permite medir la curvatura del espaciotiempo, por tanto, este es nulo si se trata de un espaciotiempo de Minkowski y una condición general para una variedad plana independientemente del sistema coordenado [4][12]. El tensor de curvatura de Riemann en su forma covariante cumple las siguientes propiedades [12]:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (2.53)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (2.54)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.55)$$

Siendo así, se concluye que es antisimétrico con respecto a los índices α y β o μ y ν y finalmente simétrico respecto al par de índices $\alpha\beta$ y $\mu\nu$ [12].

2.7. Tensor de Ricci

El tensor de curvatura de Riemann puede tomar varias contracciones independientes, por ejemplo, si se igualan los índices α y β se obtiene [4][12].

$$R_{\alpha\mu\nu}^{\alpha} = 0 \quad (2.56)$$

Por otro lado, si se igualan los índices α y μ se genera el tensor de Ricci [4][12].

$$R_{\beta\mu\nu}^{\mu} = R_{\beta\nu} \quad (2.57)$$

De las ecuaciones (2.56) y (2.57) se concluye que el tensor de Riemann solo tiene dos contracciones independientes pues, gracias a su propiedad de índices antisimétricos, estas se anulan o aparece el tensor de Ricci [4][11][12]. Otra consecuencia importante de estas contracciones es que cuando aparece el tensor de Ricci, este tiene la forma [4][11][12]:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (2.58)$$

Lo que indica que este tensor es simétrico [4].

2.8. Invariante de curvatura de Riemann

Aplicando una contracción adicional, aparece el invariante de curvatura de Riemann que está definido como una magnitud fija en cada punto de una variedad, por lo tanto, este es el mismo en cualquier sistema de coordenadas [4][12][11]

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\alpha_\alpha = R \quad (2.59)$$

El escalar de curvatura de Riemann aparece al calcular la traza del tensor de Ricci [4].

2.9. Ecuación de Einstein

La expresión (2.60) escrita por Einstein en 1915, representa un conjunto de 10 ecuaciones que describen la base matemática de la teoría de la relatividad general y son conocidas como ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein [18][11][12].²

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (2.60)$$

Donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein,³ $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura y $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento [4][12][11].⁴ De igual manera que en la teoría electromagnética las ecuaciones de Maxwell describen la interacción de los campos eléctricos y magnéticos con las cargas y las corrientes, la ecuación de Einstein representa la geometría del espaciotiempo generada por una distribución de materia en el universo [4][3].

2.10. Espaciotiempos esféricamente simétricos

Los espaciotiempos con simetría esférica son un caso simple, pero físicamente de gran importancia, pues se pueden aproximar a campos gravitatorios pequeños creados por muchos objetos astrofísicos que parecen ser casi esféricos como la tierra o el sol [11][4].

Para construir la métrica general con simetría esférica, se define [12]:

$$x^0 = t, \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad x \cdot d\vec{x} \quad (2.61)$$

²A simple vista se puede notar que la expresión (2.60) es un conjunto de 16 ecuaciones pero gracias a que $G_{\alpha\beta}$ y $T_{\alpha\beta}$ son simétricos, se reducen a solo 10

³En algunas ocasiones es conveniente expresar las ecuaciones de Einstein como $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$ en lugar de su abreviatura $G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$

⁴El tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ incluye cualquier materia presente al igual que radiación electromagnética

La forma general de la métrica espacialmente isotrópica es [12]:

$$ds = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dt \vec{x} \cdot d\vec{x} + C(r, t) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(r, t) d\vec{x}^2 \quad (2.62)$$

Donde A, B, C y D son funciones de r y t . Transformando a coordenadas esféricas polares (t, r, θ, ϕ) , las cuales están definidas por [12]:

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta \quad (2.63)$$

Se obtiene:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.64)$$

Entonces, la métrica toma la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A(r, t) dt^2 + B(r, t) r dt dr + C(r, t) r^2 dr^2 + D(r, t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= -A(r, t) dt^2 + B(r, t) r dt dr + (C(r, t) r^2 dr^2 + D(r, t) dr^2) + D(r, t) (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= -A(r, t) dt^2 + B(r, t) r dt dr + (C(r, t) r^2 + D(r, t)) dr^2 + D(r, t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned}$$

Donde $C(r, t)r^2 + D(r, t)$, $B(r, t)r$ y $D(r, t)r^2$ se pueden escribir como funciones de r y t [12]

$$ds^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dt dr + C(r, t) dr^2 + D(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.65)$$

Ahora bien, se define una nueva coordenada radial $\bar{r} = D(r, t)$ y, nuevamente, las funciones A, B, C en función de \bar{r} y t

$$ds^2 = -A(\bar{r}, t) dt^2 + B(\bar{r}, t) dt d\bar{r} + C(\bar{r}, t) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.66)$$

Introduciendo una nueva coordenada temporal definida por la relación [12]

$$d\bar{t} = \Phi(\bar{r}, t) \left[A(\bar{r}, t) dt - \frac{1}{2} B(\bar{r}, t) d\bar{r} \right] \quad (2.67)$$

Donde $\Phi(\bar{r}, t)$ es una constante de integración [12]. Elevando al cuadrado, se obtiene:

$$d\bar{r} = \Phi^2 \left(A^2 dt^2 - AB dt d\bar{r} + \frac{1}{4} B^2 d\bar{r}^2 \right) \quad (2.68)$$

De lo que se deduce

$$-A dt^2 + B dt d\bar{r} = -\frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 + \frac{B}{4A} d\bar{r}^2 \quad (2.69)$$

Reemplazando la ecuación (2.69) en (2.66)

$$ds^2 = -\frac{1}{A\Phi^2}d\bar{t}^2 + \frac{B}{4A}d\bar{r}^2 + C(\bar{r}, t) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.70)$$

Agrupando términos

$$ds^2 = -\frac{1}{A\Phi^2}d\bar{t}^2 + \left(\frac{B}{4A} + C(\bar{r}, t)\right) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.71)$$

Definiendo nuevamente $\bar{A}(\bar{r}, t) = -\frac{1}{A\Phi^2}$ y $\bar{B}(\bar{r}, t) = \frac{B}{4A} + C(\bar{r}, t)$ se obtiene la métrica general para un espaciotiempo con simetría esférica [12]

$$ds^2 = -\bar{A}(\bar{r}, \bar{t})d\bar{t}^2 + \bar{B}(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.72)$$

Que también se puede escribir como [12][6]:

$$\boxed{ds^2 = -g_{tt}(t, r) dt^2 + g_{rr}(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} \quad (2.73)$$

2.11. Geometría de Schwarzschild

Solucionar las ecuaciones de campo de Einstein no es una tarea sencilla, dado su alto grado de no linealidad es improbable encontrar una solución general exacta para una distribución de materia arbitraria, por tanto, resulta conveniente buscar soluciones que describan la geometría de espaciotiempos con alguna simetría [12].

2.11.1. Métrica de Schwarzschild

En 1916 Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein para un cuerpo esférico y es conocida como *métrica de Schwarzschild* [12][4][6]. Esta solución describe la geometría del espaciotiempo en el exterior de una distribución compacta de materia con simetría esférica [4][12][6].

Por conveniencia se rescribe la métrica (2.73) en términos de exponenciales (ecuación 2.74) [4][6]:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.74)$$

Donde $\alpha(r, t)$ y $\beta(r, t)$ son funciones desconocidas que dependen de r y t . Se pueden expresar las componentes del tensor métrico como una matriz diagonal:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Los coeficientes métricos covariantes no nulos son:

$$g_{00} = -e^{2\alpha(r,t)}, \quad g_{11} = e^{2\beta(r,t)}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.76)$$

Los coeficientes contra-variantes no nulos:

$$g^{00} = -e^{-2\alpha(r,t)}, \quad g^{11} = e^{-2\beta(r,t)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.77)$$

Para encontrar las funciones desconocidas $\alpha(r, t)$ y $\beta(r, t)$ de la métrica (2.74), se solucionan las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.78)$$

Como se está buscando una solución en el exterior de un cuerpo esférico únicamente dotado de masa, el término $T_{\mu\nu} = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (2.79)$$

Multiplicando por la métrica contra-variante

$$R_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.80)$$

$$R - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.81)$$

Expandiendo sobre los índices $\mu\nu$

$$R - \frac{1}{2}R(g_{00}g^{00} + g_{11}g^{11} + g_{22}g^{22} + g_{33}g^{33}) = 0 \quad (2.82)$$

$$R = 0 \quad (2.83)$$

La expresión $R = 0$ implica que:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.84)$$

Para calcular el tensor de Ricci, primero se determinan los símbolos de Christoffel, [4][17]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (2.85)$$

Luego las componentes del tensor de curvatura de Riemann [4][17]:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} \quad (2.86)$$

y, a partir de este, se evalúan las componentes de Ricci [4][17]:

$$R_{\beta\mu} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\rho_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\rho\alpha} \quad (2.87)$$

Por último, se igualan las ecuaciones (2.84) y (2.87), lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, que tienen como variables incógnitas las funciones α y β [4]:

$$R_{tt} = -\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 + \frac{2}{r}\alpha'\right] = 0 \quad (2.88)$$

$$R_{rr} = -\left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 - \frac{2}{r}\beta'\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right] = 0 \quad (2.89)$$

$$R_{tr} = \frac{2}{r}\dot{\beta} = 0 \quad (2.90)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}[r(\beta' - \alpha') - 1] + 1 = 0 \quad (2.91)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 0 \quad (2.92)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la métrica de Schwarzschild, la cual no depende del tiempo o, en otras palabras, es una solución estática (ecuación 2.93) [4]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.93)$$

En relatividad general, la única solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío es la métrica de Schwarzschild (ecuación 2.93) [6][4].

2.11.2. Coodenadas de Eddington-Finkelstein

La métrica de Schwarzschild (cuerpo esférico dotado de masa) está dada por [4][6]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.94)$$

Esta métrica presenta un punto singular, ya que $ds^2 \rightarrow \infty$, cuando $r = 2m$, pero este es un problema del sistema de coordenadas similar al que ocurre en el sistema de coordenadas polares esféricas en el espacio Euclidiano, cuando $\theta = 0$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$ representa un punto en lugar de un círculo, en conclusión, la métrica no es válida en $r = 2m$ [6].

Para observar este problema se factoriza el término $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ en la ecuación (2.94) y de esta manera se obtiene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(-dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} dr^2 \right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.95)$$

El término $d\theta^2 + \sin^2 \theta = 0$ por la simetría esférica y analizando la trayectoria de fotones $ds^2 = 0$ [4][6]

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(-dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \right) \quad (2.96)$$

$$0 = -dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \quad (2.97)$$

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \quad (2.98)$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \quad (2.99)$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (2.100)$$

Donde $\frac{dt}{dr}$ representa la pendiente de las trayectorias que forman el cono de luz en el plano (r, t) y se muestra que para $r = 2m$ la métrica no está definida [4]. Este problema se puede arreglar buscando más sistemas coordenados alternativos que no tengan una singularidad coordenada en $r = 2m$, por ejemplo, reemplazando t por una coordenada que se mueve más lento a lo largo de las geodésicas nulas [4]. Para realizar esta transformación se define una nueva coordenada radial r_* denominada la coordenada tortuga (ecuación 2.101) [4][6]:

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} = dr_*^2 \quad (2.101)$$

Para determinar r_* se integra la ecuación (2.101)[6] [4]:

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (2.102)$$

$$dr_* = \frac{r dr}{r - 2m} \quad (2.103)$$

$$r_* = \int_0^r \frac{r dr}{r - 2m} \quad (2.104)$$

$$(2.105)$$

Resolviendo la integral por sustitución

$$\begin{aligned} x &= r - 2m \longrightarrow r = x + 2m \\ \frac{dx}{dr} &= 1 \\ dx &= dr \end{aligned} \quad (2.106)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.106) en r_* :

$$r_* = \int_{-2m}^{r-2m} \frac{x+2m}{x} dx \quad (2.107)$$

$$r_* = \int_{-2m}^{r-2m} \left(1 + \frac{2m}{x}\right) dr \quad (2.108)$$

$$r_* = r + 2m \ln \left| \frac{r-2m}{2m} \right| \quad (2.109)$$

Escribiendo la métrica de Schwarzschild en términos de la coordenada tortuga (ecuación 2.110) [4]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr_*^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.110)$$

Ahora, se observa que la métrica si está definida en $r = 2m$ [4]. Luego, se definen las coordenadas (ecuación 2.111) [4][6]:

$$\begin{aligned} v &= t + r_*, & \mu &= t - r_* \\ d\mu &= dt - dr_* \\ dt &= d\mu + dr_* \end{aligned} \quad (2.111)$$

Donde las geodésicas radiales nulas entrantes se caracterizan por $v = \text{constante}$ y las salientes cumplen $\mu = \text{constante}$ [4][6]. Ahora, se escribe la métrica (2.110) en términos de v y r :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (d\mu + dr_*)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr_*^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\mu^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\mu dr_* - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr_* d\mu \\ &\quad - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr_*^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr_*^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Reemplazando dr_* en la ecuación (2.114) se obtiene la métrica [4][6]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.114)$$

La expresión (2.114) es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de **Eddington-Finkelstein** y μ representa la coordenada temporal [4][6].

2.12. Ecuaciones de estructura y componentes del tensor de Riemann

Las ecuaciones de estructura de Cartan (ecuación 2.135, 2.136) tienen parte de sus aplicaciones en relatividad general y, mediante el cálculo exterior, sirven para determinar la curvatura de

una variedad pseudo-Riemanniana o el espaciotiempo en relatividad general [19][13]. Definiendo una tétrada [4]:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta \quad (2.115)$$

Donde $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow -1, 1, 1, 1$, por tanto la métrica es Minkowskiana [4]:

$$ds^2 = -(\hat{\theta}^0)^2 + (\hat{\theta}^1)^2 + (\hat{\theta}^2)^2 + (\hat{\theta}^3)^2 \quad (2.116)$$

2.12.1. Formas de curvatura

Las formas de curvatura son una generalización de los coeficientes de conexión y las componentes del tensor de torsión [13][20]. Las formas de conexión son semejantes a los símbolos de Christoffel y, en una base de coordenadas locales, se definen de la forma [20]:

$$\omega^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} dx^\beta \quad (2.117)$$

Donde $\omega^\beta{}_\alpha$ son las *1-formas de conexión* [15]. La compatibilidad de la métrica $g_{\alpha\beta}$ y la derivada covariante ∇ se expresan [15]:

$$dg_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \quad (2.118)$$

Las variedades que se tratan en la teoría de la relatividad general cumplen la propiedad $dg = 0$, esto implica que las *1-formas de conexión* tengan la siguiente propiedad [4][20][15].

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (2.119)$$

Se puede reorganizar esta expresión a conveniencia, multiplicando por la métrica para subir el índice α

$$g^{\alpha\alpha} \omega_{\alpha\beta} = -g^{\alpha\alpha} \omega_{\beta\alpha} \quad (2.120)$$

$$\omega^\alpha{}_\beta = -\omega_\beta{}^\alpha \quad (2.121)$$

Entonces, se obtiene la relación:

$$\boxed{\omega^\alpha{}_\beta = -\omega_\beta{}^\alpha \quad \forall (\alpha, \beta)} \quad (2.122)$$

Ahora, partiendo de la expresión:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (2.123)$$

$$(2.124)$$

Si $\alpha = 0$

$$\omega_{0\beta} = -\omega_{\beta 0} \quad (2.125)$$

$$(2.126)$$

Se puede reescribir de la forma:

$$g_{00} \omega^0_{\beta} = -g_{\beta\alpha} \omega^{\alpha}_0 \quad (2.127)$$

Donde $g_{00} = -1$ y como la métrica es diagonal, en el lado derecho de la expresión (2.127) $\beta = \alpha \neq 0$

$$-\omega^0_{\beta} = -g_{\beta\alpha} \omega^{\alpha}_0 \quad (2.128)$$

$$-\omega^0_{\beta} = -\omega^{\beta}_0 \quad (2.129)$$

$$\omega^0_{\beta} = \omega^{\beta}_0 \quad (2.130)$$

Entonces, la propiedad de simetría es:

$$\boxed{\omega^0_{\beta} = \omega^{\beta}_0} \quad \forall (\beta \neq 0) \quad (2.131)$$

y, la propiedad antisimétrica:

$$\boxed{\omega^{\alpha}_{\beta} = -\omega^{\beta}_{\alpha}} \quad \forall (\alpha, \beta \neq 0) \quad (2.132)$$

2.12.2. Ecuaciones de estructura de Cartan

En términos de las formas de torsión T^{α} , las *1-formas* de conexión ω^{μ}_{ν} y las *2-formas* de curvatura Ω^{α}_{β} , se definen las ecuaciones de estructura de Cartan [13][20]:

$$d\hat{\theta}^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \hat{\theta}^{\beta} = \frac{1}{2}T^{\alpha} \quad \text{Primera ecuación de estructura de Cartan} \quad (2.133)$$

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \hat{\theta}^{\mu} \wedge \hat{\theta}^{\nu} \quad \text{Segunda ecuación de estructura de Cartan} \quad (2.134)$$

Donde Ω^{α}_{β} se denominan *2-formas* de curvatura [15]. Si se considera variedades sin torsión, las ecuaciones de estructura de Cartan toman la forma [13][20][12]:

$$\boxed{d\hat{\theta}^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \hat{\theta}^{\beta} = 0} \quad (2.135)$$

$$\boxed{\Omega^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \hat{\theta}^{\mu} \wedge \hat{\theta}^{\nu}} \quad (2.136)$$

Donde la 2-forma de curvatura Ω^α_β se define (ecuación 2.137) [13]:

$$\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\mu \wedge \omega^\mu_\beta \quad (2.137)$$

Igualando las ecuaciones (2.136) y (2.137), se obtiene el tensor de curvatura de Riemann (ecuación 2.138) [13]:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \quad (2.138)$$

La contracción $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ genera el tensor de curvatura de Ricci [13]:

$$\underbrace{R^\alpha_\mu}_{\mu} = 0 \quad (2.139)$$

Por la solución de las ecuaciones de Einstein se iguala a cero

Solucionando las ecuaciones de Einstein (ecuación 2.139) se obtiene la métrica de Schwarzschild (ecuación 2.139). Una forma de mostrar que las ecuaciones de estructura de Cartan son consistentes con la geometría de Riemann, es calculando el escalar de curvatura de Ricci, debido a que este es un invariante, el escalar de Ricci es igual en ambos casos [4]:

2.13. Algoritmo de Newman-Janis

En relatividad general existen muchos métodos para encontrar nuevas soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, como el formalismo de Newman-Penrose y el algoritmo de Newman-Janis [21]. El algoritmo de Newman-Janis es utilizado ampliamente para la construcción de un espaciotiempo estacionario y axisimétrico a partir de un espaciotiempo semilla estático y esférico [7] [21].

La métrica semilla está escrita en coordenadas de Eddington-Finkelstein (ecuación 2.140) [4]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\mu^2 - (d\mu dr + dr d\mu) + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (2.140)$$

Las componentes de la métrica se pueden escribir en forma matricial como [4][6]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

La métrica contra-variante $g^{\mu\nu}$ se obtiene hallando la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$ [17]. Para ello, se realiza el siguiente procedimiento para transformar $g_{\mu\nu}$ en $g^{\mu\nu}$ [22]:

$$(g_{\mu\nu} | \mathbb{I}) \longrightarrow (\mathbb{I} | g^{\mu\nu}) \quad (2.142)$$

Entonces, para $g_{\mu\nu}$:

$$(g_{\mu\nu} | \mathbb{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -(1 - \frac{2M}{r}) & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.143)$$

$$(g_{\mu\nu} | \mathbb{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 & -(1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.144)$$

$$(g_{\mu\nu} | \mathbb{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \end{array} \right) \quad (2.145)$$

Las componentes de la métrica contra-variante expresadas en forma matricial es [23]:

$$g^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \end{array} \right) \quad (2.146)$$

La métrica inversa ahora se puede expresar en términos de una tétrada nula $\{l, n, m, \bar{m}\}$, donde los vectores l, n son reales, mientras que m, \bar{m} son complejos conjugados y la métrica contra-variante está dada por [23]:

$$g^{\mu\nu} = 2(l^{(\mu} n^{\nu)} - m^{(\mu} \bar{m}^{\nu)}) \quad (2.147)$$

Las *1-formas* de la tétrada nula son [23]:

$$l_\mu dx^\mu = d\mu \quad (2.148)$$

$$n_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\mu + dr \quad (2.149)$$

$$m_\mu dx^\mu = \frac{r}{\sqrt{2}} (d\theta + i \sin \theta d\phi) \quad (2.150)$$

Para un espaciotiempo con simetría esférica, los vectores tétradas nulos son [21]:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.151)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{r\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.153)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{r\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.154)$$

Luego, se deja que la coordenada r tome valores complejos [21]:

$$l \longrightarrow l' = \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.155)$$

$$n \longrightarrow n' = -\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{r} - \frac{M}{\bar{r}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.156)$$

$$m \longrightarrow m' = \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.157)$$

$$\bar{m} \longrightarrow \bar{m}' = \frac{1}{r\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.158)$$

Donde las coordenadas son [21]:

$$\{\mu, r, \theta, \phi\} \longrightarrow \{\mu', r', \theta', \phi'\} \quad (2.159)$$

En esta tétrada compleja, se hace un cambio complejo de coordenadas [21]:

$$\begin{aligned} r' &= r + ia \cos \theta, & \mu' &= \mu - ia \cos \theta, & \theta' &= \theta, & \phi' &= \phi \\ r &= r' - ia \cos \theta, & \mu &= \mu' + ia \cos \theta, & \theta &= \theta, & \phi &= \phi \end{aligned} \quad \text{Despejando r} \quad (2.160)$$

Si r' y μ son reales [21]

$$\bar{r} = r' + ia \cos \theta', \quad \bar{\mu} = \mu' - ia \cos \theta' \quad (2.161)$$

Entonces las componentes de la métrica contra-variante serían [23]:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & \frac{r'^2 + a^2 - 2r' M}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 \\ \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{\csc^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

Para obtener la métrica covariante de Kerr, se calcula la matriz inversa de $g^{\mu\nu}$ [21][23]

$$\left(g^{\mu'\nu'} \mid \mathbb{I} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} g^{\mu'\mu'} & g^{\mu'r'} & 0 & g^{\mu'\phi'} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g^{\mu'r'} & g^{r'r'} & 0 & -g^{\mu'\phi'} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{\theta'\theta'} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g^{\mu'\phi'} & -g^{\mu'\phi'} & 0 & g^{\phi'\phi'} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.163)$$

En forma matricial, las componentes de la métrica de Kerr está dada por [23]:

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{2Mr'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} - 1 & -1 & 0 & -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta' \\ 0 & 0 & a^2 \cos^2 \theta' + r'^2 & 0 \\ -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} & a \sin^2 \theta' & 0 & \frac{((a^2 + r'^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta')}{a^2 \cos \theta' + r'^2} \sin^2 \theta' \end{pmatrix} \quad (2.164)$$

La métrica de Kerr en coordenadas nulas es [23][6]:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\mu d\tilde{\phi} + \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\tilde{\phi}^2 \quad (2.165)$$

Organizando los términos se obtiene la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (2.166)$$

donde m es la masa y a es el momento angular por unidad de masa J/m [6][4]

2.14. Agujeros negros en rotación

2.14.1. Geometría de Kerr

En las secciones anteriores se mencionó que la métrica de Schwarzschild describe la curvatura del espaciotiempo generado por un cuerpo estático y con simetría esférica, dotado únicamente de masa [4][12][6]. Dado que, en realidad, los planetas y las estrellas no son estrictamente esféricas y estáticas, sino giratorias y axialmente simétricas respecto a su eje de rotación, surge la necesidad de buscar nuevas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que contengan esta simetría [4][12].

Una solución que represente la geometría del espaciotiempo fuera de un cuerpo masivo y estacionario en constante rotación debe renunciar a la simetría esférica y adoptar la geometría axial, la cual requiere que los coeficientes métricos g_{00} y g_{33} sean independientes de la métrica [12].

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta) \quad (2.167)$$

Para un objeto en rotación, se puede expresar el elemento de línea como (ecuación 2.168) [12].

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\phi - \omega dt)^2 + Cdr^2 + Dd\theta^2 \quad (2.168)$$

Donde A, B, C, D y ω son funciones desconocidas que dependen de las coordenadas espaciales r y θ [12]. Los coeficientes métricos covariantes son:

$$g_{tt} = -A + B\omega^2, \quad g_{t\phi} = -2B\omega, \quad g_{\phi\phi} = B, \quad g_{rr} = C, \quad g_{\theta\theta} = D \quad (2.169)$$

Donde $\omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$, si el objeto no está rotando, se establece que $\omega = 0$, entonces $g_{t\phi} = 0$ [12].

2.14.2. Métrica de Kerr

El posible elemento de línea para un espacio tiempo axisimétrico se restringe a la forma (ecuación 2.170) [12]

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (2.170)$$

Que también es equivalente a (ecuación 2.171) [12]:

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\phi - \omega dt)^2 + Cdr^2 + Dd\theta^2 \quad (2.171)$$

Donde ω es el momento angular y A, B, C, D son funciones arbitrarias que dependen de r y θ [12]. Para que la métrica de un cuerpo con simetría axisimétrica tenga sentido físico, esta debe satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein y para ello, al igual que en la métrica de Schwarzschild, se inicia por calcular los coeficientes de conexión o símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ para la métrica (2.171) y, a partir de estos, determinar el tensor de curvatura de Riemann $R^\mu_{\nu\sigma\rho}$ y por último, obtener el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ en función de las incógnitas del elemento de línea ds^2 [12][4].

En este caso, al igual que en la Métrica de Schwarzschild, se desea conocer la geometría del espaciotiempo fuera de una distribución compacta de materia en rotación, lo que conduce a resolver las ecuaciones de campo de Einstein en vacío y de esto resulta que [12].

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.172)$$

El proceso algebraico para llevar a cabo este cálculo completo es muy complicado y extenso,⁵ incluso las ecuaciones de Einstein no son suficientes para determinar todas la incógnitas de la métrica (2.171), ya que la simetría axial tiene menos restricciones que la simetría esférica [12]. En la sección (2.13) se desarrolló un método que genera la solución de Kerr apartir de la métrica de Schwarzschild, la cual está dada por:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2}dtd\phi + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2}d\phi^2 \quad (2.173)$$

Donde

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \quad (2.174)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.175)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (2.176)$$

La solución (2.173) describe un agujero negro de masa m y momento angular $J = mac$, donde a corresponde de alguna manera a la velocidad angular del agujero [6][12]. También, se observa que si $a = 0$, la solución de Kerr se convierte en la métrica de Schwarzschild, además, para un r muy grande, es aproximadamente Mikowskiana [12][6]. Por otro lado, fijando el momento angular a y asumiendo que no existe una masa ($m = 0$) que curve el espaciotiempo, se obtiene (ecuación 2.179) [4][12]

⁵Para detallar una derivación completa de esta métrica, se recomienda consultar el libro *Chandrasekhar, S. (1983). THE MATHEMATICAL THEORY OF BLACK HOLES. Oxford University Press., pag 273*

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{a^2 + r^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta] \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} d\phi^2 \quad (2.177)$$

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{a^2 + r^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{[r^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + a^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)] \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} d\phi^2 \quad (2.178)$$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + [r^2 + a^2] \sin^2 \theta d\phi^2} \quad (2.179)$$

Este elemento de línea es la métrica de Minkowski escrita en términos de coordenadas elipsoidales y están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las siguientes expresiones (ecuación 2.180) [12] [4]

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.180)$$

Donde $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y las superficies son elipsoides de rotación sobre el eje z para un $r = \text{constante}$.

De igual forma que, como se mencionó en la sección (2.11), la única solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío es la métrica de Schwarzschild, en este caso, la única solución axial simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío es la métrica de Kerr (ecuación 2.173) [12].

2.14.3. El horizonte de sucesos

Se puede notar a simple vista que si ρ y Δ tienden a cero, los coeficientes g_{00} , g_{03} , g_{33} y g_{rr} de la métrica de Kerr (ecuación 2.173) tienden a infinito, análogo a lo que sucede en la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, se puede intuir que la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist es singular en $\rho = \Delta = 0$, pero, el invariante de curvatura $R = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$ revela que la verdadera singularidad de la solución de Kerr se presenta cuando $\rho \rightarrow 0$ [12][4]. Esto se observa si se transforma la métrica a coordenadas de Kerr (ecuación 2.181), las cuales son semejantes a las coordenadas de Eddington-Finkelstein en la solución de Schwarzschild [6].

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\mu d\tilde{\phi} + \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\tilde{\phi}^2 \quad (2.181)$$

Donde claramente se observa que $\Delta = 0$ no tienen problema alguno, por el contrario, representa el horizonte de sucesos del espaciotiempo de Kerr [6].

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (2.182)$$

Desarrollando esta ecuación de grado dos se obtiene que:

$$r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (2.183)$$

De la ecuación (2.183) se concluye que la métrica de Kerr tiene dos horizontes de eventos (ecuación 2.184) [12]

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}, \quad r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \quad (2.184)$$

2.14.4. Propiedades de los coeficientes de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

Coefficientes métricos de la solución de Kerr [6] [4][12]

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right), \quad g_{t\phi} = -\frac{2mar \sin^2 \theta}{\rho^2}, \quad g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad g_{\phi\phi} = \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

A pesar de que la métrica de Kerr no es diagonal, sus coeficientes métricos cumplen algunas propiedades básicas que son útiles para realizar algunos cálculos (ecuación 2.185) [6]:

$$\begin{aligned} g_{tt} + a \sin^2 \theta g_{t\phi} &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ g_{t\phi} + a \sin^2 \theta g_{tt} &= a \sin^2 \theta \\ ag_{\phi\phi} + (r^2 + a^2)g_{t\phi} &= -\Delta a \sin^2 \theta \\ ag_{t\phi} + (r^2 + a^2)g_{tt} &= \Delta \\ g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} &= \Delta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.185)$$

2.14.5. Superficie límite estacionaria

La existencia de superficies límite estacionarias es una propiedad general de espaciotiempos con fuentes rotatorias y está definida por $g_{tt} = 0$ [12][6]. Si se considera una partícula estacionaria $r = \theta = \phi = \text{constante}$, de la ecuación (2.173) se tiene [12]:

$$1 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (2.186)$$

De donde se observa claramente que la componente g_{tt} no puede ser menor o igual a 1, por lo tanto una partícula con masa no puede permanecer estacionaria dentro de la superficie $g_{tt} = 0$ [12]

$$-\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) = 0 \longrightarrow \text{Resolviendo para } r \quad (2.187)$$

$$r_{st} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.188)$$

Donde r_{st} es el radio de la superficie exterior denominada superficie límite estática [12]. Para $\theta = \pi/2$ se tiene que

$$r_{st} = 2m \quad (2.189)$$

De donde se deduce que, en el plano ecuatorial, el radio de la superficie límite estática es dos veces su masa m

2.14.6. La ergosfera

La ergosfera o ergoregión es una región que se encuentra entre el horizonte de eventos y el límite estático [6]

$$m + \sqrt{m^2 - a^2} < \text{Ergosfera} < m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.190)$$

y se caracteriza por permitir la existencia de órbitas con energía negativa [6]. Como la energía de rotación de un agujero negro se encuentra fuera del horizonte de eventos es posible extraer su energía rotacional aprovechando la propiedades de la ergosfera de un agujero negro de Kerr [6]. Limitando el movimiento de una partícula en el plano ecuatorial, las componentes de la 4-velocidad $u^\alpha = (u^t, u^r, u^\theta, u^\phi)$ son [6][24][25][26]:

$$\begin{aligned} u^t &= -\frac{Eg_{\phi\phi} + Lg_{t\phi}}{-g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}} \\ u^r &= \frac{dr}{d\tau} \\ u^\theta &= 0 \\ u^\phi &= -\frac{Eg_{t\phi} + Lg_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \end{aligned} \quad (2.191)$$

Las geodésicas radiales están dadas por [6][24][25][26]:

$$g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\phi}(u^t \cdot u^\phi) + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 = -1 \quad (2.192)$$

Resolviendo la ecuación anterior para E , se obtiene la energía de la partícula en un punto del plano ecuatorial [6][24][25][26]

$$E = \frac{2amLr \pm \sqrt{4a^2m^2L^2r^2 - [r^4 + a^2(r^2 + 2mr)][L^2a^2 - (r^2 + L^2)\Delta - \dot{r}^2r^4]}}{r^4 + a^2(r^2 + 2mr)} \quad (2.193)$$

Donde \dot{r} es igual a $dr/d\tau$

2.15. Proceso de Penrose

Una característica importante de la ergosfera es que las partículas pueden permanecer ahí o escapar sin caer en la singularidad y en esta Zona ningún cuerpo puede permanecer inmóvil debido al efecto Lense-Thirring; el cual es generado por la curvatura en el espaciotiempo de Kerr y se debe al arrastre rotatorio que sufren los sistemas que se aproximan al agujero negro sin importar cuál sea su momento angular. Dicho de otro modo, cerca del horizonte, el arrastre generado por la rotación del agujero negro es tan intenso que todos los cuerpos se ven forzados a girar junto a él [27][28].

R. Penrose y R. M. Fluyd demostraron en 1969 que, si una partícula masiva entra en el agujero negro y estando en la ergosfera, se divide en dos partes, de manera que una ingrese al agujero negro y la otra escape al infinito, para algunas trayectorias es posible que la parte que escape, tenga más energía de la que tenía la partícula antes de dividirse [24][28]. De esta manera, sería posible utilizar un agujero negro de Kerr como una fuente de energía, enviando partículas a la ergosfera con una trayectoria bien definida y obteniendo partes de ellas con una energía mayor a la original [28].

Para llevar a cabo el proceso de Penrose, se debe considerar que se emitió una partícula $p^{(1)}$, con energía E_1 a la ergosfera y, una vez dentro, esta se divide en dos partículas $P^{(2)}$ y $p^{(3)}$, cada una con energía E_2 y E_3 , respectivamente [15][4]. Siendo así [26]:

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad (2.194)$$

La velocidad angular en el plano ecuatorial de la partícula $p^{(1)}$ está dada por la ecuación [24][25][26]:

$$\Omega_1 = \frac{-g_{t\phi}(E^2 + g_{tt}) + \sqrt{(E^2 + g_{tt})(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})}E^2}{E^2g_{\phi\phi} + g_{t\phi}^2} \quad (2.195)$$

Teniendo en cuenta que la partícula $p^{(2)}$ es la que ingresa al horizonte de eventos su velocidad angular es [24][25][26]:

$$\Omega_2 = \frac{-g_{t\phi} - \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} \quad (2.196)$$

Y, la velocidad angular de la partícula que escapa $p^{(3)}$ es [24][25][26]:

$$\Omega_3 = \frac{-g_{t\phi} + \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} \quad (2.197)$$

Donde Ω_i es la velocidad angular respecto a un marco de referencia en el infinito [26].

2.15.1. Extracción de energía

La energía de la partícula que escapa Ω_3 está dada por [26]:

$$E_3 = \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_3 - \Omega_2} \right) \cdot \left(\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_3}{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_1} \right) \quad (2.198)$$

Si se toma $E = 1$ resulta [24][25][26]:

$$E_3 = \frac{\sqrt{1 + g_{tt}} + 1}{2} \quad (2.199)$$

2.15.2. Eficiencia del proceso de Penrose

La eficiencia del proceso de Penrose es [24][25][26]:

$$\eta = \frac{E_{\text{entrada}}}{E_{\text{salida}}} \quad (2.200)$$

$$\eta = \frac{E_3 - E_1}{E_1} \longrightarrow \text{Reemplazando } E = 1 \quad (2.201)$$

$$\eta = E_3 - 1 \quad (2.202)$$

En el proceso de Penrose, el agujero negro cede parte de su energía en forma de momento angular y podría explotarse hasta que éste sea igual a cero y se reduzca a un agujero negro de Schwarzschild [28]. Según [13] y [26] la mayor eficiencia es del 20,71 % y se presenta cuando la división de la partícula se genera en el límite $r \rightarrow r_+$, para un agujero extremo de Kerr ($a = m$).

2.16. Black-Bounce

En relatividad general y en otras teorías alternativas de la gravedad se presentan muchos problemas y en lo referente a la física de los agujeros negros, uno de ellos es la presencia de singularidades de curvatura dentro del horizonte de eventos en las soluciones más simples como la métrica de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman [29]. Debido a que la singularidad de un agujero negro es un lugar donde las ecuaciones de la teoría de relatividad general y teorías alternativas a esta no funcionan, se requiere una compresión más amplia de los agujeros negros evitando la singularidad [29].

2.16.1. Black-Bounce-Schwarzschild

La ecuación (2.203) es la métrica de Schwarzschild modificada [30]. Adaptando el parámetro a , la métrica (2.203) representa [30]:

- El espaciotiempo ordinario de Schwarzschild.
- Una geometría regular de agujero negro con una garganta unidireccional similar al espacio.

- Una geometría de agujero de gusano unidireccional con una garganta extrema nula.
- Una geometría de agujero de gusano transitable canónica con una garganta temporal bidireccional.

Considere la métrica [30]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)} + (r^2 + a^2)d\Omega^2 \quad (2.203)$$

Se puede observar que si $a = 0$, la ecuación (27) se reduce simplemente a la solución de Schwarzschild, por tanto, $a \neq 0$ es una condición inicial sensata que se debe cumplir si se va a realizar un análisis sobre agujeros negros regulares [30].

Escalar de curvatura

El escalar de curvatura de Ricci es [30]:

$$R = \frac{2a^2(3m - \sqrt{r^2 + a^2})}{(r^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2.204)$$

2.16.2. Black-Bounce-Kerr

La geometría del Black-Bounce-Kerr es cualitativamente más complicada que la de Black-Bounce-Schwarzschild. Partiendo de la geometría de Kerr en coordenadas estándar de Boyer-Lindquist [31].

$$ds_K^2 = -\frac{\Delta_K}{\rho_K^2}(a \sin^2 \vartheta d\phi - dt)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho_K^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho_K^2}{\Delta_K}dr^2 + \rho_K^2 d\vartheta^2 \quad (2.205)$$

Donde

$$\rho_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta; \quad \Delta_K = r^2 + a^2 - 2mr \quad (2.206)$$

Aplicando el procedimiento que en Black-Bounce-Schwarzschild, el nuevo espaciotiempo viene dado por el elemento de línea [31]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(a \sin^2 \vartheta d\phi - dt)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2}[(r^2 + l^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 \quad (2.207)$$

Donde

$$\rho^2 = r^2 + l^2 + a^2 \cos^2 \vartheta; \quad \Delta = r^2 + a^2 + l^2 - 2m\sqrt{r^2 + l^2} \quad (2.208)$$

La naturalidad de las coordenadas angulares y temporales no cambia, mientras que la coordenada radial se extiende en todo el eje real [31].

Escalar de curvatura

Nuevamente se observa como el parámetro l influye en la coordenada radial ρ para suprimir la singularidad [31].

$$R = 2l^2 \cdot \frac{m(\rho^4 - 2\sqrt{r^2 + l^2}) + (\sqrt{r^2 + l^2})^3(\rho^2 - 2\Delta)}{\rho^2(\sqrt{r^2 + l^2})} \quad (2.209)$$

Horizonte de eventos

El horizonte de eventos está en $\Delta = 0$ [31]:

$$\Delta = r^2 + a^2 + l^2 - 2m\sqrt{r^2 + l^2} \quad (2.210)$$

Solucionando la ecuación de segundo grado se obtiene [31]:

$$r_H = \pm \sqrt{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2 - l^2} \quad (2.211)$$

Para un Black-Bounce-Kerr extremo ($a=m$) se obtiene que el horizonte es

$$r_H = \sqrt{m^2 - l^2} \quad (2.212)$$

Ergoregion

La superficie límite estática o ergosfera se define como [31]:

$$r_{st} = \pm \sqrt{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}\right)^2 - l^2} \quad (2.213)$$

La superficie límite estática

$$r_{st} = \sqrt{4m^2 - l^2} \quad (2.214)$$

El parámetro l debe cumplir [31]

$$l \leq m \quad (2.215)$$

METODOLOGÍA

- 3.1 Derivación de la métrica de Schwarzschild usando las ecuaciones de estructura de Cartan**
 - 3.1.1 Primera ecuación de estructura de Cartan**
 - 3.1.2 Segunda ecuación de estructura de Cartan**
 - 3.1.3 Tensor de curvatura de Ricci**
 - 3.1.4 Solución de las ecuaciones de Einstein en vacío**

3.1. Derivación de la métrica de Schwarzschild

Para derivar la métrica de Schwarzschild, usando las ecuaciones de estructura de Cartan, primero se inició definiendo una métrica semilla o general. En la sección (2.10) se presentó la métrica general para un espaciotiempo con simetría esférica (ecuación 2.74) en terminos de exponenciales, pues conviene trabajar con la métrica escrita de esta forma para facilitar en gran parte los cálculos. Dicho esto, se empleó la métrica (3.1) como semilla para derivar la solución de Schwarzschild.

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (3.1)$$

Transformando la métrica (3.1) a la tétrada $\{\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}\}$:

$$\begin{aligned} \left(\hat{\theta}^{(0)}\right)^2 &= e^{2\alpha(r,t)} dt^2 &\longrightarrow \hat{\theta}^{(0)} &= e^{\alpha(r,t)} dt \\ \left(\hat{\theta}^{(1)}\right)^2 &= e^{2\beta(r,t)} dr^2 &\longrightarrow \hat{\theta}^{(1)} &= e^{\beta(r,t)} dr \\ \left(\hat{\theta}^{(2)}\right)^2 &= r^2 d\vartheta^2 &\longrightarrow \hat{\theta}^{(2)} &= r d\vartheta \\ \left(\hat{\theta}^{(3)}\right)^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 &\longrightarrow \hat{\theta}^{(3)} &= r \sin \vartheta d\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) toma la forma:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \hat{\theta}^{(\alpha)} \otimes \hat{\theta}^{(\beta)} \quad (3.3)$$

Donde $\eta_{\alpha\beta} \longrightarrow -1, 1, 1, 1$.

Expandiendo (3.3):

$$ds^2 = -\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)^2 + \left(\hat{\theta}^{(1)}\right)^2 + \left(\hat{\theta}^{(2)}\right)^2 + \left(\hat{\theta}^{(3)}\right)^2 \quad (3.4)$$

La métrica toma forma diagonal y Minkowskiana.

3.1.1. Primera ecuación de estructura de Cartan

Teniendo en cuenta la primera ecuación de estructura de Cartan

$$d\hat{\theta}^{(\alpha)} + \omega_{(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \hat{\theta}^{(\beta)} = 0 \quad (3.5)$$

primero, se aplica la derivada exterior a la tétrada.

Para $\hat{\theta}^{(0)}$

$$d\theta^{(0)} = \frac{\partial}{\partial r} [e^{\alpha(r,t)}] dr \wedge dt + \frac{\partial}{\partial t} [e^{\alpha(r,t)}] dt \wedge dt \quad (3.6)$$

Como $dt \wedge dt = 0$

$$d\hat{\theta}^{(0)} = e^\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} dr \wedge dt \quad (3.7)$$

De las ecuaciones (3.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} dt &= e^{-\alpha(r,t)} \hat{\theta}^{(0)} & dr &= e^{-\beta(r,t)} \hat{\theta}^{(1)} \\ d\vartheta &= \frac{1}{r} \hat{\theta}^{(2)} & d\phi &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.8) en (3.7)

$$d\hat{\theta}^{(0)} = e^\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} dr \wedge dt \quad (3.9)$$

$$d\hat{\theta}^{(0)} = e^\alpha \partial_r \alpha \left(e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \right) \wedge \left(e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \right) \quad (3.10)$$

$$d\hat{\theta}^{(0)} = (\partial_r \alpha) e^\alpha e^{-\beta} e^{-\alpha} \left(\hat{\theta}^{(1)} \right) \wedge \left(\hat{\theta}^{(0)} \right) \quad (3.11)$$

$$d\hat{\theta}^{(0)} = (\partial_r \alpha) e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.12)$$

se obtiene

$$\boxed{d\hat{\theta}^{(0)} = (\partial_r \alpha) e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)}} \quad (3.13)$$

Para $\hat{\theta}^{(1)}$

$$d\hat{\theta}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} [e^{\beta(r,t)}] dr \wedge dt + \frac{\partial}{\partial t} [e^{\beta(r,t)}] dt \wedge dr \quad (3.14)$$

$$d\hat{\theta}^{(1)} = (\partial_t \beta) e^\beta \left(e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \right) \wedge \left(e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \right) \quad (3.15)$$

$$d\hat{\theta}^{(1)} = (\partial_t \beta) e^\beta e^{-\beta} e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.16)$$

$$d\hat{\theta}^{(1)} = (\partial_t \beta) e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.17)$$

$$\boxed{d\hat{\theta}^{(1)} = (\partial_t \beta) e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)}} \quad (3.18)$$

Para $\hat{\theta}^{(2)}$

$$d\hat{\theta}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r} [r] dr \wedge d\vartheta \quad (3.19)$$

$$d\hat{\theta}^{(2)} = dr \wedge d\vartheta \quad (3.20)$$

$$d\hat{\theta}^{(2)} = e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \frac{1}{r} \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.21)$$

$$d\hat{\theta}^{(2)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.22)$$

$$\boxed{d\hat{\theta}^{(2)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}} \quad (3.23)$$

Para $\hat{\theta}^{(3)}$

$$d\hat{\theta}^{(3)} = \frac{\partial}{\partial r}[r \sin \vartheta] dr \wedge d\phi + \frac{\partial}{\partial \vartheta}[r \sin \vartheta] d\vartheta \wedge d\phi \quad (3.24)$$

$$d\hat{\theta}^{(3)} = \sin \vartheta dr \wedge d\phi + r \cos \vartheta d\vartheta \wedge d\phi \quad (3.25)$$

$$d\hat{\theta}^{(3)} = \sin \vartheta \left(e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \frac{1}{r \sin \vartheta} \hat{\theta}^{(3)} \right) + r \cos \vartheta \left(\frac{1}{r} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \frac{1}{r \sin \vartheta} \hat{\theta}^{(3)} \right) \quad (3.26)$$

$$d\hat{\theta}^{(3)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.27)$$

$$\boxed{d\hat{\theta}^{(3)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}} \quad (3.28)$$

Las derivadas exteriores de cada tetrada son:

$$\begin{aligned} a) \quad d\hat{\theta}^{(0)} &= (\partial_r \alpha) e^{-\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)}; & b) \quad d\hat{\theta}^{(1)} &= (\partial_t \beta) e^{-\alpha} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \\ c) \quad d\hat{\theta}^{(2)} &= \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}; & d) \quad d\hat{\theta}^{(3)} &= \frac{e^{-\beta}}{r} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Una vez calculadas las derivadas exteriores de cada tetrada, se expande la primera ecuación de estructura de Cartan

$$d\hat{\theta}^{(\mu)} = -\omega_{(\nu)}^{(\mu)} \wedge \hat{\theta}^{(\nu)} \quad (3.30)$$

$$d\hat{\theta}^{(\mu)} = -\omega_{(0)}^{(\mu)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(\mu)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(\mu)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(\mu)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.31)$$

igualando (3.29a) y (3.31) para $\mu = 0$

$$-e^{\beta} \partial_r \alpha \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} = -\omega_{(0)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.32)$$

Para encontrar todas las 1-formas completas, se suman las funciones G, Q, F y H sin alterar la ecuación, ya que $\hat{\theta}^{\alpha} \wedge \hat{\theta}^{\alpha} = 0$

$$\begin{aligned} G(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - Q(r, t) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - F(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ - H(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \cancel{-\omega_{(0)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)}} - \omega_{(1)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como $\omega_{(0)}^{(0)} = 0$, entonces $G(r, t) \hat{\theta}^{(0)} = 0$. Factorizando $\wedge \hat{\theta}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
-\left(e^{-\beta}\alpha' \hat{\theta}^{(0)} + Q(r, t) \hat{\theta}^{(1)}\right) \wedge \hat{\theta}^{(1)} - F(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - H(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \\
-\omega_{(1)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}
\end{aligned} \quad (3.34)$$

e igualando términos semejantes se obtiene:

$$\omega_{(1)}^{(0)} = e^{-\beta}\alpha' \hat{\theta}^{(0)} + Q(r, t) \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.35)$$

$$\omega_{(2)}^{(0)} = F(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.36)$$

$$\omega_{(3)}^{(0)} = H(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.37)$$

Ahora, igualando (3.29b) y (3.31) para $\mu = 1$ y empleando el método anterior

$$\begin{aligned}
-e^{-\alpha}\dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - X(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - Y(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - Z(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \\
-\omega_{(0)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(2)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}
\end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
-\left(e^{-\alpha}\dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} + X(r, t) \hat{\theta}^{(0)}\right) \wedge \hat{\theta}^{(0)} - Y(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - Z(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \\
-\omega_{(0)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(2)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \omega_{(3)}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}
\end{aligned} \quad (3.39)$$

se obtiene:

$$\omega_{(0)}^{(1)} = e^{-\alpha}\dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} + X(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.40)$$

$$\omega_{(2)}^{(1)} = Y(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.41)$$

$$\omega_{(3)}^{(1)} = z(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.42)$$

Igualando (3.29c) y (3.31) para $\mu = 2$ y empleando el método de los dos casos anteriores

$$\begin{aligned}
-L(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - M(r, t) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - N(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \\
-\omega_{(0)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}
\end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
-L(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \left(M(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)}\right) \wedge \hat{\theta}^{(1)} - N(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} = \\
-\omega_{(0)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}
\end{aligned} \quad (3.44)$$

se obtiene:

$$\omega_{(0)}^{(2)} = L(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.45)$$

$$\omega_{(1)}^{(2)} = M(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.46)$$

$$\omega_{(3)}^{(2)} = N(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.47)$$

Por último, igualando (3.29d) y (3.31) para $\mu = 3$ y empleando el método de los casos anteriores

$$- U(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - V(r, t) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - W(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.48)$$

$$- \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} = -\omega_{(0)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}$$

$$- U(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \left(V(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \right) \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.49)$$

$$- \left(W(r, t) \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \right) \wedge \hat{\theta}^{(2)} = -\omega_{(0)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} - \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} - \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}$$

se obtiene:

$$\omega_{(0)}^{(3)} = U(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.50)$$

$$\omega_{(2)}^{(3)} = W(r, t) \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.51)$$

$$\omega_{(1)}^{(3)} = V(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.52)$$

De esta manera, se reproducen las siguientes *1-formas de conexión*

$$\omega_{(1)}^{(0)} = e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} + Q(r, t) \hat{\theta}^{(1)} \quad \omega_{(2)}^{(0)} = F(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.53)$$

$$\omega_{(3)}^{(0)} = H(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad \omega_{(0)}^{(1)} = e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} + X(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.54)$$

$$\omega_{(2)}^{(1)} = Y(r, t) \hat{\theta}^{(2)} \quad \omega_{(3)}^{(1)} = Z(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.55)$$

$$\omega_{(0)}^{(2)} = L(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad \omega_{(1)}^{(2)} = M(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.56)$$

$$\omega_{(3)}^{(2)} = N(r, t) \hat{\theta}^{(3)} \quad \omega_{(0)}^{(3)} = U(r, t) \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.57)$$

$$\omega_{(2)}^{(3)} = W(r, t) \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \quad \omega_{(1)}^{(3)} = V(r, t) \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.58)$$

Utilizando las propiedades establecidas en la sección (2.12) de simetría y antisimetría de las *1-formas*

$$\boxed{\omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\omega_{(\mu)}^{(\nu)}} \quad \boxed{\omega_{(\nu)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(\nu)}} \quad \forall (\mu \neq \nu, \nu \neq 0) \quad (3.59)$$

se iguala $\omega_{(1)}^{(0)}$ y $\omega_{(0)}^{(1)}$

$$\overline{e^{-\beta} \alpha'} \hat{\theta}^{(0)} + \underline{Q(r, t)} \hat{\theta}^{(1)} = \underline{e^{-\alpha} \dot{\beta}} \hat{\theta}^{(1)} + \overline{X(r, t)} \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.60)$$

para encontrar las funciones Q y X

$$Q(r, t) = e^{\alpha} \dot{\beta} \quad X(r, t) = e^{-\beta} \alpha' \quad (3.61)$$

Comparando de esta manera todas las *1-formas*, se determina el valor de las funciones desconocidas

$$F(r, t) = 0 \qquad L(r, t) = 0 \qquad Q(r, t) = e^\alpha \dot{\beta} \quad (3.62)$$

$$X(r, t) = e^{-\beta} \alpha' \qquad H(r, t) = 0 \qquad U(r, t) = 0 \quad (3.63)$$

$$Y(r, t) = -\frac{1}{r} e^\beta \qquad M(r, t) = 0 \qquad Z(r, t) = -\frac{1}{r} e^\beta \quad (3.64)$$

$$V(r, t) = 0 \qquad N(r, t) = -\frac{1}{r} \cot \vartheta \qquad W(r, t) = 0 \quad (3.65)$$

Reemplazando las funciones anteriores en las *1-formas de conexión*, se obtiene su forma completa

$$\omega_{(1)}^{(0)} = e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} + e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} \qquad \omega_{(2)}^{(0)} = 0 \qquad \omega_{(3)}^{(0)} = 0 \quad (3.66)$$

$$\omega_{(0)}^{(1)} = e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} + e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} \qquad \omega_{(2)}^{(1)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \qquad \omega_{(3)}^{(1)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.67)$$

$$\omega_{(0)}^{(2)} = 0 \qquad \omega_{(1)}^{(2)} = \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \qquad \omega_{(3)}^{(2)} = -\frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.68)$$

$$\omega_{(0)}^{(3)} = 0 \qquad \omega_{(2)}^{(3)} = \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \qquad \omega_{(1)}^{(3)} = \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.69)$$

y se concluye que cumplen la propiedad de simetría y antisimetría de las *1-formas*. Por tanto, se pueden reorganizar de la forma:

$$\omega_{(1)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(1)} = e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} + e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.70)$$

$$\omega_{(2)}^{(1)} = -\omega_{(1)}^{(2)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.71)$$

$$\omega_{(3)}^{(1)} = -\omega_{(1)}^{(3)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.72)$$

$$\omega_{(3)}^{(2)} = -\omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.73)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.137) que define las *2-formas* de curvatura mencionadas en la sección (2.12), primero se debe evaluar la derivada exterior de cada *1-forma* $\omega_{(\beta)}^{(\alpha)}$ para determinar las *2-formas* $\Omega_{(\nu)}^{(\mu)}$. Por lo tanto, se aplica la propiedad (2.40) de la derivada exterior sobre cada *1-forma*

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = d(e^{-\beta}\alpha') \wedge \hat{\theta}^{(0)} + (e^{-\beta}\alpha')d\hat{\theta}^{(0)} \quad (3.74)$$

$$+ d(e^{-\alpha}\dot{\beta}) \wedge \hat{\theta}^{(1)} + (e^{-\alpha}\dot{\beta})d\hat{\theta}^{(1)}$$

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial r}(e^{-\beta}\alpha')dr \wedge \hat{\theta}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial t}(e^{-\beta}\alpha')dt \wedge d\hat{\theta}^{(0)} + (e^{-\beta}\alpha')d\hat{\theta}^{(0)} \quad (3.75)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r}(e^{-\alpha}\dot{\beta})dr \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t}(e^{-\alpha}\dot{\beta})dt \wedge \hat{\theta}^{(1)} + (e^{-\alpha}\dot{\beta})d\hat{\theta}^{(1)}$$

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = (-\beta'e^{-\beta}\alpha' + e^{-\beta}\alpha'')dr \wedge \hat{\theta}^{(0)} + (-\dot{\beta}e^{-\beta}\alpha' + e^{-\beta}\dot{\alpha}')dt \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.76)$$

$$+ (e^{-\beta}\alpha')d\hat{\theta}^{(0)} + (e^{-\alpha}\dot{\beta})d\hat{\theta}^{(1)} + (-\alpha'e^{-\alpha}\dot{\beta} + e^{-\alpha}\dot{\beta}')dr \wedge \hat{\theta}^{(1)}$$

$$+ (-\dot{\alpha}e^{-\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\beta}e^{-\alpha})dt \wedge \hat{\theta}^{(1)}$$

Como $dr = e^{-\beta}\theta^{(1)}$ y $dt = e^{-\alpha}\theta^{(0)}$, reemplazando

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = (-\beta'\alpha'e^{-\beta} + \alpha''e^{-\beta})e^{-\beta}\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} + (-\alpha'\dot{\beta}e^{-\beta} + e^{-\beta}\dot{\alpha}')e^{-\alpha}\hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.77)$$

$$+ (\alpha'e^{-\beta})d\hat{\theta}^{(0)} + (\dot{\beta}e^{-\alpha})d\hat{\theta}^{(1)} + (-\alpha'\dot{\beta}e^{-\alpha} + \dot{\beta}'e^{-\alpha})e^{-\beta}\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(1)}$$

$$+ (-\dot{\alpha}\dot{\beta}e^{-\alpha} + \ddot{\beta}e^{-\alpha})e^{-\alpha}\hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)}$$

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = (\beta'\alpha'e^{-2\beta} - \alpha''e^{-2\beta} - (\alpha')^2e^{-2\beta})\hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.78)$$

$$+ \left((\dot{\beta})^2e^{-2\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\beta}e^{-2\alpha} + \ddot{\beta}e^{-2\alpha} \right)\hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)}$$

se obtiene:

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = \left[(\beta'\alpha' - \alpha'' - (\alpha')^2)e^{-2\beta} + \left((\dot{\beta})^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\beta} \right)e^{-2\alpha} \right] \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.79)$$

De igual manera, para $\omega_{(1)}^{(2)}$

$$d\omega_{(1)}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}e^{-\beta}\right)dr \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}e^{-\beta}\right)dt \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \left(\frac{1}{r}e^{-\beta}\right)\frac{1}{r}e^{-\beta}\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.80)$$

$$d\omega_{(1)}^{(2)} = \left(-\frac{1}{r^2}e^{-\beta} - \frac{1}{r}\beta'e^{-\beta}\right)dr \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-\beta}\right)dt \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.81)$$

$$+ \left(\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}\right)\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}$$

Reemplazando $dr = e^{-\beta}\hat{\theta}^{(1)}$ y $dt = e^{-\alpha}\hat{\theta}^{(0)}$

$$d\omega_{(1)}^{(2)} = \left(-\frac{1}{r^2}e^{-\beta} - \frac{1}{r}\beta'e^{-\beta}\right)e^{-\beta}\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-\beta}\right)e^{-\alpha}\hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.82)$$

$$+ \left(\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}\right)\hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}$$

resulta:

$$\boxed{d\omega_{(1)}^{(2)} = \left(-\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta}\right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)}\right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}} \quad (3.83)$$

Desarrollando este cálculo para todas las 1-formas de conexión, se obtiene:

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = \gamma \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.84)$$

$$d\omega_{(1)}^{(2)} = \left(-\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta}\right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)}\right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.85)$$

$$d\omega_{(1)}^{(3)} = -\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r^2}e^{-\beta} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r}e^{-\beta}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.86)$$

$$d\omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r^2} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.87)$$

$$\text{Donde } \gamma = \left[(\beta'\alpha' - \alpha'' - (\alpha')^2)e^{-2\beta} + \left((\dot{\beta})^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\beta} \right) e^{-2\alpha} \right]$$

Expandiendo la ecuación (2.137)

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = d\omega_{(\nu)}^{(\mu)} + \omega_{(0)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(3)} \quad (3.88)$$

para $\mu = 1$ y $\nu = 0$

$$\Omega_{(0)}^{(1)} = d\omega_{(0)}^{(1)} + \omega_{(0)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(3)} \quad (3.89)$$

$$\Omega_{(0)}^{(1)} = d\omega_{(0)}^{(1)} \longrightarrow \text{reemplazando } d\omega_{(0)}^{(1)} \quad (3.90)$$

entonces:

$$\boxed{\Omega_{(0)}^{(1)} = \gamma \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)}} \quad (3.91)$$

Para $\mu = 2$ y $\nu = 0$

$$\Omega_{(0)}^{(2)} = d\omega_{(0)}^{(2)} + \omega_{(0)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(3)} \quad (3.92)$$

$$\Omega_{(0)}^{(2)} = \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} \quad (3.93)$$

$$\Omega_{(0)}^{(2)} = \frac{1}{r}e^{-\beta} \theta^{(2)} \wedge e^{-\alpha}\dot{\beta} \theta^{(1)} + \frac{1}{r}e^{-\beta} \theta^{(2)} \wedge e^{-\beta}\alpha' \theta^{(0)} \quad (3.94)$$

se obtiene:

$$\boxed{\Omega_{(0)}^{(2)} = \frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)}} \quad (3.95)$$

Para $\mu = 3$ y $\nu = 0$

$$\Omega_{(0)}^{(3)} = d\omega_{(0)}^{(3)} + \omega_{(0)}^{(3)} \wedge \omega_{(0)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \omega_{(0)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(3)} \wedge \omega_{(0)}^{(3)} \quad (3.96)$$

$$\Omega_{(0)}^{(3)} = \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} \quad (3.97)$$

$$\Omega_{(0)}^{(3)} = \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.98)$$

se logra obtener:

$$\boxed{\Omega_{(0)}^{(3)} = \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \alpha' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)}} \quad (3.99)$$

Para $\mu = 2$ y $\nu = 1$

$$\Omega_{(1)}^{(2)} = d\omega_{(1)}^{(2)} + \omega_{(0)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(3)} \quad (3.100)$$

$$\Omega_{(1)}^{(2)} = d\omega_{(1)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(3)} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)}^{(2)} &= \left(-\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \wedge \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.102)$$

por lo tanto:

$$\boxed{\Omega_{(1)}^{(2)} = \left(-\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)}} \quad (3.103)$$

Para $\mu = 3$ y $\nu = 1$

$$\Omega_{(1)}^{(3)} = d\omega_{(1)}^{(3)} + \omega_{(0)}^{(3)} \wedge \omega_{(1)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \omega_{(1)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \omega_{(1)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(3)} \wedge \omega_{(1)}^{(3)} \quad (3.104)$$

$$\Omega_{(1)}^{(3)} = d\omega_{(1)}^{(3)} + \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \omega_{(1)}^{(2)} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)}^{(3)} &= -\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r^2} e^{-\beta} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &\quad - \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \wedge \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)}^{(3)} &= -\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r^2} e^{-\beta} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r^2} e^{-\beta} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.107)$$

cancelando el último término

$$\boxed{\Omega_{(1)}^{(3)} = -\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}} \quad (3.108)$$

Para $\mu = 3$ y $\nu = 2$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = d\omega_{(2)}^{(3)} + \omega_{(0)}^{(3)} \wedge \omega_{(2)}^{(0)} + \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \omega_{(2)}^{(1)} + \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \omega_{(2)}^{(2)} + \omega_{(3)}^{(3)} \wedge \omega_{(2)}^{(3)} \quad (3.109)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = d\omega_{(2)}^{(3)} + \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \omega_{(2)}^{(1)} \quad (3.110)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \left(-\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \right) \quad (3.111)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r^2} e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.112)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{r^2} e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.113)$$

simplificando

$$\boxed{\Omega_{(2)}^{(3)} = \left(\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)}} \quad (3.114)$$

Las 2 -formas de curvatura no nulas son:

$$\Omega_{(0)}^{(1)} = \Omega_{(1)}^{(0)} = \gamma \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (3.115)$$

$$\Omega_{(0)}^{(2)} = \Omega_{(2)}^{(0)} = \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \alpha' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.116)$$

$$\Omega_{(0)}^{(3)} = \Omega_{(3)}^{(0)} = \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \alpha' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (3.117)$$

$$\Omega_{(1)}^{(2)} = -\Omega_{(2)}^{(1)} = \left(-\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.118)$$

$$\Omega_{(1)}^{(3)} = -\Omega_{(3)}^{(1)} = -\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.119)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = -\Omega_{(3)}^{(2)} = \left(\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (3.120)$$

3.1.2. Segunda ecuación de estructura de Cartan

Una vez obtenidas las 2 -formas de curvatura, se procede a evaluar la segunda ecuación de estructura de Cartan (2.136) para calcular el tensor de curvatura de Riemann

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = \frac{1}{2} R_{(\nu)(\sigma)(\rho)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(\sigma)} \wedge \hat{\theta}^{(\rho)} \quad (3.121)$$

Expandiendo la segunda ecuación de estructura

$$\begin{aligned} \Omega_{(\nu)}^{(\mu)} &= \frac{1}{2} R_{(\nu)(0)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(0)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(0)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &+ \frac{1}{2} R_{(\nu)(1)(0)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(1)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(1)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &+ \frac{1}{2} R_{(\nu)(2)(0)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(2)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(2)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &+ \frac{1}{2} R_{(\nu)(3)(0)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(3)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{2} R_{(\nu)(3)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Aplicando la propiedad (2.54) de antisimetría del tensor de Riemman mencionada en la sección (2.6)

$$\begin{aligned} \Omega_{(\nu)}^{(\mu)} &= \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.123) \\ &+ \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(0)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &+ \frac{1}{2}R_{(\nu)(1)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(1)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(1)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \\ &+ \frac{1}{2}R_{(\nu)(1)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(2)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + \frac{1}{2}R_{(\nu)(2)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes

$$\begin{aligned} \Omega_{(\nu)}^{(\mu)} &= R_{(\nu)(0)(1)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + R_{(\nu)(0)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.124) \\ &+ R_{(\nu)(0)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(\nu)(1)(2)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &+ R_{(\nu)(1)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(\nu)(2)(3)}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned}$$

Si $\mu = 1, \nu = 0$

$$\begin{aligned} \Omega_{(0)}^{(1)} &= R_{(0)(0)(1)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + R_{(0)(0)(2)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.125) \\ &+ R_{(0)(0)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(1)(2)}^{(1)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &+ R_{(0)(1)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(2)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned}$$

Igualando la ecuación anterior y (3.115)

$$\begin{aligned} \gamma \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} &= R_{(0)(0)(1)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + R_{(0)(0)(2)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.126) \\ &+ R_{(0)(0)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(1)(2)}^{(1)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &+ R_{(0)(1)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(2)(3)}^{(1)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned}$$

Comparando los términos de la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{(0)(0)(1)}^{(1)} &= \gamma &= R_{(1)(0)(1)}^{(0)} &= -R_{(1)(1)(0)}^{(0)} &= -R_{(0)(1)(0)}^{(1)} \quad (3.127) \\ R_{(0)(0)(2)}^{(1)} &= R_{(0)(0)(3)}^{(1)} &= R_{(0)(1)(2)}^{(1)} &= R_{(0)(1)(3)}^{(1)} &= R_{(0)(2)(3)}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

Para $\mu = 2$ y $\nu = 0$

$$\begin{aligned} \Omega_{(0)}^{(2)} &= R_{(0)(0)(1)}^{(2)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + R_{(0)(0)(2)}^{(2)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (3.128) \\ &+ R_{(0)(0)(3)}^{(2)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(1)(2)}^{(2)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \\ &+ R_{(0)(1)(3)}^{(2)} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} + R_{(0)(2)(3)}^{(2)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \end{aligned}$$

Igualando la ecuación anterior y (3.116)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)}\theta^{(2)}\wedge\theta^{(1)}+\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta}\theta^{(2)}\wedge\theta^{(0)} &= R_{(0)(0)(1)}^{(2)}\theta^{(0)}\wedge\theta^{(1)} \\ +R_{(0)(0)(2)}^{(2)}\theta^{(0)}\wedge\theta^{(2)}+R_{(0)(0)(3)}^{(2)}\theta^{(0)}\wedge\theta^{(3)}+R_{(0)(1)(2)}^{(2)}\theta^{(1)}\wedge\theta^{(2)} \\ +R_{(0)(1)(3)}^{(2)}\theta^{(1)}\wedge\theta^{(3)}+R_{(0)(2)(3)}^{(2)}\theta^{(2)}\wedge\theta^{(3)} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Comparando los términos de la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} R_{(0)(1)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(1)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(1)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(1)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(0)(0)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(0)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(0)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(0)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Desarrollando con este cálculo para todas las *2-formas* de curvatura no nulas, se obtienen todas las componentes no nulas del tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{(0)(0)(1)}^{(1)} &= R_{(1)(0)(1)}^{(0)} = -R_{(1)(1)(0)}^{(0)} = -R_{(0)(1)(0)}^{(1)} = \gamma \\ R_{(0)(1)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(1)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(1)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(1)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(0)(0)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(0)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(0)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(0)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \\ R_{(0)(1)(3)}^{(3)} &= R_{(3)(1)(3)}^{(0)} = -R_{(0)(3)(1)}^{(3)} = -R_{(3)(1)(3)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(0)(0)(3)}^{(3)} &= R_{(3)(0)(3)}^{(0)} = -R_{(0)(3)(0)}^{(3)} = -R_{(3)(3)(0)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(1)(2)}^{(2)} &= -R_{(2)(1)(2)}^{(1)} = -R_{(1)(2)(1)}^{(2)} = R_{(2)(2)(1)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(0)(2)}^{(2)} &= -R_{(2)(0)(2)}^{(1)} = -R_{(1)(2)(0)}^{(2)} = R_{(2)(2)(0)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(1)(1)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(1)(3)}^{(1)} = -R_{(1)(3)(1)}^{(3)} = R_{(3)(3)(1)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(0)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(0)(3)}^{(1)} = -R_{(1)(3)(0)}^{(3)} = R_{(3)(3)(0)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(2)(2)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(2)(3)}^{(2)} = -R_{(2)(3)(2)}^{(3)} = R_{(3)(3)(2)}^{(2)} = \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta}-1) \end{aligned} \quad (3.131)$$

3.1.3. Tensor de curvatura de Ricci

En el apéndice (A.2) se deduce analíticamente la ecuación (3.133)

$$\begin{aligned} R_{(\delta)(\sigma)} &= R_{(0)(\sigma)(0)}^{(\mu)}g_{(\mu)(\delta)}g^{(0)(0)}+R_{(1)(\sigma)(1)}^{(\mu)}g_{(\mu)(\delta)}g^{(1)(1)} \\ &\quad +R_{(2)(\sigma)(2)}^{(\mu)}g_{(\mu)(\delta)}g^{(2)(2)}+R_{(3)(\sigma)(3)}^{(\mu)}g_{(\mu)\delta}g^{(3)(3)} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Donde $\mu = \delta$, por lo tanto, para $\delta = 0$ y $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} R_{(0)(0)} &= R_{(0)(0)(0)}^{(0)}g_{(0)(0)}g^{(0)(0)}+R_{(1)(0)(1)}^{(0)}g_{(0)(0)}g^{(1)(1)}+ \\ &\quad R_{(2)(0)(2)}^{(0)}g_{(0)(0)}g^{(2)(2)}+R_{(3)(0)(3)}^{(0)}g_{(0)(0)}g^{(3)(3)} \end{aligned}$$

Reemplazando las componentes del tensor de Riemann (3.131)

$$\boxed{R_{(0)(0)} = -\gamma + \frac{2}{r}e^{-2\beta}\alpha'} \quad (3.133)$$

Para $\delta = 1$ y $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} R_{(1)(0)} &= R_{(0)(0)(0)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(0)(0)} + R_{(1)(0)(1)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(1)(1)} + \\ &R_{(2)(0)(2)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(2)(2)} + R_{(3)(0)(3)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(3)(3)} \end{aligned} \quad (3.134)$$

se obtiene:

$$\boxed{R_{(1)(0)} = \frac{2}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)}} \quad (3.135)$$

Para $\delta = 1$ y $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} R_{(1)(1)} &= R_{(0)(1)(0)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(0)(0)} + R_{(1)(1)(1)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(1)(1)} + \\ &R_{(2)(1)(2)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(2)(2)} + R_{(3)(1)(3)}^{(1)}g_{(1)(1)}g^{(3)(3)} \end{aligned} \quad (3.136)$$

por tanto:

$$\boxed{R_{(1)(1)} = \gamma + \frac{2}{r}\beta'e^{-2\beta}} \quad (3.137)$$

Para $\delta = 2$ y $\sigma = 2$

$$\begin{aligned} R_{(2)(2)} &= R_{(0)(2)(0)}^{(2)}g_{(2)(2)}g^{(0)(0)} + R_{(1)(2)(1)}^{(2)}g_{(2)(2)}g^{(1)(1)} + \\ &R_{(2)(2)(2)}^{(2)}g_{(2)(2)}g^{(2)(2)} + R_{(3)(2)(3)}^{(2)}g_{(2)(2)}g^{(3)(3)} \end{aligned} \quad (3.138)$$

se genera:

$$\boxed{R_{(2)(2)} = \frac{1}{r}(\beta' - \alpha')e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1)} \quad (3.139)$$

Para $\delta = 3$ y $\sigma = 3$

$$\begin{aligned} R_{(3)(3)} &= R_{(0)(3)(0)}^{(3)}g_{(3)(3)}g^{(0)(0)} + R_{(1)(3)(1)}^{(3)}g_{(3)(3)}g^{(1)(1)} + \\ &R_{(2)(3)(2)}^{(3)}g_{(3)(3)}g^{(2)(2)} + R_{(3)(3)(3)}^{(3)}g_{(3)(3)}g^{(3)(3)} \end{aligned} \quad (3.140)$$

se reproduce:

$$\boxed{R_{(3)(3)} = \frac{1}{r}(\beta' - \alpha')e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1)} \quad (3.141)$$

Finalmente, se obtienen las componentes diferentes de cero del tensor de Ricci

$$R_{(0)(0)} = -\gamma + \frac{2}{r}e^{-2\beta}\alpha' \quad (3.142)$$

$$R_{(1)(1)} = \gamma + \frac{2}{r}\beta'e^{-2\beta} \quad (3.143)$$

$$R_{(1)(0)} = \frac{2}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \quad (3.144)$$

$$R_{(2)(2)} = R_{(3)(3)} = \frac{1}{r}(\beta' - \alpha')e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) \quad (3.145)$$

3.1.4. Solución de las ecuaciones de Einstein en vacío

En la sección (2.11) se explicó que para hallar la métrica de Schwarzschild se deben solucionar las ecuaciones de Einstein en vacío, lo que implica que:

$$R_{(\mu)(\nu)} = 0 \quad (3.146)$$

Reemplazando las componentes del tensor de Ricci, se genera un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$-\gamma + \frac{2}{r}e^{-2\beta}\alpha' = 0 \quad (3.147)$$

$$\gamma + \frac{2}{r}\beta'e^{-2\beta} = 0 \quad (3.148)$$

$$\frac{2}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} = 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{1}{r}(\beta' - \alpha')e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) = 0 \quad (3.150)$$

Resolviendo la ecuación (3.149)

$$\frac{2e^{-(\alpha+\beta)}}{r}\dot{\beta} = 0 \quad (3.151)$$

se obtiene que

$$\dot{\beta} = 0 \quad (3.152)$$

Como β es una función que depende de r y de t , entonces para que se cumpla que la derivada parcial de β con respecto a t sea cero, β debe ser función solo de r , por lo tanto, se definirá así:

$$\beta = \beta_0(r) \quad (3.153)$$

Reemplazando $\beta = \beta_0(r)$ en la ecuación (3.150)

$$\frac{e^{-2\beta_0}}{r}(\beta_0' - \alpha') - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta_0} - 1) = 0 \quad (3.154)$$

$$\frac{e^{-2\beta_0}}{r}\beta_0' - \frac{e^{-2\beta_0}}{r}\alpha' - \frac{1}{r^2}e^{-2\beta_0} - \frac{1}{r^2} = 0 \rightarrow \text{Derivando respecto a } t \quad (3.155)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-2\beta_0}}{r}\beta_0' - \frac{e^{-2\beta_0}}{r}\alpha' - \frac{1}{r^2}e^{-2\beta_0} - \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{e^{-2\beta_0}}{r}\alpha' \right) = 0 \quad (3.157)$$

$$\frac{-e^{-2\beta_0}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.158)$$

se concluye que:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t \partial r} = 0 \quad (3.159)$$

Debido a que las derivadas conmutan, y α es una función de r y t , se propone que:

$$\alpha(r, t) = f(r) + h(t) \quad (3.160)$$

Reemplazando (3.161) y (3.153) en la métrica semilla (3.1)

$$ds^2 = -e^{2f(r)+2h(t)} dt^2 + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.161)$$

realizando un cambio de coordenadas

$$\tau = \int e^{h(t)} dt \quad (3.162)$$

aplicando la diferencial total de τ

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} dt \quad (3.163)$$

$$d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int e^{h(t)} dt \right) dt \quad (3.164)$$

$$d\tau = e^{h(t)} dt \rightarrow \text{elevando al cuadrado} \quad (3.165)$$

$$d\tau^2 = e^{2h(t)} dt^2 \quad (3.166)$$

$$\frac{d\tau^2}{e^{2h(t)}} = dt^2 \quad (3.167)$$

Reemplazando la ecuación (3.167) en (3.161)

$$ds^2 = -e^{2f(r)+2h(t)} \frac{d\tau^2}{e^{2h(t)}} + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.168)$$

$$ds^2 = -e^{2f(r)+2h(t)} e^{-2h(t)} d\tau^2 + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.169)$$

$$ds^2 = -e^{2f(r)} d\tau^2 + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.170)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (3.147) y (3.149)

$$\begin{aligned} & -\gamma + \frac{2}{r} e^{-2\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 0 \\ + \\ & \gamma + \frac{2}{r} e^{-2\beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} = 0 \\ \hline & \frac{2}{r} e^{-2\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2}{r} e^{-2\beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

Factorizando y simplificando el resultado anterior

$$\frac{2}{r} e^{-2\beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.171)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\alpha + \beta) = 0 \quad (3.172)$$

Reemplazando $\alpha(r, t) = f(r) + h(t)$ y $\beta(r, t) = \beta_0(r)$ en (3.172)

$$\frac{\partial}{\partial r} (f(r) + h(t) + \beta_0(r)) = 0 \quad (3.173)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (f(r) + \beta_0(r)) = 0 \quad (3.174)$$

Para que la derivada anterior sea cero, la suma de las funciones debe ser una constante

$$f(r) + \beta_0(r) = C \quad (3.175)$$

$$f(r) = C - \beta_0(r) \quad (3.176)$$

Reemplazando la ecuación (3.176) en la ecuación (3.170)

$$ds^2 = -e^{2C-2\beta_0} d\tau^2 + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.177)$$

Realizando un cambio de coordenadas

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \quad (3.178)$$

$$dt = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int e^C d\tau \right) d\tau \quad (3.179)$$

$$d = e^C d\tau \quad (3.180)$$

$$\frac{dt^2}{e^{2C}} = d\tau^2 \quad (3.181)$$

Reemplazando (3.181) en (3.177)

$$ds^2 = -e^{2C-2\beta_0} \left(\frac{dt^2}{e^{2C}} \right) + e^{2\beta_0} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.182)$$

$$ds^2 = -e^{-2\beta_0} dt^2 + e^{2\beta_0(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.183)$$

De la métrica anterior, se obtiene que $\alpha = -\beta_0$. Reemplazando α en la ecuación (3.150)

$$\frac{e^{-2\beta}}{r} (\beta' - \alpha') - \frac{1}{r^2} (e^{-2\beta} - 1) = 0 \quad (3.184)$$

$$2re^{-2\beta_0} \frac{d\beta_0}{dr} - e^{-2\beta_0} + 1 = 0 \quad (3.185)$$

Como

$$\frac{de^{-2\beta_0}}{dr} = -2e^{-2\beta_0} \frac{d\beta_0}{dr} \quad (3.186)$$

$$-\frac{de^{-2\beta_0}}{dr} = 2e^{-2\beta_0} \frac{d\beta_0}{dr} \quad (3.187)$$

Reemplazando la ecuación (3.187) en (3.185)

$$-r \frac{de^{-2\beta_0}}{dr} - e^{-2\beta_0} + 1 = 0 \quad (3.188)$$

$$(3.189)$$

Sustituyendo $p = e^{-2\beta_0}$

$$-r \frac{dp}{dr} - p + 1 = 0 \quad (3.190)$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \frac{1}{r} \quad (3.191)$$

Aplicando el método del factor integrante

$$p = e^{-\int \frac{1}{r} dr} \int \frac{1}{r} e^{\ln r} dr \quad (3.192)$$

$$p = e^{-\ln r} \int e^{\ln r} dr \quad (3.193)$$

$$P = 1 + \frac{C_1}{r} \quad (3.194)$$

Reemplazando $p = e^{-2\beta_0}$

$$e^{-2\beta_0} = 1 + \frac{C_1}{r} \quad (3.195)$$

$$e^{2\beta_0} = \frac{r}{r + C_1} \quad (3.196)$$

Reemplazando $e^{2\beta}$ en la métrica (3.183)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{C_1}{r}}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.197)$$

Según [4] y [15] para que la métrica sea física debe cumplir el límite Newtoniano

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (ds^2) = \text{Minkowski} \quad (3.198)$$

donde

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \quad (3.199)$$

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right) \quad (3.200)$$

por tanto:

$$\frac{2\Phi}{c^2} = \frac{C_1}{r} \quad (3.201)$$

$$\frac{2r\Phi}{c^2} = C_1 \quad (3.202)$$

Como $\Phi = -\frac{GM}{r}$

$$C_1 = 2r\left(-\frac{GM}{r}\right) \quad (3.203)$$

$$C_1 = -2GM \quad (3.204)$$

Reemplazando C_1 en la métrica (3.197)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{2GM}{r}}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.205)$$

Como se esta trabajando en unidades naturales, entonces $c = 1$ y $G = 1$, por lo tanto la expresión (3.205) queda de la siguiente forma

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2} \implies \text{Métrica de Schwarzschild} \quad (3.206)$$

3.2. Algoritmo de Newman-Janis

Para derivar la métrica de Kerr, aplicando el algoritmo de Newman-Janis, se debe partir de la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein desarrollada en la sección (2.11.2)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\mu^2 - 2drd\mu + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.207)$$

Para observar todas sus componentes no nulas, se reescribe de la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\mu^2 - drd\mu - d\mu dr + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.208)$$

Donde la coordenada temporal está dada por μ , por tanto, las coordenadas son $x^0 = \mu$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$. Las componentes de la métrica en forma matricial son:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.209)$$

Las componentes de la métrica contra-variante expresadas en forma matricial son:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.210)$$

Para emplear el algoritmo de Newman-Janis, primero se aplica la propiedad de los tensores simétricos sobre las componentes de la métrica contra-variante (2.147)¹:

$$l^{(\mu}n^{\nu)} = \frac{1}{2}(l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu) \quad (3.211)$$

$$m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)} = \frac{1}{2}(m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu) \quad (3.212)$$

Reemplazando las expresiones (3.211) y (3.212) en la ecuación (2.147) se obtiene:

$$g^{\mu\nu} = 2\left[\frac{1}{2}(l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu) + \frac{1}{2}(m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu)\right] \quad (3.213)$$

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu \quad (3.214)$$

¹Propiedad de tensores simétricos: sea $S = S_{(\alpha\beta)}dx^\alpha dx^\beta$ un tensor simétrico, sus componentes tienen la forma $S_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$ [4]

Aplicando la regla de la cadena para los términos $\frac{\partial}{\partial \mu}$, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \phi}$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'} \quad (3.215)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu'} \quad (3.216)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial r'} + ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{\partial}{\partial \theta'} \quad (3.217)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi'} \quad (3.218)$$

Entonces, reescribiendo el término en l'

$$l' = \frac{\partial}{\partial r'} \quad (3.219)$$

Reemplazando las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial \mu}$, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \phi}$ en (2.156)

$$n' = -\frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{r} - \frac{M}{\bar{r}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.220)$$

$$n' = -\frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{r' - ia \cos \theta'} - \frac{M}{r' + ia \cos \theta'} \right) \frac{\partial}{\partial r'} \quad (3.221)$$

$$n' = -\frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \right) \frac{\partial}{\partial r'} \quad (3.222)$$

Haciendo el mismo procedimiento anterior para (2.157)

$$m' = \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.223)$$

$$m' = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \left(-ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial r'} + ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{\partial}{\partial \theta'} + i \csc \theta' \frac{\partial}{\partial \phi'} \right) \quad (3.224)$$

Los vectores l' , n' y m' son:

$$\boxed{l' = \frac{\partial}{\partial r'}} \quad (3.225)$$

$$\boxed{n' = -\frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \right) \frac{\partial}{\partial r'}} \quad (3.226)$$

$$\boxed{m' = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \left(-ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial r'} + ia \sin \theta' \frac{\partial}{\partial \mu'} + \frac{\partial}{\partial \theta'} + i \csc \theta' \frac{\partial}{\partial \phi'} \right)} \quad (3.227)$$

Ahora, como

$$l' = l^{\mu'} \partial_{\mu'} + l^{r'} \partial_{r'} + l^{\theta'} \partial_{\theta'} + l^{\phi'} \partial_{\phi'} \quad (3.228)$$

Igualando las ecuaciones (3.225) y (3.228):

$$l^{\mu'} \partial_{\mu'} + l^{r'} \partial_{r'} + l^{\theta'} \partial_{\theta'} + l^{\phi'} \partial_{\phi'} = \partial_{r'} \quad (3.229)$$

Se obtiene

$$l^{\mu'} = 0, \quad l^{r'} = 1, \quad l^{\theta'} = 0, \quad l^{\phi'} = 0 \quad (3.230)$$

Para $n' = n^{\mu'} \partial_{\mu'} + n^{r'} \partial_{r'} + n^{\theta'} \partial_{\theta'} + n^{\phi'} \partial_{\phi'}$, igualando con la ecuación (3.226)

$$n^{\mu'} \partial_{\mu'} + n^{r'} \partial_{r'} + n^{\theta'} \partial_{\theta'} + n^{\phi'} \partial_{\phi'} = -\partial_{\mu'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \right) \partial_{r'} \quad (3.231)$$

$$n^{\mu'} = -1, \quad n^{r'} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \right), \quad n^{\theta'} = 0, \quad n^{\phi'} = 0 \quad (3.232)$$

Igualando la ecuación (3.227) con $m' = m^{\mu'} \partial_{\mu'} + m^{r'} \partial_{r'} + m^{\theta'} \partial_{\theta'} + m^{\phi'} \partial_{\phi'}$

$$\begin{aligned} m^{\mu'} \partial_{\mu'} + m^{r'} \partial_{r'} + m^{\theta'} \partial_{\theta'} + m^{\phi'} \partial_{\phi'} &= \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \partial_{\mu'} - \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \partial_{r'} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \partial_{\theta'} + \frac{ia \csc \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \partial_{\phi'} \end{aligned} \quad (3.233)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} m^{\mu'} &= \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')}, & m^{r'} &= -\frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \\ m^{\theta'} &= \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')}, & m^{\phi'} &= \frac{ia \csc \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \end{aligned} \quad (3.234)$$

En conclusión, las componentes de los vectores l , n , m son:

$$\begin{aligned} l^{\mu'} &= 0, & l^{r'} &= 1, & l^{\theta'} &= 0, & l^{\phi'} &= 0 \\ n^{\mu'} &= -1, & n^{r'} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \right), & n^{\theta'} &= 0, & n^{\phi'} &= 0 \\ m^{\mu'} &= \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')}, & m^{r'} &= -\frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')}, & m^{\theta'} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')}, & m^{\phi'} &= \frac{ia \csc \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \end{aligned} \quad (3.235)$$

Ahora, se determinan las componentes de la métrica (3.214) con las expresiones (3.235).

Para la componente $g^{\mu'\mu'}$

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu \quad (3.236)$$

$$g^{\mu'\mu'} = l^{\mu'} n^{\mu'} + l^{\mu'} n^{\mu'} + m^{\mu'} \bar{m}^{\mu'} + m^{\mu'} \bar{m}^{\mu'} \quad (3.237)$$

$$g^{\mu'\mu'} = 2m^{\mu'} \bar{m}^{\mu'} \quad (3.238)$$

$$g^{\mu'\mu'} = 2 \cdot \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \cdot \frac{-ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta')} \quad (3.239)$$

resulta:

$$g^{\mu'\mu'} = \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \quad (3.240)$$

Empleando el procedimiento anterior para $g^{\mu'r'}$

$$g^{\mu'r'} = l^{\mu'} n^{r'} + l^{r'} n^{\mu'} + m^{\mu'} \bar{m}^{r'} + m^{r'} \bar{m}^{\mu'} \quad (3.241)$$

$$g^{\mu'r'} = -1 + \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \cdot \frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta')} \quad (3.242)$$

$$g^{\mu'r'} = -\frac{ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta')} \cdot \frac{-ia \sin \theta'}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta')} - \frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \quad (3.243)$$

y desarrollando de esta manera para todas las componentes se obtienen todas las componentes de la métrica contra-variante de Kerr

$$\begin{aligned} g^{\mu'\mu'} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{\mu'r'} &= -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{\mu'\theta'} &= 0 & g^{\mu'\phi'} &= \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ g^{r'\mu'} &= -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{r'r'} &= \frac{r'^2 + a^2 - 2r'M}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{r'\theta'} &= 0 & g^{r'\phi'} &= -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ g^{\theta'\mu'} &= 0 & g^{\theta'r'} &= 0 & g^{\theta'\theta'} &= \frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{\theta'\phi'} &= 0 \\ g^{\phi'\mu'} &= \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{\phi'r'} &= -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & g^{\phi'\theta'} &= 0 & g^{\phi'\phi'} &= \frac{\csc^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \end{aligned} \quad (3.244)$$

y en forma matricial

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & \frac{r'^2 + a^2 - 2r'M}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 \\ \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{\csc^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \end{pmatrix} \quad (3.245)$$

Para obtener la métrica covariante de Kerr, se calcula la matriz inversa de $g^{\mu\nu}$; para ello se reemplaza las operaciones (3.243) en (2.163)

$$\left(g^{\mu'\nu'} \mid \mathbb{I} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & \frac{r'^2 + a^2 - 2r'M}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{\csc^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.246)$$

Realizando las operaciones para matrices, se obtiene:

$$(\mathbb{I} |g_{\mu'\nu'}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2Mr'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} - 1 & -1 & 0 & -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{a \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a^2 \cos^2 \theta' + r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} & a \sin^2 \theta' & 0 & \frac{((a^2 + r'^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta')}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \sin^2 \theta' \end{array} \right)$$

Donde $\Delta = (a^2 + r'^2 - 2Mr')$

$$g_{\mu'\nu'} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{2Mr'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} - 1 & -1 & 0 & -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{a \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ 0 & 0 & a^2 \cos^2 \theta' + r'^2 & 0 \\ -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} & a \sin^2 \theta' & 0 & \frac{((a^2 + r'^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta')}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \sin^2 \theta' \end{array} \right) \quad (3.247)$$

La matriz (3.247) representa las componentes de la métrica covariante y organizando

$$ds^2 = \left(\frac{2Mr}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} - 1 \right) d\mu^2 - d\mu dr - \frac{2Mar \sin^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} d\mu d\phi - dr d\mu \quad (3.248)$$

$$+ a \sin^2 \theta dr d\phi + (a^2 \cos^2 \theta + r^2) d\theta^2 - \frac{2Mar \sin^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} d\phi d\mu + a \sin^2 \theta d\phi dr$$

$$+ \frac{((a^2 + r^2)^2 - (a^2 + r^2 - 2Mr)a^2 \sin^2 \theta)}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\mu d\phi \quad (3.249)$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2$$

Donde $\rho^2 = a^2 \cos^2 \theta + r^2$ y $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$. Reescribiendo esta última ecuación se obtiene la métrica de Kerr en coordenadas nulas:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\mu d\tilde{\phi} \quad (3.250)$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\tilde{\phi}^2$$

Las coordenadas μ y $\tilde{\phi}$ están definidas como [13][6]:

$$d\mu = dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\tilde{\phi} = d\phi - \frac{a}{\Delta} dt \quad (3.251)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.251) en (3.251) se obtiene:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr\right)^2 - 2\left(dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr\right) dr \quad (3.252)$$

$$- \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr\right) \left(d\phi - \frac{a}{\Delta} dt\right) + \rho^2 d\theta^2$$

$$+ 2a \sin^2 \theta dr \left(d\phi - \frac{a}{\Delta} dt\right) + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(d\phi - \frac{a}{\Delta} dt\right)^2$$

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 + 2\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) dt dr - 2 dt dr \quad (3.253)$$

$$+ \frac{4ma^2 r \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2} dt dr + \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) dr d\phi + 2a \sin^2 \theta dr d\phi - \frac{2Aa \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2} dr d\phi$$

$$- \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{Aa^2 \sin^2 \theta}{\Delta^2 \rho^2} dr^2 - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right)^2 dr^2 + 2 \cdot \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2$$

$$- \frac{4ma^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta^2}\right) dr^2 - \frac{2a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2$$

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 \quad (3.254)$$

$$+ \underbrace{\left[2\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) - 2 + \frac{4ma^2 r \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2}\right]}_{=0} dt dr$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) + 2a \sin^2 \theta - \frac{2Aa \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2}\right]}_{=0} dr d\phi$$

$$- \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{Aa^2 \sin^2 \theta}{\Delta^2 \rho^2} - \left(\frac{\Delta - \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right)^2\right]}_{\frac{\rho^2}{2\Delta}}$$

$$+ \underbrace{2 \cdot \frac{r^2 + a^2}{\Delta} - \frac{4ma^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta^2}\right) - \frac{2a^2 \sin^2 \theta}{\Delta}}_{\frac{\rho^2}{2\Delta}} dr^2 \quad (3.255)$$

Organizando los términos se obtiene la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) (ecuación 2.166)

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (3.256)$$

3.3. Proceso de Penrose

Para obtener la energía de una partícula en un punto del plano ecuatorial, se resuelve la ecuación (2.192) de las geodésicas radiales mencionada en la sección (2.14.6), por tanto, en el plano ecuatorial $\rho \rightarrow r$ y $A \rightarrow r^4 + a^2(r^2 + 2mr)$. Entonces, los coeficientes métricos de Kerr toman la forma:

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2}{r^2}\right), \quad g_{t\phi} = -\frac{2mar}{r^2}, \quad g_{rr} = \frac{r^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = \frac{\bar{A}}{r^2} \quad (3.257)$$

Donde $\bar{A} = r^4 + a^2(r^2 + 2mr)$. Reemplazando los coeficientes métricos en las componentes de la 4-velocidad (2.191)

$$u^t = -\frac{-\frac{EA}{r^2} - \frac{2Lmar}{r^2}}{-\frac{4m^2a^2r^2}{r^4} - \frac{(\Delta - a^2)A}{r^4}} \quad (3.258)$$

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} \quad (3.259)$$

$$u^\theta = 0 \quad (3.260)$$

$$u^\phi = -\frac{\frac{2Emar}{r^2} - \frac{L(\Delta - a^2)}{r^2}}{\frac{4m^2a^2r^2}{r^4} + \frac{(\Delta - a^2)A}{r^4}} \quad (3.261)$$

simplificando

$$u^t = \frac{(-2Lamr + AE)r^2}{-4a^2m^2r^2 + 4m^2a^2r^2 + Aa^2 - Aa^2 + A\Delta} \quad (3.262)$$

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} \quad (3.263)$$

$$u^\theta = 0 \quad (3.264)$$

$$u^\phi = \frac{(2Emar - La^2 + \Delta L)r^2}{(4m^2a^2r^2 - Aa^2 + A\Delta)} \quad (3.265)$$

Reemplazando los coeficientes métricos y las componentes de la 4-velocidad en la ecuación (2.192)

$$\begin{aligned} & \frac{(2Eamr - La^2 + \Delta L)^2 r^2 \bar{A}}{(4m^2a^2r^2 - \bar{A}a^2 + \bar{A}\Delta)^2} - 4 \frac{(2Eamr - La^2 + \Delta L) r^3 (-2Lamr + \bar{A}E) ma}{(4m^2a^2r^2 - \bar{A}a^2 + \bar{A}\Delta)^2} \\ & + \frac{\dot{r}^2 r^2}{\Delta} - \frac{(-2Lamr + \bar{A}E)^2 r^2 (-a^2 + \Delta)}{(4m^2a^2r^2 - \bar{A}a^2 + \bar{A}\Delta)^2} = -1 \end{aligned} \quad (3.266)$$

Simplificando

$$-\frac{(-4a^2m^2r^2\dot{r}^2 - 4\Delta ELamr + \bar{A}a^2\dot{r}^2 + \Delta L^2a^2 + \bar{A}\Delta E^2 - \bar{A}\Delta \dot{r}^2 - \Delta^2 L^2) r^2}{\Delta (4m^2a^2r^2 - \bar{A}a^2 + \bar{A}\Delta)} = -1$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado para E

$$E = \frac{1}{\bar{A}} (2Lmar \pm \sqrt{\frac{4\bar{A}a^2m^2r^2\dot{r}^2}{\Delta} + 4L^2a^2m^2r^2 - \frac{\bar{A}^2a^2\dot{r}^2}{\Delta} - \bar{A}L^2a^2 + 4\bar{A}a^2m^2 + \bar{A}^2\dot{r}^2 + \bar{A}\Delta L^2 - \frac{\bar{A}^2a^2}{r^2} + \frac{\bar{A}^2\Delta}{r^2}}) \quad (3.267)$$

Simplificando

$$E = \frac{1}{\bar{A}} (2Lmar \pm \sqrt{4L^2a^2m^2r^2 - \bar{A}L^2a^2 + \bar{A}\Delta L^2 + \frac{4\bar{A}a^2m^2r^2\dot{r}^2 + \bar{A}^2\Delta\dot{r}^2 - \bar{A}^2a^2\dot{r}^2}{\Delta} + 4\bar{A}a^2m^2 + \frac{\bar{A}^2\Delta - \bar{A}^2a^2}{r^2}}) \quad (3.268)$$

$$E = \frac{1}{\bar{A}} \left(2Lmar \pm \sqrt{4L^2a^2m^2r^2 - \bar{A}L^2a^2 + \bar{A}\Delta L^2 + r^4\bar{A}\dot{r}^2 + r^2\Delta\bar{A}} \right) \quad (3.269)$$

$$E = \frac{1}{\bar{A}} \left(2Lmar \pm \sqrt{4L^2a^2m^2r^2 - \bar{A}(L^2a^2 - \Delta L^2 - r^2\Delta - r^4\dot{r}^2)} \right) \quad (3.270)$$

Entonces la energía de la partícula queda expresada como:

$$E = \frac{1}{\bar{A}} \left(2Lmar \pm \sqrt{4L^2a^2m^2r^2 - \bar{A}[L^2a^2 - (L^2 + r^2)\Delta - r^4\dot{r}^2]} \right) \quad (3.271)$$

3.3.1. Extracción de energía

Según [4][15][13] para llevar a cabo el proceso de Penrose, se debe considerar que se emitió una partícula $p^{(1)}$, con energía E_1 a la ergosfera y, una vez dentro, esta se dividió en dos partículas $P^{(2)}$ y $p^{(3)}$, cada una con energía E_2 y E_3 , respectivamente.

$$E_{(1)} = E_{(2)} + E_{(3)} \quad (3.272)$$

De la ecuación (2.199) de la sección (2.14) se obtiene que:

$$E_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r}} - 1 \right) \quad \text{y} \quad E_3 = +\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r}} + 1 \right) \quad (3.273)$$

Según [13], la energía ganada está dada por:

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad (3.274)$$

$$-E_2 = E_3 - E_1 = \Delta E \quad (3.275)$$

Donde la diferencia de energía ΔE es la energía ganada:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r}} + 1 \right) - 1 \quad (3.276)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r}} - 1 \right) \quad (3.277)$$

Graficando la energía de la partícula de escape, se obtiene:

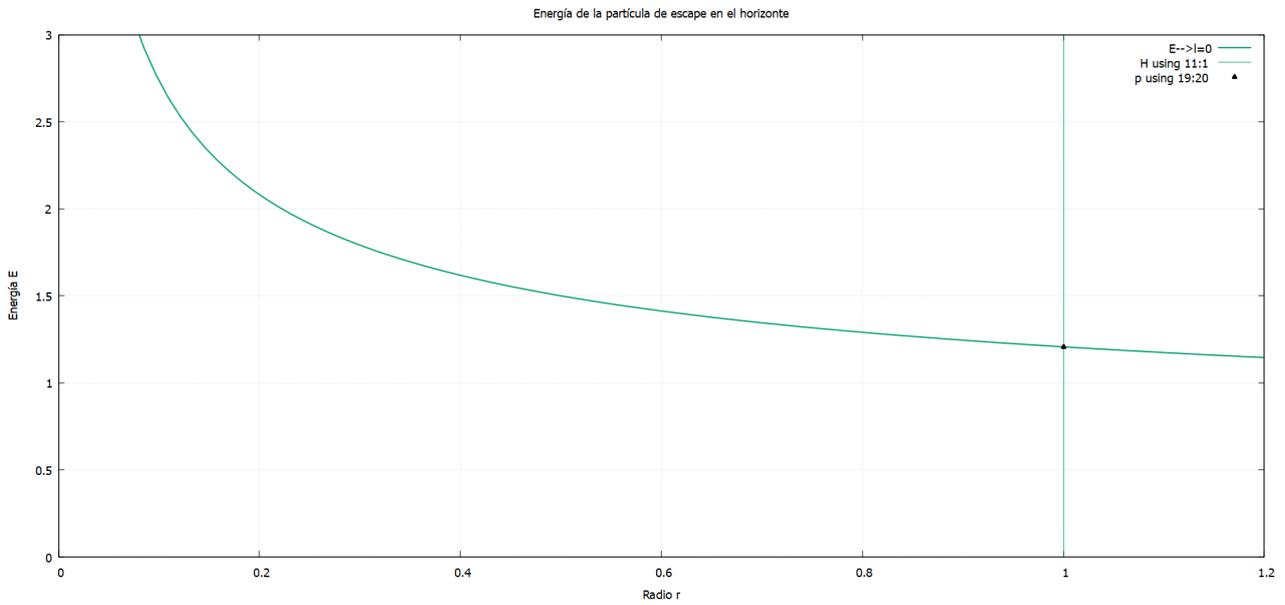


Figura 3.1: *Energía de la partícula de escape en función de r*

En gráfica (3.1) se observa que la máxima energía que se puede extraer de un agujero negro de Kerr es cuando $r \rightarrow r_+$ y ($a = m$):

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r_+}} - 1 \right) \quad (3.278)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{m}} - 1 \right) \quad (3.279)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) \quad (3.280)$$

$$\Delta E = 0.2071067811865 \quad (3.281)$$

La eficiencia del proceso de Penrose está dado por la ecuación (2.202)

$$\eta = 1.2071067811865 - 1 \quad (3.282)$$

$$\eta = 0.2071067811865 \quad (3.283)$$

Así pues, la eficiencia del proceso de Penrose es del 20,71 %

3.4. Proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr

Para obtener la energía de una partícula en un punto del plano ecuatorial en el exterior de un Black-Bounce-Kerr, se resuelve la ecuación (2.192) de las geodésicas radiales mencionada en la sección (2.14.6). De este modo, primero se reescribe la métrica (2.207) en la forma:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3.284)$$

Se obtiene

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4am \sin^2 \theta \sqrt{r^2 + l^2}}{\rho^2}dtd\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.285)$$

Donde los términos A , ρ y Δ son:

$$A = (r^2 + l^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$$

$$\rho^2 = r^2 + l^2 + a^2 \cos^2 \vartheta; \quad \Delta = r^2 + a^2 + l^2 - 2m\sqrt{r^2 + l^2}$$

Los coeficientes métricos covariantes son:

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \quad (3.286)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2ma \sin^2 \theta \sqrt{r^2 + l^2}}{\rho^2} \quad (3.287)$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad (3.288)$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \quad (3.289)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (3.290)$$

En el plano ecuatorial, $\rho \rightarrow \sqrt{r^2 + l^2}$ y $A \rightarrow (r^2 + l^2 + a^2)^2 - \Delta a^2$. Por tanto, los coeficientes métricos de Kerr toman la forma:

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2}{r^2 + l^2}\right) \quad (3.291)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2ma\sqrt{r^2 + l^2}}{r^2 + l^2} \quad (3.292)$$

$$g_{rr} = \frac{r^2 + l^2}{\Delta} \quad (3.293)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 + l^2 \quad (3.294)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\tilde{A}}{r^2 + l^2} \quad (3.295)$$

ahora $\tilde{A} = (r^2 + l^2 + a^2)^2 - \Delta a^2$; reemplazando los coeficientes métricos en las componentes de la 4-velocidad (2.191) se obtiene:

$$u^t = \frac{\frac{E\tilde{A}}{r^2 + l^2} - \frac{2Lma\sqrt{r^2 + l^2}}{r^2 + l^2}}{\frac{4m^2a^2(r^2 + l^2)}{r^2 + l^2} + \frac{(\Delta - a^2)\tilde{A}}{r^2 + l^2}} \quad (3.296)$$

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} \quad (3.297)$$

$$u^\theta = 0 \quad (3.298)$$

$$u^\phi = \frac{\frac{2Ema\sqrt{r^2 + l^2}}{r^2 + l^2} + \frac{L(\Delta - a^2)}{r^2 + l^2}}{\frac{4m^2a^2(r^2 + l^2)}{r^2 + l^2} + \frac{(\Delta - a^2)\tilde{A}}{r^2 + l^2}} \quad (3.299)$$

Simplificando

$$u^t = \frac{(r^2 + l^2)(-2amL\sqrt{r^2 + l^2} + \tilde{A}E)}{4a^2l^2m^2 + 4a^2m^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta} \quad (3.300)$$

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} \quad (3.301)$$

$$u^\theta = 0 \quad (3.302)$$

$$u^\phi = \frac{(r^2 + l^2)(2amE\sqrt{r^2 + l^2} - a^2L + \Delta L)}{(4a^2l^2m^2 + 4a^2m^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta)} \quad (3.303)$$

Sustituyendo las componentes de la 4-velocidad en la ecuación (2.192), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{(l^2 + r^2)(2Emar - La^2 + \Delta L)^2 \tilde{A}}{(4m^2a^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta)^2} + \frac{\dot{r}^2(l^2 + r^2)}{\Delta} \\ & - \frac{4(l^2 + r^2)(2Emar - La^2 + \Delta L)(-2Lmar + E\tilde{A})mar}{(4m^2a^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta)^2} \\ & - \frac{(l^2 + r^2)(-2Lmar + E\tilde{A})^2(-a^2 + \Delta)}{(4m^2a^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta)^2} = -1 \end{aligned} \quad (3.304)$$

Simplificando

$$\frac{(4a^2m^2r^2\dot{r}^2 + 4\Delta ELamr - \tilde{A}a^2\dot{r}^2 - \Delta L^2a^2 - \tilde{A}\Delta E^2 + \tilde{A}\Delta\dot{r}^2 + \Delta^2L^2)(l^2 + r^2)}{\Delta(4a^2m^2r^2 - \tilde{A}a^2 + \tilde{A}\Delta)} \quad (3.305)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para E

$$E = \frac{1}{\tilde{A}\Delta(r^2 + l^2)} \left\{ 2maLr(r^2 + l^2)\Delta + (r^2 + l^2)\Delta \left[(4a^2r^2m^2\tilde{A}\dot{r}^2)/\Delta + 4a^2m^2r^2L^2 \right. \right. \quad (3.306)$$

$$\left. \left. - (a^2\tilde{A}^2\dot{r}^2)/\Delta - a^2L^2\tilde{A}^2 + \tilde{A}^2\dot{r}^2 + \tilde{A}L^2\Delta + (4a^2m^2r^2\tilde{A} - a^2\tilde{A} + \tilde{A}^2\Delta)/(r^2 + l^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Simplificando

$$E = \frac{1}{\tilde{A}} \left\{ 2maLr + \left[(4a^2r^2m^2\tilde{A}\dot{r}^2)/\Delta + 4a^2m^2r^2L^2 - (a^2\tilde{A}^2\dot{r}^2)/\Delta \right. \right. \quad (3.307)$$

$$\left. \left. - a^2L^2\tilde{A}^2 + \tilde{A}^2\dot{r}^2 + \tilde{A}L^2\Delta + (4a^2m^2r^2\tilde{A} - a^2\tilde{A} + \tilde{A}^2\Delta)/(r^2 + l^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$E = \frac{1}{\tilde{A}} \left\{ 2amrL + \left[4m^2a^2r^2L^2 - a^2L^2\tilde{A} + L^2\tilde{A}\Delta \right. \right. \quad (3.308)$$

$$\left. \left. + \frac{(4m^2a^2r^2\tilde{A} - a^2\tilde{A}^2 + \tilde{A}^2\Delta)\dot{r}^2}{\Delta} + \frac{(4m^2a^2r^2\tilde{A} - a^2\tilde{A}^2 + \tilde{A}^2\Delta)}{r^2 + l^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Se obtiene la energía E de una partícula en el plano ecuatorial en el exterior de un Black-Bounce-Kerr

$$E = \frac{1}{\tilde{A}} \left\{ 2marL + \left[4m^2a^2r^2L^2 - \tilde{A}(a^2L^2 + L^2\Delta) \right. \right. \quad (3.309)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{(r^2 + l^2)\Delta} \left((4m^2a^2r^2 - a^2\tilde{A} + \tilde{A}\Delta)(r^2 + l^2)\dot{r}^2 + (4m^2a^2r^2 - a^2\tilde{A} + \tilde{A}\Delta)\Delta \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Donde $\tilde{A} = (r^2 + l^2)^2 + a^2(r^2 + l^2 + 2m\sqrt{r^2 + l^2})$.

3.4.1. Extracción de energía

Para realizar el proceso de Penrose para el Black-Bounce-Kerr, se considera una partícula $p^{(1)}$ que ingresa a la ergosfera y, en el límite, cuando $\rho \rightarrow r_H$ se divide en dos partículas, $p^{(2)}$ y $p^{(3)}$ en la cual, $p^{(2)}$ ingresa al horizonte y $p^{(3)}$ escapa al infinito.

Reemplazando g_{tt} en la ecuación (2.199) de la sección (2.15), que describe la energía de la partícula que escapa

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - a^2}{r^2 + l^2} \right)} + 1 \right]}{2} \quad (3.310)$$

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + a^2 + l^2 - 2m\sqrt{r^2 + l^2} - a^2}{r^2 + l^2} \right)} + 1 \right]}{2} \quad (3.311)$$

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{1 - 1 + \left(2m\sqrt{\frac{r^2 + l^2}{(r^2 + l^2)^2}} \right)} + 1 \right]}{2} \quad (3.312)$$

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{\frac{2m}{\sqrt{r^2 + l^2}}} + 1 \right]}{2} \quad (3.313)$$

Analizando el proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr extremo ($a=m$) donde el horizonte y la superficie estática son:

$$r_H = \sqrt{m^2 - l^2} \quad r_{st} = \sqrt{4m^2 - l^2} \quad l \leq m \quad (3.314)$$

Para el caso $m = 1$

$$r_H = \sqrt{1 - l^2} \quad r_{st} = \sqrt{4 - l^2} \quad (3.315)$$

La condición del parámetro l ahora es

$$l \leq 1 \quad (3.316)$$

La ecuación de la energía de la partícula que escapa es

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2 + l^2}}} + 1 \right]}{2} \quad (3.317)$$

La máxima eficiencia se tendría cuando $r \rightarrow 1$ y $l \rightarrow 0$

$$E_3 = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\left[\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2 + l^2}}} + 1 \right]}{2} \quad (3.318)$$

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + l^2}}} + 1 \right]}{2} \quad (3.319)$$

Tomando diferentes valores para el parámetro l se obtiene:

Función de la energía	Horizonte de eventos	Energía
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.9)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.9)^2}$	1.2071067649054
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.8)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.8)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.7)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.7)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.6)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.6)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.5)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.5)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.4)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.4)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.3)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.3)^2}$	1.2071065118498
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.2)^2}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.2)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.1)^1}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.1)^2}$	1.2071067811865
$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r^2+(0.0)^1}}} + 1 \right)$	$\sqrt{1 - (0.0)^2}$	1.2071067811865

Cuadro 3.1: Energía de escape para distintos valores de l

Graficando las energías de escape de la tabla con sus respectivos horizontes de eventos, se obtiene:

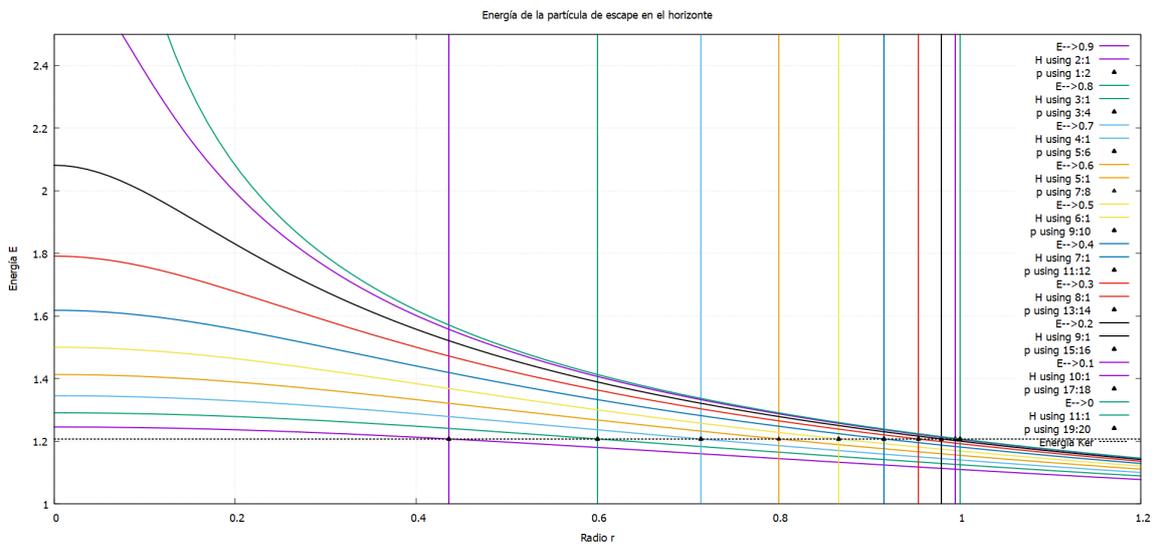


Figura 3.2: Energía de escape para diferentes valores de l en el Black-Bounce-Kerr

RESULTADOS Y ANÁLISIS

- 4.1 Resultado 1: derivación de la métrica de Schwarzschild
- 4.2 Resultado 2: derivación de la métrica de Kerr
- 4.3 Resultado 3: proceso de Penrose
- 4.4 Resultado 4: proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr

4.1. Resultado 1: derivación de la métrica de Schwarzschild

1. Utilizando la primera ecuación de estructura de Cartan (2.135), presentada en la sección (2.12.2) se determinaron las *1-formas* de conexión $\omega_{(\beta)}^{(\alpha)}$

$$\omega_{(1)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(1)} = e^{-\beta} \alpha' \hat{\theta}^{(0)} + e^{-\alpha} \dot{\beta} \hat{\theta}^{(1)} \quad (4.1)$$

$$\omega_{(2)}^{(1)} = -\omega_{(1)}^{(2)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(2)} \quad (4.2)$$

$$\omega_{(3)}^{(1)} = -\omega_{(1)}^{(3)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \hat{\theta}^{(3)} \quad (4.3)$$

$$\omega_{(3)}^{(2)} = -\omega_{(2)}^{(3)} = -\frac{1}{r} \cot \vartheta \hat{\theta}^{(3)} \quad (4.4)$$

Para verificar que las *1-formas* obtenidas son correctas, se empleó la propiedad de índices simétricos y antisimétricos de la sección (2.12.1). Comparando las *1-formas* de conexión con la propiedad de simetría

$$\omega_{(\beta)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(\beta)} \quad (4.5)$$

se concluye que, para $\beta = 1$, esta es válida. De igual manera, las *1-formas* cumplen la propiedad de índices antisimétricos

$$\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} = -\omega_{(\alpha)}^{(\beta)} \quad (4.6)$$

para α y β distintos de cero. Pero esto no es suficiente para determinar que, definitivamente, las *1-formas* de conexión son correctas, por lo tanto, se evalúan en la primera ecuación estructura de Cartan

$$d\theta^{(\mu)} = -\omega_{(\nu)}^{(\mu)} \wedge \theta^{(\nu)} \quad (4.7)$$

Para $\theta^{(0)} = (\partial_r \alpha) e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)}$:

$$(\partial_r \alpha) e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} = \cancel{-\omega_{(1)}^{(0)} \wedge \theta^{(1)}} - \omega_{(1)}^{(0)} \wedge \theta^{(1)} - \cancel{\omega_{(2)}^{(0)} \wedge \theta^{(2)}} - \cancel{\omega_{(3)}^{(0)} \wedge \theta^{(3)}} \quad (4.8)$$

$$(\partial_r \alpha) e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} = -e^{-\beta} \alpha' \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} - \cancel{e^{-\alpha} \dot{\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}} \quad (4.9)$$

$$\alpha' e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} = e^{-\beta} \alpha' \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} \quad (4.10)$$

Para $\theta^{(1)} = (\partial_t \beta) e^{-\alpha} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)}$:

$$(\partial_t \beta) e^{-\alpha} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} = -\omega_{(0)}^{(1)} \wedge \theta^{(0)} - \cancel{\omega_{(1)}^{(1)} \wedge \theta^{(1)}} - \omega_{(2)}^{(1)} \wedge \theta^{(2)} - \omega_{(3)}^{(1)} \wedge \theta^{(3)} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t \beta) e^{-\alpha} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} &= -e^{-\alpha} \dot{\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} - \cancel{e^{-\beta} \alpha' \theta^{(0)} \wedge \theta^{(0)}} + \frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(2)} + \\ &\quad \frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(3)} \wedge \theta^{(3)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\dot{\beta} e^{-\alpha} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} = e^{-\alpha} \dot{\beta} \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} \quad (4.13)$$

Para $\theta^{(2)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)}$:

$$\frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} = \cancel{-\omega_{(0)}^{(2)} \wedge \theta^{(0)}} - \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \theta^{(1)} - \cancel{\omega_{(2)}^{(2)} \wedge \theta^{(2)}} - \omega_{(3)}^{(2)} \wedge \theta^{(3)} \quad (4.14)$$

$$\frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(1)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \theta^{(3)} \wedge \theta^{(3)} \quad (4.15)$$

$$\frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} = \frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} \quad (4.16)$$

Para $\theta^{(3)} = \frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} &= \cancel{-\omega_{(0)}^{(3)} \wedge \theta^{(0)}} - \omega_{(1)}^{(3)} \wedge \theta^{(1)} \\ &\quad - \omega_{(2)}^{(3)} \wedge \theta^{(2)} - \cancel{\omega_{(3)}^{(3)} \wedge \theta^{(3)}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} = -\frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(3)} \wedge \theta^{(1)} - \frac{1}{r} \cot \vartheta \theta^{(3)} \wedge \theta^{(2)} \quad (4.18)$$

$$\frac{e^{-\beta}}{r} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} = \frac{1}{r} e^{-\beta} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + \frac{1}{r} \cot \vartheta \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} \quad (4.19)$$

De lo anterior, se concluye que las *1-formas* de conexión cumplen la primera ecuación de estructura de Cartan.

- 2.** Expandiendo la ecuación (2.137) de la sección (2.12.2) y reemplazando las *1-formas* de conexión $\omega_{(\beta)}^{(\alpha)}$, se calcularon las *2-formas* de curvatura $\Omega_{(\beta)}^{(\alpha)}$:

$$\Omega_{(0)}^{(1)} = \Omega_{(1)}^{(0)} = \gamma \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} \quad (4.20)$$

$$\Omega_{(0)}^{(2)} = \Omega_{(2)}^{(0)} = \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \alpha' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (4.21)$$

$$\Omega_{(0)}^{(3)} = \Omega_{(3)}^{(0)} = \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \alpha' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(3)} \wedge \hat{\theta}^{(0)} \quad (4.22)$$

$$\Omega_{(1)}^{(2)} = -\Omega_{(2)}^{(1)} = \left(-\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \right) \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} - \left(\frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \right) \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(2)} \quad (4.23)$$

$$\Omega_{(1)}^{(3)} = -\Omega_{(3)}^{(1)} = -\frac{1}{r} \beta' e^{-2\beta} \hat{\theta}^{(1)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} - \frac{1}{r} \dot{\beta} e^{-(\alpha+\beta)} \hat{\theta}^{(0)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (4.24)$$

$$\Omega_{(2)}^{(3)} = -\Omega_{(3)}^{(2)} = \left(\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta}^{(2)} \wedge \hat{\theta}^{(3)} \quad (4.25)$$

Claramente, se observa que las 2-formas de curvatura cumplen la propiedad de índices simétricos y antisimétricos

$$\boxed{\Omega_{(\nu)}^{(0)} = \Omega_{(0)}^{(\nu)}} \quad \boxed{\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\Omega_{(\mu)}^{(\nu)}} \quad (4.26)$$

deducidas en el apéndice (A.1).

3. Evaluando la segunda ecuación de estructura de Cartan (2.136), mencionada en la sección (2.12.2), se obtuvieron las componentes del tensor de curvatura de Riemann $R_{(\beta)(\mu)(\nu)}^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} R_{(0)(0)(1)}^{(1)} &= R_{(1)(0)(1)}^{(0)} = -R_{(1)(1)(0)}^{(0)} = -R_{(0)(1)(0)}^{(1)} = \gamma \\ R_{(0)(1)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(1)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(1)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(1)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(0)(0)(2)}^{(2)} &= R_{(2)(0)(2)}^{(0)} = -R_{(0)(2)(0)}^{(2)} = -R_{(2)(2)(0)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \\ R_{(0)(1)(3)}^{(3)} &= R_{(3)(1)(3)}^{(0)} = -R_{(0)(3)(1)}^{(3)} = -R_{(3)(1)(3)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(0)(0)(3)}^{(3)} &= R_{(3)(0)(3)}^{(0)} = -R_{(0)(3)(0)}^{(3)} = -R_{(3)(3)(0)}^{(0)} = -\frac{1}{r}\alpha'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(1)(2)}^{(2)} &= -R_{(2)(1)(2)}^{(1)} = -R_{(1)(2)(1)}^{(2)} = R_{(2)(2)(1)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(0)(2)}^{(2)} &= -R_{(2)(0)(2)}^{(1)} = -R_{(1)(2)(0)}^{(2)} = R_{(2)(2)(0)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(1)(1)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(1)(3)}^{(1)} = -R_{(1)(3)(1)}^{(3)} = R_{(3)(3)(1)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\beta'e^{-2\beta} \\ R_{(1)(0)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(0)(3)}^{(1)} = -R_{(1)(3)(0)}^{(3)} = R_{(3)(3)(0)}^{(1)} = -\frac{1}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \\ R_{(2)(2)(3)}^{(3)} &= -R_{(3)(2)(3)}^{(2)} = -R_{(2)(3)(2)}^{(3)} = R_{(3)(3)(2)}^{(2)} = \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

4. Aplicando la contracción del tensor de curvatura de Riemann (2.57), descrita en la sección (2.7), se generan las componentes del tensor de Ricci $R_{(\alpha)(\beta)}$:

$$R_{(0)(0)} = -\gamma + \frac{2}{r}e^{-2\beta}\alpha' \quad (4.28)$$

$$R_{(1)(1)} = \gamma + \frac{2}{r}\beta'e^{-2\beta} \quad (4.29)$$

$$R_{(1)(0)} = \frac{2}{r}\dot{\beta}e^{-(\alpha+\beta)} \quad (4.30)$$

$$R_{(2)(2)} = R_{(3)(3)} = \frac{1}{r}(\beta' - \alpha')e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) \quad (4.31)$$

Cuando se obtienen las componentes del tensor de Ricci $R_{(\mu)(\nu)}$, se puede verificar que estos son consistentes con $R_{\mu\nu}$ calculando el escalar de curvatura de Riemann dado en la sección (2.6) por la ecuación (2.59) para ambos casos. Expandiendo la ecuación (2.59) para $R_{(\mu)(\nu)}$

$$R_{(\mu)(\nu)} = R_{(0)(0)}g^{(0)(0)} + R_{(1)(1)}g^{(1)(1)} + R_{(2)(2)}g^{(2)(2)} + R_{(3)(3)}g^{(3)(3)} \quad (4.32)$$

Como la métrica tiene forma Minkowskiana, entonces los valores de $g^{(\alpha)(\beta)}$ son:

$$g^{(0)(0)} = -1, \quad g^{(1)(1)} = 1, \quad g^{(2)(2)} = 1, \quad g^{(3)(3)} = 1 \quad (4.33)$$

Reemplazando los coeficientes contra-variantes de la métrica y las componentes del tensor de Ricci, determinadas en la sección (3.1.3), en la ecuación (4.32)

$$R = \left(-\gamma + \frac{2\alpha'e^{-2\beta}}{r}\right)(-1) + \left(\gamma + \frac{2\beta'e^{-2\beta}}{r}\right) + \frac{e^{-2\beta}}{r}(\beta' + \alpha') - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) + \frac{e^{-2\beta}}{r}(\beta' - \alpha') - \frac{1}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) \quad (4.34)$$

se obtiene:

$$R = 2\gamma + \frac{4e - 2\beta}{r}(\beta' - \alpha') - \frac{2}{r^2}(e^{-2\beta} - 1) \quad (4.35)$$

Expandiendo la ecuación (2.59) para $R_{\mu\nu}$

$$R = R_{tt}g^{tt} + R_{rr}g^{rr} + R_{\vartheta\vartheta}g^{\vartheta\vartheta} + R_{\phi\phi}g^{\phi\phi} \quad (4.36)$$

Reemplazando los coeficientes métricos (2.77) de la sección (2.11) en la ecuación (4.36)

$$R = \left\{-\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 + \frac{2}{r}\alpha'\right]\right\}(-e^{-2\alpha}) \quad (4.37)$$

$$+ \left\{-\left[\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2 - \frac{2}{r}\beta'\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right]\right\}e^{-2\beta}$$

$$+ \left\{e^{-2\beta}[r(\beta' - \alpha') - 1] + 1\right\}\frac{1}{r^2}$$

$$+ \left\{(e^{-2\beta}[r(\beta' - \alpha') - 1] + 1)\sin^2\vartheta\right\}\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}$$

$$R = 2e^{-2\alpha}\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right] + \frac{2e^{-2\beta}}{r}(\beta' - \alpha') + \frac{2e^{-2\beta}}{r}(\beta' - \alpha') \quad (4.38)$$

$$- 2\frac{e^{-2\beta}}{r^2} + \frac{2}{r^2} - 2e^{-2\beta}[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta']$$

$$R = -2e^{-2\beta}[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta'] + 2e^{-2\alpha}\left[\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right] \quad (4.39)$$

$$+ \frac{4e^{-2\beta}}{r}(\beta' - \alpha') - \frac{2}{r^2}(e^{-2\beta} - 1)$$

se obtiene:

$$\boxed{R = 2\gamma + \frac{4e^{-2\beta}}{r}(\beta' - \alpha') - \frac{2}{r^2}(e^{-2\beta} - 1)} \quad (4.40)$$

Comparando las ecuaciones (4.35) y (4.40), se concluye que son iguales, por lo tanto, $R_{(\mu)(\nu)}$ y $R_{\mu\nu}$ son consistentes, pues, el R es propio de la variedad diferenciable, por ende, es invariante bajo transformación de coordenadas.

5. Solucionando las ecuaciones de Einstein en vacío, en el exterior de un cuerpo con simetría esférica, se determinó la métrica de Schwarzschild:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2} \quad (4.41)$$

la cual es consistente con la ecuación (2.93) de la sección (2.11).¹

¹La (4.41) es desarrollada en los libros de [4] y [15] por el método mencionado en la sección (2.11)

4.2. Resultado 2: derivación de la métrica de Kerr

1. Aplicando el algoritmo de Newman-Janis a la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein se determinaron las componentes de la métrica contra-variante de Kerr en forma matricial:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ -\frac{(a^2 + r'^2)}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & \frac{r'^2 + a^2 - 2r'M}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 \\ \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} & 0 & \frac{\csc^2 \theta'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

2. Calculando la matriz inversa de $g^{\mu\nu}$ se obtuvieron las componentes de la métrica covariante de Kerr en forma matricial:

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{2Mr'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} - 1 & -1 & 0 & -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta' \\ 0 & 0 & a^2 \cos^2 \theta' + r'^2 & 0 \\ -\frac{2Mar' \sin^2 \theta'}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} & a \sin^2 \theta' & 0 & \frac{((a^2 + r'^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta')}{a^2 \cos^2 \theta' + r'^2} \sin^2 \theta' \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Donde $\Delta = a^2 + r'^2 - 2Mr'$ y a el momento angular.

3. Una vez obtenidas las componentes covariantes se escribió la métrica en forma tensorial:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) d\mu^2 - 2d\mu dr - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\mu d\tilde{\phi} \\ + \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\tilde{\phi}^2 \quad (4.44)$$

Donde

$$\rho = a^2 \cos^2 \theta + r^2 \quad (4.45)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \quad (4.46)$$

$$\Delta = (a^2 + r'^2 - 2Mr') \quad (4.47)$$

De las ecuaciones (4.45), (4.46) y (4.47) se deduce que, si el momento angular tiende a cero, la métrica (4.44) tiende a la solución de Schwarzschild en coordenadas nulas. Según [21] y [23] la métrica (4.44) corresponde a la solución de Kerr en coordenadas nulas.

4. Transformando la métrica de Kerr en coordenadas nulas a coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , se obtuvo:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (4.48)$$

La cual es más habitual encontrar en los libros de relatividad general como [12], [4] y [13].

4.3. Resultado 3: proceso de Penrose

1. Resolviendo la ecuación (2.192) de las geodésicas radiales para E , se obtuvo la energía de una partícula en el plano ecuatorial en el exterior de un agujero negro de Kerr:

$$E = \frac{1}{\bar{A}} \left(2Lmar \pm \sqrt{4L^2a^2m^2r^2 - \bar{A} [L^2a^2 - (L^2 + r^2)\Delta - r^4\dot{r}^2]} \right) \quad (4.49)$$

2. Para realizar el proceso de Penrose a la métrica de Kerr, se tomó a $E = 1$ para facilitar los cálculos y se determinó la energía de la partícula que escapa de la ergosfera, la cual es:

$$E_3 = 1,20710678119 \quad (4.50)$$

Si la energía de la partícula que ingresa a la ergosfera es 1, entonces, el excedente de energía de la partícula que escapa es

$$\Delta E = 0,2071 \quad (4.51)$$

Según [13] y [26] la eficiencia del proceso de Penrose, para la métrica de Kerr, es del 20,71 %. En la figura 4.1 se presenta la curva de la energía en función de r :

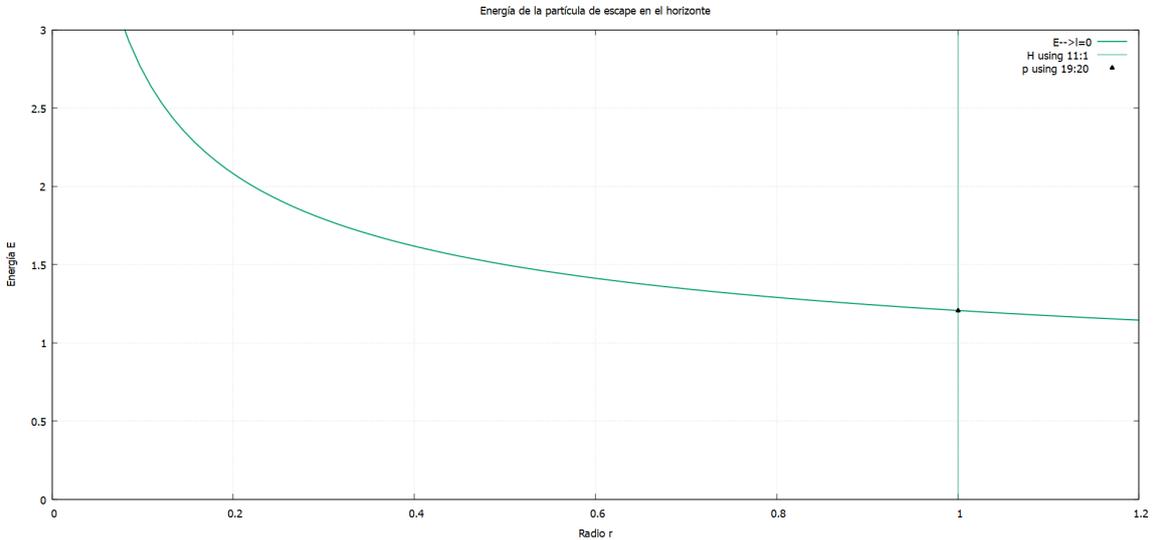


Figura 4.1: La curva representa la energía de la partícula de escape y la recta vertical es el horizonte de eventos

Según la gráfica anterior, para $m = a$ la energía de la partícula de escape decrece si $r > r_+$, por lo tanto, la mayor extracción de energía se produce en un agujero extremo de Kerr cuando la división de la partícula se genera en:

$$\lim_{r \rightarrow r_+} r \quad (4.52)$$

4.4. Resultado 4: proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr

1. Resolviendo la ecuación (2.192) de las geodésicas radiales, se determinó la energía de una partícula en un punto del plano ecuatorial en el exterior de un Black-Bounce-Kerr:

$$E = \frac{1}{\tilde{A}} \left\{ 2marL + \left[4m^2 a^2 r^2 L^2 - \tilde{A} (a^2 L^2 + L^2 \Delta \right. \right. \quad (4.53)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{(r^2 + l^2) \Delta} \left((4m^2 a^2 r^2 - a^2 \tilde{A} + \tilde{A} \Delta)(r^2 + l^2) \dot{r}^2 + (4m^2 a^2 r^2 - a^2 \tilde{A} + \tilde{A} \Delta) \Delta \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Donde

$$\tilde{A} = (r^2 + l^2)^2 + a^2(r^2 + l^2 + 2m\sqrt{r^2 + l^2}) \quad (4.54)$$

De las ecuaciones (4.53) y (4.54) se deduce que si el parámetro $l \rightarrow 0$, la energía tiende a la ecuación (4.49).

2. Realizando el proceso de Penrose para un Black-Bounce-Kerr, se obtuvo que la energía de la partícula de escape está dada por:

$$E_3 = \frac{\left[\sqrt{\frac{2m}{\sqrt{r^2 + l^2}} + 1} \right]}{2} \quad (4.55)$$

Al igual que en el caso anterior, se observa que si el parámetro $l \rightarrow 0$, la ecuación (4.55) se reduce a la energía de la partícula de escape en el proceso de Penrose para la métrica de Kerr (ecuación 3.273).

3. De la misma manera que en el proceso de Penrose para Kerr, se tomó $a = m$ y se graficaron las energías de la partícula de escape en un Black-Bounce-Kerr:

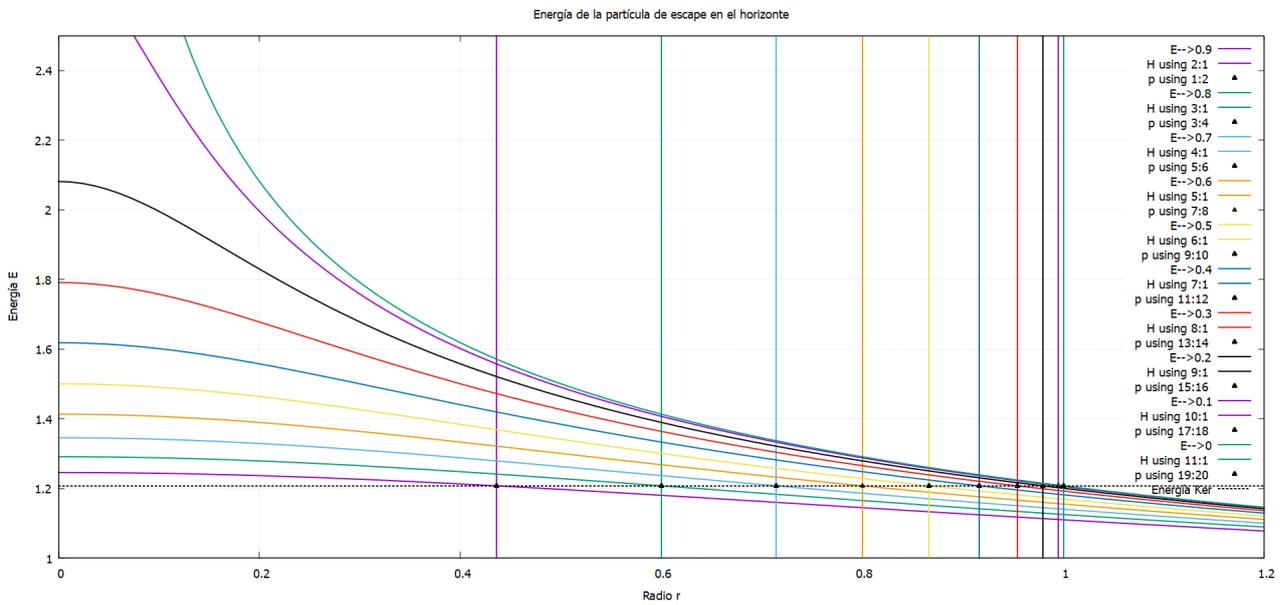


Figura 4.2: *Curvas de la energía de la partícula de escape para diferentes valores de l*

En la gráfica se observa que el parámetro l modifica la energía y el horizonte de eventos del Black-Bounce-Kerr, pero, no parece afectar la energía de extracción, y esta tiende a permanecer constante en $E = 1,2071$.

CONCLUSIONES

- ▶ Las ecuaciones de estructura de Cartan son una herramienta muy útil del cálculo exterior para generar la métrica del espaciotiempo con simetría esférica, puesto que, se logró demostrar que, escribiendo la métrica semilla en términos de *1-formas*, los cálculos son menos extensos gracias a las propiedades de índices simétricos y antisimétricos de las *1-formas*.
- ▶ Antes de solucionar las ecuaciones de Einstein se comprobó la consistencia entre $R_{(\alpha)(\beta)}$ y $R_{\alpha\beta}$, determinando el escalar de curvatura de Riemann para ambos casos, ya que este es una cantidad propia de cada variedad y es invariante bajo transformación de coordenadas. Finalmente, igualando $R_{(\alpha)(\beta)} = 0$ se calculó la métrica de Schwarzschild descrita en los libros [4], [15] y [18].
- ▶ Aplicando el algoritmo de Newman-Janis a la métrica de Schwarzschild en coordenadas Eddington-Finkelstein, se derivó la métrica de Kerr en coordenadas nulas y se demostró que cuando $a = 0$ se reduce a la métrica de Kerr. Por lo tanto, se comprueba la validez del algoritmo y se concluye que los cálculos que implican este método son menos robustos que los descritos por [13].
- ▶ La mayor eficiencia del proceso de Penrose es del 20,71 % y es producida cuando la masa es igual al momento angular y la división de la partícula $p^{(1)}$ ocurre en el límite $r \rightarrow r_+$.
- ▶ Aplicando el proceso de Penrose a un Black-Bounce-Kerr, se determinó la ecuación de la energía de la partícula que escapa al infinito y se demostró que eliminando el parámetro l de la ecuación (4.55), se reproduce la energía de escape del proceso de Penrose para la métrica de Kerr. Además, se determinó la energía de escape para el Black-Bounce-Kerr.
- ▶ De la gráfica (4.4) se concluye que eliminar la singularidad de un agujero negro de Kerr no altera la energía de escape del proceso de Penrose, ya que esta tiende a permanecer constante.

Desarrollo de algunos cálculos

A.1. Verificación de las propiedades de simetría y anti-simetría de las *2-formas de curvatura*

De la segunda ecuación de estructura de Cartan

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = d\omega_{(\nu)}^{(\mu)} + \omega_{(\sigma)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.1})$$

se deduce que, si $\mu = \nu$, entonces $\Omega_{(\mu)}^{(\mu)} = 0$, por ende, ignoramos estos casos. Tomando, $\mu = 0$

$$\Omega_{(\nu)}^{(0)} = d\omega_{(\nu)}^{(0)} + \omega_{(\sigma)}^{(0)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.2})$$

Como

$$\omega_{(\nu)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(\nu)} \quad (\text{A.3})$$

$$\omega_{(\sigma)}^{(0)} = \omega_{(0)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.4})$$

Y para $\sigma \neq 0, \nu \neq 0$

$$\omega_{(\nu)}^{(\sigma)} = -\omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \quad (\text{A.5})$$

Reemplazando (178), (179) y (180) en (177)

$$\Omega_{(\nu)}^{(0)} = d\omega_{(0)}^{(\nu)} + \omega_{(0)}^{(\sigma)} \wedge \left(-\omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\Omega_{(\nu)}^{(0)} = d\omega_{(0)}^{(\nu)} + \omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \wedge \omega_{(0)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.7})$$

entonces, se deduce que:

$$\boxed{\Omega_{(\nu)}^{(0)} = \Omega_{(0)}^{(\nu)}} \quad (\text{A.8})$$

Ahora, para $\mu \neq nu$ y $\mu, \nu \neq 0$

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = d\omega_{(\nu)}^{(\mu)} + \omega_{(\sigma)}^{(\mu)} \wedge \omega_{(\nu)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.9})$$

Entonces

$$\omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\omega_{(\mu)}^{(\nu)} \quad (\text{A.10})$$

$$\omega_{(\sigma)}^{(\mu)} = -\omega_{(\mu)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.11})$$

$$\omega_{(\nu)}^{(\sigma)} = -\omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando (185), (186) y (187) en (184)

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = d(-\omega_{(\mu)}^{(\nu)}) + (-\omega_{(\mu)}^{(\sigma)}) \wedge (-\omega_{(\sigma)}^{(\nu)}) \quad (\text{A.13})$$

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -d\omega_{(\mu)}^{(\nu)} - \omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \wedge \omega_{(\mu)}^{(\sigma)} \quad (\text{A.14})$$

$$\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\left(d\omega_{(\mu)}^{(\nu)} + \omega_{(\sigma)}^{(\nu)} \wedge \omega_{(\mu)}^{(\sigma)}\right) \quad (\text{A.15})$$

se obtiene:

$$\boxed{\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\Omega_{(\mu)}^{(\nu)}} \quad (\text{A.16})$$

Propiedades de las formas de curvatura

$$\boxed{\Omega_{(\nu)}^{(0)} = \Omega_{(0)}^{(\nu)}} \quad \boxed{\Omega_{(\nu)}^{(\mu)} = -\Omega_{(\mu)}^{(\nu)}} \quad (\text{A.17})$$

A.2. Tensor de Ricci

Para hallar el tensor de Ricci, se parte del tensor de curvatura de Riemann [4][15]:

$$R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando por $g^{\mu\delta}$:

$$R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} g_{\mu\delta} = R_{\delta\nu\sigma\rho} \quad (\text{A.19})$$

Multiplicando (A.19) por $g^{\nu\rho}$:

$$R_{\delta\nu\sigma\rho} g^{\nu\rho} = R_{\delta\sigma} \quad (\text{A.20})$$

Donde $R_{\nu\delta}$ son las componentes del tensor de Ricci [4][15]:

$$R_{\delta\sigma} = R_{\delta\nu\sigma\rho}g^{\nu\rho} \quad (\text{A.21})$$

Reemplazando la ecuación (A.19) en (A.21)

$$R_{\delta\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho}g_{\mu\delta}g^{\nu\rho} \quad (\text{A.22})$$

Como la métrica es diagonal, entonces $\nu = \rho$, expandiendo

$$R_{\delta\sigma} = R^{\mu}{}_{0\sigma 0}g_{\mu\delta}g^{00} + R^{\mu}{}_{1\sigma 1}g_{\mu\delta}g^{11} + R^{\mu}{}_{2\sigma 2}g_{\mu\delta}g^{22} + R^{\mu}{}_{3\sigma 3}g_{\mu\delta}g^{33} \quad (\text{A.23})$$

De la ecuación (A.23) se deduce que cada término del lado derecho es diferente de cero cuando $\mu = \delta$

Bibliografía

- [1] B. W. Shore and P. L. Knight. The jaynes-cummings model. Journal of Modern Optics, 40(7):1195, 1993.
- [2] Cosimo Bambi. Introduction to General Relativity. Springer Nature Singapore PTe Ltd, 2018.
- [3] Sarmiento and Juan Manuel Tejeiro. Notas de clase. Principios de relatividad general. Univ. Nacional de Colombia, 2005.
- [4] Sean Carroll. Espacetime and geometry an introduction to general relativity. Addison Wesley, 2004.
- [5] Jerzy Plebanski and Andrzej Krasinski. An Introduction to General Relativity and Cosmology. Cambridge University Press, 2006.
- [6] Derek Raine and Edwin Thomas. Black holes a student text. Imperial College Press, 2015.
- [7] Rajibul Shaikh. Black hole shadow in a general rotating spacetime obtained through newman-janis algorithm. Physical Review D, 100(2):024028, 2019.
- [8] SM Wagh, SV Dhurandhar, and N Dadhich. Revival of the penrose process for astrophysical applications. The Astrophysical Journal, 290:12–14, 1985.
- [9] Barrett O’neill. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic press, 1983.
- [10] Francisco Gómez Ruiz. Geometría diferencial y geometría de Riemann. Servicio de Publicaciones y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga, 2015.
- [11] Bernard Schutz. A first course in general relativity. Cambridge University Press, 2009.
- [12] M Hobson, G Efstathiou, and A Lasenby. General relativity an introduction for physicists. Cambridge Universite Press, 2006.
- [13] S Chandrasekhar. The mathematical theory of black holes. Oxford University Press, 1983.
- [14] Alejandro Estrada Tiznado et al. Formas diferenciales. Master’s thesis, Universidad Autónoma de Guerrero (México), 2017.

- [15] Kip S Thorne, John Archibald Wheeler, and Charles W Misner. Gravitation. Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [16] Dayron Javier Agudelo Jiménez. Análisis geométrico del campo gravitacional clásico mediante el uso analogías entre vectores y formas diferenciales. 2018.
- [17] David Kay. Cálculo tensorial. McGraw-Hill education, 1889.
- [18] Robert Wald. General relativity. University of Chicago, 1984.
- [19] Manuel Molina Muñoz. Cálculo exterior: aplicaciones en relatividad general. 2021.
- [20] Ivo Terek Couto. Cartan formalism and some computations.
- [21] Rosangela Canonico, Luca Parisi, Gaetano Vilasi, et al. The newman janis algorithm: A review of some results. In Proceedings of the Twelfth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, volume 12, pages 159–170. Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of . . . , 2011.
- [22] Dennis Zill and Michael Cullen. Matemáticas avanzadas para ingeniería 2: Cálculo vectorial, Análisis de Fourier y análisis complejo. Mcgraw-Hill/Interamericana editores, 2008.
- [23] Tim Adamo and Ezra T Newman. The kerr-newman metric: a review. arXiv preprint arXiv:1410.6626, 2014.
- [24] Vishva Patel, Kauntey Acharya, Parth Bambhaniya, and Pankaj S Joshi. Energy extraction from janis-newman-winicour naked singularity. Physical Review D, 107(6):064036, 2023.
- [25] Zdeněk Stuchlík, Martin Kološ, and Arman Tursunov. Penrose process: Its variants and astrophysical applications. Universe, 7(11):416, 2021.
- [26] Manjiri Bhat, Sanjeev Dhurandhar, and Naresh Dadhich. Energetics of the kerr-newman black hole by the penrose process. Journal of Astrophysics and Astronomy, 6:85–100, 1985.
- [27]
- [28] Shahen Hacyan. Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo. Fondo de Cultura Económica, 2012.
- [29] KA Bronnikov, H Dehnen, and VN Melnikov. Regular black holes and black universes. General Relativity and Gravitation, 39(7):973–987, 2007.
- [30] Alex Simpson and Matt Visser. Black-bounce to traversable wormhole. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2019(02):042, 2019.
- [31] Edgardo Franzin, Stefano Liberati, Jacopo Mazza, Alex Simpson, and Matt Visser. Charged black-bounce spacetimes. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2021(07):036, 2021.