



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 07 junio de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Zuly karime Díaz Sánchez, con C.C. No 1075287521,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado.

Titulado fuerza magnetostática en términos de una función energía potencial.

presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de físico;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Zuly karime Díaz Sánchez

Firma: Zuly Karime Diaz

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Fuerza Magnetostática En Términos De Una Función Energía Potencial.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Díaz Sánchez	Zuly Karime

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Rasero Causil	Diego Alejandro

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias Exactas Y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2023

NÚMERO DE PÁGINAS:27

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas ___ Fotografías ___ Grabaciones en discos Ilustraciones en general ___ Grabados ___
Láminas ___ Litografías ___ Mapas ___ Música impresa ___ Planos ___ Retratos ___ Sin ilustraciones ___ Tablas
o Cuadros ___



SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: CD-ROM

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>inglés</u>	<u>español</u>	<u>inglés</u>
1. fuerza magnética	magnetic force	6. Campo eléctrico	electric Field
2. fuerza electrostática	electrostatic force	7. Fuerza de lorentz	lorentz force
3. energía potencial	potential energy	8. Fuerza conservativa	conservative force
4. cargas eléctricas	electric charges	9. Fuerza no conservativa	non-conservative force
5. campo magnético	magnetic Field	10. Potencial vectorial	vector potential

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este Trabajo de Grado se reescribió la expresión de la fuerza magnética, $\vec{F}_M = \vec{q}v \times \vec{B}$, en términos de una posible función potencial, de tal manera que la expresión resultante tenga una estructura similar a la ecuación de la electrostática, $\vec{F}_E = q\vec{E} = -\nabla U_E$.

Se aplicó esta expresión a algunos sistemas sencillos y se compararon los resultados obtenidos con la ecuación tradicional ($\vec{F}_M = \vec{q}v \times \vec{B}$) estableciendo así ventajas y/o desventajas con respecto a la ecuación nueva.



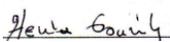
ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this Degree Project the expression of the magnetic force was rewrote $\vec{F}_M = \vec{q}v \times \vec{B}$, in terms of a possible potential function, in such a way that the resulting expression has a structure similar to the electrostatics equation, $\vec{F}_E = q\vec{E} = -\nabla U_E$.

This expression was applied to some simple systems and the results obtained were compared with the traditional equation ($\vec{F}_M = \vec{q}v \times \vec{B}$), thus establishing the advantages and/or disadvantages of the new expression.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: Hernando Gonzalez sierra

Firma: 

Nombre Jurado: Álvaro Enrique Avendaño Rodriguez

Firma: 

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



Fuerza Magnetostática en Términos de una Función Energía Potencial

Trabajo de Grado para optar al título de Físico(a)

Desarrollado por:

Zuly Karime Díaz Sánchez

Código: 20131118972

Firma: Zuly Karime Díaz

Director: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: Diego A. Rasero C.

Área: Electromagnetismo

Neiva-Huila
27 de febrero de 2023

Dedicatoria

El presente Trabajo de Grado deseo dedicarlo a todos los que fueron un apoyo considerable e imprescindible en el transcurso de mi carrera y para el desarrollo posterior de esta tesis. Primeramente, a mis padres y familia, que fueron el apoyo moral y espiritual necesario para continuar cuando las dificultades se presentaron.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme fortaleza para no desistir.

Agradezco a mi madre por brindarme su confianza y apoyo incondicional.

Agradezco muy profundamente al profesor Diego Alejandro Rasero Causil por su dedicación ,paciencia y ser mi soporte intelectual, sin sus palabras y correcciones precisas no hubiese podido llegar a culminar esta meta tan anhelada.

Resumen

En este Trabajo de Grado se reescribió la expresión de la fuerza magnética, $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$, en términos de una posible función potencial, de tal manera que la expresión resultante tenga una estructura similar a la ecuación de la electrostática, $\vec{F}_E = q\vec{E} = -\nabla U_E$.

Se aplicó esta expresión a algunos sistemas sencillos y se compararon los resultados obtenidos con la *ecuación tradicional* ($\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$), estableciendo así las ventajas y/o desventajas de la *expresión nueva*.

Abstract

In this undergraduate work the expression of the magnetic force $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$, was rewrote in terms of a possible potential function, in such a way that the resulting expression has a structure similar to the electrostatics equation, $\vec{F}_E = q\vec{E} = -\nabla U_E$.

This expression was applied to some simple systems and the results obtained were compared with the *traditional equation* ($\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$), thus establishing the advantages and/or disadvantages of the *new expression*.

Índice General

1. Introducción	1
1.1. Objetivos del Trabajo de Grado	2
1.1.1. Objetivo General	2
1.1.2. Objetivos Específicos	2
1.2. Estructura del Trabajo de Grado	2
2. Métodos Teóricos de Solución	3
3. Resultados y Análisis	5
3.1. Posible Interpretación de la Ecuación Encontrada	5
3.2. Ejemplos Ilustrativos	6
3.2.1. Ejemplo 1. Dos Cargas Puntuales	6
3.2.2. Ejemplo 2. Carga y Cilindro de Corriente	9
4. Conclusiones	12
A. Deducción de Algunas Expresiones del Ejemplo 1	13
A.1. Campo \vec{B} de una Carga Puntual Móvil	13
A.2. Potencial \vec{A} de una Carga Móvil	14
B. Deducción de Algunas Expresiones del Ejemplo 2	15
B.1. Campo \vec{B} de un Cilindro de Corriente	15
B.2. Potencial \vec{A} de un Cilindro de Corriente	16

Índice de Figuras

3.1. Carga puntual moviéndose en presencia de otra carga puntual.	6
3.2. Carga puntual moviéndose en presencia de un cilindro de corriente infinitamente largo.	9
A.1. Vectores de posición de la cargas puntuales del ejemplo 1.	13
B.1. Geometría de la distribución cilíndrica de corriente.	15
B.2. Vectores de posición del elemento de corriente y de la carga puntual del ejemplo 2.	16

Capítulo 1

Introducción

En electromagnetismo [1] Cuando las cargas eléctricas están en reposo experimentan fuerzas (eléctricas) puramente atractivas o repulsivas. Sin embargo si están en movimiento aparecen otras fuerzas que se superponen a las anteriores, perpendiculares al movimiento, a las que llamamos fuerzas magnéticas. Desde este punto de vista puede decirse que el campo magnético \vec{B} , es la forma en la que percibimos los efectos relativistas del campo eléctrico \vec{E} , es decir efectos que aparecen con la velocidad. Por eso se considera que el efecto magnético no puede existir al margen del eléctrico, sino que sólo es otra forma del mismo fenómeno que se percibe gracias al movimiento, motivo por el que se unifican en el concepto de electromagnetismo [2].

La fuerza que se ejerce sobre una carga q , que se mueve a velocidad \vec{v} , tiene por tanto una componente eléctrica (que no depende de su movimiento) y otra componente magnética (que si depende del movimiento). La fuerza total o fuerza de Lorentz viene dada por la ecuación vectorial [3]

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

En el caso electrostático, la fuerza es dada por $\vec{F} = \vec{F}_E = q\vec{E}$ y no a parece la componente magnética. Los campos electrostaticos son conservativos, ya que están asociado a una enegía potencial electrostática U_E , tal que, $\vec{F}_E = -\nabla U_E$ y por tanto su rotacional es nulo.

En el caso magnetostático, ocurre lo contrario, sólo hay componente magnética $\vec{F} = \vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$. Sin embargo, a diferencia de la fuerza electrostática, la fuerza magnética no admite ser escrita en términos de una función energía potencial. O sea, no es posible escribir $\vec{F}_M = -\nabla U_M$, donde U_M es una energía potencial magnética [4–7]. El campo magnético es un campo no conservativo, porque su rotacional no es nulo si hay una corriente eléctrica que lo genere.

En este trabajo se pretende encontrar una expresión para la fuerza magnetostática que tenga una estructura matemática similar al caso electrostático. Por consiguiente se plantea la siguiente pregunta:

¿ES POSIBLE ESCRIBIR LA FUERZA MAGNÉTICA EN TÉRMINOS DE UNA FUNCIÓN QUE SE PUEDA INTERPRETAR COMO ENERGÍA POTENCIAL?

En este Trabajo se intentará encontrar una expresión que, hasta donde se sabe, no aparece en los textos de electromagnetismo [8, 9], en la cual la fuerza magnética quede escrita en términos de una posible función energía potencial ($\vec{F}_M = -\nabla U_M$) y que permita la aplicación a problemas de una manera más sencilla que la ecuación $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$, a la que se llamara *ecuación tradicional*. Aunque la fuerza magnestostática no es conservativa, es posible obtener dicha expresión y que se puede dar una interpretación apropiada a la función U_M .

El Trabajo es relevante y pertinente porque, hasta donde se sabe, actualmente en los libros de texto de electromagnetismo [1, 3, 4, 6–14] no se encuentra una ecuación similar a la que pretende

obtener. Se mostrara además la aplicación de esta expresión en la solución de algunos problemas magnetostáticos sencillos.

1.1. Objetivos del Trabajo de Grado

1.1.1. Objetivo General

- Reescribir la expresión de la fuerza magnetostática en términos de una posible función energía potencial.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Interpretar físicamente la expresión encontrada.
- Resolver algunos ejemplos sencillos usando la expresión encontrada y establecer ventajas y/o desventajas con respecto a la *ecuación tradicional*.

1.2. Estructura del Trabajo de Grado

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se muestra el desarrollo teórico que permite reescribir la expresión de la fuerza magnetostática. En el Capítulo 3 se muestra el análisis del resultado teórico y se ilustra su aplicación en la solución de algunos problemas sencillos. En los Apéndices A y B se muestra la solución detallada de los ejemplos de Capítulo 3. Finalmente en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Métodos Teóricos de Solución

En electrostática, debido a la naturaleza conservativa de la fuerza de Coulomb, la fuerza que se ejerce sobre una carga puntual q es de la forma

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = -\nabla U_E, \quad (2.1)$$

donde \vec{E} es un campo eléctrico, U_E es la energía potencial electrostática y ∇ es el operador gradiente.

En la ecuación (2.1), se usó el hecho de que \vec{E} se puede escribir en términos del potencial electrostático ϕ_E como $\vec{E} = -\nabla\phi_E$ y que $\phi_E = qU_E$.

En este Trabajo se propone que, en magnetostática, partiendo de la expresión de la fuerza ejercida sobre una carga puntual q , que se mueve a velocidad constante \vec{v} , en presencia de un campo de inducción magnética \vec{B} ,

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.2)$$

se puede encontrar una ecuación similar a (2.1), esto es,

$$\vec{F}_M = -\nabla U_M, \quad (2.3)$$

donde U_M podría interpretarse como una función energía potencial.

Para ello, se usará la expresión de \vec{B} en términos del potencial vectorial magnético \vec{A} ,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.4)$$

y se reemplazará ésta en la ecuación (2.2). Por tanto,

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}). \quad (2.5)$$

Usando la identidad vectorial

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}, \\ \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) &= \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}. \end{aligned}$$

Si $\vec{a} = \vec{A}$ y $\vec{b} = q\vec{v}$, la ecuación (2.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= q\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - \vec{A} \times (\nabla \times q\vec{v}) - (\vec{A} \cdot \nabla)q\vec{v} - (q\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - (q\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde se ha usado el hecho de que \vec{v} es constante y por tanto $\nabla \times q\vec{v} = 0$ y $(\vec{A} \cdot \nabla)q\vec{v} = 0$. Además, usando otra identidad vectorial,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - b(\nabla \cdot \vec{a}), \\ (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} &= \nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - b(\nabla \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

Así, con $\vec{a} = \vec{A}$ y $\vec{b} = q\vec{v}$,

$$\begin{aligned}q(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} &= \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}) + (\vec{A} \cdot \nabla)q\vec{v} - \vec{A}(\nabla \cdot q\vec{v}) + q\vec{v}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Donde, nuevamente, se ha usado el hecho de que \vec{v} es constante, y que en magnetostática, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Entonces, reemplazando (2.7) en (2.6), se obtiene

$$\vec{F}_M = \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v})\tag{2.8}$$

Capítulo 3

Resultados y Análisis

3.1. Posible Interpretación de la Ecuación Encontrada

Como es conocido, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula es independiente de la trayectoria que esta sigue para ir de un punto a otro. Alternativamente, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza es cero cuando la partícula se mueve por una trayectoria cerrada arbitraria (regresando a su posición inicial). Una fuerza que no cumple estas condiciones se dice que no es conservativa [5].

En el caso electrostático, una función energía potencial electrostática, U_E , sólo puede asociarse con una fuerza conservativa, $\vec{F}_E = -\nabla U_E$, y esta corresponde a la cantidad de trabajo reversible que debería realizarse por un agente externo para producir la configuración de carga dada [1].

Sin embargo, pasa lo contrario con la fuerza magnetostática, \vec{F}_M , que no es conservativa y por tanto no se puede escribir en términos de una función energía potencial, U_M . Así, $\vec{F}_M \neq -\nabla U_M$. Pero según la ecuación (2.8), se ha encontrado,

$$\vec{F}_M = \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}).$$

De acuerdo con esta ecuación, se nota que podemos descomponer la fuerza magnética en dos términos, $\nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v})$ y $-\nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v})$, a los cuales se les intentará dar algún significado físico. Veámos,

1. Si definimos

$$\vec{A} \cdot q\vec{v} = -U_M, \quad (3.1)$$

entonces,

$$\vec{F}_M = -\nabla U_M - \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}). \quad (3.2)$$

Para que U_M corresponda a una función energía potencial, se deben considerar los casos en los cuales $\nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}) = 0$, tal que,

$$\vec{F}_M = -\nabla U_M. \quad (3.3)$$

- Si $\vec{A} \times q\vec{v} = 0$, entonces $\vec{A} \times \vec{v} = 0$ lo cual indica que \vec{A} y \vec{v} deben ser dos vectores paralelos y por tanto, $\vec{A} \cdot q\vec{v} = qAv$. En este trabajo nos centramos en esta condición ilustrando su aplicación a algunos ejemplos sencillos.

- Si $\vec{A} \times \vec{v} \neq 0$, la restricción $\nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}) = 0$ implica que no existen fuentes vectoriales que produzcan el campo vectorial $\vec{A} \times q\vec{v}$ y se podría escribir $\vec{A} \times q\vec{v} = -\nabla\mathcal{U}$, donde \mathcal{U} sería una nueva función potencial a determinar. Este caso *más complicado* no se considera en este trabajo.

En estos casos puede definirse una función escalar U_M que llamaremos energía potencial magnética.

Al igual que el potencial escalar magnético, que se define en los casos particulares en los que $\nabla \times \vec{B} = 0$, [1, 3, 4] ésta se puede considerar como una función auxiliar útil para resolver algunos problemas magnetostáticos.

2. El término $-\nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v})$ se puede interpretar como la componente que le da el carácter no conservativo a la fuerza magnética.

3.2. Ejemplos Ilustrativos

Se usa la ecuación (2.8) para calcular fuerza magnética en dos situaciones sencillas.

3.2.1. Ejemplo 1. Dos Cargas Puntuales

Considere una carga puntual q' moviéndose a velocidad constante $\vec{v}' = v'_0\hat{z}$ e interactuando con otra carga puntual q que se mueve a velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{y}$. Encuentre la fuerza magnética que la carga q' ejerce sobre la carga q .

En la Figura 3.1 se ilustra la situación

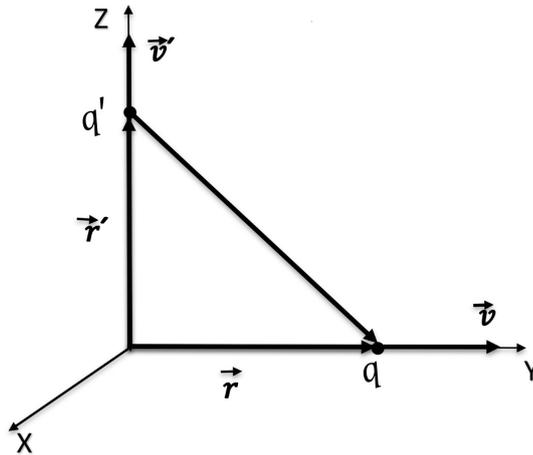


Figura 3.1: Carga puntual moviéndose en presencia de otra carga puntual.

Ecuación Tradicional

Se calcula la fuerza usando la ecuación

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.4)$$

donde, el campo \vec{B} está dado por [1],

$$\vec{B} = -\frac{q'v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}. \quad (3.5)$$

El cálculo detallado se muestra en el Apéndice A. De esta forma, según la ecuación tradicional, (3.4), la fuerza que ejerce la carga q' sobre la carga q es

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -\frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \times \hat{x} \\ &= \frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ecuación Nueva

Ahora, se calcula la fuerza usando

$$\vec{F}_M = \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}) = q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}), \quad (3.7)$$

donde el potencial \vec{A} producido por la carga q' esta dada por [1]:

$$\vec{A} = \frac{q'v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z}. \quad (3.8)$$

Para más detalles ver el Apéndice A. Así,

$$\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z} \cdot \hat{y} = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{v} &= \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z} \times \hat{y} \\ &= -\frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{x} \\ &= \mathcal{G}_x \hat{x} + \mathcal{G}_y \hat{y} + \mathcal{G}_z \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$\mathcal{G}_x = -\frac{q'v_0v'_0\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathcal{G}_y = 0, \quad \mathcal{G}_z = 0. \quad (3.11)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) &= \left(\frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= -\frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.9) y (3.12) en la ecuación nueva, (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F}_M &= q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) \\ &= \frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}\end{aligned}\quad (3.13)$$

La cual coincide, como es de esperar, con el resultado de la ecuación (3.6) obtenido usando la ecuación tradicional.

Como una modificación de este ejemplo, consideremos que la velocidad de la carga es $\vec{v} = v_0\hat{z}$. En este caso, usando (3.5), la ecuación tradicional conduce a

$$\begin{aligned}\vec{F}_M &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -\frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \times \hat{x} \\ &= -\frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Además, usando (3.8),

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{v} &= \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z} \cdot \hat{z}, \\ &= \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\vec{A} \times \vec{v} = \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z} \times \hat{z} = 0.\quad (3.16)$$

Entonces, expresando el gradiente en coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{q'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.32) y (3.33) en la ecuación nueva, (3.23), obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F}_M &= q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) \\ &= -\frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

La cual coincide con (3.14) y muestra que para este problema, según (3.1), se puede escoger como una posible función energía potencial a

$$U_M = -\vec{A} \cdot q\vec{v} = -\frac{qq'v_0v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{y}.\quad (3.19)$$

3.2.2. Ejemplo 2. Carga y Cilindro de Corriente

Considere un cilindro infinitamente largo con sección circular de radio a y su eje a lo largo del eje z . Una corriente constante I , se distribuye uniformemente por su sección transversal en dirección z positiva. Se encontrará la fuerza magnética que este cilindro ejerce sobre una carga puntual q que se mueve a velocidad constante en la dirección x positiva, $\vec{v} = v_0\hat{x}$.

En la Figura 3.2 se ilustra la situación

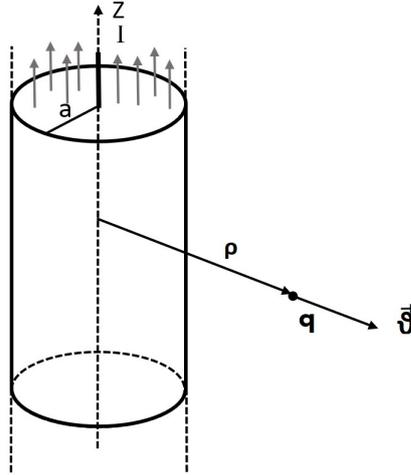


Figura 3.2: Carga puntual moviéndose en presencia de un cilindro de corriente infinitamente largo.

Ecuación Tradicional

Se calcula la fuerza usando la ecuación

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.20)$$

donde, el campo \vec{B} se puede determinar a través de la ley de Ampere. Para puntos fuera del cilindro, donde se mueve la carga q , se encuentra [1, 10],

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (\rho > a) \quad (3.21)$$

donde se usan las coordenadas cilíndricas ρ y ϕ . El cálculo detallado se muestra en el Apéndice B. De esta forma, reemplazando en (3.20), la fuerza que ejerce el cilindro de corriente sobre la carga q es

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= \frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{x} \times \hat{\phi} \\ &= \frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{x} \times (-\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}) \\ &= \frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \cos\phi \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde se usó la expresión del vector unitario cilíndrico $\hat{\phi}$ en términos de los vectores unitarios cartesianos \hat{x} y \hat{y} .

Ecuación Nueva

Ahora, se hace el cálculo usando

$$\vec{F}_M = \nabla(\vec{A} \cdot q\vec{v}) - \nabla \times (\vec{A} \times q\vec{v}) = q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}). \quad (3.23)$$

El potencial vectorial producido por el cilindro, para $\rho > a$, es [1],

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{z}, \quad (3.24)$$

donde ρ_0 es la posición en la que \vec{A} se anula. El cálculo detallado se muestra en el Apéndice B. Así,

$$\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{z} \cdot \hat{x} = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{v} &= \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{z} \times \hat{x} \\ &= \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{y} \\ &= \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) (\sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}) \\ &= \mathcal{G}_\rho \hat{\rho} + \mathcal{G}_\phi \hat{\phi} + \mathcal{G}_z \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde se escribió \hat{y} en términos de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$, y

$$\mathcal{G}_\rho = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \sin \phi, \quad \mathcal{G}_\phi = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \cos \phi, \quad \mathcal{G}_z = 0. \quad (3.27)$$

Entonces, expresando el rotacional en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{G}_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \mathcal{G}_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{G}_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \\ &= \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \cos \phi - \frac{1}{\rho} \cos \phi - \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \cos \phi \right\} \hat{z} \\ &= -\frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi \rho} \cos \phi \hat{z} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.25) y (3.27) en la ecuación nueva, (3.23),

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) \\ &= \frac{q v_0 \mu_0 I}{2\pi \rho} \cos \phi \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

La cual coincide, como es de esperar, con el resultado de la ecuación (3.22) obtenido usando la ecuación tradicional.

Como una modificación de este ejemplo, consideremos que la velocidad de la carga es $\vec{v} = v_0 \hat{z}$. En este caso, usando (3.21), la ecuación tradicional conduce a

$$\begin{aligned}\vec{F}_M &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= \frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{z} \times \hat{\phi} \\ &= -\frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\rho},\end{aligned}\tag{3.30}$$

donde se escribió $\hat{\rho}$ en términos de \hat{x} y \hat{y} .

Además, usando (3.24),

$$\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{v_0\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{z} \cdot \hat{z} = \frac{v_0\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right),\tag{3.31}$$

$$\vec{A} \times \vec{v} = \frac{v_0\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{z} \times \hat{z} = 0.\tag{3.32}$$

Entonces, expresando el gradiente en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) &= \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{v_0\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \\ &= -\frac{v_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\rho}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Por lo tanto, reemplazando (3.32) y (3.33) en la ecuación nueva, (3.23), obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F}_M &= q \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \nabla \times (\vec{A} \times \vec{v}) \\ &= -\frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\rho}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

La cual coincide con (3.30) y muestra que para este problema, según (3.1), se puede escoger como una posible función energía potencial a

$$U_M = -\vec{A} \cdot q\vec{v} = -\frac{qv_0\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right).\tag{3.35}$$

Capítulo 4

Conclusiones

En este Trabajo de Grado se logró reescribir una fuerza magnética en términos de dos cantidades: una componente conservativa y otra componente no conservativa. La componente conservativa se puede encontrar en términos de una función escalar que hace las veces de energía potencial.

Además, se muestra que ecuación encontrada es apropiada para resolver problemas de magnetostática. Se resalta que al aplicar la ecuación encontrada, la fuerza magnetostática se puede calcular de una manera relativamente más sencilla, evitando la realización de procedimientos largos que aparecen al usar la ecuación tradicional.

Apéndice A

Deducción de Algunas Expresiones del Ejemplo 1

A.1. Campo \vec{B} de una Carga Puntual Móvil

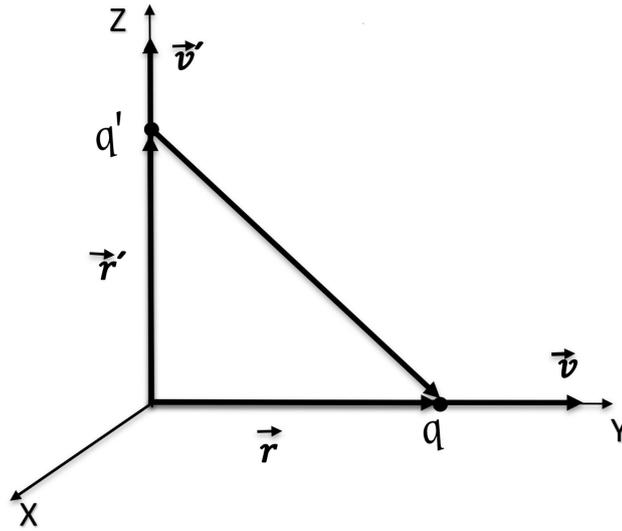


Figura A.1: Vectores de posición de las cargas puntuales del ejemplo 1.

Una carga puntual q , moviéndose a velocidad v constante, en presencia de otra carga puntual q' , moviéndose a velocidad v' constante, experimenta un campo magnético, \vec{B} , dada por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times \vec{R}}{R^3}. \quad (\text{A.1})$$

En este caso, $v = v_0 \hat{y}$, $v' = v'_0 \hat{z}$ y, siguiendo la figura A.1, los vectores de posición de la carga fuente, q' , y de la carga de campo, q , son, respectivamente,

$$\vec{r}' = z' \hat{z}, \quad \vec{r} = y \hat{y}, \quad (\text{A.2})$$

entonces, el vector de posición relativa de q con respecto a q' y su magnitud son, respectivamente,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = y \hat{y} - z' \hat{z}, \quad R = (y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.3})$$

Reemplazando (A.2) y (A.3) en (A.1), el campo \vec{B} producido por la carga q' estará dada por

$$\vec{B} = \frac{q'v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{z} \times (y\hat{y} - z'\hat{z})}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q'v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Potencial \vec{A} de una Carga Móvil

El potencial vectorial creado por una carga puntual q' en movimiento a velocidad \vec{v}' está dado por [1]

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'\vec{v}'}{R}. \quad (\text{A.5})$$

En nuestro caso, $v' = v'_0\hat{z}$ y usando (A.3), se obtiene

$$\vec{A} = \frac{q'v'_0\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(y^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{z}. \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B

Deducción de Algunas Expresiones del Ejemplo 2

B.1. Campo \vec{B} de un Cilindro de Corriente

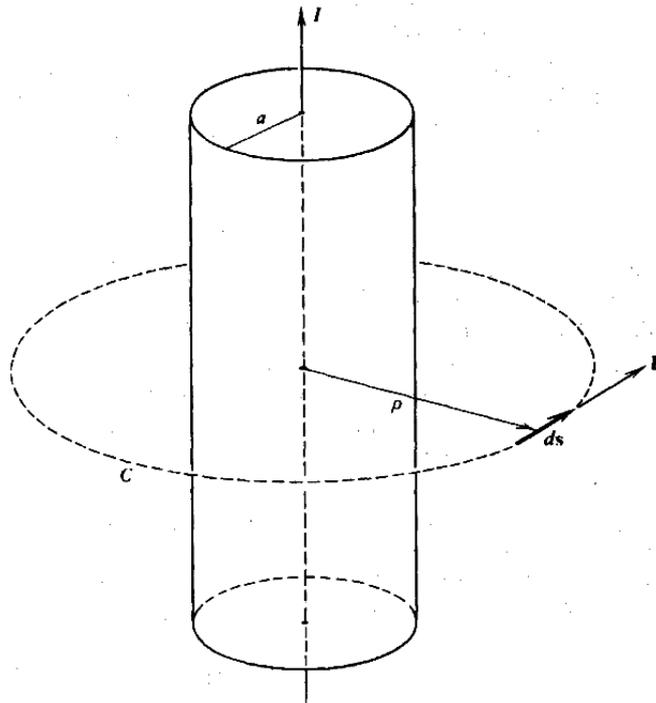


Figura B.1: Geometría de la distribución cilíndrica de corriente. Figura tomada de Wangsness [1].

Para calcular el campo \vec{B} se usará la ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}. \quad (\text{B.1})$$

La geometría de la distribución, mostrada en la Figura B.1, permite usar coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z . En este caso, usando un lazo Amperiano circular, tenemos

$$\vec{B}(\rho) = B\hat{\phi}, \quad B = \text{constante}, \quad d\vec{s} = ds\hat{\phi} = \rho d\phi\hat{\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (\text{B.2})$$

Así, el lado izquierdo de (B.1), para puntos fuera del cilindro, se convierte en

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (B\hat{\phi}) \cdot (\rho d\phi \hat{\phi}) = 2\pi B\rho, \quad \rho \geq a. \quad (\text{B.3})$$

Ademas, $I_{enc} = I$. Entonces la ley de Ampere conduce a

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 I_{enc} \\ 2\pi B\rho &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad (\rho > a). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Por tanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (\rho > a). \quad (\text{B.5})$$

B.2. Potencial \vec{A} de un Cilindro de Corriente

Debido a que para puntos fuera del cilindro, éste se comporta como una línea de corriente [1], calcularemos el potencial vectorial \vec{A} de una línea de corriente. La Figura B.2 muestra una representación esquemática de la situación.

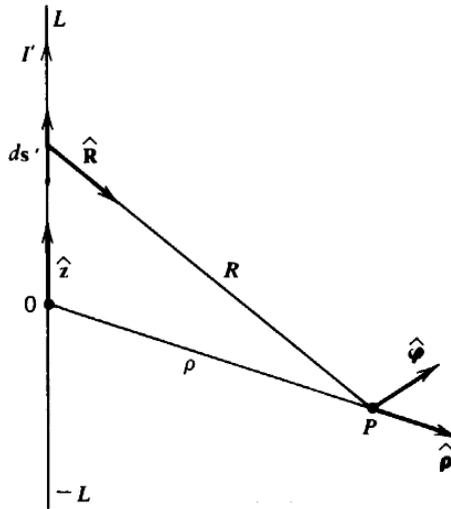


Figura B.2: Vectores de posición del elemento de corriente y de la carga puntual del ejemplo 2. Figura tomada y modificada de Wangsness [1].

El potencial vectorial se calcula con la expresión [1]

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I d\vec{s}'}{R} \quad (\text{B.6})$$

Usando coordenadas cilíndricas, los vectores de posición del elemento de corriente fuente y del punto de campo son, respectivamente,

$$\vec{r}' = z'\hat{z}, \quad \vec{r} = \rho\hat{\rho}. \quad (\text{B.7})$$

Entonces el vector de posición relativa, del punto de campo con respecto al elemento $Id\vec{s}$, y su magnitud son, respectivamente,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \rho\hat{\rho} - z'\hat{z}, \quad R = (\rho^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.8})$$

Además,

$$d\vec{s}' = dz'\hat{z}, \quad -\infty \leq z' < \infty. \quad (\text{B.9})$$

Por tanto, reemplazando (B.7)–(B.9) en (B.6), se obtiene

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} I\hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \infty. \quad (\text{B.10})$$

Se nota que la intergral de (B.10) diverge. Sin embargo, se puede realizar el cálculo considerando una línea de longitud finita y luego se pasa al límite cuando de la línea se vuelve infinita ($L \gg \rho$). En este caso, los límites de integración en (B.6) van de $-L$ a $+L$, o sea,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{Id\vec{s}'}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{z} \int_{-L}^L \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{z'}{(z'^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{z'}{(z'^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \Bigg|_{-L}^L \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \ln \left(\frac{1 + \frac{z'}{(z'^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{z'}{(z'^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) \Bigg|_{-L}^L \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1 + \frac{L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \frac{-L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{-L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) \right\} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \left\{ \ln \left(\frac{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) \right\} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \left\{ \ln \left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L} \right) - \ln \left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L} \right) \right\} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \ln \left(\frac{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}}{\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}} \right) \hat{z} \\
&= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \ln \left(\frac{\left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L} \right)^2}{\left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L} \right)^2} \right) \hat{z} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L} \right) \hat{z}. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando L es muy grande ($L \gg \rho$) en (B.11)

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \lim_{L \gg \rho} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L} \right) \hat{z} \\
&\cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{2L}{\frac{\rho^2}{2L}} \right) \hat{z} \\
&\cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{4L^2}{\rho^2} \right) \hat{z} \\
&\cong \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2L}{\rho} \right) \hat{z}. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Donde se usó el hecho de que, cuando $L \gg \rho$, el numerador del logaritmo que aparece en (B.11) se puede escribir como

$$(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + L \cong (L^2)^{\frac{1}{2}} + L \cong 2L, \tag{B.13}$$

y el denominador como

$$\begin{aligned}
(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - L &= L \left(1 + \frac{\rho^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} - L \\
&\cong L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{L^2} \right) - L \cong \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{L}. \tag{B.14}
\end{aligned}$$

En general, podemos escribir el potencial vectorial \vec{A} , de la ecuación (B.12), como

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \hat{z}, \tag{B.15}$$

donde ρ_0 se escoge de tal manera que $\vec{A}(\rho_0) = 0$.

Así, finalmente, el potencial vectorial creado por el cilindro (para $\rho \geq a$) es

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \hat{z}, \quad (\rho \geq a) \tag{B.16}$$

Bibliografía

- [1] R. K. Wangsness. Campos Electromagnéticos. Limusa S.A, 2^{da} edición, 2006.
- [2] Fiscalandia. Fiscalandia es el mundo en el que vives, si te detienes a mirarlo. <https://fisicalandia.com/fisica-clasica/electromagnetismo-2-magnetostatica/>. Accessed on 11-03-2022.
- [3] A. Sepulveda Soto. Electromagnetismo. Editorial Universidad de Antioquia, 2^{da} edición, 2020.
- [4] J. Costa Quintana and F. López Aguilar. Interacción Electromagnética: Teoría Clásica. Reverté, 1^{ra} edición, 2012.
- [5] R. Serway. Electricidad y magnetismo. Cengage Learning, 9^{na} edición, 2014.
- [6] J. Vanderlinde. Classical Electromagnetic Theory. Kluwer Academic, 2nd edition, 2006.
- [7] M. Heald and J. Marion. Classical Electromagnetic Radiation. Dover Publications, 3rd edition, 2013.
- [8] J. Jackson. Classical Electromagnetic Theory. John Wiley & Sons, 3rd edition, 1998.
- [9] J. Franklin. Classical Electromagnetism. Pearson/Addison-Wesley, 2nd edition, 2017.
- [10] D. J.Griffiths. Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press, 4th edition, 2017.
- [11] M. Sadiku. Elementos de Electromagnetismo. Oxford, 3^{ra} edición, 2003.
- [12] E. Purcell. Electricidad y Magnetismo (Vol. 2), Berkeley Physics Course. Reverté, 2^{da} edición, 2010.
- [13] D. Bromley. Classical Electrodynamics. Springer, 1st edition, 1998.
- [14] W. Smythe. Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill, 3rd edition, 1968.