



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 18 de Octubre 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Gloria Stefany Ramirez Trujillo con C.C. No. 1.083.840.909.

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o Gloria Stefany Ramirez Trujillo titulado "Utilización del Método de la fuerza efectiva Para describir la Interacción eléctricamente entre dos partículas cargadas sometidas a un potencial de Coulomb" presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de

Físico;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

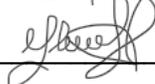


CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 2
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:  _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: "UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE LA FUERZA EFECTIVA PARA DESCRIBIR LA INTERACCIÓN ELÉCTRICAMENTE ENTRE DOS PARTÍCULAS CARGADAS SOMETIDAS A UN POTENCIAL DE COULOMB"

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ramirez Trujillo	Gloria Stefany

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gonzáles Sierra	Hernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: FISICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS

PROGRAMA O POSGRADO: FÍSICA

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2023

NÚMERO DE PÁGINAS: 37

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



Diagramas X Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros___

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Word y Pdf

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Método	Method	6. Cargadas	Charged
2. Fuerza	Force	7. Potencial	Potential
3. Efectiva	Effective		
4. Describir	Describe		
5. Partículas	Particles		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Se elaboró una descripción cualitativa y alternativa sobre la dinámica de un sistema conformado por dos partículas cargadas eléctricamente sometidas a un potencial de Coulomb, para esto se realiza un análisis de las características del movimiento de las partículas aplicando la técnica de reducción a un solo cuerpo, se estudian las leyes de conservación que existen en la dinámica de cuerpos sometidos a potenciales centrales. El análisis se realiza aplicando el método de la fuerza efectiva la cual se considera que deriva de un potencial ficticio, esta es una alternativa a la implementación del método del potencial unidimensional equivalente. Se implementa el procedimiento de la fuerza efectiva para analizar las características cualitativas del movimiento del sistema bajo ciertas condiciones de energía y se realizan las respectivas curvas de fuerza real y efectiva.



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

A qualitative and alternative description of the dynamics of a system made up of two electrically charged particles subjected to a Coulomb potential was developed. For this, an analysis of the characteristics of the movement of the particles was carried out by applying the reduction technique to a single body. The conservation laws that exist in the dynamics of bodies subjected to central potentials are studied. The analysis is carried out by applying the effective force method which is considered to be derived from a fictitious potential; this is an alternative to the implementation of the equivalent one-dimensional potential method. The effective force procedure is implemented to analyze the qualitative characteristics of the system's movement under certain energy conditions and the respective real and effective force curves are made.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: FRANCIS ARMANDO SEGOVIA CHAVES

Firma:

Nombre Jurado: FRANCIS ARMANDO SEGOVIA CHAVES

Firma:

Nombre Jurado: PEDRO MARIOS CAÑATE CASSERES

Firma:

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



**Utilización del Método de la Fuerza Efectiva Para
Describir la Interacción Eléctrica Entre Dos
Partículas Cargadas Sometidas a un Potencial**

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Desarrollado por:

Gloria Stefany Ramirez Trujillo

Código: 20151135431

Firma:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Gloria Ramirez Trujillo'.

Director: Dr. Hernando Gonzales Sierra

Firma:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Hernando Gonzales Sierra'. Below the signature, there is a small, faint watermark that reads 'Escaneado con CamScanner'.

Área: Física Teórica

Neiva-Huila
11 de julio de 2023

DEDICATORIA

Dedicó este Trabajo de Grado a Dios, por haberme dado la vida y el permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional, a mi querida y maravillosa madre Gloria Esperanza Trujillo que amo con todo mi corazón, gracias por brindarme su apoyo y esfuerzo incondicional, siempre serás mi motivo para seguir avanzando. También dedicó a mi Tia Mariela Trujillo, que me brindo su compañía y amor cuando yo más lo necesité.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Universidad Surcolombiana por haberme aceptado y ser parte de ella, por haberme formado con excelente educación y conocimiento que me brindaron día a día los diferentes docentes de la facultad de Ciencias Exactas. También, agradezco a mi asesor Hernando Gonzales Sierra por haberme brindado sus conocimientos científicos y su gran apoyo, así como también haberme tenido toda la paciencia para guiarme durante el desarrollo de mi Trabajo de Grado.

RESUMEN

En el presente trabajo de grado, se realiza una descripción cualitativa y alternativa sobre la dinámica de un sistema conformado por dos partículas cargadas eléctricamente sometidas a un potencial de Coulomb, para esto se realiza un análisis de las características del movimiento de las partículas aplicando la técnica de reducción a un solo cuerpo, se estudian las leyes de conservación que existen en la dinámica de cuerpos sometidos a potenciales centrales. El análisis se realiza aplicando el método de la fuerza efectiva la cual se considera que deriva de un potencial ficticio, esta es una alternativa a la implementación del método del potencial unidimensional equivalente. Se implementa el procedimiento de la fuerza efectiva para analizar las características cualitativas del movimiento del sistema bajo ciertas condiciones de energía y se realizan las respectivas curvas de fuerza real y efectiva.

Índice General

1. INTRODUCCIÓN	1
2. OBJETIVOS	3
2.0.1. Objetivo General	3
2.0.2. Objetivos Específicos	3
3. JUSTIFICACIÓN	4
4. MÉTODOS TEÓRICOS DE SOLUCIÓN	5
4.1. Mecánica Newtoniana	5
4.1.1. Las leyes de Newton	5
4.1.2. Ecuación de movimiento de un cuerpo	7
4.1.3. Leyes de conservación	9
4.2. Formulación de Lagrange	11
4.3. Fuerza central	14
4.3.1. Conservación del momento angular	14
4.3.2. El potencial efectivo	15
4.3.3. Estudio Cualitativo del movimiento bajo fuerzas centrales	17
4.4. Ley de Coulomb	18
5. RESULTADOS	22
6. CONCLUSIONES	29

Índice de Figuras

4.1. Curva del potencial.	10
4.2. Curva del potencial.	17
4.3. Curva del potencial.	18
5.1. Curva de la fuerza efectiva para una fuerza de atracción de Coulomb. . .	23
5.2. Diagrama de fuerzas efectiva, real y ficticia para un potencial de Coulomb.	24
5.3. Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{ef} = F_2 < 0$	25
5.4. Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{ef} = F_3 > 0$	26
5.5. Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{efmin} = F_4$	27

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La dinámica de los cuerpos en movimiento es un fascinante campo de estudio que nos permite comprender como interactúan los objetos con su entorno y como se ven afectados por las fuerzas que actúan sobre ellos, desde el majestuoso vuelo de un pájaro en el cielo hasta el movimiento de partículas que interactúan a través de fuerzas, el movimiento de los cuerpos obedece a principios fundamentales que rigen nuestro universo. En la búsqueda por desarrollar los secretos del movimiento, los científicos han formulado leyes físicas que describen con precisión como los cuerpos en movimiento se comportan. Algunas, establecidas por el científico Isaac Newton, han sido fundamentales en el desarrollo de la mecánica y nos han proporcionado una base sólida para comprender y predecir el comportamiento de los objetos en movimiento.

La primera ley de Newton, conocida como la ley de la inercia, nos revela que un cuerpo en movimiento tiende a mantener su estado de movimiento a menos que una fuerza externa actúe sobre ella, esta ley nos permite comprender por qué un objeto en reposo permanece en reposo y porque un objeto en movimiento continúa moviéndose a menos que algo lo detenga. La segunda ley de Newton, quizás la más conocida, establece que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre ella e inversamente proporcional a su masa, esta ley nos muestra cómo las fuerzas que actúan sobre un objeto influyen en su velocidad y dirección y nos permite comprender como un automóvil acelera cuando se pisa el acelerador o cómo una pelota cambia su trayectoria cuando es golpeada. La tercera ley de Newton nos enseña que por cada acción hay una reacción de igual magnitud y dirección, pero en sentido contrario, esto significa que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejercerá una fuerza de igual intensidad pero en dirección opuesta. Esta ley es clave para entender como interactúan los objetos entre sí y cómo se producen fenómenos como el impulso y las colisiones.

En la literatura, existen diferentes técnicas que permite describir y analizar la dinámica de ciertos sistemas físicos, esto permite una mayor comprensión de muchos sistemas. Un sistema bastante implementado en física es el del potencial central, este sistema puede ser descrito por varios métodos, uno de estos es el de la fuerza efectiva. El método de la fuerza efectiva es implementado por el contexto de la Mecánica Clásica [1], y difiere del método del potencial unidimensional equivalente en que, en lugar de emplear el potencial ficticio se usa una fuerza ficticia. Esta fuerza ficticia se ha utilizado para describir

la interacción gravitacional del movimiento de dos cuerpos bajo el efecto de una fuerza central y relacionado con el movimiento de los planetas alrededor del sol, aplicado para el caso específico del problema de Kepler en 2009 [2]. La dinámica de dos partículas bajo efecto de una fuerza central se simplifica por su reducción al problema equivalente de un solo cuerpo en un potencial; por lo tanto, muchos problemas de dos cuerpos se reducen al problema de una partícula [3], este resultado ya era conocido por el físico Isaac Newton en 1687, sin embargo, el tratamiento general de n masas que se desplazan en un potencial generado por estas mismas era una relación muy compleja [4]. De hecho, es conocido que la solución al problema del movimiento de tres partículas bajo el efecto de una fuerza central no ha sido resuelto de manera exacta. Aunque, algunas soluciones si han sido encontradas en el caso de condiciones iniciales muy especiales, por ejemplo, en 1772 el matemático y físico francés Joseph Lagrange demostró que tres masas pueden mostrar una configuración orbital estable bajo ciertas condiciones [5]. La reducción del problema del movimiento de dos cuerpos a un problema de un solo cuerpo se relaciona a una masa reducida μ sometida a una fuerza central, esto hace referencia a las posibles trayectorias que sigue las partículas de masa reducida μ y que se observan como secciones cónicas [6]. El método de la fuerza ficticia es un símil del método del potencial unidimensional equivalente [7] y la definición de símil está caracterizada por las correspondencias de comparación entre los distintos elementos que se encuentran ubicados dentro del mismo campo del conocimiento [8] por lo tanto, la estructuración símil hace referencia a dos principios, totalmente distintos, pero que permiten obtener un mismo resultado; un claro ejemplo descubierto por el astrónomo y matemático holandés Willebrord Snell Van Royen en 1621 y denominada la Ley de Snell [9]. Para obtener una solución al problema de la fuerza ficticia, es necesario estudiar la dinámica a partir de la interacción eléctrica entre dos partículas cargadas, y de esta forma obtener una aproximación clásica para describir de manera cualitativa el comportamiento de las partículas bajo la interacción de Coulomb, así mismo es importante tener en cuenta las formulaciones de Newton, Lagrange y Hamilton, de manera que pueden ser usadas para obtener la dinámica del problema de fuerzas centrales entre dos cuerpos [10].

El procedimiento de la fuerza ficticia consiste en analizar la solución gráfica de la fuerza efectiva en las distintas regiones de interés físico. De igual forma, describir adecuadamente el comportamiento de la fuerza real $f(r)$ para valores pequeños y valores grandes de r ; así mismo, estudiar la continuidad y los posibles máximos y mínimos de la función [11]. Por lo tanto, se deben usar los resultados obtenidos en los estudios de la interacción eléctrica entre dos partículas cargadas empleando la mecánica clásica. El método del potencial unidimensional es una herramienta de análisis que permite estudiar las características cualitativas del movimiento de dos cuerpos bajo la acción de fuerzas centrales, representado por un símil y denominado “Método de la fuerza ficticia”. La fuerza ficticia hace posible la descripción de un sistema físico usando, por ejemplo, un sistema de referencia uniformemente acelerado o un sistema de referencia fijo a un cuerpo que rota uniforme. El movimiento de un sistema físico constituido por dos cuerpos que interactúan por medio de una fuerza dirigida en la dirección de la recta que une los dos centros, considerando que el problema de Kepler hace referencia a la solución completa del movimiento de un planeta bajo el efecto de una fuerza gravitacional ejercida por el sol, por consiguiente, sería una fuerza central [12].

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.0.1. Objetivo General

- Elaborar una descripción a partir del método de la fuerza ficticia del comportamiento dinámico de dos partículas cargadas bajo el efecto de la interacción de Coulomb.

2.0.2. Objetivos Específicos

- Describir el procedimiento de la fuerza efectiva para estudiar el problema de fuerzas centrales entre dos cuerpos.
- Usar la interacción de Coulomb para describir el problema de fuerzas centrales para el caso de dos partículas cargadas.
- Resolver el movimiento de dos partículas cargadas bajo la acción de fuerzas centrales usando el método de la fuerza ficticia.

Capítulo 3

JUSTIFICACIÓN

Es posible usar el método de la fuerza ficticia para describir cualitativamente el comportamiento y la interacción de dos partículas cargadas. Se compara los resultados proporcionados por este símil del método con los del potencial unidimensional equivalente, es posible usar, en esta aproximación, la Ley de Coulomb, para estudiar las relaciones que existen entre las interacciones de dos partículas cargadas eléctricamente bajo estas condiciones.

El método del potencial unidimensional equivalente logra proporcionar resultados para el estudio de la interacción entre dos partículas cargadas y sometidas a un potencial ficticio. En este trabajo de grado se consiguió que el método de la fuerza ficticia también proporciona resultados adecuados para el comportamiento de dos partículas cargadas eléctricamente bajo el efecto de la interacción de Coulomb.

Capítulo 4

MÉTODOS TEÓRICOS DE SOLUCIÓN

La Mecánica Newtoniana, también conocida como Mecánica Clásica, es un conjunto de leyes y principios formulados por Sir Isaac Newton en el siglo XVII, que sentaron las bases para el estudio del movimiento de los cuerpos y su interacción con las fuerzas. En el corazón de la Mecánica Newtoniana se encuentra la famosa Ley de la Gravitación Universal, que establece que dos objetos se atraen mutuamente con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Esta ley nos permite comprender cómo los planetas orbitan alrededor del sol, cómo la luna influye en las mareas y cómo los objetos caen hacia la Tierra. La mecánica formulada por Newton describe de buena manera el movimiento de uno o varios cuerpos en distintas situaciones, está fundamentada en tres leyes y como consecuencia de estas leyes existen algunas leyes de conservación de energía y movimiento.

4.1. Mecánica Newtoniana

La ciencia de la mecánica proporciona una descripción precisa y consistente de la dinámica de partículas o sistemas de partículas, es decir, que un conjunto de leyes físicas describen matemáticamente el movimiento de las partículas, hoy para que estas leyes tengan sentido es necesario introducir conceptos fundamentales los cuales intervienen en el movimiento de los cuerpos, conceptos como la distancia el tiempo y la velocidad son fundamentales para construir una formulación matemática que pueda describir con precisión la dinámica de los cuerpos.

4.1.1. Las leyes de Newton

Las leyes de Newton, también conocidas como las leyes del movimiento, son tres principios fundamentales formulados por Sir Isaac Newton en el siglo XVII, estas leyes son la base de la mecánica newtoniana y describen el comportamiento de los cuerpos en movimiento y la interacción entre las fuerzas que actúan sobre ellos.

Primera ley

La primera ley es conocida como la ley de inercia, esta ley establece que un objeto en reposo permanecerá en reposo y un objeto en movimiento continuará en movimiento rectilíneo y a velocidad constante, a menos que una fuerza externa actúe sobre él, en otras palabras, un objeto tiende a mantener su estado de movimiento (o de reposo) debido a su inercia. La inercia es la propiedad de los objetos de resistirse a cambios en su estado de movimiento.

Segunda ley

Esta ley establece que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, o también establece que la cantidad de movimiento de un cuerpo permanecerán constante a menos que una fuerza actúe sobre él, matemáticamente se expresa de la forma:

$$\mathbf{F} = ma = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} , \quad (4.1)$$

donde m es la masa del cuerpo, a es la aceleración que experimenta el cuerpo, \mathbf{F} es la fuerza ejercida sobre el cuerpo, \mathbf{p} es la cantidad de movimiento del cuerpo y v es la velocidad.

Tercera ley

Esta ley establece que por cada acción hay una reacción de igual magnitud y dirección, pero en sentido contrario. Es decir, si un objeto de masa m_1 ejerce una fuerza sobre un objeto de masa m_2 , el objeto m_2 ejercerá una fuerza de igual magnitud, pero en dirección opuesta sobre el objeto m_1 . Esto significa que las fuerzas siempre actúan en pares y nunca pueden existir aisladas, matemáticamente se expresa:

$$F_1 = -F_2 , \quad (4.2)$$

haciendo uso de la definición de fuerza dada por la segunda ley tenemos:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} , \quad (4.3)$$

considerando las masas constantes se tiene:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} , \quad (4.4)$$

de donde se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{a_1}{a_2} , \quad (4.5)$$

de manera equivalente, la tercera ley postula esencialmente que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado se conserva, es decir, es independiente del tiempo y es una constante del movimiento. Para ver esto, considere dos partículas cuya cantidad de movimiento interactúan de la forma:

$$\frac{d\mathbf{p}_{total}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \leftrightarrow \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 : \text{constante} . \quad (4.6)$$

4.1.2. Ecuación de movimiento de un cuerpo

La ecuación de fuerza de Newton, considerando que no existe variación en la masa del cuerpo, puede expresarse mediante una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\mathbf{F}(r, v, t) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2} . \quad (4.7)$$

La función $F(r, v, t)$ puede ser cualquier combinación que involucre la distancia r , la velocidad v y el tiempo t , o simplemente puede ser una función de una sola variable, ya sea del tiempo, la velocidad o la posición. La ecuación (4.7) es denominada la ecuación movimiento de un cuerpo de masa m , esta ecuación puede presentarse de distintas formas, como se mencionó anteriormente, entonces, para cada situación se debe tener en cuenta algunas técnicas matemáticas para dar solución a la ecuación de movimiento. A continuación se presentan tres casos específicos y muy comunes en problemas en física:

$$a) F = F(t)$$

Para este caso tenemos la ecuación de movimiento de la forma:

$$F(t) = m \frac{d^2 r}{dt^2} , \quad (4.8)$$

integrando ambos lados de la ecuación con respecto a dt y usando la relación de velocidad $\frac{dr}{dt} = v$ tenemos:

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t F(t') dt' , \quad (4.9)$$

o usamos la relación velocidad para calcular directamente $r(t)$:

$$\int_{r_0}^{r(t)} dr' = \int_{t_0}^t dt' . \quad (4.10)$$

b) $F = F(r)$

Para este caso, aplicaremos la regla de la cadena en la expresión de aceleración de la forma:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dr} = v \frac{dv}{dr} , \quad (4.11)$$

expresando la segunda ley de Newton en función de la ecuación (4.11) se obtiene:

$$mv \frac{dv}{dr} = F(r) , \quad (4.12)$$

integrando a ambos lados de la ecuación (4.12) con respecto a dx :

$$m \int_{v_0}^{v(x)} v' dv' = \int_{r_0}^r F(r') dr' , \quad (4.13)$$

de la ecuación (4.13) podemos calcular $v(r)$.

c) $F = F(v)$

Para este caso tenemos:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) , \quad (4.14)$$

separando variables e integrando:

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt' , \quad (4.15)$$

suponiendo que la integral puede resolverse, podemos usar la relación de velocidad para calcular $r(t)$:

$$\int_{r_0}^{r(t)} dr' = \int_{t_0}^t dt' , \quad (4.16)$$

de igual forma, si se quiere encontrar v en función de r :

$$m \int_{v_0}^{v(r)} \frac{v' dv'}{F(v')} = \int_{r_0}^r dr' . \quad (4.17)$$

Los procedimientos anteriores, son algunos de los casos más comunes que pueden aparecer en problemas convencionales de dinámica newtoniana, hay que tener en cuenta que para resolver una ecuación de movimientos, es necesario tener en cuenta algunas leyes de conservación.

4.1.3. Leyes de conservación

Además de las leyes de Newton, en la dinámica Newtoniana también existen las leyes de conservación, que son principios fundamentales que describen la conservación de ciertas magnitudes físicas durante el movimiento de los objetos. Estas leyes son importantes para comprender y predecir el comportamiento de los sistemas físicos, en general, en física cuando decimos que una cantidad se conserva, quiere decir que no cambia con el tiempo.

Conservación de la energía

Esta ley establece que la energía total de un sistema aislado se conserva a lo largo del tiempo, en otras palabras, la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma de una forma a otra, la energía puede existir en diferentes formas, como energía cinética (debida al movimiento de un objeto) y energía potencial (debida a la posición de un objeto en un campo de fuerza, como por ejemplo la gravedad). Para dar una explicación simple, consideraremos una fuerza que solo actúa en una dirección de la forma:

$$F(x) = mv \frac{dv}{dx} , \quad (4.18)$$

podemos separar variables e integrar desde un punto x_0 hasta un punto x , donde se obtiene la expresión:

$$\int_{x_0}^x F(x') dx' = \int_{v_0}^v mv' dv' \Rightarrow \int_{x_0}^x F(x') dx' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 , \quad (4.19)$$

donde se establece la energía total del sistema E de la forma:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \int_{x_0}^x F(x') dx' , \quad (4.20)$$

definimos el primer término aquí como la energía cinética, teniendo en cuenta que la energía total del sistema es la suma de la energía cinética y la energía potencial, definimos el potencial:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' , \quad (4.21)$$

dado que esta ecuación es cierta en todos los puntos del movimiento de la partícula, la suma de la energía cinética y la energía potencial es constante, en otras palabras, la energía total se conserva, si una partícula pierde (o gana) energía potencial, su velocidad aumenta (o disminuye). Si tomamos la diferencia entre las energías cinéticas en los puntos x_1 y x_2 entonces obtenemos el teorema del trabajo:

$$\frac{1}{2}mv^2(x_1) - \frac{1}{2}mv^2(x_2) = V(x_2) - V(x_1) \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(x') dx' \equiv Trabajo_{x_1 \Rightarrow x_2} . \quad (4.22)$$

El cambio de energía cinética entre los puntos x_1 y x_2 es igual al trabajo realizado sobre la partícula entre x_1 y x_2 , si la fuerza actúan en la misma dirección del movimiento, entonces la velocidad de la partícula aumentara, de lo contrario disminuirá.

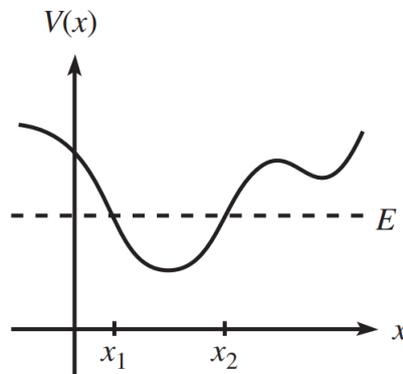


Figura 4.1: Curva del potencial.

La figura (4.1) muestra una ilustración de la curva de $V(x)$ y de E constante, los lugares donde $V(x) > E$ es la región donde la partícula no se puede situar, donde $V(x) = E$ son denominados puntos de inflexión, es donde la partícula se detiene e invierte la dirección de movimiento, para el caso de la figura (4.1) la partícula se encuentra atrapada dentro de la región entre x_1 y x_2 .

Conservación del momento lineal

El momento lineal, también conocido como cantidad de movimiento, es el producto de la masa de un objeto por su velocidad, la ley de conservación del momento establece que, en un sistema aislado, la suma total del momento lineal se conserva antes y después de

cualquier interacción o colisión entre objetos, esto significa que, si no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, la cantidad total de movimiento antes y después de la colisión será la misma, por ejemplo, si dos objetos colisionan, la suma de sus momentos lineales antes de la colisión será igual a la suma de sus momentos lineales después de la colisión.

Supongamos que tenemos un sistema aislado compuesto por dos objetos con masas m_a y m_b , que interactúan entre sí, el momento lineal de un objeto se define como el producto de su masa m por su velocidad v , entonces, el momento lineal de un objeto se representa como $p = mv$, antes de la interacción entre las masas, cada una tiene un momento lineal de tal forma que el momento lineal total inicialmente es de la forma:

$$P_{inicial} = P_{a0} + P_{b0} \text{ ,} \quad (4.23)$$

después de la interacción, la cantidad de movimiento de los cuerpos cambiarán, donde denotaremos la cantidad de movimiento lineal final:

$$P_{final} = P_{af} + P_{bf} \text{ ,} \quad (4.24)$$

el momento lineal del sistema será una constante del movimiento de tal forma que el valor total de momento será igual antes y después de la interacción:

$$P_{inicial} = P_{final} \text{ .} \quad (4.25)$$

Esta ecuación de conservación del momento lineal es válida solo en sistemas aislados, es decir, cuando no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. Si existen fuerzas externas, como la fricción o la acción de una fuerza externa, entonces la conservación del momento lineal no se cumple.

4.2. Formulación de Lagrange

La formulación de Lagrange, también conocida como la formulación de la mecánica lagrangiana, es un enfoque alternativo para describir el movimiento de sistemas físicos en la mecánica clásica, fue desarrollada por el matemático y físico italiano Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII y proporciona una forma más elegante y generalizada de abordar problemas de la mecánica clásica en comparación con el enfoque newtoniano tradicional.

En esta formulación, el sistema se describe mediante una función denominada el lagrangiano, esta función está dada por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de la forma:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - V \text{ ,} \quad (4.26)$$

donde q_i y \dot{q}_i son las coordenadas generalizadas de posición y velocidad respectivamente. El enfoque de Lagrange se basa en el principio de mínima acción, también conocido como principio de mínima acción de Hamilton, este principio establece que el camino real seguido por una partícula entre dos puntos en el espacio y el tiempo es aquel para el cual la acción es mínima, la acción se define como la integral del Lagrangiano a lo largo del tiempo:

$$\delta \int_{t_0}^t L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0 \quad , \quad (4.27)$$

al variar la acción con respecto a las coordenadas generalizadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange, estas ecuaciones establecen que la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a una coordenada generalizada es igual a la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a la velocidad generalizada, multiplicada por la derivada temporal de la velocidad generalizada:

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange permiten obtener las ecuaciones de movimiento del sistema sin la necesidad de aplicar las leyes de Newton directamente, además, la formulación de Lagrange es especialmente útil para tratar sistemas con restricciones y simetrías, ya que permite incorporar estas condiciones en la función Lagrangiano y obtener ecuaciones de movimiento más generales. La formulación de Lagrange es ampliamente utilizada en la física teórica y se aplica a una variedad de sistemas físicos, desde partículas individuales hasta sistemas complejos con múltiples grados de libertad, proporciona una forma más generalizada y elegante de describir el movimiento. Para establecer las leyes de conservación, consideramos que el tiempo es homogéneo por tratarse de un marco de referencia inercial, por lo tanto, el lagrangiano en un sistema cerrado, puede no depender explícitamente del tiempo, la derivada total de lagrangiano es:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad , \quad (4.29)$$

reemplazando la ecuación (4.28) en la ecuación (4.29) tenemos:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad , \quad (4.30)$$

$$\frac{dL}{dt} - \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad , \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left[L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = 0 \quad , \quad (4.32)$$

donde la cantidad en paréntesis es una constante, esta es denominada una constante del movimiento asociada a la conservación de la energía:

$$L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -H = \text{constante} , \quad (4.33)$$

el cambio en L producido por un desplazamiento infinitesimal $\delta r = \sum_i \delta x_i e_i$ es:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 , \quad (4.34)$$

pero δx_i no es función explícitamente del tiempo, por tanto:

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{d\dot{x}_i}{dt} \equiv 0 , \quad (4.35)$$

como cada uno de los desplazamiento δx_i es independiente, δL se anula si cada una de sus derivadas parciales se anula:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 , \quad (4.36)$$

teniendo en cuenta (4.36), de la ecuación (4.28) tenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 , \quad (4.37)$$

lo que da como consecuencia:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{constante} , \quad (4.38)$$

de donde se establece la conservación del momento lineal:

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 \right) , \quad (4.39)$$

$$m\dot{x}_i = \mathbf{p}_i = \text{constante} . \quad (4.40)$$

4.3. Fuerza central

Las fuerzas centrales son un concepto fundamental en la física que juega un papel crucial en el estudio del movimiento de los cuerpos, estas fuerzas, como su nombre indica, actúan siempre hacia el centro de una trayectoria curvilínea y su magnitud depende únicamente de la distancia entre los objetos interactuantes. El estudio de las fuerzas centrales es fundamental en la mecánica clásica y en otras ramas de la física, ya que permite comprender y predecir el movimiento de los objetos bajo la influencia de estas fuerzas, en particular, el análisis de las fuerzas centrales permite determinar las órbitas de los planetas, calcular la trayectoria de partículas cargadas en campos eléctricos o magnéticos, y comprender la dinámica de sistemas físicos complejos, podemos decir que una fuerza central es aquella cuyo potencial depende solo en la distancia a la fuente, entonces, matemáticamente la fuerza central se relaciona con dicho potencial de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}} . \quad (4.41)$$

Tratar matemáticamente las fuerzas centrales no es muy complicado, ya que regularmente se realizan simplificaciones circulares en las ecuaciones de movimiento cuando el potencial depende únicamente de la posición.

4.3.1. Conservación del momento angular

El momento angular juega un papel importante en la dinámica de los cuerpos bajo efecto de fuerzas centrales, ya que el momento angular en estos sistemas es una constante del movimiento, entonces, para una masa puntual, definimos el momento angular:

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} , \quad (4.42)$$

donde \mathbf{r} y \mathbf{p} son las coordenadas de posición y momento lineal respectivamente, el momento angular posee algunas propiedades interesantes, si una partícula está sometida a una fuerza central, entonces el momento angular se conserva, esto es:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) , \quad (4.43)$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (4.44)$$

$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times F = 0 . \quad (4.45)$$

Cabe recordar que cuando un cuerpo está sometido a un potencial central, su movimiento tiene lugar sobre un plano.

4.3.2. El potencial efectivo

En el contexto de las fuerzas centrales, el potencial efectivo es una herramienta matemática utilizada para describir el comportamiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza central. El potencial efectivo combina el efecto de la fuerza central con otros términos, como la energía cinética, para proporcionar una descripción más conveniente y útil del sistema. El potencial efectivo se define como la suma del potencial asociado a la fuerza central y el término de energía cinética efectiva, el potencial asociado a la fuerza central depende de la naturaleza específica de la interacción, como la fuerza gravitatoria o la fuerza electrostática, y generalmente tiene la forma de una función radial, es decir, depende únicamente de la distancia entre los objetos interactuantes. El término de energía cinética efectiva tiene en cuenta la energía cinética de la partícula en movimiento, pero se modifica para tener en cuenta la fuerza central, esto se logra mediante la introducción de un término adicional que depende del momento angular de la partícula, entonces, el lagrangiano de una masa sometida a un potencial central está dado:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) , \quad (4.46)$$

aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para determinar las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} = 0 , \quad (4.47)$$

tenemos las ecuaciones de movimiento para r y θ de la forma:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - f(r) , \quad (4.48)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 , \quad (4.49)$$

en la formulación lagrangiana, la conservación del momento angular deriva de que la coordenada θ es cíclica, entonces, denotamos la conservación del momento angular como:

$$\ell = mr^2\dot{\theta} = \text{constante} , \quad (4.50)$$

usando la relación $\dot{\theta} = \ell/mr^2$ podemos eliminar la variable cíclica de la ecuación (4.49) quedando únicamente dependiendo de la posición de la forma:

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - f(r) , \quad (4.51)$$

integrando respecto al tiempo tenemos la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \right) , \quad (4.52)$$

se define entonces el potencial efectivo $V_{ef}(r)$ y la fuerza efectiva $F_{ef}(r)$ de la forma:

$$V_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) , \quad (4.53)$$

$$F_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{mr^3} - f(r) . \quad (4.54)$$

El término del potencial efectivo es de gran utilidad, ya que podemos simplificar el problema a una sola coordenada radial, si queremos resolver un problema de dos dimensiones (que podría haber venido de un problema tridimensional) que involucra una fuerza central, entonces podemos reformular el problema en un problema unidimensional simple con un potencial ligeramente modificado, Podemos olvidar que alguna vez tuvimos la variable θ y podemos resolver este problema unidimensional para obtener $r(t)$. Ahora, para resolver las ecuaciones de movimiento (4.48) y (4.49) debemos las constantes del movimiento, que son el momento angular y la energía:

$$\ell = mr^2\dot{\theta} , \quad (4.55)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) , \quad (4.56)$$

despejando \dot{r} de la ecuación (4.56) podemos encontrar $r(t)$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r) \right)} , \quad (4.57)$$

$$\int \frac{dr'}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt' . \quad (4.58)$$

4.3.3. Estudio Cualitativo del movimiento bajo fuerzas centrales

Como hemos visto, es posible reducir el problema de una partícula sometida a un potencial central a una sola dimensión, en un potencial de la forma:

$$V_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) , \quad (4.59)$$

para diferentes valores de E , la ley de conservación de la energía restringe el movimiento en el potencial efectivo V_{ef} de modo que tenemos la siguiente expresión para la velocidad radial:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef})} , \quad (4.60)$$

por lo tanto, la partícula solo puede moverse en la región donde $E \geq V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$.

Por ejemplo, consideremos partículas con distintas energías que se mueven sobre un potencial atractivo $V(r)$ que da lugar al potencial efectivo $U(r)$, por conveniencia, hemos elegido que el potencial vale cero en el infinito.

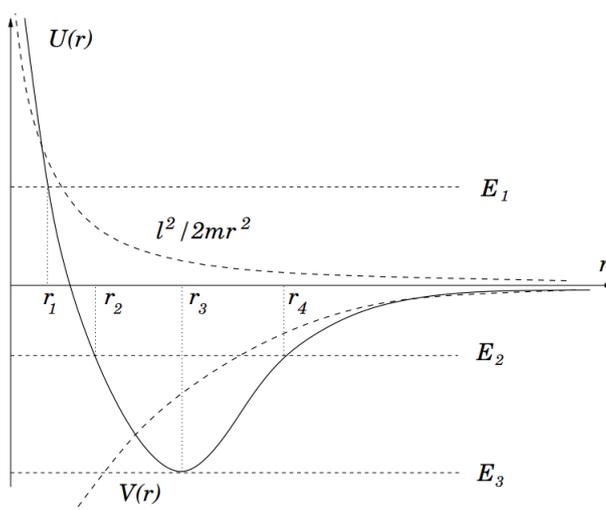


Figura 4.2: Curva del potencial.

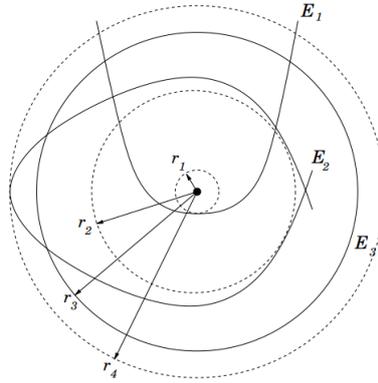


Figura 4.3: Curva del potencial.

Una partícula con energía $E_1 > 0$ no puede acercarse al centro a una distancia más que r_1 , es en esta distancia donde $E = U(r)$ es el punto donde la partícula nota el efecto de la fuerza efectiva, debido al momento angular. La trayectoria de una partícula con energía $E_2 < 0$ es muy diferente, ya que ahora \dot{r} se hace cero en dos puntos distintos, r_2 y r_4 . La trayectoria, por lo tanto, tiene un punto de máxima aproximación y uno de máximo alejamiento, correspondiendo a r_4 respectivamente. Este es el caso de un cometa capturado por el campo gravitatorio o la luna dando vueltas alrededor de la tierra. El hecho de que la órbita está acotada por arriba y por abajo no implica necesariamente que la órbita está cerrada.

4.4. Ley de Coulomb

En 1784 el físico francés Charles Augustin Coulomb, logró medir las magnitudes de las fuerzas eléctricas entre objetos que poseen cargas eléctricas, haciendo uso de la Balanza de Torsión, un instrumento de laboratorio con mucha precisión. El principio de operación de este instrumento es medir las fuerzas eléctricas entre dos cargas. Coulomb estableció, a partir de sus experimentos, lo que se conoce como la Ley de Coulomb y explica que la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa [13]. Por lo tanto, matemáticamente obtenemos:

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r, \quad (4.61)$$

donde, \vec{F} es la fuerza eléctrica de atracción o repulsión, los valores de las dos cargas puntuales se denotan por q_1 y q_2 , r la distancia que separa las cargas y K la constante de proporcionalidad de Coulomb y dada en el sistema internacional de unidades como:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (4.62)$$

la permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N.m}^2$.

La Ley de Coulomb se puede escribir:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (4.63)$$

\vec{F} es una fuerza que enuncia que las cargas de igual signo se repelen, mientras que las de diferente signo se atraen; es decir, que las fuerzas eléctricas entre cargas de igual signo (por ejemplo, dos cargas positivas) son de repulsión, mientras que las fuerzas eléctricas entre cargas de signos opuestos (una carga positiva y otra negativa), son de atracción.

Interacción de dos cuerpos bajo el efecto de una fuerza central

Se planteará el estudio de la fuerza ficticia a través del problema de dos partículas de masa m_1 y m_2 y posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 que no se encuentran sometidas a fuerzas externas, pero interactúan bajo el efecto de una fuerza central y que pueden ser representadas por un solo cuerpo de masa reducida μ dada por [14]:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.64)$$

Ahora se obtiene solamente una partícula de masa reducida μ que se encuentra ubicada una distancia $|\vec{r}|$ de un centro de fuerzas. El vector \vec{r} está dado por:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (4.65)$$

y el centro de masa del sistema de dos partículas se encuentra en la posición:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.66)$$

La función Lagrangiana de la partícula de masa reducida μ , contiene dos grados de libertad y las dos coordenadas polares r y θ :

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r), \quad (4.67)$$

donde T es la energía cinética y $V(r)$ la energía potencial.

Dado que la coordenada θ es cíclica, la cantidad de movimiento angular es una constante del movimiento y su magnitud expresada como:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (4.68)$$

tal que, en términos del vector de posición relativa \vec{r} y la masa reducida μ , la función Lagrangiana se puede expresar en términos del momento angular donde contiene tres

términos [15]:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r) . \quad (4.69)$$

La conservación del momento angular hace posible que la función Lagrangiana solo tenga una coordenada independiente, que será la coordenada radial r , la cual estará simplificada por la ecuación del movimiento radial:

$$\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) , \quad (4.70)$$

donde $f(r)$ es la fuerza central que actúa sobre la partícula que se deriva de un potencial $V(r)$, entonces $f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ y la energía total de la partícula será una constante del movimiento:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) . \quad (4.71)$$

Por lo tanto, si se incluye $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ en un potencial ficticio $V'(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$, este último se encontrará conectado a la fuerza ficticia o efectiva $f'(r) = -\frac{dV'(r)}{dr}$:

$$f'(r) = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} . \quad (4.72)$$

La fuerza efectiva dada por (4,72), se puede usar para resolver el problema de la interacción eléctrica entre dos partículas con cargas de signo opuesto q_1 y $-q_2$ que sigue la Ley de Coulomb dada por la ecuación (4,63), obteniéndose:

$$f(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = -\frac{K}{r^2} , \quad (4.73)$$

donde K dada por:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 . \quad (4.74)$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$f(r) = -\frac{K}{r^2}, \quad K > 0 \quad (4.75)$$

Sustituyendo (4,75) en (4,72) obtenemos que la ecuación a solucionar gráficamente es:

$$\frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{K}{r^2} = f'(r) . \quad (4.76)$$

A la vez se necesita la ecuación de la energía (4,71) para determinar los puntos de retroceso. La ecuación (4,71) se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V'(r) . \quad (4.77)$$

El método de la fuerza ficticia, para el problema de la interacción eléctrica entre dos partículas cargadas, permite encontrar una solución gráfica de la ecuación (4,76) con la condición de la ecuación (4,77).

Capítulo 5

RESULTADOS

A continuación se presenta una descripción cualitativa del movimiento de dos partículas cargadas bajo el efecto de un potencial de Coulomb, esto se hace mediante la aplicación del procedimiento de la fuerza efectiva descrita por la ecuación (4.72), el procedimiento consiste en analizar las curvas de fuerza efectiva, gráficas con elaboración propia en programador MATLAB, esto con el fin de dar una descripción cualitativa del movimiento y las trayectorias posibles bajo ciertas condiciones de energía o fuerza y de un parámetro de órbita llamado excentricidad.

Sabemos que la magnitud de la fuerza de Coulomb puede ser positiva o negativa, o de otra forma, puede ser de repulsión y atracción, esto dependiendo del valor de las cargas de las partículas. Ahora consideraremos un sistema de dos partículas cargadas las cuales están sometidas a una fuerza de atracción de la forma:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r , \quad (5.1)$$

donde la constante de permeabilidad del vacío está dada por $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$, r es la distancia que separa las cargas q_1 y q_2 respectivamente, considerando describir el sistema de forma más simple aplicamos la técnica de resolver gráficamente es:

$$F_{ef}(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r , \quad (5.2)$$

los puntos de retroceso se determinan haciendo uso de la ecuación de la energía total:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} . \quad (5.3)$$

La solución gráfica de la ecuación (5.2) es:

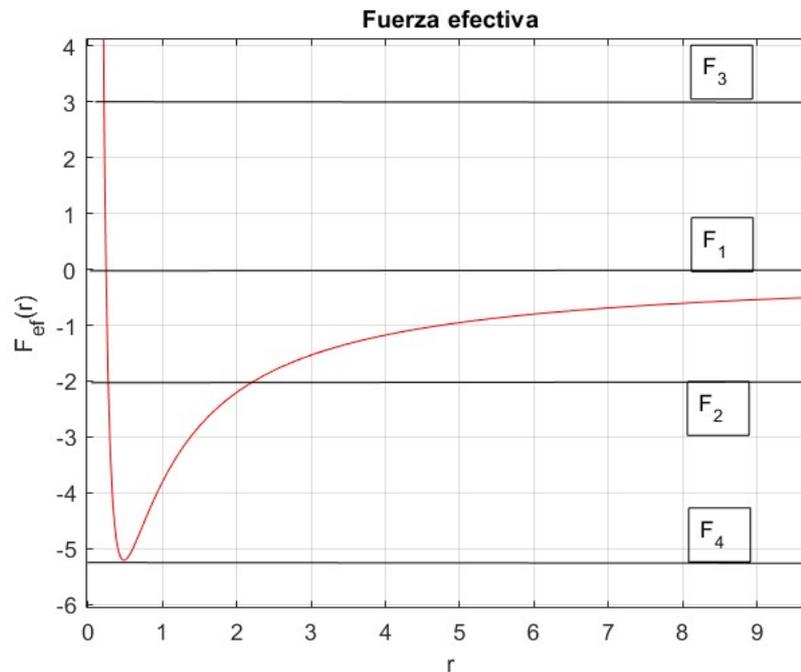


Figura 5.1: Curva de la fuerza efectiva para una fuerza de atracción de Coulomb.

La figura 5.1 Muestra la curva de la fuerza efectiva que experimenta el sistema de dos partículas simplificadas a un solo cuerpo, el procedimiento consiste en evaluar la fuerza efectiva en los posibles valores de fuerza F_1 , F_2 , F_3 y F_4 y calcular los puntos de retroceso y así calcular la posible trayectoria bajo esas condiciones de fuerza.

$$a) F_{ef}(r) = F_1 = 0$$

Para este caso tenemos que la fuerza real se anula con la fuerza $\frac{l^2}{\mu r^3}$ quedando de la forma:

$$F_1 = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 0, \quad (5.4)$$

la fuerza real está definida para un conjunto de valores definidos de r excepto para $r = 0$, siendo así, surge un solo punto de corte con la siguiente condición:

$$F_{ef} = -\frac{l^2}{\mu r^3} = -\mu r \dot{\theta}^2. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) nos da la condición para una trayectoria circular, lo que quiere decir que la fuerza de Coulomb equilibra la fuerza ficticia $\frac{l^2}{\mu r^3}$, entonces se tiene que la energía total E_1 correspondiente al valor de la fuerza $F_1 = 0$ es constante, por lo que se infiere que la trayectoria de la partícula es circular.

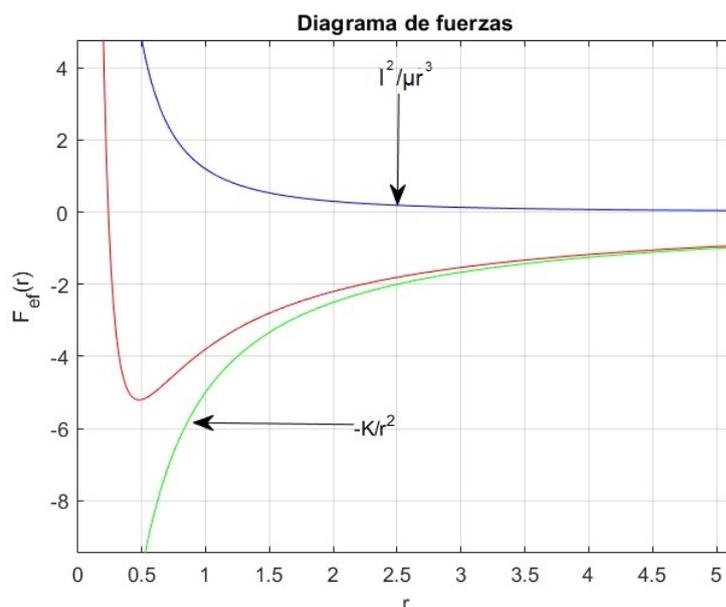


Figura 5.2: Diagrama de fuerzas efectiva, real y ficticia para un potencial de Coulomb.

La figura 5.2 Muestra el diagrama de la curva de la fuerza efectiva $\frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{K}{r^2}$ (en rojo) es igual a la suma de la fuerza real $-\frac{K}{r^2}$ o fuerza de Coulomb (en verde) y la fuerza ficticia $\frac{l^2}{\mu r^3}$ (color azul).

$$b) F_{ef}(r) = F_2 < 0$$

Para este caso tenemos $\frac{l^2}{\mu r^3} - K/r^2 < 0$ obtenemos:

$$l^2 < \mu K r , \quad (5.6)$$

teniendo en cuenta la condición dada por la ecuación (5.6), tenemos que la energía total del sistema E_2 cuando se consideran los valores de fuerza F_2 está dada por:

$$E_2 = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} , \quad (5.7)$$

La ecuación 5.7 es una ecuación de segundo grado en r , resolviendo tenemos:

$$r^2(2mE_2) + 2K\mu r - l^2 = 0 . \quad (5.8)$$

Los puntos de retroceso estarán dados por las raíces de la ecuación (5.8), de igual forma, de la ecuación (5.6) resulta la condición $E_{ef} = E_2 < 0$, de acuerdo con esto, la trayectoria acotada bajo estas condiciones pertenece a una trayectoria de elipse.

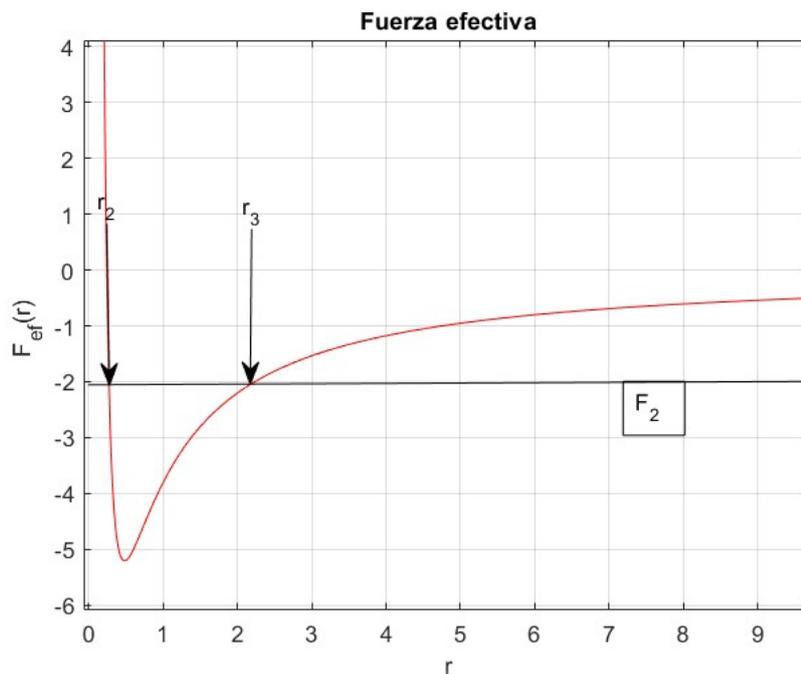


Figura 5.3: Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{ef} = F_2 < 0$.

De la ecuación (5.8), tenemos que los puntos de retroceso r_2 y r_3 que se muestran en la figura (5.3) están dados por:

$$r_2 = -\frac{K}{E_2} - \sqrt{\frac{K^2}{E_2^2} + \frac{2l^2}{\mu E_2}}, \quad (5.9)$$

$$r_3 = -\frac{K}{E_2} + \sqrt{\frac{K^2}{E_2^2} + \frac{2l^2}{\mu E_2}}, \quad (5.10)$$

al tratarse de una trayectoria elíptica, podríamos calcular el semieje mayor de la elipse de la forma:

$$a = \frac{r_2 + r_3}{2} = -\frac{K}{2E_2}, \quad (5.11)$$

de esta manera, el movimiento de la partícula estará restringido en el espacio $r_2 < r < r_3$, de igual manera, para esta condición podemos establecer una relación entre la energía total y el semieje mayor de la elipse de tal forma que:

$$E_2 = \frac{-K}{2a}. \quad (5.12)$$

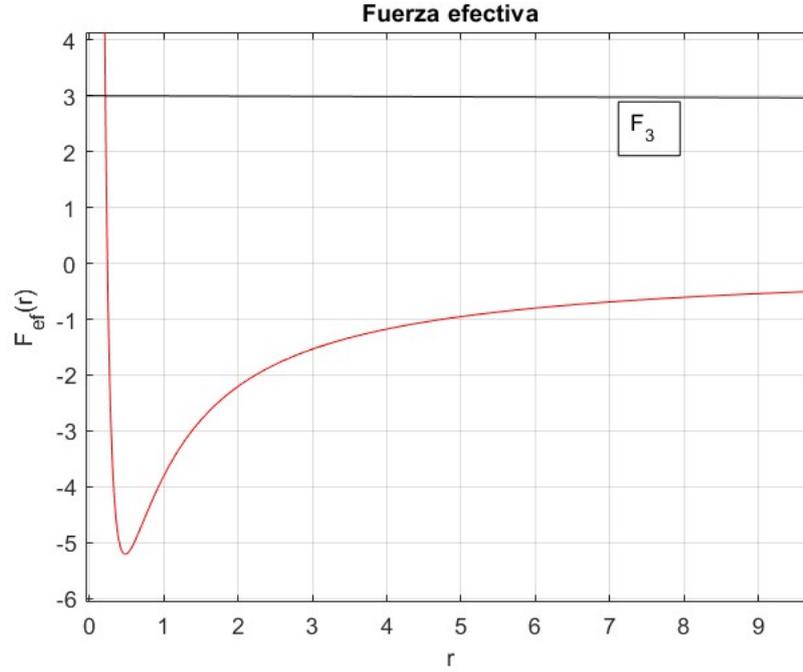


Figura 5.4: Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{ef} = F_3 > 0$.

$$c) F_{ef} = F_3 > 0$$

En este caso tenemos que $\frac{l^2}{\mu r^3} - K/r^2 > 0$, por lo tanto, surge la condición:

$$l^2 > \mu K r, \quad (5.13)$$

se obtiene que la ecuación de la energía (4.76) tenemos $E = E_3$, esto es:

$$E_3 = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}, \quad (5.14)$$

por lo tanto, cuando $l^2 = 2\mu K r$, nos da que la $E_3 = 0$. Se observó que la partícula solo puede aproximarse a una distancia mínima en R_4 del centro de fuerzas de la figura (5.4). La trayectoria de la partícula pertenece a un movimiento parabólico.

Para la región $r < R_4$ no es permitido porque la partícula no puede acceder la región con los valores de la fuerza ficticia; en esta región la velocidad de la partícula toma valores no reales, ya que están condicionados, hace que impide que r de crezca de tal forma que no se cumpla la restricción.

En el movimiento parabólico hace posible determinar el valor dado por $F_3 = F_{ef}(R_4)$ de la siguiente manera:

$$F_3 = \frac{l^2}{\mu \left(\frac{l^2}{2\mu K}\right)^3} - \frac{K}{\left(\frac{l^2}{2\mu K}\right)^2} = \frac{4\mu^2 K^3}{l^4}, \quad (5.15)$$

y para otros valores de r donde se permita la energía cuando $E_4 > 0$, la ecuación de energía estará dada por:

$$E_4 = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} > 0, \quad (5.16)$$

para la restricción de $l^2 > 2\mu K R_4$, estará asociada a $E_4 > 0$ cuando:

$$F'_3 > \frac{4\mu^2 K^3}{L^4}. \quad (5.17)$$

Por consiguiente, la gráfica de la fuerza ficticia (figura 5.4), cuando F'_3 aumenta, la distancia radial se estabiliza en R_4 , entonces, la fuerza ficticia aumenta debido a que la fuerza real se anula, es decir:

$$-\frac{K}{r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (5.18)$$

De acuerdo a la dispersión de la partícula por el centro de fuerzas, la trayectoria de la partícula sería una hipérbola.

$$d) F_{efmin} = F_4$$

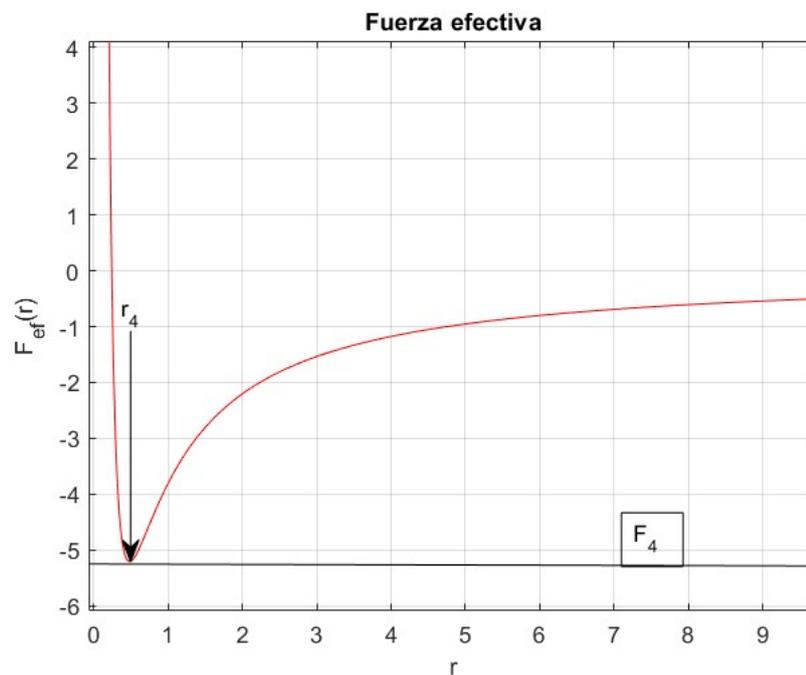


Figura 5.5: Gráfica de la fuerza efectiva para la condición $F_{efmin} = F_4$.

Esta condición establece el valor mínimo del potencial efectivo, por esto la condición que surge de la derivada es de la forma:

$$\frac{d}{dr}F_{efmin} = \frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{K}{r^2}\right) = -3\frac{l^2}{\mu r^4} + \frac{2K}{r^3} = 0 \quad , \quad (5.19)$$

de donde podemos encontrar el punto de retroceso r_4 :

$$r_4 = \frac{3l^2}{2\mu K} \quad (5.20)$$

si la órbita es circular, el criterio para establecer la estabilidad de la órbita es:

$$\frac{d^2}{dr^2}F_{ef}(r_4) > 0 \quad . \quad (5.21)$$

derivando la ecuación (5.20) tenemos:

$$\frac{d^2}{dr^2}F_{ef}(r_4) = -\frac{64\mu^4 K^5}{81l^8} < 0 \quad . \quad (5.22)$$

No se logró verificar la condición de estabilidad, entonces en la fuerza no existen trayectorias permitidas.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Se realizó una descripción cualitativa de la dinámica de un sistema conformado por dos partículas cargadas sometidas a un potencial central de Coulomb, el análisis se realizó haciendo uso del procedimiento de la fuerza efectiva, esto considerando distintos valores de interés en la curva de fuerzas. Se evidenció que el procedimiento de la fuerza efectiva es eficiente para describir la dinámica de un sistema de dos partículas cargadas sometidas a un potencial central de Coulomb, se establecieron con facilidad las ecuaciones de movimiento, esto permitió implementar el procedimiento de manera simple y sencilla, de igual forma se establecieron las condiciones que determinan la trayectoria del sistema bajo ciertas condiciones de fuerza. Se tiene la esperanza de que el procedimiento de la fuerza efectiva pueda ser aplicado a otros problemas que involucran fuerzas centrales, ya que estos son muy abundantes en la ciencia contemporánea.

Las conclusiones del análisis gráfico del método de la fuerza ficticia demostró la clasificación de las órbitas según los valores de $F_{ef}(r)$, la energía E y el momento angular obteniéndose los siguientes resultados:

a) Trayectoria Circular, cuando $F_1 = 0$, $E_1 = -\frac{K}{2R_0} < 0$ $l^2 = \mu KR_0$

b) Trayectoria Elipse, cuando $F_2 < 0$, $E_2 = -\frac{K}{2a} < 0$, $l^2 < \mu Kr$

c) Trayectoria Parábola, cuando $F_3 > 0$, $E_3 = 0$, $l^2 = 2\mu Kr$

Trayectoria Hipérbola, cuando $F_3 > 0$, $E_4 > 0$, $l^2 = \mu Kr$

d) Trayectoria no permitida, cuando $F_4 = f_{min}E_4 > 0$, $l^2 < \mu Kr$

Bibliografía

BIBLIOGRAFIA

- [1] Medina, L., Ley Koo, E. (2007). “Mathematics motivated by physics: the electrostatic potential is the Coulomb integral transform of the electric charge density”. *Rev. Mex. Fís.*, Vol. 54, no.2, pp. 153-159.
- [2] Humi, M., Carter, T. (2002). “Models of Motion in a Central Force Field with Quadratic Drag”. *Celestial mechanics and dynamical astronomy*, vol. 84, no. 3, pp. 245-262.
- [3] Damour, T., Nagar, A. (2010) “The effective one-body description of the two-body problem”, *Mass and Motion in General Relativity*. Springer, pp. 211-252.
- [4] Evangelista, L. R. (2011). *Perspectiva en la Historia de la Física - Vol I - De los babilonios a la síntesis newtoniana*. Río de Janeiro: Editora Ciencia Moderna Ltda.
- [5] Kim, D. S., Kang, S. H. (2011) “A characterization of conic section”, *Honam Mathematical Journal*, vol. 33, no. 3, pp. 335-340.
- [6] González Sierra, H., Toledo Chavarro, C. C. (2020). “El procedimiento de la fuerza ficticia: un símil del método del potencial unidimensional equivalente en la solución del problema de Kepler”, *Tecnológicas*, vol. 23, no. 49, pp. 147-160.
- [7] Linares, R., Izquierdo, M. (2006) “El rescate de la princesa encerrada en lo más alto de la más alta torre: un episodio para aprender sobre analogías, símiles y metáforas”, *El Hombre y la Máquina*, no. 27, pp. 24–37.
- [8] González H. (2012) “Generalización de la ecuación de Bernoulli a partir de la Dinámica de Newton”, *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, vol. 6, no. 4, pp. 585–588.
- [9] Ruijgrok, T. W., Van der Vlist, H. (1980) “On the hamiltonian and lagrangian formulation of classical dynamics for particles with spin,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 101, no. 2-3, pp. 571-580.
- [10] Reitz, J. R., Milford, F. J., Christy, R. W. (1996) Addison-Wesley. *Fundamentos de la teoría electromagnética*.
- [11] Torres del Castillo, G. F., Calvario Acócal, J. L. (1998) “On the dynamical symmetry of the Quantum Kepler Problem”, *Rev. Mex. Fís.*, vol. 44, no. 4, pp. 344-352.
- [12] Serway, A., Beichner, R. J. *Física Para Ciencias e Ingeniería*. México: McGraw-Hill, 2002.

[13] Purcell, E. (1973) "Electricidad y Magnetismo" Volumen 2 del Berkeley Physics Course, Reverté.

[14] Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L. (2001). Classical Mechanics, 3rd ed. Addison- Wesley.