



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 29 de marzo de 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad, Neiva

El (Los) suscrito(s): Emerson Charry Ramírez, con C.C. No. 1075268487,

Wendy Katherine Cáceres Unás, con C.C. No. 1075296458,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado Titulado: Un Modelo Cinemático y Dinámico para un Robot GPR 2.0 2WD Multipropósito Tipo Diferencial. Presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de: Matemático;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

Vigilada Mineducación



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Un Modelo Cinemático y Dinámico para un Robot GPR 2.0 2WD Multipropósito Tipo Diferencial

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cáceres Unás	Wendy Katherine
Charry Ramírez	Emerson

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Delgado Rivas	Edinson Oswaldo

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Matemático

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Matemática Aplicada

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2018 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 113

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas__X_ Fotografías__x_ Grabaciones en discos__X_ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos__X_ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros__X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: LATEX, ARDUINO



MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español

1. Robot_____
2. Dinámica_____
3. Modelo_____
4. Tecnología_____
5. Ecuaciones_____
6. Lagrange_____

Inglés

1. Robot_____
2. Dynamical_____
3. Model_____
4. Technology_____
5. Ecuations_____
6. Lagrange_____

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Se diseña un modelo cinemático y dinámico para un robot GPR 2.0 2WD multipropósito tipo diferencial, teniendo de base las ecuaciones de Euler – LaGrange. Como la configuración del robot es tipo diferencial, entonces se extraen unas hipótesis para la modelación. Las aplicaciones que desarrolla este prototipo son las siguientes: teleoperado por vía Bluetooth mediante cualquier Smartphone, evasor de obstáculos, seguidor de línea y seguidor de luz. Para llevar a cabo estas aplicaciones se hace uso del software Arduino.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This research has as its central axis to visualize the interdisciplinarity of the robotics with emphasis on the mathematics, in this sense is done a study about the mathematical treatment used in said discipline. Thus, the study of Lagrangian and Hamiltonian mechanics is addressed. further, results from different branches are integrated such as: dynamic systems, linear algebra, vectorial calculation and differential equations.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Álvaro Javier Cangrejo

Firma:

Nombre Jurado: Gustavo Londoño Betancourt

Firma:

Vigilada mieducación

$\tilde{n}dj10\tilde{n}$ $do\tilde{n}$ $do25\tilde{n}$ \tilde{n} \tilde{n} \tilde{n} \tilde{n} \tilde{n} $65\tilde{n}$ $ol\tilde{n}$ $ol66$



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE CIENCIAS
EXÁCTAS Y NATURALES

UN MODELO
CINEMÁTICO Y
DINÁMICO PARA UN
ROBOT MÓVIL GPR 2.0
2WD MULTIPROPÓSITO
TIPO DIFERENCIAL

TRABAJO DE GRADO

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

Wendy Katherine Cáceres Unas
Emerson Charry Ramírez



DIRECTOR DEL TRABAJO:
EDINSON OSWALDO DELGADO

Neiva-Huila 06 de Agosto del 2018

*Dedicado a nuestras familias,
amigos y profesores*

Agradecimientos

A Dios por habernos permitido llegar hasta este punto y brindarnos la salud para lograr este objetivo, además de su infinita bondad y amor.

Al profesor Edinson Oswaldo Delgado Rivas por haber sido nuestro director en este trabajo de grado a su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación hizo que este trabajo fuese exitoso.

A nuestros padres: Luz Margarita Unas, Pedro Pablo Cáceres, Emma Liliana Ramírez y Otoniel Charry porque gracias a ellos hemos logrado culminar nuestros estudios, son nuestro motor y razón de vivir.

Al colegio AngloCanadiense por su cordialidad y por habernos facilitado sus instalaciones durante el desarrollo de esta investigación.

A Yeferson Charry Ramírez y Brayhan Steven Vargas por su colaboración, aportes y sugerencias.

Finalmente agradecer de manera especial a a Diego Armando Girón por brindarnos su amistad, apoyo y respeto durante nuestra formación profesional.

¡MUCHAS GRACIAS A TODOS Y A TODAS!

Resumen

Esta investigación tiene como eje central visualizar la interdisciplinariedad de la robótica haciendo énfasis en la matemática, en este sentido se realiza un estudio sobre el tratamiento matemático empleado en dicha disciplina. Así pues, se aborda el estudio de la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana. Además se integran resultados de distintas ramas como: los sistemas dinámicos, el álgebra lineal, el cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales.

En este contexto, la cinemática y dinámica de los robots son de bastante importancia, ya que describen el movimiento de cualquier mecanismo robótico. En particular, se hace énfasis al estudio de la robótica móvil, en el cual las condiciones para el diseño e implementación de un modelo cinemático y dinámico son las restricciones no-holonómicas y las fuerzas externas del robot respectivamente.

En efecto, cabe destacar que para llevar a cabo esta investigación se tendrá como base de estudio el robot móvil GPR.2.0 2WD multipropósito, para este prototipo se hará uso del software Arduino, ya que por medio de esta plataforma de software libre, basada en una placa con microcontrolador y un entorno de desarrollo, diseñada para facilitar el uso de la electrónica en proyectos multidisciplinarios podemos analizar la función de los sensores que este posee y así mismo entender el funcionamiento del sistema electromecánico.

Palabras claves: Robótica, modelo, dinámica, cinemática, ecuación, control, industria, interdisciplinariedad, robótica móvil, multipropósito, robot diferencial.

Abstract

This research has as its central axis to visualize the interdisciplinarity of the robotics with emphasis on the mathematics, in this sense is done a study about the mathematical treatment used in said discipline. Thus, the study of Lagrangian and Hamiltonian mechanics is addressed. further, results from different branches are integrated such as: dynamic systems, linear algebra, vectorial calculation and differential equations.

In this context, the kinematics and dynamics of the robots are quite important, since they describe the movement of any robotic mechanism. In particular, is done emphasis on the study of mobile robotics, in which the conditions for the design and implementation of a kinematic and dynamic model are the non-holonomic constraints and the external forces of the robot respectively.

Indeed, it should be noted that in order to carry out this research, the multipurpose mobile robot GPR.2.0 2WD will be based on the study, for this prototype the Arduino software will be used, since through this free software platform, based on a board with microcontroller and a development environment, designed to facilitate the use of electronics in multidisciplinary projects, we can analyze the function of the sensors it has and also understand the operation of the electromechanical system.

Key words: Robotics, model, dynamics, kinematics, equation, control, industry, interdisciplinarity, mobile robotics, multipurpose, differential robot.

Índice general

Dedicatoria	II
Resumen	III
Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	X
Introducción	1
1. Planteamiento del problema	5
1.1. Visión sistémica del problema de investigación	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Morfología, cinemática y dinámica del robot	7
2.1.1. Cinemática	8
2.1.2. Dinámica	8
2.1.3. Control cinemático	9
2.1.3.1. Funciones de control cinemático	9
2.1.4. Tipos de trayectorias	9
2.1.5. Control dinámico	11
2.2. Antecedentes históricos de la robótica	11
2.3. Tipos de robots	14
2.3.1. Robots móviles	14
2.3.2. Robots humanoides	14
2.3.3. Robots industriales	15
2.4. Estadísticas del uso del robot	17
2.4.1. Centros de investigación a nivel mundial	18
2.4.2. Robótica en Colombia	19
2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton	21
2.5.1. Principio variacional	21
2.5.2. Ecuaciones de Euler - Lagrange	22
2.5.3. Principio de Hamilton	23
2.6. Robótica Móvil	25
2.6.1. Configuración de robots móviles	25

2.6.2.	Cinemática de robots móviles	26
2.6.2.1.	Cinemática de RMR, Directa e Inversa	27
2.6.2.2.	Transformaciones Homogeneas	32
2.6.2.3.	Restricciones no Holonómicas	34
2.6.2.4.	Monociclo	36
2.6.2.5.	RMR de Direccionamiento tipo Diferencial	37
2.6.2.6.	Triciclo	41
2.6.3.	Dinámica de robots móviles	43
2.6.4.	Modelo dinámico de robots en general	44
2.6.4.1.	Modelo dinámico Lagrangiano	45
2.6.4.2.	Modelo dinámico de robots no - holonómicos	45
2.6.4.3.	RMR Direccionamiento Diferencial (Modelo Dinámico)	47
2.6.5.	Sensores	48
2.6.5.1.	Clasificación	48
2.6.5.2.	Características de los sensores en los RMR	49
2.6.6.	Control de robots móviles (Basado en el método de Lyapunov)	53
2.6.6.1.	Modelo de espacio de estado:	53
2.6.6.2.	Estabilidad en el sentido Lyapunov	56
2.6.7.	Control del RMR de Direccionamiento Diferencial	58
2.6.7.1.	Control de seguimiento cinemático no lineal	58
2.6.7.2.	Control de seguimiento dinámico	61
3.	Objetivos	62
3.1.	Objetivo General	62
3.2.	Objetivos específicos	62
4.	Metodología	63
4.1.	Tipo de investigación	63
4.2.	Nivel de investigación	63
4.3.	Diseño de la investigación	65
4.3.1.	Kit de Robótica Móvil	65
4.3.1.1.	Vistrónica	65
4.3.1.2.	Kit de robótica móvil (Contenido del Paquete)	65
4.3.2.	Recursos Físicos, Materiales y Humanos	66
4.3.2.1.	Físicos	66
4.3.2.2.	Materiales	67
4.3.2.3.	Humanos	68
4.3.3.	Fases de la investigación	68
4.3.3.1.	Fase de investigación documental	68
4.3.3.2.	Fase de la investigación experimental	69

5. Parte Experimental, resultados y discusión	70
5.1. Morfología del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial	70
5.2. Ensamble	83
5.3. Circuito del robot	89
5.4. Modelo Cinemático del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial	89
5.5. Modelo Dinámico del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial	92
5.6. Aplicaciones	94
5.6.1. SmartPhone Robótico	94
5.6.2. Seguidor de Línea	94
5.6.3. Evasor de Obstáculo	95
5.7. Resultados	95
6. Conclusiones	97
Bibliografía	98

Índice de figuras

2.1. Los problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot (Cáceres & Charry, 2018)	8
2.2. Funcionamiento del control cinemático, (Sánchez & Sigut, 2005)	10
2.3. Humanoide construido por Da Vinci	12
2.4. Robots móviles (Cáceres & Charry, 2018)	14
2.5. Compresoorhead: Banda musical compuesta por robots (Cáceres & Charry, 2018)	15
2.6. Brazo robot (Reyes, 2011)	16
2.7. Brazo robot (Reyes, 2011)	16
2.8. Estadísticas a nivel mundial, fuente: (Asociación española de robótica y asociación tecnologías de la producción)	17
2.9. Estadísticas de las grandes ciudades del mundo, fuente: (Asociación española de robótica y asociación tecnologías de la producción)	18
2.10. Ackerman, (Reyes, 2011)	26
2.11. Triciclo clásico, (Reyes, 2011)	26
2.12. Direccionamiento diferencial, (Reyes, 2011)	27
2.13. Sincrona, (Reyes, 2011)	27
2.14. Cinemática Directa e Inversa	28
2.15. Condición de no deslizamiento(Cáceres & Charry, 2018)	35
2.16. monociclo; (Cáceres & Charry, 2018)	36
2.17. RMR Direccionamiento Diferencial (Cáceres & Charry, 2018)	38
2.18. Diagrama de la restricción no-holonómica; (Cáceres & Charry, 2018)	38
2.19. RMR Triciclo (Cáceres & Charry, 2018)	41
2.20. Dinámica directa e inversa (Tzafestas, 2014)	44
2.21. Sensor de sonido (Tzafestas, 2014)	51
5.1. Chasis GPR 2.0(Vistrónica S.A.S, 2017)	70
5.2. Arduino UNO R3 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	71
5.3. Módulo L298N1 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	71
5.4. Convertidor DC-DC Buck LM2596 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	72
5.5. Módulo Bluetooth Esclavo HC-06 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	73
5.6. Rueda de Goma (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)	74
5.7. Rueda Loca CY-15A (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	74
5.8. Motorreductor 6V 300rpm 0.2Kg: (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)	75

5.9. Bracket Plástico para Motor N20: (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)	76
5.10. Módulo Sensor TCRT5000L (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	77
5.11. Módulo Sensor Infrarrojo evasor de obstáculos (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	77
5.12. Módulo Fotorresistencia LDR (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	78
5.13. Sensor de Ultrasonido HC-SR04 Arduino: (Fuente: Cáceres & Charry)	79
5.14. Soporte para Ultrasonido HC-SR04: (Fuente: www.superrobotica.com)	80
5.15. Microservomotor SG90 9G (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	80
5.16. Conector para pila 9V: (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)	81
5.17. Cable (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	82
5.18. Cable DuPont Macho-Macho por unidad 20cm (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	82
5.19. Separador de Nylon: (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)	82
5.20. Espiral de plástico (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	83
5.21. Amarre de plástico (Vistrónica S.A.S, 2017)	83
5.22. Paso 1. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	84
5.23. Paso 2. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	84
5.24. Paso 3. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	84
5.25. Paso 4. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	85
5.26. Paso 5. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	85
5.27. Paso 6. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	86
5.28. Paso 7. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	86
5.29. Paso 8. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	87
5.30. Paso 9. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	87
5.31. Paso 10. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	88
5.32. Paso 11. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	88
5.33. Circuito (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)	89
5.34. GPR 2.0 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	89
5.35. Dimensiones del prototipo (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	90
5.36. Aplicación en el SmartPhone (Fuente: Cáceres & Charry)	94
5.37. Aplicaciones (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)	96
5.38. Movimiento giratorio, (Cáceres & Charry, 2018)	96

Índice de cuadros

2.1. Acontecimientos históricos.	13
4.1. Niveles de investigación	64

Introducción: Interdisciplinaridad de la matemática en la robótica

Según [60]. La robótica es una área multidisciplinaria que requiere la madurez y solvencia del lenguaje elegante y universal de la matemática. La naturaleza de esta permite involucrar áreas del conocimiento científico tales como la matemática, la física, la electrónica, la computación y la inteligencia artificial.

En esta dirección se encuentran inmersas varias ramas de la matemática, tales como el álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, el cálculo vectorial, el análisis numérico, el análisis funcional, entre otras. Para el análisis, diseño y control de robots son muy importantes elementos como: vectores, matrices, funciones de energía, sistemas dinámicos, teoría de estabilidad de Lyapunov, funciones definidas positivas, derivadas de funciones de energía; en la que cada uno de ellos cumple una determinada función dentro del sistema electromecánico del robot, las cuales describiremos a continuación:

- **Vectores:** en [60]. representa la agrupación de varias señales físicas del robot para ser analizadas, procesadas o controladas; por ejemplo, las variables más representativas del área de robótica son posiciones, errores de posición, velocidades, pares y fuerzas.
- **Matrices:** en robótica se suele trabajar con los distintos tipos de matrices; estas son de gran utilidad en este campo, pues ayudan a conocer la relación entre las velocidades y las coordenadas articulares, también ayudan a encontrar la relación entre los vectores de posición y orientación del robot en este sentido es la relación que existe entre estos dos últimos vectores que se obtiene a través de la matriz jacobiana. La matriz jacobiana directa permite conocer las velocidades del robot a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. Por su parte la matriz jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias para obtener unas velocidades determinadas en el extremo del robot, [60].
- **Funciones definidas positivas:** una función definida positiva es una función continua en su dominio $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface lo siguiente:
 - $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$
 - $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

- $V(x) \rightarrow \infty$, cuando $\|x\| \rightarrow \infty_+$, es decir, $V(x)$ es radialmente no acotada.

La función definida positiva sólo puede ser cero cuando su argumento es cero, para cualquier otro valor de su argumento la función $V(x)$ siempre será positiva. Las funciones definidas positivas son ampliamente utilizadas en el diseño y desarrollo de algoritmos de control de robots, y se interpretan como la inyección de energía aplicada al robot para poderlo mover desde su posición inicial al punto deseado, [11].

- **Derivadas de funciones de energía:** son ampliamente usadas en robótica y están relacionadas con el cálculo de derivadas de vectores y matrices, [60].
 - **La matriz jacobiana:** la utilidad de la matriz jacobiana se ubica en varias áreas de la robótica, en el análisis de singularidad de robots manipuladores, planeación de trayectorias, cinemática diferencial, así como en control cartesiano con la estructura de jacobiano transpuesto, en este tema se encuentran control de impedancia, control de fuerza, control híbrido fuerza/posición y visual servoing, [60].
 - **Gradiente:** el gradiente es un campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de primer orden de una función escalar. Geométricamente el gradiente representa un vector normal a la superficie de la función de energía que se le inyecta al robot, indica la dirección en la cual la energía decrementa más rápido. El gradiente apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima, y la norma del gradiente representa la magnitud de decremento en una determinada dirección, [60].
- **Sistemas dinámicos:** los sistemas dinámicos son modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos que se encuentran presentes en el robot, [49]. Para propósitos de análisis y diseño, en robótica se emplean como modelo dinámico una estructura matemática que incluye una ecuación diferencial de primera orden expresada de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \quad (1)$$

donde x representa la variable de estado, la cual proporciona información interna de los estados de la dinámica del sistema físico o mecánico en el caso del robot. La variable de estado x es una función continua del tiempo $x = x(t)$ y es la solución de la ecuación diferencial, en particular $x(0) \in \mathbb{R}^n$ se conoce como la condición inicial o estado inicial, [30].

- **Teoría de estabilidad de Lyapunov:** es una herramienta indispensable para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos lineales y no lineales, sin importar el orden del sistema: permite obtener información sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema sin resolver la ecuación diferencial que caracteriza a dicho sistema dinámico, ofrece una precisa caracterización de aquellas funciones que califican como *funciones de energía* en la vecindad del punto de equilibrio y la noción

de que aquellas *funciones de energía* se decrementan a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico en cuestión, lo que significa que la derivada temporal de la energía (potencia del sistema) debe ser negativa definida, hasta alcanzar un estado de equilibrio. en esencia es la generalización del principio de Torricelli, Ver [60].

Los resultados de Lyapunov incluyen los métodos directos e indirectos, junto con el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, (ver [60]) los cuales proporcionan una fuerte metodología para el diseño de esquemas de control que garanticen la estabilidad del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

El método directo establece que si se construye una función de energía en los estados del sistema como función definida positiva continua diferenciable, la variación temporal debida a pequeñas perturbaciones en una vecindad del punto de equilibrio es siempre negativa o cero, entonces el punto de equilibrio es estable en forma global, es decir, para toda condición inicial que se encuentren dentro de la región de atracción. Sin embargo, si la razón de cambio de la función definida positiva es estrictamente negativa, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable en forma global. El método indirecto aborda únicamente la estabilidad local del punto de equilibrio de sistemas dinámicos linealizados. La estabilidad local se caracteriza sólo para algunas condiciones iniciales, [60].

La teoría de estabilidad de Lyapunov como hemos mencionado tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

esta teoría establece que para toda $x(0) \in \mathbb{R}^n$ que se encuentra dentro del atractor, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio, [30].

La organización de este trabajo de investigación consta de cinco capítulos: en el primer capítulo se presenta la visión sistémica del problema de investigación, en él se plantean las causas para la formulación de nuestra pregunta de investigación.

En el segundo capítulo se da una descripción de la robótica, las ecuaciones de Euler - Lagrange, las ecuaciones hamiltonianas, y la robótica móvil. Así mismo, se hace un recorrido histórico sobre los acontecimientos más relevantes de la robótica hasta nuestros días; también se resalta la importancia de la robótica como área clave y estratégica de todo país en via de desarrollo, a esto se le añade un informe que nos muestra el panorama mundial sobre el uso de robots, se presentan los modelos cinemáticos y dinámicos generales de robots móviles y control de robots móviles.

En el tercer capítulo se presentan los objetivos de dicho trabajo de investigación. En el cuarto capítulo se diseña la metodología propuesta para el desarrollo del trabajo

de investigación, que es la investigación aplicada ya que en éste tipo de investigación el problema está establecido y es conocido por el investigador, por lo que utiliza la investigación para dar respuesta a preguntas específicas. igualmente se describen los procesos que se realizaron es este diseño metodológico para esclarecer las hipótesis para la formulación del modelo cinemático y dinámico.

En el quinto capítulo se presenta la parte experimental y los resultados de esta investigación, en éste se realizan los siguientes procesos: descripción morfológica-geométrica del robot móvil GPR.2.0 2WD multipropósito diferencial caracterizando cada parte del robot; explicando la función y las características que tiene cada una de ellas, ensamblaje del robot móvil GPR.2.0 2WD multipropósito diferencial, planteamiento de los supuestos (hipótesis) para la formulación del modelo cinemático y dinámico, diseño del modelo cinemático y dinámico del RMR y por ultimo se programa por medio de Arduino los códigos para las aplicaciones seguidor de línea, evasor de obstáculos y Smartphone robótico.

Con este trabajo de investigación queremos motivar a la comunidad académica particularmente a los estudiantes del programa de matemática aplicada de la universidad Surcolombiana para que se animen y comiencen a hacer futuras investigaciones es este campo industrial como es el de la robótica y así generar más conocimiento sirviendo al saber científico.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Visión sistémica del problema de investigación

Uno de los de los principales problemas que se presentan en el momento de enseñanza de la matemática, es que, se enseña de una manera muy técnica, ocasionando que las personas no observen el rigor y la gran relevancia que tiene esta ciencia para representar fenómenos, sucesos y hechos de la vida real. Partiendo desde este punto de vista, observamos que es muy importante comenzar a abordar nuevos enfoques, en donde se plasme ese saber dinámico y contextualizado.

En nuestro entorno social, es muy común observar que todo va ligado a la matemática y esto lo podemos constatar en diversos campos como la medicina, en el cual ya se han creado nuevos métodos para estudiar la evolución de las enfermedades a través de modelos matemáticos; la meteorología en donde ya se han establecido modelos matemáticos para predecir sucesos naturales de alta complejidad, el empresarial en el que la matemática es la artífice en la rentabilidad de determinado negocio y en la actualidad se habla de la necesidad de aplicar las matemáticas a la industria.

El sector industrial en nuestra región enfrenta nuevos retos y tiene que reconocer en las matemáticas el valor para:

- Plantear las posibles necesidades de la industria en relación con los métodos matemáticos simulación numérica, la estadística y la investigación operativa para la resolución de problemas.
- Incrementar las relaciones entre la Empresa y la Universidad en el campo de la Matemática Aplicada, mostrando el potencial de las matemáticas, la simulación numérica, la investigación operativa y estimulando la cooperación.

En este sentido, esta investigación nace como una propuesta en relación con este tema, involucrando la industria, tecnología, robótica y la matemática; ya que el desarrollo tecnológico es un aspecto estratégico para todo país en vía de desarrollo, también

contribuye a elevar la vida política y social, aumenta la reflexión y conocimiento de la sociedad sobre sí misma, y por tanto la capacidad del país para dirigir su propio destino.

Por su parte la robótica como parte de la automatización y de la mecatrónica genera tecnología, siendo un área estratégica para la región, ya que su impacto no sólo repercute en aspecto políticos y económicos, también forma parte importante de la vida cotidiana, educación, cultura y sociedad.

La robótica es una ciencia que ha acompañado al ser humano durante su evolución, compaginándose en nuestro diario vivir y brindando un desarrollo vertiginoso en sus distintos campos de aplicación, partiendo desde robots manipuladores, robots de entretenimiento y de servicio hasta robot móviles.

La palabra robot es sinónimo de automatización, ya que es capaz de ofrecer un amplio campo de aplicaciones en el mundo real y al mismo tiempo abre nuevas fronteras para el desarrollo de la industria y bienestar de la sociedad. Entre las ventajas que ofrecen los robots se encuentran: reducción de costos, incremento de la productividad, mejora la calidad del producto, reducir problemas de operación en ambientes hostiles y peligrosos del hombre como radiactivos, nucleares, militares, etc.

Matemáticamente el problema básico que debe resolverse en robótica es el de encontrar un modelo dinámico y cinemático que permita modelar el movimiento del robot, el cual se puede realizar de dos formas distintas: usando el método iterativo de Newton o aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton.

Con base en lo expuesto y teniendo en cuenta que en la universidad Surcolombiana son pocas las investigaciones hechas sobre robótica móvil, surge el siguiente interrogante ¿Cómo describir a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton la cinemática y la dinámica del prototipo GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial?

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Morfología, cinemática y dinámica del robot

Según [3]. Mecánicamente, un robot está formado por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten un movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos.

Los movimientos posibles para las articulaciones son: un desplazamiento (articulación de tipo prismático), un giro (articulación de rotación o de revolución), o una combinación de ambos, siendo estos últimos menos habituales, entre tanto las dos primeras son las más usadas en la práctica, [3].

Cada uno de los movimientos independientes que puede realizar cada articulación con respecto a lo anterior se denomina grados de libertad (GDL). El número de grados de libertad del robot viene dado por la suma de los grados de libertad de las articulaciones que lo componen, el número de GDL del robot suele coincidir con el número de articulaciones de que se compone.

Según [3]. El problema más básico que debe resolverse en la robótica es el de obtener un modelo geométrico de la estructura que permita relacionar los grados de libertad (variables generalizadas) con las coordenadas cartesianas de todos y cada uno de los puntos que constituyen el robot. Esto es conocido como el problema cinemático directo. Sin embargo, el problema que aparece cuando se pretende posicionar un brazo robótico o una pierna de un humanoide es justo el inverso, es decir, se parte de las posiciones cartesianas como valores de entrada y lo que se debe encontrar son los valores de las variables generalizadas. A esto se le conoce como el problema cinemático inverso, este solo puede resolverse de forma analítica en casos muy sencillos, y puede tener 0,1,2, . . . , o, infinitas soluciones.

2.1.1. Cinemática

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. Así la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot y los valores que toman sus coordenadas articulares, [12].

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot, el primero que se conoce como el problema cinemático directo, que consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toman como referencia. No obstante, el segundo se conoce como el problema cinemático inverso, este resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición de los extremos conocidos, [12].

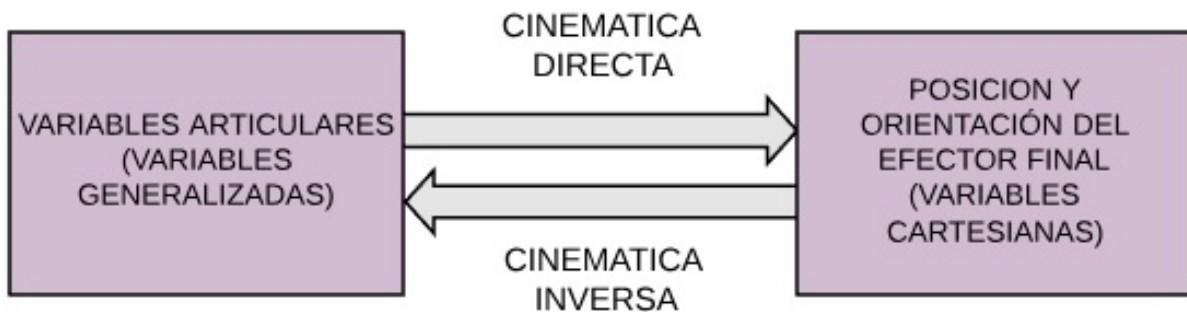


Figura 2.1: Los problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot (Cáceres & Charry, 2018)

2.1.2. Dinámica

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina como resultados de las mismas [72]. Por consiguiente, el modelo dinámico de un robot tiene por objeto conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas aplicadas.

La obtención de este modelo para estructuras de uno o dos grados de libertad no resulta excesivamente compleja, pero a medida que el número de grados de libertad aumenta el planteamiento y obtención del modelo dinámico se complejiza enormemente. El problema de la obtención del modelo dinámico de un robot es, por lo tanto, uno de los aspectos más complejos en robótica, que lo ha llevado a hacer obviado en numerosas ocasiones, [3].

Sin embargo, el modelo es necesario para implementar tareas como la simulación del robot, el diseño y la evaluación de la estructura mecánica del robot, el dimensionamien-

to y la elección de los actuadores, y el diseño y la evaluación del control dinámico del robot. En este sentido, la obtención del modelo dinámico de un determinado mecanismo, y en particular del robot, se basa fundamentalmente en el planteamiento de equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, [9].

Del planteamiento del equilibrio de fuerzas y pares que intervienen sobre el robot se obtienen los denominados modelos dinámicos directo e inverso, que consisten en lo siguiente:

- **Modelo dinámico directo:** expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que interviene, [77].
- **Modelo dinámico inverso:** expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articuladas y sus derivadas, [77].

No obstante, como planteamiento alternativo para la obtención del modelo dinámico está la formulación Lagrangiana, basada en condiciones energéticas, [3]. Este planteamiento es más sistemático y más elegante desde el punto de vista matemático, por ende, facilita la formulación de un modelo tan complejo como el robot.

Como planteamiento alternativo para la obtención del modelo dinámico está la formulación lagrangiana, basada en consideraciones energéticas. Este planteamiento es más sistemático y más elegante desde el punto de vista matemático que el anterior y, por lo tanto, facilita enormemente la formulación de un modelo tan complejo como el de un robot, [3].

2.1.3. Control cinemático

El control cinemático establece cuáles son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para lograr los objetivos fijados por el controlador.

2.1.3.1. Funciones de control cinemático

La figura (2.2) muestra de manera esquemática el funcionamiento del control cinemático por el cual recibe como entradas los datos procedentes del programa del robot escrito por el usuario y apoyándose en el modelo cinemático del robot, establece las trayectorias para cada articulación como funciones del tiempo.

2.1.4. Tipos de trayectorias

Para realizar una tarea determinada, el robot debe moverse desde un punto inicial hasta un punto final, este movimiento puede realizarse siguiendo un número infinito de trayectorias espaciales. Así, puede ocurrir que los robots dispongan de trayectorias punto a punto, coordenadas y continuas, [52].

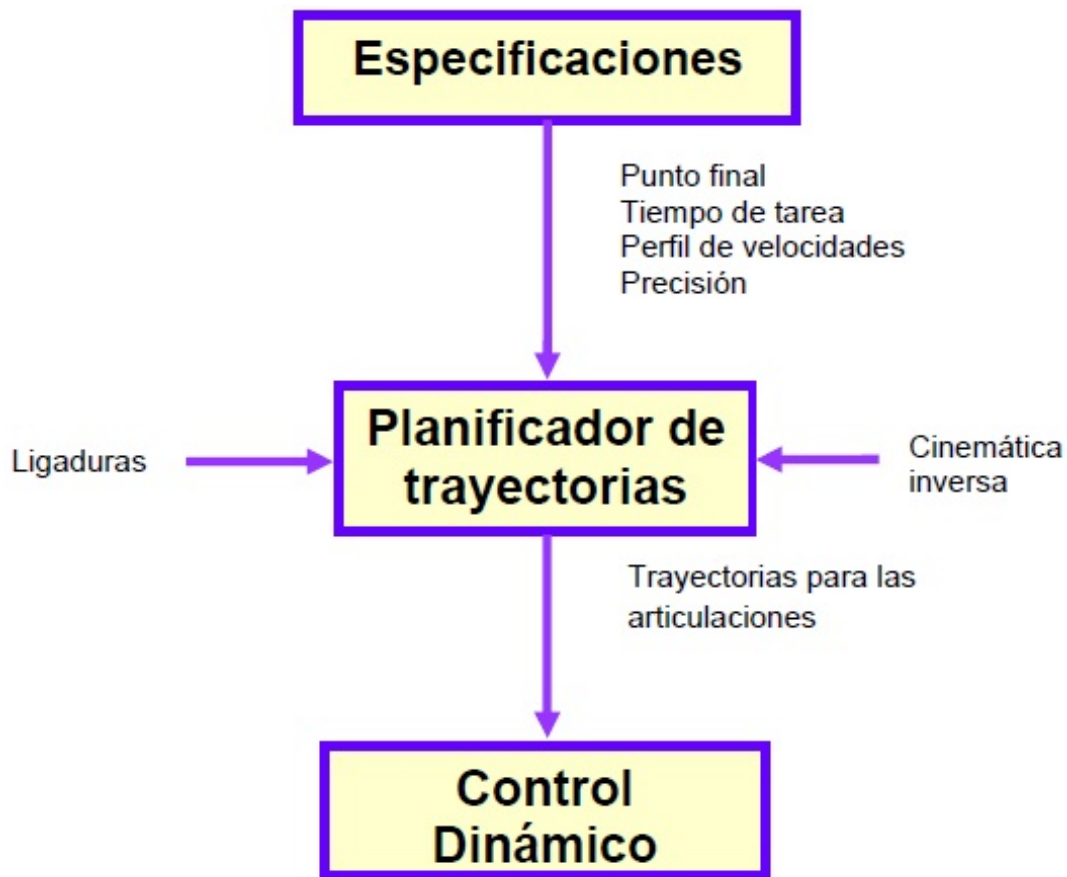


Figura 2.2: Funcionamiento del control cinemático, (Sánchez & Sigut, 2005)

- **Trayectorias punto a punto:** en este tipo de trayectorias cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o evolución de las demás articulaciones. Normalmente, cada actuador trata de llevar a su articulación al punto de destino en el menor tiempo posible, lográndose entonces distinguir dos casos: movimiento eje a eje y movimiento simultáneo de ejes, [43].
- **Trayectorias coordinadas o isócronas:** para evitar que algunos actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar después la conclusión del movimiento de la articulación más lenta, puede hacerse un cálculo previo, averiguando cuál es esta articulación y qué tiempo invertirá, [43].
- **Trayectorias continuas:** cuando se pretende que la trayectoria que sigue el extremo del robot sea conocida por el usuario (trayectoria en el espacio cartesiano o de la tarea), es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares, [43].

2.1.5. Control dinámico

El control dinámico selecciona trayectorias que idealmente deberá seguir el robot para, ajustarse lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el del usuario, teniendo en cuenta sus limitaciones.

El control dinámico tiene como objetivo procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot $q(t)$ sean lo más parecidas posible a las propuestas por el control cinemático como trayectorias deseadas $q_d(t)$. Para llevar a cabo esa tarea se hace uso del conocimiento del modelo dinámico del robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría del servocontrol (estabilidad de Lyapunov, control PID, control adaptativo, etc.). El modelo dinámico de un robot es fuertemente no lineal, multivariable, acoplado y de parámetros variantes, por lo que, en general, su control es extremadamente complejo, [24].

Una posibilidad para controlar el movimiento articular es considerar un modelo de robot compuesto por la superposición de articulaciones totalmente independientes unas de otras, sin tener en cuenta la interacción entre ellas, que sin duda existe y condiciona el movimiento global. Por tanto, en esta situación el modelo dinámico empleado es directamente el correspondiente al accionador de una articulación. De este modo, este control se conoce como control desacoplado o monoarticular, [61].

Por otra parte, el control acoplado o multiarticular se basa en un modelo de robot en el que se considera el modelo dinámico global del mismo, es decir, se tiene en cuenta la influencia de los movimientos de las articulaciones entre sí.

2.2. Antecedentes históricos de la robótica

La palabra “robot ”se escuchó por primera ocasión con la obra R.U.R, (rossum’s universal robots) del escritor checo karel Capek, estrenada en 1921 en el teatro nacional de Praga, [3]; es una palabra checoeslovaca que significa trabajador, sirviente, esclavo, etc..., pero en realidad se distingue como trabajo forzoso. Para Karel esa palabra “Robot” nunca la asoció como un ser mecánico como se conoce hoy en día, entonces no es pertinente brindarle la autoría de la definición que se tiene en la actualidad a Karel Capek.

Años más tarde Isaac Asimov al publicar en la revista Galaxy Science Fiction una historia en donde se enuncian tres leyes de la robótica se convierte en el máximo impulsor de la palabra Robot, [60].

1. Un robot no puede perjudicar a un ser humano ni con su inacción permitir que un ser humano sufra daño.

2. Un robot ha de obedecer las órdenes recibidas de un ser humano, excepto si tales órdenes entran en conflicto con la primera ley.
3. Un robot puede proteger su propia existencia mientras tal protección no entre en conflicto con la primera o segunda ley.

Al hablar de historia de la robótica no podemos dejar de lado a Leonardo Da Vinci, ya que el desarrollo de los sistemas mecánicos tuvo una notable influencia gracias a él. Leonardo fue conocido principalmente por sus actividades de pintura con las que subsistía pero además se desempeñó como científico, ingeniero, médico, escultor, músico y filósofo. En el aspecto de ciencia e ingeniería, inventó una multitud de prototipos mecánicos para diversas aplicaciones y de gran utilidad para la ciudad de Florencia. Creó el primer robot completamente articulado utilizando una armadura de caballero de guerra también creó artefactos de guerra, una ingeniosa sierra mecánica y diseñó puertas semiautomáticas (Ver figura 2.3).



Figura 2.3: Humanoide construido por Da Vinci

A continuación se presenta importantes acontecimientos de manera ascendente sobre la robótica:

AÑO	ACONTECIMIENTO
A.C	En la historia de la humanidad existen registros de máquinas automatizadas empleadas en las guerras, la agricultura y la construcción.
1206	Al-jazari desarrolla el primer robot humanoide.
1352	Se desarrolló un gallo mecánico que cantaba y agitaba las alas (Gallo de Estrasburgo).
1459	Leonardo Da Vinci crea el humanoide automatizado.
1738	Jacques Vaucanson crea un pato mecánico.
1920	Karel Capek introduce el término robot en la novela <i>Russum's Universal Robots</i> .
1939 - 1940	En la feria del mundo se exhibe a Elektro un robot humanoide fabricado por Westinghouse Electry Corporation.
1940	Se inicia el desarrollo de la tecnología en robótica.
1954	George Devol diseña el primer robot reprogramable.
1961	Victor Scheinman desarrolla un robot articulado de 6 ejes (robot Stanford).
1973	Se introduce al mercado el primer robot (IRB6) controlado por un microprocesador.
1981	Haruhiko Asada diseña y construye el primer robot de transmisión directa.
1992	Alejandro Pedroza desarrolla el primer androide pianista (Don Cuco el guapo).
2000	Se presenta el robot humanoide ASIMO, el cual puede caminar e interactuar con personas.
2010	Se desarrollan los robots de cuarta generación. Robots inteligentes, con sensores sofisticados y control a tiempo real .

Cuadro 2.1: Acontecimientos históricos.

2.3. Tipos de robots

Alrededor de los años la tecnología ha ido avanzando de manera exponencial, tanto así que en la actualidad existe una gran variedad de robots con diversas estructuras geométricas, mecánicas y funcionales. A continuación se presenta de manera general cómo pueden estar clasificados los robots.

2.3.1. Robots móviles

Estos a su vez se clasifican de acuerdo con el medio en el que se desplazan.

- Terrestres: generalmente se desplazan por medio de ruedas o patas y tienen aplicaciones en rastreo, traslado de objetos, evasión de obstáculos, limpieza del hogar etc. Estos tipos de robot son muy usados en hogares, un ejemplo de ello son los carros con sensores; este tipo de robot es muy apetecido por los niños, además aparte de ser funcionales, su diseño puede llegar a ser muy adorable, [56].
- Marinos: son robots submarinos equipados con sensores especiales como: sonar, radar y visión telescópica, [56].
- Aéreos: son helicópteros o pequeños aviones operados a control remoto, los cuales pueden proporcionar imágenes aéreas para reconocimiento de terreno y superficie, [56].



Figura 2.4: Robots móviles (Cáceres & Charry, 2018)

2.3.2. Robots humanoides

Estos robots también son conocidos como androides, los cuales son máquinas capaces de imitar las funciones básicas del ser humano como lo es caminar, hablar, ver, limpiar y trasladar objetos, [11].

Este tipo de robot es muy conocido en personas de distintas edades ya que a lo largo de la historia, el cine lo ha expuesto en gran medida en películas como YO ROBOT y

TERMINATOR además en series muy conocidas como lo es Dragon Ball Z.

En la actualidad los androides aun no son capaces de igualar al ser humano debido a su incapacidad de sentir emociones. Aunque lo emocional es invisible, con el avance de la tecnología se podría obtener un robot capaz de inspirar y comunicar emociones como lo plantea Kenjiro Matsuo (Compositor).

En la figura (2.5) se presenta una banda de heavy metal llamada compresoorhead compuesta por robots humanoides. Cada uno de los integrantes tiene su propia personalidad; el baterista (Stickboy) tiene 4 brazos y 2 piernas, el guitarrista (Fingers) baila y gira mientras toca la guitarra con sus 78 dedos y es capaz de alcanzar notas imposibles por el humano y el bajista (Bones) es el bajista más preciso del mundo, [82].

Por otra parte también existen robots humanoides que poseen capacidades que pueden ser empleadas en el auxilio a personas en zonas de riesgos, es decir, buscar victimas atrapados en lugares donde hay derrumbes, llevarles agua, inclusive salvar vidas.

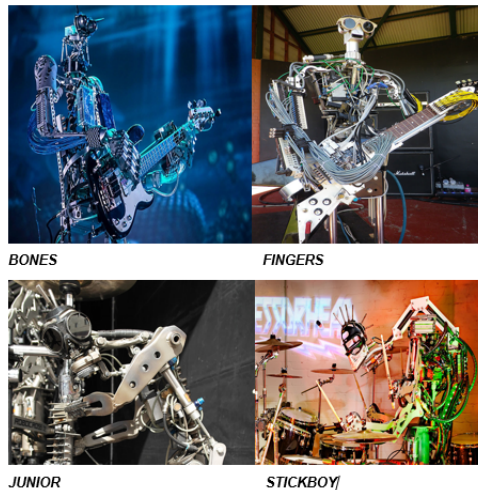


Figura 2.5: Compressorhead: Banda musical compuesta por robots (Cáceres & Charry, 2018)

2.3.3. Robots industriales

Generalmente se define como un robot multifuncional reprogramable capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales; según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas, [12].

Este tipo de robot es muy popular, debido a la importancia que ocupan en el sector industrial como herramientas para la modernización de las empresas. Estos robots también son conocidos como brazos robots o brazos mecánicos, por su analogía con el brazo humano en el cual su base puede rotar $360^{\circ}C$ alrededor de su eje de giro y a su

vez posee articulaciones para hombro y codo.



Figura 2.6: Brazo robot (Reyes, 2011)

Entre las compañías más importantes que diseñan y construyen robots industriales se encuentran FANUC, ABB, KUKA, MOTOMAN y EPSON.

En la actualidad hay robots industriales capaces de dibujar retratos humanos en diferentes ángulos; se trata de una cámara conectada al extremo del brazo robot, el cual es guiado por un cerebro (Laptop) pero este solo reconoce rostros humanos por su configuración. 2.7



Figura 2.7: Brazo robot (Reyes, 2011)

En forma general, un robot industrial está formado por:

- Articulaciones: permiten la conexión y movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos del robot. Dependiendo del tipo de movimiento que produzca sus articulaciones pueden ser de tipo rotacional o lineal, [73].
- Actuadores: suministran las señales necesarias a las articulaciones para producir movimiento, [73].
- Sensores: proporcionan información del estado interno del robot. Las variables más comunes en el sistema sensorial son la posición y la velocidad, [73].
- Sistema mecánico: consiste en una secuencia de eslabones rígidos de metal conectados en cadena abierta por medio de articulaciones, [73].

- Consola de control: se compone de un sistema electrónico, además incluye algoritmos de control programados en el sistema operativo del robot para guiarlos, [73].

2.4. Estadísticas del uso del robot

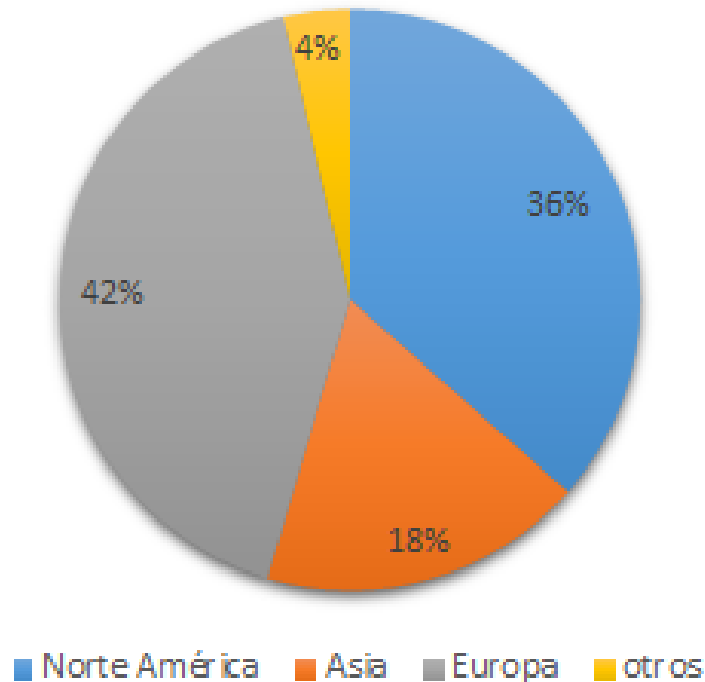


Figura 2.8: Estadísticas a nivel mundial, fuente: (Asociación española de robótica y asociación tecnologías de la producción)

El uso del robot se hace cada vez mayor a nivel mundial, en las últimas estadísticas realizadas por International Federation of Robotics (IFR) en el 2016 se muestran que los países con más usos de robots son: Estados Unidos, Japón, China y parte de Europa.

Japón es el país el cual lidera el uso en robots industriales seguido por Estados Unidos, pero en general se muestra el estudio del uso de robots tanto industriales, móviles y humanoides a nivel mundial.

Se puede observar que Estados Unidos es el país con más compañías robóticas en el mundo, lo que lo hace ser uno de los países más desarrolladas, luego lo sigue parte de Europa y el oriente.

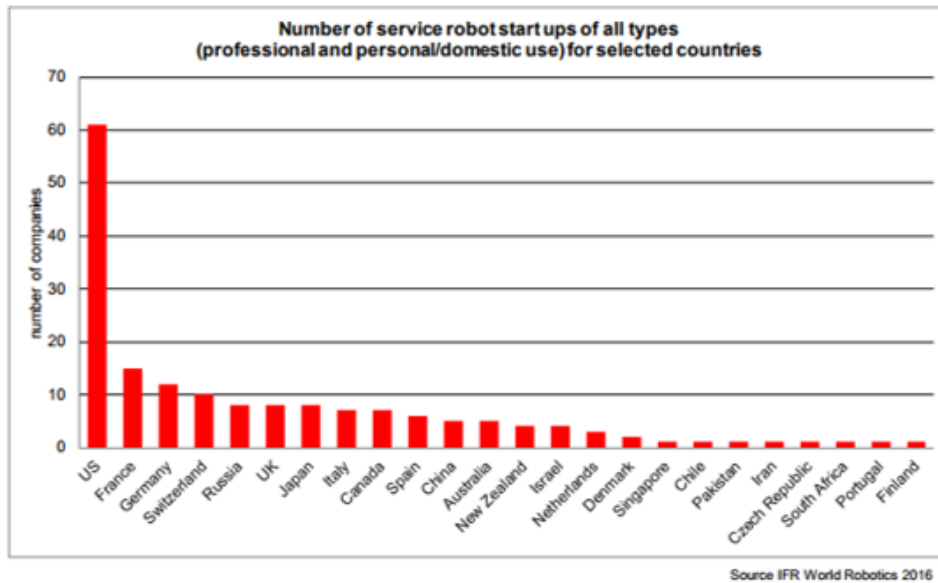


Figura 2.9: Estadísticas de las grandes ciudades del mundo, fuente: (Asociación española de robótica y asociación tecnologías de la producción)

2.4.1. Centros de investigación a nivel mundial

Algunas sociedades científicas más importantes de robótica en el mundo.

- **IEEE The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc:** es una asociación mundial de ingenieros dedicada a la estandarización y el desarrollo en áreas técnicas. Con cerca de 425 000 miembros y voluntarios en 160 países, es la mayor asociación internacional sin ánimo de lucro formada por profesionales de las nuevas tecnologías, como ingenieros eléctricos, ingenieros en electrónica, científicos de la computación, ingenieros en computación, matemáticos aplicados, ingenieros en biomedicina, ingenieros en telecomunicación, ingenieros en mecatrónica, ingenieros en telemática etc, [54].
- **IFAC International Federation on Automatic Control:** es una federación multinacional que se preocupa por el control automático y su representación en los campos de la ingeniería, la ciencia y el impacto de la tecnología de control en la sociedad, [54].
- **IASTED International Association of Science and Technology for Development:** es una organización sin fines de lucro dedicada a promover los avances sociales, económicos y técnicos en todo el mundo. Fundada en 1977, IASTED organiza conferencias multidisciplinarias para académicos y profesionales en los campos de la ciencia, la ingeniería, la medicina, la gestión y la educación, [54].
- **IFR International Federation of Robotics:** es una organización profesional sin fines de lucro establecida en 1987 para promover, fortalecer y proteger la industria robótica en todo el mundo, [54].

- **BARA British Association of Robotics and Automation:** Es la asociación comercial que representa la robótica y la automatización en el Reino Unido. Dos tercios de los robots industriales del Reino Unido están en la industria automotriz, [54].

2.4.2. Robótica en Colombia

En Colombia se han generado en las últimas décadas grupos de investigación, presentamos a continuación algunos de ellos:

- **SIRP:** el grupo SIRP (Sistemas Inteligentes, Robótica y Percepción) de la facultad de ingeniería en la Pontificia Universidad Javeriana ubicada en la ciudad de Bogotá, ha surgido de la formación de un grupo interdisciplinario de profesores de diferentes departamentos, liderado por el Departamento de Electrónica, con un objetivo común: profundizar, apropiarse y aplicar el conocimiento involucrado alrededor de estas tecnologías de punta.

Este grupo busca focalizar sus trabajos sobre la problemática final de la máquina inteligente. Sus investigaciones están enfocadas en el estudio y la concepción de entes que integren capacidades de percepción, de acción y de razonamiento. Los robots deben ser capaces de poder interactuar con los usuarios, y con otras máquinas en un ambiente dinámico y probablemente evolutivo para la realización robusta de tareas diversas, [84].

- **GrupLAC:** es un grupo de robótica ubicado en la Universidad del Norte en Barranquilla el cual posee cuatro campos de acción bien definidos: En robótica, el grupo desarrolla trabajos de I&D con plataformas móviles y fijas aplicando desarrollos en sensores, algoritmia de planificación, guiado y aplicaciones de Inteligencia Artificial. En producción automática, el grupo ha desarrollado múltiples proyectos universidad-empresa y de innovación tecnológica. En sistemas inteligentes han desarrollado software de programación para la adecuación inteligente de espacios, reconocimiento por imágenes, de operaciones y de enrutamiento de vehículos, y, en general de sistemas inteligentes de transporte. Además, el trabajo en investigación básica apunta hacia el desarrollo y aplicación de nuevos algoritmos heurísticos de inteligencia computacional para optimización y control de dispositivos. Por otra parte, la I&D en visión artificial y de interfaces hombre-máquina con base en señales bio-eléctricas han tenido un alto reconocimiento internacional, [85].
- **GIRA:** el Grupo de Investigación en Robótica y Automatización Industrial de la UPTC (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia) “GIRA”, ha nacido como respuesta a la creciente necesidad de aplicación y actualización tecnológica del sector industrial y agroindustrial de la región; además, pretende generar conocimiento que contribuya a la apropiación tecnológica, y al desarrollo del país en el campo de la electrónica, [86].

- **IMAGINE:** es un grupo de la Universidad de los Andes el cual busca desarrollar y poner al servicio de la sociedad conocimiento y tecnología basados en procesamiento de imágenes, visualización 3D por computador, interacción con dispositivos no convencionales y robótica. Estos conocimientos permiten al grupo trabajar en proyectos de investigación aplicada tanto en el sector científico como industrial mediante el desarrollo de soluciones innovadoras. Las principales áreas de aplicación son: biomedicina, entretenimiento, diseño de modelos 3D (ingeniería, arquitectura, biología molecular, entre otras.), programación y control de dispositivos, [87].

A continuación se presentan algunas de las empresas más importantes en nuestro país en el área de robótica y automatización.

- **Vistrónica S.A.S:** es una empresa Colombiana creada en el municipio de Fusagasugá, Cundinamarca, dedicada a la venta de componentes electrónicos en todo el territorio Colombiano a través de internet.

Vistrónica se caracteriza por brindar los mejores precios del mercado, gracias a la red de proveedores que se han adquirido en Asia, Europa y América, permitiendo así tener contacto directo con diversos fabricantes, quienes cumplen con los más altos estándares de calidad y a los mejores precios, al ser importadores directos, [88].

- **A1A Visa:** es una compañía de seguridad, creadora de un dispositivo robot avanzado de vigilancia llamado Guard. El objetivo de Guard es realizar rondas de seguridad, controlar alarmas de fuego o temperatura y monitorear pasillos y salones. Tiene un computador interno con software de análisis inteligente de imágenes e inteligencia artificial, para detectar, por ejemplo, paquetes fuera de su lugar u objetos extraños dentro de un ambiente predeterminado. El robot, al identificar la anomalía, envía una alarma de manera inalámbrica (a través de Wi-Fi) al centro de control de vigilancia, lo que permite una reacción inmediata. Además la empresa ofrece otros tipos de robots diseñados para la vigilancia, [89].
- **CAV Ingenieros (Control y Automatización virtual):** es una empresa que ofrece soluciones confiables y efectivas en la implementación de celdas robóticas y/o equipos complementarios para manufacturas industriales, apoyados y respaldados de marcas mundialmente reconocidas. Son los únicos KUKA Official System Partner de la región Andina (Colombia, Ecuador, Perú, Venezuela), el respaldo de KUKA abarca asesoramiento técnico, diseño, servicio post venta, capacitación, repuestos, documentación técnica, etc... Permittiéndonos pertenecer a la más grande red de conocimiento de robótica aplicada del mundo y hacer parte del exclusivo mundo de los integradores oficiales KUKA, [90].
- **Robotika S.A.S (Ingeniería de Automatización y Formación en Robótica Industrial):** empresa colombiana dedicada a la automatización de procesos con robots industriales y la difusión de la robótica industrial, expertos y pioneros en

Colombia en la integración de Robots industriales con experiencia y aplicaciones reales, asesorando e implementando proyectos con celdas robotizadas acordes a los requerimientos técnicos y a la disponibilidad real de inversión con que cuenta nuestra industria nacional, [91].

2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton

2.5.1. Principio variacional

En este apartado nos ocuparemos de los funcionales que tienen la siguiente forma:

$$A[q, \dot{q}] = \int_{t_1}^{t_2} F(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.1)$$

donde A asigna un número a cada función $q(t)$ en un intervalo $[t_1, t_2]$.

El cálculo de variaciones se ocupa de encontrar los máximos y mínimos o más generalmente los puntos estacionarios de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional, [60].

Diremos que una función $q(t)$ sufre una variación δq si cambia $\hat{q} = q + \delta q$. Ahora centraremos nuestra atención a variaciones que se anulen en los extremos de los intervalos de integración, es decir,

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (2.2)$$

donde $q(t)$ y $\hat{q}(t)$ son trayectorias próximas que conectan los puntos $(t_1, q(t_1))$ y $(t_2, q(t_2))$. Además, la variación de $q(t)$ induce una variación en $\dot{q}(t)$.

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad (2.3)$$

Y por lo tanto la variación del funcional A es:

$$\begin{aligned} \delta A[q, \dot{q}] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} F(q(t), \dot{q}(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta F(q(t), \dot{q}(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la segunda parte del integrando del funcional A es:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} \right) dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt
\end{aligned} \tag{2.5}$$

esto se obtiene reemplazando (2.3) en (2.4) y aplicando el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}, & du &= \frac{d(\delta q)}{dt} \\
dv &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right), & u &= \delta q
\end{aligned}$$

También se utiliza el hecho de que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ lo que indica $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$. Ahora, reemplazando (2.5) en (2.4) tenemos;

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt \tag{2.6}$$

2.5.2. Ecuaciones de Euler - Lagrange

Según [60]. Las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen de modo natural mediante el cálculo de variaciones y representa las ecuaciones de movimiento. En el sentido matemático la lagrangiana es aquella cantidad que minimiza la acción, así que lo que tenemos aquí es un principio de mínima acción.

Para que A sea extremal se debe tener que $\delta A = 0$ para todas las variaciones δq por tanto el integrando (2.6) necesariamente debe anularse,

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \tag{2.7}$$

se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange; la cual es una ecuación diferencial de segundo orden en la que q es la variable dependiente y t la independiente. Además la solución general dependerá de dos constantes arbitrarias que se deben fijar de modo que $q(t_1) = q_1$ y $q(t_2) = q_2$.

En general utilizaremos funcionales de la forma, q_j, \dot{q}_j con $j = 1, 2, \dots, n$ y así la condición de punto estacionario es entonces;

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

La cual representa un conjunto de n -ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Definición 2.1. Multiplicadores de Lagrange ι : es un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con $n + k$ variables a uno sin restricciones de n variables, donde k es igual al número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. El método dice que los puntos donde la función tiene un extremo, condicionado con k restricciones, están entre los puntos estacionarios de una nueva función sin restricciones construida como una combinación lineal de la función y las funciones implicadas en las restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores, [33].

2.5.3. Principio de Hamilton

A todo sistema de n grados de libertad (Es el número de coordenadas independientes necesarias para expresar la posición de todas las partes del robot y es el que determina la accesibilidad del robot) con coordenadas generalizadas q_j con $j = 1, 2, \dots, n$, [60]. Le corresponde una función $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ llamada potencial que describe las iteraciones que caracteriza y determina el movimiento, de forma que cuando el sistema vaya desde un punto hacia otro lo haga de forma que minimice el recorrido. Esta es llamada la integral de acción;

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, \dot{q}_i, t)] dt$$

donde T es la energía cinética del sistema.

Ahora, si definimos el Lagrangiano como:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

se puede escribir la integral de acción como sigue,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] dt$$

y si L no depende de t , es decir, $\frac{dL}{dt} = 0$ el sistema es llamado autónomo.

Ejemplo 2.1. Un móvil trata de llegar del punto x_1 al punto x_2 . Calcular la curva que pasa por los puntos p_1, p_2 en el plano xy con longitud mínima.

Solución

Debemos encontrar el funcional para la longitud de una curva $y = f(x)$.

$$S(x) = \int_{x_1}^{x_2} dl$$

donde $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, dl es la longitud de un arco en general, y $dx = x_1 - x_2$; $dy = y_1 - y_2$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

por tanto el funcional es de la forma,

$$S(x) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

de la ecuación de Euler - Lagrange se tiene que,

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

donde $F = \sqrt{1 + y'^2}$, por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad y, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

y así,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) dx = 0$$

y luego por el teorema fundamental del cálculo, tenemos entonces,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y' = k \sqrt{1 + y'^2}$$

$$y'^2 = k + ky'^2$$

$$y'^2(1 - k) = k$$

$$y' = \sqrt{\frac{k}{1 - k}} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = a$$

$$y = ax + b$$

Por lo tanto la ecuación que minimiza la trayectoria del móvil en esos puntos corresponde a una línea recta. Ahora bien, teniendo en cuenta la información dada anteriormente, procedamos hablar sobre robótica móvil.

2.6. Robótica Móvil

La robótica móvil ha cobrado mayor importancia ya que a diferencia de los robots manipuladores (los cuales tienen restringidos sus espacios debido a sus dimensiones físicas con las cuales deben cumplir ciertas tareas) estos poseen un espacio de trabajo ilimitado.

Para (Leonard JI. [40]). Los robots móviles con ruedas son los más eficientes para conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros y libres de obstáculos, tienen como limitación el desplazamiento en la impulsión; también pueden presentarse deslizamientos y vibraciones dependiendo del terreno en donde este se desplace. Estos robots emplean diferentes tipos de locomoción mediante ruedas que les confieren características y propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.

De otra parte, los robots móviles se clasifican de la siguiente manera: terrestres, aéreos y marinos. Pero este trabajo se enfoca en los terrestres, específicamente aquellos que se desplazan por medio de ruedas debido a que la rueda ha sido el mecanismo de locomoción más utilizado en la robótica móvil.

2.6.1. Configuración de robots móviles

Para (Ollero. [50]). Un robot móvil se define como un sistema electromecánico capaz de desplazarse de manera autónoma sin estar sujeto físicamente a un solo punto. Posee sensores que permiten monitorear a cada momento su posición relativa a su punto de origen y a su punto de destino. Su desplazamiento es proporcionado mediante dispositivos de locomoción, tales como ruedas, patas, orugas, etc.

Como se ha mencionado anteriormente, el prototipo que se va a estudiar es un robot móvil con ruedas, por tanto es de gran importancia el estudio de las características más significativas de los sistemas de locomoción con ruedas. Veamos algunas de las configuraciones más conocidas:

- Con las ruedas traseras motrices y las delanteras directrices.
- con las ruedas delanteras motrices y directrices.
- Ambos pares de ruedas directrices y tracción delantera.

En este sistema es frecuente el uso de suspensiones para mayor estabilidad y evitar daños por desperfectos del terreno, sin embargo se pueden usar éstas en cualquier diseño. Este diseño, al igual que del triciclo, tiene la desventaja de que su orientación está ligada a la posición, es decir, no puede orientarse en una determinada dirección sin avanzar o retroceder, es decir, sin variar su posición, lo que supone un inconveniente en según qué situaciones, [45].

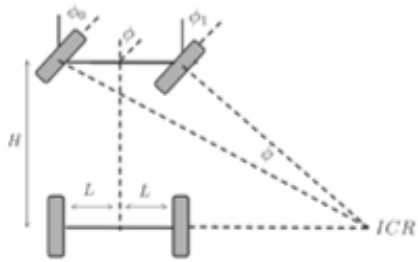


Figura 2.10: Ackerman, (Reyes, 2011)

Ackerman: esta configuración se compone de cuatro ruedas y proporciona una adecuada estabilidad. Ackerman es el término para describir la geometría de conducción que ocasiona que la rueda delantera interna sea más firme que la rueda delantera exterior ya que esta gira a un ángulo ligeramente superior al exterior $\phi_1 > \phi_2$, lo que elimina el deslizamiento (Barrientos & otros. [9]).

Para (McKerrow. [45]). Es el sistema más ampliamente utilizado en automoción. Se basa en un diseño con cuatro ruedas, dos traseras y dos delanteras. Los diseños más extendidos son:

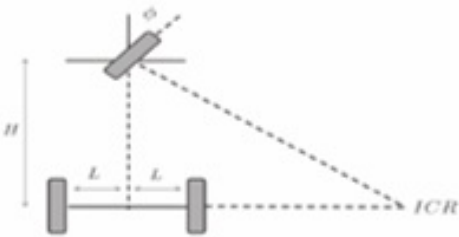


Figura 2.11: Triciclo clásico, (Reyes, 2011)

Triciclo Clásico: esta configuración es la más común ya que consta de tres ruedas, una delantera y dos traseras este es también conocido como delta, proporciona una plataforma estable y el efecto del triciclo hace que el robot obtenga una distribución de peso y un mejor movimiento. Para (Reyes, [60]), la base de este triciclo es la longitud entre el eje de las ruedas traseras y la rueda delantera. Además, una base corta genera un radio de giro menor, mientras que una base larga hace al radio de giro más grande. Esta configuración es más avanzada que la del monociclo el cual, es un robot con una sola rueda, se nombra debido a que el modelo cinemático de este va a depender del modelo cinemático del monociclo.

El equilibrio del robot se obtiene mediante una o dos ruedas adicionales de apoyo formando un diseño triangular o romboidal. El diseño triangular puede no ser suficiente dependiendo de la distribución de peso del robot, y el romboidal puede provocar poca adaptación al terreno si éste es irregular, lo que puede exigir alguna clase de suspensión, [60].

2.6.2. Cinemática de robots móviles

La cinemática en robots móviles se ocupa de la configuración de ellos en su espacio de trabajo, en las relaciones entre sus parámetros geométricos y las restricciones impues-

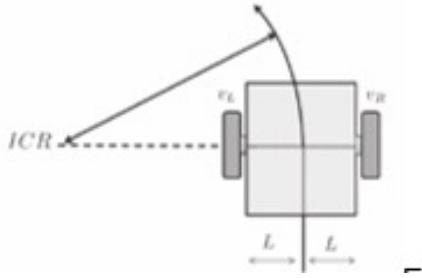


Figura 2.12: Direccionamiento diferencial, (Reyes, 2011)

Direccionamiento Diferencial: en (Reyes, [60]). En esta configuración el centro instantáneo de rotación (ICR) sobre el cual el robot móvil pivotea está sobre una línea perpendicular que atraviesa el centro de las ruedas. Los robots de este tipo pueden moverse en línea recta, girar sobre sí mismos y trazar curvas.

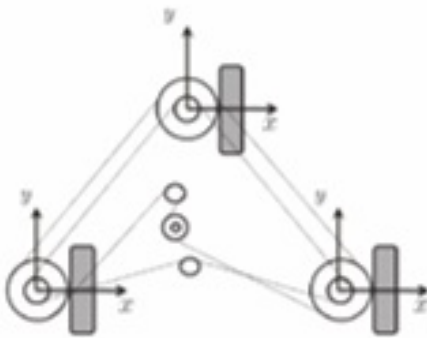


Figura 2.13: Sincrona, (Reyes, 2011)

Sincrona: usualmente tiene tres ruedas y todas ellas son tanto de dirección como de tracción, [60]. Para (Taha & otros [68]), este sistema se basa en que el chasis del robot no cambia de dirección al girar. Las ruedas, motrices y directrices simultáneamente, giran en concordancia sobre un mismo eje vertical para el giro del robot, manteniendo la dirección del chasis. Este hecho en robots asimétricos puede suponer un problema en cuanto a la distribución de los sensores, problema solventable con un sistema de control del ángulo formado entre las direcciones de chasis y ruedas. Al igual que el diseño diferencial, su orientación es independiente de la posición.

tas en sus trayectorias. Además, el estudio de la cinemática es fundamental para poder estudiar la dinámica de los RMR, [69].

Las ecuaciones cinemáticas dependen de la estructura geométrica del robot. Por ejemplo, un robot fijo (brazo robot) puede tener una estructura cartesiana, cilíndrica, esférica o articulada; y un robot móvil puede tener una, dos, tres o más ruedas con o sin restricciones en su movimiento.

2.6.2.1. Cinemática de RMR, Directa e Inversa

Consideremos un RMR con coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n en el espacio de articulación (o actuación) y x_1, x_2, \dots, x_m en el espacio de trabajo, definimos por tanto los vectores:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

el problema de determinar X conociendo q es llamado el problema de la cinemática directa, [67].

Veamos que $X \in \mathbb{R}^m$ y $q \in \mathbb{R}^n$ se encuentran relacionados por una función no lineal (modelo) como:

$$X = f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(q) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

y al siguiente problema se le conoce como problema de la cinemática inversa, la cual se expresa como:

$$q = f^{-1}(X) \quad (2.10)$$

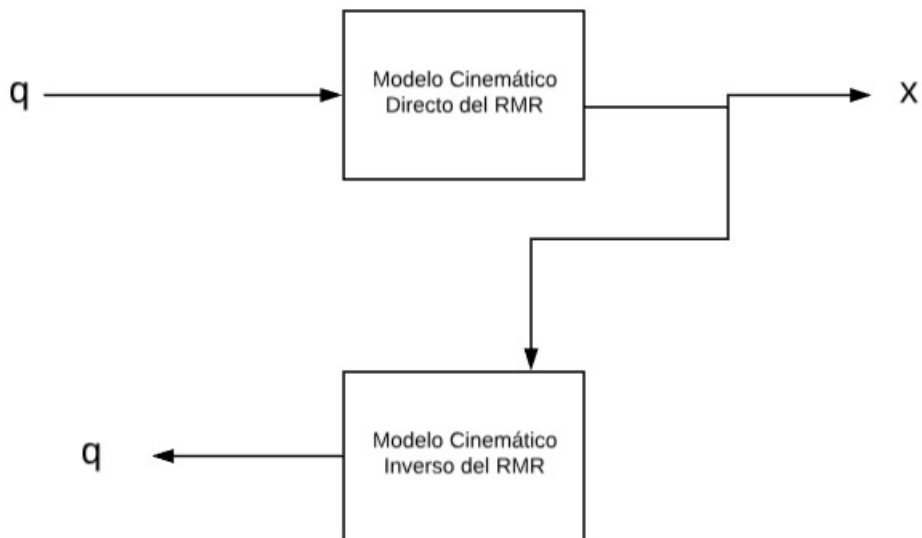


Figura 2.14: Cinemática Directa e Inversa

En general, la cinemática es la rama de la mecánica que investiga el movimiento de los cuerpos materiales sin referirse a sus masas, momentos de inercia y las fuerzas que producen el movimiento, [24]. Para obtener estos movimientos debemos sintonizar apropiadamente los movimientos de las variables conjuntas expresadas por las velocidades (primeras derivadas parciales de q en (2.8)).

$$\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$$

Por lo tanto, necesitamos encontrar la relación diferencial de q y X , esto es llamado cinemática diferencial directa y se expresa mediante:

$$dX = Jdq$$

donde,

$$dq = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}; \quad dX = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

y la matriz ($m \times n$)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial q_1} & \frac{\partial x_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} = [J_{ij}] \quad (2.12)$$

con (i, j) elementos, donde $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ la cual es llamada matriz jacobiana del robot.

Para cada configuración q_1, q_2, \dots, q_n del robot, la matriz anterior representa la relación de los desplazamientos de las articulaciones con el desplazamiento de la posición del robot en el espacio de trabajo.

Sea $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ y $\dot{X} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m]^T$ las velocidades en las articulaciones y en el espacio de trabajo.

Entonces, dividiendo la ecuación (2.11) por dt obtenemos:

$$\frac{dX}{dt} = J \frac{dq}{dt} \quad \text{ó} \quad \dot{X} = J\dot{q} \quad (2.13)$$

- Si $m = n$ lo que hace a J una matriz cuadrada, entonces la inversa de la matriz Jacobiana existe (e.d, $\det J \neq 0$). De la ecuación (2.13) se obtiene:

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X} \quad (2.14)$$

esta es la ecuación cinemática diferencial inversa.

- Si $m \neq n$, entonces se dan dos casos:

Caso 1

Hay más ecuaciones que incógnitas $m > n$. En este caso J^{-1} en (2.14) es reemplazada por la inversa generalizada J^* dada por:

$$J^* = (J^T J)^{-1} J^T \quad (2.15)$$

bajo la condición que J es de rango completo (e.d, $J = \min(m, n) = n$) así como $J^T J$ es invertible. De la ecuación (2.15), J^* sigue minimizando la norma de la diferencia $\dot{X} - J\dot{q}$ de la función:

$$V = \left\| \dot{X} - J\dot{q} \right\|^2 = (\dot{X} - J\dot{q})^T (\dot{X} - J\dot{q})$$

derivando V respecto a \dot{q}

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = -2(\dot{X} - J\dot{q})^T J = 0$$

aplicando la propiedad distributiva a la izquierda,

$$-2(J^T \dot{X} - J^T J\dot{q}) = 0$$

ahora, nuevamente aplicando la propiedad distributiva a la derecha;

$$-2J^T \dot{X} + 2J^T J\dot{q} = 0$$

finalmente, agrupando y despejando \dot{q} se tiene,

$$\dot{q} = (J^T J)^{-1} J^T \dot{X}.$$

Caso 2

Aquí son menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$) es decir, que muchas opciones de \dot{q} conducen al mismo \dot{X} . En este caso, seleccionamos \dot{q} con la mínima norma, es decir, resolvemos el problema de minimización restringido:

$\min \|\dot{q}\|^2$ sujeto a $\dot{X} - J\dot{q} = 0, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$. Sea ι el multiplicador de Lagrange, [33] así obtenemos el problema de minimización lagrangiana aumentada (no restringida).

$$\min_{\dot{q}, \iota} L(\dot{q}, \iota), \quad L(\dot{q}, \iota) = \dot{q}^T \dot{q} + \iota^T (\dot{X} - J\dot{q})$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q} - J^T \iota = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \iota} = \dot{X} - J\dot{q} = 0 \quad (2.17)$$

resolviendo la ecuación (2.16), tenemos;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q} - J^T \iota = 0$$

$$2\dot{q} - J^T \iota = 0$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} J^T \iota$$

reemplazando \dot{q} en la ecuación (2.17), obtenemos,

$$\frac{\partial L}{\partial \iota} = \dot{X} - J\left(\frac{1}{2} J^T \iota\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} J J^T \iota = \dot{X}$$

$$\iota = 2(J J^T)^{-1} \dot{X}$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} J^T (2(J J^T)^{-1} \dot{X})$$

donde,

$$J^* = J^T (J J^T)^{-1} \quad (2.18)$$

Bajo la condición de que el rango $J = m$ (e.d JJ^T es invertible). Por lo tanto, cuando $m < n$ la inversa generalizada de la ecuación (2.18) debe ser usada.

Formalmente, la inversa generalizada J^* de una matriz real J de tamaño $m \times n$ cumple las siguientes cuatro condiciones:

$$JJ^*J = J; \quad J^*JJ^* = J^*$$

$$(JJ^*)^T = JJ^*; \quad (J^*J)^T = J^*J$$

no obstante, resulta que J^* tiene las propiedades: $(J^*)^* = J$; $(J^T)^* = (J^*)^T$; $(JJ^T)^* = (J^*)^T J^*$.

Todas las relaciones anteriores son útiles cuando se trata de sistemas algebraicos lineales sobreespecificados o no sobreespecificados (por ejemplo, en sistemas mecánicos no activados o sobreactivados), [53].

2.6.2.2. Transformaciones Homogeneas

La posición y orientación de un cuerpo sólido con respecto a \mathbb{R}^3 están dadas por una matriz A de transformación (4×4), llamada transformación homogénea del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} R & : & X & \\ \dots & & & \dots \\ 0 & : & 1 & \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde X es el vector posición del centro de gravedad y R es una matriz (3×3) definida como:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3] \quad (2.20)$$

donde, e_1, e_2 y e_3 son los vectores unitarios en \mathbb{R}^3 . La matrix R representa la rotación de x, y, z (matrix rotacional) en \mathbb{R}^3 . Además las columnas e_1, e_2, e_3 son ortonormales, es decir,

$$e_1^T \cdot e_2 = 0; \quad e_2^T \cdot e_3 = 0; \quad e_3^T \cdot e_1 = 0$$

$$|e_1| = 1; \quad |e_2| = 1; \quad |e_3| = 1.$$

Así, la matriz rotacional R es ortonormal, es decir $R^{-1} = R^T$.

Además,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & \vdots & -R^T X & \\ \dots & & & \dots \\ 0 & \vdots & 1 & \end{bmatrix}$$

las matrices de rotación con respecto a los ejes xyz se representan como:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y está dada por:

$$R_x(\phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_x) & -\sin(\phi_x) \\ 0 & \sin(\phi_x) & \cos(\phi_x) \end{bmatrix}$$

se fija el eje x y se rota sobre él,

$$R_y(\phi_y) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & -\sin(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix}$$

Se fija el eje y y se rota sobre él,

$$R_z(\phi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se fija el eje z y se rota sobre él.

Donde ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z son ángulos de rotación con respecto a x, y, z . En Robots móviles que se mueven en un plano horizontal, el robot está girando solo con respecto al eje vertical z , por lo tanto la matriz rotacional será R_z , [67].

2.6.2.3. Restricciones no Holonómicas

Una restricción no holonómica se define como una restricción que contiene derivadas de tiempo de coordenadas generalizadas (variables) de un sistema y no es integrable, [67].

Para entender esto, primero definimos una restricción holonómica como cualquier restricción que se pueda expresar en la forma:

$$F(q, t) = 0 \quad (2.21)$$

donde $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ es el vector de coordenadas generalizadas. Ahora supongamos que tenemos una restricción de la forma:

$$f(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (2.22)$$

si esta restricción se puede convertir a la forma $F(q, t) = 0$ diremos entonces que esta es integrable, [67]. Por lo tanto, aunque f en la ecuación (2.22) contiene la derivada de tiempo \dot{q} , esta puede ser expresada en forma holonómica (2.21) por lo que en realidad es una restricción holonómica. Más específicamente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.2. Restricción no-holonómica: una restricción f se dice no-holonómica si f no puede ser representado por (2.21) de modo que involucre solo las variables generalizadas. Los robots móviles de ruedas (RMR) está sujeto a restricciones no holonómicas, [12].

Definición 2.3. Restricciones Pfaffian, [12].: una restricción no-holonómica se denomina restricción Pfaffian si es lineal en \dot{q} , es decir si este puede ser expresado en la forma

$$\mu_i(q)\dot{q} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

donde μ_i es un vector fila linealmente independiente y $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ en forma de matriz compacta, las restricciones de Pfaffian se pueden escribir como:

$$M(q)\dot{q} = 0; \quad M(q) = \begin{bmatrix} \mu_1(q) \\ \mu_2(q) \\ \vdots \\ \mu_r(q) \end{bmatrix}$$

La restricción no-holonómica que se encuentra en la robótica móvil es la restricción de movimiento de un disco que rueda sobre un plano sin deslizarse, [67]. La condición de no deslizamiento no permite que las velocidades generalizadas \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\phi}$ tomen valores arbitrarios. Ver fig: (2.15).

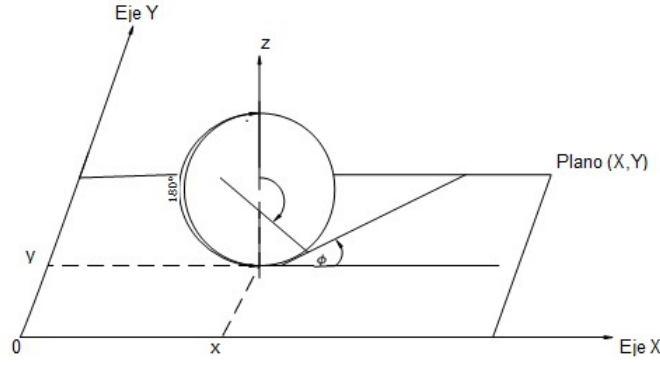


Figura 2.15: Condición de no deslizamiento(Cáceres & Charry, 2018)

Debido entonces a la condición de no deslizamiento, las coordenadas generalizadas están limitadas por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \cos \phi, \quad \dot{y} = r\dot{\theta} \sin \phi \quad (2.23)$$

donde r es el radio del disco y además (2.23) no es integrable. Estas restricciones expresan la condición de que el vector de velocidad del centro del disco se encuentre en el plano medio del disco. Ahora sustituyendo la velocidad por $v = r\dot{\theta}$ y despejando $r\dot{\theta}$ de (2.23) tenemos:

$$v = r\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{\cos \phi} = \frac{\dot{y}}{\sin \phi} \quad \text{o,} \quad \dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi = 0$$

esta es la relación no-holonómica del movimiento del disco. Debido a las restricciones cinemáticas de (2.23), el disco puede alcanzar cualquier configuración final $(x_2, y_2, \phi_2, \theta_2)$ empezando por una configuración inicial $(x_1, y_1, \phi_1, \theta_1)$ lo cual se puede hacer en dos pasos como sigue:

Paso 1: Mover el punto de contacto (x_1, y_1) a (x_2, y_2) haciendo rotar el disco a lo largo de una línea de longitud, esto es:

$$(2k\pi + \theta_2 - \theta_1)r, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Paso 2: Girar el disco sobre el eje vertical desde ϕ_1 a ϕ_2 .

Por lo tanto, dada una restricción cinemática, se debe determinar si es integrable o no. Esto lo hace el Teorema de Frobenius, el cual, usa conceptos de geometría diferencial, conceptos de distribución y conjuntos de Lie, [26]. En esta investigación

no se enfoca en ellos.

Como se había indicado al inicio de este capítulo, los robots móviles tienen distintas configuraciones y dependiendo de su configuración así mismo cambia su modelo cinemático. Aquí estudiaremos solo uno de ellos que es el que nos concierne (**Direccionamiento Diferencial**). Se empieza dando el modelo cinemático de un monociclo, ya que el diferencial depende originalmente de él.

2.6.2.4. Monociclo

El monociclo tiene un modelo cinemático el cual es usado como base de muchos tipos de RMR no-holonomicos. Por esta razón, este modelo ha atraído mucha atención teórica por los controladores de RMR y los trabajadores de sistemas no lineales.

El monociclo es una rueda convencional, que rueda sobre un plano horizontal, mientras mantiene su cuerpo vertical. Ver (2.16)

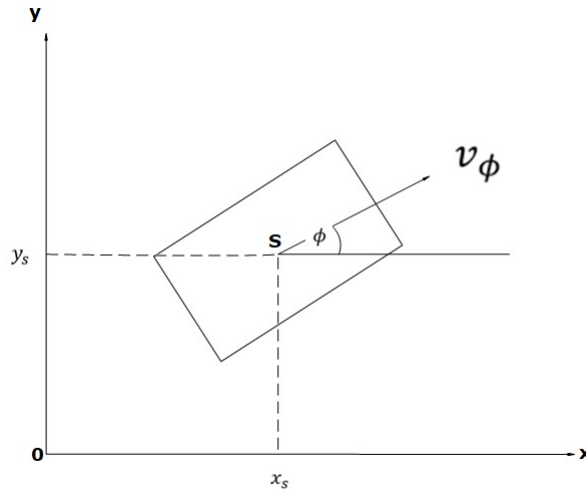


Figura 2.16: monociclo; (Cáceres & Charry, 2018)

Esta configuración es descrita por el vector de coordenadas generalizadas:

$$P = [x_s \quad y_s \quad \phi_s]^T. \quad (2.24)$$

Las coordenadas de posición del punto de contacto S con el suelo y su ángulo de orientación ϕ con respecto al eje x .

La velocidad lineal de la rueda es v_S y su velocidad angular sobre su eje de rotación instantáneo es:

$$\dot{x}_S = v_S \cos \phi; \quad \dot{y}_S = v_S \sin \phi; \quad \dot{\phi} = v_\phi \quad (2.25)$$

despejando ambas v_S de la ecuación (2.25) e igualando, encontramos la restricción holonómica.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_S}{\cos \phi} &= v_S = \frac{\dot{y}_S}{\sin \phi} \\ \frac{\dot{x}_S}{\cos \phi} &= \frac{\dot{y}_S}{\sin \phi} \\ \dot{x}_S \sin \phi &= \dot{y}_S \cos \phi. \\ -\dot{x}_S \sin \phi + \dot{y}_S \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sea $v_1 = v_S$ y $v_2 = v_\phi$, así el modelo cinemático (2.26) del monociclo puede ser escrito como:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_S \cos \phi \\ v_S \sin \phi \\ v_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2$$

ó, $\dot{p} = J\dot{q}$; $\dot{q} = [v_1 \ v_2]^T$, donde J es el sistema de la matriz Jacobiana.

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \dot{p} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La velocidad lineal $v_1 = v_S$ y la velocidad angular $v_2 = v_\phi$ se supone que son las variables de acción del sistema.

2.6.2.5. RMR de Direccionamiento tipo Diferencial

En la figura (2.17), se muestra un ejemplo de esta configuración, en donde el vector de postura y su velocidad son respectivamente.

$$p = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ \phi \end{bmatrix}; \quad \dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Las posiciones y velocidades angulares de las ruedas izquierda y derecha son:
 $\{\theta_{iz}; \dot{\theta}_{iz}\}; \{\theta_d; \dot{\theta}_d\}$.

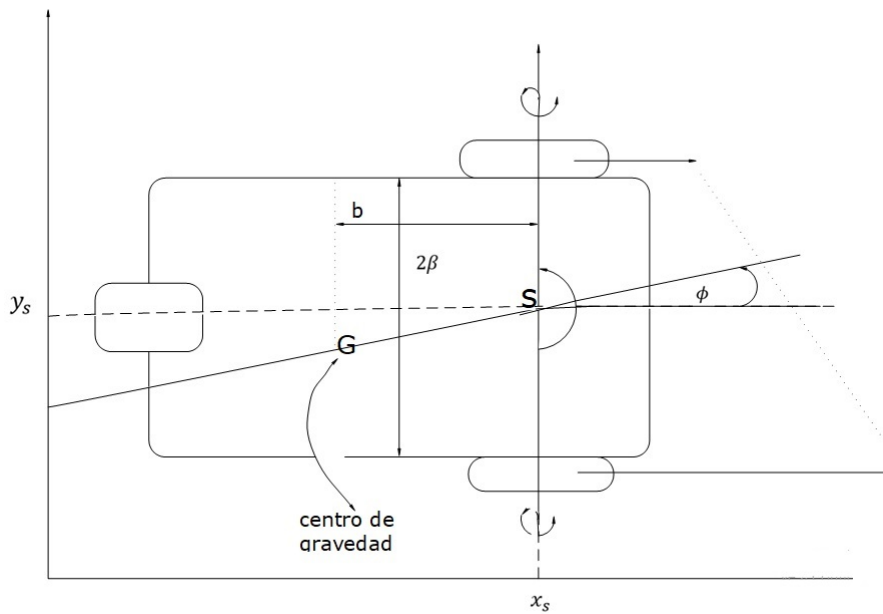


Figura 2.17: RMR Direccionamiento Diferencial (Cáceres & Charry, 2018)

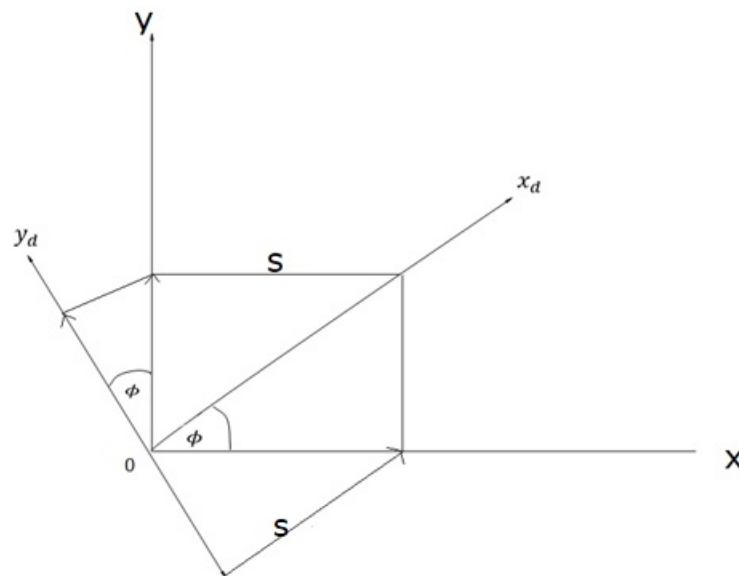


Figura 2.18: Diagrama de la restricción no-holonómica; (Cáceres & Charry, 2018)

Hipótesis:

1. Las ruedas ruedan sin deslizamiento.
2. El eje de guía (dirección) es perpendicular al plano.
3. El punto S coincide con el centro de gravedad G , es decir, $\|\overline{GS}\| = 0$.

Siendo v_{iz} y v_d las velocidades lineales de la rueda izquierda y derecha respectivamente, y v_S la velocidad del punto medio de la rueda S del RMR, [67].

$$v_d = v_S + a\dot{\phi}; \quad v_{iz} = v_{S-a}\dot{\phi} \quad (2.27)$$

Sumando v_{iz} y v_d tenemos,

$$v_d + v_{iz} = 2v_S$$

$$\frac{1}{2}(v_d + v_{iz}) = v_S. \quad (2.28)$$

restando v_{iz} y v_d tenemos,

$$v_d - v_{iz} = 2a\dot{\phi}$$

y debido a la hipótesis de no-deslizamiento se tiene que:

$$v_d = r\dot{\theta}_d; \quad v_{iz} = r\dot{\theta}_{iz}$$

como en el caso del monociclo \dot{x}_S y \dot{y}_S están dados por;

$$\dot{x}_S = v_S \cos \phi; \quad \dot{y}_S = v_S \sin \phi \quad (2.29)$$

sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.29), el modelo cinemático de este RMR se describe por las siguientes relaciones:

$$\dot{x}_S = \frac{1}{2}(v_d + v_{iz}) \cos \phi = \frac{1}{2}(r\dot{\theta}_d + r\dot{\theta}_{iz}) \cos \phi = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_d \cos \phi + \dot{\theta}_{iz} \cos \phi)$$

$$\dot{y}_S = \frac{1}{2}(v_d + v_{iz}) \sin \phi = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_d \sin \phi + \dot{\theta}_{iz} \sin \phi)$$

$$\dot{\phi}_S = \frac{1}{2a}(v_d - v_{iz}) \sin \phi = \frac{r}{2a}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}).$$

Análogamente a la ecuación cinemática del monociclo, el modelo cinemático anterior puede ser escrito;

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2a} \end{bmatrix} \dot{\theta}_d + \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi \\ -\frac{r}{2a} \end{bmatrix} \dot{\theta}_{iz}$$

ó,

$$\dot{p} = J\dot{q} \quad (2.30)$$

donde,

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix}$$

y J es la matriz Jacobiana del RMR y no es invertible debido a que $m \neq n$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2a} & -\frac{r}{2a} \end{bmatrix}$$

Donde el primer vector columna permite la rotación de la rueda derecha y el segundo vector columna permite la rotación de la rueda izquierda. Si despejamos v_S de la ecuación (2.29) obtenemos una restricción no- holonómica.

$$\frac{\dot{x}_S}{\cos \phi} = \frac{\dot{y}_S}{\sin \phi}$$

$$-\dot{x}_S \sin \phi + \dot{y}_S \cos \phi = 0 \quad (2.31)$$

El cual expresa de que el punto S se mueve a lo largo de Sx_d , y su velocidad a lo largo del eje Sy_d es cero (sin movimiento lateral); es decir,

$$-(\dot{x}_S)_1 + (\dot{y}_S)_1 = 0$$

donde, $(\dot{x}_S)_1 = \dot{x}_S \sin \phi$, y , $(\dot{y}_S)_1 = \dot{y}_S \cos \phi$ y además, debido a que la matriz Jacobiana no es invertible, por lo tanto la solución de la ecuación (2.30) para \dot{q} es dada por $\dot{q} = J^* \dot{p}$, donde J^* es la inversa generalizada de J . Sin embargo, aquí J^* puede calcularse directamente.

$$v_S = \dot{x}_S \cos \phi + \dot{y}_S \sin \phi$$

y usando la ecuación (2.27) se obtiene:

$$v_d - a\dot{\phi} = \dot{x}_S \cos \phi + \dot{y}_S \sin \phi \Leftrightarrow r\dot{\theta}_d = \dot{x}_S \cos \phi + \dot{y}_S \sin \phi + a\dot{\phi} \quad (2.32)$$

$$v_{iz} + a\dot{\phi} = \dot{x}_S \cos \phi + \dot{y}_S \sin \phi \Leftrightarrow qr\dot{\theta}_{iz} = \dot{x}_S \cos \phi + \dot{y}_S \sin \phi - a\dot{\phi}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & a \\ \cos \phi & \sin \phi & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

ó, $\dot{q} = J^* \dot{p}$, donde J^* es

$$J^* = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & a \\ \cos \phi & \sin \phi & -a \end{bmatrix}$$

La restricción no-holonómica de (2.31) puede ser escrita como:

$$M\dot{p} = 0, \quad M = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

claramente, si $\dot{\theta}_d \neq \dot{\theta}_{iz}$, entonces la diferencia entre $\dot{\theta}_d$ y $\dot{\theta}_{iz}$ determina la velocidad de rotación del robot y $\dot{\phi}$ su dirección.

El radio R de curvatura instantánea está dada por;

$$R = \frac{v_S}{\dot{\phi}} = a \left(\frac{v_d + v_{iz}}{v_d - v_{iz}} \right); v_d \geq v_{iz}$$

y el coeficiente de curvatura instantáneo es $K = \frac{1}{R}$.

2.6.2.6. Triciclo

El movimiento de este RMR está controlado por la velocidad angular de la dirección de la rueda ω_ψ y su velocidad lineal V_w (o sus velocidades angulares $\omega_w = \dot{\theta}_w = \frac{V_w}{r}$, donde r es el radio de la rueda).

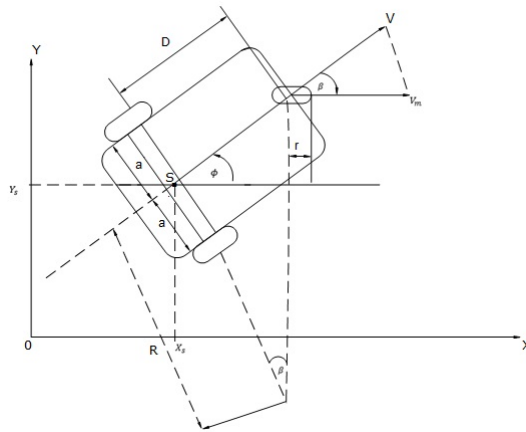


Figura 2.19: RMR Triciclo (Cáceres & Charry, 2018)

El ángulo de orientación y la velocidad angular son ϕ y $\dot{\phi}$ respectivamente. Se supone que el vehículo tiene su punto de guiado S en la parte posterior de la rueda motriz (es decir, tiene un eje trasero central), [67].

El estado del movimiento del robot es;

$$P = [x_S \quad y_S \quad \phi \quad \Psi]^T.$$

Las variables cinemáticas son:

- Velocidad de la rueda de dirección $V_w = r\dot{\theta}_w$.
- Velocidad del vehículo $V = V_w \cos \Psi = r(\cos \Psi)\dot{\theta}_w$.
- Velocidad de orientación del vehículo $\dot{\phi} = \frac{1}{D}V_w \sin \Psi$.
- Velocidad del ángulo de dirección $\dot{\Psi} = \omega_\Psi$.

Usando las relaciones anteriores, encontramos;

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \phi \\ V \sin \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \Psi \cos \phi \\ r \cos \Psi \sin \phi \\ \frac{r}{D} \sin \Psi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_w + \dot{\Psi} = J\dot{\theta} \quad (2.34)$$

donde $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_w \quad \dot{\Psi}]^T$ es el vector de velocidades de articulación (variables de control), y es la matriz Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} r \cos \Psi \cos \phi & 0 \\ r \cos \Psi \sin \phi & 0 \\ \frac{r}{D} \sin \Psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es de nuevo no invertible, pero podemos encontrar la ecuación cinemática inversa usando directamente las relaciones:

partiendo de la ecuación (2.34) con $\dot{\phi}_w$ se tiene que:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{D}V_w \sin \Psi,$$

ahora, despejando V_w de la velocidad del vehículo y reemplazando en la ecuación anterior tenemos que,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{D} \left(\frac{V}{\cos \Psi} \right) \sin \Psi = \frac{V}{D} \tan \Psi \implies \dot{\phi} = \frac{V}{D} \tan \Psi$$

luego, transponiendo términos;

$$\frac{\dot{\phi}}{V} = \frac{\tan \Psi}{D} \quad \text{ó,} \quad \frac{D\dot{\phi}}{V} = \tan \Psi$$

y así,

$$\arctan\left(\frac{D\dot{\phi}}{V}\right) = \Psi$$

por lo tanto,

$$\dot{\theta}_w = \frac{V_w}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{V^2 + D\dot{\phi}^2}.$$

y

$$\dot{\theta}_w = \frac{V_w}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{V^2 + D\dot{\phi}^2}.$$

El radio de curvatura instantaneo está dado por $R = D \tan(\frac{\pi}{2} - \Psi(t))$ además, los vectores;

$$g_1 = \begin{bmatrix} r \cos \Psi \cos \phi \\ r \cos \Psi \sin \phi \\ \frac{r}{D} \sin \Psi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son los que permiten el movimiento de dirección de la rueda $\dot{\theta}_w$ y el movimiento del ángulo de dirección $\dot{\Psi}$.

2.6.3. Dinámica de robots móviles

Luego de la cinemática, es importante hablar de la dinámica de los RMR ya que relaciona el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. El modelo dinámico se realiza utilizando las leyes de la mecánica que se basan en los tres elementos físicos: inercia, elasticidad y fricción que están presentes en cualquier sistema mecánico real, como el robot, [67].

La mayoría de los robots móviles, empleados en la práctica usan ruedas convencionales y estan sujetas a restricciones no-holonómicas que requieren un tratamiento particular. Los delicados problemas de estabilidad y control, que amenudo deben ser enfrentados en el diseño de un robot móvil, se deben a la existencia de deslizamiento longitudinal y lateral en el movimiento de las ruedas del RMR, [67].

2.6.4. Modelo dinámico de robots en general

El modelo dinámico de robots se ocupa de la derivación de las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot. Esto se puede hacer usando dos metodologías:

- Método Newton-Euler
- Método de Lagrange

En este sentido éste trabajo desarrolla el modelo dinámico por el método de Lagrange. Como en el modelo cinemático, el modelo dinámico se divide en:

- Dinámica directa
- Dinámica inversa

La dinámica directa proporciona las ecuaciones dinámicas que describen las respuestas dinámicas del robot a fuerzas y pares determinados $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ que son ejercidos por los motores, [67].

Por otra parte, la dinámica inversa proporciona las fuerzas que se necesitan para obtener las trayectorias deseadas de los enlaces del robot, [67].

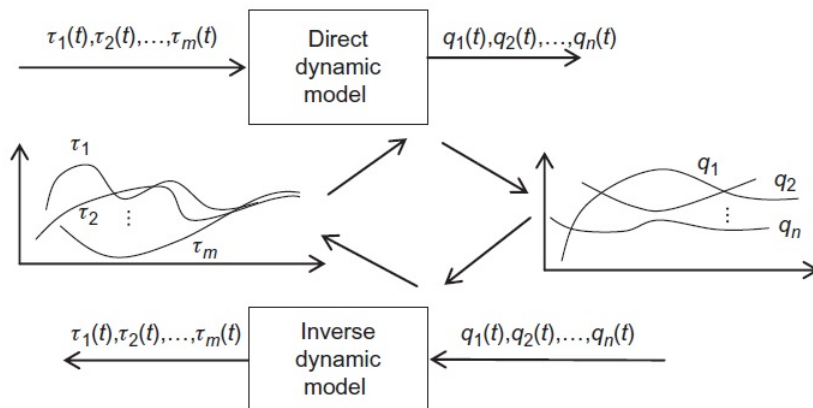


Figura 2.20: Dinámica directa e inversa (Tzafestas, 2014)

En el modelo dinámico inverso las entradas son las trayectorias deseadas de las variables de enlace y generan los pares del motor.

2.6.4.1. Modelo dinámico Lagrangiano

El modelo dinámico Lagrangiano general de un cuerpo sólido se describe por,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau; \quad q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

donde q_i es el i -ésimo grado de libertad, τ es el vector de fuerza externa generalizada aplicada al cuerpo (es decir, fuerza para el movimiento de traslación y el par para el movimiento de rotación) y L la función de lagrange definida por $L = K - p$, donde K es la energía cinética total, y p la energía potencial total de un cuerpo, la cual está dada por:

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

donde k_i es la energía cinética (de los i grados de libertad) y p_i es la energía potencial, [67]. De este modo la energía cinética K de un cuerpo es igual a,

$$K = \frac{1}{2} m \dot{U}^T \dot{U} + \frac{1}{2} \omega^T I \omega$$

donde \dot{U} es la velocidad lineal del centro de gravedad, ω es la velocidad angular de la rotación, m es la masa, y I es el tensor de inercia del cuerpo, [67].

2.6.4.2. Modelo dinámico de robots no - holonómicos

El modelo dinámico lagrangiano de un robot no-holonómico tiene la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + M^T(q)\iota = E\tau$$

donde $M(q)$ es la matrix $m \times n$ de las m restricciones no-holonómicas $M(q)\dot{q} = 0$ y ι es el vector multiplicador de lagrange. Este modelo conduce a:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + M^T(q)\iota = E\tau \quad (2.35)$$

donde E es una transformación matricial no-singular (Matriz cuadrada cuyo determinante es igual a cero). Para eliminar el término de restricción $M^T(q)\iota$ en (2.35) y obtener un modelo libre de restricciones usamos una matriz $n \times (n - m)$, $B(q)$ la cual está definida como $B^T(q)M^T(q)$. Además existe un vector $V(t)$ de tamaño

$(n - m)$ tal que $\dot{q} = B(q)V(t)$.

Ahora, si multiplicamos por $B^T(q)$ a (2.35) tenemos;

$$B^T(q)D(q)\ddot{q} + B^T(q)C(q, \dot{q})\dot{q} + B^T(q)g(q) + B^T(q)M^T(q)\iota = B^T(q)E\tau \quad (2.36)$$

y como

$$\dot{q}(t) = B(q)V(t)$$

$$\ddot{q}(t) = B(q)\dot{V}(t)$$

entonces la ecuación (2.36) queda reescrita como:

$$B^T(q)D(q)B(q)\dot{V}(t) + B^T(q, \dot{q})C(q, \dot{q})B(q, \dot{q})V(t) + B^T(q)g(q) = B^T(q)E\tau$$

ya que $B(q, \dot{q}) = 0$. Ahora, si hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\bar{D} = B^T DB$$

$$\bar{C} = B^T CB$$

$$\bar{E} = B^T E$$

$$\bar{g} = B^T g$$

es decir,

$$\bar{D}\dot{V} + \bar{C}(q, \dot{q})v + \bar{g}(q) = \bar{E}\tau \quad (2.37)$$

el modelo reducido (sin restricción) (2.37) describe la evolución dinámica del vector $q(t)$ n -dimensional en términos de la evolución dinámica del vector $V(t)$ de dimensión $(n - m)$.

En particular veamos la dinámica en un RMR de tipo diferencial.

2.6.4.3. RMR Direccinamiento Diferencial (Modelo Dinámico)

Recordemos que la restricci3n no-holon3mica para este tipo de RMR es:

$$M(q) = [-\sin \phi \quad \cos \phi \quad 0]$$

donde el RMR se mueve sobre un plano horizontal, los t3rminos $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ en la ecuaci3n (2.35) es cero. Por lo tanto (2.35) queda escrito:

$$D(q)\ddot{q} + M^T(q)\iota = E\tau \quad (2.38)$$

donde,

$$q = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ \phi \end{bmatrix}; \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_{iz} \end{bmatrix}; \quad D(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}; \quad E = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ 2a & -2a \end{bmatrix}$$

y para volver a la ecuaci3n (2.38) en un modelo sin restricciones se necesita multiplicar la matriz $B(q)$ en (2.38).

$$B(q) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T(q)D(q)\ddot{q} = B^T(q)E\tau \Leftrightarrow B^T(q)D(q)B(q)\dot{V} = B^T(q)E\tau$$

y as3,

$$\begin{aligned} \bar{D} = B^T DB &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} m \cos \phi & m \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cos^2 \phi + m \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} m(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \bar{E} = B^T E &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ 2a & -2a \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ 2a & -2a \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & -2a \end{bmatrix}$$

y así, el modelo queda,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_{iz} \end{bmatrix}$$

notando que v_1 es la velocidad de translación, y v_2 es la velocidad angular w del robot, entonces;

$$m\dot{V} = \frac{1}{r}(\tau_d + \tau_{iz}) \Leftrightarrow \dot{V} = \frac{1}{mr}(\tau_d + \tau_{iz}) \quad (2.39)$$

$$I\dot{w} = \frac{2a}{r}(\tau_d - \tau_{iz}) \Leftrightarrow \dot{w} = \frac{2a}{rI}(\tau_d - \tau_{iz}) \quad (2.40)$$

y utilizando $\dot{q}(t) = B(q)V(t)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\phi \\ v\sin\phi \\ w \end{bmatrix}$$

El cual es el modelo cinemático del RMR. La dinámica y cinemática (2.39) y (2.40) describe totalmente el movimiento de este robot.

2.6.5. Sensores

Los sensores que se encuentran en los robots son semejantes a nuestro sistema sensorial (por ejemplo, la visión, audición y movimiento) emiten señales de entrada al cerebro para procesarlas, [54].

El uso de sensores en robótica es de suma importancia para cerrar los circuitos de control (de retroalimentación) que aseguran el funcionamiento eficiente y autónomo de los robots, [11].

2.6.5.1. Clasificación

En general, los sensores en robots se distinguen en:

- **Sensores analógicos:** proporcionan señales de salidas que necesitan de una conversión de analógico a digital (A/D). Ejemplo, El sensor de distancia infrarrojo, el micrófono y la brújula analógica, [67].

- **Sensores digitales:** son más precisos que los anteriores ya que sus sensores son de alta resolución, tienen respuesta rápida y amplio rango de operación, calibración fácil y alta confiabilidad, [67].

La transferencia de datos desde el sensor al computador puede ser iniciada por el computador (llamado pollin) o por el sensor mismo a través de la interrupción. Si se inicia por el PC, el PC debe verificar si el sensor está listo, "leyendo una línea de estado en el bucle (conectores en el lenguaje de programación)". Si se inicia por el sensor, se necesita de una línea de interrupción y esta forma es mucho más rápida ya que una vez que se realiza una interrupción (o sea que los datos están listos) el computador reacciona de inmediato a la solicitud. [77].

Los sensores para este tema a desarrollar, son los sensores de los RMR y estos se clasifican como:

- **Internos:** son los sensores que monitorean el estado interno del robot. Estos incluyen los sensores que miden la velocidad del motor, la carga, y el voltage de la batería.
- **Externos:** son los sensores que monitorean el entorno del robot. Estos incluyen sensores que miden distancias, amplitud de sonidos e intensidad de luz.

2.6.5.2. Características de los sensores en los RMR

Los RMR tienen una variedad de características de rendimiento. Estas características son de diferentes ambientes controlados (internos, entornos de laboratorio, etc) y entornos no controlados (al aire libre, ambientes, etc).

- **Rango dinámico:** es la dispersión entre los límites inferiores y superiores de los valores de entrada para los cuales, el sensor funciona normalmente. Además el rango de señal se basa en el logaritmo de la relación entre los valores máximos y mínimos, [67].

$$R_g = 20 \log \left(\frac{\text{input máximo}}{\text{input mínimo}} \right) (dB)$$

Por ejemplo, si el intervalo de valores de voltaje es $V_{min} = 1mv$, y, $V_{max} = 20v$ entonces;

$$R_g = 20 \log \frac{V_{max}}{V_{min}} = 20 \log \left(\frac{20}{0,001} \right) = 86db.$$

- **Resolución:** es la diferencia mínima de la variable medida que puede reconocer el sensor, [67].
- **Linealidad:** es la propiedad por la cual el valor de salida $f(x+y)$ de un sensor a una suma de entradas x e y es igual a la suma $f(x) + f(y)$ de los valores de salidas del sensor obtenido por separado en cada entrada. En general, la linealidad implica que $f(k_1x + k_2y) = k_1f(x) + k_2f(y)$, donde k_1 y k_2 son parámetros constantes, [67].
- **Ancho de banda:** es la velocidad o frecuencia máxima de lecturas, datos que el sensor puede proporcionar, [67].

Sensores de posición y velocidad

Los sensores de posición se utilizan para determinar si las uniones (ejes lineales (rotacionales)) de los enlaces robóticos o plataformas móviles se han movido en la posición correcta. De manera similar, los sensores de velocidad miden la velocidad del movimiento (lineal o angular) de las articulaciones del robot.

De este modo, los tres sensores de posición básicos son los siguientes:

- **Potenciómetros:** es un dispositivo que da una salida $V_0(t)$ proporcional a la posición del indicador, es decir, $V_0 = k_p(t)$; donde k_p es el coeficiente del potenciómetro, [70].
- **Resolutores:** es un sensor analógico que da una salida proporcional al ángulo de rotación de otro objeto con respecto a un elemento fijo. Un resolutor tiene un bobinado simple en el rotor y un par de bobinados que tienen un ángulo relativo de 90° . Si el rotor recibe una señal $A \sin(\omega t)$ entonces los voltajes son:

$$V_{s_1}(t) = A \sin(\omega t) \sin \theta$$

$$V_{s_2}(t) = A \sin(\omega t) \cos \theta$$

donde θ es el ángulo de rotación del rotor con respecto al estator (parte fija de la maquina eléctrica en la que se desarrolla la función de crear un campo magnético), [70].

- **Codificadores:** son los que constituyen un sensor de retroalimentación básico para el control del motor, [70].

Y los sensores de velocidad de las articulaciones robóticas, se miden directamente con la ayuda de tacómetros. Los tacómetros se clasifican en tacómetros de corriente continua (C.C) y corriente alterna (C.A). En este caso en el estudio se utilizó

principalmente el tacómetro de (C.C), [70].

Los CC desarrollan una tensión de corriente continua, en su salida que es proporcional a la velocidad del motor conectado a él.

Sensores de sonidos

Tiene un cono relativamente angosto para una cobertura de 360° . El principio de operación de los sensores de sonidos incluyen la emisión de una corta señal acústica a una frecuencia ultrasónica de 50 a 250 kHz y la medición del tiempo desde la emisión de la señal hasta que el eco vuelve al sensor. El tiempo de vuelo medido es proporcional al doble de la distancia del obstáculo más cercano en el cono del sensor. Si no se recibe ninguna señal dentro de un periodo máximo entonces no se detecta ningún obstáculo dentro de la distancia correspondiente, [67].

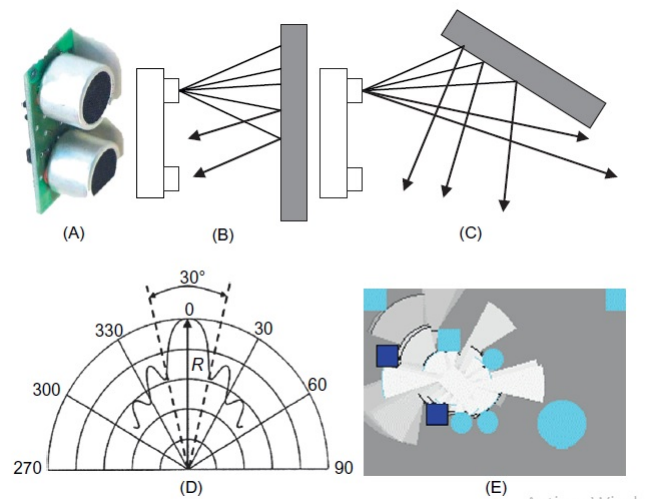


Figura 2.21: Sensor de sonido (Tzafestas, 2014)

El robot GPR 2.0 2 WD multipropósito diferencial, posee este tipo de sensor pero no es geoméricamente un cono debido a la presencia de lóbulos laterales que si se reflejan primero podrían confundir la interpretación de la información de tiempo de vuelo.

En el caso de que se implemente o se haga uso de este sensor en el prototipo, las características importantes del entorno (obstáculos, puertas, etc) solo aparecen cuando el robot está lo suficientemente cerca para observarlas. La distancia de un objeto que causa el reflejo de la onda viene dada por $L = \frac{1}{2}V_a t_0$ donde V_a es la rapidez del sonido y t_0 es el tiempo de vuelo.

De la física se sabe que la rapidez V_a de sonido en el aire está dada por;

$$V_a = \sqrt{rRT}$$

donde R es el gas constante, r es la proporción de calor específico y T es la temperatura absoluta, [77].

Sensores láser

Estos constituyen un caso especial de sensores ópticos que tienen un rango de centímetros a metros. Se les llama normalmente radares láser. La energía se emite por impulsos y la distancia se calcula a partir del tiempo de salida, [20].

Desafortunadamente, los sensores láser son muy grandes y pesados para un RMR. Por esta razón, los sensores de distancia infrarrojo son muy populares para los RMR, [20].

Sensores infrarrojo

La luz puede ser producida por un LED o un láser. Esta luz tiene una longitud de onda típica emitida entre 820 y 880 nm . Por lo tanto, la mayoría de las superficies tienen una rugosidad mayor que la longitud de onda de luz incidente, [63].

El sensor envía un 100 % de una luz de amplitud modulada en una frecuencia dada f y mide el desplazamiento de fase entre las señales transmitidas y reflejadas, [63]. Si ϕ es el cambio de fase medio electrónicamente y λ la longitud de onda, luego la distancia $2D$ es igual a $(\frac{\phi}{2\pi})\lambda$.

$$D = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)\phi$$

Sensores de visión

La visión de un robot es la capacidad de que tiene este para ver y reconocer objetos a través de la colección de imágenes y de la luz reflejada por estos objetos, para luego interpretar y procesar esta imagen, [40].

Este sensor emplea sensores ópticos o visuales (cámaras) y equipos electrónicos adecuados para procesar o analizar imágenes visuales y reconocer objetos de interés en cada aplicación robótica, [40]

2.6.6. Control de robots móviles (Basado en el método de Lyapunov)

El control trata el problema de determinar las fuerzas que deben desarrollar los actuadores para que el robot vaya a la posición deseada y siga la trayectoria programada y, en general realice alguna tarea con los requisitos de rendimiento deseado, [1].

Aplicar el control a problemas en robótica móvil es más complejo de lo normal debido a la integración de fuerzas de inercia, reacción de acoplamientos y efectos de gravedad, [1].

2.6.6.1. Modelo de espacio de estado:

El modelo de espacio de estado de un sistema de control se basa en el concepto de vector de estado $X(t) \in \mathbb{R}^n$ el cual es el vector euclidiano de dimensión mínima, con componentes llamados variables de estado, el cual se conoce un tiempo inicial $t = t_0$, junto con el vector de entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ determina completamente el comportamiento del sistema para algún tiempo $t \geq t_0$, [2].

La dimensión n del vector de estado especifica la dimensión del sistema. La definición anterior significa que el estado del sistema está determinado por su valor inicial $x(t_0)$ en $t = t_0$ y la entrada para $t \geq t_0$, es independiente del estado y las entradas para los tiempos anteriores.

En este sentido, se observa que las variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ de un sistema n -dimensional puede no ser necesariamente cantidades físicas mensurables, aunque en la práctica, se hace un esfuerzo para usar tantas variables medibles como sea posible, porque las leyes estatales de control de retroalimentación las necesitan todas, [13].

No obstante, la expresión de $X(t)$ como una función de $t, t_0, X(t_0) = x_0$ y

$$u(\tau) = [u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_m(\tau)]^T \quad \tau \geq t_0.$$

esto es,

$$X(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\tau))$$

ss llamado el sistema de trayectoria.

La salida $y(t)$ del sistema es una función similar de $x(t), u(t)$ y t esto es:

$$y(t) = \eta(t; \varphi(t, t_0, x_0, u(\tau)); u(t)) \quad \forall t \geq t_0.$$

Las trayectorias satisfacen la propiedad de transición;

$$\varphi(t; t_0; x(t_0); u(\tau)) = \varphi(t; t_1; x(t_1); u(\tau)) \quad \forall t_0 < t_1 < t$$

donde $x(t_1) = \varphi(t_1; t_0; x_0; u(\tau))$. En el modelo de espacio de estado, el modelo dinámico de un sistema no lineal (en tiempo continua) tiene la forma.

$$\dot{X}(t) = f(x, u, t) \quad (t \geq t_0)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (t \geq t_0)$$

donde f y g son funciones vectoriales no lineales. El vector de estado x pertenece al espacio de estado X , la entrada (control) u pertenece al espacio de entrada U y la salida y al espacio de salida Y donde $X \subset \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^p$, y \mathbb{R}^n es el espacio euclideo n-dimensional.

Si las funciones vectoriales f y g son lineales, entonces el sistema es lineal y se describe por el modelo;

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (x(t_0) \text{ se conoce})$$

$$Y = CX + Du \quad (x(t_0) \text{ se conoce})$$

donde A, B, C, D pueden ser matrices invariantes en el tiempo o variables en el tiempo de la dimensión apropiada (en muchos casos, $D = 0$).

Un modelo de espacio de estado lineal con las matrices siguientes A, B y $u \in \mathbb{R}$ (un escalar). Se llama modelo canónico de control del sistema que representa:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; u = u.$$

Para un escalar de salida $y \in \mathbb{R}$, un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por la ecuación diferencial de orden n .

$$(D^n + a_1 D_{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y(t) = (b_0 D^n + b_1 D_{n-1} + \dots + b_n)u(t), \quad D = \frac{d}{dt}$$

Si definimos las variables de estado x_1, x_2, \dots, x_n y como;

$$Dx_1 = x_2; Dx_2 = x_3, \dots, Dx_{n-1} = x_n \quad (2.41)$$

en efecto, como $\dot{x} = AX + Bu$

$$DX = \begin{bmatrix} Dx_1 \\ Dx_2 \\ \vdots \\ Dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

entonces,

$$Dx_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u$$

además como $Y = CX + Du$ con $D = [b_0]$ y $C = [b_n - a_n b_0, b_{n-1} - a_{n-1} b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0]$

$$Y = [b_n - a_n b_0, b_{n-1} - a_{n-1} b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0]u$$

$$Y = b_n x_1 - a_n b_0 x_1 + b_{n-1} x_2 - a_{n-1} b_0 x_2 + \dots + b_1 x_n - a_1 b_0 x_n + b_0 u$$

$$= b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n + b_0 (-a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u) \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) es el modelo de espacio de estado, también es llamado modelo canónico de variables de fase (conveniente para el diseño del controlador de realimentación).

2.6.6.2. Estabilidad en el sentido Lyapunov

La estabilidad es una propiedad binaria de un sistema, es decir, un sistema no puede ser estable o inestable al mismo tiempo, [60]. Sin embargo, un sistema estable se caracteriza por un índice que muestra la cercanía a la inestabilidad del sistema, es decir un sistema se define como limitado-entrada-salida-limitado (BIBO) estable si cualquier entrada limitada conduce siempre a una salida limitada.

Un sistema lineal invariante en el tiempo es BIBO estable si y sólo si todos los polos de su función de transferencia o los valores propios de la matriz A del modelo de espacio de estado se encuentra estrictamente a la izquierda del plano complejo $S = a + ib$. La matriz A con la propiedad anterior se llama matrix de Hurwitz, [60].

Los criterios algebraicos de Hurwitz especifican las condiciones que los coeficientes del polinomio característico del sistema deben satisfacer para que el sistema sea estable, [60].

Un sistema de primer orden $\dot{x} + ax = bu$ (con el polo real $-a$) es estable si $a > 0$ y tiene la respuesta (solución) de impulso $x(t) = be^{-at}$. Donde $x(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, el sistema es llamado asintóticamente estable. Además, dado que la convergencia es exponencial, es decir, be^{-at} , el sistema es llamado exponencialmente estable.

Para un sistema de segundo orden, donde la matrix A tiene los valores propios

$$\lambda = -a_1 \pm ib, \quad a_1 > 0$$

tiene solución de la forma,

$$x(t) = \frac{k}{b} e^{(-a_1 \pm ib)t} = \frac{k}{b} e^{-a_1 t} e^{\pm ibt} = \frac{k}{b} e^{-a_1 t} (\cos bt \pm i \sin bt);$$

donde $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ el sistema es asintóticamente estable.

Entre tanto el estudio de la estabilidad de un sistema y su estabilización mediante retroalimentación de entrada o salida son dos de los problemas centrales en la teoría de control. Pero el criterio de Hurwitz solo se puede usar para sistemas lineales de única salida y entrada (SISO) invariantes en el tiempo, [21].

En este sentido, el método de estabilidad de Lyapunov también se puede aplicar a sistemas que varían en el tiempo y a sistemas no lineales. Lyapunov introdujo una noción generalizada de energía (llamada función de Lyapunov). No obstante,

combinando la teoría de Lyapunov con el concepto de estabilidad de BIBO podemos derivar condiciones de estabilidad para la estabilidad de entrada al estado (ISS), [21].

Por otra parte, Lyapunov introdujo dos métodos de estabilidad, el primer método requiere la disponibilidad de la respuesta de tiempo del sistema (es decir, la solución de las ecuaciones diferenciales) mientras que el segundo método llamado también método directo de Lyapunov, no requiere de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.4. El estado de equilibrio $x = 0$ del sistema $\dot{X} = A(t)X$ es estable en el sentido de Lyapunov (*L-estable*) si para cada tiempo inicial t_0 y cada número real $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera el cual depende de t y ϵ , tal que si:

$$\|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídeana del vector x , [67].

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 2.5. El estado de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable si:

1. Es *L* estable.
2. Para cada t_0 y x_0 suficientemente cerca de $x = 0$, la condición $x(t) \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$ [67].

Definición 2.6. Si el parámetro δ en la definición (2.4) no depende de t_0 , entonces tenemos la *L-estabilidad uniforme*, [67].

Definición 2.7. El estado de equilibrio $x = 0$ para $\dot{X} = A(t)X$ se dice ser inestable si para algún número $\epsilon > 0$, y algún $t_1 > t_0$ y cualquier número real δ arbitrario pequeño, siempre existe un estado inicial $\|x_0\| < \delta$ tal que $\|x(t)\| > \epsilon$ para $t \geq t_1$, [67].

Definición 2.8. La función de Lyapunov invariante en el tiempo se llama función escalar $V(x)$ del cual para todo $t \geq t_0$ y x en las proximidades del origen, cumple las siguientes cuatro condiciones:

1. $V(x)$ Es continua y tiene derivada continua.
2. $V(0) = 0$
3. $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$4. \frac{dV(x)}{dt} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]^T \frac{dx}{dt} < 0 \text{ para } x \neq 0, [67].$$

Definición 2.9. La función de Lyapunov variando en el tiempo $V(x, t)$ para el estado del sistema es cualquier función escalar de x y t , [67], tal que para todo $t \geq t_0$ y x cerca del origen $x = 0$ tiene las siguientes propiedades:

1. $V(x, t)$ y sus derivadas parciales son continuas.
2. $V(0, t) = 0$
3. $V(x, t) \geq a(\|x\|)$ para $x \neq 0$ donde $a(0) = 0$ y $a(\xi)$ es una función escalar continua no decreciente de ξ
4. $\frac{dV(x, t)}{dt} = \left[\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right]^T \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} < 0$ para $x \neq 0$

2.6.7. Control del RMR de Direccionamiento Diferencial

El control para el prototipo de estudio se divide en dos etapas:

1. Control para la cinemática.
2. Control para la dinámica.

Las velocidades lineales y angulares resultantes en la etapa cinemática se usarán como entradas de referencia para la etapa dinámica.

2.6.7.1. Control de seguimiento cinemático no lineal

El movimiento del robot se rige por el modelo dinámico (2.39) y (2.40) y el modelo cinemático (2.25), la restricción no-holonómica (2.26) se sabe:

$$\dot{V} = \frac{1}{mr}(\tau_d + \tau_{iz}) = \frac{1}{m}\tau_a \quad \tau_a = \frac{1}{r}(\tau_d + \tau_{iz}) \quad (2.43)$$

$$\dot{w} = \frac{2a}{Ir}(\tau_d + \tau_{iz}) = \frac{1}{I}\tau_b \quad \tau_b = \frac{2a}{r}(\tau_d + \tau_{iz}) \quad (2.44)$$

$$\dot{x} = v \cos \phi; \quad \dot{y} = v \sin \phi \quad (2.45)$$

donde para efectos de sencillez de la notación se omitió el índice S de x_S , y_S y además, $w = \dot{\phi}$, τ_a , τ_b son entradas de control con:

$$p = [x \quad y \quad \phi]^T$$

siendo el vector de estado. El problema es rastrear una trayectoria de estado deseada.

$$p_d(t) = [x_d(t) \quad y_d(t) \quad \phi_d(t)]^T$$

Con error que va asintóticamente a cero. Con este fin, se usa el método de la estabilización de Lyapunov. Para esto, la trayectoria deseada debe satisfacer tanto las ecuaciones cinemáticas como la restricción no-holonómica que es;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\phi}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos \phi_d \\ v_d \sin \phi_d \\ w_d \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Los errores $\tilde{x} = (x_d - x)$; $\tilde{y} = (y_d - y)$ y $\tilde{\phi} = (\phi_d - \phi)$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_r \\ \tilde{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

y

$$\tilde{\phi}_r = \tilde{\phi} \quad (2.48)$$

Derivando la ecuación (2.47) y (2.48) y tomando en cuenta la ecuación (2.45) y (2.46) obtenemos el siguiente modelo cinemático para el error:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_r \\ \tilde{y}_r \\ \tilde{\phi}_r \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_r &= \cos \phi \tilde{x} + \sin \phi \tilde{y} \\ \tilde{y}_r &= -\sin \phi \tilde{x} + \cos \phi \tilde{y} \\ \tilde{\phi}_r &= \tilde{\phi} \end{aligned}$$

entonces derivando \tilde{x}_r ,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_r &= \cos \phi \dot{\tilde{x}} + \sin \phi \dot{\tilde{y}} = \cos \phi (\dot{x}_d - \dot{x}) + \sin \phi (\dot{y}_d - \dot{y}) \\ &= \cos \phi (v_d \cos \phi_d - v \cos \phi) + \sin \phi (v_d \sin \phi_d - v \sin \phi) \\ &= v_d \cos \phi \cos \phi_d + v_d \sin \phi \sin \phi_d - v (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &= v_d \cos \phi \cos \phi_d + v_d \sin \phi \sin \phi_d - v = v_d \cos(\phi_d - \phi) - v + \tilde{y}_r w \\ \dot{\tilde{x}}_r &= v_d \cos(\tilde{\phi}_r) - v + \tilde{y}_r w \end{aligned}$$

derivando \tilde{y}_r ,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_r &= -\sin \phi \dot{\tilde{x}} + \cos \phi \dot{\tilde{y}} = -\sin \phi (\dot{x}_d - \dot{x}) + \cos \phi (\dot{y}_d - \dot{y}) \\ &= -\sin \phi (v_d \cos \phi_d - v \cos \phi) + \cos \phi (v_d \sin \phi_d - v \sin \phi) \\ &= -v_d \sin \phi \cos \phi_d + v \cos \phi \sin \phi + v_d \cos \phi \sin \phi - v \cos \phi \sin \phi \\ \dot{\tilde{y}}_r &= v_d \sin(\phi_d - \phi) - \tilde{x}_r w = v_d \sin(\tilde{\phi}_r) - \tilde{x}_r w \end{aligned}$$

derivando $\tilde{\phi}_r$,

$$\dot{\tilde{\phi}}_r = \dot{\tilde{\phi}} = (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) = w_d - w$$

y así,

$$\dot{\tilde{p}}_r = \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_r = v_d \cos \tilde{\phi}_r - v + \tilde{y}_r w \\ \dot{\tilde{y}}_r = v_d \sin \tilde{\phi}_r - \tilde{x}_r w \\ \dot{\tilde{\phi}}_r = w_d - w \end{cases} \quad (2.49)$$

donde las velocidades lineales y angulares v y w son las variables de control cinemáticas.

Claramente en la ecuación (2.49) satisface las ecuaciones cinemáticas y no-holónicas del RMR. Por lo tanto, el controlador de retroalimentación cinemática se basará en (2.49).

Se aplica el método de estabilidad de Lyapunov. Como aquí su controlador no debe ser lineal, no podemos seleccionar su estructura de antemano. Su estructura estará determinada por la elección de la función de Lyapunov.

Se presenta a continuación la siguiente función candidata;

$$v(\tilde{p}_r) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_r^2 + \tilde{y}_r^2) + (1 - \cos \tilde{\phi}_r) \quad (2.50)$$

esta función satisface las tres primeras propiedades de la función de Lyapunov:

1. $v(\tilde{p}_r)$ es continua y tiene derivada continua.
2. $v(0) = 0$.
3. $v(\tilde{p}_r) > 0 \quad \forall \tilde{p}_r \neq 0$.

Por lo tanto, tenemos que verificar bajo que condiciones la cuarta propiedad se satisface, para ello, derivando la ecuación (2.50) con respecto al tiempo.

$$v(\tilde{p}_r) = \frac{1}{2}\tilde{x}_r^2 + \frac{1}{2}\tilde{y}_r^2 + 1 - \cos \tilde{\phi}_r$$

$$\dot{v}(\tilde{p}_r) = \tilde{x}_r \dot{\tilde{x}}_r + \tilde{y}_r \dot{\tilde{y}}_r + \sin \tilde{\phi}_r \dot{\tilde{\phi}}_r$$

$$= (v_d \cos \tilde{\phi}_r - v)\tilde{x}_r + (v_d \sin \tilde{\phi}_r)\tilde{y}_r + \sin \tilde{\phi}_r(w_d - w)$$

$$= (v_d \cos \tilde{\phi}_r - v)\tilde{x}_r + \sin \tilde{\phi}_r(v_d \tilde{y}_r + w_d - w)$$

Para hacer $\dot{v}(\tilde{p}_r) \leq 0$ las entradas de control v y w se selecciona de tal manera que,

$$\dot{V}(\tilde{p}_r) = -(k_x \tilde{x}_r^2 + k_\phi \sin^2 \tilde{\phi}_r)$$

lo que lleva a

$$-k_x \tilde{x}_r^2 = (V_d \cos \tilde{\phi}_r - V) \tilde{x}_r$$

$$-k_x \tilde{x}_r = V_d \cos \tilde{\phi}_r - v$$

$$V = V_d \cos \tilde{\phi}_r + k_x \tilde{x}_r = v_c \quad (2.51)$$

y,

$$-k_\phi \sin^2 \tilde{\phi}_r = \sin \tilde{\phi}_r (V_d \tilde{y}_r + w_d - w)$$

$$-k_\phi \sin \tilde{\phi}_r = V_d \tilde{y}_r + w_d - w$$

$$w = V_d \tilde{y}_r + w_d + k_\phi \sin \tilde{\phi}_r = w_c \quad (2.52)$$

claramente, para $k_x > 0$ y $k_\phi > 0$, tenemos $\dot{V}(\tilde{p}_r) \leq 0$ con la igualdad obtenida solo cuando $\tilde{x}_r \equiv 0$ y $\tilde{\phi}_r \equiv 0$, por lo tanto el control (2.51) y (2.52) garantiza el seguimiento asintótico total a la trayectoria deseada.

2.6.7.2. Control de seguimiento dinámico

Sabiendo V y w , seleccionamos los controles de entrada τ_a y τ_b como:

$$\tau_a = m \dot{\tilde{V}}_c + k_a \tilde{V}_c$$

$$\tau_b = I \dot{\tilde{w}}_c + k_b \tilde{w}_c$$

donde, $\tilde{V}_c = V_c - V$ y $\tilde{w}_c = w_c - w$. Ahora, si sustituimos τ_a , τ_b , \tilde{V}_c y \tilde{w}_c en la ecuación (2.43) y (2.44) lo cual obtenemos la ecuación de error de las velocidades;

$$\dot{V} = \frac{1}{m} \tau_a = \frac{1}{m} (m \dot{\tilde{V}}_c + k_a \tilde{V}_c) = \dot{\tilde{V}}_c + \frac{k_a}{m} \tilde{V}_c = 0$$

$$\frac{1}{I} \tau_b = \frac{1}{I} (I \dot{\tilde{w}}_c + k_b \tilde{w}_c) = \dot{\tilde{w}}_c + \frac{k_b}{I} \tilde{w}_c = 0.$$

Para $k_a > 0$ y $k_b > 0$ son estables y \tilde{V}_c, \tilde{w}_c converge asintóticamente a cero.

Por lo tanto, al seleccionar las entradas de control de retroalimentación τ_a y τ_b con V_c y w_c dados por la ecuación (2.51) y (2.52) y así el seguimiento de la trayectoria deseada $[x_d(t) \ y_d(t) \ \phi_d(t)]^T$ se logra como se requería.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo General

- Diseñar un modelo cinemático y dinámico adecuado para el robot móvil tipo diferencial GPR 2.0 2WD multipropósito.

3.2. Objetivos específicos

- Describir geométricamente la morfología del robot móvil GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial con el fin de elaborar el modelo cinemático que permita hacer la descripción analítica del movimiento espacial del robot y en particular las relaciones entre la posición y orientación.
- Presentar las herramientas matemáticas necesarias para analizar, diseñar y construir robots, específicamente las esenciales en la elaboración del modelo dinámico que permite estudiar todos los fenómenos físicos presentes en el sistema mecánico del robot móvil.
- Diseñar y programar mediante el software Arduino un código para el robot móvil GPR2.0 2WD para que sea capaz de realizar aplicaciones como la de ser teledirigido mediante vía Bluetooth, seguidor de línea y evasor de obstáculos.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Tipo de investigación

La metodología de investigación empleada en esta investigación está al alcance de los objetivos, tendrá un enfoque teórico, empírico y aplicativo de innovación tecnológica y experimental. Por consiguiente, se enfatizará en la observación directa del comportamiento de los componentes y el control de los mismos mediante la instrumentación adecuada que permita garantizar el desarrollo del trabajo propuesto.

Por esto, la investigación aplicada es la metodología indispensable para el progreso de dicho trabajo, ya que busca la generación de conocimiento con aplicación directa a los problemas de la sociedad o el sector productivo. Esta se basa fundamentalmente en los hallazgos tecnológicos de la investigación básica, ocupándose del proceso de enlace entre la teoría y la práctica.

Para [74]. La investigación aplicada es el tipo de investigación en la cual el problema está establecido y es conocido por el investigador, por lo que utiliza la investigación para dar respuesta a preguntas específicas.

En [47]. La investigación aplicada recibe el nombre de “investigación práctica o empírica”, que se caracteriza porque busca la aplicación o utilización de los conocimientos adquiridos, a la vez que se adquieren otros, después de implementar y sistematizar la práctica basada en investigación. El uso del conocimiento y los resultados de investigación que da como resultado una forma rigurosa, organizada y sistemática de conocer la realidad.

4.2. Nivel de investigación

El nivel de investigación se refiere al grado de profundidad con que se aborda un objeto o fenómeno. Aquí se indicará si se trata de una investigación exploratoria, descriptiva o analítica. Según el nivel, la investigación se clasifica en la tabla:

Niveles de Investigación	
Nivel	Características
Exploratoria	<ul style="list-style-type: none"> ● Es aquella que se efectúa sobre un tema u objeto poco conocido o estudiado, por lo que sus resultados constituyen una visión aproximada de dicho objeto. ● No son causales, y el tipo de análisis predominante en ella es el cualitativo sobre fuentes bibliográficas teóricas. ● A veces pueden hacer referencias a datos con precisiones cuantitativas, de investigaciones aplicadas realizadas por otros autores.
Descriptiva	<ul style="list-style-type: none"> ● Consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno o suposición con establecer su estructura o comportamiento. ● Cuando una investigación es sólo descriptiva recibe el nombre de monografía; ya que se limita a sólo una de las tres funciones científicas (describir, precisar, predecir.).
Explicativa	<ul style="list-style-type: none"> ● se encarga de buscar el por qué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa-efecto. ● En un estudio podemos conocer por qué un hecho o fenómeno de la realidad tiene tales y cuáles características y propiedades.

Cuadro 4.1: Niveles de investigación

De acuerdo a la naturaleza del estudio de la investigación, reúne por su nivel las características de un estudio explorativo, descriptivo y explicativo.

4.3. Diseño de la investigación

El robot móvil GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial fue adquirido en Vistrónica, ésta es una empresa colombiana creada en el municipio de Fusagasugá, Cundinamarca, dedicada a la venta de componentes electrónicos en todo el territorio colombiano a través de internet. El prototipo fue adquirido por un valor de \$238.000 pesos, cabe destacar que la adquisición hecha venía el kit con cada una de sus partes desarmadas.

4.3.1. Kit de Robótica Móvil

4.3.1.1. Vistrónica

Vistrónica es una empresa Colombiana creada en el municipio de Fusagasugá, Cundinamarca, dedicada a la venta de componentes electrónicos en todo el territorio Colombiano a través de internet.

Vistrónica se caracteriza por brindar los mejores precios del mercado, gracias a la red de proveedores que se han adquirido en Asia, Europa y América, permitiendo así tener contacto directo con diversos fabricantes, quienes cumplen con los más altos estándares de calidad y a los mejores precios, al ser importadores directos.

4.3.1.2. Kit de robótica móvil (Contenido del Paquete)

El kit contiene los siguientes elementos:

- 1 Chasis GPR V2.0
- 1 Arduino UNO R3 Compatible
- 1 Módulo L298N para Control de Motores
- 1 Convertidor DC-DC Buck LM2596
- 1 Módulo Bluetooth Esclavo HC-06
- 2 Rueda de goma N20 3pi
- 1 Rueda Loca CY-15A
- 2 Motorreductor 6V 300rpm 0.2Kg
- 2 Bracket Plástico para Motor N20
- 2 Módulo Sensor TCRT5000L

- 2 Módulo Sensor Infrarrojo Evasor de Obstáculos
- 2 Módulo Fotoresistencia LDR
- 1 Sensor de Ultrasonido HC-SR04 Arduino
- 1 Soporte para el Sensor de Ultrasonido HC-SR04
- 1 Micro Servomotor SG90 9G
- 2 Conector para pila 9v
- 1 Cable DuPont Macho Hembra X40 10 cm
- 10 Cable DuPont Macho-Macho por unidad 20cm
- 7 Pilares plásticos 26mm
- 1 Espiral de Plástico 1M
- 1 Kit de Tornillos y Tuercas 3mm
- 2 Bridas (abrazadera) plástica

el empaque del producto es en bolsa transparente ziplock.

4.3.2. Recursos Físicos, Materiales y Humanos

4.3.2.1. Físicos

El desarrollo de la investigación se realiza en los siguientes escenarios:

- **Biblioteca Rafael Cortés Murcia:** es la biblioteca central de la universidad Surcolombiana, allí se consulta y se indaga sobre el material bibliográfico que hay al respecto.
- **Laboratorio de Robótica del Colegio Anglocanadiense:** el colegio Anglocanadiense se encuentra ubicado en la ciudad de Neiva, capital del departamento del Huila. En éste lugar se lleva acabo toda la parte experimental del proyecto de investigación incluyendo el diseño del modelo cinemático y dinámico, ya que posee un laboratorio de robótica con las herramientas necesarias para ejecutar este tipo de investigación.

Para la elaboración del modelo cinemático y dinámico se procede a sacar los siguientes datos: peso del robot armado (medida tomada por una gramera), medida del radio de la rueda de goma, altura del robot y la velocidad angular ya es dada por el kit.

4.3.2.2. Materiales

- **Arduino:** Arduino es una plataforma de prototipos electrónica de código abierto (open – source) basada en hardware y software flexibles y fáciles de usar. Está pensado e inspirado en artistas, diseñadores, y estudiantes de computación o robótica y para cualquier interesado en crear objetos o entornos interactivo, o simplemente por hobby, [92].

Arduino consta de una placa principal de componentes eléctricos, donde se encuentran conectados los controladores principales que gestionan los demás complementos y circuitos ensamblados en la misma, [92].

Además, requiere de un lenguaje de programación para poder ser utilizado y, como su nombre lo dice, programado y configurarlo a nuestra necesidad, por lo que se puede decir que Arduino es una herramienta completa en cuanto a las herramientas principales nos referimos, ya que sólo debemos instalar y configurar con el lenguaje de programación de esta placa los componentes eléctricos que queramos para realizar el proyecto que tenemos en mente, haciéndola una herramienta no sólo de creación, sino también de aprendizaje en el ámbito del diseño de sistemas electrónicos-automáticos y, además, fácil de utiliza, [55].

Hardware

Arduino está constituido en el hardware por un micro controlador principal llamado Atmel AVR de 8 bits (que es programable con un lenguaje de alto nivel), presente en la mayoría de los modelos de Arduino, encargado de realizar los procesos lógicos y matemáticos dentro de la placa, además de controlar y gestionar los recursos de cada uno de los componentes externos conectados a la misma, [92].

Consta además de una amplia variedad de sensores eléctricos como cámaras VGA, sensores de sonido, seguidores de línea, botones de control de sensores, e incluso, otras placas de micro controladores (mejor conocidos como Shields), que pueden adaptarse fácilmente gracias a que Arduino cuenta con entradas de pines analógicos y digitales para integrar estos componentes sin necesidad de alterar el diseño original de esta placa, [55].

Software

Como se había mencionado, Arduino, no sólo son componentes eléctricos ni una placa de circuitos, sino que además, también es una plataforma que combina esto con un lenguaje de programación que sirve para controlar los distintos sensores que se encuentran conectados a la placa, por medio de instrucciones

y parámetros que nosotros establecemos al conectar la placa a un ordenador, [92].

Este lenguaje que opera dentro de Arduino se llama Wiring, basado en la plataforma Processing y primordialmente en el lenguaje de programación C/C++, que se ha vuelto popular a tal grado de ser el más preferido para enseñar programación a alumnos de nivel superior que estudian computación y robótica, gracias que es muy fácil de aprender y brinda soporte para cualquier necesidad de computación, [92].

- **Presupuesto:** para la adquisición del GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial, el cual costó \$238.000 pesos.

4.3.2.3. Humanos

Asesorías

Asistencia al cursillo de Arduino orientado en la asignatura de matemática computacional, asignatura correspondiente al pensum del pregrado de matemática aplicada de la universidad surcolombiana. consultas virtuales a Vistrónica SAS.

4.3.3. Fases de la investigación

El diseño de la investigación está estructurada en dos: fase de investigación documental y la fase de la investigación experimental.

4.3.3.1. Fase de investigación documental

Una vez concebida la idea de investigación se procede a consultar, indagar y a recolectar la información posible sobre los temas que se relacionan con la idea de investigación (robótica móvil, matemática aplicada a la industria, Arduino y modelos matemáticos asociados a la robótica móvil). De igual manera se visitan las instalaciones de la biblioteca Rafael Cortés Murcia de la universidad Surcolombiana ubicada en la ciudad de Neiva, Huila para observar qué material bibliográfico hay al respecto. Del mismo modo se visita el laboratorio de robótica del colegio Anglocanadiense ubicado en la misma ciudad, con el propósito de hacer las primeras exploraciones con el robot móvil GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial. Al mismo tiempo es indispensable acudir a los cursillos de Arduino orientados en la materia de matemática computacional, materia adscrita al pensum del pregrado en matemática computacional de la universidad Surcolombiana.

Definida la pregunta de investigación y luego de haber hecho una revisión acerca de los temas mencionados, se sigue el siguiente procedimiento para dar respuesta a dicho interrogante. De un lado se seleccionó la metodología de investigación más

acorde a nuestros objetivos propuestos y a nuestro problema de estudio, que como ya hemos mencionado, es la investigación aplicada.

Por otro lado se inicia el trabajo experimental para la elaboración del modelo cinemático y dinámico del GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial.

4.3.3.2. Fase de la investigación experimental

Esta fase se desarrolló en el laboratorio de robótica del colegio Anglocanadiense ubicado en la ciudad de Neiva, Huila. Consiste en llevar a cabo los siguientes procesos:

- Construcción y ensamble del robot GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial.
- Programación en Arduino, para facilitar las aplicaciones disponibles para este RMR y que ayuda a crear los supuestos del modelo.
- Definir las hipótesis para diseñar el modelo cinemático y dinámico del robot.
- Formulación del modelo cinemático y dinámico del RMR.

Condiciones físicas del robot GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial

Considerando que un RMR es un robot capaz de moverse sobre una superficie mediante la acción de ruedas montadas en él, se asumen las siguientes hipótesis:

- El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal, es decir, la energía potencial es constante.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- No existen elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo las ruedas.
- El contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto.
- No existe deslizamiento.

En el capítulo 5 se explica los procesos mencionados en esta fase de la investigación.

Capítulo 5

Parte Experimental, resultados y discusión

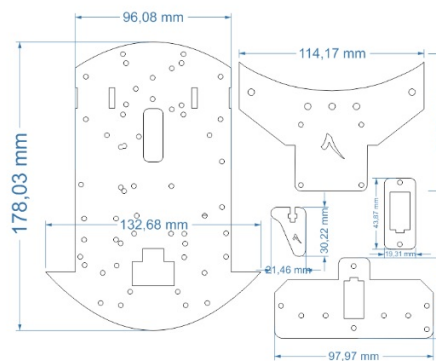
5.1. Morfología del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial

El robot GPR multipropósito es un RMR de tipo direccionamiento diferencial debido a que las ruedas traseras son las que brinda la dirección a este RMR y, además, cada vez que va a dar una vuelta deja una rueda de pivot accionando el motor de la otra rueda.

A continuación se describirá geoméricamente las partes del robot dada por la página de Vistrónica, [88]. El kit contiene las siguientes partes:



(a) Chasis



(b) Dimensiones

Figura 5.1: Chasis GPR 2.0(Vistrónica S.A.S, 2017)

Chasis GPR 2.0: Es la parte del robot que sirve como soporte de los demás elementos. Contiene 10 partes que lo conforman y su diseño es elegante y compacto.

En el chasis base es el de mayor tamaño tiene la forma de un rectángulo curvado inferior y superiormente; tiene de altura 178.03 mm, de ancho mayor 132.68 mm y de ancho menor 96.08mm.

Su cola (imagen que se encuentra en el lado superior derecho de (5.1b)) tiene de altura 84.88mm y de ancho 114.17mm.

El minichasis que se ubica encima del chasis anteriormente descrito tiene una forma de triángulo con una abertura en su base; tiene de altura 30.22mm y de ancho 21.46mm.

El chasis que se encuentra en la parte inferior de (5.1b) en de forma rectangular horizontalmente y posee una abertura en su centro. Este tiene de alto 49.73mm y de ancho 97.97mm.

Finalmente el otro minichasis de forma rectangular se posiciona en la abertura del chasis anteriormente descrito. Tiene altura de 43.87mm y de ancho 19.31mm



Figura 5.2: Arduino UNO R3
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Arduino UNO R3 Compatible: Es un conjunto de herramientas de software y plataformas de hardware de código abierto. Es una placa que incluye circuitos electrónicos con entradas y salidas, que conectan el mundo físico con el mundo virtual. Con estas placas es posible enviar o recibir información de cualquier sistema electrónico conectado a él. En nuestro caso conectamos el arduino al computador utilizando el programa de arduino y procedemos a programarlo para que el prototipo nos desarrolle cierta tarea.

Arduino tiene un peso de 25 g y sus dimensiones son: de alto 53.4mm y de ancho 68.6mm

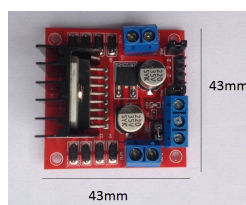


Figura 5.3: Módulo L298N1
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Módulo L298N para Control de Motores: Es el que permite controlar dos motores de corriente continua y motores paso a paso de no mas de 2 amperes.

Características:

- Voltaje de alimentación, mínimo de 5 V. Posee dos entradas, una de 5V para controlar la parte lógica y otra para alimentar las salidas al motor, que pueden ser de 5V o más.
- La tarjeta tiene la opción de habilitar un regulador LM7805 integrado en ella para alimentar la parte lógica con lo que se puede alimentar la tarjeta con 12V por ejemplo.
- Corriente máxima 2 Amperios.
- Posee 6 entradas de control (ver tabla de control)
- Admite entradas de señal PWM para el control de velocidad.
- Dimensiones: 43 mm x 43 mm.
- Salidas: para 2 motores de DC o para un motor bipolar paso a paso.

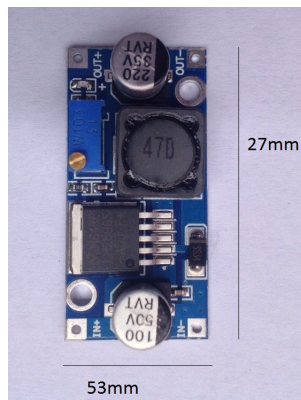


Figura 5.4: Convertidor DC-DC Buck LM2596
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Este circuito nos permite tener un voltaje regulado a partir de una fuente de alimentación con un voltaje mayor, por ejemplo si se tiene una fuente de 12V se puede regular a 5V, 3.3V, 2.2V, etc, para el uso con microcontroladores y Arduino.

Características:

- Voltaje de operación: $4,0V \sim 35VDC$
- Voltaje de Salida: $1,23V \sim 30VDC$ Ajustable (el voltaje de entrada debe tener al menos 1.5V más que la salida).
- Corriente de Salida: máx. 3A, 2.5A recomendado (usar disipador para corrientes mayores a 2A).

- Potencia de salida: 50-70W, utilizar disipador
- Eficiencia de conversión: 92 %
- Regulación de carga: $S(I) \leq 4,8 \%$.
- Regulación de voltaje: $S(u) \leq 0,8 \%$.
- Frecuencia de Trabajo: 150KHz
- Ripple en la salida: 30mV (máx.) 20M bandwidth
- Temperatura de trabajo: $-40^{\circ}C \sim +85^{\circ}C$
- Protección de cortocircuito y sobre temperatura.
- Aplicaciones: Reducir el voltaje de una fuente como una batería, una fuente de voltaje, cargadores de celular, etc., a un voltaje menor deseado utilizando un proceso muy eficiente comparado a los tradicionales reguladores lineales.
- Dimensiones: 53mm x 27mm

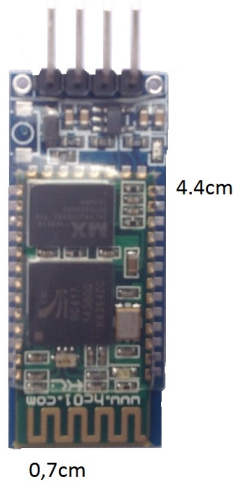


Figura 5.5: Módulo Bluetooth Esclavo HC-06
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Módulo Bluetooth Esclavo HC-06:

Este módulo es apto para conectar como esclavo a un adaptador Bluetooth al PC, o un teléfono. En nuestro caso nos comunicaremos vía bluetooth por medio del smartphone.

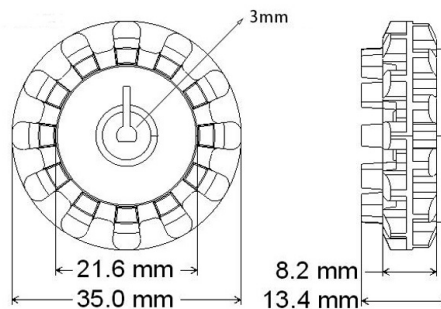
La tarjeta incluye un adaptador con 4 pines de fácil acceso para uso en protoboard. Los pines de la board correspondientes son: VCC, GND, RX y TX. Además posee un regulador interno que permite su alimentación de 3.6 a 6V.

Características:

- Compatible con el protocolo Bluetooth V2.0.
- Voltaje de alimentación: 3.3VDC – 6VDC.
- Voltaje de operación: 3.3VDC.
- Tamaño: 4.4 cm x 0.7 cm



(a) Ruedas de goma



(b) Dimensiones

Figura 5.6: Rueda de Goma (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)

Rueda de goma N20 3pi: Ya que nuestro prototipo es un RMR pues este medio (la rueda) es el transporte de robot.

Estas ruedas de goma tienen un ancho del 13.4mm, de radio mayor tiene 35mm y de radio menor 21.6mm.

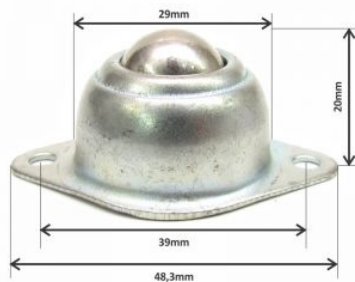


Figura 5.7: Rueda Loca CY-15A (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Rueda Loca CY-15A: esta rueda loca mejora la movilidad en robots y sistemas que requiera desplazamiento en varias direcciones, su fabricación en acero la hace muy resistente y la esfera de rodamiento da una libertad de giro de 360 grados

Esta rueda “loca” o “de giro sin fin” es de gran utilidad para estabilizar el movimiento en sistemas mecánicos o robots controlados mediante Arduino o microcontroladores, por ejemplo, en robots seguidores.

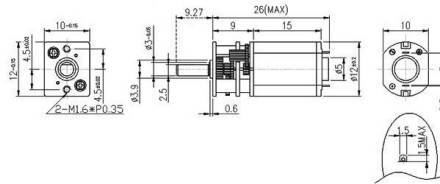
Características:

- Fabricada en metal
- Peso máximo soportado: 10 kg
- Agujero de montaje: 4 mm
- Distancia entre agujeros de montaje: 40 mm
- Altura: 20 mm
- Parte de la rueda expuesta: 5 mm
- Diámetro de la bola: 15 mm

Motorreductor 6V 300rpm 0.2Kg: Este pequeño motor, proporciona una gran facilidad para trabajarlos en el área de la robótica, como en la implementación de



(a) Motorreductor



(b) Geometría

Figura 5.8: Motorreductor 6V 300rpm 0.2Kg; (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)

carros seguidores de linea.

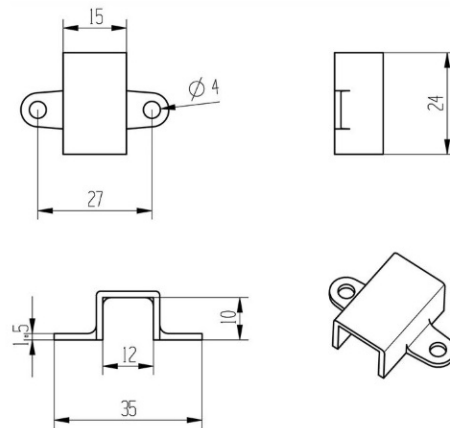
Características:

- Modelo: 12GA/N20-30
- Voltaje de operación: 3 a 9 VDC
- Velocidad sin carga a 6V: 300 RPM
- Corriente sin carga a 6V: 0,03 A
- Velocidad nominal con carga a 6V: 240 RPM
- Corriente nominal con carga a 6V: 0,04 A
- Torque nominal a 6V: 0,2 Kg.Cm
- Stall Torque (torque motor bloqueado) a 6V: 1,6 Kg.Cm
- Corriente en Stall torque a 6V: 0,2 A
- Dimensiones: 10x12x26 mm
- Diámetro del eje: 3 mm
- Peso: 9,5 g

Bracket Plástico para Motor N20: sirve de soporte para el micromotorreductor N20, se utiliza para sujetar el motor a la base de una plataforma



(a) Bracket



(b) Dimensiones

Figura 5.9: Bracket Plástico para Motor N20: (Fuente: Cáceres & Charry - Vistrónica S.A.S, 2017)

Características:

- Dimensiones: 15mm (Ancho) x 24mm (Largo) x 11mm (Altura) x 12 mm (Abertura interna).
- Espesor del plástico: 2mm
- Color: Naranja
- Distancia centro de agujeros fijos: 27mm.
- Orificios ideales para tornillo M4.

Estos sensores son ampliamente utilizados para hacer robots seguidores de líneas, aunque también pueden emplearse para detectar cualquier otro tipo de objeto. Por ejemplo, son empleados en impresoras para saber cuando se ha agotado el papel.

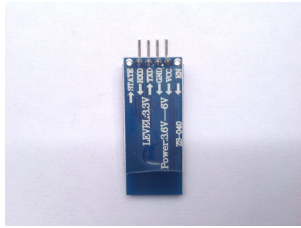


Figura 5.10: Módulo Sensor TCRT5000L
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Módulo Sensor TCRT5000L: Es un dispositivo que es utilizado normalmente para la detección de la línea negra o blanca en robots seguidores de línea. El módulo posee un comparador de voltaje y un trimmer para ajustar la sensibilidad de detección del sensor

El TCRT5000L es un sensor sencillo. Dispone de un LED emisor de luz infrarroja, y de un fototransistor que recibe la luz reflejada por un posible obstáculo. La cantidad de luz recibida depende del color y reflectividad del objeto, por lo que podemos distinguir entre zonas y oscuras de un objeto.

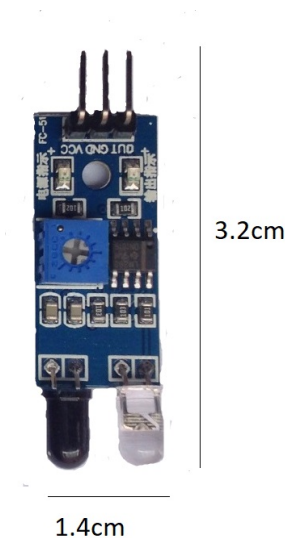


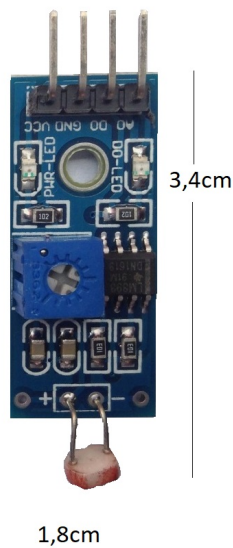
Figura 5.11: Módulo Sensor Infrarrojo evasor de obstáculos
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Módulo Sensor Infrarrojo Evasor de Obstáculos: Estos infrarrojos emiten un haz de luz infrarrojo, cuando el haz de luz se encuentra con un obstáculo rebota y es recibido por el receptor que se encarga de recibir la cantidad de luz rebotada. Este fenómeno se usa para identificar si hay o no un obstáculo o también si hay una línea negra o blanca, ya que el negro no refleja la luz y el blanco refleja toda la luz. Además, suele ser usado en robots diseñados para evadir obstáculos, seguidor de línea de color negro o blanca, entre otras.

Son sensores sencillos debido a que se dispone de un LED emisor de luz infrarroja y de un fotodiodo (tipo BPV10NF o similar) que recibe la luz reflejada por un posible obstáculo. Estos actúan a distancias cortas, típicamente de 5 a 20mm. Además la cantidad de luz infrarroja recibida depende del color, material, forma y posición del obstáculo, por lo que no disponen de una precisión suficiente para proporcionar una estimación de la distancia al obstáculo.

Características:

- Sensor infrarrojo emisor y receptor, con circuito procesador de señal y potenciómetro.
- Ajuste fino: con el potenciómetro se puede ajustar la sensibilidad.
- Cuando se detecta un obstáculo, el led indicador enciende, y el pin de señal se pone en nivel bajo.
- Detección de 2-30 cm.
- Ángulo de detección 35 grados.
- Voltaje 3.3-5v.
- Salida digital.
- Dimensiones: 3.2 x 1.4cm.
- Fácil uso: solo 3 pines, VCC, GND y OUT.
- Entre sus aplicación están, carrito evasor de obstaculos, seguidor de lineas, detector contador en banda transportadora.

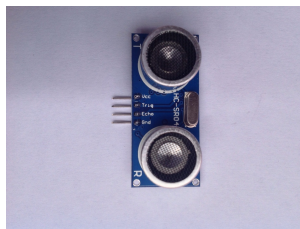


Módulo Fotoresistencia LDR: Está conformado por una fotorresistencia, el cual es bastante sensible a la exposición de intensidad lumínica ambiental, para así determinar el brillo e intensidad lumínica del medio. Este módulo a través de una salida digital, establece el umbral de luminosidad, proporcionando un nivel de tensión alto o bajo, dependiendo de la configuración.

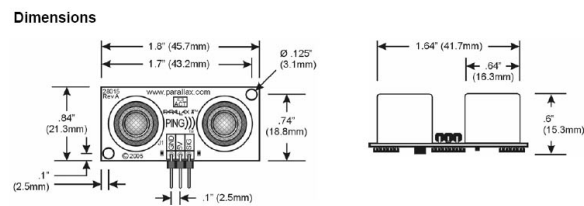
Figura 5.12: Módulo Fotoresistencia LDR
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Características:

- Voltaje de Operación: 5V DC.
- Conexión de 4 cables: VCC, GND, DO, AO.
- Salida analógica y digital(comparador).
- Opamp en modo comparador: LM393.
- Potenciómetro para ajuste de comparador.
- Led rojo de encendido y verde de salida digital.
- Peso: 0.1 kg
- Dimensiones: 3.4 x 0.7 x 1.8 cm



(a) Ultrasonido



(b) Dimensiones

Figura 5.13: Sensor de Ultrasonido HC-SR04 Arduino: (Fuente: Cáceres & Charry)

Sensor de Ultrasonido HC-SR04 Arduino: Los ultrasonidos son señales acústicas cuyas frecuencias están por encima del rango de frecuencias sensibles al oído humano. Los sensores de ultrasonido son capaces de medir la distancia a la que están respecto a un objeto por medio de un sistema de medición de ecos.

Estos sensores están formados por un transductor que emite un pulso corto de energía ultrasónica, cuando el pulso es reflejado por un objeto, el sensor captura el eco producido por medio de un receptor, y mediante un sistema de tratamiento de señal, calcula la distancia a la que está de dicho objeto.

Las principales ventajas de estos sensores se basan en que no necesitan contacto físico para poder detectar objetos, tienen una buena relación de calidad y precio; y en comparación con otras tecnologías, los dispositivos basados en ultrasonidos son compactos y livianos. El HC-SR04 está formado por un emisor y un receptor de ultrasonidos que opera a una frecuencia de 40kHz. El sensor se alimenta a 5V, por lo que se puede alimentar directamente desde el Arduino, y puede llegar a detectar objetos hasta 5 metros con una resolución de 1cm.

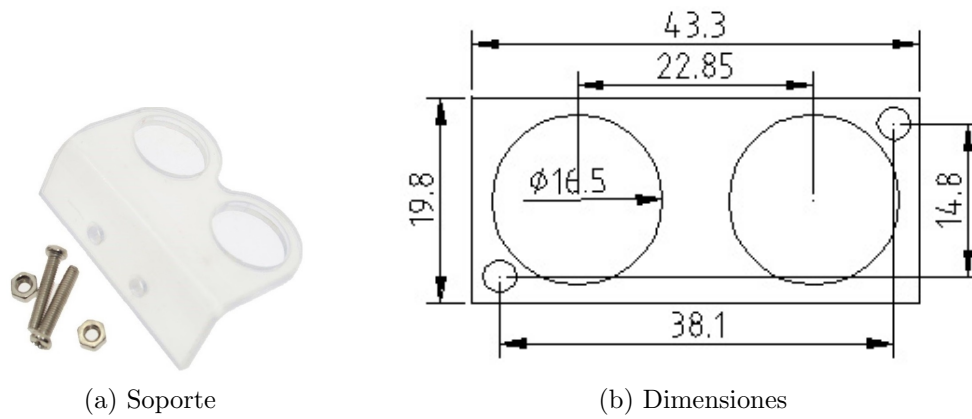


Figura 5.14: Soporte para Ultrasonido HC-SR04: (Fuente: www.superrobotica.com)

Soporte para el Sensor de Ultrasonido HC-SR04: Es el soporte para el Sensor de Ultrasonido HC-SR04. En su base viene con tres pequeñas perforaciones para fijar a la superficie deseada con tornillos.

Características:

- Material: Acrílico
- Ancho de acrílico: $2,8mm \sim 3,1mm$
- Diámetro interno: 16mm
- Diámetro soporte de tornillos: 3.8mm

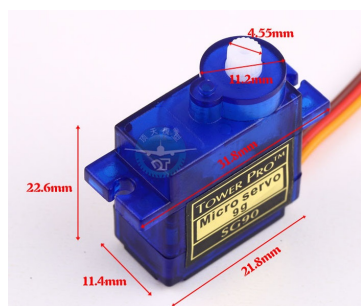


Figura 5.15: Microservomotor SG90 9G
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Micro Servomotor SG90 9G: Los servos son motores de corriente continua (CC), pero en lugar tener un giro continuo que podamos aprovechar (para mover un molino por ejemplo), están preparados para moverse a un ángulo fijo en respuesta a una señal de control, y mantenerse fijos en dicha posición. Estos servomotores son muy frecuentes en Aero modelismo y en robótica, puesto que su funcionamiento y control son muy precisos.

Un servo principalmente está formado por un conjunto reductor (engranajes), un motor de CC y por último por un circuito de control, aunque en la práctica se comporta como un bloque funcional que posiciona su eje en un ángulo preciso en

función de la señal de control..

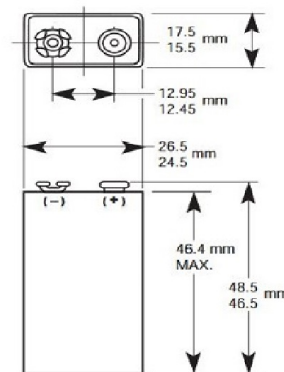
Habitualmente los servos tiene un margen de operación, es decir, pueden moverse entre 0° y ángulo dado, que suele ser de 180° . Normalmente estos pequeños servos funcionan sobre 5V y el control se realiza mediante una señal de control PWM, en la que el ancho del pulso indica el ángulo que deseamos que adopte el eje.

Características:

- Dimensiones: 21.8 x 11.4 x 22.6 mm
- Peso: 9 gramos
- Velocidad sin carga: 0.12 segundos/60 grados (4.8 v)
- Par máximo de 1.2-1.4 kg/cm (4.8 v)
- Temperatura de funcionamiento:-30 a + 60 grados Celsius
- Voltaje de funcionamiento: 4.8 V-6 V



(a) Conector para pila



(b) Dimensiones

Figura 5.16: Conector para pila 9V: (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)

Conector para pila 9V: Conector tipo broche el cual tiene un peso de 1g y contiene dos cables de conexión; uno de color negro y el otro rojo.

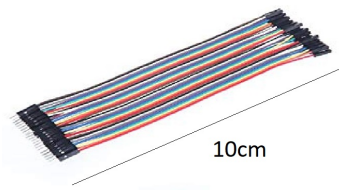


Figura 5.17: Cable
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Cable DuPont Macho Hembra X40 10 cm: Los conectores permiten realizar prototipos y montajes semi-definitivos o definitivos con gran facilidad. Estos cables permiten llevar a cabo conexiones de forma más profesional, sin soldaduras, sin falsos contactos y sin desorden.

Este tipo de puente es el segundo más usado, en uno de sus extremos esta la conexión de “pico o punta” y en la otra una entrada en la cual se ajusta para la entrada Macho, este tipo de entrada es la conocida como Hembra.

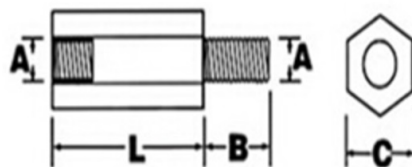


Figura 5.18: Cable DuPont Macho-Macho por unidad 20cm
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Cable DuPont Macho-Macho por unidad 20cm: Este tipo de cable es el más común ya que sus terminales son de punta y sirven en practicas como los puentes de cable telefónico.



(a) Separador



(b) Dimensiones

Figura 5.19: Separador de Nylon: (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)

Separador de Nylon: Estos tornillos se emplean sobre todo para fijar los circuitos a los robots mediante separadores, también se emplean mucho en robótica para soportar piezas, módulos electrónicos o eléctricos, componentes en los robots o crear pequeñas estructuras. Donde A en (5.19b) es la tuerca M3, B= 6mm, C= 5.5mm y L=21mm



Figura 5.20: Espiral de plástico
(Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Espiral de Plástico 1M: Esta espiral de plástico gira en sentido de las manecillas del reloj para recubrir completamente el cableado que este expuesto a movimiento o simplemente desordenado, de esta manera lo protege del desgaste y evita accidentes.

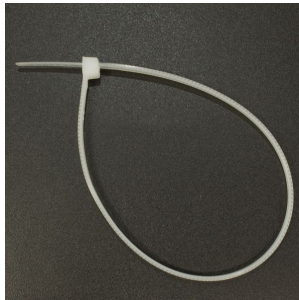


Figura 5.21: Amarre de plástico
(Vistrónica S.A.S, 2017)

Amarre de plástico (brida) 4x200mm Blanca: son cintas de Nylon resistente, con una cremallera integrada y un trinquete en un extremo, dentro de una caja pequeña y abierta.

Este robot posee varias aplicaciones, como: Seguidor de Linea, Robot Evasor de Obstáculos, Robot Seguidor de Luz, Robot Teledirigido (Puede ser controlado por Medio de Bluetooth) y Robot de Laberinto. Pero solo tres de ellos se desarrollarán en este trabajo.

Acontinuación, describiremos el proceso de ensamble del GPR.

5.2. Ensamble

1. Cortamos el lado hembra del cable Dupont, soldamos en las terminales del motorreductor y luego ubicamos los motorreductores en los Brackets plásticos. Una vez hecho esto, procedimos a ubicar los brackets con los motores a la parte inferior del chasis.

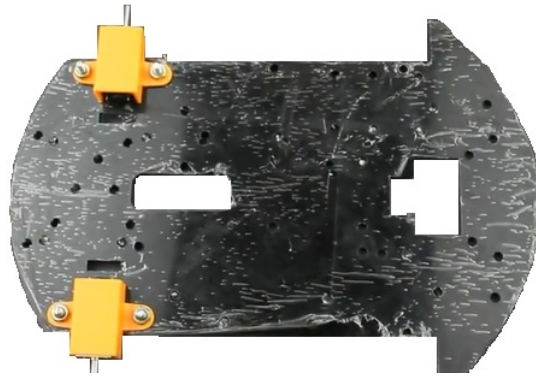


Figura 5.22: Paso 1. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

2. Pusimos la rueda loca en la parte superior del chasis y la atronillamos.



Figura 5.23: Paso 2. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

3. Ubicamos las ruedas en los motorreductores ya ubicados en el chasis.



Figura 5.24: Paso 3. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

4. Tomamos los sensores TCRT5000L y usamos un separador entre el módulo sensor TCRT5000L y el chasis (ubicado con los bombillos hacia abajo) y luego procedimos a poner los tornillos.

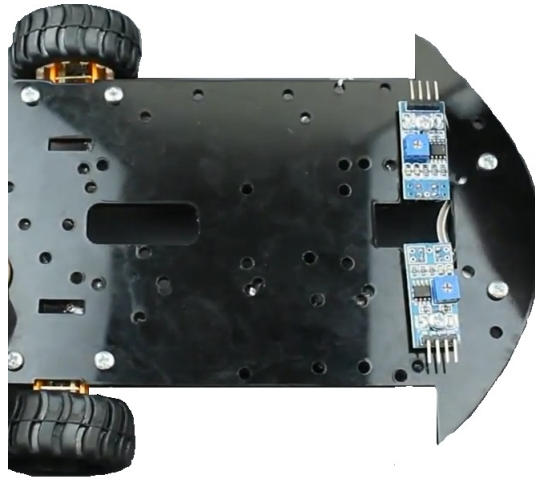


Figura 5.25: Paso 4. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

5. Ubicamos los separadores de Nylon al extremo superior de chasis.

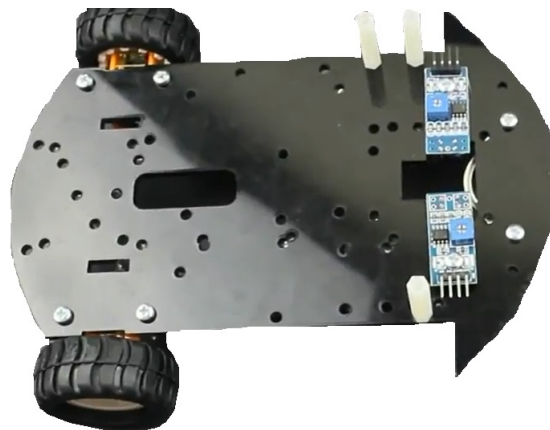


Figura 5.26: Paso 5. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

6. Ahora, con el chasis para el módulo sensor infrarrojo evasor de obstáculos y el módulo fotoresistencia LDR usamos un separador sobre ese chasis y procedimos a ubicar los módulos fotorresistores seguidos de los sensores infrarrojo evasor de obstáculo.

En el agujero de este chasis, ubicamos el micro servomotor y usamos la otra parte del chasis más pequeña para ponerla encima de ella y procedimos a atornillarla. Además, ubicamos sobre los separadores de Nylon lo acabado de mencionar.

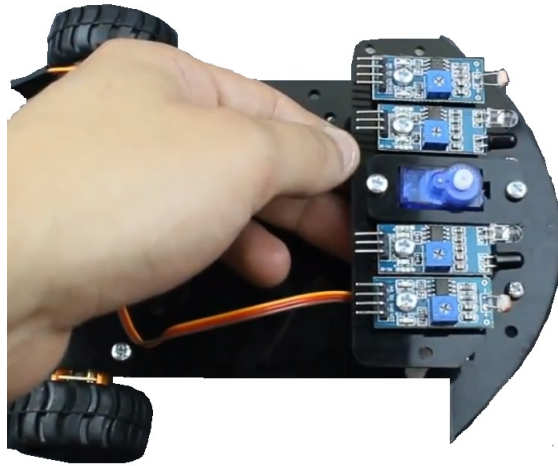


Figura 5.27: Paso 6. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

7. Procedimos a ubicar el soporte para el sensor de ultrasonido encima del micro servomotor. Una vez hecho esto, ubicamos el sensor ultrasonido sobre dicho soporte.

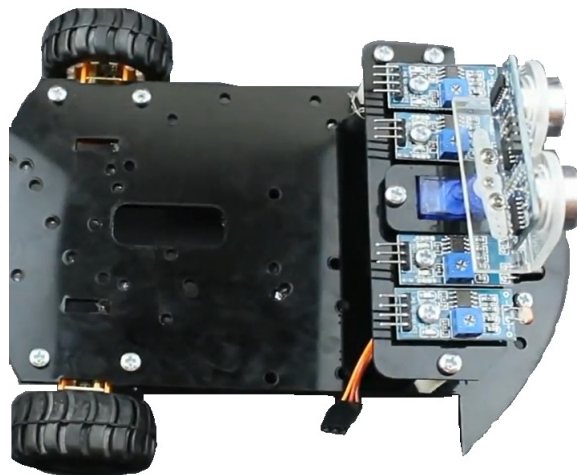


Figura 5.28: Paso 7. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

- Colocamos las tuercas al arduino y lo ensamblamos en el chasis.

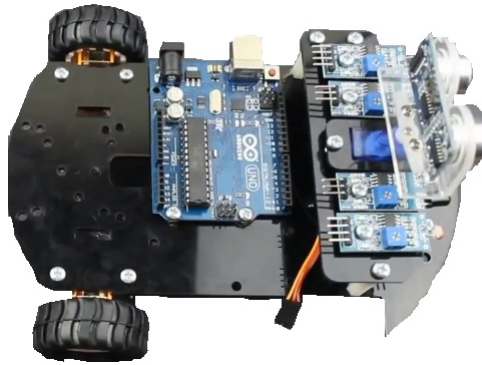


Figura 5.29: Paso 8. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

- Colocamos las tuercas en el módulo L298N para control de motores y lo ubicamos encima del chasis, luego pusimos los separadores de Nylon y ensamblamos a la base del chasis.



Figura 5.30: Paso 9. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

- Cogimos el convertidor DC-DC y soldamos dos cables DuPont Macho-Macho a las terminales de salida (OUT+ y OUT-) y para las terminales de entrada (IN+ y IN-) soldamos el conector uno para pila de 9v (rojo con IN+, negro con IN-) y conectamos la pila de 9v para verificar que la salida sea de 6v de no ser así, movemos el trimmer hasta alcanzar los 6v, luego conectamos a la base del chasis.



Figura 5.31: Paso 10. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

11. Conecta el módulo Bluetooth al chasis.

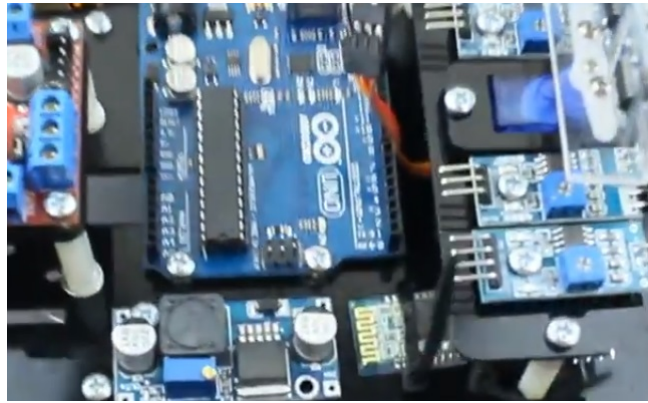


Figura 5.32: Paso 11. (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

5.3. Circuito del robot

Se realiza las conexiones de los pines como muestra la siguiente figura.

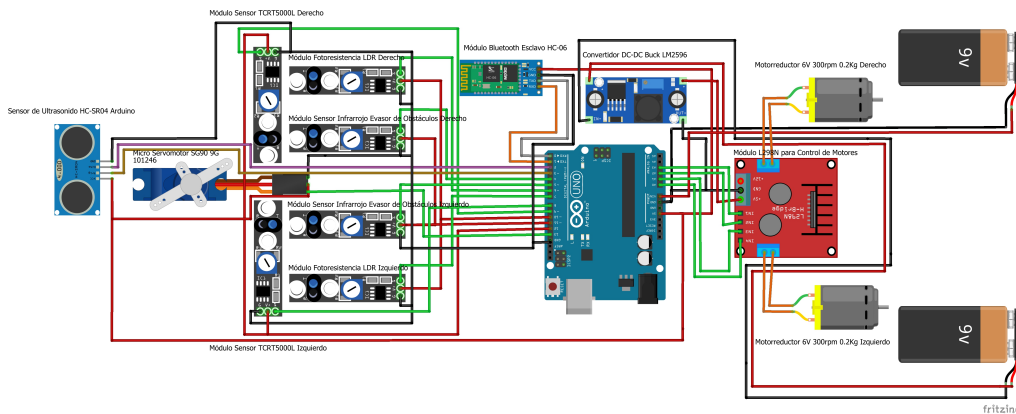


Figura 5.33: Circuito (Fuente: Vistrónica S.A.S, 2017)

Finalmente, el prototipo luce de la siguiente forma

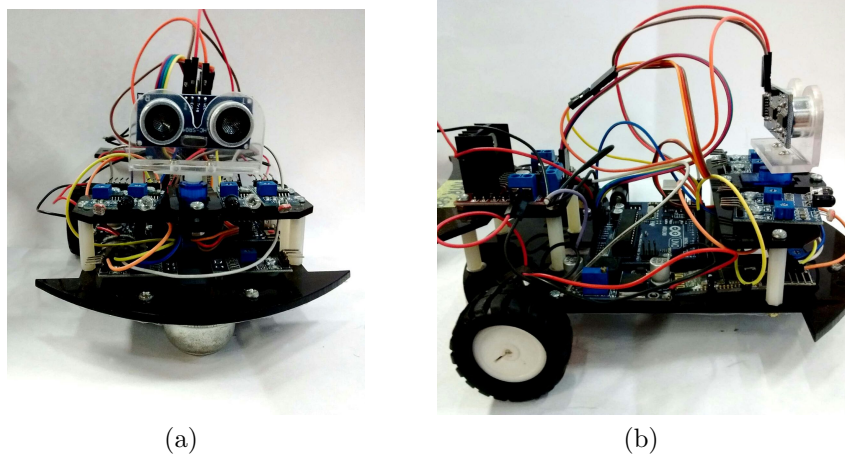


Figura 5.34: GPR 2.0 (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

5.4. Modelo Cinemático del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial

El robot multipropósito GPR (2.0) tiene un sistema de locomoción en configuración diferencial, puesto que su diseño está formado por dos ruedas fijas situadas en un eje perpendicular a la dirección del robot, entre tanto, cada una de ella es actuada mediante un motor, de tal forma que la rotación del robot se dá generando velocidad distinta en cada una de las ruedas fijas. Es decir, si se desea girar hacia

la derecha, se dará mayor velocidad al motor izquierdo; por lo tanto, igualando las velocidades de ambos motores el robot se mantendrá en línea recta, [60].

En esta sección se formula el modelo cinemático de postura para el robot móvil GPR 2.0 Multipropósito, formado por dos ruedas fijas en el mismo eje, cuyo centro es el punto S y una rueda de apoyo (rueda loca) en la parte superior. (Ver fig: 5.35)

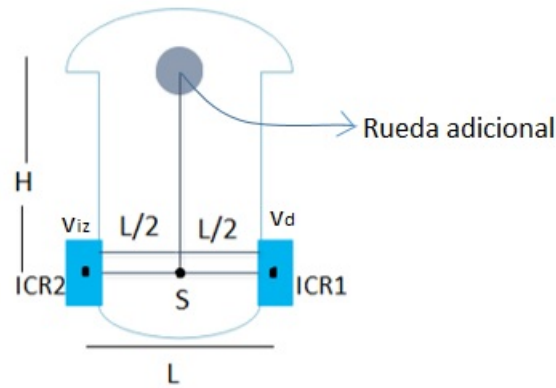


Figura 5.35: Dimensiones del prototipo (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

Variables:

r = Radio de las ruedas.

L = Distancia desde el centro de la rueda izquierda hasta el centro de la rueda derecha, con $L = 2a$.

$\dot{\theta}$ = Velocidad angular = w

$\dot{\theta}_{iz}$ = Velocidad angular de la rueda izquierda.

$\dot{\theta}_d$ = Velocidad angular de la rueda derecha.

Se sabe del capítulo 2 subsección 2.6.2.1 que el modelo cinemático es descrito por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \dot{\theta}_d \cos \phi \\ \frac{r}{2} \dot{\theta}_d \sin \phi \\ \frac{r}{L} \dot{\theta}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \dot{\theta}_{iz} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \dot{\theta}_{iz} \sin \phi \\ -\frac{r}{L} \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \dot{\theta}_d \cos \phi + \frac{r}{2} \dot{\theta}_{iz} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \dot{\theta}_d \sin \phi + \frac{r}{2} \dot{\theta}_{iz} \sin \phi \\ \frac{r}{L} \dot{\theta}_d - \frac{r}{L} \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}) \\ \frac{r}{2} \sin \phi (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}) \\ \frac{r}{L} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}) \\ \frac{r}{L} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \tag{5.1}
\end{aligned}$$

Siendo v la velocidad lineal y w la velocidad angular. Para un mejor desarrollo usamos el resultado final, (5.1).

$$\text{Donde } v = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}); \quad w = \frac{r}{L}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz})$$

Se dan las siguientes relaciones:

Velocidades lineales en cada rueda:

$$\begin{aligned}
v_d &= r\dot{\theta}_d \\
v_{iz} &= r\dot{\theta}_{iz}
\end{aligned}$$

Nueva rotación del robot (gira el robot):

$$\phi' = \phi + wt$$

En este trabajo utilizaremos (5.1) que es el modelo cinemático directo.

En el caso del GPR tendremos en cuenta que las variables de entrada o de control serán las velocidades angulares de las ruedas izquierda y derecha $\dot{\theta}_{iz}; \dot{\theta}_d$ respectivamente.

Sus valores reales son:

$$L = 9,6 \text{ cm} \quad H = 13 \text{ cm} \quad w = 300 \text{ rpm}$$

$$r = 2 \text{ cm} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Utilizando las expresiones de la velocidad lineal y angular del GPR se tiene;

$$\begin{aligned} v &= \frac{r}{2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}); \\ w &= \frac{r}{L}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) \\ 300 &= \frac{2}{9,6}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) \\ 300\left(\frac{9,6}{2}\right) &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz} = 1440 \end{aligned}$$

Se tiene también que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz})r}{2} \cos \phi = (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) \cos \phi \\ \dot{y} &= \frac{(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz})r}{2} \sin \phi = (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_{iz}) \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \frac{r}{L}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_{iz}) = \frac{2}{9,6}(1440) = 300 \end{aligned}$$

Así el modelo cinemático del robot puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_{iz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

5.5. Modelo Dinámico del GPR 2.0 2WD Multipropósito Diferencial

El objetivo de esta sección es obtener el modelo Dinámico para el robot móvil GPR 2.0 Multipropósito. A continuación se describen las variables.

Variables:

r = Radio de las ruedas.

m = Masa del RMR

I = Tensor de inercia del cuerpo (es una matriz simétrica).

L = Distancia desde el centro de la rueda izquierda hasta el centro de la rueda derecha.

τ = Vector de fuerza externa aplicado al cuerpo.

v_1 = Velocidad de traslación= v

v_2 = Velocidad angular= w

En capítulos anteriores se dedujo el modelo dinámico para un RMR Diferencial, el cual se recordará a continuación.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_{iz} \end{bmatrix}$$

$$m\dot{v}_1 = \frac{1}{r}(\tau_d + \tau_{iz})$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{mr}(\tau_d + \tau_{iz}) = v$$

$$I\dot{v}_2 = \frac{L}{r}(\tau_d - \tau_{iz})$$

$$\dot{v}_2 = \frac{L}{Ir}(\tau_d - \tau_{iz}) = w$$

Sus valores reales son:

$$L=9,6\text{cm}; \quad r=2\text{cm}; \quad \dot{v}_2 = w = 300; \quad m=470\text{gr}$$

Como $\dot{v}_2 = w = 300$ tenemos que

$$300 = \frac{L}{rI}(\tau_d - \tau_{iz})$$

$$300 = \frac{9,6\text{cm}}{2I}(\tau_d - \tau_{iz})$$

$$62,5I = \tau_d - \tau_{iz}$$

Por lo tanto,

$$v = \frac{9,6\text{cm}}{(470\text{gr})2\text{cm}}(\tau_d + \tau_{iz}) = \frac{12}{1175}(\tau_d + \tau_{iz})$$

$$w = 300$$

Y así, el modelo dinámico para nuestro prototipo puede ser escrito de la manera siguiente

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \frac{12}{1175} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_{iz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Los modelos dinámicos y cinemáticos describen en su totalidad el movimiento del robot.

5.6. Aplicaciones

5.6.1. SmartPhone Robótico

Se ha llamado de esta forma debido a que a partir de una aplicación instalada en el teléfono inteligente podemos comunicarnos vía bluetooth con el GPR. De esta forma podemos manejar el robot como si fuese un carro a control remoto.

La aplicación es posible descargarla en la PlayStore en los androids como (control de carro).



Figura 5.36: Aplicación en el SmartPhone (Fuente: Cáceres & Charry)

5.6.2. Seguidor de Línea

Con esta aplicación el robot es capaz de seguir una trayectoria arbitraria marcada con una línea negra. Esto se logra debido a sus sensores infrarrojos que detectan el

contraste entre la línea que define la trayectoria y el fondo sobre el que está pintada.

El robot posee dos sensores infrarrojo los cuales contienen un fotodiodo que emite luz infrarroja y un fototransistor que recibe la señal.

5.6.3. Evasor de Obstáculo

Para esta aplicación, se hace necesario el sensor de ultrasonido, el cual emite ondas sonoras que rebotan cuando se encuentra un objeto, evitando cualquier choque entre el objeto y el robot. Más aún, se hace uso de dos módulos sensores infrarrojos, los cuales emiten una luz infrarroja que si se encuentra con un obstáculo rebota la información y la recibe los fotodiodos.

La programación en Arduino de las tres aplicaciones se encuentra en los ANEXOS.

5.7. Resultados

El resultado obtenido en el modelo cinemático para el prototipo RMR diferencial 2.0 2WD describe el movimiento del robot en función del espacio y del tiempo, sin tomar en cuenta las causas que lo producen. Este modelo combina las velocidades angulares de cada rueda (derecha e izquierda) con una matriz de rotación y además posee un vector independiente, el cual es un vector de velocidades.

Por otro lado, el modelo dinámico obtenido para el prototipo RMR diferencial 2.0 2WD se encarga del estudio del origen del movimiento del robot en función del tiempo y el espacio, es decir, sus causas (fuerzas externas e internas). Este modelo depende netamente de las fuerzas externas aplicada a la rueda derecha e izquierda.

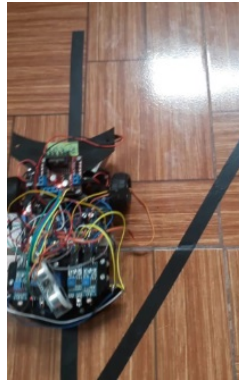
Además, a partir del software Arduino fue posible crear un código para desarrollar las aplicaciones de smartphone robótico, seguidor de línea y evasor de obstáculos.

Para poder conectar la aplicación del smartphone robótico al GPR, primero se debe activar el modo bluetooth del celular y conectar con la placa del arduino, luego entrar a la aplicación y seleccionar el botón Seleccionar BT (ver fig: 5.36). Finalmente le damos en conectar y podremos manejar el robot como si fuese un carro a control remoto.

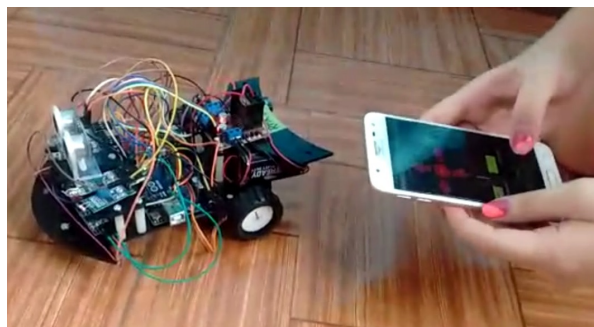
No obstante, se pudo observar que el prototipo al girar, deja una rueda de pivot y solo se activa el motor de la otra rueda, dando así un movimiento giratorio en un mismo punto. Ver (5.38).



(a) Evasor de Obstáculo



(b) Seguidor de Línea



(c) Smartphone Robótico

Figura 5.37: Aplicaciones (Fuente: Cáceres & Charry, 2018)

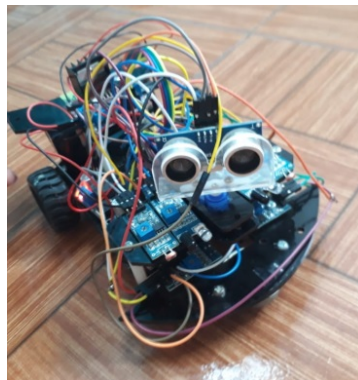


Figura 5.38: Movimiento giratorio, (Cáceres & Charry, 2018)

Capítulo 6

Conclusiones

Con la investigación realizada, fue posible diseñar un modelo cinemático y dinámico para un RMR denominado GPR 2.0 2WD multipropósito diferencial, donde se pudo constatar que las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron vitales para generar el modelo dinámico. Mientras que para el modelo cinemático se tuvo en cuenta las restricciones no-Holonómicas para generar el problema cinemático directo e inverso.

El GPR posee tres ruedas, dos de ellas son fijas y se encuentran en el mismo eje; mientras que la tercera es una rueda de apoyo ubicada en la parte superior de robot. Al poseer este prototipo 3 ruedas, diremos que posee 3 grados de libertad.

En la programación de arduino los códigos de las aplicaciones: SmartPhone robótico y Seguidor de línea, son propios de los integrantes, mientras que en la aplicación del evasor de obstáculos el código se tomó de la plataforma digital de Vistrónica SAS.

En la región son muy pocas las investigaciones en robótica, particularmente en la universidad Surcolombia es muy poco el material bibliográfico que se encuentra. Con lo desarrollado en esta investigación queremos animar a los estudiantes del programa de matemática aplicada a que sigan con futuras investigaciones, no solo sobre robots móviles, sino que también exploren la robótica desde un punto de vista general.

Bibliografía

- [1] A. ISIDORI, *Nonlinear control systems, third ed.* Springer, London, 1995.
- [2] A.J. KOIVO. *Fundamentals for control of robotic manipulators*, Wiley & Sons, New York, 1989.
- [3] ACOSTA. L & SIGUT. MARTA. *Matemáticas y robótica*, Universidad de la Laguna, México, 2005.
- [4] ADAMS MD. *Sensors modeling, design and data processing for autonomous navigation*. Singapore: World Scientific Publishers; 1999.
- [5] ANGULO, JOSÉ MARÍA, *Robótica práctica: tecnologías y aplicaciones*, ISBN: 84-283-1489-6, España, 1996.
- [6] ASADA H, SLOTINE JJ. *ROBOT ANALYSIS AND CONTROL*. New York, NY: Wiley; 1986.
- [7] BACCA, E.B & CAICEDO, E.F. *Control del empuje de una barra usando dos robots móviles y visión artificial*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2006.
- [8] BARRIENTOS CRUZ, ANTONIO, *Sistema operativo y lenguaje de programación para robots dotados de sensores*, Universidad Politécnica de Madrid Departamento de de ingeniería de sistemas y automática, España, 1985.
- [9] BARRIENTOS V. R, GARCÍA J.R & SILVA R., *Robots móviles: Evolución y Estado del Arte*, CIDETEC-INP. México, 2007.
- [10] BENOSMAN R, KANG R. *Panoramic vision*. Berlin: Springer; 2000.
- [11] BISHOP RH. *Mechatronic systems sensors and actuators: fundamentals and modeling*. Boca Raton, FL:CRC Press; 2007.
- [12] BLANES NOBUERA, JUAN FRANCISCO, *Percepción y representación del entorno en robótica Móvil*, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2000.
- [13] BLANCO RODRÍGUEZ, FRANCISCO JAVIER, *Cálculo del c-espacio de un robot móvil: convolución jerárquica*, Universidad Salamanca, Facultad de Ciencias, España, 2002.
- [14] BORENSTEIN J, EVERETT HR, FENG L. *Navigating mobile robots: sensors and techniques*. Wellesley, MA: Peters A K Ltd; 1999.

- [15] C. CANUDAS, B. SICILIANO & G. BASTIN, *Theory of robot control*, Springer-Verlag, 1996.
- [16] CASTELLANOS GÓMEZ, JOSÉ ÁNGEL, *Mobile robot localization and map building: a multisensor fusion approach*. Universidad de Zaragoza, Departamento de ingeniería de informática e ingeniería de sistemas. España, 1997.
- [17] CERRADA SOMOLINOS, CARLOS, *Generación en tiempo real y control de trayectorias para robots industriales: aplicación a un robot de la familia Scara*, Universidad Politécnica de Madrid, departamento de ingeniería de sistemas y automática de la E.T.S, España, 1986.
- [18] COPELAND, J., *The essential Turing: Seminal Writing in computing, logic, philosophy, artificial intelligence, and Artificial Life: Plus The Secrets of Enigma*. Ed. 2004. Oxford: Oxford University Press.
- [19] DAVIES ER. *Machine vision: theory algorithms, practicalities*. Amsterdam, The Netherlands: Morgan Kaufmann/Elsevier; 2005.
- [20] DESILVA CW. *Control sensors and actuators*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1989.
- [21] DUDEK G, JENKIN M. *Computational principles of mobile robotics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2010.
- [22] EMETERIO AGUIÑAGA, ARTURO ZAVALA, VÍCTOR SANTIBAÑEZ & FERNANDO REYES. *Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs*. IEEE Transactions on control Systems Technology. Vol. 17. No. 4. July 2009. pp. 934-944.
- [23] FRAILE MARINERO, JUAN CARLOS. *Análisis del comportamiento de un robot por medio del estudio de la estabilidad utilizando modelos descentralizados no lineales*. Universidad de Valladolid, escuela técnica superior de ingenieros industriales. España, 1986.
- [24] G. CAMPION. B. DANDREA-NOVEL & G. BASTIN. *Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems*. In proc. 30th IEEE Conf.on decision and control. Brighton, UK, pp. 1184-1189, 1991.
- [25] GOH M, LEE S. *Indoor robot localization using adaptive omnidirectional vision system*. Int J Comput Sci Netw Secur 2010; 10(4): 66-70.
- [26] GÓMEZ, F. & MUÑOZ, F.. *Diseño e implementación de un robot móvil diferencial*. Trabajo de grado , Escuela de ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad del Valle, Cali-Colombia, 2007.
- [27] GONZÁLEZ, JOSÉ ANTONIO. *Un modelo estereoscópico de sistema visual para robots*. Departamento de electricidad y electrónica, Facultad de ciencias de la Universidad de Zaragoza, España, 1980.
- [28] GONZÁLEZ DE SANTOS, PABLO, *Metodologías de diseño de software para robots*, Instituto de Automática Industrial, CSIC, Arganda-Madrid 1985.

- [29] GONZÁLEZ RG. *Computer vision*. New York, NY: McGraw-Hill; 1985.
- [30] H. NIJMEIJER AND A. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [31] HARALICK RM, SHAPIRO LG. *Computer and robot vision, vols. 1 y 2*. Boston, MA: Addison Wesley; 1993.
- [32] HOLLAND, J.H.. *Emergence. From Chaos to Order*, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1995.
- [33] J. ANGELES, *Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [34] J. KARDOS, *Specific problems of the robot motion control in the task frame (in Slovak)*, Journal EE 18 (2012) 26 - 27.
- [35] J. ACKERMAN. *Robust yaw damping of cars with front and rear wheel steering*. In Proc. 31st IEEE Conf. On Decision and Control. Tucson, Arizona, pp. 2586-2590, 1992.
- [36] J.M. MCCARTHY, *An introduction to theoretical kinematics*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts and London England, 1990.
- [37] JERRY B. MARION. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Editorial Reverté. S.A 2000.
- [38] K. S. FU, R.C. GONZÁLEZ, & C.S.G. LEE, *Robotics: control, sensing, vision and intelligence*. McGraw Hill International Editions. 1987.
- [39] KLEEMAN L, KUC R. MOBILE ROBOT SENSOR FOR TARGET LOCALIZATION AND CLASSIFICATION. INT J ROBOT RES 1995; 14(4): 295-318.
- [40] LEONARD JL. *Directed sonar sensing for mobile robot navigation*. Berlín: Springer, 1992.
- [41] LÓPEZ BOADA, BEATRIZ, *Construcción de un mapa topo-geométrico del entorno y localización de manera simultánea*, Universidad Carlos III de Madrid, España, 2001.
- [42] LÓPEZ DE MÁNTARAS BADÍA, RAMÓN. *Algoritmos de Aprendizaje en reconocimientos de Formas. Aplicación a la Robótica*, Universidad Politécnica de Cataluña, Facultad de informática de Barcelona, España, 1981.
- [43] MARTÍNEZ RODRÍGUEZ JORGE LUÍS. *Seguimiento automático de caminos en robots móviles*, Universidad de Málaga, Departamento de ingeniería de sistemas y automática, España, 1994.
- [44] MENEGATTI E. *Omnidirectional vision for mobile robots. PhD thesis*. Italy: Department of Information Engineering, University of Padova; December, 2002.
- [45] MCKERROW PK, *Introduction to robotics*. Reading, MA: Addison-Wesley; 1999.

- [46] MIRANDA COTANO, JUAN FRANCISCO. *Desarrollo de un nuevo procedimiento para el análisis dinámico de robots*. Universidad del País Vasco, escuela superior de ingenieros industriales de Bilbao. España. 1985.
- [47] MURILLO HERNÁNDEZ, WILLIAN JHOEL. *La investigación científica*, 2008.
- [48] OGATA. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Segunda edición Pearson Prentice-Hall, 1996.
- [49] OGATA K. *State space analysis of control systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1997.
- [50] OLLERO BATURONE, ANIBAL, *Robótica; manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Marcombo S.A. 2001.
- [51] PANICH S, AFZULPURKAR N. MOBILE ROBOT INTEGRATED WITH GYROSCOPE BY USING IKF. INT J ADV ROBOT SYST (INTECH OPEN ACCESS) 2011; 8(2): 122-36.
- [52] P. MUIR. *Modeling and control of wheeled mobile robots*. Doctoral dissertation, tech. Report CMU-RI-TR-88-20. Robotics Institute. Carnegie Mellon University, 1988, Usa.
- [53] P. MUIR & C.P. NEUMAN. *Kinematic modeling of wheeled mobile robots*. J. Robots. Syst. 4, pp. 281-329, 1987.
- [54] PAGELS, H. *Los sueños de la razón: El ordenador y los nuevos horizontes de las ciencias de la complejidad*. Barcelona: Gedisa, 1991.
- [55] PAUL, R.P., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, the MIT Press, Cambridge, Londres , 1981.
- [56] PABLO SÁNCHEZ & FERNANDO REYES. *Cartesian control for robot manipulators*. Edit Intech Croatia. Robot manipulators, trends and development. pp. 165-212, México, 2010.
- [57] R. C. HIBBELER, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. Décima Edición. México, Pearson Educación, 2004.
- [58] R. KELLY & V. SANTIBÁNEZ, *Control de movimiento de robots manipuladores*, Printice-Hall, Pearson. 2003.
- [59] REYES CORTÉS FERNANDO, CID MONJARAZ *ARDUINO: aplicaciones en robótica, mecatrónica e ingenierías*, Alfaomega Grupo Editor ISBN: 9788426722041, México, 2014.
- [60] REYES CORTÉS, FERNANDO, *Robótica: Control de robots manipuladores*. Alfaomega Grupo Editor, México, marzo de 2011.
- [61] REYNOSO, C. *Complejidad y Caos. Una exploración antropológica*, Buenos Aires: SB, Colección Complejidad Humana. Argentina, 2006.
- [62] S. SASTRY. *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*, Springer, New York, 1999.

- [63] SANTISO GÓMEZ, ENRIQUE, *Posicionamiento absoluto de un robot móvil a partir del reconocimiento de marcas*, Universidad Alcalá, Escuela Politécnica, España, 2002.
- [64] SCHIFF, *Cellular Automata: a Discrete View of the World*. 2008.
- [65] SCOTT, R. *Non-linear Science*, Springer Verlag, 2007.
- [66] SIPER, M., *Introduction to the Theory of Computation*. Segunda edición. Boston, MA: Thomson, 2006.
- [67] SPYROS G. TZAFESTAS, *Introduction to Mobile Robot Control*. School of Electrical and Computer Engineering, National Technical University of Athens, Athens-Greece, First edition, 2014.
- [68] TAHA Z, CHEW JY, YAP HJ. OMNIDIRECTIONAL VISION FOR MOBILE ROBOT NAVIGATION. *J Adv Comput Intell Inform* 2010;14(1): 55-62.
- [69] TZAFESTAS SG, *Introduction to Mobile Robot Control*. School of Electrical and Computer Engineering National Technical University of Athens Athens, Greece, First edition 2014.
- [70] TZAFESTAS SG, *Editor. Intelligent robotic systems*. New York/Basel: Marcel Dekker; 1991.
- [71] TZAFESTAS SG, *Editor. Advances in intelligent autonomous systems*. Dordrecht/Boston: Kluwer; 1999.
- [72] SPONG MARK W. & VIDYASAGAR M., *Robot Dynamics and Control*, New York, John Wiley & Sons, 1989.
- [73] VALERA FERNÁNDEZ, ÁNGEL, *Análisis comparativo de técnicas de control de robots manipuladores rígidos y flexibles*. Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de ingeniería de sistemas y automática, España, 1997.
- [74] VARGAS CORDERO, ZOILA ROSA, *La Investigación Aplicada: una forma de conocer las realidades con evidencia científica*. Universidad de Costa Rica, San José de Costa Rica, 2009.
- [75] VÁSQUEZ NÚÑEZ, FERNANDO. *Segmentación de imágenes en grafos de contorno: aplicación a la estimación de la profundidad y el movimiento propio para un robot móvil autónomo*. Universidad de Vigo, España, 1995.
- [76] VÁSQUEZ REGUEIRO, CARLOS *Arquitectura fractal de especialistas para robots móviles autónomos*, Universidad Santiago de Compostela, Facultad de Física, España, 2001.
- [77] WASSIN M. HADDAD & VIJAY SEKHAR CHELLABOINA, *Nonlinear Dynamical and Control: a Lyapunov-based approach*, Princeton University Press. Princeton and Oxford 2008.
- [78] WOLFRAM STADLER. *Analytical robotics and mechatronics*. McGraw Hill International Editions, 1995.

- [79] WEAVE WARREN. *Science and Complexity*, Rockefeller foundation, New York, 1948.
- [80] YOSHIHIKO NAKAMURA, *Advanced robotics: redundancy and optimization*. Addison Wesley, 1991.
- [81] ZAMORA IZQUIERDO, MIGUEL ÁNGEL, *Navegación en robótica móvil y conducción automatizada*, Universidad de Murcia, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, España 2002.
- [82] [Online] www.youtube.com/watch?v=WjnHXgBPS9g, 11 de Abril del 2013
- [83] [Online] www.youtube.com/watch?v=821MRHexQno, 26 de Enero 2017
- [84] [Online] <https://ingenieria.javeriana.edu.co/investigacion/grupos-investigacion/sirp>
- [85] [Online] <https://scienti.colciencias.gov.co:8085/gruplac/jsp/visualiza/visualizagr.jsp?nro=00000000001468>
- [86] [Online] https://www.uptc.edu.co/facultades/f_sogamoso/pregrado/electronica/inf_adicional/investigacion/Grupo_Gira.html
- [87] [Online] <https://sistemas.uniandes.edu.co/es/investigacion/grupos/imagine>
- [88] [Online] <https://www.vistronica.com/>
- [89] [Online] <https://www.lasempresas.com.co/bogota/a1a-visa-sa/>
- [90] [Online] <http://www.cavingenieros.com/>
- [91] [Online] <http://robotika.com.co/nosotros.html>
- [92] [Online] <https://arduinodehtics.weebly.com/inquestqueacute-es.html>
- [93] [Online] <https://drive.google.com/file/d/0BzqJv02vV6zVX31YRmQzS19FV00/view>

Anexos

Códigos en Arduino

SmartPhone Robótico

```
1 #include <Servo.h>
  Servo myservo;
3 int i=0;
  int sensorizq2 = 5;
5 int Stateizq2 = 0;
  int sensorder2 = 4;
7 int Stateder2 = 0;
  int sensorizq1 = 7;
9 int Stateizq1 = 0;
  int sensorder1 = 6;
11 int Stateder1 = 0;
  int sensorizq = 8;
13 int Stateizq = 0;
  int sensorder = 9;
15 int Stateder = 0;
  int ledPin0 = A0;
17 int ledPin1 = A1;
  int ledPin2 = A2;
19 int ledPin3 = A3;
  int powerinfrarojo = 12;
21 int powerinfrarojo1 = 10;
  int powerinfrarojo2 = 11;
23 int kk = 0;

25 int estado = 'G';
  int tt = 0;
27
  int a = 0;
29 int velocidad = 0;

31 void setup() {
  myservo.attach(13);
33 Serial.begin(9600);
  pinMode(sensorizq2, INPUT);
35 pinMode(sensorder2, INPUT);
  pinMode(sensorizq1, INPUT);
```

```

37 pinMode(sensor1 , INPUT);
   pinMode(sensorizq , INPUT);
39 pinMode(sensor , INPUT);
   pinMode(ledPin0 , OUTPUT);
41 pinMode(ledPin1 , OUTPUT);
   pinMode(ledPin2 , OUTPUT);
43 pinMode(ledPin3 , OUTPUT);
   pinMode(powerinfrarojo , OUTPUT);
45 pinMode(powerinfrarojo1 , OUTPUT);
   pinMode(powerinfrarojo2 , OUTPUT);
47
   digitalWrite(powerinfrarojo ,LOW);
49 digitalWrite(powerinfrarojo1 ,LOW);
   digitalWrite(powerinfrarojo2 ,LOW);
51
   velocidad = 150;
53
   }
55
   void loop() {
57
   if(Serial.available()>0)
59
   estado = Serial.read();
61
63 if(estado == 'A')//ADELANTE
   {
65 analogWrite(ledPin0 , velocidad);
   analogWrite(ledPin1 ,0);
67 analogWrite(ledPin2 ,0);
   analogWrite(ledPin3 , velocidad);
69
   }
71 if(estado == 'B')//derecha
   {
73 analogWrite(ledPin0 , velocidad);
   analogWrite(ledPin1 ,0);
75 analogWrite(ledPin2 ,0);
   analogWrite(ledPin3 ,0);
77
   }
   if(estado == 'C')//atras
79
   {
   analogWrite(ledPin0 ,0);
81 analogWrite(ledPin1 , velocidad);
   analogWrite(ledPin2 , velocidad);
83 analogWrite(ledPin3 ,0);
   }
85 if (estado == 'D')//izquierda
   {
87 analogWrite(ledPin0 ,0);
   analogWrite(ledPin1 ,0);

```



```

89 analogWrite(ledPin2,0);
   analogWrite(ledPin3, velocidad);
91 }
93 if (estado == 'E')
   {
95 analogWrite(ledPin0,0);
   analogWrite(ledPin1,0);
97 analogWrite(ledPin2,0);
   analogWrite(ledPin3,0);
99 }
101 if (estado == 'F')//MOTOR ULTRASONICO
   {
103 i++;

105 myservo.write(i);
   delay(15);
107 analogWrite(ledPin0,0);
   analogWrite(ledPin1,0);
109 analogWrite(ledPin2,0);
   analogWrite(ledPin3,0);
111 }
113 if (estado == 'G')//MOTOR ULTRASONICO
   {
115 i--;

117 myservo.write(i);
   delay(15);
119 analogWrite(ledPin0,0);
   analogWrite(ledPin1,0);
121 analogWrite(ledPin2,0);
   analogWrite(ledPin3,0);
123 }
125 }

```

Evasor de obstáculos

```
#include <Servo.h>
2 Servo myservo;

4 #define ECHO 3 // Pin para recibir el pulso de eco
#define TRIGGER 2 // Pin para enviar el pulso de disparo
6 //codigo realizado por ing edison viveros
//pasto colombia
8
int obstamax =14;
10 int obstamin= 2;
int i=0;
12
int sensorizq2 = 5;
14 int Stateizq2 = 0;
int sensor2 = 4;//
16 int Stateder2 = 0;
int sensorizq1 = 7;
18 int Stateizq1 = 0;
int sensor1 = 6;
20 int Stateder1 = 0;
int sensorizq = 8;//sensor derecha debajo del carro
22 int Stateizq = 0;
int sensor = 9;//sensor izquierada debajo del carro
24 int Stateder = 0;
int ledPin0 = A0;
26 int ledPin1 = A1;
int ledPin2 = A2;
28 int ledPin3 = A3;
int powerinfrarojo = 12;//infrarrojo debajo del carro
30 int powerinfrarojo1 = 10;
int powerinfrarojo2 = 11;
32 int kk = 0;
int dato1=0;
34 int dato2=0;
int dato3=0;
36
int estado =0;
38 int tt = 0;
int duracion;
40 int distancia;
int CMD;
42 int CMC;
int CMI;
44 int CM;

46 int angizq= 150;
int angdere= 30;
48 int angcent=90;
int a = 0;
50 int velocidad =245;
```

```

52 void setup()
53 {
54
55 myservo.attach(13);
56 pinMode(ECHO, INPUT);
57 pinMode(TRIGGER, OUTPUT);
58 //pinMode(sensorizq2, INPUT);
59 //pinMode(sensororder2, INPUT);
60 //pinMode(sensorizq1, INPUT);
61 //pinMode(sensororder1, INPUT);
62 //pinMode(sensorizq, INPUT); //infrarrojo debajo del carro
63 //pinMode(sensororder, INPUT); // sensor debajo del carro
64 pinMode(ledPin0, OUTPUT);
65 pinMode(ledPin1, OUTPUT);
66 pinMode(ledPin2, OUTPUT);
67 pinMode(ledPin3, OUTPUT);
68 //pinMode(powerinfrarrojo, OUTPUT); //infrarrojo debajo del carro
69 //pinMode(powerinfrarrojo1, OUTPUT);
70 //pinMode(powerinfrarrojo2, OUTPUT);
71
72 // digitalWrite(powerinfrarrojo, HIGH); //PRENDO INFRARROJO
73 // digitalWrite(powerinfrarrojo1, LOW);
74 //digitalWrite(powerinfrarrojo2, LOW);
75 myservo.write(angcent);
76 delay(3000);
77 motor_stop();
78 }
79
80 void loop()
81 {
82 leer_obstaculo(); // lee distancia y almacena obstaculo
83
84 }
85
86 int DISTACM() //funcion que regresa un valor entero de la distancia
87     para su comparacion
88 {
89 digitalWrite(TRIGGER, LOW);
90 delayMicroseconds(2);
91 digitalWrite(TRIGGER, HIGH);
92 delayMicroseconds(10);
93 digitalWrite(TRIGGER, LOW);
94 duracion = pulseIn(ECHO, HIGH); //Medici n del ancho de pulso
95     recibido en el pin Echo
96 distancia = (float (duracion))/53;
97 delay(5);
98 return distancia;
99
100 }

```

```

102 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void motor_stop ()
104 {
analogWrite(ledPin0 ,0); //motor parado
106 analogWrite(ledPin1 ,0);
analogWrite(ledPin2 ,0);
108 analogWrite(ledPin3 ,0);
}
110 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void motor_atras ()
112 {
analogWrite(ledPin0 ,0); //atras
114 analogWrite(ledPin1 , velocidad);
analogWrite(ledPin2 ,0);
116 analogWrite(ledPin3 , velocidad);
}
118 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void motor_adelante ()
120 {
analogWrite(ledPin0 , velocidad); //adelante
122 analogWrite(ledPin1 ,0);
analogWrite(ledPin2 , velocidad);
124 analogWrite(ledPin3 ,0);
}
126 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void motor_izquierda() //gerena un peque o tiempo girando debe parar
128 {
analogWrite(ledPin0 ,0);
130 analogWrite(ledPin1 , velocidad);
analogWrite(ledPin2 , velocidad);
132 analogWrite(ledPin3 ,0);
134 }
136 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void motor_derecha() //gerena un peque o tiempo girando debe parar
138 {
140 analogWrite(ledPin0 , velocidad);
analogWrite(ledPin1 ,0);
142 analogWrite(ledPin2 ,0);
analogWrite(ledPin3 , velocidad);
144 }
146 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
void leer_obstaculo ()
148 {
149 ///// leera 2 POSICIONES DERECHA E IZQUIERDA
150 /////posicion uno
// motor_stop(); //parar los motores
152 CM = DISTACM(); //lee la funcion de leer los centimetros

```

```

154 if (CM <= obstamax && CM >= obstamin ) // verifica si hay obstaculos
    menos a 14 cm
    {
156 ////// poscion dos
    motor_stop ();
158 myservo.write(angdere); //servomotor derecha
    delay(1000);
160 CMD = DISTACM(); //lee la funcion de leer los centimetros
    myservo.write(angizq); //servomotor derecha
162 delay(1000);
    CMI = DISTACM(); //lee la funcion de leer los centimetros
164
    if (CMI > CMD) //HAY OBSTA EN DERECHA
166 {
    myservo.write(angcent); //servomotor en 180 grados izquierda
168 delay(1000);
    motor_izquierda ();
170 delay(500);

172 }
    if (CMI < CMD) //OBSTA IZQ
174 {
    myservo.write(angcent); //servomotor en 180 grados izquierda
176 delay(1000);
    motor_derecha ();
178 delay(500);
    }
180 }
    //////////////////////////////////////
182
    else
184 {
    // myservo.write(angcent); //servomotor en 180 grados izquierda
186 motor_adelante ();

188 }
    }
}

```

Seguidor de línea

```
1 // #include <Servo.h>
  // Servo myservo;
3
5
7 int i=0;
  int sensorizq2 = 5;
  int Stateizq2 = 0;
9 int sensororder2 = 4;//
  int Stateder2 = 0;
11 int sensorizq1 = 7;
  int Stateizq1 = 0;
13 int sensororder1 = 6;
  int Stateder1 = 0;
15 int sensorizq = 8;//sensor derecha debajo del carro
  int Stateizq = 0;
17 int sensororder = 9;//sensor izquierada debajo del carro
  int Stateder = 0;
19 int ledPin0 = A0;
  int ledPin1 = A1;
21 int ledPin2 = A2;
  int ledPin3 = A3;
23 int powerinfrarojo = 12;//infrarrojo debajo del carro
  int powerinfrarojo1 = 10;
25 int powerinfrarojo2 = 11;
  int kk = 0;
27
  int estado =0;
29 int tt = 0;
31
  int a = 0;
  int velocidad =240;
33
  void setup() {
35 // myservo.attach(13);
37 pinMode(sensorizq2 , INPUT);
  pinMode(sensororder2 , INPUT);
39 pinMode(sensorizq1 , INPUT);
  pinMode(sensororder1 , INPUT);
41 pinMode(sensorizq , INPUT);//infrarrojo debajo del carro
  pinMode(sensororder , INPUT);// sensor debajo del carro
43 pinMode(ledPin0 , OUTPUT);
  pinMode(ledPin1 , OUTPUT);
45 pinMode(ledPin2 , OUTPUT);
  pinMode(ledPin3 , OUTPUT);
47 pinMode(powerinfrarojo , OUTPUT);//infrarrojo debajo del carro
  pinMode(powerinfrarojo1 , OUTPUT);
49 pinMode(powerinfrarojo2 , OUTPUT);
51 digitalWrite(powerinfrarojo ,HIGH);//PRENDO INFRARROJO
```

```

digitalWrite (powerinfrarojo1 ,LOW);
53 digitalWrite (powerinfrarojo2 ,LOW);

55

57 }

59 void loop () {

61 int izq = digitalRead (sensorizq);
int der = digitalRead (sensorder);

63 if (izq== HIGH && der ==LOW)//DERECHA
65 {
67 analogWrite (ledPin0 ,0);
analogWrite (ledPin1 ,0);
69 analogWrite (ledPin2 , velocidad);
analogWrite (ledPin3 ,0);

71 }

73 if (izq== LOW && der ==HIGH)//IZQUIERDA
75 {

77 analogWrite (ledPin0 , velocidad);
analogWrite (ledPin1 ,0);
79 analogWrite (ledPin2 ,0);
analogWrite (ledPin3 ,0);

81 }

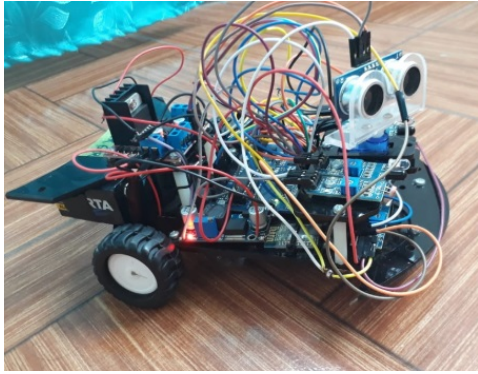
83 if (izq== HIGH && der ==HIGH)//DERECHA
85 {
87 analogWrite (ledPin0 , velocidad);
analogWrite (ledPin1 ,0);
analogWrite (ledPin2 , velocidad);
89 analogWrite (ledPin3 ,0);

91 // }
// if (izq== LOW && der ==LOW) //DERECHA
93 //analogWrite (ledPin0 , velocidad);
//analogWrite (ledPin1 ,0);
95 //analogWrite (ledPin2 , velocidad);
//analogWrite (ledPin3 ,0);
97 }
}

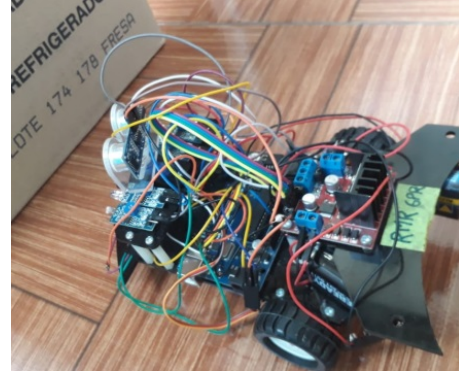
99 // }

```

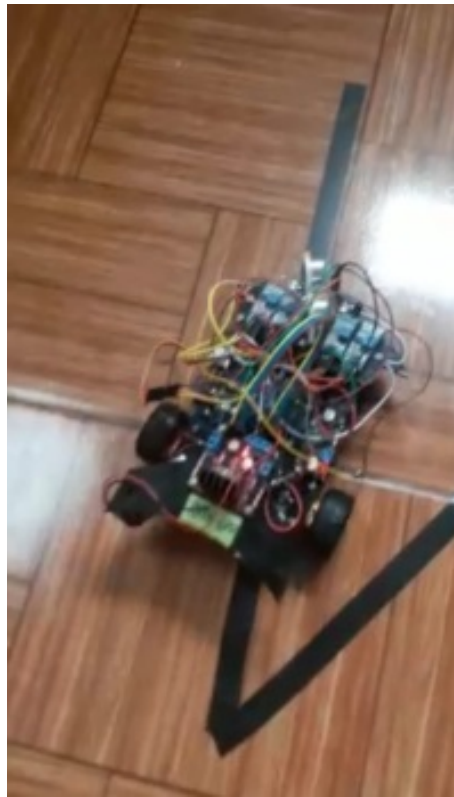
Imágenes



(a) Smartphone Robótico



(b) Evasor de obstáculo



(c) Seguidor de línea

La aplicación puede ser descargada en el siguiente link, [93].