Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Trigonometría Esférica

Jorge Luis Aros Torrente
Diego Armando Trujillo Ramos

Neiva, Huila
2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Trigonometría Esférica

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Jorge Luis Aros Torrente
2007268733
Diego Armando Trujillo Ramos
2008276467

Asesor:
Mg. Hernando Gutiérrez Hoyos

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Marzo del 2017

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo damos gracias a Dios quien nos dio la vida y salud para sacar adelante esta distinguida carrera, dar gracias a nuestros queridos padres y hermanos que por su esfuerzo y apoyo nos ofrecieron una educación completa.

Agradecer a la Universidad Surcolombiana que nos propocionó la oportunidad de recibir una educación superior y de excelente calidad, específicamente al programa de Licenciatura en Matemáticas que con su excelente equipo de trabajo ayudaron a nuestra formación como profesionales.

Al Profesor Hernando Gutiérrez Hoyos, por sus observaciones que lograron mejorar este trabajo, a nuestros grandes profesores y amigos que nos brindaron su apoyo, tiempo y dedicación para su elaboración.

Por último a nuestros compañeros y amigos con los cuales se vivieron y compartieron buenos y malos momentos durante el transcurso de nuestra formación como docentes.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado titulado *La Trigonometría esférica* fue realizado por los estudiantes Jorge Luis Aros Torrente y Diego Armando Trujillo Ramos, con códigos 2007268733 y 2008276467 respectivamente, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana-Neiva-Huila-Colombia, con el proposito de ilustrar de una manera adecuada, los diferentes aspectos relacionados con la Trigonometría Esférica.

El uso de los triángulos en las distintas aplicaciones de la vida cotidiana nos da la oportunidad de confrontar algunos problemas donde se aplica la geometría plana,sin embargo existen otros problemas donde no es posible aplicar la geometría plana o en algunos casos al aplicarla no se resuelve totalmente el problema. Afortunadamente existe la geometría esférica que resuelve estos problemas, teniendo en cuenta superficies no planas.

De esta manera se podrá lograr un acercamiento a esta rama de la matemática que es usada en la astronomía, en la geodesia. La utilización de la geometría de la esfera, nos ayudara a tener una visión más acorde de la idea intuitiva que surge de la representación esférica del Universo.

OBJETIVOS

0.1. Objetivos Generales

- Identificar y relacionar los elementos más importantes de la geometría de la esfera, definir el triángulo esférico, utilizar dicha geometría para introducir un ejemplo de geometría no euclidiana, e ilustrar las principales diferencias entre las trigonometrías plana y esférica.
- Reconocer la importancia de los triángulos en superficies no planas.

0.2. Objetivos Específicos

- Resolver triángulos esféricos rectángulos y oblicuángulos, cualesquiera que sean los elementos conocidos, mediante el uso de estrategias generales.
- Presentar una breve reseña histórica del desarrollo de la Trigonometría Esférica
- Relacionar los elementos de los triedros con los elementos de los triángulos esféricos, y obtener las propiedades y los criterios de igualdad de los triángulos esféricos a partir de esta relación.

JUSTIFICACIÓN

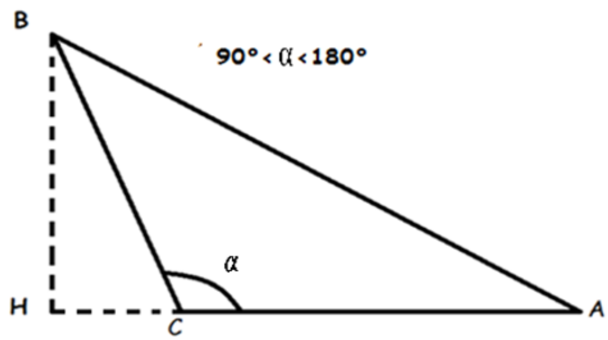
El objetivo principal de este trabajo de grado es repasar cuidadosamente los conceptos de la geometría plana, teniendo en cuenta los conocimientos previos de la misma, para identificar las principales relaciones y diferencias que pudiera tener con la geometría esférica.

La Trigonometría Esférica asume el estudio de las propiedades y relaciones que se establecen entre los elementos de triángulos definidos en la superficie de una esfera, mediante arcos de círculos máximos, así como de la resolución de los mismos. Los triángulos así definidos se denominan triángulos esféricos y son las figuras geométricas básicas de la Trigonometría Esférica.

Es por esta razón que el estudio de la Trigonometría Esférica se ha caracterizado por tener gran acogida dentro del campo de la astronomía y la navegación, y este trabajo de grado sera referente para aquellas personas que deseen conocer mas sobre esta rama de las matemáticas.

RESEÑA HISTÓRICA

Los Elementos de Euclides, que datan del siglo III a.C., contienen ya una aproximación geométrica de la generalización del teorema de Pitágoras. La formulación de la época debido a la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra obligó a razonar en términos de comparación de áreas. Era usual para ese entonces enunciados como el siguiente:



$$(AB)^2 = (CA)^2 + (CB)^2 + 2\,(AC)\,(CH)$$

Figura 1: proposición 12, libro 2 elementos de euclides

“En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por el lado, de los del ángulo obtuso, sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.” *(figura 1 ley del coseno)*

Fue a finales del siglo XVIII cuando la notación algebraica moderna, aunada a la notación moderna de las funciones trigonométricas introducida por Euler en su libro: INTRODUCTION IN ANALYSIN INFINITORUM, *(figura 2)*, permitieron escribir el teorema en su forma actual, conocido como: Teorema del coseno.

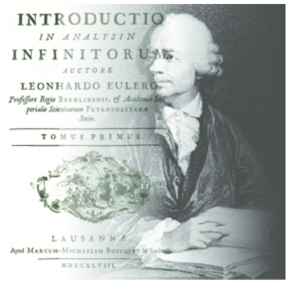


Figura 2: INTRODUCTION IN ANALYSIN INFINITORUM.

la trigonometría esférica nació en la Antigua Grecia por la necesidad de dar una descripción precisa del movimiento de los astros. Fue Menelao de Alejandría (70-130 D.C.), en su libro SPHAERICORUM,*(figura 3)*, el primero en definir la noción de triángulo esférico y en sentar las bases para su resolución. Así como las demostraciones de Euclides de las propiedades de los triángulos planos se basaban en la técnica de reducción al absurdo, Menelao demostró sus teoremas mediante métodos constructivos.

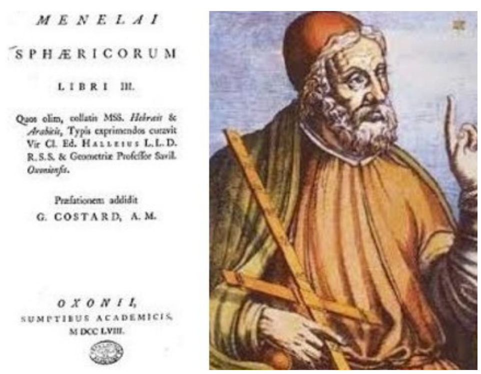


Figura 3: LIBRO SPHAERICORUM.

Es por ello que iniciaremos un recorrido en el tiempo, en el que estudiaremos cómo se comprendieron e intentaron explicar muchos de los fenómenos del universo a través de herramientas y conocimientos matemáticos, centrándonos en la histórica de la trigonometría.

La trigonometría es una de las tantas ramas de las matemáticas, se encarga de estudiar y analizar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos. Para esto recurre generalmente a las llamadas razones trigonométricas. El origen de la palabra trigonometría desciende del griego "trigonos" (triángulo) y "metros" (metria).

Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar mediciones tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía. Antiguamente la astronomía se ocupaba de la observación de los movimientos de los objetos visibles a simple vista y en el estudio de la predicción de las rutas y posiciones y perspectivas de los cuerpos en el espacio, para luego progresar y perfeccionar la exactitud en la navegación y el cálculo del tiempo así como los calendarios. Las pirámides de Egipto fueron construidas sobre patrones trigonométricos muy exactos.

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ιϛ	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μϛ	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ϛ	ϛ ιϛ μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ϛ∠′	ϛ μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λϛ	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ροϛ	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ροϛ∠′	ριθ νϛ λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νϛ	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Figura 4: HIPARCO, TABLA DE LAS CUERDAS.

Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde ubicamos al matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea quien fué uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Hiparco construyó una tabla de cuerdas que fueron las precursoras de las funciones trigonométricas de la actualidad*(figura 4)*.

La tabla de cuerdas que construyó Hiparco para resolver triángulos comenzó con un ángulo de 71°, llegando hasta 180° con incrementos de 71°. La tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado, que corta a una circunferencia de radio r. Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r.

El astrónomo griego Tolomeo 300 años más tarde utilizó, r = 60, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.
Durante muchos siglos, la trigonometría de Tolomeo fue la introducción básica para los astrónomos. El libro de astronomía: El Almagesto, también tenía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, daba ejemplos de cómo utilizarla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos.

Al mismo tiempo, los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, era la longitud del lado opuesto a un ángulo agudo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para esta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos Árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya la habían completado así como las otras cinco funciones (coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente). También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el valor de r=1 en vez de r=60, y este dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

En el siglo XII comienzan a aparecer en Europa traducciones de libros de matemáticas y astronomía árabes, hecho que lleva a la familiarización con la trigonometría. El primer trabajo significativo en esta materia en el continente Europeo fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller. Se le considerada fundador y un importante innovador en esta materia, puesto que detalla y crea varias herramientas de gran utilidad, así como importantes tratados como De triangulis y Epitome in Almagestum en el cual explica, analiza y muestra la obra de Tolomeo.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de algunas determinadas líneas. Ya en el siglo XVI el matemático francés François Vieté, incorpora en su tratado "Canon matemáticas" el triángulo polar en la trigonometría esférica.

A comienzos del siglo XVII, el matemático escocés John Napier descubrió los logaritmos que él llamó "números artificiales". Esto fue trascendental en el desarrollo de la trigonometría.

A mediados del siglo XVII el físico, inventor, alquimista y matemático inglés, Isaac Newton descubre el cálculo diferencial e integral. También contribuyó en otras áreas de la matemática, por ejemplo desarrollando el teorema del binomio o las fórmulas de Newton-Cotes.

En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonhard Euler, explicó que las propiedades de la trigonometría eran consecuencia de la aritmética de los números complejos. Estudió además la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye la designación de la letra $\boldsymbol{e}$ para representar el número base de los logaritmos naturales, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra $\boldsymbol{i}$. Euler también popularizó El número π *(figura 5)*.

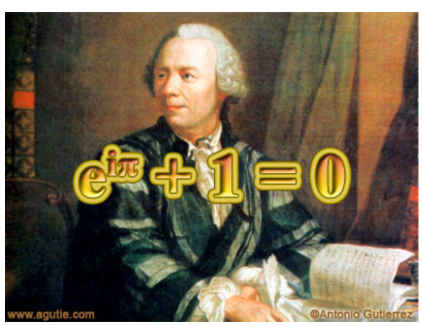


Figura 5: ECUACIÓN DE EULER

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital.

CAPÍTULO 1

GEOMETRÍA ESFÉRICA

1.1. Principales conceptos de la geometría esférica

La geometría de la esfera (en lo fundamental) recrea la geometría euclidiana plana sobre la superficie esférica a partir de los conceptos de circunferencias máximas, circunferencias menores y arcos de estas figuras.

Definición 1.1.1. *Se llama circunferencia máxima a la intersección de la esfera con un plano que contiene el centro de la esfera. (figura 1.1)*

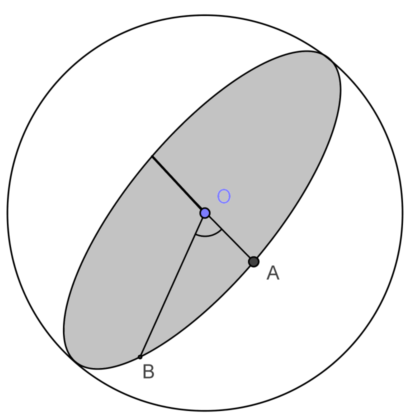


Figura 1.1: circunferencia máxima

Si el plano que intersecta la esfera no contiene al centro, entonces la intersección del plano con la esfera es una circunferencia menor.*(figura 1.2)*

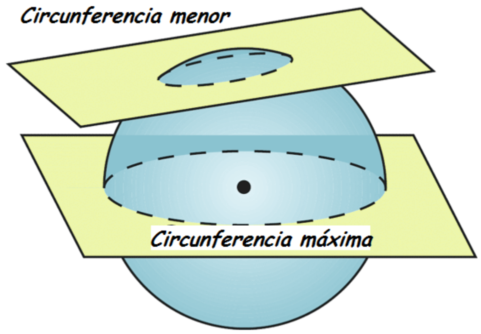


Figura 1.2: circunferencia menor

Definición 1.1.2. *Ángulo central es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella. La medida del arco AB es la del ángulo central AOB. Esta igualdad nos permite medir en función del ángulo central o arco el resto de ángulos que pueden definirse en la circunferencia.(figura 1.3)*

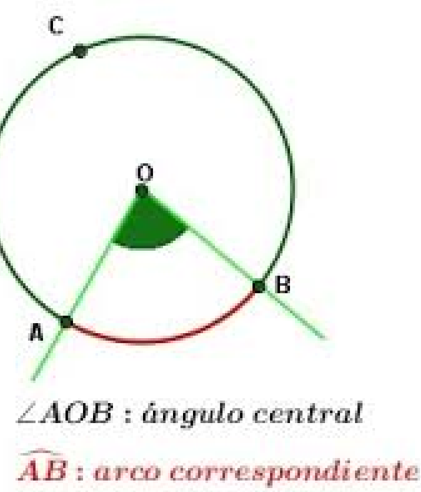


Figura 1.3: Angulo Central

Definición 1.1.3. *Dados dos puntos A y B de la esfera, se denomina distancia esférica entre A y B al menor de los arcos de extremos A y B de la circunferencia máxima que contiene los puntos A y B.(figura 1.4)*

Si A y B son diametralmente opuestos entonces existirán infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos, tomándose, en este caso, la semicircunferencia como distancia esférica entre ambos puntos.
Las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos centrales que las proyectan, adoptando para su medida la de dicho ángulo central.

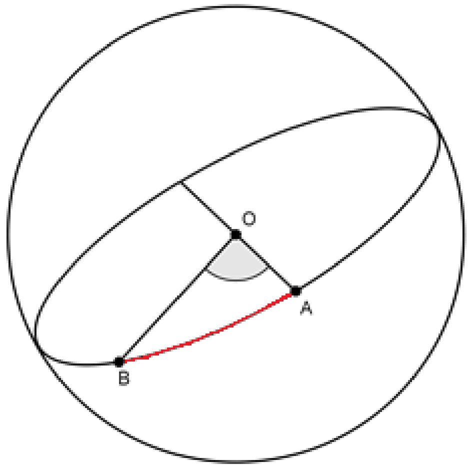


Figura 1.4: distancia esférica

Dos círculos máximos se cortan en los puntos extremos de un diametro de la esfera debido a que los planos que los contienen pasan por el centro de la esfera.

Definición 1.1.4. *Se llama polos de una circunferencia máxima a los puntos de la esfera que equidistan de todos los puntos de dicha circunferencia. También se pueden definir como los extremos del diámetro de la esfera, perpendicular a dicha circunferencia máxima.*

Obviamente, todas las circunferencias máximas que son perpendiculares a una dada pasan por sus polos y la distancia esférica entre cada punto de una circunferencia máxima y sus polos es 90º.

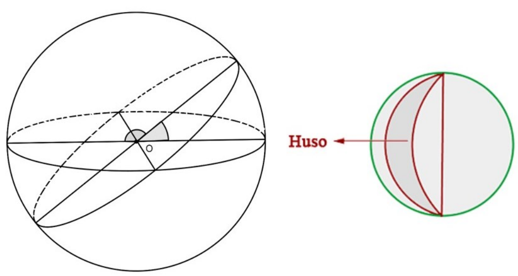


Figura 1.5: Ángulos esféricos

Definición 1.1.5. *Se denominan husos o ángulos esféricos (figura 1.5) a cada una de las cuatro regiones en que queda dividida la esfera como consecuencia de la intersección de dos circunferencias máximas. También se pueden definir como la intersección de la esfera con un ángulo diedro cuya arista es uno de sus diámetros.*

La medida de cada uno de estos ángulos diedros se toma también como medida del ángulo esférico o abertura del huso correspondiente. De esta forma, dos circunferencias máximas serán perpendiculares cuando el ángulo diedro que determinan es recto.

Definición 1.1.6. *Un ángulo diedro es el espacio comprendido entre dos planos que se cortan, y que estando limitado por un lado en su línea de intersección, se prolongan por el otro indefinidamente. En el lenguaje de la moderna geometría se llama ángulo diedro al espacio comprendido entre dos planos que se cortan. A los planos que forman el ángulo se llaman caras, y a la intersección de éstas, aristas.(figura 1.5)*

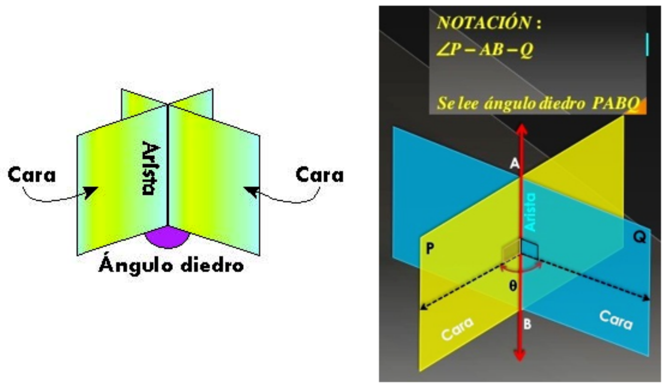


Figura 1.6: Angulo diedro

Para nombrar a un ángulo diedro se usan cuatro letras, dos en los extremos de la arista y una en cada plano; si el ángulo está aislado, basta expresar las letras de la arista; si está reunido con otro, se indican las cuatro, poniendo éstas en el medio como se hacía con la del vértice en el ángulo plano.

A continuación se relacionan, como teoremas, algunos resultados que involucran a los ángulos diedros.

Teorema 1.1.7. *Todos los ángulos diedros rectos son iguales.*

Teorema 1.1.8. *Todo plano que encuentra a otro, forma con éste dos ángulos diedros adyacentes, cuya suma es igual a dos ángulos diedros rectos. Recíproca. Si dos ángulos diedros adyacentes son suplementarios, sus caras no comunes están situadas en el mismo plano.*

Teorema 1.1.9. *Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales.*

Teorema 1.1.10. *La relación que existe entre dos ángulos diedros es igual a la de sus ángulos planos, es decir cumple las mismas características que dos ángulos determinados en dos dimensiones.*

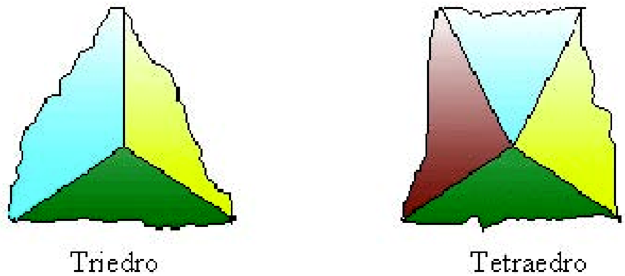


Figura 1.7: ángulo triedro y tetraedro

Definición 1.1.11. *Un ángulo triedro está formado por tres semirectas que parten del mismo origen, pero que no están situadas en un mismo plano; es decir, si son tres planos los que se cortan, se forma un ángulo triedro, si son cuatro planos, un ángulo tetraedro, si son cinco pentaedro, etc. Al punto común se le conoce como el vértice. Se forman tres ángulos diedros y tres ángulos planos en un ángulo triedro. (figura 1.7)*

Teniendo en cuenta la definición anterior, se puede ilustrar el ángulo triedo que esta formado por tres semirrectas y por tanto, tres caras, mediante las cuales se pueden identificar los diedros, los ángulos planos y las caras que lo conforman.(figura 1.8)

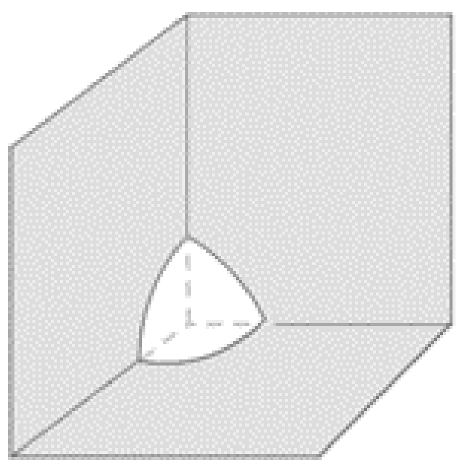


Figura 1.8: Angulo triedro

Definición 1.1.12. *Se denomina triangulo esférico a la intersección de la esfera y de un triedro cuyo vértice es el centro de dicha esfera.(figura 1.9)*

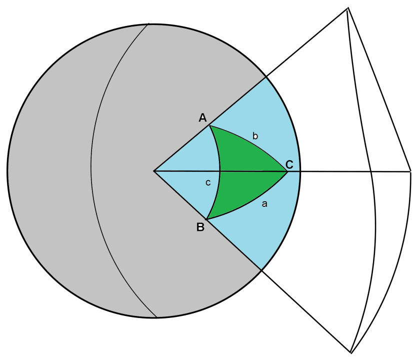


Figura 1.9: Triángulo esférico

También se puede definir como una figura cerrada, de tres lados, sobre la superficie de una esfera, que está delimitada por la intersección de arcos menores de tres círculos mayores.*(figura 1.10)* Tres círculos mayores distintos pueden formar ocho triángulos. Sólo el único formado por tres arcos menores se conoce como triángulo esférico.

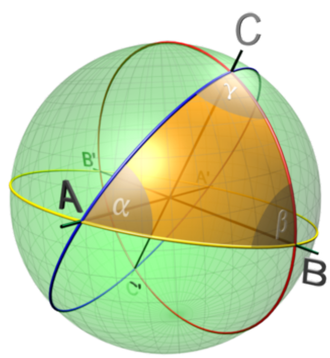


Figura 1.10: Triángulo esférico

Al triángulo esférico se le llama triángulo esférico cuadrantal cuando uno de sus lados subtiende un ángulo de 90° en el centro de la esfera.

A un triángulo esférico se le llama:

- triángulo esférico recto cuando tiene al menos un ángulo recto.*(figura 1.11)*

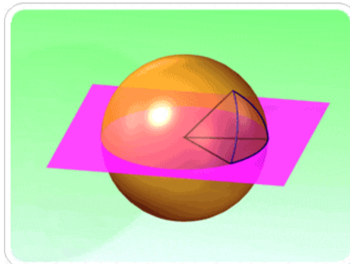


Figura 1.11: Triángulo esférico recto

- triángulo birrectangular esférico cuando tiene dos ángulos rectos.*(figura 1.12)*

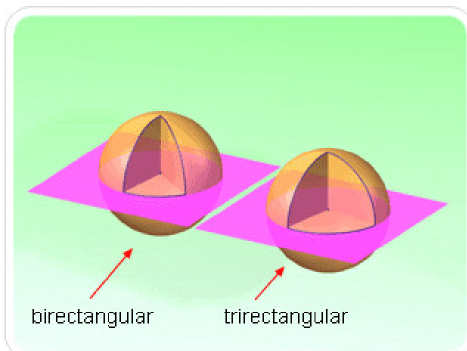


Figura 1.12: Triángulo esférico birrectangular y trirrectangular

- triángulo trirrectangular esférico cuando tiene tres ángulos rectos.*(figura 1.13)*

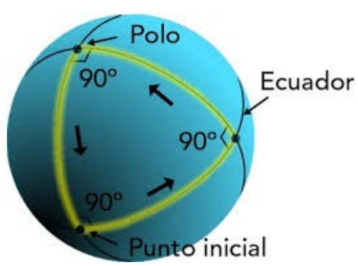


Figura 1.13: Triángulo trirrectangular esférico

Definición 1.1.13. *Dado un arco esférico AB, se denomina mediatriz esférica del arco AB a la circunferencia máxima perpendicular a la circunferencia máxima que contiene a los puntos A y B trazada por el punto medio del arco AB.*

Definición 1.1.14. *Dado un ángulo esférico* $\widehat{A}$ *, se denomina bisectriz del ángulo a una semicircunferencia máxima equidistante de sus lados.*

Definición 1.1.15. *Se llaman polos de una circunferencia menor a los extremos del diámetro perpendicular al plano que la contiene. El polo que está situado a la menor distancia esférica se denomina centro y a esta distancia radio esférico. Todos los puntos que disten del centro menos que el radio esférico se dicen interiores a la circunferencia menor, y exteriores todos aquellos que disten más que el radio esférico.*

Definición 1.1.16. *Se llama circunferencia tangente a una circunferencia menor por uno de sus puntos a la circunferencia máxima perpendicular a la que se contiene al radio esférico de dicho punto.*

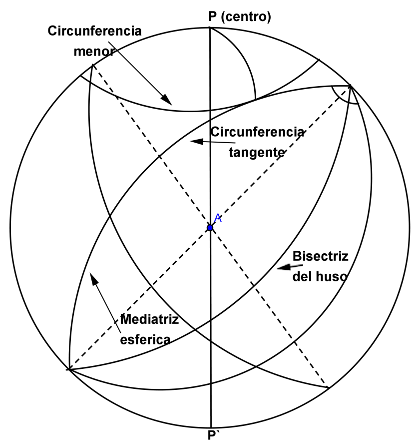


Figura 1.14: Elementos definidos sobre la esfera

CAPÍTULO 2

TRIGONOMETRIA ESFERICA

2.1. Elementos de la trigonométrica plana

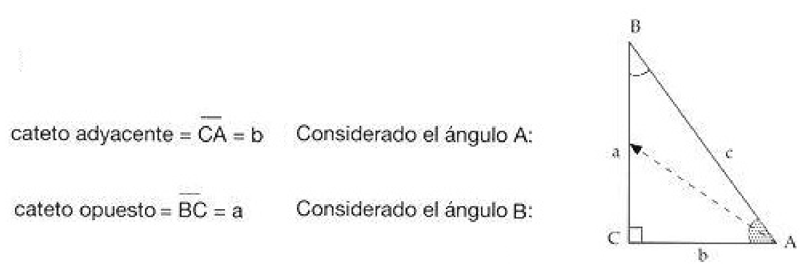
La trigonometría, en sus inicios, se concretó en el estudio de los triángulos. Durante varios siglos se empleó en topografía, navegación y astronomía.

Repasemos los elementos más relevantes de la trigonometría plana vistos en el colegio, los cuales serán de utilidad para comprender su relación con la trigonometría esférica.

Un triángulo tiene seis elementos: tres ángulos y tres lados. Resolver un triángulo significa hallar la medida de todos sus elementos a partir de la información que se tenga acerca de algunos de ellos.

Las llamadas razones trigonométricas corresponden a los cocientes entre las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo en relación con uno de sus ángulos agudos.

Para establecer las razones trigonométricas en cualquier triángulo rectángulo es necesario conocer la disposición de los catetos respecto al ángulo relacionado . Por ejemplo:

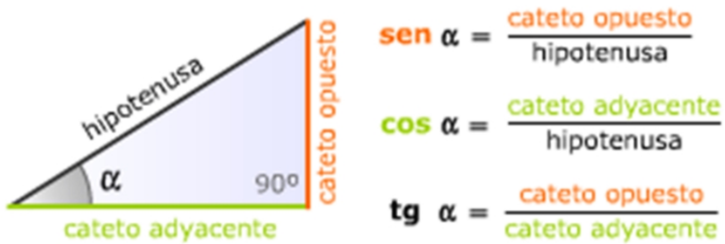


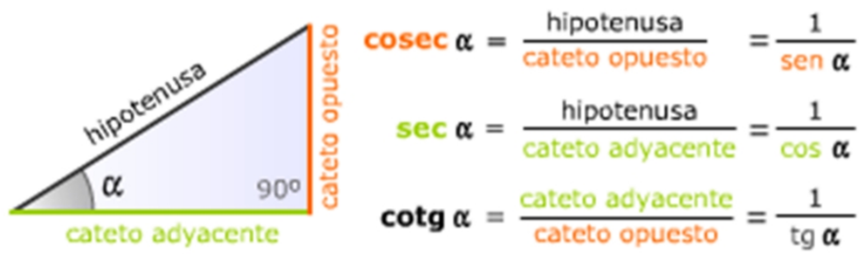
En general llamaremos **Cateto adyacente** al lado que forma parte del ángulo agudo al cual se hace referencia y **Cateto opuesto** al lado que no forma parte del ángulo que se toma como referencia y se encuentra enfrente de éste.

En el siguiente cuadro se observan las seis razones trigonométricas que se establecen entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo en relación con sus ángulos agudos.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Fundamentales	**Recíprocas**
$sen\alpha = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$	$csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto}$
$cos\alpha = \frac{cat.adyacente}{hipotenusa}$	$sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cat.adyacente}$
$tan\alpha = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$	$cot\alpha = \frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$





Recordemos que: Las razones trigonométricas están definidas para ángulos agudos pertenecientes a triángulos rectángulos. ¿Qué sucede en el caso de los triángulos acutángulos u obtusángulos ?

Para ello se introducen dos nuevas herramientas, llamadas Ley de los Senos y Ley de los cosenos, que relacionan las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera.

Ley de los Senos

En todo triángulo, la razon entre el seno de uno cualquiera de sus angulos y la medida del lado opuesto es constante.

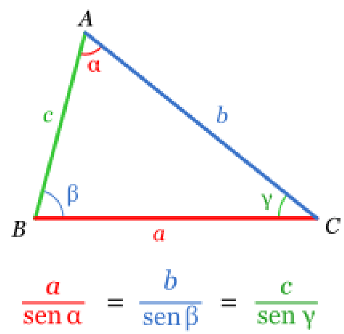


Figura 2.1: Ley de los senos

Interpretacion mediante ilustracion grafica. Consideremos el triangulo ABC *(figura 2.1)* podemos decir que la ley de los senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumple entre los lados y ángulos de un triangulo cualquiera, y que es útil para resolver ciertos tipos de problemas de triángulos

Observación Si en un triángulo conocemos un lado y dos ángulos o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, podemos usar la Ley de los Senos para resolver el triángulo.

Ley de los Cosenos

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de la longitud de estos dos lados y del coseno del ángulo comprendido por ellos. *(figura 2.2)*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cosC$$

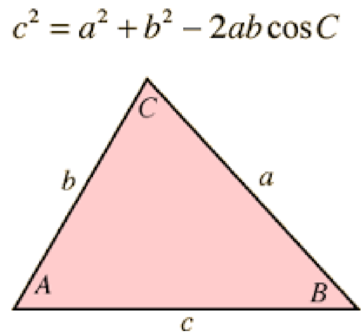


Figura 2.2: Ley de los cosenos

2.2. Comparación entre la geometría esférica y la geometría del plano

Aunque existe una cierta analogía entre algunos conceptos y propiedades de la geometría esférica y la plana, como pueden ser: recta, circunferencia máxima, segmento, arco de circunferencia, ángulo plano, ángulo esférico, semiplano, hemisferio, etc. No ocurre así con otras propiedades.

Ejemplo:

- Dos rectas en el plano se cortan en un único punto, mientras dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos.*(figura 2.3)*

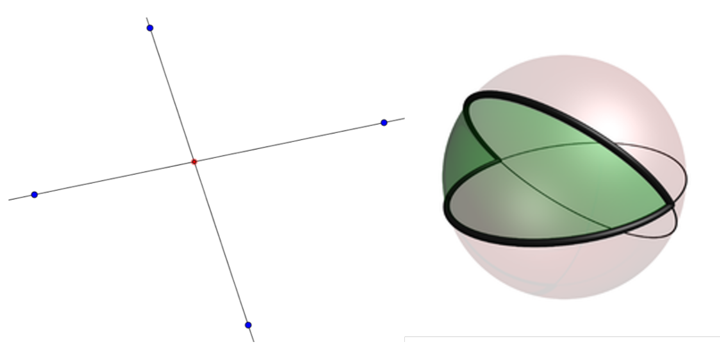


Figura 2.3: Intersección de rectas y circunferencias máximas.

- Dos perpendiculares a una recta, en el plano, son paralelas; en la esfera dos circunferencias máximas perpendiculares a otra se cortan en los polos de esta, desapareciendo el paralelismo entre ambas circunferencias máximas.

- Como consecuencia del axioma del paralelismo, en el plano, la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos, en la esfera es mayor que dos rectos.*(figura 2.4)*

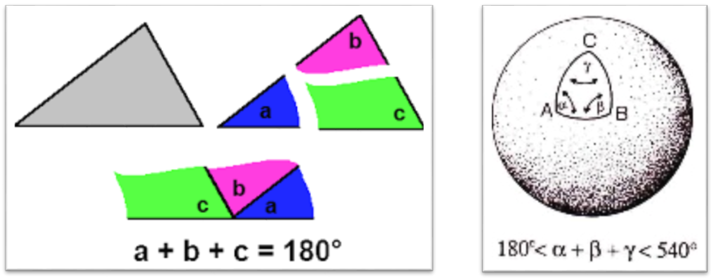


Figura 2.4: Ángulos internos de triángulos (en el plano y esférico).

- El lugar geométrico de los puntos de un semiplano equidistantes de una recta es otra recta paralela a la dada. En la esfera, el lugar geométrico que equidista de una circunferencia máxima es una circunferencia menor.

Estas diferencias hacen de la geometría esférica un ejemplo clásico de geometría no euclidiana.
Para entender el significado de las geometrías no euclidianas es esencial familiarizarse con la desarrollada por la escuela griega, de la que son representantes destacados Thales de Mileto y Pitágoras. Esta alcanzo su máximo apogeo en el 300 a.C. con la aparición de la obra de Euclides titulada Elementos, un tratado de trece volúmenes en el que Euclides, organizando 465 proposiciones, sintetizó y desarrolló las ideas más notables que se conocían hasta ese momento, no solo en geometría, sino también en teoría de números y álgebra.

Euclides pertenecía a la escuela de Alejandría y su gran interés por la geometría le llevo a estudiar y recopilar todo el saber de la época en una obra de gran rigor matemático, siendo uno de los primeros tratados en los que se le hace uso de un método axiomático y sosteniendo, durante veinte siglos e incluso hoy en día, los principios matemáticos más importantes.

Aseguraba la existencia de ciertos enunciados que tenían que ser aceptados como básicos y obvios ante la imposibilidad de ser demostrados: los Axiomas. En este listado de axiomas Euclides distinguió entre postulados o cuestiones de naturaleza geométrica, y las nociones comunes a todas las matemáticas. Algunas de estas nociones que aparecen en la obra de Euclides son:

- Un punto es aquello que no tiene partes.

- Una línea es una longitud sin anchura.

- Una recta es una línea que yace por igual con respecto a todos sus puntos.

- Las rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y por más que se prolonguen en ambos sentidos, nunca se encuentran.

A pesar de la importancia de las definiciones de los objetos geométricos reconocidos por Euclides en sus elementos, lo verdaderamente significativo es el enunciado de una serie de postulados en los que se fundamenta el desarrollo de la geometría. Estos postulados son:

1. Por dos puntos pasa una única recta.

2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

3. Hay una única circunferencia con un centro y un radio dado.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en ese mismo lado.
   Este último postulado tiene un equivalente, que es el más usado en los libros de geometría:
   Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.*(figura 2.5)*

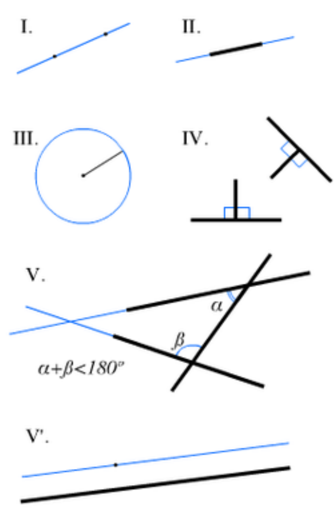


Figura 2.5: Postulados de Euclides.

2.3. Propiedades de los triángulos esféricos

Las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de la propia definición de triangulo esférico de tal forma que a cada propiedad relativa a los triedros les corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos.

Además, dado que las caras y los angulos diedros de un triedro con vértice en el centro de la esfera no cambian en magnitud, si se varía el radio de dicha esfera, las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico serán independientes de la longitud de dicho radio.

Proposición 2.3.1. *Entre los elementos de todo triangulo esférico se verifican las siguientes propiedades:*

1 Los lados de un triángulo esférico son menores que una semicircunferencia.

2 Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos.

$$a < b + c\ ;\ \ b < a + c\ ;\ \ c < a + b$$

Demostración

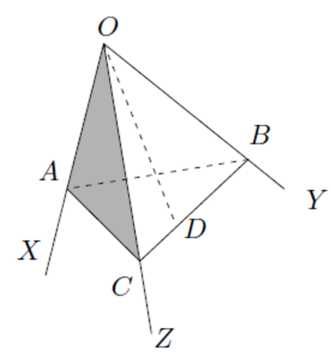


Figura 2.6: Cada lado es estrictamente menor que la suma de los otros dos.

Es claro que la propiedad es cierta si los tres lados son iguales; consideremos un ángulo triedro $OXYZ$ en el que el ángulo $c = \angle XOY$ es mayor que cualquiera de los ángulos de las otras dos caras, es decir, mayor $b = \angle XOZ$ y que $a = \angle ZOY$; escojamos en OX un punto A arbitrario y en OY otro punto B cualquiera. Sea D el punto del segmento AB tal que los ángulos $\angle AOD$ Y $\angle XOZ$ son iguales. A continuación se unen A y B con C. En el triángulo ABC se cumple $AC + CB > AB$ y $AB = AD + DB$ luego $AC + CB > AD + DB$. Ahora bien, los triángulos AOC Y AOD son iguales, luego $AD = AC$ y entonces $CB > DB$. Consecuentemente, como los lados OD y OB del triángulo OCD son respectivamente iguales a los lados OC y OB del triángulo OCB, resulta que $a = \angle COB > \angle DOB$; por *construcción* $b = \angle AOC = \angle AOD$, *por tanto,* $\angle AOC + \angle COB > \angle AOD + \angle DOB = \angle AOB$ *si y solo si* $b + a > c$

3 La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que 360

Demostración

Señalaremos tres puntos cualesquiera A, B *y* C *en las aristas del ángulo triedo* $OXYZ$*; se observa que existen tres triangulos con vértice en* O *y que la suma de los ángulos de estos triángulos es* 540° , *es decir* $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA + (\angle OAB + \angle OAC) + (\angle OBA + \angle OBC) + (\angle OCA + \angle OCB) = 540\,°$. *Ahora bien, por la propiedad anterior,* $\angle OAB + \angle OAC > \angle BAC$

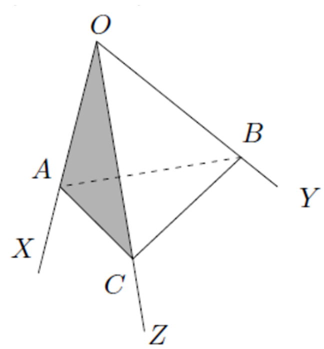


Figura 2.7:

$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC$
$\angle OCA + \angle OCB > \angle ACB$
Entonces $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB > 540°$ *si y solo si*
$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 540° - (\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) = 540°$

4 La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.

5 El menor de los ángulos del triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.

6 Un triángulo esférico isósceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y, consecuentemente, si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, también es isósceles.

7 En todo triangulo esférico isósceles, a mayor lado se opone mayor ángulo y, recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado.

2.4. Área de un triángulo esférico

Definición 2.4.1. *Se denomina exceso esférico de un triángulo esférico ABC y se denota ε al valor del ángulo en que la suma de los tres ángulos del triángulo esférico excede a* 180°*, es decir,*

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ \quad \text{o} \quad \varepsilon' = A + B + C - \pi$$

según si los ángulos vienen expresados en grados o en radianes respectivamente.

Área:
Sea ABC un triángulo esférico sobre una esfera de radio R se calcula su área con la fórmula:

$$S = \frac{\pi.R^2.\varepsilon}{180^\circ} \quad \text{o} \quad S = R^2.\varepsilon'$$

Ejemplos resueltos

1. Halle el área de un triángulo esférico, sabiendo que sus ángulos miden 70°.80° y 85° además, el radio de la esfera es 12 metros.
   Solución
   Primero calculamos el ecxeso esférico, sabiendo que $A = 70^\circ$, $B = 80^\circ$ y $C = 85^\circ$

   $$\begin{aligned} \varepsilon &= A + B + C - 180^\circ \\ \varepsilon &= 70^\circ + 80^\circ + 85^\circ - 180^\circ \\ \varepsilon &= 235^\circ - 180^\circ \\ \varepsilon &= 55^\circ \end{aligned}$$

   Luego, calculamos el área del triángulo esférico

   $$\begin{aligned} S &= \frac{\pi.R^2.\varepsilon}{180^\circ} \\ S &= \frac{\pi.(12m)^2 55^\circ}{180^\circ} \\ S &= 44\pi m^2 \end{aligned}$$

2. Un triángulo esférico birrectángulo esta inscrito en una esfera de radio 6 unidades. Calcular su área, si su tercer ángulo es de 60°.
   Solución
   Por ser un triángulo esférico birrectangulo se tiene que $A = B = 90^\circ$ y $C = 60^\circ$, luego el exceso esférico será:

   $$\begin{aligned} \varepsilon &= 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ - 180^\circ \\ \varepsilon &= 240^\circ - 180^\circ \\ \varepsilon &= 60^\circ \end{aligned}$$

Ahora, calculamos el área del triángulo esférico

$$S = \frac{\pi.(6m)^2 60°}{180°}$$
$$S = 12\pi u^2$$

2.5. Grupos de Fórmulas de Bessel

En todo triángulo esférico, ABC se verifican las siguientes relaciones:

(Teorema del coseno: Primer Grupo de Bessel) El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido,

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 cosA_1$$

Al permutar circularmente las letras, se obtienen las restantes formulas de este grupo.

$$cosl_2 = cosl_1 cosl_3 + senl_1 senl_3 cosA_2$$

$$cosl_3 = cosl_1 cosl_2 + senl_2 senl_2 cosA_3$$

(Teorema del seno: Segundo Grupo de Bessel) Los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos,

$$\frac{senA_1}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

(Teorema de las cotangentes: Tercer Grupo de Bessel) Cada fórmula de este tercer grupo relaciona dos lados del triángulo esférico con dos ángulos no opuestos,

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3 + senA_3.cotA_1$$

Esta es una fórmula modelo del grupo, las otras cinco se obtienen permutando letras.

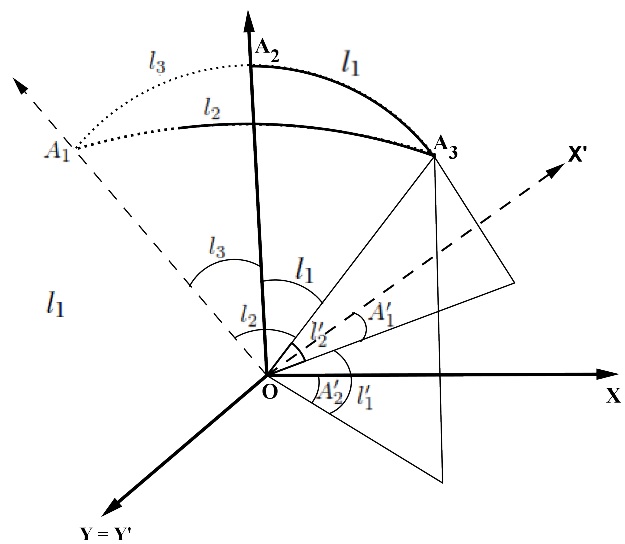
(Cuarto Grupo de Bessel) Cada fórmula de este último grupo, llamado "polar" del primero, relaciona los tres ángulos triángulo de un esférico con uno de sus lados,

$$cosA_1 = -cosA_2.cosA_3 + senA_2.senA_3.cosl_1$$

Esta es una fórmula modelo del grupo, las otras dos se obtienen permutando circularmente letras.

(Analogías de Bessel) El seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente a él es igual al producto del coseno del lado opuesto al ángulo anterior por el seno del otro lado menos el producto del seno de dicho lado opuesto por el coseno del otro lado por el coseno del ángulo opuesto al lado inicial,

$$senl_1 cosA_2 = cosl_2.senl_3 - senl_2.cosl_3.cosA_1.$$



Demostración: Sea A_1, A_2, A_3 y l_1, l_2, l_3, los ángulos y los lados de un triángulo esférico. Sea O;X,Y,Z un sistema de referencia euclídeo tridimensional tal que su origen coincide con el centro de la esfera que contiene al triángulo esférico, el eje Z viene determinado por la dirección del vértice A_2 y el plano XZ contiene al lado l_3.

En estas circunstancias las coordenadas cartesianas (x; y; z) del vértice A_3 vendrán dadas por:

$$(x, y, z) = (cosl'_1 cosA'_2, cosl'_1 senA'_2, senl'_1),$$

Donde $l_1' = 90^o - l_1$ y $A_2' = 180^o - A_2$.

Consideremos ahora el sistema de referencia euclídeo tridimensional O;X',Y',Z

de tal forma que $Y' \equiv Y$ y el eje Z' esté definido por la dirección del vértice A_1. Consecuentemente, el eje X' también pertenece al plano que contiene a los ejes X, Z y Z'. Entonces respecto a este sistema de referencia las coordenadas cartesianas (x',y',z') del vértice A_3 vendrán dadas por:

$$(x', y', z') = (cosl_2' cosA_1', cosl_2' senA_1', sen' l_2,$$

Donde, $l_2' = 90^o - l_2$ y $A_1' = A_1$.

Realizando una rotación de ángulo l_3 alrededor del eje Y' haremos coincidir ambos sistemas de referencia y, consecuentemente, las respectivas coordenadas cartesianas del vértice A_3. Así, tendremos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosl_3 & 0 & -senl_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ senl_3 & 0 & cosl_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

desarollando esta expresión se tiene:

$$cosl_1' cosA_2' = cosl_3 cosl_2' cosA_1' - senl_3' sel_2',$$

$$cosl_1' cosA_2' = cosl_2' cosA_1',$$

$$senl_1' = senl_3 cosl_2' cosA_1' + cosl_3 senl_2',$$

por lo tanto,

$$senl_1 cosA_2 = cosl_2 senl_3 - senl_2 cosl_3 cosA_1,$$

$$\frac{senl_1}{senA_1} = \frac{senl_2}{senA_2} = \frac{senl_3}{senA_3},$$

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 cosA_1.$$

FORMULARIO - RESUMEN
GRUPOS DE FÓRMULAS DE BESSEL.

Primer Grupo: Relaciona los tres lados con un ángulo.

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 cosA_1$$

$$cosl_2 = cosl_1 cosl_3 + senl_1 senl_3 cosA_2$$

$$cosl_3 = cosl_1 cosl_2 + senl_2 senl_2 cosA_3$$

Segundo Grupo: Relaciona dos ángulos con sus lados opuestos.

$$\frac{senA_1}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

Tercer Grupo: Relaciona dos lados con dos ángulos no opuestos.

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3 + senA_3.cotA_1$$

$$cotl_3.senl_1 = cosl_1.cosA_2 + senA_2.cotA_3$$

$$cotl_2.senl_1 = cosl_1.cosA_3 + senA_3.cotA_2$$

$$cotl_3.senl_2 = cosl_2.cosA_1 + senA_1.cotA_3$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cotA_1$$

Cuarto Grupo: Relaciona dos lados con dos ángulos no opuestos.

$$cosA_1 = -cosA_2.cosA_3 + senA_2.senA_3.cosl_1$$

$$cosA_2 = -cosA_1.cosA_3 + senA_1.senA_3.cosl_2$$

$$cosA_3 = -cosA_1.cosA_2 + senA_1.senA_2.cosl_3$$

2.6. Pentágono de Neper

Consiste en dibujar un pentágono y escribir en sus lados, los elementos de un triángulo esférico rectángulo con ángulo recto C y seguir la regla que dice: .El coseno de uno cualquiera de los lados es igual al producto de los senos de los lados opuestos y al producto de las cotangentes de los lados contiguos"

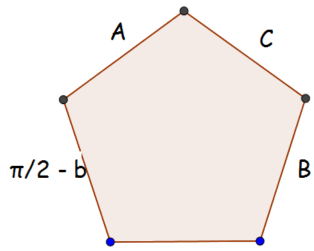


Figura 2.8: Pentágono de Neper.

Esta regla tambien se puede memorizar mediante el siguiente pentagono regular:

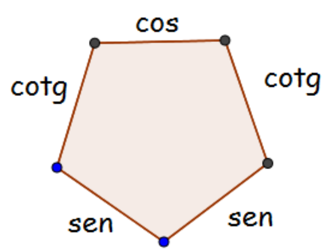


Figura 2.9: Pentágono de Neper auxiliar.

2.7. Cálculo de la distancia entre dos puntos de la esfera

Para localizar puntos sobre la Tierra, supuesta una esfera, se usa el sistema de referencia formado por los paralelos y meridianos. Se fijan dos polos y se consideran todas ls semicircunferencias máximas que pasan por ellos (meridianos), la circunferencia máxima perpendicular a todas ellas (ecuador) y todas las circunferencias esféricas cnetradas en dichos polos (paralelos). A partir de un "meridiano cero"(fijo) cualquier punto de la esfera queda determinado por su longitud y su latitud.

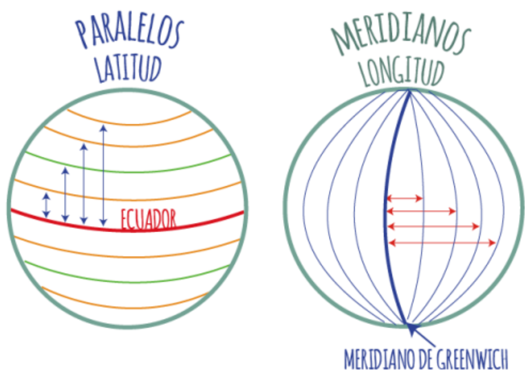


Figura 2.10: latitud y longitud.

Si se requiere hallar la distancia entre dos puntos de la esfera conociendo sus coordenadas (longitud y latitud) este problema puede resolverse usando resultados de la ***trigonometría esférica***

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Calcular el ángulo B de un triángulo esférico del que se conocen los tres lados

$$l_1 = 115°24' \; l_2 = 69°18' \; l_3 = 74°39'$$

Solución La formula única que relaciona los tres lados con el ángulo A_2 está en el grupo de los cosenos:

$$cos l_2 = cos l_1 cos l_3 + sen l_1 sen l_3 cos A_2$$

Despejamos la incógnita:

$$cos A_2 = \frac{cos l_2 - cos l_1 cos l_3}{sen l_1 sen l_3}$$
$$cos A_2 = \frac{cos 69°18' - cos(115°24) cos(74°39')}{sen(115°24) sen(74°39')}$$
$$cos A_2 = 59°22'$$

2 Calcular el lado c de un triángulo esférico, sabiendo que:

$$A_1 = 73°09' \; A_2 = 106°27' \; A_3 = 38°20'$$

Solución El grupo polar de fórmulas nos proporciona la única que relaciona los tres ángulos con el lado l_3

$$cos A_3 = -cos A_1 . cos A_2 + sen A_1 . sen A_2 . cos l_3$$
$$cos l_3 = \frac{cos A_3 + cos A_1 . cos A_2}{sen A_1 . sen A_2}$$
$$cos l_3 = 40°05'$$

3 Los datos conocidos de un triángulo esférico son los siguientes:

$$A_1 = 60°43' \; l_2 = 106°27' \; l_3 = 38°20'$$

Solución Los tres lados y el ángulo A_1 aparecen únicamente en la fórmula siguiente del grupo de los cosenos:

$$cosl_1 = cosl_2cosl_3 + senl_2senl_3cosA_1$$

$$cosl_1 = cos(106°27')cos(38°20') + sen(106°27')sen(38°20')cos(60°43')$$

$$cosl_1 = 73°30'$$

CAPÍTULO 3

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Uno de los objetivos primordiales de la trigonometría esférica es calcular un "elemento" - lado o ángulo- cualquiera de un triángulo esférico, a partir del conocimiento de otros tres. Además, conviene que el calculo de dicho elemento sea independiente, es decir, que no utilice ningún elemento distinto de los previamente conocidos.

En cualquier caso, para la resolución de un triángulo esférico será suficiente conocer tres de sus elementos: los tres lados, los tres ángulos, dos lados y el ángulo comprendido, un lado y los ángulos adyacentes, dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, o dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos. En realidad, estos seis casos pueden reducirse a tres al considerar el triángulo polar al dado.

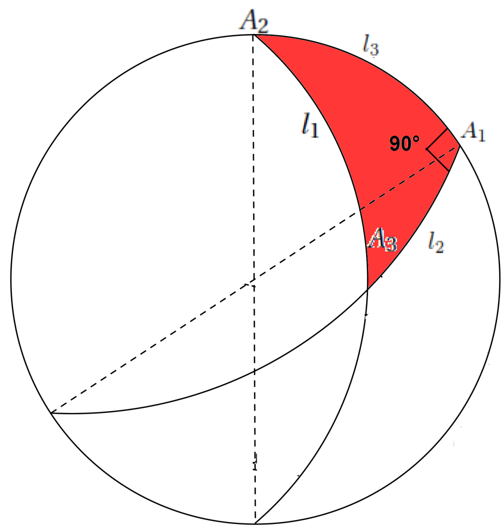
Una consecuencia inmediata de la dependencia entre los distintos elementos de un triángulo es que una pequeña variación en cualquiera de los elementos conocidos producirá una variación en los elementos desconocidos.

3.1. Resolución de triángulos esféricos rectángulos

Se llama triángulo esférico rectángulo al que tiene un solo ángulo recto. Sustituyendo los valores de las funciones trigonométricas del ángulo recto en las fórmulas obtenidas en el capítulo anterior se obtendrán las correspondientes expresiones que permiten resolver los triángulos esféricos rectángulos. Supondremos el ángulo $A_1 = 90^o$.

Proposición 3.1.1. *En todo triángulo esférico rectángulo se verifican las siguientes relaciones:*

***(1)** De acuerdo a la formula del primer grupo de Bessel se tiene lo siguiente:* $cosl_1 = cosl_2 cosl_3$. *En efecto:*



$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 cosA_1$$

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 cos(90^o)$$

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3 + senl_2 senl_3 (0)$$

$$cosl_1 = cosl_2 cosl_3$$

***(2)** De acuerdo a la formula del segundo grupo de Bessel surgen dos igualdades:*

(2.1) $senl_2 = senl_1.senA_2$;***(2.2)*** $senl_3 = senl_1.senA_3$. *En efecto:*

$$\frac{senA_1}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

$$\frac{sen(90^o)}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

$$\frac{1}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

$$\frac{1}{senl_1} = \frac{senA_2}{senl_2} \;;\; \frac{1}{senl_1} = \frac{senA_3}{senl_3}$$

(2.1) $senl_2 = senl_1.senA_2$;***(2.2)*** $senl_3 = senl_1.senA_3$

(3) *De acuerdo a la formulas del tercer grupo de Bessel surgen cuatro igualdades:*

(3.1) $cosA_3 = cotl_1.tanl_2$ *En efecto:*

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3 + senA_3.cotA_1$$

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3 + senA_3.cot(90^o)$$

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3 + senA_3.(0)$$

$$cotl_1.senl_2 = cosl_2.cosA_3$$

$$cosA_3 = cotl_1.tanl_2$$

(3.2) $cosA_2 = cotl_1.tanl_3$ *En efecto:*

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cotA_1$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cot(90^o)$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.(0)$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2$$

(3.2) $cosA_2 = cotl_1.tanl_3$

(3.3) $cotA_3 = cotl_3.senl_2$ *En efecto:*

$$cotl_3.senl_2 = cosl_2.cosA_1 + senA_1.cotA_3$$

$$cotl_3.senl_2 = cosl_2.cos(90^o) + sen(90^o).cotA_3$$

$$cotl_3.senl_2 = cosl_2.(0) + (1).cotA_3$$

(3.3) $cotA_3 = cotl_3.senl_2$

(3.4) $cosA_2 = cotl_1.tanl_3$ *En efecto:*

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cotA_1$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cotA_1$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.cot(90^o)$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2 + senA_2.(0)$$

$$cotl_1.senl_3 = cosl_3.cosA_2$$

(3.4) $cosA_2 = cotl_1.tanl_3$

(4) *De acuerdo a la formulas del cuarto grupo de Bessel surgen tres igualdades:*

(4.1) $cosl_1 = cotA_2.cotA_3$ *En efecto:*

$$cosA_1 = -cosA_2.cosA_3 + senA_2.senA_3cosl_1$$

$$cos(90^o) = -cosA_2.cosA_3 + senA_2.senA_3cosl_1$$

$$0 = -cosA_2.cosA_3 + senA_2.senA_3cosl_1$$

$$cosA_2.cosA_3 = senA_2.senA_3cosl_1$$

$$\textbf{\textit{(4.1)}}\ \ cosl_1 = cotA_2.cotA_3$$

(4.2) $cosA_2 = senA_3.cosl_2$ *En efecto:*

$$cosA_2 = -cosA_1.cosA_3 + senA_1.senA_3cosl_2$$

$$cosA_2 = -cos(90^o).cosA_3 + sen(90^o).senA_3cosl_2$$

$$cosA_2 = -(0).cosA_3 + (1).senA_3cosl_2$$

$$\textbf{\textit{(4.2)}}\ \ cosA_2 = senA_3.cosl_2$$

(4.3) $cosA_3 = senA_2.cosl_3$ *En efecto:*

$$cosA_3 = -cosA_1.cosA_2 + senA_1.senA_2.cosl_3$$

$$cosA_3 = -cos(90^o).cosA_2 + sen(90^o).senA_2.cosl_3$$

$$cosA_3 = -(0).cosA_2 + (1).senA_2.cosl_3$$

$$\textbf{\textit{(4.3)}}\ \ cosA_3 = senA_2.cosl_3$$

Como en todo triángulo esférico rectángulo existe siempre un elemento conocido a priori, el ángulo recto, será suficiente que conozcamos dos de los cinco elementos restantes para que el triángulo quede determinado por completo.

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA DESDE EL AULA DE CLASE.

Dentro del ambiente escolar del sistema educativo colombiano, podemos estimular la curiosidad del estudiante por explicar algunos fenomenos de la naturaleza, principalmente en la rama de la geometría, lo que llevaría a cambiar las mallas curriculares de algunos planteles educativos para empezar procesos que conlleven a que el estudiante descubra por sí mismo mediante el método experimental, conceptos que en la actualidad son desconocidos por su poca atención en los planteles educativos. Es el caso de la trigonometría esférica, que a pesar de que las personas perciben la idea de la esfera, se limitan solamente a lo superficial, y su estudio no es tan profundo como lo es el estudio de figuras en dos dimensiones. Por esta razón se pretende mediante esta práctica experimental, buscar que el estudiante construya, mediante una serie de pautas dadas por el docente, los conceptos básicos de la trigonometría esférica, usando para ello los conceptos previos que tiene el estudiante sin olvidar que estos pueden ser concepciones erróneas que suelen ser producto de aprendizajes espontáneos y que se convierten en un fuerte y profundo bagaje cultural de los alumnos.

4.1. Usos didacticos de la esfera

Entre la noción natural de redondez y la geometría diferencial hay un amplio abanico de posibilidades para la esfera en la educación matemática. Los currículos de matemáticas, de ciencias sociales y de ciencias experimentales incluyen especificaciones que se apoyan en la esfera. Por ejemplo, las coordenadas geográficas son un contenido curricular basado en nociones, como circunferencia esférica, perpendicularidad en la esfera o secciones de la esfera, sobre las que no es costumbre profundizar a la hora de abordar el estudio y manejo de dichas coordenadas.

Figura 4.1: Verificando los valores

4.2. Lineamientos curriculares

Dentro de la educación básica secundaria, el uso de la trigonometría plana aparece para desarrollar en el grado decimo, y es con ellos que se realizó una secuencia de actividades para abrir camino a la trigonometría esférica, no sin antes tener en cuenta que los Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas propuestos por el MEN indican para este grado en el campo de pensamiento espacial y sistemas geométricos, desarrollar las siguientes competencias:

- Identifico las características y propiedades de las figuras cónicas (elipses, parábolas, hipérbolas) y utilizo sus propiedades en la resolución de problemas.
- Hago la representación gráfica de una misma figura en diferentes sistemas de coordenadas (cartesianas, polares, esféricas) y comparo.
- Resuelvo problemas en los que veo cómo se relacionan las propiedades de las figuras cónicas con el álgebra
- Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.
- Reconozco y describo curvas y lugares geométricos.

La realidad del uso de figuras en varias dimensiones no esta tan lejos si analizamos detenidamente cada competencia, lo único que hay que acoplar es su uso adecuado en procesos de la vida cotidiana, aterrizando los conceptos que daremos a continuación.

Figura 4.2: Verificando los valores

4.3. Población

Propuesta Didáctica para la implementación de la Trigonometría Esférica.

La propuesta didáctica fue implementada en los colegios; Diocesano San miguel Arcángel, y Cooperativo la Presentación, incorporándola al currículo de matemáticas del grado decimo. El Colegio Diocesano está ubicado en la carrera 4 este 92-00 en el barrio Castalia cerca a la iglesia católica del espíritu santo y a sus alrededores se encuentran los barrios calima, villa Laura, nueva floresta y villa Karol en el municipio de Garzón, departamento del Huila. El curso cuenta con 18 estudiantes, (10 mujeres, 8 hombres) que se encuentran entre 14 y 18 años de edad; El Cooperativo La Presentación (COEDUGAR) esta ubicado en la Calle 3 No. 5-111 Barrio el Progreso del municipio de Garzón. El trabajo se desarrolló dentro de las horas normales de clase, es decir colocando el nuevo ambiente de aprendizaje a prueba con las posibilidades y obstáculos cotidianos que presenta el aula. Esto con el fin de encontrar fortalezas y debilidades reales, que contribuyan al descubrimiento de conceptos que se vienen desarrollando sobre el tema. Dentro de la nueva organización curricular propuesta por el estado se definen los ambientes de aprendizaje como el proceso pedagógico que conjuga los sujetos, las necesidades y los contextos a la luz de nuevas propuestas didácticas.

Figura 4.3: Verificando los valores

4.4. Heramientas para la implementación didáctica

Dentro del proceso de aprendizaje del estudiante, es importante el uso de las TIC´S y el empleo permantente y sistemático de algunos recursos tecnológicos y didácticos como:

- Video beam
- Computador
- Celulares con android
- Cámara fotográfica.
- Esferas de icopor.
- Tablero.
- Marcadores.
- Compas.
- Elementos del medio ambiente que ilustren esferas.

Dentro de las aplicaciones que se pueden a utilizar como software alternativo se encuentran, Geogebra calculadora 3d (play store) y elementos básicos de paint, que le permitan a los estudiantes ilustrar, visualizar y modelar de una manera más clara el concepto intuitivo de la esfera y sus principales características.

4.5. Instrumentos para recoger la información

Los instrumentos utilizados para recoger la información fueron las hojas de predicciones individuales o por equipos, informes escritos donde cada grupo de estudiantes mostró la estrategia empleada para acercar la solución de la situación planteada, de manera verbal, visual (mediante fotografías) y numérica. Además de estas formas básicas se llevó un registro fotográfico de cada sesión y las anotaciones (diario de campo) que sirvieron para emprender el análisis del trabajo.

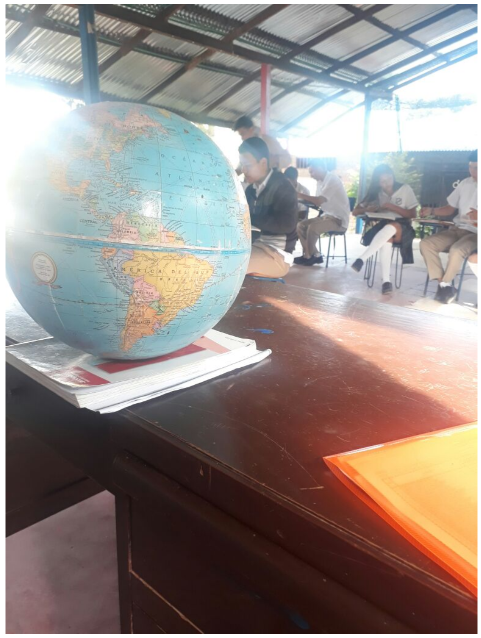


Figura 4.4: Verificando los valores

4.6. Metodología de trabajo

Se inicia la clase con una introducción al concepto intuitivo que tiene cada estudiante con respecto a la esfera, haciendo similitud a lo más cercano que tenemos que es el globo terrestre. Se presentan las nociones básicas de elementos que se pueden encontrar dentro de la esfera, como lo son circunferencia máxima, circunferencia menor, distancia esférica, ángulos esféricos, ángulos diedros y triedros, y se evidencia mediante el uso del software geogebra la ilustración adecuada de circunferencias máximas y mínimas en la construcción auxiliar de triángulos esféricos. Además se busca siempre que el estudiante descubra por si mismo estos conceptos partiendo del análisis claro que se puede generar por medio de elementos básicos de geometría.
Para ello se inicia con las siguientes preguntas:

- ¿Qué concepto tienes de la esfera?
- ¿Por qué es tan fácil fabricar esferas perfectas usando pompas de jabón y, en cambio, hemos de tantear y tantear para conseguir una buena bola partiendo del barro, de la nieve o la plastilina?
- Cuándo cortas una naranja por la mitad ¿qué figuras planas puedes descubrir en las caras?
- Si das una rebanada a la naranja (perpendicular al plano donde se "para"la naranja) en cualquier otro lugar que no sea la mitad ¿Qué relación existe entre las caras nuevas y las de la anterior situación?

Tomando como referencia la información suministrada por los estudiantes se procede a ilustrar conceptos claros sobre la esfera y sus aplicaciones en la vida cotidiana, y siguiendo los lineamientos curriculares comenzamos la solución de problemas simples como lo son la identificación de elementos que componen la esfera. Para ello se les suministra la siguiente grafica donde ellos deben mostrar algunos elementos básicos.

Se debe tener en cuenta que la esfera la vamos a usar como modelo matemático y cultural por su gran representación en la vida cotidiana. Dentro de las aplicaciones que tiene la esfera tenemos las siguientes:

- En la naturaleza encontramos con frecuencia objetos que tienen igual forma a las esferas, semiesferas y objetos casi esféricos.
- Muchos huevos de insectos tienen forma de esfera : plusi gamma (mariposa nocturna migratoria que desova en pleno vuelo)
- Las golondrinas sitúan sus construcciones semiesféricas, echas de barro en edificios, torres y puentes. Pero no solo los pájaros hacen nido de forma esférica, los ratones espigueros construyen nidos para alumbrar a sus camadas, agrupan en un haz unas cuantas espigas o tallos de hierba que hacen de soporte a una pequeña esfera de unos 10 cm de diámetro, formada por hierbas entretejidas, construyendo confortable que habitáculo desprovisto de orificio de acceso, por lo que en cada ocasión la hembra debe abrir y cerrar un agujero en las paredes.
- Las gotas de agua y las pompas de jabón que presentan forma esférica cuando el sistema de fuerzas está en equilibrio. Todos hemos comido frutos de vegetales con formas casi esféricas como sandias, naranjas o tomates de ciertas variedades. El sol, los planetas y los satélites los representamos como esferas debido a que esta es la forma que mejor se ajusta a las observaciones que hacemos desde la tierra en primera aproximación.

Figura 4.5: Verificando los valores

Encuesta:

- ¿Conoce usted el término de esfera?

- Sabe calcular el área de una esfera

- ¿Cree usted que la esfera es importante en la vida cotidiana?
- ¿Sera posible trazar triángulos en la superficie de una esfera?
- Determine ejemplos de esfera más comunes.

  Luego de aplicar esta pequeña encuesta logramos descubrir que los estudiantes tienen pocos conceptos previos acerca de la esfera, por lo que es necesario comenzar con una introducción a la esfera, calcular adecuadamente el área de la superficie esferica y aplicar la triangulación que se puede realizar en la esfera. Para ello se hace necesario disponer de elementos como esferas de icopor donde el estudiante logra afianzar los conceptos, y empieza a analizar cómo es posible realizar triángulos esféricos. El primer paso es implementar en el estudiante una idea clara del concepto de esfera y el lugar donde se grafica en este caso en tres dimensiones y aplicar dicho concepto a la vida cotidiana como se menciona anteriormente, las esferas de icopor ayudan a modelar adecuadamente las aplicaciones y es por esta razón que se convierten en herramienta auxiliar.

Figura 4.6: Verificando los valores

PASOS PARA LA PRACTICA PEDAGOGICA

1. Se le entrega a los estudiantes esferas de icopor de diferentes tamaños y se solicita que dibujen tres circunferencias máximas, tratando de formar triángulos esféricos.
2. Con ayuda de un metro y un transportador se les pide que identifiquen las medidas de un triángulo esférico.
3. Se les enseña por medio de ejemplos a calcular el área de una esfera.
4. Identificación del radio de una esfera.
5. Conclusiones realizadas por los estudiantes.

GUÍA PEDAGÓGICA

Ejemplos resueltos

1. Halle el área de un triángulo esférico, sabiendo que sus ángulos miden $65°.80°$ y $95°$ además, el radio de la esfera es 12 metros.
   Solución
   Primero calculamos el ecxeso esférico, sabiendo que $A = 70°$, $B = 80°$ y $C = 85°$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A + B + C - 180° \\ \varepsilon &= 65° + 80° + 95° - 180° \\ \varepsilon &= 240° - 180° \\ \varepsilon &= 60° \end{aligned}$$

   Luego, calculamos el área del triángulo esférico

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi.R^2.\varepsilon}{180°} \\ S &= \frac{\pi.(12m)^2 60°}{180°} \\ S &= 48\pi m^2 \end{aligned}$$

2. Un triángulo esférico birrectángulo esta inscrito en una esfera de radio 6 unidades. Calcular su área, si su tercer ángulo es de $30°$.
   Solución
   Por ser un triángulo esférico birrectangulo se tiene que $A = B = 90°$ y $C = 60°$, luego el exceso esférico será:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 90° + 90° + 30° - 180° \\ \varepsilon &= 210° - 180° \\ \varepsilon &= 30° \end{aligned}$$

   Ahora, calculamos el área del triángulo esférico

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi.(6m)^2 30°}{180°} \\ S &= 6\pi u^2 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos para que resuelva el estudiante

1. Halle el área de un triángulo esférico, sabiendo que sus ángulos miden 55ř, 85ř Y 95ř además, el radio de la esfera es 12 metros.

2. Un triángulo esférico birrectángulo está inscrito en una esfera de radio 10 metros. Calcular su área, si su tercer ángulo es de 80ř.

4.7. CONCLUSIONES

- Los estudiantes tienen una visión más acorde del concepto de esfera, mediante el cual se puede identificar adecuadamente los términos de circunferencia máxima, mínima y el área de un triángulo esférico.
- Se realizó la actividad adecuadamente, teniendo en cuenta que se dejó en el estudiante la semilla para poder determinar en el aula de clase propiedades de la esfera.
- Se logró la interacción adecuada entre los estudiantes y la geometría de la esfera, así como el normal desarrollo de las actividades programadas para ellos.
- Se observó que los estudiantes a través de la guía utilizada en clase adquirieron destreza de manipulación de las fórmulas de distancia entre dos puntos, en superficies circulares, área y perímetro de triángulos esféricos y su aplicación en casos reales.
- A través de las esferas de icopor utilizadas en la práctica, los estudiantes lograron entender los conceptos básicos de la geometría esférica.

4.8. Evidencia de la actividad

Figura 4.7: Reconociendo la esfera

Figura 4.8: Realizando trazos sobre la esfera

Figura 4.9: Trabajo colaborativo entre estudiantes

Figura 4.10: Tomando algunas medidas de la esfera

Figura 4.11: Compartiendo resultados obtenidos

Figura 4.12: Verificando los valores

Figura 4.13: Construcción de triangulos esféricos

Figura 4.14: Identificando triangulos esféricos

CAPÍTULO 5

BIBLIOGRAFÍA

- De Castro Korgi, Rogrigo. *El universo del Latex*. Ed. Universidad Nacional de Colombia, 2004.
- CHARLES H, Lehmann. *Geometría Analĺtica*. Limusa Editores, 1989.
- EDWARDS y PENNEY. *Cálculo con Geometría Analaítica*. Editorial Prentice Hall , 1987.
- LEITHOLD, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Oxford University, 1998. Séptima Edición.
- PURCELL, Edwin J. *Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Prentice Hall Hispanoamerica, 1992. Sexta Edición.
- SILVA S., Augusto. *Lecciones de Geometría Analática*. Editorial Universidad Surcolombiana, Neiva-Colombia, 1992.
- THOMAS, George. *Cálculo una variable*. Editorial Pearson Educación, 2005. Undécima Edición.
- TOM M, Apostol. Calculus-Volumen I. *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal*. Editorial Revertá, S.A., 1984. Segunda Edición. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México.

CAPÍTULO 6

WEBGRAFÍA

- RIPOLL BARRERO, MANUEL; CASADO FUENTE, MARIA LUISA (2008) E.T.S DE INGENIERA EN TOPOGRAFIA, GEODESIA Y CARTOGRAFIA http://asignaturas.topografia.upm.es /matematicas/primero/Apuntes/Trigonometria/Trigonometria- 20Esferica.pdf,
- BERROCOSO, MANUEL; RAMIREZ, MARIA EVA (2003) NOTAS Y APUNTES DE TRIGONOMETRIA ESFERICA Y ASTRONOMIA DE POSICION http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/9873/teap.pdf
- BRUMMELEN, GLEN VAN (2013) HEAVENLY MATHEMATICS. THE FORGOTTEN ART OF SPHERICAL TRIGONOMETRY http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/el-amanecer-de-los-exoplanetas-582/trigonometra-esfrica-11377
- CHINEA, CARLOS S (2002) LAS FORMULAS DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA http://casanchi.com/mat/formulaesferica.pdf