Neiva, 08 de Mayo de 2018

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

JHON JAMER PUENTES POLANIA, con C.C. No. 1.081.157.134,

SERGIO ZAMBRANO QUIJANO, con C.C. No. 1.075.254.869

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado

titulado RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES COMO ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ARITMÉTICO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA
presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

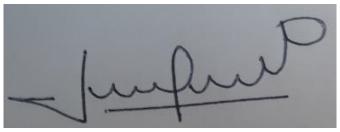
- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

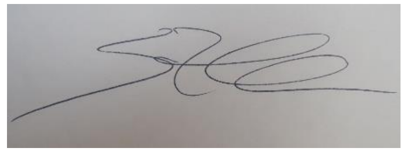
De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:



Firma:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:



Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Resolución de problemas retadores como estrategia para desarrollar el pensamiento aritmético en la educación secundaria.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Puentes Polania	Jhon Jamer
Zambrano Quijano	Sergio

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Guzmán	Mauricio

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en matemáticas

FACULTAD: **Educación**

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en matemáticas

CIUDAD: Neiva AÑO DE PRESENTACIÓN: 2018 NÚMERO DE PÁGINAS: 60

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general X Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: No aplica

MATERIAL ANEXO: Sin anexos

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: Ninguna

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	**Problemas**	**Problems**	6.	**Heurística**	**Heuristic**
2.	**Propuesta**	**Proposal**	7.	**Estrategia**	**Strategy**
3.	**Retadores**	**Challenging**	8.	**Lineamientos**	**Guidelines**
4.	**Metodología**	**Methodology**	9.	**Pensamiento**	**Thought**
5.	**Razonamiento**	**Reasoning**	10.	**Aritmético**	**Arithmetical**

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En el presente trabajo de grado se presenta una sección bibliográfica del estudio realizado sobre diferentes métodos de resolución de problemas. Revisaremos las propuestas de Alan Schoenfeld, Miguel de Guzmán, George Polya y dedicaremos particular atención a la Propuesta que presentan los investigadores en educación matemática John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.

Estos modelos aplicados a problemas retadores se convierten en una propuesta metodológica que permite poner en evidencia la habilidad que poseen los estudiantes para resolver problemas Matemáticos no rutinarios que les permite acrecentar su razonamiento lógico matemático.

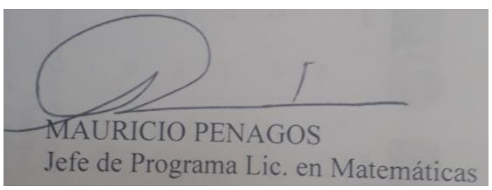
Durante el desarrollo del trabajo, dedicaremos una sección al estudio de cada método, mostrando para ello la solución completa y detallada de problemas retadores; igualmente al final serán propuestos otros problemas a manera de ejercicio para que el lector interesado los resuelva.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In the present work of degree a bibliographic section of the study realized on different methods of resolution of problems is presented. We will review the proposals of Alan Schoenfeld, Miguel de Guzman, George Polya and we will pay particular attention to the proposal presented by the researchers in mathematical education John Mason, Leone Burton and Kaye Stacey.
These models applied to challenging problems become a methodological proposal that allows to highlight the ability that students have to solve non-routine Mathematical problems that allows them to increase their mathematical logical reasoning.
During the development of the work, we will dedicate a section to the study of each method, showing for it the complete and detailed solution of challenging problems; similarly at the end other problems will be proposed as an exercise for the interested reader to solve them.

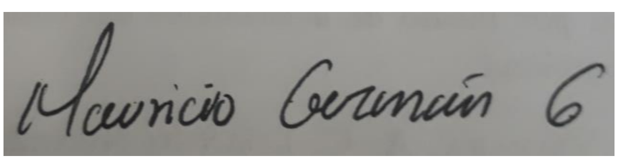
APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauricio Penagos



Firma:

Nombre Jurado: Mauricio Guzmán



Firma:

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES COMO ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ARITMÉTICO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Jhon Jamer Puentes Polania
Sergio Zambrano Quijano

Neiva, Huila
2018

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES COMO ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ARITMÉTICO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Jhon Jamer Puentes Polania

2010191982

Sergio Zambrano Quijano

2009181266

Asesor:

Mauricio Penagos

Neiva, Huila

2018

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

El autor presenta su agradecimiento a:

A nuestros padres porque es gracias al apoyo y esfuerzo de cada uno de ellos que este nuevo proyecto en nuestras vidas se hiciera realidad. Como también agrademos a cada una de las personas que se hicieron partícipes de este largo camino que un gran día decidimos emprender.

Al profesor MAURICIO PENAGOS Jefe del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana y asesor del prsente trabajo, porque gracias a su apoyo y acompañamiento fue posible la elaboración del mismo. Sin su colaboración y apoyo la realización de este trabajo sería imposible.

CAPÍTULO 1

RESUMEN

En el presente trabajo de grado se presenta una sección bibliográfica del estudio realizado sobre diferentes métodos de resolución de problemas. Revisaremos las propuestas de Alan Schoenfeld, Miguel de Guzmán, George Polya y dedicaremos particular atención a la Propuesta que presentan los investigadores en educación matemática John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.

Estos modelos aplicados a problemas retadores se convierten en una propuesta metodológica que permite poner en evidencia la habilidad que poseen los estudiantes para resolver problemas Matemáticos no rutinarios que les permite acrecentar su razonamiento lógico matemático..

Durante el desarrollo del trabajo, dedicaremos una sección al estudio de cada método, mostrando para ello la solución completa y detallada de problemas retadores; igualmente al final serán propuestos otros problemas a manera de ejercicio para que el lector interesado los resuelva.

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una de las propuestas metodológicas actuales y más relevantes en la educación matemática. La capacidad de razonamiento de los estudiantes influye de manera definitiva en la forma acertada de pensar matemáticamente lo que les facilita solucionar situaciones Problemáticas no rutinarias. En este trabajo mostraremos algunos de los métodos de resolución de problemas matemáticos más importantes; pero nuestro interés se centra en las ideas planteadas por los autores John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey. Es precisamente con esta metodología donde nos detendremos a explorar fortalezas y falencias que tienen los estudiantes de secundaria con el fin de implementar con un grupo de estudiantes la metodología de resolución de problemas ya nombrados.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los Lineamientos Curriculares de Matemáticas *"Son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el MEN con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23. En el proceso de elaboración de los Proyectos Educativos Institucionales y sus correspondientes planes de estudio por ciclos, niveles y áreas, los lineamientos curriculares se constituyen en referentes que apoyan y orientan esta labor conjuntamente con los aportes que han adquirido las instituciones y sus docentes a través de su experiencia, formación e investigación."*

Los Lineamientos Curriculares, especifican tipos de pensamientos mediante los cuales se aprende la matemática escolar. Estos pensamientos son:

- Numérico
- Espacial
- Métrico o de medida
- Aleatorio o probabilístico

- Variacional

No obstante, los Lineamientos Curriculares apunta a la construcción de personas que se desenvuelvan en situaciones problema encontradas en la vida cotidiana. A partir de lo anterior nos permitimos hablar de competencias matemáticas y de ser una persona matemáticamente competente lo cual es el fin y la razón de ser de una educación estandarizada en Colombia.

De acuerdo al MEN una persona es matemáticamente competente cuando:

- Formula, plantea, transforma y resuelve problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana.
- Utiliza diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica.
- Usa la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo.
- Domina procedimientos y algoritmos matemáticos y conoce cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

En la enseñanza de la matemática se reconoce la necesidad e importancia de la solución de problemas como estrategia de aprendizaje. De hecho, el proporcionar a los estudiantes destrezas y estrategias para la solución de problemas es considerado un objetivo primordial en el aprendizaje de la matemática en la educación. En ese sentido, se puede afirmar que estas habilidades suelen constituir un conocimiento de carácter procedimental, en pocas palabras constituyen el núcleo del saber necesario para resolver cualquier problema. Pero sería erróneo reducir la resolución de problemas al despliegue de procedimientos sobre aprendidos.

Enseñar a resolver problemas no consiste solo en dotar a los estudiantes de destrezas y estrategias eficaces sino también de crear en ellos el hábito y la actitud de enfrentarse al aprendizaje de la matemática como un problema al que hay que encontrar respuesta, en este caso la resolución de problema es concebido como una estrategia didáctica. Cabe destacar que en el campo de la investigación sobre resolución de problemas la matemática ha tenido una posición privilegiada, ya que ésta constituye una disciplina eminentemente formal o abstracta, en la cual la influencia del contenido temático se ve minimizada, lo que permite plantear problemas muy bien definidos y dentro de ámbitos muy cerrados en los que la ejecución de una secuencia correcta de procedimientos es la clave del éxito.

La resolución de problemas como estrategia didáctica en la mediación del aprendizaje de la matemática en el enfoque constructivista, consiste en desarrollar habilidades para construir argumentos conceptuales basados en la aritmética, álgebra y geometría que permitan dar solución a una problemática planteada de la realidad donde está inmerso el estudiante. Finalmente la resolución de problemas en el enfoque constructivista va más allá de la metodología tradicional que propone las fases de comprensión, planificación, ejecución y evaluación, que se llevan en forma de secuencia lineal. Adicional a estas fases, el estudiante debe reflexionar sobre su interpretación del enunciado de la situación problemática planteada, reconocer los elementos que componen tal enunciado a través de la comprensión conceptual y activar sus procesos heurísticos, entendiendo toda la actividad como un proceso recursivo no lineal, donde el estudiante consolide el pensamiento creador y los procesos metacognitivos.

CAPÍTULO 3

JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo tiene como finalidad presentar una propuesta metodológica para abordar el pensamiento numérico en estudiantes de secundaria vía la resolución de problemas retadores que junto con el apoyo de la lúdica se convierte en una alternativa de trabajo para los docentes.

Se pretende potenciar en los estudiantes de secundaria las habilidades en la resolución de problemas retadores que les ayudarán a fortalecer y desarrollar el pensamiento numérico.

Se propone la metodología de los autores John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey que apunta a una educación integral en la cual el estudiante encuentre situaciones interesantes del contexto y de la propia matemática que le permita desarrollar sus capacidades integralmente, se ha tratado de satisfacer las expectativas promulgando una educación de calidad. Entre otras cosas, se ha enfatizado en las competencias comunicativas y numéricas. Aun así, diversos aspectos en el área de matemáticas siguen presentándose de forma incipiente, hasta el punto que las estrategias pedagógicas no han podido potenciar las capacidades interpretativas en dicha área.

CAPÍTULO 4

OBJETIVOS

4.1. General

Utilizar la metodología heurística propuesta por los investigadores en educación matemática John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey para motivar a los estudiantes de secundaria a potenciar su pensamiento aritmético o numérico a través de la resolución de problemas retadores.

4.2. Específicos

- Hacer una exposición de las metodologías más conocidas para la resolución de problemas matemáticos retadores como las de George Polya, Miguel de Guzman y Alan schoenfeld y hacer una comparación de los mismos.

- Presentar la Metodología de Resolución de Problemas de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey como una nueva propuesta que puede ser utilizada en la secundaria para la resolución de problemas retadores.

CAPÍTULO 5

ESTADO DEL ARTE

La enseñanza de la matemática durante la historia se ha impartido de una manera tradicional, lo cual es poco llamativa para los estudiantes. Esto ha dado lugar a barreras que dificultan los procesos de enseñanza aprendizaje. Por tal razón es necesario implementar nuevas estrategias que faciliten las interacciones propias dentro del aula de clase, las cuales favorezcan los aprendizajes.

De igual manera, la heurística es fundamental en el proceso de enseñanza, ya que le proporciona al docente herramientas para orientar eficazmente a los estudiantes en su aprendizaje. Esto significa que se hace necesario reestructurar las metodologías con las cuales se abordan los temas matemáticos para crear ambiente de aprendizaje que garantice procesos satisfactorios tanto para los estudiantes como para los docentes.

La heurística ha sido centro de estudio e investigación en la matemática y específicamente en el ámbito de la resolución de problemas. En prueba a lo anterior encontramos el siguiente trabajo denominado "Método Heurístico en la Resolución de Problemas Matemáticos" de la Universidad Tecnológica de Pereira es uno de ellos que tuvo como propósito determinar la aplicabilidad de un conjunto de estrategias constructivistas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en sexto grado de la educación básica. La metodología utilizada fue la investigación-acción participativa, que implicó un trabajo de campo caracterizado por la observación y participación intensiva. Se seleccionaron como categorías de análisis: la práctica pedagógica desarrollada por la maestra y el trabajo cooperativo. Se menciona la necesidad de repensar la manera como se trabaja la matemática, la cual se imparte de manera mecánica y repetitiva. Este problema es inherente a todas las etapas del proceso educativo: planificación, ejecución y evaluación; por lo general se planifica en función del programa de estudio y no en función del alumno, lo cual hace que la materia no sea significativa para el estudiante. El diseño y aplicación de estrategias metodológicas constructivistas para facilitar el aprendizaje, condujo a logros tanto para el grupo de estudiantes como para la maestra. En el alumnado permitió: desarrollar actitudes positivas tendentes a mejorar el aprendizaje de la matemática, formular, proponer e inventar nuevos problemas matemáticos, desarrollar un pensamiento crítico, crear y recrear el conocimiento matemático. (Agudelo, Bedoya y Restrepo, 2008)

Por otro lado, Aida Consuelo Mejía Viafara y Miryan Loango Núñez en su trabajo "Resolución de Problemas Matemáticos para fortalecer el pensamiento numérico en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Adventista del Municipio de Puerto Tejada Cauca", presentan una propuesta pedagógica que consiste en orientar la enseñanza de las matemáticas a través de estrategias lúdicas que desarrollen el pensamiento lógico y generen aprendizajes significativos. Con esta se pretendió que las matemáticas sean asequibles a los estudiantes y que el proceso de enseñanza aprendizaje de las mismas se torne agradable y atractivo. En el desarrollo del proyecto se observaron varias fases: una de reflexión inicial, una de planificación, una de acción y por último una de reflexión final. (Mejía y Loango, 2014).

De la Universidad Central de Venezuela, Thais Marlene Yánez Bolívar elabora una propuesta que tiene como finalidad diseñar y aplicar actividades en las que los estudiantes sean quienes solucionen los problemas, actúen como partícipes activos en la construcción de los conocimientos, produzcan y desarrollen técnicas o estrategias de resolución y, donde el docente actúe como moderador del proceso. El trabajo se enmarcó dentro de una investigación no experimental de campo, de nivel descriptivo. Concluyendo que las experiencias de aprendizaje en el aula permitieron la resolución de problemas, partiendo de las experiencias consensuadas entre el participante, el docente y las estrategias utilizadas en la instrucción. (Yánez, 2010)

De igual manera, Paola Cristina Astola, Andrea Elvira Salvador Badillo y Gloria Vera Velasco presentan un estudio de tipo cuantitativo cuyo objetivo fue diseñar y validar un instrumento confiable para detectar habilidades a nivel de estrategias para resolver problemas matemáticos de sustracción en estudiantes de tercer grado de primaria de un colegio privado y un colegio público. Para esta investigación se utilizó un test denominado "PROMAT", creado por las investigadoras, el cual fue sometido a la evaluación del área de matemática. Esta prueba puede ser aplicada de forma individual o colectiva. (Astola, Salvador y Vera, 2012)

Por último y no menos importante, Silvia Brendy Escalante Martínez de la Universidad Rafael Landívar Municipio La Democracia, Departamento Huehuetenango, Guatemala con su trabajo "Método Polya en la Resolución de Problemas Matemáticos". Este trabajo de investigación fue realizado con la finalidad de determinar los pasos que aplica el método Polya en la resolución de problemas matemáticos, llevado a cabo con estudiantes de quinto grado primaria de la Escuela Oficial Rural Mixta "Bruno Emilio Villatoro López" del municipio de La Democracia, departamento de Huehuetenango.(Escalante, 2015)

5.1. Pregunta de investigación

Desde la experiencia docente de los investigadores se ha venido observando la dificultad que tienen los estudiantes de secundaria para resolver problemas matemáticos por las falencias en el desarrollo analítico y el pensamiento numérico, por este motivo surge la siguiente pregunta de investigación.

- ¿De qué manera es posible potenciar el desarrollo del pensamiento aritmético o numérico de los estudiantes de secundaria por medio de la resolución de problemas retadores utilizando la metodología propuesta por John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey?

CAPÍTULO 6

MARCO TEÓRICO

Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas Matemáticos

No cabe duda que la matemática es una ciencia interesante y útil fuera de la clase, es el maestro quien debe trascender el aula y sensibilizar a sus estudiantes, para que utilicen su realidad y sientan la necesidad de razonar, operar o manipular para dar soluciones a problemas de la vida cotidiana. Esta ciencia también contribuye en el desarrollo integral del niño, en la formación de aspectos cognitivos, emocionales y sociales, y por lo tanto, tiene gran importancia en el currículo escolar. La metodología empleada debe moldearse de manera pertinente para hacer la matemática atractiva a los estudiantes de manera que aprenda el sentido del razonar para realizar cálculos aprendidos.

"La mayoría de nuestros estudiantes no están preparados para hacer vínculos y entender la importancia, el valor y el sentido de lo que se les enseña, pero es ahí donde el maestro hace su mejor aporte, logrando que ellos le den significado al contenido disciplinar y lo reconozcan como útil". Ser competitivo en matemáticas, es aplicar cada uno de los conocimientos aprendidos en su cotidianidad, de manera que a cada problema con el que se encuentre sea capaz de razonar, comprender y resolver dicho problema que le permita pensar matemáticamente.(Cuadrado, 2015). Sin embargo es importante tener claridad sobre el tema de resolución de problemas y más específicamente en lo que se define como un problema matemático. A través del tiempo se ha propuesto una serie de definiciones del término problema; estas definiciones buscan establecer criterios que sirvan como marco de referencia para que, a través de la resolución de problemas que cumplan tales criterios, el estudiante pueda construir los conceptos matemáticos de manera significativa. Según Gómez y Carulla (s. f.), lo que se persigue es que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático de alto nivel; este tipo de pensamiento tiene características tales como las siguientes:

- Es no-algorítmico en el sentido de que el camino para la acción no está completamente especificado con anterioridad.
- Es complejo en tanto que el camino total no es "visible" desde un único punto de vista.

- Con frecuencia da lugar a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios.
- Hay incertidumbre puesto que en principio no se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.
- Se requiere de mecanismos propios de regulación.
- Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las estrategias y los criterios involucrados.

Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término "problema" radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro.
Para el estudiante, en cada caso se debe establecer relaciones distintas, para la resolución de problemas matemáticos. El desarrollo de estas actividades puede plantearse a partir de diferentes alternativas o caminos en las que se ha considerado aportaciones. A continuación se presentan las clases de problemas más usados en matemática de acuerdo a los criterios establecidos por Polya(1965).

- Problema de reconocimiento: Con este ejercicio se pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema.
- Problema de algorítmicos o de repetición: Son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, a menudo un algoritmo numérico.
- Problemas de traducción simple o compleja: Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática.
- Problemas de procesos: Son problemas que se diferencian de los anteriores,, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución.
- Problemas sobre situaciones reales: Se trata de plantear actividades lo más cercana posible a situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos.
- Problemas de puzles: Son problemas en los que se pretende mostrar el potencial recreativo posiblemente no suponga su solución necesariamente matemático pero pueden resolverse mediante una chispa o una idea feliz.
- Problemas de historias matemáticas: Frecuentemente se puede observar libros de cuentos, novelas entre los que se encuentran son algunas propuestas o planteamientos que requieren de un esfuerzo que impliquen algún concepto matemático.

El MEN establece que ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual abarca los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: El Numérico, Espacial, Métrico o de medida, Aleatorio o probabilístico y Variacional. Se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo. En la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales. Así, en donde se desarrolla las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes contextualizados de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complicados.

La competencia de resolución de problemas es específicamente distinta del aprendizaje mecánico de ciertos temas matemáticos (algoritmos, fórmulas). Sin embargo, es la metodología más adecuada de evidenciar los conocimientos aprendidos durante las clases de cada estudiante. No se puede conocer con exactitud el número de estrategias que se tienen para poder resolver un problema matemático, ya que de las existentes formas que se pueden mencionar, muchas o pocas se pueden usar, o que muchas pueden encerrar una más general y viceversa. Encontrar un tipo de problema en el que solo intervenga una de tantas estrategias es algo fantasioso, ya que lo normal es que en la resolución de un problema intervengan varias estrategias. Algunas estrategias en la resolución de problemas son: Codificar, organizar, experimentar, analogía, explorar, introducir elementos auxiliares, dividir el problema en partes, buscar regularidades y suponer el problema resuelto.

En síntesis, como puede observarse, desde principios de este siglo, diferentes autores han propuesto pasos, fases o etapas a seguir para poder resolver problemas con éxito. He incluso se han creado principios importantes sobre el diseño y creación de actividades que trabajan en torno al planteamiento y resolución de problemas. Podemos destacar cinco de estos principios:

- **Una actividad debe ser interesante y adecuada al currículo.** Es importante que dichas actividades sean adecuadas al currículo y situaciones de la vida cotidiana del estudiante, ya que esto los hace más interesantes. También, deben considerarse los problemas abiertos y que den al estudiante la libertad de superar sus metas.

- **Una actividad debe usar el tiempo eficientemente.** El tiempo debe ser suficiente y oportuno para que el estudiante obtenga los resultados requeridos en la elaboración de una actividad. Además, el tiempo no debe ser superior al necesario para obtener los mismos resultados utilizando otras metodologías.

- **Los alumnos deben desarrollar sus propias estrategias en las respuestas de las actividades.** Entregar la responsabilidad del maestro al estudiante puede ser una estrategia significativa en el sentido de que deben aprender a tener autonomía en sus planteamientos siempre animados a expresar sus estrategias o respuestas.

- **Los profesores deben esperar estar ocupados en el desarrollo de la actividad.** La participación del maestro en el desarrollo de las actividades debe ser activo. Por tal motivo debe estar atento en el planteamiento de estrategias de los estudiantes y direccionarlas por un mejor rumbo, Si estas llegasen a ser equivocadas. Si los planteamientos o estrategias adoptadas por los alumnos son acordes, es labor del maestro animar el proceso para que la actividad sea de mayor agrado para el grupo.
- **La evaluación debe ser autentica.** El profesor debe estar siempre con los grupos que no desarrollen una estrategia adecuada o con aquellos que la desarrollan para encaminarlos al alcance de las metas propuestas por la actividad. En este principio se destaca la participación del maestro en la clase de planteamiento y resolución de problemas como un animador en el proceso de "construir matemáticas"

Este aspecto es importante ya que permite, de antemano, planificar los pasos a seguir en la resolución de un problema, ejecutar esos pasos y, posteriormente, supervisar el proceso de resolución y comprobar la solución o resultado.

6.1. Método de George Polya

Nació en Budapest el 13 de diciembre de 1887 y murió en Palo Alto el 7 de septiembre de 1985. Fue un matemático, trabajó en una gran variedad de temas matemáticos, incluidas las series, la teoría de números, geometría, álgebra, análisis matemático la combinatoria y la probabilidad. Escritor de libros reconocidos entre los cuales podremos resaltar: "Como plantear y resolver problemas", "Matemáticas y Razonamiento Plausible", "La découverte des mathématiques" y "Problemas y teoremas en análisis". Entre muchos otros escritos.

Generalizó un método de solución de problemas el cual creó cuatro pasos:

1. Entender el enunciado.
2. Diseñar un plan de actuación.
3. Ejecutar el plan.
4. Comprobar y validar.

Este método, tiene cuatro pasos que llevan a la solución de un problema matemático. Dichos pasos son:

Paso 1: Entender el problema

- ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?

- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Paso 2: Configurar un plan

- ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

- ¿Conoces algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? Mira atentamente la incógnita y trata de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

- He aquí un problema relacionado al tuyo y que ya has resuelto. ¿Puedes utilizarlo? ¿Puedes utilizar su resultado? ¿Puedes emplear su método? ¿Te hace falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

- ¿Puedes enunciar al problema de otra forma? ¿Puedes plantearlo en forma diferente nuevamente? Recurre a las definiciones.

- Si no puedes resolver el problema propuesto, trata de resolver primero algún problema similar. ¿Puedes imaginarte un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considera sólo una parte de la condición; descarta la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puedes deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puedes pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que estén más cercanos entre sí?

- ¿Has empleado todos los datos? ¿Has empleado toda la condición? ¿Has considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Paso 3: Ejecutar el plan

- Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos

- ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Paso 4: Examinar la solución obtenida

- ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes el razonamiento?

- ¿Puedes obtener el resultado en forma diferente? ¿Puedes verlo de golpe? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema?

A continuación presentaremos un ejemplo de resolución de problemas aplicando los cuatro pasos del método de resolución de Polya:

“Los huevos de la campesina”

Una campesina llevó a la ciudad una cesta de huevos. Al primer cliente le vendió la mitad de sus huevos más medio huevo. Al segundo cliente le vendió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. Al tercer cliente le vendió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo y dio por terminada la jornada. Si al final se volvió a casa con tres huevos en la cesta, ¿cuántos huevos llevaba al principio?

Para resolver este problema serán utilizados los cuatro pasos del método de Polya.

- Comprender el Problema

El problema expone que a cada cliente le vende la mitad de los huevos que le van quedando más medio huevo. Ese medio significa que el número total de huevos será un número impar.

- Concebir un plan

Tal y como está estructurado el problema es fácil darse cuenta de que tiene más de una manera de abordarlo. Proponemos dos estrategias posibles:

- Utilizando la variable x
- Utilizando los datos que nos da el problema (el dato de que al final le quedan 3 huevos es muy importante) el número de huevos que llevaba al principio la campesina, simplemente razonando.

- Ejecutar el plan

Tomando como base la primera estrategia, proponemos los siguientes pasos para llegar a la solución:

- Si llamamos x al número total del huevos que la campesina llevaba al principio.
- Al primer comprador le vende la mitad de los huevos que tenía más medio huevo: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, que es lo mismo que decir: $\frac{x+1}{2}$
- Ahora averiguamos cuántos huevos le quedan a la campesina después de esta primera venta:
$$x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$$
- A continuación dice que al segundo cliente le vende la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo más. Es decir $\frac{\frac{x-1}{2}}{2}+\frac{1}{2}$. El resultado de esto es: $\frac{x+1}{4}$
- Averiguamos ahora cuántos huevos le quedan después de esta segunda venta. Para ello restamos el número de huevos que le acaba de vender al 2º cliente a los que le quedaban antes:
$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$$

- Ahora vende a un tercer cliente la mitad de los huevos que le quedaban después de estas dos ventas anteriores más medio huevo más. Es decir:

$$\frac{\frac{x-3}{4}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$$

- Tras vender al último comprador, solo le quedan a la campesina 3 huevos. Para saber a cuanto equivalen esos 3 huevos, debemos restarle a los que nos quedaban tras las segunda venta los que acabamos de vender:

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-7}{8}$$

  Por lo tanto, como $\frac{x-7}{8}=3\ ;\ x=31$

  Es decir, la campesina tenía 31 huevos al principio.

- Examinar la solución (Comprobar si el plan ha tenido éxito)

  Para ello sustituimos en cada caso el valor de la x por 31 y vemos que si es posible la solución. Como al primer cliente le vende la mitad de los huevos más medio huevo, serían 16 huevos y sobran 15 huevos, de los cuales le vende la mitad más medio huevo al segundo cliente, vendiéndole 8 huevos y sobrándole 7 huevos, por último, vende la mitad de los huevos restantes más medio huevo a su ultimo cliente, que son 4 huevos y le sobran 3.

6.2. Método de Miguel de Guzmán

Nació en Cartagena el 12 de enero de 1936, en el seno de una familia con gran interés en la ciencia. Ya de muy joven demostró una gran curiosidad por las matemáticas, en especial por los temas más abstractos. Finalizó el bachillerato en 1952 y a pesar de ese interés por las matemáticas, inició estudios de ingeniería industrial en Bilbao, decisión probablemente influida por la situación laboral de la época y del lugar. Sin terminar los estudios facultativo de la carrera, ingresó en la Compañía de Jesús, dejándola amistosamente en 1971. Estudió Humanidades y Filosofía en Múnich (Alemania), licenciándose en 1961. Regresó a España y se licenció en Matemáticas y Filosofía en 1965. Hizo su tesis en la universidad de Chicago. Fueron años de gran actividad intelectual y época en la que fue profesor en distintas universidades como: Universidad Washington en San Luis, Princeton, Brasil y Suecia. Gracias a estos viajes consiguió cierto dominio de las lenguas alemana, portuguesa e italiana. Además hablaba inglés, francés, latín y griego. Entre algunas de sus obras podremos destacar: “Ecuaciones diferenciales ordinarias”, “Teoría de estabilidad y control”, “Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos” y “Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático ”

Se plantean cuatro pasos para resolución de un problema matemático, a saber:

- Familiarización con el problema: En este paso se debe leer, familiarizar y comprender el problema propuesto para resolver.

- Búsqueda de estrategias: En este paso se buscan las posibles maneras para darle solución al problema (gráficos, dibujos u operaciones)

- Llevar adelante ideas: De todas las maneras que pensaste que eran adecuadas, lleva a la práctica la que te parecía mejor a la hora de resolver el problema.

- Revisar el proceso y sacar consecuencias de él: Por último, compara tú propuesta con la de tus compañeros y docentes para saber si el método que utilizaste es el correcto, con tus propias conclusiones.

Al comienzo, en la familiarización, debemos actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender. Una vez que se ha entendido el problema pasamos a buscar estrategias que nos permiten resolverlo. Apuntamos las ideas que nos surgen relacionadas con el problema. Tras acumular varias estrategias llevamos a cabo la estrategia escogida, con confianza y sin prisas. Si no acertamos con el camino correcto volvemos a la fase anterior y reiniciamos el trabajo. Al llegar a la solución queda la fase más importante, revisión del proceso y extraer consecuencias de él. Debemos reflexionar sobre el camino seguido, si podemos extender estas ideas a otras situaciones. Trata de llevar a cabo el modelo anterior en los problemas posteriores y buena suerte.

El método de resolución de problemas de Miguel de Guzmán resuelve problemas de diferentes formas, Problemas de resolución gráfica, Ensayo y error, Razonamiento inverso, Organización de la información, Descomposición del problema, Simplificación y búsqueda de regularidades, Experimentación con la posible solución, Búsqueda de un contraejemplo, Reducción al absurdo.

Ejemplo:

Las hijas del profesor:

Dos profesores pasean charlando de sus respectivas familias.

- Por cierto - pregunta uno - ¿de qué edades son sus tres hijas?

- El producto de sus edades es 36 - contesta su colega -, y su suma, casualmente es igual al número de tu casa. Tras pensar un poco, el que ha formulado la pregunta dice:

- Me falta un dato.

- Es verdad - dice el otro -. Me había olvidado de aclararte que la mayor toca el piano ¿Qué edades tienen las tres hijas del profesor?

Solución

- Familiarizar el problema.

Los datos que conocemos son:

- Que son tres las hijas
- Que el producto de las edades es igual a 36
- Que la suma de las tres edades es igual al número de la casa del que pregunta.
- Que la hija mayor toca el piano

Sin embargo, hay algunos datos que no conocemos, como es el caso del número de la casa del amigo.

- Búsqueda de estrategias

Quizá el mejor de los planes es intentar deducir cuáles son las edades de las tres niñas a partir del dato que nos dice que su producto es igual a 36. Por eso, haremos grupos de tres números diferentes cuyo producto de 36.

- Llevar adelante las ideas

Tales números son:

$$\begin{aligned} 1 \times 1 \times 36 &= 36 & \qquad 1 \times 2 \times 18 &= 36 \\ 1 \times 3 \times 12 &= 36 & 1 \times 4 \times 9 &= 36 \\ 1 \times 6 \times 6 &= 36 & 2 \times 2 \times 9 &= 36 \\ 2 \times 3 \times 6 &= 36 & 3 \times 3 \times 4 &= 36 \end{aligned}$$

El producto de todos estos grupos de tres números es igual a 36. Pero eso no nos da la solución final, por lo que tendremos que tener en cuenta otro de los datos que nos da el problema: que la suma de los 3 es igual al número de la casa del amigo. No sabemos cuál es ese número, pero sí que podemos sumar los números de todos los grupos y ver si tenemos la suerte de que alguno coincida con otro.

Al realizar las sumas digitales, notamos que hay dos grupos de números que nos dan el mismo resultado:

$$\begin{aligned} 1 \times 6 \times 6 &= 13 \\ 2 \times 2 \times 9 &= 13 \end{aligned}$$

Por lo tanto uno de estos dos tiene que ser la solución al problema. Pero ¿cuál?

Para ello podemos utilizar el último de los datos que nos daba el problema: el hecho de que la mayor de las hijas tocara el piano. Por tanto, claramente la solución tendría que ser la 2^a, ya que al decirnos "la mayor de las hijas", tiene que haber una mayor, y en el primer caso no lo habría puesto que serían las dos de la misma edad.

- Revisar el proceso y sacar consecuencias.

Una vez realizado todo el problema comprobamos que nuestra solución ha tenido éxito. En esta ocasión, las hijas del profesor tendrían: la mayor 9 años y las dos más pequeñas tendrán la misma edad, 2 años (por lo que serían gemelas o mellizas).

6.3. Método de Alan Schoenfeld

Alan Schoenfeld es Profesor Asociado de Matemáticas en la Universidad de California en Berkeley. Schoenfeld obtuvo su Ph.D. en matemáticas de Stanford en 1973. Es vicepresidente de la Academia Nacional de Educación, miembro de la Asociación Estadounidense para el Avance de la Ciencia y ex presidente de la Asociación Estadounidense de Investigación Educativa. La investigación de Schoenfeld es sobre pensamiento, enseñanza y aprendizaje, con énfasis en las matemáticas. Es conocido por su libro Mathematical Problem Solving (Resolución de problemas matemáticos). Schoenfeld fue el investigador principal del proyecto de evaluación equilibrada, que produjo evaluaciones de matemáticas consistentes con la instrucción basada en estándares. Ha llevado a cabo estudios detallados de enseñanza, y está interesado en cuestiones de equidad en la educación matemática. Durante algunos años, Schoenfeld se ha preocupado por encontrar mecanismos productivos para el cambio sistémico y por profundizar las conexiones entre la investigación educativa y la práctica. Schoenfeld fue autor principal para los grados 9-12 de los Principios y Estándares del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas para Matemáticas Escolares. Fue uno de los editores fundadores de Research in Collegiate Mathematics Education y se desempeñó como editor asociado de Cognition and Instruction. Es asesor principal de la División de Educación y Recursos Humanos de la National Science Foundation, y asesor principal de contenido de What Works Clearinghouse.

Schoenfeld, en sus investigaciones, descubrió que eso no es suficiente, incluso la persona que tiene una gran caja, con muchos instrumentos, muchas estrategias...., no es suficiente. Se necesitan otras cosas para ser un buen resolutor de problemas.

La idea de Schoenfeld es que hay que tener, digamos, un control ejecutivo, hay que controlar la actividad de la resolución de problemas. Si se toma una estrategia, un instrumento de la caja, y se usa para intentar resolver un problema, hay que controlar lo que pasa y, en cierto momento, decir: ¡basta!, no va bien con este instrumento y vamos a intentar utilizar otro. Es lo que Schoenfeld denomina control, éste involucra conductas de interés tales como: planificar, seleccionar metas y sub-metas y monitoreo constante durante el proceso de resolución. Finalmente, Schoenfeld establece un aspecto transversal en la resolución de problemas y lo denomina sistema de creencias. Éste consiste en el conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes poseen a cerca de la matemática y su enseñanza.

Schoenfeld documenta las siguientes creencias:

1. Las matemáticas son de carácter abstracto, no se relacionan con la vida cotidiana o que los conceptos no se aplican en la resolución de problemas.

2. Los problemas matemáticos deben ser resueltos en menos de diez minutos, de lo contrario no tienen solución.

3. Sólo genios o superdotados son capaces de descubrir o crear matemática.

Las creencias sobre la matemática inciden notablemente en la forma en que los estudiantes, e incluso los profesores, abordan la resolución de algún problema. Esto afecta, por ejemplo, cuando un estudiante toma un problema y a los cinco minutos lo abandona o no; es decir, lo que él piense que es un problema puede incidir incluso en el tiempo que dedique a la resolución de cierto ejercicio. Las creencias que tiene la gente en matemáticas, presentan, como señala Brousseau (1983), un obstáculo en cuanto al conocimiento que "es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo".

Entonces hay actitudes, creencias sobre esta actividad que hay que desarrollar y que van a ayudar a un buen resolvedor de problemas.

Schoenfeld (1985), a partir de los planteamientos de Polya (1945), se ha dedicado a proponer actividades de resolución de problemas que se pueden llevar a cabo en el aula, con el fin de propiciar situaciones semejantes a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de resolución de problemas.

Análisis

- Trazar un diagrama.
- Examinar casos particulares.
- Probar a simplificar el problema.

Exploración

- Examinar problemas esencialmente equivalentes.
- Examinar problemas ligeramente modificados.
- Examinar problemas ampliamente modificados.

Comprobación de la solución obtenida

- ¿Los criterios específicos, verifica la solución?
- ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
- ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?

Ejemplo:

¿Qué números pueden expresarse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

Analisis:

Buscaremos construir una serie de números que cumplan esta condición y buscar irregularidades que nos lleven a determinar alguna conjetura.

Número	**Diferencia de Cuadrados**
1	$1^2 - 0 = 1$
2	No funciona
3	$2^2 - 1^2 = 3$
4	$2^2 - 0^2 = 4$
5	$3^2 - 2^2 = 5$
6	No funciona
7	$4^2 - 3^2 = 7$
8	$3^2 - 1^2 = 8$
9	$9^2 - 0^2 = 9$
10	No funciona
11	$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$
12	$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$
13	$7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$
14	No funciona
15	$8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$
16	$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
17	$9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17$
18	No funciona
19	$10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19$
20	$6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$
21	$11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$
22	No funciona
23	$12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$
24	$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$
25	$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$
26	No funciona
27	$14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$
28	$8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$
29	$15^2 - 14^2 = 225 - 196 = 29$
30	No funciona

Se pueden expresar 22 de los 30 primeros números como una diferencia de dos cuadrados perfectos. En la tabla podremos notar que todos los números impares cumplen con la condición del ejercicio así como también todos los números múltiplos de cuatro

Exploración

Lo anterior lo podremos ver con mayor claridad si aplicamos la definición de diferencia de cuadrados para tratar de dar una conjetura más fuerte y con mayor certeza a lo que estamos proponiendo.

$$\mathrm{a}^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Por lo tanto un números n puede ser una diferencia de dos cuadrados perfectos si tiene dos factores de la forma $a+b$ y $a-b$ donde $a+b \geq \sqrt{n}$ y $a-b \leq \sqrt{n}$
Luego podremos hacer cada número impar tomando cuadrados consecutivos es decir si n^2 es un cuadrado su consecutivo seria $(n+1)^2$ y de este modo diremos:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Por lo anterior podremos decir que la diferencia de dos cuadrados perfectos consecutivos genera un número impar. Similarmente, mostraremos que todo número divisible por cuatro es generado por cuadrados perfectos con dos unidades de diferencia. Es decir:

$$(n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4(n+1)$$

Comprobación de la solución obtenida

Ahora bien. Todos los números que no se pueden expresar como diferencia de cuadrados perfectos están determinados por la expresión:

$(n+x)^2 - n^2 = n^2 + 2xn + x^2 - n^2 = x(2n+x)$
Para lo cual deberemos analizar las siguientes condiciones:

- Si x es impar, x^2 también es impar y $2xn$ sería un número par. Por consiguiente un impar más un par es impar
- Si x es par, x^2 es múltiplo de cuatro y $2nx$ también es múltiplo de cuatro. Por lo que $(n+x)^2 - n^2$ es múltiplo de cuatro
- No se pueden hacer números como 2,6,10, etc. Por qué se obtienen del producto de un número par por uno impar

CAPÍTULO 7

MÉTODO DE JOHN MASON, LEONE BURTON Y KAYE STACEY

John Mason ha enseñado matemática desde que se le pidió que fuera tutor de un compañero cuando tenía quince años. En la universidad fue al principio tutor no oficial, luego un tutor oficial para estudiantes de matemática en los años posteriores a él, mientras daba tutoría a los estudiantes de la escuela también. Después de obtener un BSc en Trinity College, Toronto en Matemáticas, y un MSc en Massey College, Toronto, fue a Madison Wisconsin donde conoció la película de Polya "Let Us Teach Guessing", y completó un doctorado en Combinatorial Geometry. La película publicó un estilo de enseñanza que había experimentado en la escuela secundaria de su profesor de matemáticas Geoff Steel, y su enseñanza cambió de la noche a la mañana.

Su primer nombramiento fue en la Open University, que incluyó, entre otras cosas, el diseño y la implementación de la primera escuela de verano de matemáticas (5000 estudiantes durante 11 semanas en tres sitios en paralelo). Pidió su experiencia de ser enseñado, para instituir sesiones de resolución de problemas activos, que luego se convirtieron en investigaciones. También desarrolló proyectos de trabajo para estudiantes en su segundo año de matemáticas puras. En 1984 escribió "Pensar Matemáticamente "con Leone Burton y Kaye Stacey, que se convirtió en un clásico (considerablemente ampliado en 2010 y traducido a 6 idiomas), y todavía se usa en muchos países del mundo con estudiantes de secundaria avanzados, con graduados convirtiéndose en maestros de escuela, y con estudiantes de pregrado en cursos en los que se invita a los estudiantes a pensar sobre la naturaleza de hacer y aprender matemáticas. Learning and Doing Mathematics fue escrito originalmente para estudiantes de Open University, y luego modificado para estudiantes que ingresan a la universidad en general.

Leone Burton asistió a la Universidad de Londres estudiando educación con un enfoque en la enseñanza de las matemáticas. Ella comenzó a enseñar en el nivel secundario, pero no le gustaba la estructura educativa y los métodos del día y se trasladó a la enseñanza en el nivel primario para tener una mayor oportunidad de cambiar la estructura de la enseñanza. Recibió un certificado de posgrado en educación en 1966 y un diploma académico en educación en 1968, ambos de la Universidad de Londres. En 1967 obtuvo un puesto como especialista en educación matemática en Battersea College of Education, que se dedica a la preparación de maestros. Recibió su PHD del Instituto de Educación en 1980.

Kaye Stacey es profesora emérita de Educación Matemática en la Universidad de Melbourne, y ha ocupado la cátedra de la fundación durante 20 años. Ha trabajado como investigadora, maestra de docencia primaria y secundaria, supervisora de investigación de posgrado y asesora de gobiernos. Ha escrito muchos libros y artículos orientados a la práctica para profesores de matemáticas, así como la producción de un gran conjunto de artículos de investigación. Los intereses de investigación del profesor Stacey se centran en el pensamiento matemático y la resolución de problemas y el plan de estudios de matemáticas, en particular los desafíos que se enfrentan al adaptarse al nuevo entorno tecnológico. Su trabajo de investigación es reconocido por su alto compromiso con las escuelas. Su tesis doctoral de la Universidad de Oxford, Reino Unido, está en teoría de números. Fue presidenta del Grupo de expertos en matemática para la encuesta PISA 2012 de la OCDE. Kaye Stacey recibió una Medalla del Centenario del gobierno australiano por sus extraordinarios servicios a la educación matemática.

La metodología de resolución de problemas propuesta por Mason, Burton & Stacey privilegia la sistematización y reflexión del proceso de resolución de problemas en aras de desarrollar el pensamiento matemático. Además de las fases mencionadas los autores proponen una serie de estrategias que el solucionador deberá utilizar en el proceso de resolución. Según los autores, si un individuo hace explícita cada una de estas fases durante la resolución de un problema, tendrá herramientas que facilitan el desarrollo de su pensamiento matemático, es decir, tendrá mayor facilidad para resolver dicho problema y tendrá una manera distinta de ver la vida en dicho camino.

Este método considera tres fases a saber: Abordaje, Ataque y Revisión, a continuación se caracterizará cada uno de ellos: **Abordaje:** además de comprender el problema y familiarizarse con él, se representa y organiza la información. **Ataque:** intervienen procesos matemáticos fundamentales como son hacer conjeturas y justificarlas, asociados a estados emocionales. **Revisión:** comprueba los resultados de forma reflexiva y generalizarlos a un contexto más amplio.

Las fases enunciadas anteriormente están asociadas a lo que los autores llaman rúbricas, que son unas etiquetas que aconsejan utilizar durante la resolución del problema y que son en realidad, una manera de sistematizar el proceso de resolución, para que pueda ser analizado durante el mismo.

ABORDAJE

1. Comprender el problema

    - Lee el problema despacio.
    - ¿Cuáles son los datos?(lo que conoces) ¿Cuál es la incógnita?(lo que buscas)

- Trata de encontrar la relación entre los datos y la incógnita
- Si puedes, has un esquema o dibujo de la situación

2. Concebir un plan

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conoces?
- ¿Podrías plantear el problema de otra forma?
- Imagínate un problema parecido, pero más sencillo
- Suponga que el problema ya está resuelto; ¿Cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Utilizas todos los datos cuando haces el plan?

ATAQUE

3 Llevar a cabo el plan

- Al ejecutar el plan, comprueba cada uno de los pasos
- ¿Puedes ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo piensa: ¿Qué consigo con esto?
- Acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que haces y para que lo haces
- Cuando tropieces con alguna dificultad que te deje bloqueado, vuelve al principio, reordena las ideas y prueba de nuevo.

REVISION

4 Reflexiona sobre el proceso seguido. Revisión del plan

- Lee de nuevo el enunciado y comprueba que lo que te pedían es lo que has averiguado
- Fíjate en la solución. ¿te parece que lógicamente sí es posible?
- ¿Puedes comprobar la solución?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Puedes hallar alguna otra solución?
- Acompaña la solución de una explicación que indique claramente lo que has hallado
- Utiliza el resultado obtenido y el proceso que has seguido para formular y plantear nuevos problemas

EJEMPLOS:

Los pitagóricos solían representar los números mediante puntos en un pergamino o piedrecillas en la arena y los clasificaban según las formas poligonales de estas distribuciones de puntos, es decir, asociaban los números a figuras geométricas obtenidas por la disposición regular de puntos, cuya suma determina el número representado. Con este ejercicio se busca que los estudiantes construyan los números poligonales de manera experimental y que con base a las observaciones construyan sus propias conjeturas.

7.1. Números poligonales

Un número que se puede representar como el número de puntos de una distribución triangular se denomina número triangular. De igual manera un número que se puede representar como el número de puntos de una distribución pentagonal se denomina número pentagonal. ¿Cuáles son los números triangulares, cuales los pentagonales y en general cuales son los números p-poligonales?

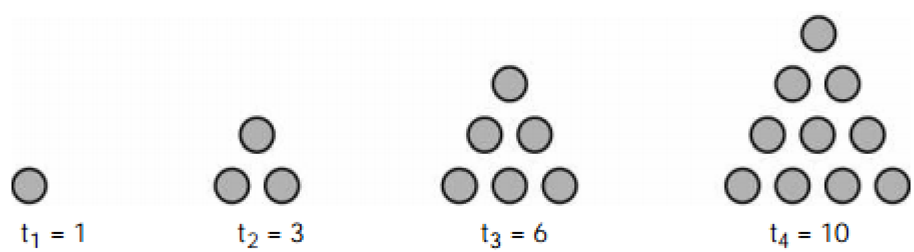
Abordaje:

7.1.1. Actividad Motivacional 1

Para realizar la actividad se deberán crear grupos de trabajo de cuatro estudiantes los cuales tendrán que tener los siguientes materiales

- 50 tapas de gaseosa plásticas del mismo tamaño.
- Libreta de apuntes.
- Regla y escuadras
- Lápiz, lapiceros y colores de diferente color.

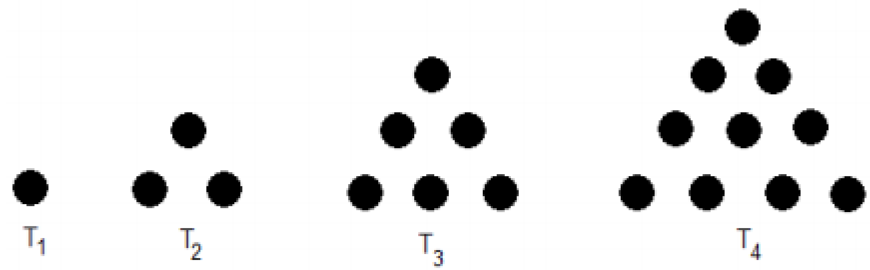
Aquí les representamos los cuatro primeros "números triangulares", llamados así porque con la cantidad de tapas que los integran se pueden formar triángulos equiláteros:



- ¿Cuáles son los siguientes 2 números triangulares?
- De acuerdo a lo anterior ¿Cuáles son los primeros 10 números triangulares?
- ¿Existe algún patrón en la cantidad de piedras que se deben poner cada vez? ¿Cuál es el número triangular 15?

Números triangulares:

Un número triangular es aquel que se puede representar como el número de puntos de una distribución triangular. Por ejemplo 1, 3, 6, 10, 15 son los primeros cinco números triangulares:



Si llamamos $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$. Se obtiene la secuencia $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

- ¿Cuáles son los siguientes cinco números triangulares?

Hay una relación entre cada de los números triangulares y su número triangular anterior. En efecto:

$$T_1 = 1 \ ; \ T_2 = T_1 + 2 \ ; \ T_3 = T_2 + 3 \ ; \ T_4 = T_3 + 4 \ ; \ T_5 = T_4 + 5$$

Del mismo modo la secuencia continua para todos los números triangulares. Analicemos ahora las sumas parciales de los puntos que forman el número triangular.

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= T_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ T_3 &= T_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ T_4 &= T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ T_5 &= T_4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, el número triangular k-esimo está conformado por la expresión:

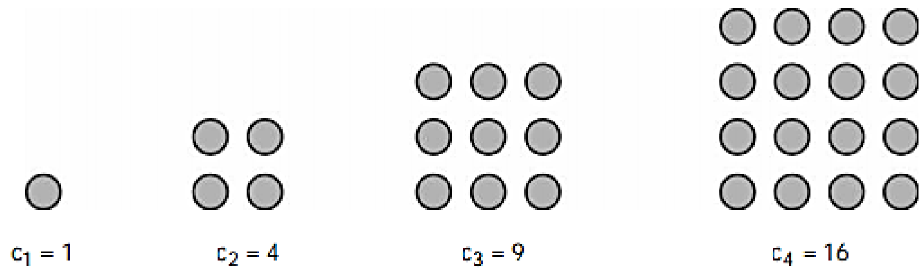
$$\begin{aligned} T_k &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + (k-1) + k \\ T_k &= \frac{(k(k+1))}{2} = \frac{(k^2 + k)}{2} \end{aligned}$$

Por ejemplo si queremos crear el número triangular 8, el triangular 15 y el triangular 25 aplicamos la expresión y sustituimos el valor de k en esta:

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{8(8+1)}{2} = \frac{(8 \times 9)}{2} = 36 \\ T_{15} &= \frac{15(15+1)}{2} = \frac{(15 \times 16)}{2} = 120 \\ T_{25} &= \frac{25(25+1)}{2} = \frac{(25 \times 26)}{2} = 325 \end{aligned}$$

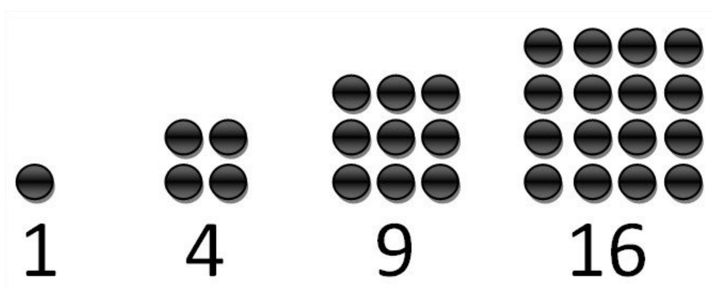
7.1.2. Actividad Motivacional 2

Pitágoras fue discípulo de Thales en Grecia, donde fundó una hermandad de tipo religioso, científico y filosófico, que se conoció a través del tiempo como “los pitagóricos”. Ellos solían representar los números mediante piedritas, clasificándolos según las formas que pudieran darles a las distribuciones de las piedras. A continuación, están representados los primeros "números cuadrados", llamados así porque la cantidad de piedras que los integran se pueden disponer formando un cuadrado.



- ¿Cuál es el quinto número cuadrado? ¿Y el décimo?
- ¿Cuáles son los primeros 10 números cuadrados?
- ¿Existe algún patrón para construir un número cuadrado a partir de su anterior?
- Para cualquier número natural n, ¿Cuánto vale 1+3 + 5 +...+ (2n − 1)?

Números cuadrados: Otra manera de ver los números poligonales son los números cuadrados.



Note lo siguiente:

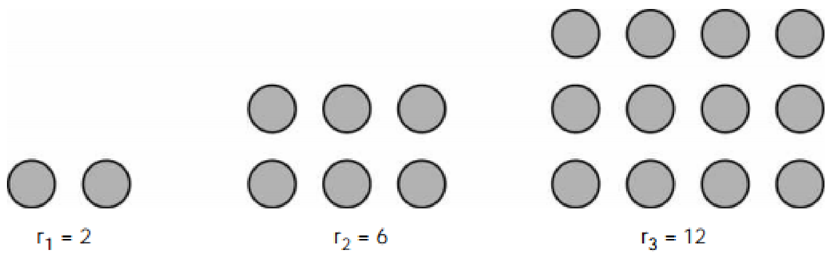
$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1 \\
C_2 &= C_1 + 3 = 1 + 3 = 4 \\
&= C_3 = C_2 + 5 = 1 + 3 + 5 = 9 \\
&= C_4 = C_3 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16
\end{aligned}
$$

Nótese en la anterior figura que el $k-\acute{e}simo$ número cuadrado es la suma de los n primeros números impares, que forman la sucesión aritmética $1,\ 3,\ 5,\ 7$, cuya diferencia es 2. Por tanto se tiene que el $k-\acute{e}simo$ número cuadrado se define como $C_k = n^2$.

7.1.3. Actividad Motivacional 3

¿Qué pasa si unimos dos números triangulares?

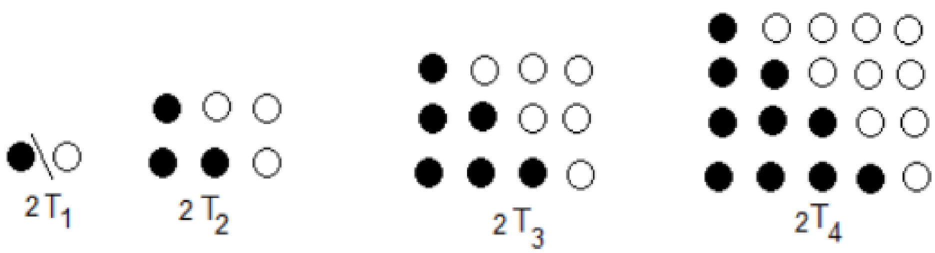
Los números rectangulares son los que tienen una cantidad tal de tapas que permiten formar un rectángulo cuya base es una unidad mayor que la altura.



- Dibujen los dos números rectangulares siguientes. ¿Cuáles son?
- ¿Cuáles son los primeros 10 números triangulares?
- ¿Existe algún patrón para construir los números rectangulares a través de los números triangulares?

Ataque:

Números rectangulares u oblongos: Daremos origen a los números oblongos que se caracterizan por tener forma rectangular en los que la dimensión de un lado es una unidad mayor que el otro, de los cuales daremos una breve explicación en cuanto a sus generalidades y comportamiento.



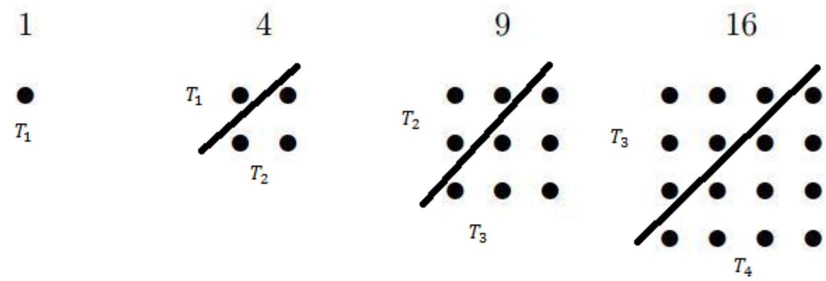
Los números oblongos están formados por dos números triangulares del mismo orden. Podemos establecer las siguientes relaciones:

$$O_1 = 2T_1 \;\; ; \;\; O_2 = 2T_2 \;\; ; \;\; O_3 = 2T_3 \;\; ; \;\; O_4 = 2T_4;$$

Para hallar el $k - \acute{e}simo$ número oblongo tomamos la expresión general para números triangulares así:

$$O_k = 2T_k = 2\frac{(k^2 + k)}{2} = k^2 + k$$

Con los números cuadrados obtendremos un comportamiento similar a los números oblongos. Podremos generar números cuadrados a través de la estructura de los números triangulares.

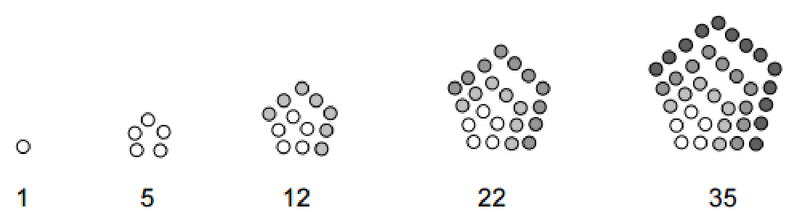


Los números cuadrados están formados por un número triangular del mismo orden junto con otro de orden anterior. De esta manera el $k-ésimo$ número cuadrado escrito en términos de números triangulares es:

$$\begin{aligned} C_k &= T_{(k-1)} + T_k \\ &= \frac{(k-1)^2 + (k-1)}{2} + \frac{(k^2+k)}{2} \\ &= \frac{(k^2 - 2k + 1 + k - 1 + k^2 + k)}{2} = \frac{2k^2}{2} = k^2 \end{aligned}$$

Trataremos ahora de descomponer los números pentagonales en términos de números triangulares.

Podremos ver que un número pentagonal está conformado por un triangular del mismo orden más otros dos de un orden anterior.



$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= 5 = 3 + 1 + 1 = T_2 + 2T_1 \\ P_3 &= 12 = 6 + 3 + 3 = T_3 + 2T_2 \\ P_4 &= 22 = 10 + 6 + 6 = T_4 + 2T_3 \end{aligned}$$

De este modo un número pentagonal escrito en términos triangulares se define como:

$$\begin{aligned} P_k &= T_k + 2T_{(k-1)} \\ &= \frac{2[(k-1)^2 + (k-1)]}{2} + \frac{(k^2+k)}{2} \\ &= (k^2 - 2k + 1 + k - 1) + \frac{(k^2+k)}{2} \\ &= \frac{(k^2 + k + 2k^2 - 2k)}{2} = \frac{(3k^2 - k)}{2} \end{aligned}$$

Como ya habíamos determinado los números cuadrados y los pentagonales a partir de la estructura de números triangulares haremos lo mismo con los números hexagonales. Lograremos ver que los hexagonales también se descomponen en suma de números triangulares.

$$\begin{aligned}
H_1 &= 1 \\
H_2 &= T_2 + 3T_1 = 3 + 3 * 1 = 6 \\
H_3 &= T_3 + 3T_2 = 6 + 3 * 3 = 15 \\
H_4 &= T_4 + 3T_3 = 10 + 3 * 6 = 28
\end{aligned}$$

Un número hexagonal está formado por un triangular del mismo orden y tres de orden anterior. Si escribimos el $k - \acute{e}simo$ número hexagonal en términos de un número triangular obtendremos que:

$$\begin{aligned}
H_k &= T_k + 3T_{(k-1)} \\
&= \frac{3[(k-1)^2 + (k-1)]}{2} + \frac{(k^2 + k)}{2} \\
&= \frac{3[k^2 - 2k + 1 + k - 1]}{2} + \frac{(k^2 + k)}{2} \\
&= \frac{(k^2 + k + 3k^2 - 3k)}{2} = \frac{(4k^2 - 2k)}{2} = 2k^2 - k
\end{aligned}$$

Extensión:

Luego de hacer una presentación muy superficial por las características y generalidades de los números poligonales haremos una tabla para generalizar los números poligonales en términos de números triangulares.

Lados poligonales	**Número poligonal**	**A partir de los triangulares**	**Termino general**
3	Triangular	T_k	$\frac{(k^2+k)}{2}$
4	Cuadrado	$T_k + T_{(k-1)}$	k^2
5	Pentágono	$T_k + 2T_{(k-1)}$	$\frac{(3k^2-k)}{2}$
6	Hexágono	$T_k + 3T_{(k-1)}$	$\frac{(4k^2-2k)}{2} = 2k^2 - k$
7	Heptágono	$T_k + 4T_{(k-1)}$	$\frac{(5k^2-3k)}{2}$
8	Octágono	$T_k + 5T_{(k-1)}$	$\frac{(6k^2-4k)}{2}$
9	Eneágono	$T_k + 6T_{(k-1)}$	$\frac{(7k^2-5k)}{2}$
10	Decágono	$T_k + 7T_{(k-1)}$	$\frac{(8k^2-6k)}{2}$
P	Poligonal	$T_k + (p-3)T_{(k-1)}$	$\frac{((p-2)k^2-(p-4)k)}{2}$

La producción de fórmulas para cada uno de los polígonos considerados requirió una generalización a partir de los ejemplos presentados. Al desarrollar una fórmula para cualquier número de lados del polígono, tomamos como ejemplo particular esas sucesivas generalizaciones obtenidas anteriormente.

Determinar los divisores de un número es un ejercicio que para los estudiantes puede llegar a ser extenuante y sin sentido pero si logramos que el estudiante construya una conjetura fuerte sobre la forma de determinar el número total de divisores de un número, seguramente este ejercicio tendrá otro sentido y será mucho más llamativo y atractivo. Buscaremos con este ejercicio incentivar al estudiante a construir sus propias conclusiones guiadas por una serie de pasos que muy seguramente llevaran al alumno a cumplir con su propósito.

7.2. Divisores Impares

¿Qué clase de números tienen un número impar de divisores?

Abordaje:

Determinemos los divisores de algunos números naturales.

NÚMERO	DIVISORES	NÚMERO DE DIVISORES
2	1	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4
9	1,3,9	3
10	1,2,5,10	4
11	1,11	2
12	1,2,3,4,6,12	6
13	1,13	2
14	1,2,7,14	4
15	1,3,5,15	4
16	1,2,4,8,16	5
25	1,5,25	3
36	1,2,3,4,6,9,12,18,36	9

Ataque:

Por consiguiente los números que tienen una cantidad impar de divisores son los números cuadrados (n^2). De esta manera podremos afirmar que todo número cuadrado tiene un número impar de divisores. Luego, de determinar los divisores de cierta cantidad de números determinar que: "Al comparar los divisores de algunos números vemos que si tienen distintos divisores sin contar el 1 y al realizar el producto de estos números, la cantidad de divisores del producto es igual al producto de la cantidad de divisores de cada uno de ellos". A manera de ejemplo.

$$D_2 = 1, 2$$
$$D_3 = 1, 3$$

Tienen divisores distintos sin contar en 1. Si multiplicamos los números $2 \times 3 = 6$ y hallamos los divisores $D_6 = 1, 2, 3, 6$ veamos que la cantidad de divisores depende del producto entre la cantidad de divisores de 2 y 3

- Otro ejemplo. Como los divisores de 2 y 5 son distintos sin contar el 1 entonces.

$$\begin{aligned} D_2 &= 1, 2 = 2 \ \ Divisores \\ D_5 &= 1, 5 = 2 \ \ Divisores \\ D_2 \times D_5 &= 2 \times 2 = 4 = D_{10} = 1, 2, 5, 10 \end{aligned}$$

- Como los divisores de 4 y 3 son distintos sin contar el 1 entonces.

$$\begin{aligned} D_3 &= 1, 3 = 2 \ \ Divisores \\ D_4 &= 1, 2, 4 = 3 \ \ Divisores \\ D_3 \times D_4 &= 2 \times 3 = 6 = D_{12} = 1, 2, 3, 4{,}6{,}12 \end{aligned}$$

- Como los divisores de 5 y 6 son distintos sin contar el 1 entonces.

$$\begin{aligned} D_5 &= 1,5 = 2 \ \ Divisores \\ D_6 &= 1,2,3,6 = 4 \ \ Divisores \\ D_5 \times D_6 &= 2 \times 4 = 8 = D_{30} = 1,2,3,5,6,10,15,30 \end{aligned}$$

- Si tomamos un par de números cuadrados que cumplan las condiciones también podremos determinar el número de divisores del producto. Como los divisores de 4 y 9 son distintos sin contar el 1 entonces.

$$\begin{aligned} D_4 &= 1,2,4 = 3 \ \ Divisores \\ D_9 &= 1,3,9 = 3 \ \ Divisores \\ D_4 \times D_9 &= 3 \times 3 = 9 = D_{36} = 1,2,3,4,6,9,12,18,36 \end{aligned}$$

Ahora bien debemos determinar un número que tenga 13 divisores. Como es un número impar de divisores entonces dicho número debe ser un número cuadrado.

Nuevamente decimos que un número natural o es primo o es compuesto. Para los números primos se definen dos únicos divisores que son él mismo y la unidad.

En caso de ser un número compuesto, siempre tiene alguno o algunos otros divisores distintos de él mismo y la unidad. De hecho un número es compuesto si y solo si tienen más de dos divisores. Pero ¿Cuántos divisores tienen un número compuesto? Si un número compuesto se puede descomponer en producto de factores primos. Para hallar el número de divisores, multiplicamos los exponentes de los factores incrementados todos en una unidad.

Hallemos los divisores de 30.

Primero descomponemos en factores primos de tal modo que $30 = 2 \times 3 \times 5$ los exponentes de los factores primos son 1,1,1. Luego, el número de divisores es:

$$(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \ \ Divisores$$

Habíamos determinado anteriormente los $D_{30} = 1,2,3,5,6,10,15,30$ y podemos ver que en realidad si son 8

Hallemos los divisores de 36.

Primero descomponemos en factores primos de tal manera que $36 = 2^2 \times 3^2$ los exponentes de los factores primos son $2,2$. Luego el número de divisores es:

$$(2+1)(2+1) = 3 \times 3 = 9 \ \ Divisores$$

Ya habíamos determinado anteriormente los $D_{36} = 1,2,3,4,6,9,12,18,36$ y podemos corroborar que son 9 divisores.

Extensión:

Luego, necesitamos un número que tenga 13 divisores. Como es un impar tenemos claro que es un número cuadrado por consiguiente el número debe ser de la forma: $(n^6)^2 = 13$ divisores; de tal manera que nuestro número es de la forma n^2 ya que para hallar los divisores de un número sumamos una unidad al exponente.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} 2^{12} &= 4{,}096 = 13 \;\; Divisores \\ 3^{12} &= 531{,}441 = 13 \;\; Divisores \\ 4^{12} &= 16{,}777{,}216 = 13 \;\; Divisores \end{aligned}$$

Por ultimo podemos concluir que todos los números de la forma n^2 tienen 13 divisores exactamente.

7.3. Números Capicúas

A los números como el 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama números capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11. ¿Es cierto?

Abordaje:

Tomaremos algunos números de cuatro cifras para probar la afirmación

$$\begin{aligned} \frac{1221}{11} &= 111 \\ \frac{3553}{11} &= 323 \\ \frac{2002}{11} &= 182 \end{aligned}$$

Al elegir capicúas de cuatro cifras probamos la afirmación para algunos ejemplos particulares, ahora nos tomaremos el trabajo de probar esta misma afirmación para todo número capicúa de cuatro cifras.

Ataque:

Empezamos por buscar el número capicúa más pequeño de cuatro cifras e ir mirando de forma creciente. $1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, \ldots$

Luego aplicaremos la conjetura a estos números para comprobar su validez.

$$\begin{aligned}
\frac{1001}{11} &= 91 \\
\frac{1111}{11} &= 101 \\
\frac{1221}{11} &= 111 \\
\frac{1331}{11} &= 121
\end{aligned}$$

Con los anteriores resultados reforzamos la conjetura del ejercicio y además observamos que los capicúas crecen de 110 en 110, mientras que los cocientes lo hacen de 10 en 10. Ahora bien, si todos los números capicúas se pudieran obtener de sumar 110 a 1001, todos ellos tendrían un 1 como cifra de las unidades, pero en general no es cierto ya que 7557 es capicúa y tiene un 7 en la cifra de las unidades.

Veamos lo siguientes

Capicúas	1771	1881	1991	2002	2222	2332
Diferencias		110	11	110	110	110

De acuerdo a lo relacionado en la tabla podremos afirmar que: Los sucesivos capicúas difieren en 110 unidades excepto cuando cambian las cifras de los miles, en este caso la diferencia es 11 unidades. A manera de ejemplo:

Capicúas	2882	2992	3003	3883	3993	4004	4114
Diferencias	110	11	110	110	110	11	110

Si se toman más casos particulares, los resultados siguen de acuerdo con la conjetura inicial:

$$\begin{aligned}
\frac{2992}{11} &= 272 \\
\frac{3003}{11} &= 273 \\
\frac{3113}{11} &= 383 \\
\frac{3223}{11} &= 293
\end{aligned}$$

Extensión:

Luego de realizar la estructuración minuciosa de los números capicúas de cuatro cifras y de generalizar y analizar el comportamiento de los mismos, podremos establecer una generalización más fuerte para capicúas de cuatro cifras. Por lo tanto diremos que todo numero capicúa de cuatro cifras se puede escribir de la forma ABBA donde A y B son números naturales distintos o iguales. Tal número se puede expresar como:

$$\begin{aligned} ABBA &= 1000A + 100B + 10B + A \\ &= 1001A + 110B \\ &= 11 \times 91A + 11 \times 10B \\ &= 11(91A + 10B) \end{aligned}$$

A manera de ejemplo haremos $A = 4$ y $B = 3$

$$\begin{aligned} 4334 &= 11(91 \times 4 + 10 \times 3) \\ &= 11(364 + 30) \\ &= 11 \times 394 \\ &= 4334 \end{aligned}$$

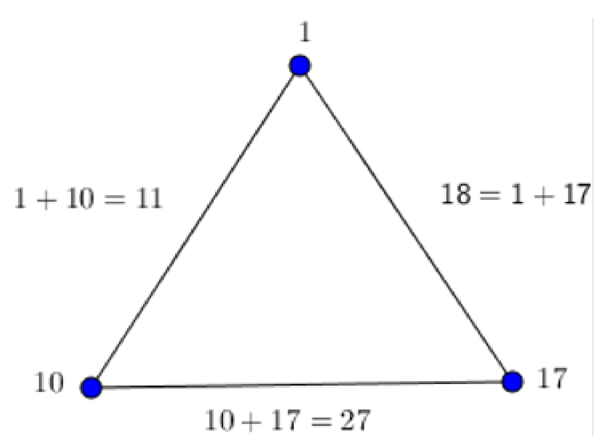
De igual manera hagamos $A = 2$ y $B = 7$

$$\begin{aligned} 2772 &= 11(91 \times 2 + 10 \times 4) \\ &= 11 \times 252 \\ &= 2772 \end{aligned}$$

Los polígonos aritméticos son arreglos de manera poligonal el cual consiste en asignar un valor a cada uno de los lados del polígono y mediante operaciones elementales se logre encontrar los números que posiblemente podrían estar en los vértices de la figura y que satisfacen las operaciones indicadas. Con este tipo de ejercicios se busca desarrollar el pensamiento lógico matemático de los estudiantes como también fortalecer los procesos que distinguen a cada una de las operaciones. El siguiente ejercicio fue tomado de los apuntes del profesor Msc Mauricio Penagos quien nos brinda sus aportes ante la solución del ejercicio a desarrollar.

7.4. Polígonos Aritméticos

Se asigna un número secreto a cada vértice de un triángulo. En cada lado se escribe la suma de los números secretos de sus extremos. Busca una regla sencilla para descubrir los números secretos. Por ejemplo, si los números secretos son 1, 10 y 17, se tiene



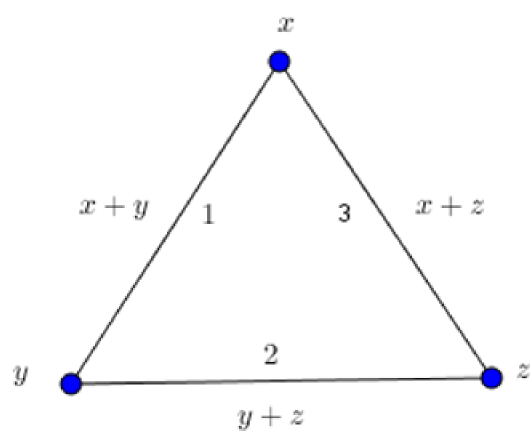
Generaliza a otros polígonos

Abordaje:

Una vez leído el enunciado se procedió a realizar varios ejemplos para asimilar el problema y buscar un método que permitiera encontrar fácilmente los números secretos y así generalizar. Este proceso tuvo lugar identificando semejanzas y diferencias entre los diferentes ejemplos y buscando establecer el máximo de relaciones posibles entre los números secretos y los lados de los triángulos. Se procedió luego a generalizar utilizando símbolos algebraicos.

Ataque:

En el caso de los triángulos, se procedió de la siguiente manera: supongamos que "los números secretos" de los vértices son x, y, z por lo tanto los valores de los lados $1,\ 2$ y 3 son $x+y,\ y+z$ y $x+z$



Sumando los lados 1 y 2 se obtiene:

$$(x+y)+(y+z)=2y+x+z$$

Así que

$$2y=(x+y)+(y+z)-(x+z) \tag{7.1}$$

Sumando ahora los lados 2 y 3 se obtiene:

$$(y+z)+(x+z)=2z+x+y$$

Y por tanto,

$$2z=(y+z)+(x+z)-(x+y) \tag{7.2}$$

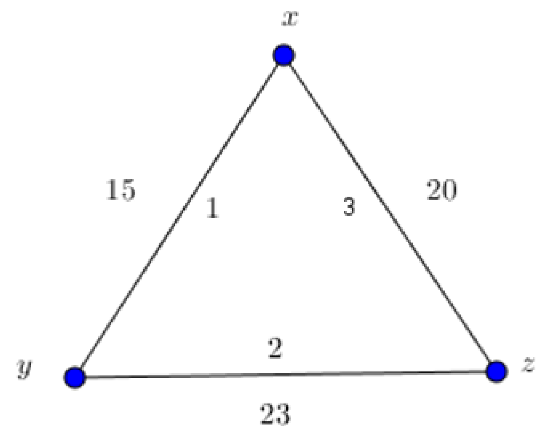
De la misma manera, sumando ahora 1 y 3 se obtiene:

$$(x+y)+(x+z)=2x+y+z$$

Luego,

$$2x = (x + y) + (x + z) - (y + z) \tag{7.3}$$

Al analizar las ecuaciones (7,1), (7,2) y (7,3), se tiene la siguiente regla: "el doble de cada número secreto es igual a la suma de los respectivos lados que forman el vértice en que este se ubica, menos el valor del lado opuesto". Este resultado es válido inclusive para números secretos negativos. Verificación de la regla propuesta:



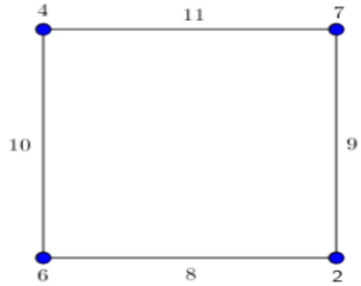
Solución.

$$\begin{aligned} 2x &= 15 + 20 - 23 = 12; \;\; x = 6 \\ 2y &= 15 + 23 - 20 = 18; \;\; y = 9 \\ 2z &= 23 + 20 - 15 = 28; \;\; z = 14 \end{aligned}$$

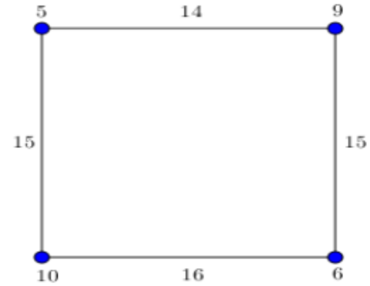
Note además lo siguiente: el número secreto de cada vértice más el valor del lado opuesto es una constante, que corresponde a la suma de los tres números secretos.

Así, $x + 23 = y + 20 = z + 15 = 29$. Esto significa que una vez conozcamos el valor de la constante o el valor de uno de los números secretos, fácilmente podemos conocer el valor de los otros a partir de sumas y restas elementales.

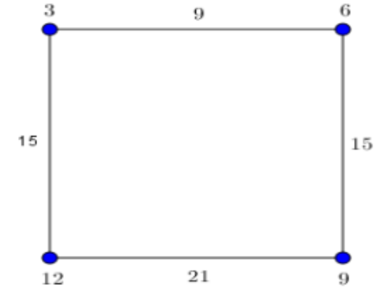
Cuadriláteros Aritméticos: Iniciamos analizando algunos casos particulares con el fin de llegar a una generalización



$\mathbf{10 + 9 = 11 + 8}$

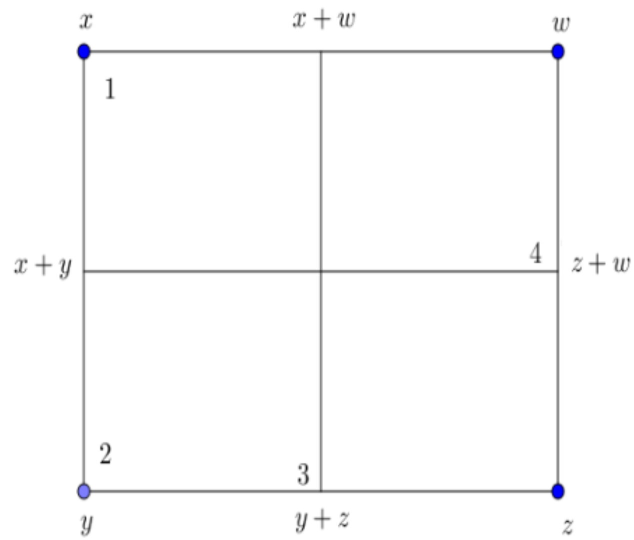


$15 + 15 = 14 + 16$



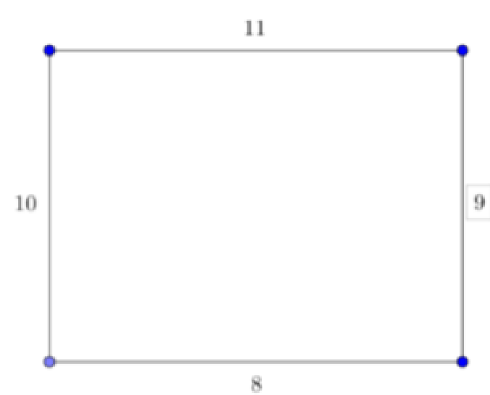
$15 + 15 = 9 + 21$

Notamos que al sumar el valor de los lados opuestos el resultado es constante que por supuesto, corresponde a la suma de los números secretos:

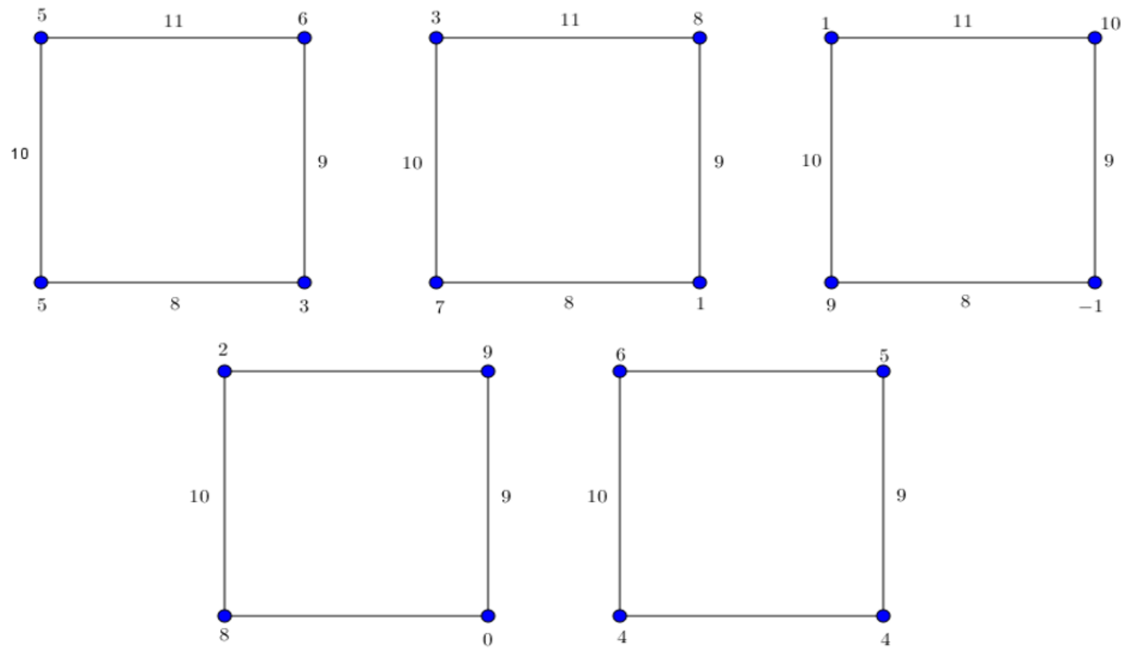


$$
\begin{aligned}
(1) + (3) : \quad (x + w) + (y + z) &= x + y + z + w = c \\
(2) + (4) : \quad (x + y) + (z + w) &= x + y + z + w = c
\end{aligned}
$$

Después de muchos ejemplos realizados en los cuales se aplicó la técnica de "ensayo y error" para tratar de encontrar una fórmula que permitiera encontrar los números secretos, se llegó a la conclusión que no es posible encontrar regla general para tal fin. En otras palabras, no se pudo hallar una solución única, pues se observó que había multitudes soluciones para cada cuadrilátero aritmético. Por ejemplo, al considerar el siguiente:

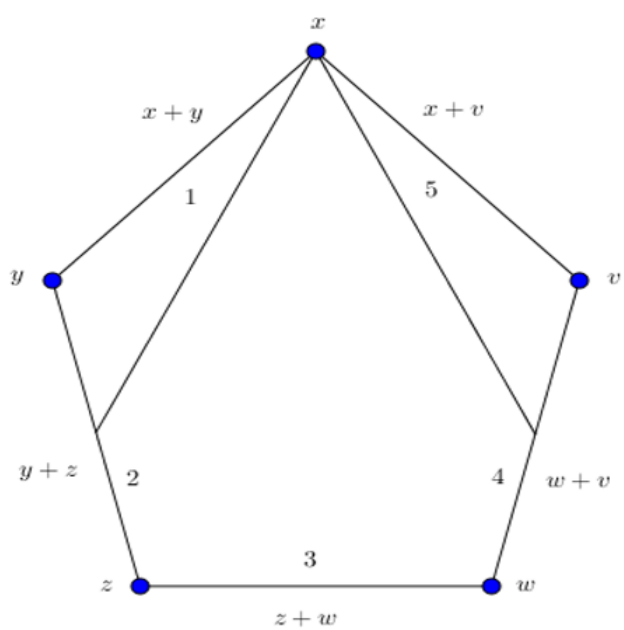


Tenemos las siguientes soluciones:



Note que inclusive el cero y los números negativos pueden ser números secretos.

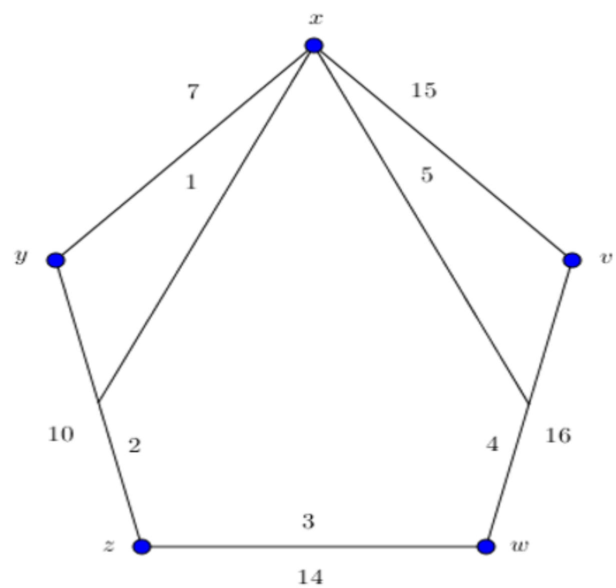
Extensión: Pentágonos Aritméticos



Como en los casos anteriores se hicieron varios ejemplos con el fin de buscar una técnica ágil que permitiera determinar los números secretos de los vértices. Se observó inicialmente la siguiente regla: "al escoger el número secreto de uno de los vértices y sumarle a este el valor numérico de los primeros lados no consecutivos, se obtiene una constante, digamos c, que es la suma de los cinco números secretos". En particular, escogiendo el número secreto x se obtiene:

$$x + (y + z) + (w + v) = c$$

Consideremos el siguiente pentágono aritmético:



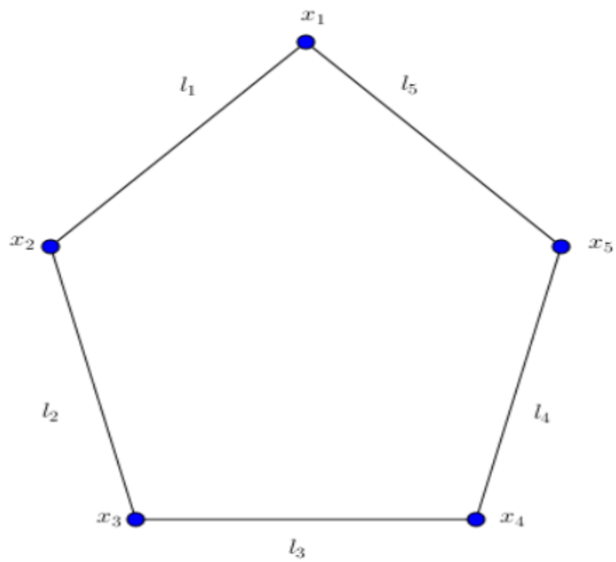
De acuerdo a la regla propuesta se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x + 10 + 16 = c &\;\rightarrow\; x + 26 = c && (7.4)\\
y + 15 + 14 = c &\;\rightarrow\; y + 29 = c && (7.5)\\
z + 7 + 16 = c &\;\rightarrow\; z + 21 = c && (7.6)\\
w + 10 + 15 = c &\;\rightarrow\; w + 25 = c && (7.7)\\
v + 14 + 7 &\;\rightarrow\; c + 21 = c && (7.8)
\end{aligned}
$$

De las ecuaciones (7,4) y (7,5), se sigue que $x = y + 3$, o sea, $x - y = 3$. Además, el valor del lado 1 es, $x + y = 7$. Combinando estas dos ecuaciones, encontramos que $2x = 10$. Luego, $x = 5$ y $y = 2$.

Observe que conocidos estos dos números secretos ya pueden encontrarse los otros tres números secretos. En efecto, del lado 2, $y + z = 10$, entonces $z = 8$. Para el lado 3, $z + w = 14$, así que $w = 5$. Finalmente, según el lado 5, $x + v = 15$, luego $v = 10$. Este último valor es idéntico al haber tomado el lado 4, $w + v = 16$ con $w = 6$, de lo que resulta $v = 10$.

Explorando se encontró también que dado el pentágono aritmético



$$
\begin{aligned}
2x_1 &= (L_1+L_5+L_3)-(L_2+L_4) &\rightarrow\quad x_1 &= \frac{(L_1+L_5+L_3)-(L_2+L_4)}{2}\\
2x_2 &= (L_1+L_2+L_4)-(L_5+L_3) &\rightarrow\quad x_2 &= \frac{(L_1+L_2+L_4)-(L_5+L_3)}{2}\\
2x_3 &= (L_2+L_3+L_5)-(L_1+L_4) &\rightarrow\quad x_3 &= \frac{(L_2+L_3+L_5)-(L_1+L_4))}{2}\\
2x_4 &= (L_3+L_4+L_1)-(L_2+L_5) &\rightarrow\quad x_4 &= \frac{(L_3+L_4+L_1)-(L_2+L_5)}{2}\\
2x_5 &= (L_4+L_5+L_2)-(L_1+L_3) &\rightarrow\quad x_5 &= \frac{(L_4+L_5+L_2)-(L_1+L_3)}{2}
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces la siguiente regla para el caso de un pentágono aritmético: "El doble del valor del número secreto de un vértice es igual a la suma de los lados qué forman dicho vértice más el lado no consecutivo a estos dos lados, menos la suma de los dos lados contiguos a los lados que forman el vértice en cuestión".

Este es un ejercicio que no es muy rutinario y que implica una definición contundente como lo es las clases residuales de un número. A partir de este criterio buscaremos una solución al ejercicio a proponer y que esperamos que para los estudiantes sea de mucho interés puesto que nuestro objetivo es hacer que él por su propia cuenta construya sus propias conjeturas. El siguiente ejercicio fue tomado de los apuntes del profesor Msc Mauricio Penagos quien nos brinda sus aportes ante la solución del ejercicio a desarrollar.

7.5. EL problema de los Huevos

A una señora que iba al mercado, se le preguntó cuantos huevos tenía. Ella contestó que tomados en grupos de 11, sobraban 5 y tomados en grupos de 23 sobraban 6. ¿Cuál es el menor número de huevos que podía tener? En otra ocasión respondió que tomados en grupos de $2, 3, 4, 5, 6$ y 7 sobraban $1, 2, 3, 4, 5$ y ninguno respectivamente.

Abordaje: El enunciado del problema es claro y por lo tanto su abordaje no es complicado. Es tratar de buscar en repartos el número que cumpla las condiciones residuales de cada caso en particular
Ataque: De acuerdo a la primera respuesta dada por la mujer, si llamamos N al número de huevos que llevaba tenemos lo siguiente:

i. $N = 11q_1 + 5$; con $q_1 \in \mathbb{Z}^+$

ii. $N = 23q_2 + 3$; con $q_2 \in \mathbb{Z}^+$

El número N es el mínimo común múltiplo de los dos conjuntos:

i. $11q_1 + 5$; con $q_1 \in \mathbb{Z}^+ = \{16, 27, 38, 49, 60, 71, 82, \ldots\}$

ii. $23q_2 + 3$; con $q_2 \in \mathbb{Z}^+ = \{26, 49, 72, 95, 118, 141, 164, 187, \ldots\}$

Es decir, $N = 49$. Luego, la mujer llevaba como mínimo 49 huevos. Note también que 302 es una solución ya que $302 = 11(27) + 5$ y $302 = 23(13) + 3$, pero el ejercicio pedía el número mínimo de huevos.

Al considerar ahora la segunda respuesta de la mujer, note que el número N de huevos que lleva ahora satisface:

$$N = 2q_2 + 1 = 3q_3 + 2 = 4q_4 + 3 = 5q_5 + 4 = 6q_6 + 5 = 7q_2$$

Luego una pista clara es que N es múltiplo de 7

Por otro lado, note lo siguiente:

$$N + 1 = 2(q_2 + 1) = 3(q_3 + 1) = 4(q_4 + 1) = 5(q_5 + 1) = 6(q_6 + 1)$$

Lo que significa que $N+1$ tiene como factores a los números $2, 3, 4, 5$ y 6 cuyo mínimo común múltiplo es 60. Luego $N + 1 = 60$, así que $N = 59$. Se sigue entonces que $59 = 2q_2 + 1$, así que $q_2 = 29$. También $59 = 3q_3 + 2$ y por tanto, $q_3 = 19$. Análogamente, se encuentra que $q_4 = 14, q_5 = 11, q_6 = 9$.

Sin embargo note que 59 no es múltiplo de 7, es decir, $59 \neq 7q$. Como 7 es primo relativo con $2, 3, 4, 5$ y 6, para que N sea también divisible por 7, necesariamente $N = 59 \times 7 = 413$. Este será el mínimo número de huevos que lleva ahora la señora.

7.6. Cuadrados del tablero de Ajedrez

Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez corriente tenía 204 cuadrados. ¿Puedes explicar esta afirmación?

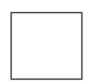
Abordaje:

Antes de empezar a contar los cuadrados, debo preguntarme ¿Qué es un cuadrado? ¿Cuál es su característica especial? Para no caer en la confusión de contar rectángulos. Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados cuyas medidas de sus lados son iguales, y ésta es precisamente su principal característica.

Así que, para empezar a contar dichos cuadrados, tengo en cuenta que las medidas de sus lados sean iguales, es decir, cuadrados de 1×1, 2×2, y así sucesivamente hasta encontrar los cuadrados de mayor medida en el tablero.

De manera un poco más general, al final encontraré cuadrados cuya medida sea nxn. Tomemos diferentes tableros de tal manera que sean más pequeños que el de ajedrez, así:

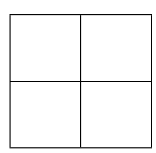
Si $n = 1$,entonces



Tenemos: 1 cuadrado de 1×1

En total 1 cuadrado

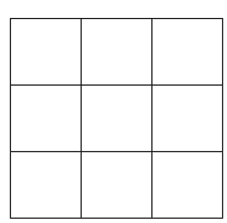
Si $n = 2$, entonces



Tenemos: 1 cuadrado de 2×2 y 4 de 1×1

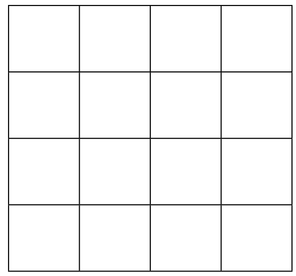
En total $1 + 4 = 5$

Si $n = 3$,entonces



Tenemos: 1 cuadrado de 3×3, 4 cuadrados 2×2 y 9 cuadrados 1×1

En total $1 + 4 + 9 = 14$
Si$n = 4$, entonces



Tenemos: 1 cuadrado 4×4, 4 cuadrados 3×3, 9 cuadrados 2×2 y 16 cuadrados 1×1

En total: $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

Con tableros más pequeños, vemos que se va obteniendo la suma de los n primeros números cuadrados.
Ataque:

Encontramos los primeros cuadrados que podemos contar, los más pequeños que aparecen en el tablero, formados por 1 de ancho por 1 de largo, de los cuales hay 8 filas y 8 columnas, por lo cual es fácil ver que hay 64 cuadrados de 1×1. Ahora bien, para empezar a contar cuadrados más grandes en el tablero, observo que éste puede llegar a tener cuadrados de 8×8.

Por lo anterior recuerdo que puedo contar los cuadrados de tableros de $n \times n$, teniendo en cuenta la suma de los n primeros números cuadrados. Ahora bien, el tablero corriente de ajedrez es de 8×8, por lo cual $n = 8$, entonces para hallar el total de cuadrados que hay en el tablero, sumo los 8 primeros números cuadrados, así:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$$

Luego, el total de cuadrados que hay en el tablero corriente de ajedrez es 204.

Extensión:

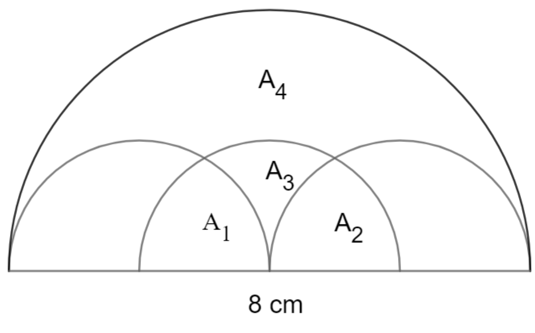
Por lo tanto, para hallar la cantidad de cuadrados en un tablero de $n \times n$, no hago más que la suma de los n primeros números cuadrados. Mediante un proceso matemático llamado inducción matemática, se demostró que la siguiente fórmula sirve para hallar dicha suma, sin importar que número sea n.

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, probemos que mediante la formula anterior, también podemos llegar a nuestro resultado.

$$S_8 = \frac{8(8+1)(2(8)+1)}{6} = \frac{8(9)(17)}{6} = 204$$

7.7. Circulos y Circunferencias



En la figura el radio de las 3 semicircunferencias pequeñas es 2cm; ¿Cuál es el área de la región A_4.?

Abordaje:

Para empezar tenemos que: $A_1 = A_2$
La suma de dichas áreas se calcula de la siguiente manera:

$A_1 + A_2 = A = (\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$ en este caso $r = 2cm$

$A = (\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})(2cm)^2 = (\frac{8\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{2})cm^2$

Ataque:

Ahora el área A_3, será el área de la semicircunferencia menos el área A que ya calculamos, esto es:

$A_3 = \frac{\pi(r^2)}{2} - (\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3})cm^2$

$A_3 = \frac{\pi(2cm)^2)}{2} - (\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3})cm^2 = (2\pi - \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3})cm^2 = (2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3})cm^2$

Extensión:

Ahora, al área de toda la semicircunferencia mayor, le restamos una circunferencia completa menor y el área A_3

$A_4 = \frac{1}{2}(16\pi)cm^2 - 4\pi cm^2 - (2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3})cm^2$

$A_4 = 4\pi cm^2 - 2\sqrt{3}cm^2 + \frac{2\pi}{3}cm^2$

$A_4 = \frac{14}{3}\pi cm^2 - 2\sqrt{3}cm^2$

$A_4 = 2(\frac{7\pi}{3} - \sqrt{3})cm^2$

En conclusión con el ejercicio el área de la región A_4 es $2(\frac{7\pi}{3} - \sqrt{3})cm^2$

La resolución y socialización de los anteriores problemas a través de cada uno de los métodos estudiados pone de manifiesto las diferentes actividades que podemos desarrollar en clase en relación a la resolución de problemas. Esperamos que esta sección sea de gran utilidad al lector y pueda ser tomada en consideración para la resolución de los problemas que se plantean a continuación.

CAPÍTULO 8

PROBLEMAS A RESOLVER

la presente sección está dedicada al lector interesado que desee probar suerte resolviendo los problemas listados enseguida utilizando la metodología propuesta por los investigadores en educación matemática John Mason. Leone Burton y Kaye Stacey

1. Toma dos números cualesquiera que sumen 1. Halla el cuadrado del mayor y súmale el menor. Halla el cuadrado del menor y súmale el mayor. ¿Cuál de estos dos resultados crees que va a ser mayor?

   Abordaje

   - Resuelve bastantes casos particulares hasta que llegues a una conjetura
   - Comprueba todos los cálculos con fracciones o decimales

   Ataque

   - Tienes que encontrar la manera de convencer a un amigo

   Extensión

   - Encuentra un par de operaciones similares para números que sumen S
   - Representa el problema en un diagrama rectangular
   - Busca un par de operaciones similares para dos números cuyo producto sea P

2. Un cajón cuadrado para transportar botellas de leche podía contener 36 de estas botellas. ¿Puedes colocar 14 botellas, de forma que en cada fila y en cada columna queden un número par de botellas?

   Abordaje

- Dibuja el cajón. Encuentra alguna forma de manipular con los sustitutos de las botellas
- Particulariza con cajones de otros tamaños
- ¿Cuántas botellas podría haber en cada fila y cada columna?

Ataque

- Puede que te ayude particularizar con cajones más grandes
- Al final, tendrás que volver a los cajones de 36 botellas, pero ¿Qué pasará con los cojones cuadrados en general?

Extensión

- Intenta colocar otro número de botellas
- ¿Cuál es el mayor o menor número de botellas que se puede colocar en esa forma en un cajón dado?
- ¿De cuantas formas se pueden colocar las botellas en el ejercicio?

3. ¿cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez?

   ¿Atascado?

   - ¿Qué es lo que quieres?
   - Inténtalo primero con un tablero pequeño (particulariza)
   - ¿Qué forma sistemática de contar los rectángulos será lo mejor?
   - Examina el método utilizado para contar los cuadrados en un tablero de ajedrez, y generaliza

4. Quería repartir 30 salchichas entre 18 personas, equitativamente. ¿Cuál es el mínimo número de cortes que tengo que hacer? ¿Cuál es el número mínimo de trozos que necesito hacer?

   Abordaje

   - Encuentra al menos una forma de hacerlo
   - ¿Es la mejor?

   Ataque

   - El problema particular es fácil de resolver. Generaliza
   - Relaciona el número de cortes con el número de salchichas y el número de personas
   - Intenta hallar un procedimiento para calcular el mínimo número de cortes

   Extensión

   - ¿Qué pasa si la gente no quiere que se les reparta equitativamente?

5. Coge cualquier número y halla todos sus divisores positivos. Calcula después el número de divisores de cada uno de estos divisores. Suma los números obtenidos y eleva al cuadrado el resultado. Compáralo con la suma de los cubos de los números de divisores de los divisores originales.

   Abordaje

   - Tómalo con calma, no es tan terrible como parece

   Ataque

   - Particulariza a números con pocos divisores, o con divisores sencillos.
   - Si tu conjetura es correcta para dos números, ¿será válida también para su producto?

6. Tengo en la cabeza un número tal que si cambias de posición el digito de las unidades y lo colocas al principio, da el mismo resultado que si multiplicas el número original por dos. ¿Te estoy diciendo la verdad?

   Abordaje

   - Asegúrate de qué es lo que SABES

   Ataque

   - Empieza donde sea. Haz una suposición
   - Escribe lo que estás haciendo para generar nuevos dígitos
   - Un dígito solo no es una buena solución

   Extensión

   - ¿Cuál es el menor número con esta propiedad?
   - Cambia el dos por otros números. ¿Debe haber un solo dígito? Compara los esquemas generales
   - Ahora cambia el primer dígito por la izquierda y ponlo en la posición de las unidades

7. Para verificar si un número es divisible por 11, suma los dígitos de las posiciones pares, contando desde la izquierda (el primero, el tercero...) y suma luego los dígitos que quedan. Si la diferencia de estos dos números es divisible por 11, también lo es el número original. En otro caso, no. ¿Por qué es válida esta regla?

   Abordaje

   - Asegúrate de los que SABES. ¿Has intentado algunos ejemplos sencillos para descifrar lo que te dicen?

   Ataque

   - Inténtalo expresando el número en potencias de diez

Extensión

- ¿Qué tiene el 11 de especial? ¿Puedes construir un test similar para otros valores?
- ¿Qué ocurriría si usaras otras bases en lugar de la base diez?

8. Coge un número de tres dígitos, invierte su orden, y resta el número menor del mayor. Dale la vuelta otra vez, y suma los resultados. Asi:

   123 se convierte en 321, y $321 - 123 = 189$
   198 se convierte en 891, y $891 + 198 = 1089$ ¿Qué ocurre? ¿Por qué?

   Abordaje

   - Utiliza una calculadora para particularizar
   - Haz una conjetura

   Ataque

   - Introduce algunos dibujos o símbolos

   Extensión

   - ¿Lo has intentado con números de cuatro o cinco dígitos?
   - Cambia la regla; simplemente da la vuelta a los dígitos y resta el menor del mayor, repitiéndolo una y otra vez

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

- A través de la implementación de la metodología de los investigadores en educación matemática John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey el estudiante de manera progresiva se familiarizará con el proceso de resolución de problemas y de acuerdo con el enfoque dado a cada uno de ellos permitirá el desarrollo del pensamiento aritmético.
- Se puede considerar que un problema es retador de acuerdo al grado de escolaridad del estudiante, La dificultad y estructura del mismo. Además, que cultive, interese y motive a encontrar su solución de manera analítica sin implementar un proceso algorítmico o procedimental.
- El estudio adecuado de la propuesta metodológica dará al docente interesado herramientas teóricas y prácticas para potenciar la resolución de problemas establecido en los estándares básicos de competencias en matemáticas y por ende mejorar los niveles de desempeño en las pruebas saber que establece el ICFES.
- Finalmente con la elaboración de este trabajo logramos adquirir un mayor conocimiento de cada uno de los métodos de resolución de problemas trabajados y que van a ser de gran utilidad en nuestra labor como docentes.

CAPÍTULO 10

BIBLIOGRAFÍA

[1] MASSON, J. BURTON, L. Y STACE, K. (1988). *Pensar matemáticamente* Madrid: ministerio de educación y ciencia

[2] POLYA, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.*

[3] SCHOENFELD, A. H. (1985). *Resolución de problemas matemáticos* California: Universidad de California

[4] BISHOP, E. (1975). *Crisis en la matemática contemporánea:historia de la matemática.* Traducción de Javier de Lorenzo.

[5] MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Colombia: Imprenta Nacional de Colombia

[6] AGUDELO VALENCIA, G. B. BEDOYA QUINTERO, V. RESTREPO MORALES, A. M. (2008). *Método Heurístico en la Resolución de Problemas Matemáticos* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

[7] CUADRADO PERAZA, M (2015). *El aprendizaje del pensamiento aleatorio y sistema de datos por medio de actividades del contexto de los estudiantes* Neiva: Universidad Surcolombiana.

[8] MEJÍA VIAFARA, A. C. LOANGO NÚÑEZ, M. (2014). *Resolución de Problemas Matemáticos para fortalecer el pensamiento numérico en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Adventista del Municipio de Puerto Tejada Cauca.* Manizales: Universidad Católica de Manizales.

[9] YÁNEZ BOLÍVAR, T. M (2010). *Efectos de la Resolución de Problemas Mediado por el Weblog sobre el rendimiento en matemáticas.* Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

[10] Escalante Martínez, S. B. (2015). *Método Polya en la Resolución de Problemas Matemáticos. Departamento Huehuetenango.* Guatemala: Universidad Rafael Landívar Municipio La Democracia

[11] Charnay, R. (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* Barcelona: Paidos.