Neiva, Septiembre 19 del 2016

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritas:

Yudy Andrea Niño Quintero, con C.C. No. 1077858661 y William Andres Avila Leyva, con C.C. No. 1075262196, autores del trabajo de grado titulado Figuras de Ancho Constante: Construcciones desde un entorno dinámico, presentado y aprobado en el año 2016 como requisito para optar al título de Licenciados en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

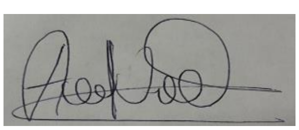
□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

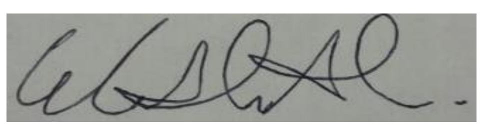
• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Figuras de Ancho Constante: Construcciones desde un entorno dinámico.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Niño Quintero	Yudy Andrea
Avila Leyva	William Andrés

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando
Penagos	Mauricio

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2016 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 94

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías_X_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general _**X**_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Triángulo	Triangle	**6.** Construcción	Construction
2. Circunferencia	Circumference	**7.** Propiedades	Properties
3. Polígono	Polygon	**8.** Área	Area
4. Geometría	Geometry	**9.** Perimetro	Perimeter
5. Constante	Constant	**10.** Secuencia	Sequence

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Las figuras de ancho constante están relacionadas con la geometría, porque en ellas se pueden visualizar las cuatro dimensiones principales la dimensión biológica, la dimensión física, la dimensión aplicada y la teórica. Mediante
El trabajo de grado, se describió el método de construcción de algunas figuras de ancho constante a partir de la intersección de circunferencias; tales construcciones son producto de un estudio de las propiedades de las figuras con esta característica.

El trabajo presenta un marco teórico que resume parte de la historia del surgimiento de las figuras de ancho constante y de forma breve algunos de sus usos en temas matemáticos.

Una sección sobresaliente del trabajo presenta las construcciones de los polígonos referenciados y se ilustra el procedimiento con ayudas visuales que facilita la comprensión al lector. Se dedica una unidad para la exposición en físico de las figuras de ancho constante mostrando sus aplicaciones en la arquitectura, la industria, el arte, la cinemática, entre otras áreas.

También se dedica una sección de procedimientos y proyecto de clase para argumentar una secuencia didáctica que facilite la enseñanza de este tipo de figuras en el aula de clases.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Figures constant width are related to geometry, because they can display the four major dimensions biological dimension, the physical dimension, the dimension and the theoretical applied. Through
Degree work, the method of construction of some figures described constant width from the intersection of circles; such constructions are the result of a study of the properties of figures with this feature.

The paper presents a theoretical framework that summarizes some of the history of the emergence of figures of constant width and briefly some of its uses in mathematical topics.

An outstanding section of the paper presents the construction of the referenced polygons and the procedure is illustrated with visual aids to facilitate the reader's understanding. a unit for physical exposure in the figures of constant width showing their applications in architecture, industry, art, kinematics, among other areas dedicated.

a section of procedures and class project is also dedicated to argue a didactic sequence to facilitate the teaching of such figures in the classroom.

APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Johnny Fernando Alvis Puentes

Firma: Johnny Fernando Alvis P

Nombre Jurado: Mauricio Penagos:

Firma: MAURICIO PENAGOS

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Figuras de Ancho Constante: Construcciones desde un entorno dinámico.

Yudy Andrea Niño Quintero
William Andres Avila Leyva

Neiva, Huila
2016

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Figuras de Ancho Constante: Construcciones desde un entorno dinámico.

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Yudy Andrea Niño Quintero
2010192450
William Andres Avila Leyva
2010194097

Asesor:
Magister Johnny Fernando Alvis P.

Neiva, Huila
2016

Jefe de Programa

MSc. Mauricio Penagos.

Asesor

Magister Johnny Fernando Alvis P.

Segundo Lector

MSc. Mauricio Penagos.

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Septiembre de 2016.

AGRADECIMIENTOS

En este apartado queremos expresar nuestros sinceros agradecimientos a quienes hicieron posible el cumplimiento de una meta y más que eso diríamos de un sueño.

En primera instancia agradecer a Dios, por la oportunidad de vida, porque solo así es posible desarrollar ideales. A nuestros padres por su apoyo incondicional durante todo el proyecto educativo que incluye los primeros indicios escolares.

A nuestros compañeros de clase que fueron los aliados en este proceso de aprendizaje, por orientarnos y apoyarnos aun cuando nosotros no lo creyéramos posible.

Por sus conocimientos, paciencia y tolerancia a nuestros maestros, personas dignas de admirar que nos realizaron como profesionales, con sus continuos aportes no solo académicos sino integrales. De manera especial queremos agradecer al profesor Johnny Fernando Alvis P. nuestro asesor de trabajo de grado, por su paciencia y dedicación que a partir de su experiencia siempre nos brindó oportunas instrucciones, también al profesor Mauricio Penagos quien fuese el artífice de la idea de investigación.

De manera específica en esta frase habrá solo una coautora; quiero agradecer a mi esposo por ser mí centro de gravedad e inspiración, a mis dos pequeños hijos por ser mi mayor motivación quienes dieron finalmente dirección a mi existencia.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Solo basta con mirar alrededor para notar que la geometría se encuentra implícita en la naturaleza y es esta última quien ha inspirado a los seres humanos para crear distintas formas y figuras geométricas que además de embellecer facilitan su diario vivir. Es precisamente lo que impulsó a la realización del presente trabajo de grado, en el que se pretende describir el método de construcción de algunas figuras de ancho constante a partir de la intersección de circunferencias; tales construcciones son producto de un estudio de las propiedades de las figuras con esta característica.

Se incluye un marco teórico que resume parte de la historia del surgimiento de las figuras de ancho constante y de forma breve algunos de sus usos en temas matemáticos.

Se dedica el capítulo 3 para las construcciones de los polígonos referenciados y se ilustra el procedimiento con ayudas visuales que facilitará la comprensión al lector. En el capítulo 4 se expone el uso en físico de las figuras de ancho constante mostrando sus aplicaciones en la arquitectura, la industria, el arte, la cinemateca, entre otras áreas.
También en el capítulo 5 se dedica una sección de procedimientos y proyecto de clase para argumentar una secuencia didáctica que facilite la enseñanza de este tipo de figuras en el aula de clases.

Al final del trabajo se incorpora en la sección de anexos algunos ejercicios prácticos a modo de aplicación matemática sobre tales polígonos.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Antecedentes

Si se tuviera que asignar a qué parte de las matemáticas pertenecen las figuras de anchura constante, podemos expresar que en la mayoría de los artículos y consultas sobre el tema apuntan a la matemática recreativa.

Gracias a Jacob Steiner se ha popularizado gradualmente el triángulo de Reuleaux. Una de sus formas de construcción es la siguiente: a partir de un triángulo equilátero de lado L al trazar con un compas desde cada uno de los vertices una circunferencia de radio L que pase por sus dos vértices opuestos; la figura que se obtiene producto de la intersección de tres circunferencias iguales cuyos centros forman un triángulo equilátero, es el llamado triángulo de Reuleaux.

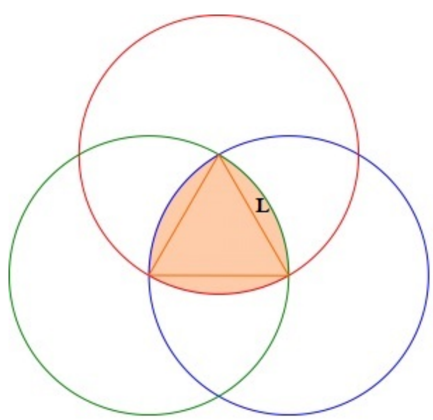


Figura 1.1: Triángulo de Reuleaux a partir de la intersección de tres circunferencias.

Para Franz Reuleaux, dicho triángulo representa el extremo de un mecanismo de anchura constante que podría girar en un soporte cuadrado. Dado que en su época los mecanismos geométricos eran de gran interés pues para muchos la apariencia especulativa (mecanismo para trazar líneas rectas) facilitaban crear aplicaciones importantes (convertir movimiento rectilíneo en circular). Algo que debió hacerse con el “vapor ”de las máquinas de vapor o con las máquinas de coser.

Para los matemáticos quienes olvidaron el mecanismo original del triángulo de Reuleaux, éste pasó a ser una representación sobre el que los geómetras encontraron grandes posibilidades imaginativas, pues su anchura constante le permitía rodar dentro de un cuadrado o entre paralelas tocando en todo momento un punto de una y un punto de otra. El perímetro es πL como todas las curvas de anchura constante L. Al considerar todas las posibles figuras de anchura constante L, resulta que el triángulo de Reuleaux es la figura que tiene menor área.

Actualmente el triángulo de Reuleaux es una figura universal que aparece en cientos de páginas web de matemáticas y se popularizo cuando se aplicó en los taladros gracias al ingeniero británico Harry james Watt quien patentó una broca con forma de triángulo de Reuleaux que va montada en un dispositivo especial que hace que gire un tanto excéntricamente y así puede taladrar un agujero con una forma casi exactamente cuadrada, porque deja en las esquinas cuatro pequeñas áreas sin cubrir que suman $1,33\,\%$ del área total del cuadrado. Anteriormente se tenían taladros helicoidales que generaban agujeros redondos; pero con un triángulo de Reuleaux cortante, resultan agujeros cuadrados que asisten bien maderas cuadradas en muebles y distintos tipos de motores de gasolina.

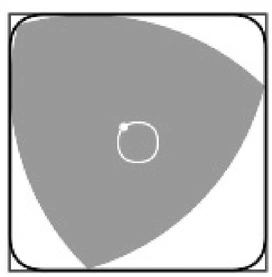


Figura 1.2: Plano base de la perforación de la broca del Ingeniero Watt

Generalizando un poco en torno al tema de las figuras de ancho constante existen en diversos artículos sobre algunas construcciones auxiliares del triángulo de Reuleaux que permiten obtener nuevas figuras de ancho constante, que dependerán del número de lados de los polígonos utilizados inicialmente. Para estas figuras el ancho sigue siendo igual a la longitud del diámetro del polígono y las construcciones se fundamentan en el trazo de nuevas circunferencias con radio igual a la longitud del diámetro del polígono y centro en los puntos de intersección de las circunferencias y vértices del polígono.

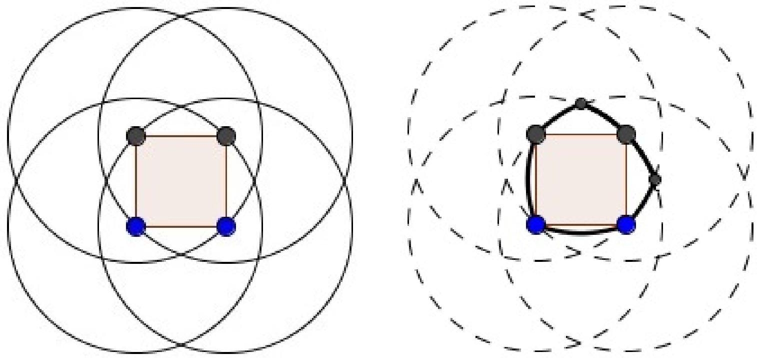


Figura 1.3: Figura de ancho constante a partir de un cuadrado.

La anterior ilustración muestra la construcción de una figura de ancho constante que se obtiene a partir del cuadrado, realizada en el programa Cabri Geometry II Plus para un artículo sobre *figuras de ancho constante: un tema por explorar por Óscar Javier Molina Jaime, Leidi Cristina Gil Fuentes y Martha Helena Orjuela Gómez.*

Al indagar sobre la historia de las curvas de ancho constante se logró establecer otra figura de ancho constante llamada "curva de ancho constante de Euler". Montejano (1998) afirma que esta curva surge de la hipocicloide de Steiner (aquella que se obtiene como la órbita de un punto de un círculo de radio r mientras rueda dentro de un círculo de radio 3r y su evoluta).

Para poder construir la curva de ancho constante, es necesario construir primero la hipocicloide de Steiner, que se realiza partiendo de una circunferencia de radio r y un punto sobre ella, de la transferencia de la medida de arcos y la medida de la tercera parte del radio de la circunferencia y encontrando un lugar geométrico.

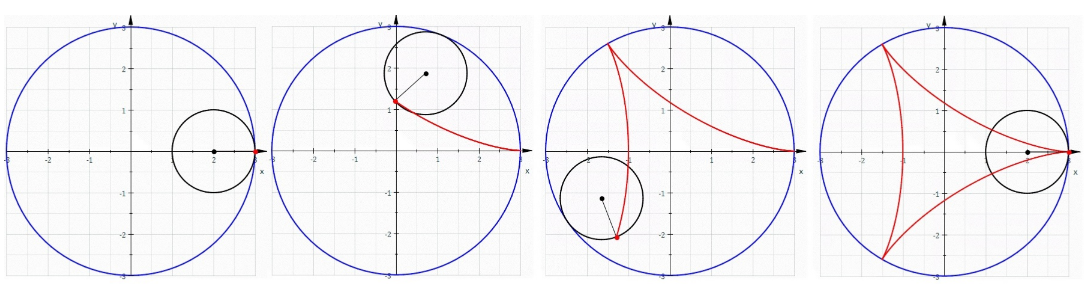


Figura 1.4: hipocicloide de Steiner a partir del circulo.

Para construir luego la curva de Euler, se construye la evoluta de dicha hipocicloide de Steiner, a partir del lugar geométrico de todas las rectas normales a la hipocicloide.

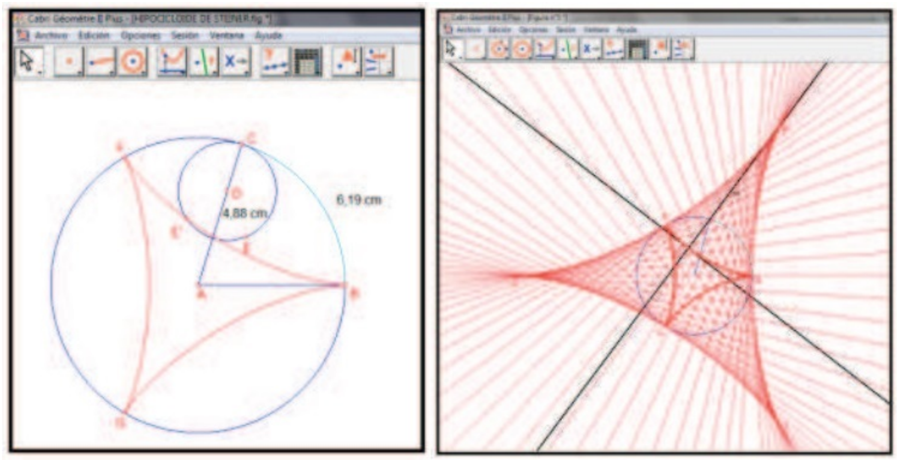


Figura 1.5: Curva de ancho constante a partir de Hipocicloide de Steiner

Teniendo la hipocicloide de Steiner y así realizando algunas construcciones auxiliares, rectas, circunferencias, puntos de intersección, lugares geométricos, es posible construir la curva de ancho constante de Euler.

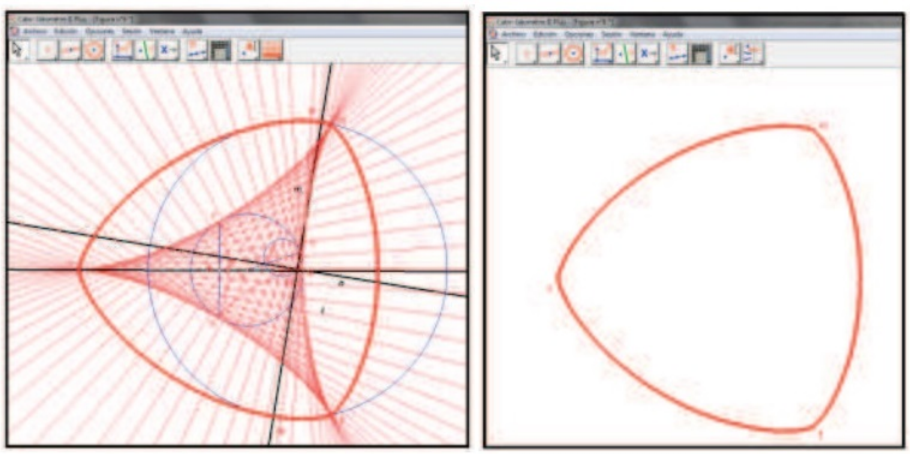


Figura 1.6: Triángulo de Reuleaux a partir de Hipocicloide de Steiner

También es posible a partir de figuras de ancho constante ya obtenidas construir otras figuras de ancho constante. El método propuesto por Rademacher y Töeplitz en (1990) consiste en redondear las puntas de las figuras de ancho constante obtenidas anteriormente, mediante el uso de arcos de circunferencia; de esta manera se obtiene figuras de ancho constante sin puntas.

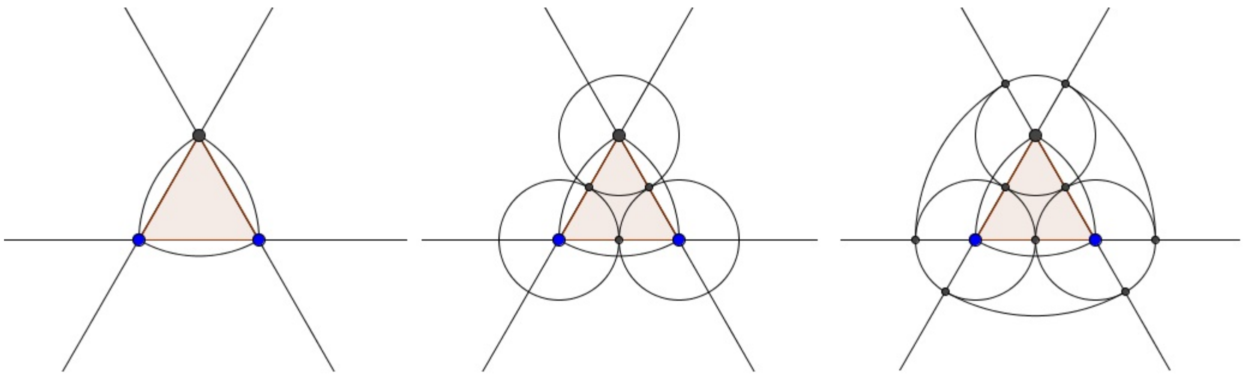


Figura 1.7: Puntas redondeadas del triángulo de Reuleaux.

En el articulo *figuras de ancho constante: un tema por explorar por Óscar Javier Molina Jaime, Leidi Cristina Gil Fuentes y Martha Helena Orjuela Gómez.* se desarrollan figuras de ancho constante a partir de una figura convexa. Finalmente, el último método expuesto fue encontrado a partir de la construcción de una figura convexa; está construcción también estuvo basada en el trabajo de Rademacher y Töeplitz, quienes parten de la construcción de una curva ACB con las siguientes características: está contenida entre las rectas paralelas l y m salvo en los puntos A y B. La curva ACB junto con $(\overline{AB})$ forman una región convexa y por cada punto T que pertenezca a la curva ACB existe un círculo de radio AB tangente a la recta soporte de la curva ACB por T que contenga la curva ACB y se construye el lugar geométrico, generado por las circunferencias que tienen como centro los vértices de la curva con características especiales, y como radio la medida del segmento que contiene dicha curva.

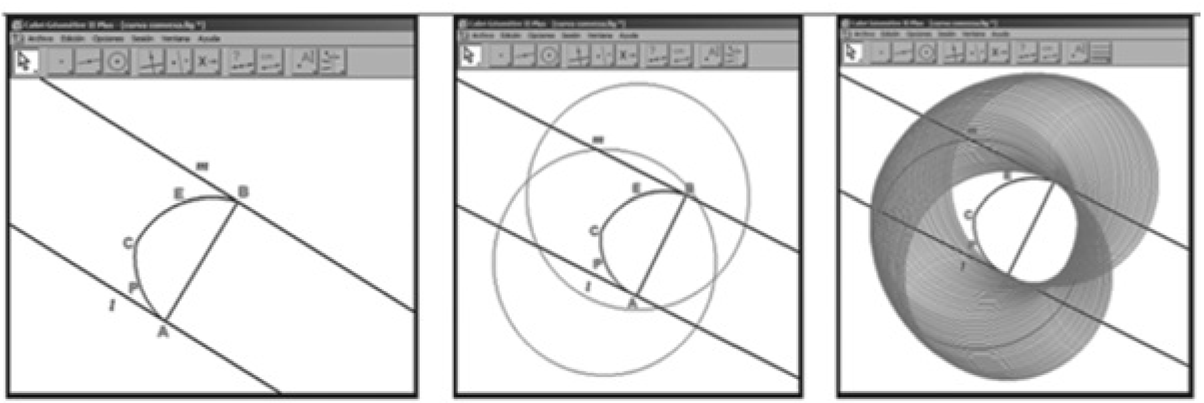


Figura 1.8: Figura de ancho constante a partir de una figura convexa.

Una aplicación más de las figuras de ancho constante es la construcción de las "curvas de Zindler"particularmente, en la división del área y el perímetro de las figuras a la mitad, se pueden construir a partir de las figuras de ancho constante. Se requiere tomar la figura de ancho constante ϕ por ejemplo y, como en cada dirección existe un diámetro, se construye un segmento perpendicular y congruente a cada diámetro de tal manera que estos se bisequen. A medida que los diámetros de ϕ vayan tomando todas las direcciones, los extremos del segmento perpendicular al diámetro describen la frontera de una curva de Zindler (Montejano, 1998).

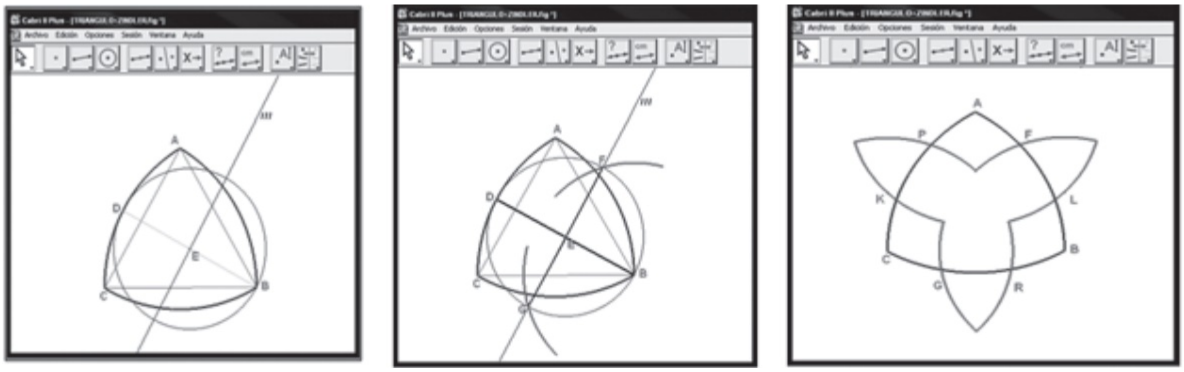


Figura 1.9: Figuras de ancho constante a partir de Curva de Zindler

Realizada una síntesis sobre los estudios que ya han sido realizados sobre el tema de las figuras de ancho constante, podemos hacernos preguntas como la siguiente: ¿Los cuerpos de ancho constante cumplen las mismas propiedades que los polígonos de ancho constante? ¿Se pueden obtener dichos sólidos si se revolucionan los polígonos de ancho constante? ¿Se pueden construir figuras de ancho constante con base en poliedros regulares? ¿Qué otra aplicación matemática presentan las figuras de ancho constante?.

A partir de la afirmación *"el conocimiento es infinito"*, contextualizándonos en el tema de las figuras y curvas de ancho constante, que algunos catalogan que hace parte de la matemática recreativa, creemos que existe un universo entero por ser descubierto y analizado desde la didáctica, y en general, desde la educación.

1.2. Formulación del Problema

El siguiente tema de investigación está relacionado con el campo de la geometría que es una rama de las matemáticas que se ha destacado por su gran utilidad para la humanidad. Al referirnos a la geometría es posible decir que es un área multifacética ya que todo concepto se logra inferir desde cuatro dimensiones sobresalientes:

- La dimensión biológica que se relaciona con la habilidad humana para el sentido espacial, la percepción y visualización.
- La dimensión física donde se examina las propiedades espaciales de los objetos físicos con sus representaciones frente al espacio.
- La dimensión aplicada donde es usada como herramienta para la representación e interpretación de otras áreas del conocimiento.
- La dimensión teórica que se constituye por esa colección de teorías rigurosas y abstractas en las que se fundamentan los conceptos geométricos.

Como educadores tenemos una tarea pendiente que consiste en aplicar aquellos conceptos abstractos que forman parte de la teoría, a la dimensión aplicada de la realidad que nos circunda, tomando como fundamento aspectos matemáticos que están pasando desapercibidos; de esta manera es posible ver la matemática no solo como una disciplina formal sino a la vez como una actividad humana.

A partir de algunas propiedades de figuras geométricas planas como lo son los triángulos, cuadriláteros, polígonos, y circunferencia, también en algunos cuerpos sólidos como las esferas, cilindros y poliedros, dando un trato especial a las circunferencias y esferas por ser figuras de ancho constante, el MEN (Ministerio de Educación Nacional) señala la necesidad de investigar y buscar nuevos horizontes en la enseñanza de la geometría.

Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico; sin embargo la enseñanza de esta disciplina se ve afectada por ciertas problemáticas como que en la mayoría de las instituciones educativas, la enseñanza de la geometría de una manera tradicional, caracterizada por la clase magistral, en la cual el discurso del profesor es el principal medio didáctico. Otro factor en común es la enseñanza basada en lápiz, papel y el tablero que no ofrece al estudiante mayores posibilidades de aprendizaje. El estudiante un producto final ya terminado, lo cual no da lugar a que él tome un papel activo en el desarrollo de su conocimiento matemático.

Por otro lado, la clase no propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo en el estudiante. Todo lo anterior nos lleva a inquietarnos en un tema en particular como es la construcción de figuras de ancho constante; específicamente polígonos de Reuleaux y particularmente en el Triangulo de Reuleaux.

Una pregunta interesante que surge es ¿para qué se necesitan figuras de ancho constante?. Antes de responder esto deberíamos recordar el concepto de lo que significa una figura de ancho constante. Por ejemplo si tenemos dos vigas paralelas a una distancia D, podemos colocar entre ellas, en cualquier posición un circulo de diámetro D y siempre tocará dichas paralelas en dos puntos, lo que no sucede si se coloca un cuadrado de lado D en cualquier posición. Este hecho conlleva a otra pregunta ¿hay otras figuras diferentes al círculo también de ancho constante que siempre son tangentes tales rectas en dos puntos?

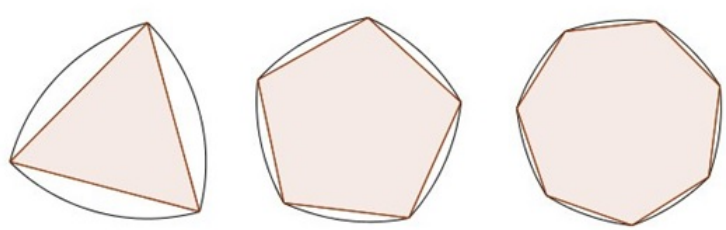


Figura 1.10: Polígonos de Reuleaux (lados impares)

Con la literatura matemática tradicional, seguro la respuesta es no, pero parece que aquí precisamente hay una información que se nos está pasando por alto, porque de hecho si hay y suficiente. El ejemplo representativo que es posible de tratar es el triángulo de Reuleaux construido en la figura 1.1. Ademas existen otros polígonos de Reuleaux también construidos por la intersección de arcos circulares. Además es posible que a partir de polígonos conocidos, enfocándose en los que tienen lados impares,construir otros polígonos curvos de anchura constante.

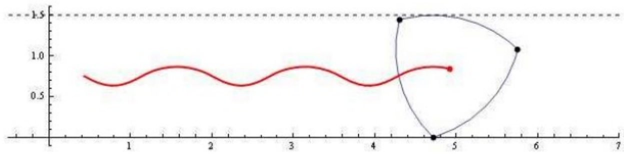


Figura 1.11: Tratectoria y rastro del centro del triángulo de Reuleaux

Retomando la pregunta inicial que nos planteamos ¿Para qué es importante estudiar polígonos de anchura constante? , podemos pensar en lo siguiente, si nuestra intención va más allá de usar la dimensión teórica de la geometría y observar también la dimensión física de esta, podríamos construir en el plano polígonos de ancho constante diferentes a las ya conocidas y visualizarlas como objetos reales que forman parte del entorno que nos rodea y útiles para la actividad humana. Desde este punto de vista surge la necesidad de empezar a irrumpir en temas que tienen un amplio campo de trabajo dentro de la geometría y de lo importante e interesante que puede llegar a ser su enseñanza. Con base a esta reflexión se ha formulado la siguiente pregunta de investigación:

¿Se puede construir figuras de ancho constante diferentes a las usualmente conocidas, cuyas propiedades se estudien y apliquen en contextos de la enseñanza de la matemática y con innumerables aplicaciones a la realidad ?

1.3. Objetivos

Objetivo General

- Construir algunas figuras geométricas de ancho constante no convencionales, exponiendo su utilidad y algunas de sus propiedades geométricas más importantes.

Objetivos Específicos

- Presentar el procedimiento geométrico de construcción con regla y compás de algunas figuras de ancho constante y también en un entorno de geometría dinámica.

- Facilitar la visualización, permitiendo la exploración experimental y la modificación continua de las construcciones de nuevas figuras geométricas.

- Mostrar las aplicaciones que han tenido las figuras de ancho constante en la ingeniería, en la mecánica, la arquitectura y en las formas de algunos objetos, producto de sus propiedades.

- Diseñar y validar empíricamente una secuencia didáctica que permita la comprensión de las figuras de ancho constante no convencionales en estudiantes de grado décimo .

1.4. Justificación

"Una investigación puede definirse como un esfuerzo que se emprende para resolver un problema, claro está, un problema de conocimiento."(Sabino, 1992, p.45).

Desde el momento que reconocemos que tenemos uso de razón, empezamos a indagar sobre el mundo que nos rodea, característica que se despierta desde la niñez. Por otro lado la habilidad para ser investigadores es innata y con ella se busca ampliar conceptos e ideas sobre lo que se observa y con lo que se interactúa; este sencillo ejercicio nos permite extender nuestro conocimiento sobre el mundo.

Para muchos científicos e investigadores los problemas y necesidades de la humanidad han sido resueltos apoyándose en teorías matemáticas que han trascendido de su parte abstracta a su utilización física, práctica. La geometría es una de sus ramas con variedad de aplicaciones para las actividades humanas particularmente en la creación de objetos y edificaciones de formas sorprendentes; esto hace que sea necesario desde los inicios de la formación escolar en el área de la geometría se empiece por la identificación y construcción de figuras como estrategia metodológica para la enseñanza de esta área, dado a que en el proceso de adelantar trazos para figuras más complejas y con nuevas propiedades se fortalecen las bases de la teoría inicial, y se avanza en la formulación de nuevos conocimientos.

Generar nuevos aportes será un elemento importante en este trabajo investigativo, pues permitirá que a partir de los conocimientos básicos sobre la geometría plana euclidiana, se puedan plantear conjeturas, en este caso específicamente, relacionadas con la validez de construir figuras de ancho constante distintas al círculo, partiendo de polígonos regulares con un número impar de lados, teniendo como base el procedimiento expuesto para la construcción del triángulo de Reuleaux y de su definición.

La realización de esta investigación servira como base para el estudio de la geometría por cuanto se introducen opciones temáticas diferentes, pero muy prácticas, con cierto nivel de complejidad, al alcance de docentes y estudiantes que permiten visualizar la riqueza del conocimiento.

Sobre el tema en cuestión, se pretende mostrar que la característica de ciertas figuras llamadas polígonos de Reuleaux de ancho constante da lugar a nuevas propiedades acopladas desde la geometría a ciencias como la ingeniería, arquitectura y otras áreas del conocimiento humano, que en el desarrollo del presente trabajo se evidenciarán.

Como no es tema que este muy documentado, es posible expresar que es considerable el recorrido por hacer, y la puerta está abierta, como lo dijo Marcel Proust ' '*El único viaje verdadero hacia el descubrimiento no consiste en la búsqueda de nuevos paisajes, sino en mirar con nuevos ojos*", y deseamos que esta sea la introducción para empezar un viaje hacia las figuras de ancho constante.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se incorpora la parte formal de las figuras de ancho constante, asi como sus fundamentos; a la vez el concepto de secuencia didáctica que será de ayuda para evidenciar cada uno de los objetivos propuestos.

2.1. Un Poco de Historia

Para conocer los indicios de las figuras de ancho constante, es imprescindible hablar en primer lugar sobre el ingeniero mecánico que influyó en el desarrollo de estas.

Franz Reuleaux (30 de septiembre de 1829 – 20 de agosto de 1905), fue un ingeniero mecánico alemán, miembro de la Berlin Royal Technical Academy, de la que llegaría a ser presidente. A menudo se le considera el padre de la cinemática; fue uno de los líderes en su profesión y contribuyó en diferentes áreas de la ciencia y el conocimiento técnico.

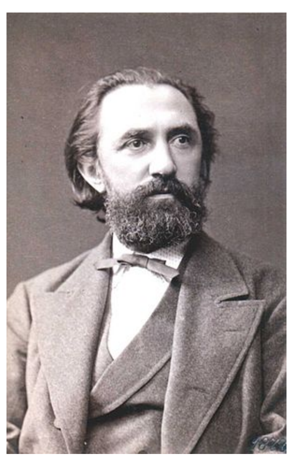


Figura 2.1: Franz Reuleaux en una fotografía de 1877.

Infancia y juventud

Franz Reuleaux nació en Eschweiler (Alemania), por aquel entonces una población del reino de Prusia. Su padre y abuelo fueron constructores de maquinaria y, desde pequeño, tuvo relación con ese mundo. Realizó unos años de entrenamiento técnico en la Universidad de Karlsruhe, tras lo cual fue a estudiar en las universidades de Berlín y Bonn.

Madurez

Tras un tiempo en el negocio familiar, Reuleaux se convirtió en profesor de la ETH (Escuela Politécnica Federal de Zúrich en alemán Eidgenössische Technische Hochschule Zürich). Compaginando este empleo, en 1879 se convirtió en rector de la Königs Technischen Hochschule Berlín - Charlottenburg, que era un instituto técnico superior con una plantilla de unos 300 docentes. Llegó a ser un reconocido en sus facetas de ingeniero-científico, profesor, consultor en temas industriales, reformador de la enseñanza y líder de la elite técnica alemana.

Reuleaux fue designado jefe del jurado alemán para la Sexta Feria Mundial de la Industria, que fue inaugurada en la ciudad estadounidense de Filadelfia el 10 de mayo de 1876. Admitió que las manufacturas alemanas eran bastante inferiores a las de otros países participantes y que el principio que regía la industria alemana era el de "barato y horroroso". Esta opinión conmocionó a la industria germana y provocó numerosos comentarios en la prensa.

Cinemática

Reuleaux pensaba que las máquinas podían ser reducidas a cadenas de elementos limitados en sus movimientos por componentes adyacentes de la cadena cinemática. Así, desarrolló un complejo método de notación simbólica para describir la topología de una gran variedad de mecanismos, mostrando cómo podría ser usada para clasificarlos e incluso para inventar nuevos mecanismos. Becado por el gobierno alemán, dirigió el diseño y construcción de unas 300 piezas de mecanismo simples como el Mecanismo de cuatro barras o la Manivela. Estos modelos fueron vendidos a universidades con propósitos pedagógicos. Actualmente, el set más completo de esta serie se encuentra en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Cornell (Nueva York).

Pero muchos siglos antes de Reuleaux, estas figuras habían sido bien conocidas y utilizadas en las construcciones arquitectónicas por su elegancia de formas y por sus simples trazado con regla y compás. Como por ejemplo dos arcos del triángulo forman el típico arco gótico y pueden apreciarse en las catedrales medievales que exhiben, junto a estos arcos, ventanales y adornos petrificados con forma de "triángulo de Reuleaux ".

Figura 2.2: Vitral de la iglesia central de Notre Dame

Si notamos la alta simetría de la circunferencia que es figura de ancho constante más popular, podemos creer que tal vez en sus inicios fue usada como rodillo pues al trasladarse, esta no presenta sobresaltos en su movimiento; pero no es necesario que todos los rodillos sean circulares, solo basta con que cumplan con la condición de tener anchura constante, un ejemplo representativo es el rodillo en forma de triángulo de Reuleaux.

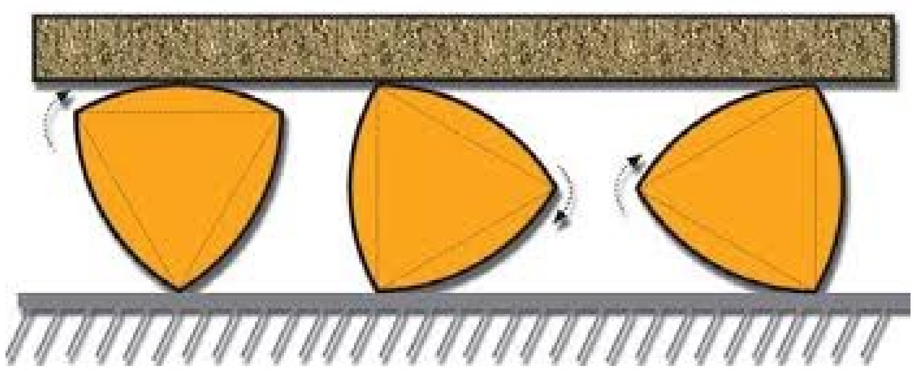


Figura 2.3: Anchura constante en rodillos no circulares.

2.2. Concepto de Anchura de una Curva

Se ha dado una idea de lo que es una figura de ancho constante, pasemos a un concepto matemático de lo que es el ancho de cualquier curva: Si acercamos dos líneas paralelas desde dos lados opuestos a una curva, hasta que la toquen, la distancia entre ellas en ese momento se denomina ancho de la curva y las líneas, no necesariamente tangentes, líneas sustentadoras.

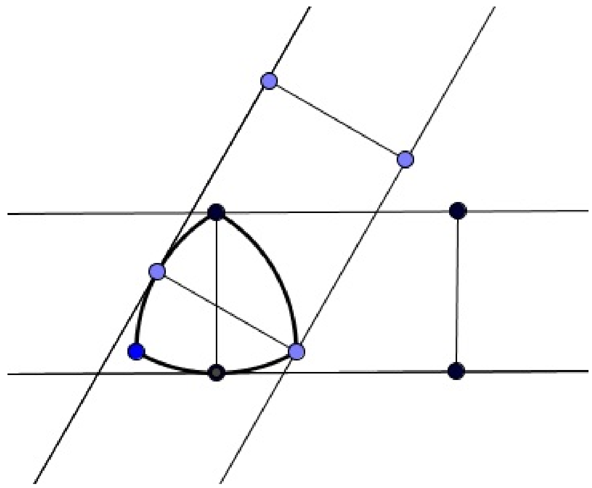


Figura 2.4: Descripción grafica de anchura constante.

2.3. Polígono Regular de Reuleaux

Un polígono de Reuleaux es regular si se construye a partir de un polígono regular, y éste a su vez tiene un número impar de lados (Mello, 2013, p.36)

Según Mello (2013 , p.35) , “ [...] un polígono de Reuleaux es una forma geométrica particular de diámetro constante obtenida a partir de un número finito de arcos circulares del mismo radio, siempre centrada en la esquina opuesta.” Polígonos regulares con un número par de lados no tienen un lado opuesto con un vértice, puesto que es la razon por la cual la construcción de un cuadrado de Reuleaux , por ejemplo, sería imposible, porque no tiene un lado opuesto a un vértice.

2.4. El Triángulo de Reuleaux

El círculo es un conjunto convexo del plano, de anchura constante, pero no es el único. Si T es un triángulo equilátero y haciendo centro en cada vértice, con radio R igual al lado, se traza un arco de circunferencia que une a los otros dos vértices, se genera una figura plana de ancho constante R conocida como triángulo de Reuleaux.

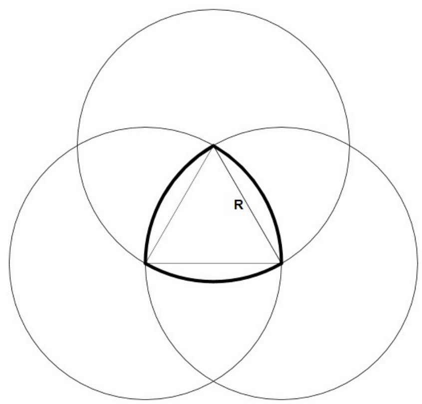


Figura 2.5: Tríangulo de Reuleaux a partir de la intersección de tres circunferencias.

Un triángulo de Reuleaux tiene, como la circunferencia, ancho constante, si se desea notar esta afirmación se puede ver que el punto más alejado (dentro del triángulo) de cualquiera de los arcos de circunferencia, que lo limitan, es el vértice opuesto, que por ser el centro con el que ha sido trazado dista R del mismo.

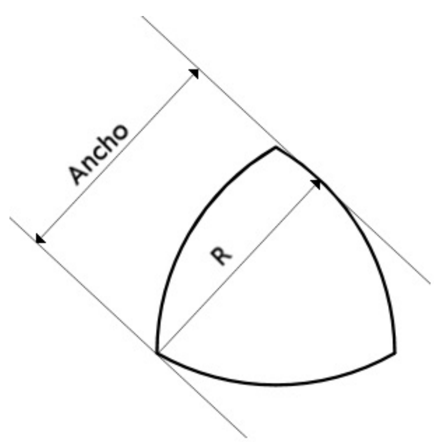


Figura 2.6: Anchura constante en el tríangulo de Reuleaux.

El triángulo de Reuleaux girará perfectamente dentro de un cuadrado, manteniendo contacto en todo momento con los cuatro lados del cuadrado, aunque el eje de giro no permanece en la misma posición, realiza un bamboleo describiendo un pequeño círculo. Conforme va girando, cada vértice sigue una trayectoria casi cuadrada, sólo en las esquinas hay una pequeña deformación curva.

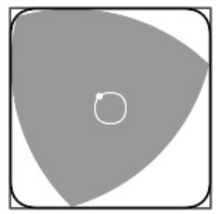


Figura 2.7: Rotación del tríangulo de Reuleaux con eje excéntrico dentro de un cuadrado.

2.5. Otros Poligonos de Ancho Constante

Es posible construir polígonos de Reuleaux de forma análoga al triángulo. Sí el número de lados del polígono es par se genera una figura de ancho constante irregular que no es un polígono de Reuleaux. Vale la pena mencionar que un polígono irregular de ancho constante puede ser generado a partir de un polígono regular, pero sin dejar de lado que existen construcciones de polígonos irregulares de anchura constante a partir de otros polígonos irregulares como se muestra en la figura 2.8.

La siguiente figura se denomina Heptágono de Reuleaux, y es un ejemplo de polígonos de Reuleaux.

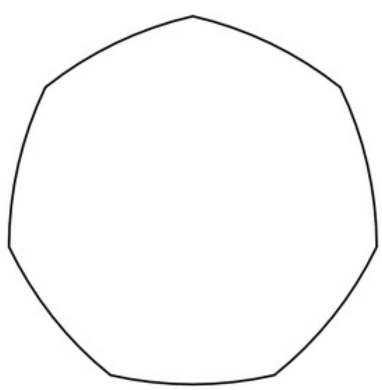


Figura 2.8: Heptágono de Reuleaux (regular).

También es posible construir curvas de ancho constante sobre polígonos que no son regulares. La siguiente figura tiene como base un heptágono estrellado. Las líneas del heptágono tiene la misma longitud, que se corresponde con el ancho de la curva. Cada uno de los arcos circulares que forman la curva tiene su centro en el vértice opuesto, cabe aclarar que si son polígonos irregulares de anchura constante no interviene el hecho de que la cantidad de lados del poligono sea par o impar.

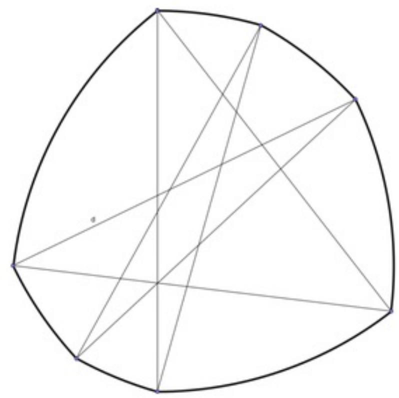


Figura 2.9: Heptágono de Anchura Constante (irregular).

Para ampliar las alternativas que poseen estas figuras, podemos expresar que también es posible redondear los vértices en este tipo de curvas. En la siguiente figura se muestra cómo hacerlo para un triángulo de Reuleaux. El procedimiento hace uso de unas líneas auxiliares, todas de igual longitud, que parten de cada vértice prolongando los lados del triángulo. Este procedimiento es válido para el resto de los polígonos tratados hasta ahora.

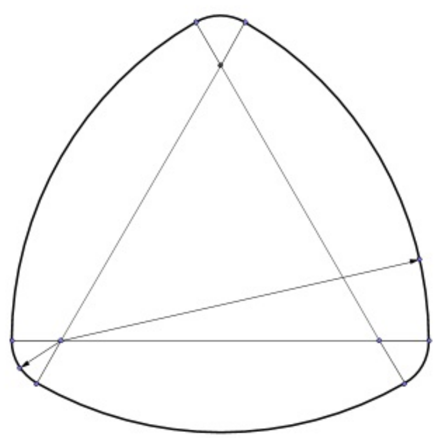


Figura 2.10: Triángulo de Reuleaux a partir de rectas auxiliares.

2.6. Sólidos de Ancho Constante

Asi como a partir de un polígono regular cualquiera con un número impar de vértices se pueden construir polígonos de Reuleaux de ancho constante, de la misma manera en $\mathbb{R}^3$ a partir de un tetraedro regular, se obtienen poliedros de Realeaux. La forma más práctica de hacerlo es al rotar una de las figuras planas de ancho constante en este caso el triángulo de Reuleaux visto más arriba sobre unos de sus ejes de simetría. En la figura que sigue se ve una bellota de ancho constante que resulta del giro de un triángulo de Reuleaux

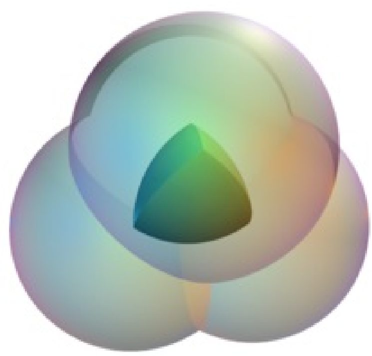


Figura 2.11: El tetraedro de Reuleaux formado por la intersección de cuatro esferas.

2.7. Propiedades Geométricas de las Figuras de Ancho Constante

- Todas las curvas de ancho constante son convexas lo que quiere decir que cualquier recta la corta en no más de dos puntos.

- El teorema de Barbier (en honor al matematico Joseph Emile Barbier, $1839 - 1889$) establece que todas las curvas de ancho constante A tienen como perímetro la longitud de una circunferencia de diámetro D, es decir $P = \pi \cdot D$. Nótese que A es también es la distancia a la que se encuentran las rectas paralelas con respecto a las cuales su longitud es constante.

- Es claro además que la circunferencia es una curva de longitud constante y verifica el teorema de Barbier, ya que su perímetro mide $P = \pi(2r) = \pi \cdot D$. El triángulo de Reuleaux es también una curva de longitud constante y el perímetro del triángulo de Reuleaux es el triple de la longitud de un arco que determina la distancia A entre las paralelas, su perímetro es:

$$P = 3(\tfrac{\pi \cdot D}{3}) = \pi \cdot D.$$

- Según el teorema de Blaschke $-$ Lebesgue, para un ancho dado, el triángulo de Reuleaux es la curva de ancho constante que tiene un área menor. La circunferencia es la que la tiene mayor ancho.

- El área del triángulo de Reuleaux de ancho D es:

$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})D^2 \approx 0,705D^2$$

Para el triángulo equilátero inscrito en el triángulo de Reuleaux de lado D es posible calcular su altura utilizando el Teorema de Pitágoras como sigue:

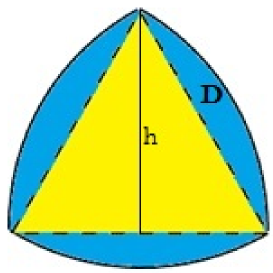


Figura 2.12: Triángulo equilatero inscrito en un triángulo de Reuleaux.

$$D^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{D^2}{4} + h^2$$

y por tanto,

$$h^2 = D^2 - \frac{D^2}{4} = \frac{3D^2}{4}$$

o bien,

$$h = \sqrt{\frac{3D^2}{4}} = \frac{D\sqrt{3}}{2}$$

El área del triángulo equilátero de altura h es:

$$\mathrm{A} = \frac{D \cdot \left(\frac{D\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{D^2\sqrt{3}}{4}$$

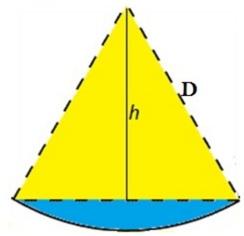


Figura 2.13: Segmento de circunferencia(azul), triángulo equilátero de lado D (amarillo).

El área en la figura anterior representa $\frac{1}{6}$ de la circunferencia por lo tanto podemos decir que su área es:

$$A = \frac{\pi D^2}{6}$$

El área del triángulo equivale al área del triángulo equilátero mas tres veces el área sector circular puesto que:

$$A_{(sector\ circular)} = \frac{\pi D^2}{6} - \frac{D^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) D^2$$

Así el área del triángulo de Reuleaux es:

$$A = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) D^2 + \frac{D^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} D^2$$

Es decir,

$$A = 0,7045D^2$$

- El área de un círculo de diámetro(ancho) D es:

$$A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}D^2 \approx 0,7854D^2$$

Es claro que:

$$A_{(Círculo\ diametro\ D.)} > A_{(Triángulo\ de\ Reuleaux\ ancho\ D.)}$$

- Radio y apotema de un polígono regular:

  Tomado de *" Geometría y Trigonométrica de Aurelio Baldor, capítulo XV: Relaciones métricas en los polígonos regulares "*

  El radio de un polígono regular es el mismo radio de la circunferencia circunscrita en el polígono.

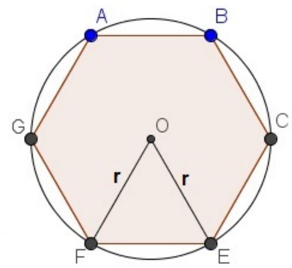


Figura 2.14: $\overline{OF} = \overline{OE}$ son radios del polígono.

Se llama apotema de un polígono regular al segmento perpendicularidad trazado desde el centro de un polígono a uno cualquiera de sus lados y en la siguiente figura $\overline{OM}$ es la apotema.

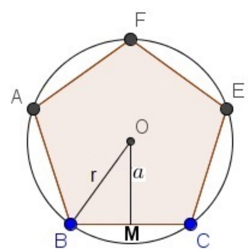


Figura 2.15: Pentágono regular inscrito en una circunferencia.

La apotema de un polígono se designa con la letra "a_n".

Cálculo del apotema en función del radio y el lado.

Considerando la siguiente figura definimos en ella:

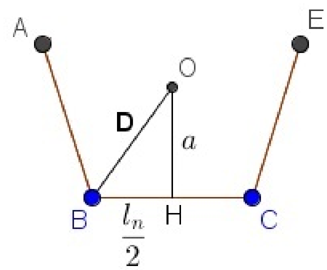


Figura 2.16: Acercamiento al apotema y radio de un pentágono.

$\overline{BC} = l_n$ (Lado de un polígono regular de n lados)

$\overline{OH} = a_n$ (apotema)

En el $\triangle\, OBH$, por el teorema de pitágoras:

$(\overline{OB})^2 = (\overline{OH})^2 + (\overline{BH})^2 \quad (1)$

$\overline{BH} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{l_n}{2} \quad (2)$

$\overline{OH} = a_n \quad (3)$

$\overline{OB} = r$ Radio $\quad (4)$

Sustituyendo $(2), (3), (4)$ en (1) tenemos:

$$r^2 = {a_n}^2 + \left[\frac{l_n}{2}\right]^2$$

Es decir,

$${a_n}^2 = r^2 - \left[\frac{l_n}{2}\right]^2 = r^2 - \frac{(l_n)^2}{4} = \frac{4r^2 - {l_n}^2}{4}$$

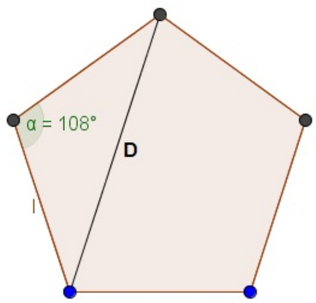
Y por tanto

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - (l_n)^2}$$

- Diagonal de un pentágono.

Consideremos el pentágono ilustrado en la siguiente figura:

El ángulo interno de un pentágono mide a 108°.



A partir del teorema del coseno se obtiene:

$$D^2 = l^2 + l^2 - 2l^2cos(108°) = 2l^2(1 - cos(108°))$$

Y por lo tanto

$$D = l\sqrt{2(1 - cos(108°))}$$

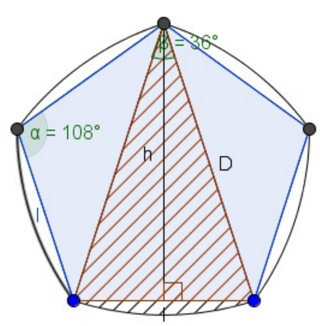
Es decir,

$$D = 1,85123l$$

- Área de un pentágono de Reuleaux.

$$A = \frac{(perímetro)(apotema)}{2}$$

Área de una sección circular perteneciente al pentágono de Reuleaux:



$$A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4D^2 - l^2}}{2} = \tfrac{1}{4} l \sqrt{4D^2 - l^2}$$

El área del sector circular es:

$$\mathrm{A}_{(Sector\ circular)} = \frac{\pi D^2}{10} - \frac{1}{4} l \sqrt{4D^2 - l^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi D^2}{5} - \frac{l\sqrt{4D^2 - l^2}}{2}\right)$$

Finalmente, el área del pentágono de Reuleaux es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{(Pentágono\ de\ Reuleaux)} &= A_{(Pentágono\ Regular)} + 5A_{(Sector\ circular)} \\
&= \frac{\pi \cdot D^2}{10} + 5\left[\frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{5} - \frac{l\sqrt{4D^2 - l^2}}{2}\right] \\
&= \frac{3\pi D^2}{5} - \frac{5}{2} l \sqrt{4D^2 - l^2} \quad (\square)
\end{aligned}$$

2.8. Secuencia Didáctica Sobre la Construcción de Algunos Polígonos de Ancho Constante

Las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que con la mediación de un docente, persiguen el logro de determinadas metas educativas, lo que implicará mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes. Con las secuencias se busca que la metodología sea menos fragmentada y tenga como fin inmediato el desarrollo de competencias.

En el modelo educativo por competencias, las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar lo procesos de aprendizaje. Para ello se retoman los principales componentes de dichas secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia), actividades pertinentes y evaluación formativa (orientada a enjuiciar sistemáticamente el proceso). Con ello, se sigue una línea metodológica que permite a los docentes que ya trabajan con esta metodología una mejor adaptación al trabajo por competencias en el aula.

Desde las secuencias didácticas ya no se proponen que los estudiantes aprendan determinados contenidos, sino que desarrollen competencias para desenvolverse en la vida, para lo que se hará necesaria la apropiación significativa de los contenidos.

Principales Componentes de una Secuencia Didáctica por Competencias.

- **Situación problema del contexto:** Problema relevante del contexto por medio del cual se busca la formación.

- **Competencias a formar**: Se describe la competencia o competencias que se pretende formar.

- **Actividades de aprendizaje y evaluación**: Se indican las actividades con el docente y las actividades de aprendizaje autónomo de los estudiantes.

- **Evaluación:** Se establecen los criterios y evidencias para orientar la evaluación del aprendizaje, así como la ponderación respectiva. Se anexan las matrices de evaluación.

- **Recursos:** Se establecen los materiales educativos requeridos para la secuencia didáctica, así como los espacios físicos y los equipos.

- **Proceso metacognitivo:** Se describen las principales sugerencias para que el estudiante reflexione y se autorregule en el proceso de aprendizaje.

CAPÍTULO 3

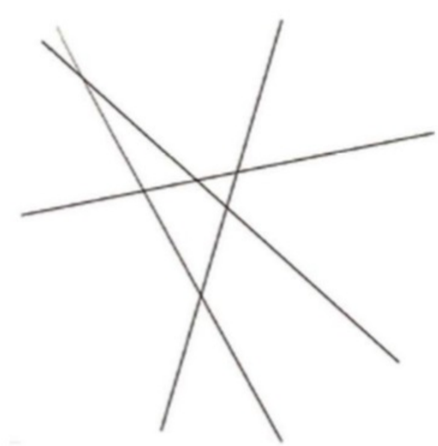
CONSTRUCCIONES DE FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE

A continuación se esbozan algunas construcciones de figuras de anchura constante, orientadas según algunas investigaciones realizadas y que responden a uno de los objetivos planteados.

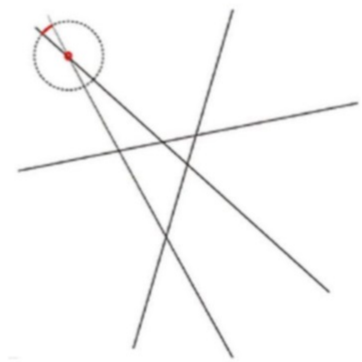
3.1. Construcción de una Curva Irregular de Anchura Constante

Las curvas irregulares de anchura constante se pueden construir a partir de rectas concurrentes. Para trazar los arcos circulares que forman la curva, se debe dibujar un arco de circunferencia con centro en la intersección de dos rectas concurrentes. El arco será limitado por esas rectas.

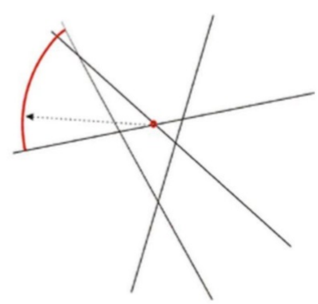
las siguientes figuras muestran un proceso de construcción para una curva de anchura constante

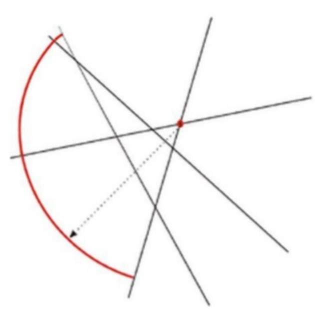


Cada arco de circunferencia tiene centro en el punto de intersección de las líneas que lo limitan. La siguiente figura muestra el trazado del primer arco con centro en la intersección de las líneas



El arco siguiente se centrará en el punto de intersección de las rectas que lo limitaron y el radio es la medida determinada por el arco trazado anteriormente





El procedimiento es análogo a la construcción de los demás arcos, lo que resulta en la curva.

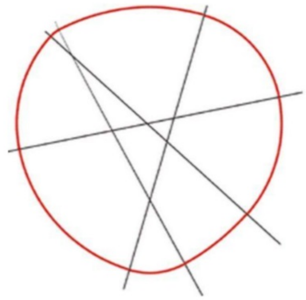
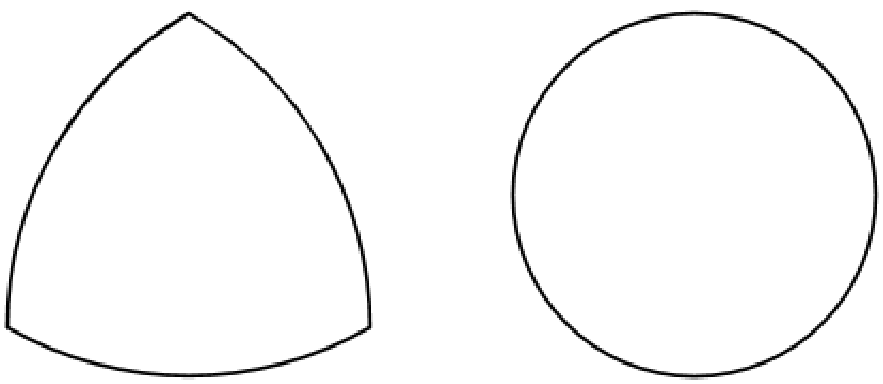


Figura 3.1: Curva irregular de anchura constante

En el ejemplo anterior la curva tiene 8 arcos.

3.2. Curvas Regulares de Anchura Constante

Son curvas formadas por arcos de circunferencia que tienen la misma longitud y el mismo radio. Un ejemplo representativo es el triángulo de Reuleaux y demás polígonos de Reuleaux.

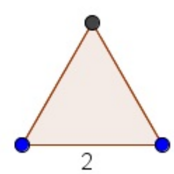


3.3. Construcción de Algunos Polígonos de Reuleaux

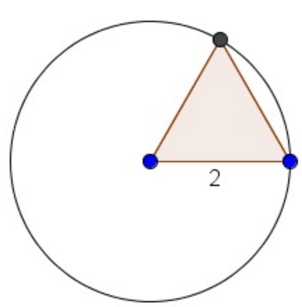
Las siguientes construcciones se pueden dibujar bajo el trazo de regla, compás, lapiz y papel, pero debido a que el objetivo se centra en mostrar el desarrollo de dichas construcciones en un entorno de geometría dinámica se procede a la realización de estas figuras utilizando el software GeoGebra.
Estas figuras muestran como se pueden construir polígonos de Reuleaux regulares a partir de la intersección de circunferencias.

Construcción para el triángulo de Reuleaux

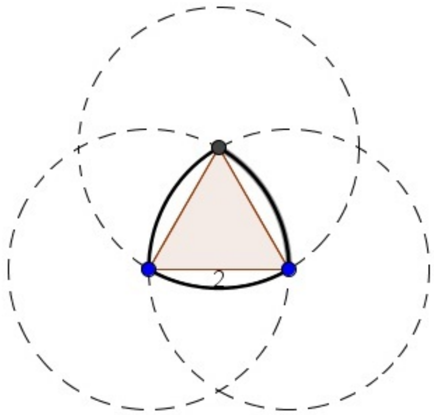
Para la construcción de este triángulo de Reuleaux se puede utilizar cualquier valor para el lado del triángulo equilátero, en este caso se hará la construcción a partir de un triángulo equilátero de lado $L = 2$.



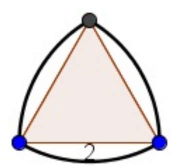
Se trazan circunferencias con centro en cada uno de los vértices y tomando como radio la longitud de los lados del triangulo equilátero.



Se repite el anterior procedimiento para cada uno de los vértices.



Se dejan los arcos de circunferencia que estan unidos a los vértices y se borra el resto, generando así nuestro triángulo de Reuleaux.



Propiedades

- El ancho del triangulo de Reuleaux es 2.
- El perímetro de este triángulo de Reuleaux es:

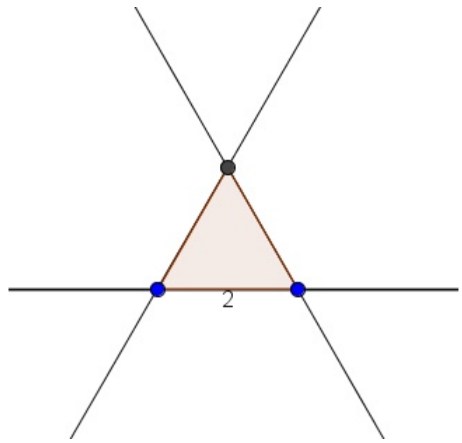
$$P = \frac{3 \cdot \pi \cdot D}{3} = \pi \cdot D = \pi \cdot (2r) \approx 6,284$$

  según el teorema de Barbier como se indicó en las anteriores propiedades.
- El área del triángulo de Reuleaux es:

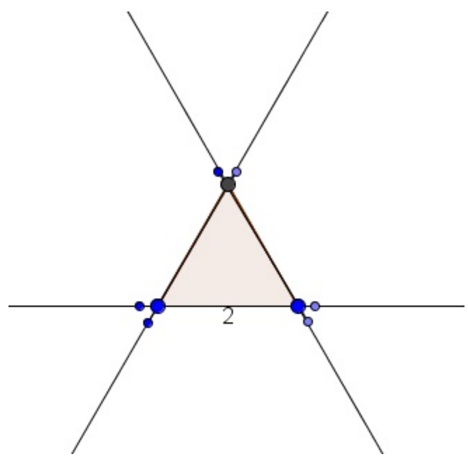
$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})(2)^2 \approx 2,82u^2$$

Otro Procedimiento para la Construcción del Triángulo de Reuleaux

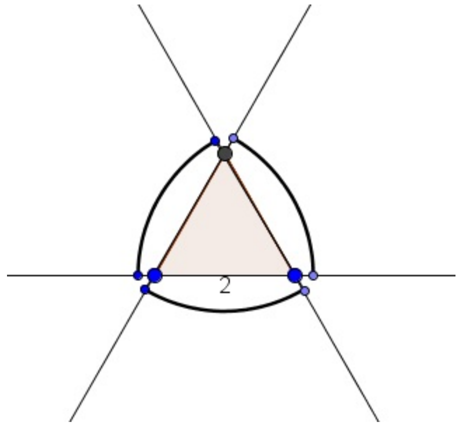
La construcción de este triángulo de Reuleaux puede hacerse a partir de un triángulo equilatero de lado 2, al prolongar sus lados..



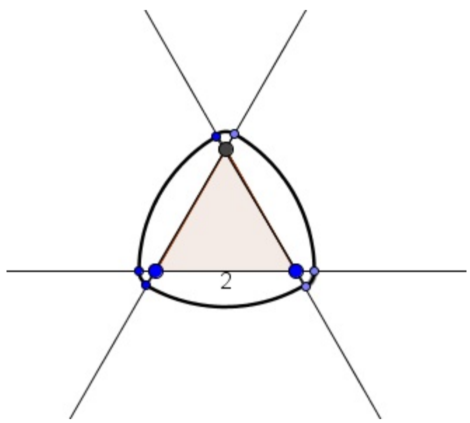
Se trazan tres segmentos con medidas mayores al lado del triángulo equilátero en este caso se hará con medidas iguales a 2,5. Estas son colocadas sobre las rectas prolongadas del triángulo concordando su punto central con el punto central de cada lado del triángulo equilátero .



Se trazan arcos de circunferencia haciendo centro en los vértices del triángulo equilátero y radio en el punto opuesto del segmento, repetimos este paso para los tres vértices.



Para finalizar, haciendo centro en los vértices del triángulo equilátero y con radio igual a la distancia de la parte menor del segmento se traza un arco de circunferencia que complete el triángulo de Reauleaux.



Propiedades

- El ancho del triángulo de Reuleaux es $2,5$.
- El perímetro de este triángulo de Reuleaux es:

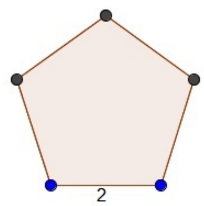
$$P = \frac{3 \cdot \pi \cdot D}{3} = \pi \cdot D = \pi \cdot (2,5) \approx 7,854u^2$$

  según el teorema de Barbier como se indicó en las anteriores propiedades.
- El área del triángulo de Reuleaux en este caso es:

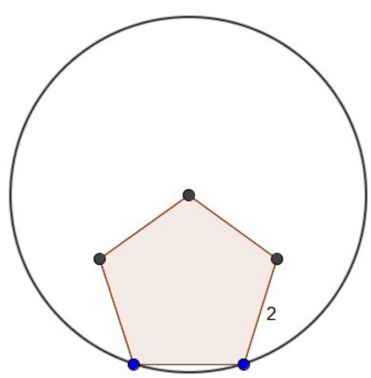
$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})(2,5)^2 \approx 4,405u^2$$

Construcción del un Pentágono de Reuleaux

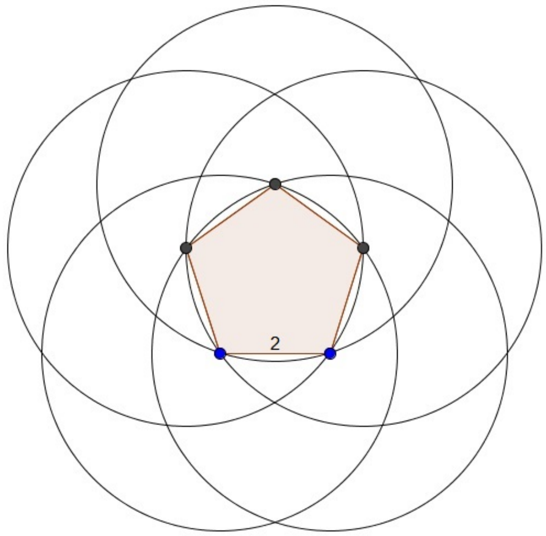
La construcción de este pentágono de Reuleaux se puede hacer a partir de una medida arbitraria de lado para el pentágono regular en este caso se hará con un pentágono regular de lado 2.



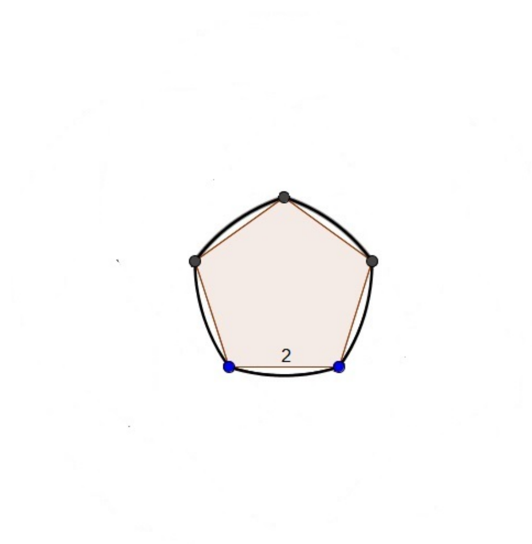
Se traza una circunferencia con centro en un vértice y radio igual a la distancia de una diagonal del pentágono.



Se repite este procedimiento para todos los vértices del pentágono.



Se borran los arcos de circunferencia sobrante para obtener finalmente el pentágono de Reuleaux.



Propiedades

- El lado del pentágono regular es $l = 2$

- El pentágono de Reuleaux tiene la propiedad de tener un ancho constante igual a la diagonal D del pentágono regular.

$$D = l(1,85)u$$

Es decir,

$$D = (2)(1,85) \approx 3,7u$$

El radio del polígono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el mismo polígono, en este caso es:

$$r = 1,7$$

- El apotema del pentágono es:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - (l_n)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(1,7)^2 - (2)^2} = 1,375u$$

- De acuerdo al teorema de Barbier el perímetro P del pentágono de Reuleaux es:

$P = (3,7)\pi \approx 11,63u$ según el teorema de Barbier como se indicó en las anteriores propiedades.

- El área del pentágono regular es:

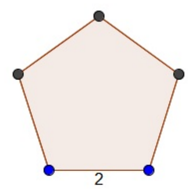
$$A = \frac{(P)(a)}{2} = \frac{(10)(1,37)}{2} = 6,874u$$

- De acuerdo a la formula (☐) página 31, el área del pentágono de Reuleaux:

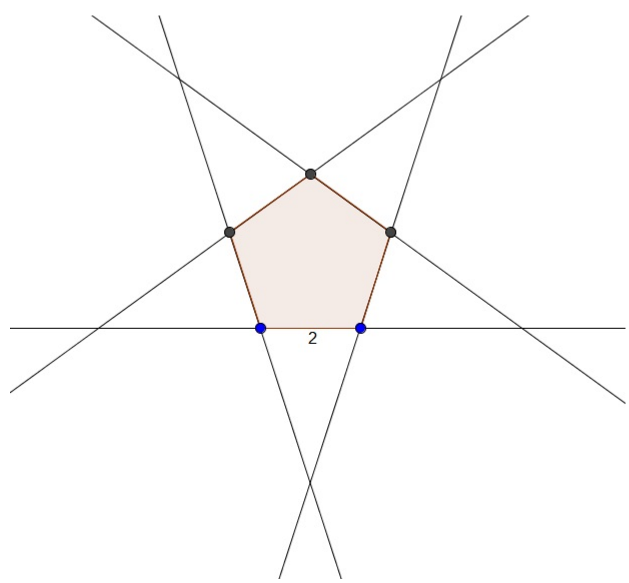
$$A = \frac{(P)(a)}{2} + 5\left(\frac{\pi \cdot D^2 - 5l\sqrt{D^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{10}\right) = 10,58u$$

Otro procedimiento para la Construcción del Pentágono de Reuleaux

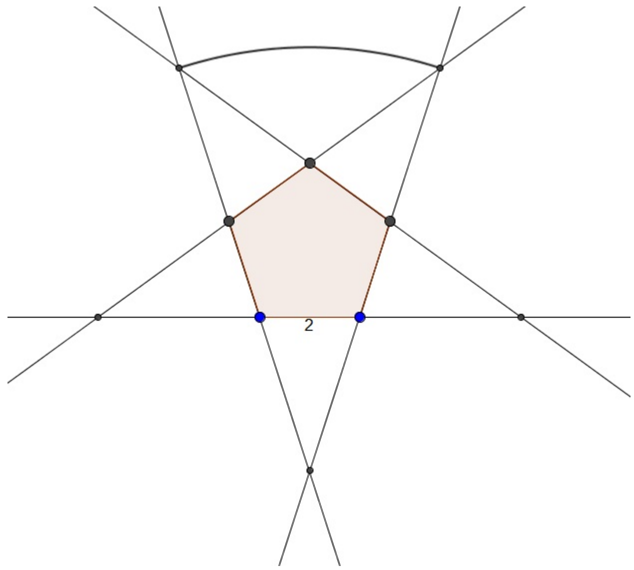
Para este desarrollo tomamos como referencia un pentágono regular de lado $l = 2$



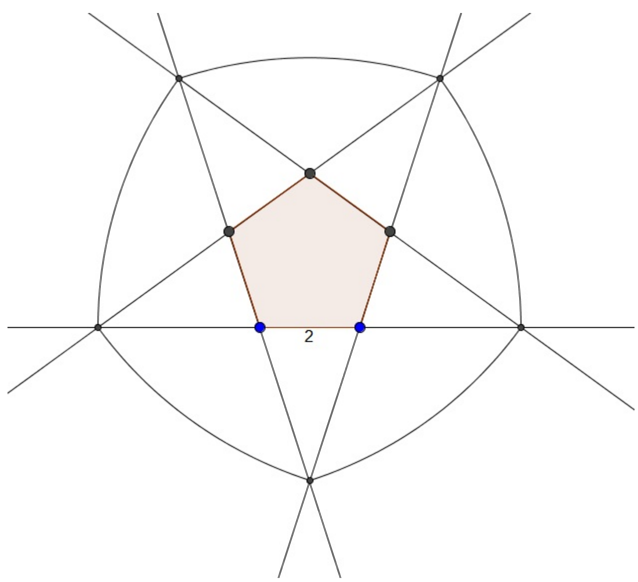
Se prolongan todos sus lados.



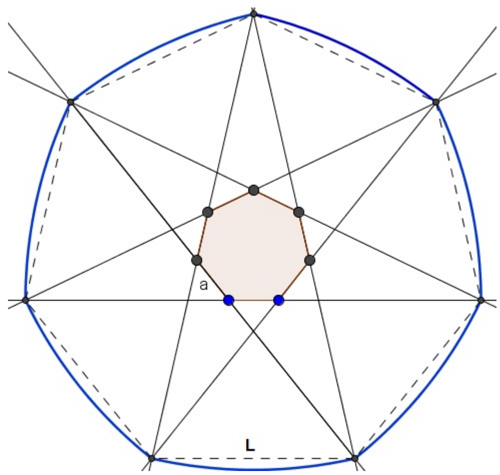
Se hace centro en las intersecciones de los lados prolongados y radio igual a la distancia del segmento entre las intersecciones, se procede a trazar arcos de circunferencia uniendo las intersecciones opuestas.



Se repite el paso anterior para todos los vértices.



Finalmente se obtiene el Pentágono de Reuleaux.



Propiedades

- El lado del pentágono regular inicial es $l = 2$

- El lado del pentágono inscrito en el pentágono de Reuleaux es:

$$L = 5,24$$

- El ancho del pentágono de Reuleaux en este caso es igual a la diagonal prolongada es decir:

$$D = (5,24)(1,85) \approx 9,7u$$

El radio del polígono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el mismo polígono, en este caso es:

$$r = 4,45$$

- El apotema del pentágono regular es:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - (l_n)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(4,45)^2 - (5,24)^2} = 3,597u$$

- Deacuerdo al teorema de Barbier el perímetro P de esta figura es:

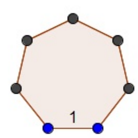
$$P = 9,7\pi \approx 30,475u.$$

- El área del pentágono de Reuleaux de acuerdo a la formula (□) es :

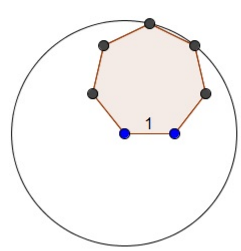
$$A = \frac{(P)(a)}{2} + 5\left(\frac{\pi \cdot D^2 - 5l\sqrt{D^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{10}\right) = 72,11u$$

Construcción para un Heptágono de Reuleaux

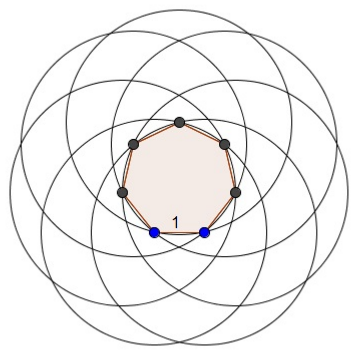
Para ello se tomara como base un Heptágono regular de lado 1.



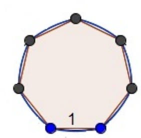
Se traza una circunferencia con centro en un vértice y radio igual a la distancia de dos vértices opuestos.



Se repite el procedimiento anterior para todos los demás vértices.



Finalmente se obtiene el Heptágono de Reuleaux.



Propiedades

- El lado del Heptágono regular es $l = 1$
- El ancho del Heptágono de Reuleaux es igual a la diagonal del Heptágono regular es decir:

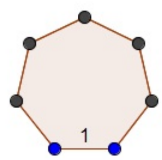
$$D = (1)(1,85u) \approx 1,85u$$

- El perímetro P de esta figura es:

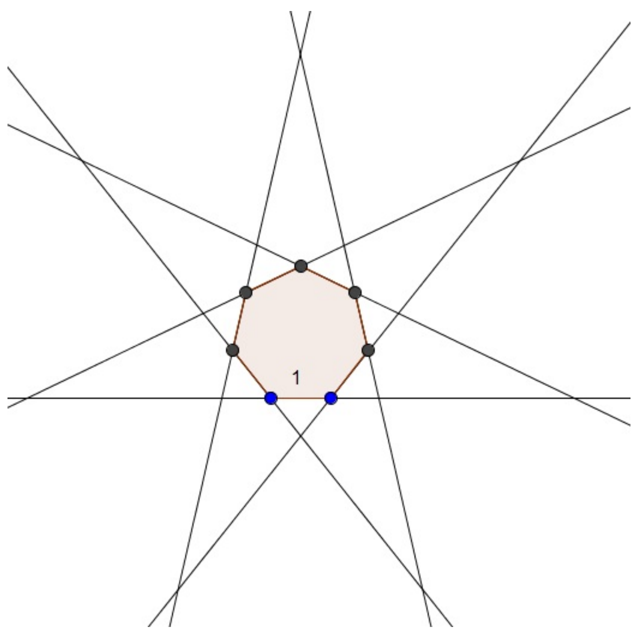
$$P = (1,85) \cdot \approx 5,81u.$$

3.4. Otro procedimiento para la Construcción del Heptágono de Reuleaux

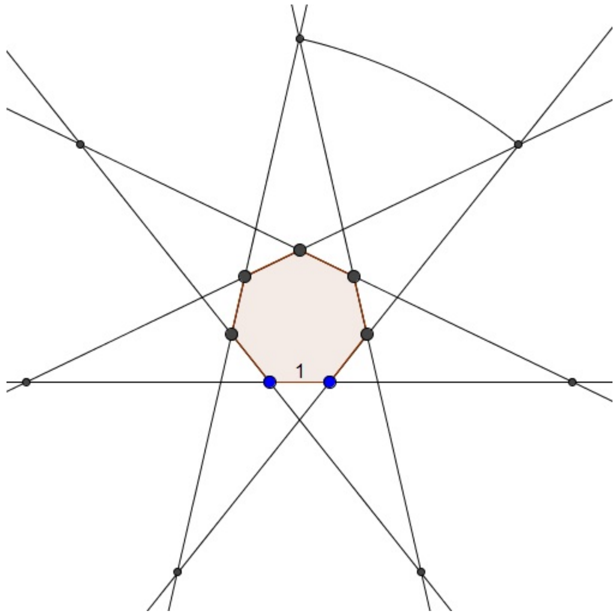
Se tomara como base para la construcción un heptágono de lado $l = 1$.



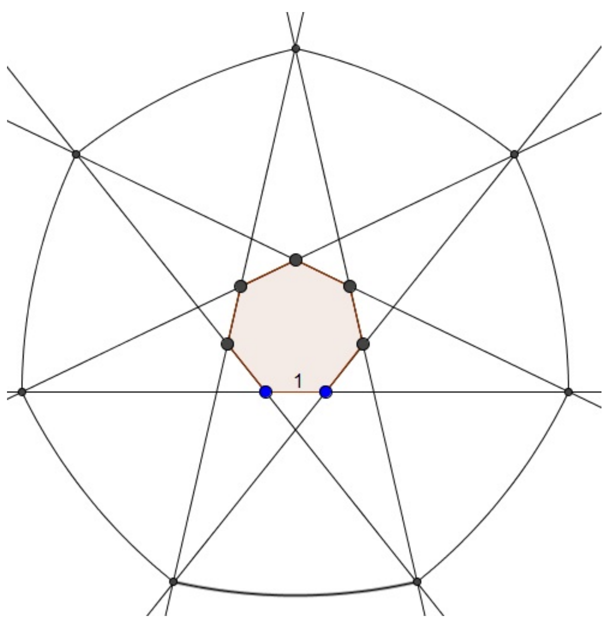
Se prolonga los lados Heptágono regular.



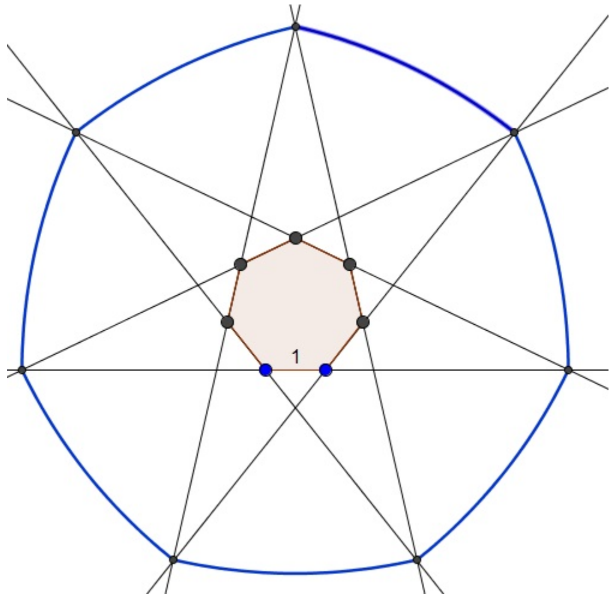
Con centro en las intersecciones de los lados prolongados y radio igual a la distancia del segmento entre las intersecciones, se trazan arcos de circunferencia uniendo las intersecciones opuestas.



Se repite el procedimiento anterior para todos los vértices.



La figura resultante es el heptagono de Reuleaux.



Propiedades

- El lado del heptágono regular inicial es $l = 1$
- El lado del heptágono inscrito en el heptágono de Reuleaux es:

$$L = 4,05$$

- El ancho del heptágono de Reuleaux es igual a la diagonal prolongada, esto es:

$$D = (4,05)(1,85u) \approx 7,5u$$

El radio del polígono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el mismo polígono, en este caso es:

$$r = 4,67$$

- El apotema del heptágono regular según la propiedad mostrada para polígonos regulares es:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - (l_n)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(4,67)^2 - (4,05)^2} \approx 13,607u$$

- El perímetro P de esta figura es:

$$P = (7,497)\pi u \approx 30,475u$$

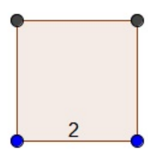
según el teorema de Barbier.

3.5. Construcción de Poligonos Irregulares de Anchura Constante.

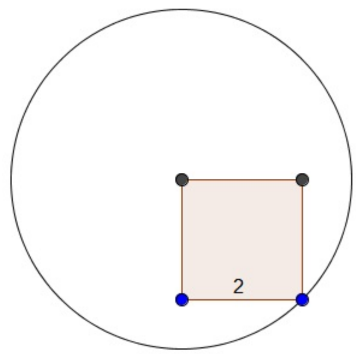
Como se mencionó en la sección 2.5 que hace referencia a otros polígonos de ancho constante, se enfatiza en que los polígonos irregulares de anchura constante pueden ser construidos a partir de un polígono regular, par o impar.

Construcción de un Heptágono de Anchura Constante.

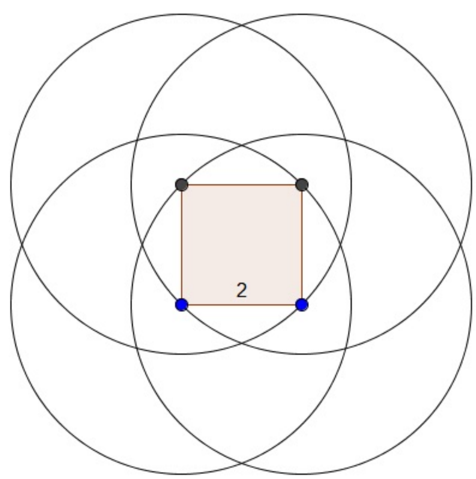
La construcción de este heptágono de anchura constante se hacá a partir de un cuadrado de lado 2.



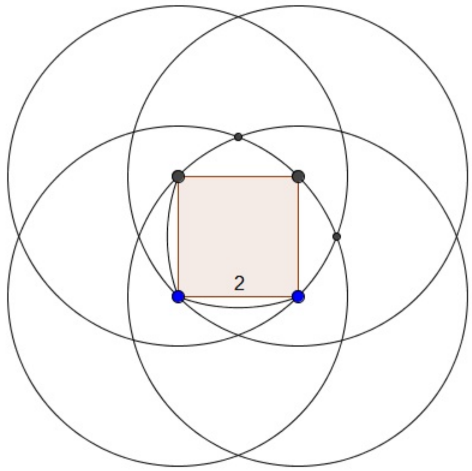
Se traza una circunferencia haciendo centro en un vértice del cuadrado y con radio igual a la diagonal del cuadrado.



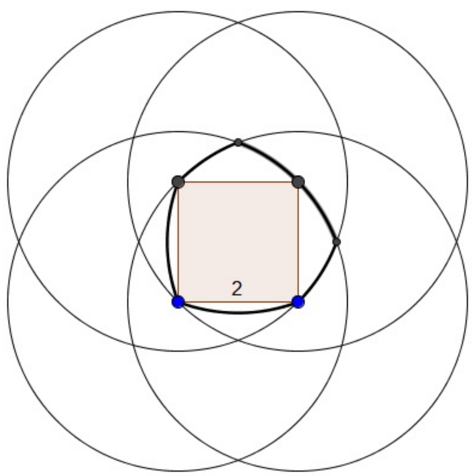
Se repite el paso anterior para cada vértice.



Con centro en dos de las intersecciones que se forman de las circunferencias adyacentes y con radio igual a la distancia de la insección y el vértice del cuadrado se trazas arcos. (este procedimiento se realiza en las dos intersecciones adyacentes que se escojan.)



De esta manera se obtiene el heptágono de anchura constante irregular.



Propiedades

- El ancho de la figura es $2,82$ que equivale a la medida de la diagonal D del cuadrado de lado 2.

$$D = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} \approx 2,82u$$

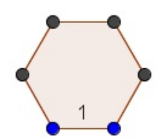
- El perímetro de la figura es:

$$P = 2,82\pi \approx 8,88u$$

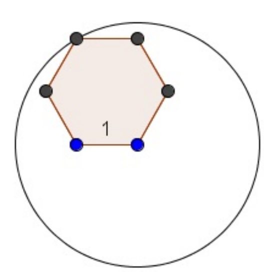
según el teorema de Barbier.

Construcción de un Eneágono de Anchura Constante

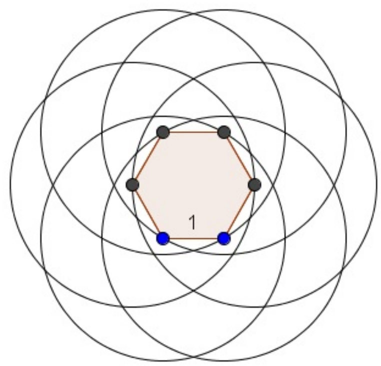
La construcción de este eneágono de anchura constante se hace a partir de un hexágono regular de lado $l = 1$.



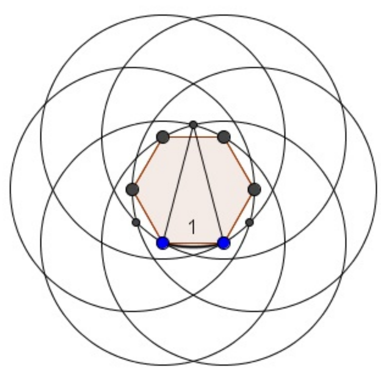
Con centro en uno de los vértices del hexágono y con radio igual a la diagonal del hexágono se traza una circunferencia sobre el hexágono.



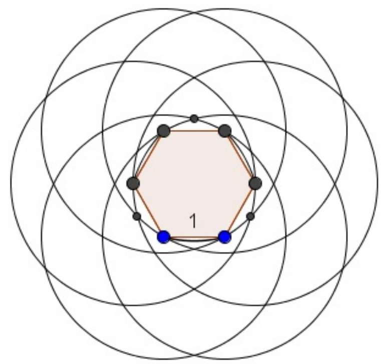
Se repite el procedimiento anterior para cada vértice.



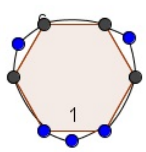
Se toman los lados adyacentes del hexágono, hacemos centro en la intersección que cubren a estos y se une con un arco de circunferencia los vértices del lado opuesto del hexágono.



Se repite el anterior procedimiento para los lados no adyacentes del hexágono.



De esta manera de obtiene el eneágono de anchura constante.



Propiedades

- El ancho de la figura de ancho constante en este caso es igual a la diagonal del hexágono es:

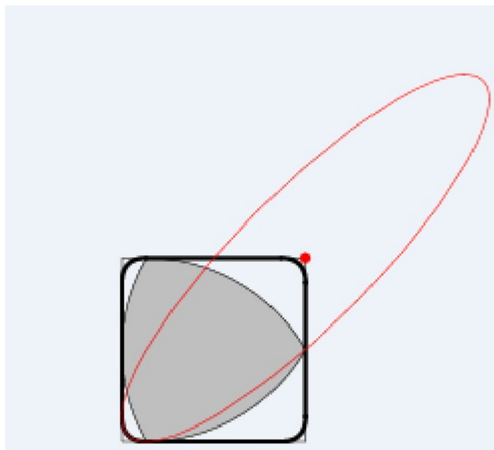
$$D = (2)(1,851u) \approx 3,702u$$

- El perímetro de la figura es:

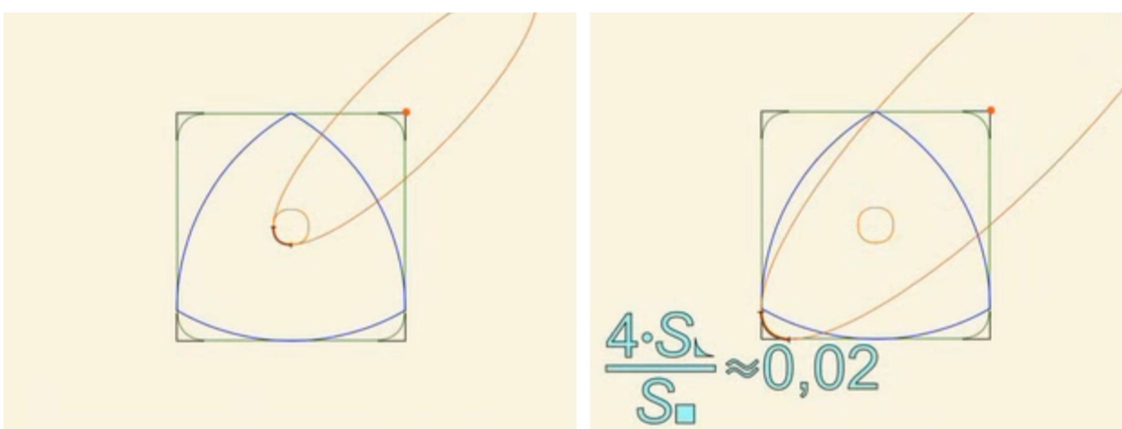
$$3,702\pi \approx 11{,}631$$

según el teorema de Barbier.

3.6. Otra Propiedad del Triángulo de Reuleaux



Gleissner y Zeitler afirman que las esquinas redondeadas determinados por triángulo de reuleaux inscrita en un cuadrado son segmentos de elipse. El área cubierta por el triángulo de reuleaux inscritó en un cuadrado de lado 1 cuando se gira en torno a un eje móvil es A = 0,9877003907 ... La siguiente Figura muestra una elipse que describe una esquina de la cifra aproximada de un cuadrado cubierto por el triángulo Reuleaux .



CAPÍTULO 4

ADAPTACIONES FISICAS DE LOS POLÍGONOS DE REULEAUX

4.1. Aspiradora Robótica

Figura 4.1: Aspiradora Rulo de Panasonic.

El triángulo de Reuleaux ha sido utilizado en aspiradoras robóticas. RULO de Panasonic ha generado una gama de robots de limpieza autónomas que tienen esta forma para que se alcancen más profundamente en las esquinas.

El ingeniero alemán Felix Wandel se basó en la propiedad del triángulo de Reuleaux de girar libremente dentro de un cuadrado del mismo ancho permaneciendo en contacto permanentemente con los cuatro lados diseñar un motor que utiliza un único triángulo curvado montado dentro de una cámara. A medida que gira, los bordes del triángulo forman siempre un sello con las paredes de la cámara. En una de estas cavidades de la mezcla de combustible-aire explosiva se comprime y se enciende (como con un motor convencional), dando el triángulo rotación de un pulsador.

4.2. Motor Wankel

Figura 4.2: Triangulo rotatorio de un pulsador.

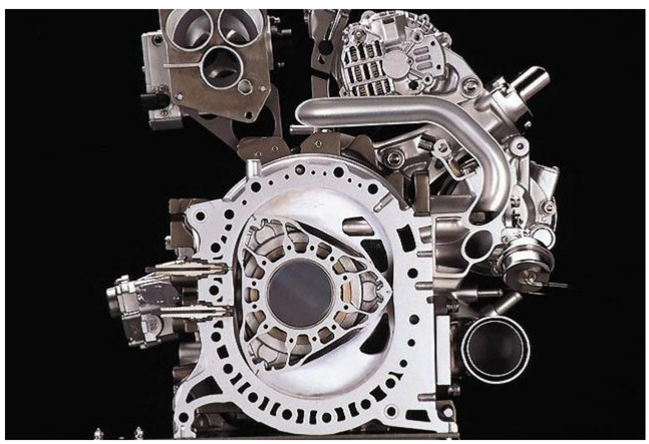


Figura 4.3: Motor Wankel vista interna.

Los motores Wankel requieren menos piezas que los motores de pistón, lo que las hace más ligeras y más rentable de fabricar. La rotación se mantiene en un ciclo constante, proporcionando fuerza de accionamiento del motor.

Debido a la buena marcha del triángulo que también está menos sujeto a la vibración y puede funcionar a altas revoluciones se obtiene una potencia de salida superior, pero se requieren más mantenimiento y tienen una vida útil más corta que los motores de pistón. Estos factores, combinados con menos ahorro de combustible y mayores emisiones, hacen que el motor Wankel más adecuado para los coches de carreras que los vehículos de transporte.

Muchos fabricantes han estado interesados con el diseño de Wankel, principalmente Mazda.

Sus motores rotativos han tenido un éxito en el mundo de las carreras, así como en los coches deportivos como el RX 7/8.

4.3. Broca de los Hermanos Watts

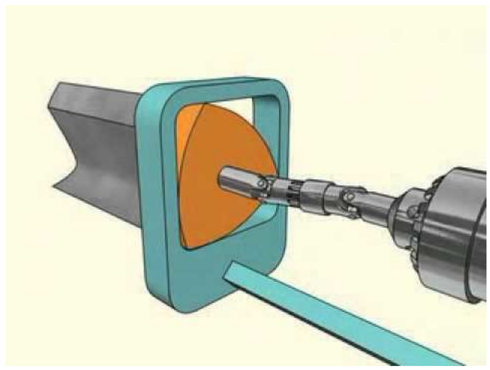


Figura 4.4: Estructura de la broca de los hermanos Watts

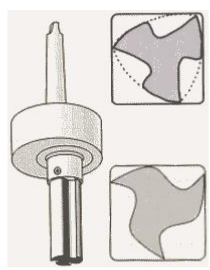


Figura 4.5: Cigueñal de la broca de los hermanos Watts

Gracias a la propiedad del triángulo de Reuleaux los hermanos Watts diseñaron las hoy conocida brocas cuadradas y como su nombre sugiere puede perforar un agujero que es casi cuadrado. El taladro Watts explota esta propiedad mediante el uso de un aparato especial que altera el centro de rotación de la broca en consecuencia lo que permite al triángulo hacer un agujero casi cuadrado.

Del mismo modo, una broca basada en el pentágono de Reuleaux se puede utilizar para perforar un agujero casi hexagonal y un heptágono de Reuleaux pueden perforar un agujero octagonal. A esta secuencia se le considera un patrón el cual se va acercando a una forma de perforación casi circular.

4.4. Lápiz Triangular Reuleaux

Figura 4.6: Lápices con forma triangular de anchura constante.

Los lápices con una sección transversal triangular Reuleaux no van a rodar tan fácilmente, además de ser cómodo el agarre a la hora de escribir.

4.5. Bicicleta de Guan Baihua

Figura 4.7: Guan Baihua disfrutando un paseo en su bicicleta.

El inventor chino Guan Baihua inspirado por los polígonos de Reuleaux ha conseguido reinventar la forma de rodar, pues el uso de sus ejes móviles especialmente diseñados permite conducir la bicicleta de una forma suave a pesar de tener un triángulo y una rueda pentagonal.

4.6. Tetraedro de Reuleaux

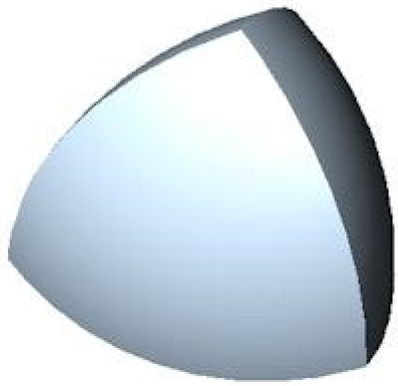


Figura 4.8: Tetraedro de Reuleaux.

El análogo en tres dimensiones del triángulo de Reuleaux no tiene anchura constante.

Un tetraedro de Reuleaux se puede modificar para que tenga anchura constante: se reemplazan tres aristas (que formen un triángulo o que compartan un vértice) por secciones de revolución de un arco de circunferencia obteniéndose los famosos cuerpos de Meissner.

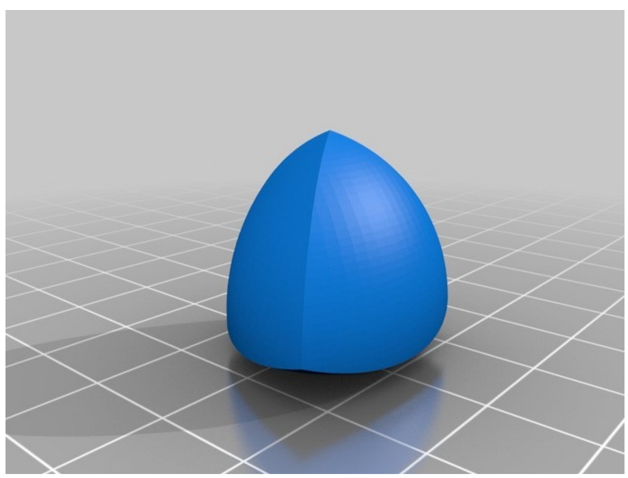


Figura 4.9: Tetraedro de Reuleaux.

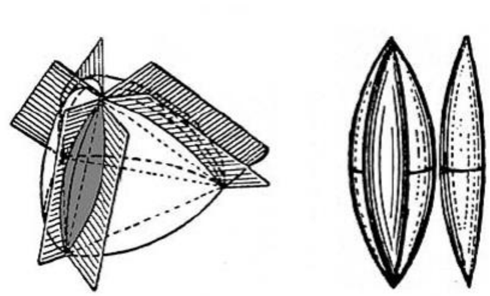


Figura 4.10: Redondeo del tetraedro de Reuleaux.

Se reemplaza la zona sombreada por la superficie toroidal obtenida al girar el arco sobre el eje(arista de tetraedro regular).

En el Museo de Ciencias de Londres utilizando las escaleras hasta la galería de las matemáticas, se encuentra un sólido de plata bastante elegante, Se etiqueta , “tetraedro redondeada diseñada por Chris Hoskin , 2008 ”.

Figura 4.11: Tetraedro diseñado por Chris Hoskin, 2008

4.7. ¿5000 años de Antigüedad?

Figura 4.12: Objeto antiguó con las propiedades del triángulo de Reuleaux.

Según la prueba de carbono 14, este objeto tiene aproximadamente 5000 años de antigüedad.

4.8. Ventana de la Iglesia Catedral Basílica Metropolitana de la Asunción de Nuestra Señora de Valencia (España)

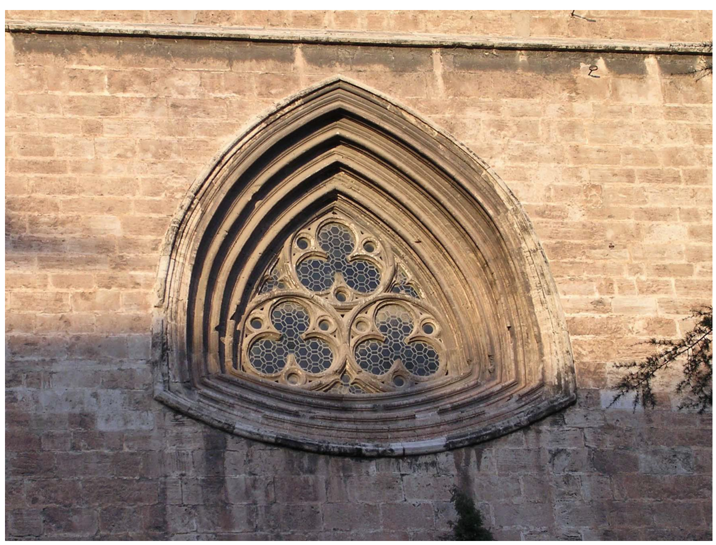


Figura 4.13: Vitral con forma del triángulo de Reuleaux.

El gótico valenciano es el estilo constructivo predominante de esta catedral, aunque también contiene elementos del románico, del gótico francés, del renacimiento, del barroco y neoclásico.

4.9. Catedral de Nuestra Señora (en francés, Cathédrale Notre Dame) siglo XIII París

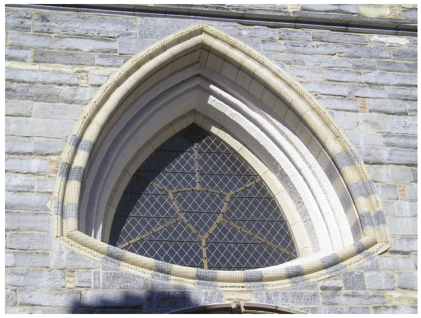


Figura 4.14: Vitral con forma del triángulo de Reuleaux.

Se trata de uno de los edificios más señoriales y primitivos de cuantos se construyeron en estilo Gótico. Se empezó su edificación en el año 1163 y se terminó en el año 1345. Dedicada a María, madre de Jesucristo, se sitúa en la pequeña Isla de la Cité, rodeada por las aguas del río Sena. Es uno de los monumentos más populares de la capital francesa.

4.10. Catedral de Eislingen (Alemania)

Figura 4.15: Vitral con forma del triágulo de Reuleaux.

4.11. Catedral de León (Nicaragua)

Figura 4.16: Vitral con forma del triángulo de Reuleaux.

La catedral de León es conocida sobre todo por llevar al extremo la desmaterialización del arte gótico, es decir, la reducción de los muros a su mínima expresión para ser sustituidos por vitrales coloreados, constituyendo una de las mayores colecciones de vidrieras medievales del mundo.

4.12. Santa Iglesia Catedral Basílica de la Santa Cruz y Santa Eulalia (España)

Figura 4.17: Arquitectura con forma del triángulo de Reuleaux.

La catedral actual se construyó durante los siglos XIII a XV sobre la antigua catedral románica, construida a su vez sobre una iglesia de la época visigoda a la que precedió una basílica paleocristiana, cuyos restos pueden verse en el subsuelo, en el Museo de Historia de la Ciudad. La finalización de la imponente fachada en el mismo estilo, sin embargo, es mucho más moderna (siglo XIX). El edificio es Bien de Interés Cultural y, desde el 2 de noviembre de 1929, Monumento Histórico-Artístico Nacional.

4.13. Catedral de San Martín o la Catedral de Utrecht (Países bajos)

Figura 4.18: Arquitectura con forma del triangulo de Reuleaux.

es un edificio religioso que fue la catedral de la diócesis de Utrecht en los Países Bajos durante la Edad Media. Fue alguna vez la iglesia más grande de los Países Bajos, estando dedicada a San Martín de Tours.

4.14. Torre de transmición (Barcelona)

Figura 4.19: Paralelos radiales con forma del triangulo de Reuleaux.

4.15. Mecanismos para Escuelas Técnicas

Franz Reuleaux creó mas de 800 modelos de mecanismos y autorizó a la empresa alemana Gustav Voigt Mechanische Werkstatt, en Berlin, a fabricar más de 300 de estos modelos para su uso con fines pedagógicos en escuelas técnicas. En 1907, 368 modelos estaban disponibles en el catálogo de Voigt. Hoy en día, la mayor colección de estos modelos (220) se encuentra en la universidad de Cornell.

Figura 4.20: Modelo de rotacion del triangulo de Reuleaux.

4.16. Proyectores de Cine

Usando un triángulo de Reuleaux, se puede conseguir un movimiento intermitente.

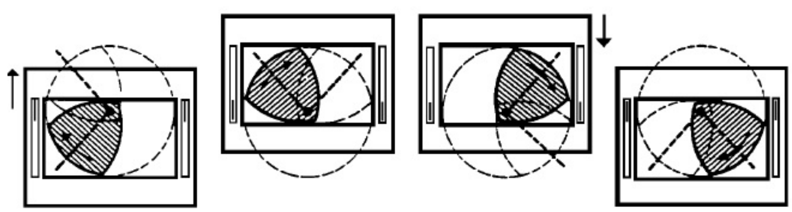


Figura 4.21: Rotación de un triángulo de Reuleaux en un proyector de cine.

La proyección de películas se basa en la permanencia de un fotograma en la pantalla durante un breve espacio de tiempo (1/24 seg), tras el cuál la película debe girar para pasar al siguiente fotograma, momento en el que el obturador debe quedar cerrado para que no aparezca una imagen borrosa. El mecanismo de obturación (que produce un ruido característico) se hace mediante un triángulo de Reuleaux que gira alrededor de uno de sus vértices. La pantalla de obturación está apoyada en dicho triángulo.

4.17. Museo Mercedes, Stutgart (Alemania)

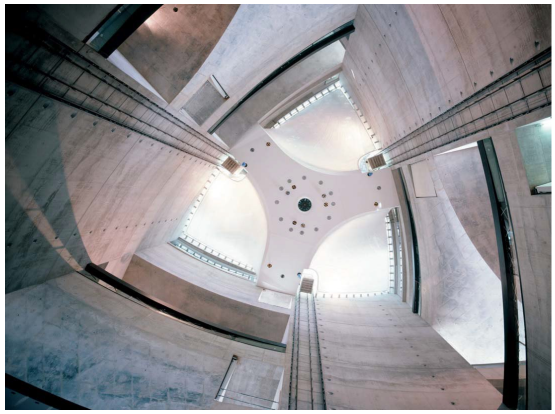


Figura 4.22: Cielo raso del museo Mercedes Benz en Stuttgart.

El edificio fue diseñado por el estudio holandés “UN Studio”, dirigido por los arquitectos Ben van Berkel y Caroline Bos. Se basa en un concepto de una hoja de trébol mediante la superposición de tres círculos con el centro sustituido para formar un atrio triangular. El museo se terminó y se inauguró en 2007.

4.18. Monedas

Las figuras de anchura constante funcionan bien en las máquinas que operan con monedas, ya que pueden girar en lugar de deslizarse. Para las personas ciegas resultan ser sencillas de reconocer, estas monedas las podemos encontrar en los depósitos de monedas descontinuadas de países como España e Inglaterra.

Figura 4.23: Monedas con forma de polígonos de Reuleaux.

4.19. Rompecabezas

En el espacio destinado a juegos de palabras del Blog del New York Times Por Gary Antonick, 24 de diciembre de 2012.

“ Qué hay sobre eso. Obvio ahora , pero no tan obvio en aquel entonces. ¿Cuál de las siguientes formas tienen un ancho constante?”

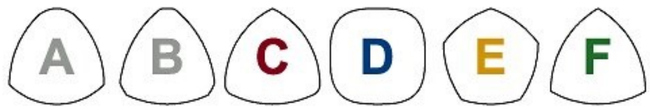


Figura 4.24: Rompecabezas New York Times.

“ A se construye a partir de 3 líneas que forman un triángulo isósceles con ángulos idénticos de menos de 60 grados ; C es el contrario , los ángulos idénticos son más de 60 grados. F proviene de un triángulo equilátero, y E de un pentágono regular.”

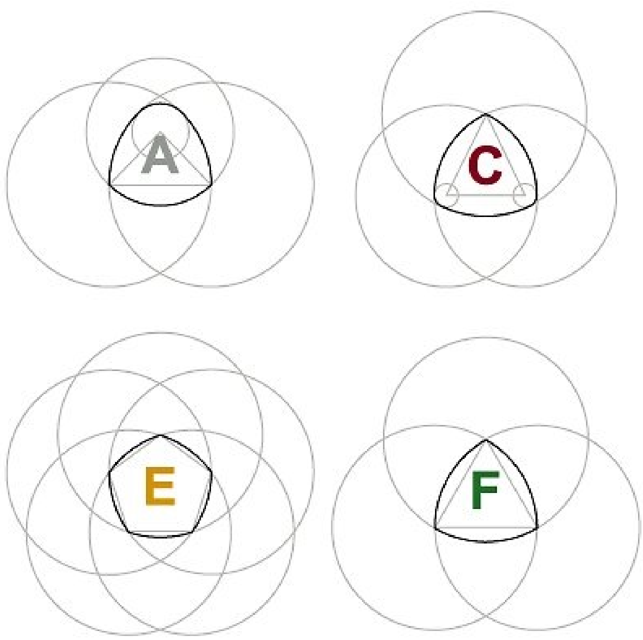


Figura 4.25: Solución del rompecabezas del New York Times.

CAPÍTULO 5

SECUENCIA DIDÁCTICA

En el presente capitulo se presenta la elaboración de una secuencia didáctica para ser desarrollada en una clase sobre construcción de figuras de ancho constante para grado décimo. A continuación se describen explicitamente los pasos:

5.1. Objetivos, Contenidos y Estándares

Objetivo de aprendizaje: Brindar a los estudiantes los conocimientos y las herramientas para las construcciones de figuras geométricas de ancho constante.

Contenidos a desarrollar:

1. Definición de figura de anchura constante
2. Algunos conceptos geométricos fundamentales (lados, vertices, diagonal, apotema, perimetro, áreas, arcos)
3. Utilización de elementos para construcciones geometricas como regla, compás y manejo del software GeoGebra.
4. Construcción del Triángulo de Reuleaux
5. Generalidades de los Polígonos de Reuleaux.

La secuencia se planteó teniendo en cuenta el siguiente problema contextual ¿es necesario aplicar la geometría a la vida, para involucrar experiencias significativas, que amplíen los conocimientos sobre figuras geométricas? Para dar respuesta a la pregunta anterior fueron tenidas en cuenta algunas competencias como describir el proceso de construcción atendiendo a las propiedades de las figuras geometricas,reflexionar sobre la precisión y las limitaciones de los instrumentos de trazo y de medida entre otras, tomadas de *Competencias Básicas en el Estudio de la Geometría, Sandra Gallardo*, que ayudan a implementar actividades que faciliten la construcción de figuras geométricas de anchura constante, por ejemplo, del saber conocer conceptos geométricos: área, perímetro, vértice, rectas paralelas, y recta tangente; del saber hacer la construcción de un triángulo equilátero y arcos de circunferencia sobre sus vértices y del saber ser responsable para el correcto manejo de los objetos geométricos.

Para la consecución de las competencias mencionadas se requiere también algunas actividades de aprendizaje autónomas de los estudiantes como la medición con reglas, escuadras y el uso adecuado del compás y visualización de figuras geométricas.

Estándar de competencia: Tomado del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos para el grado 10°-11°. Propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.
Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Recursos Materiales:

-Instrumentos de medición y trazo.: Reglas, escuadras, lapiz y compas.
-Tablero y material para tablero.
-Computador Portátil con instalación del programa Geógebra.
-Video beam

5.2. Procedimiento

Se inicia la actividad haciendo un diagnóstico de los conocimientos previos o preconceptos que posee el estudiante referente al tema, Posteriormente el docente induce la clase con una proyección de presentaciones en Power Point al tiempo que relata la historia y el concepto de las figuras de ancho constante y sus aplicaciones. Después se explica a los estudiantes como construir un triángulo de Reuleaux, para ello se les recuerda algunos conceptos geométricos como área, perímetro, vértice línea tangente a una curva y así el mecanismo general para cualquier nueva figura que los estudiantes quieran construir. Se da el espacio para que los jóvenes realicen sus construcciones con al menos los materiales fundamentales lápiz, regla y compás y demás ayudas didácticas que posean los estudiantes en clase. Finalmente los estudiantes exponen las figuras realizadas y los pasos que siguieron en su realización. Los profesores encargados concluyen con frases motivadoras sobre la trascendencia de la geometría.

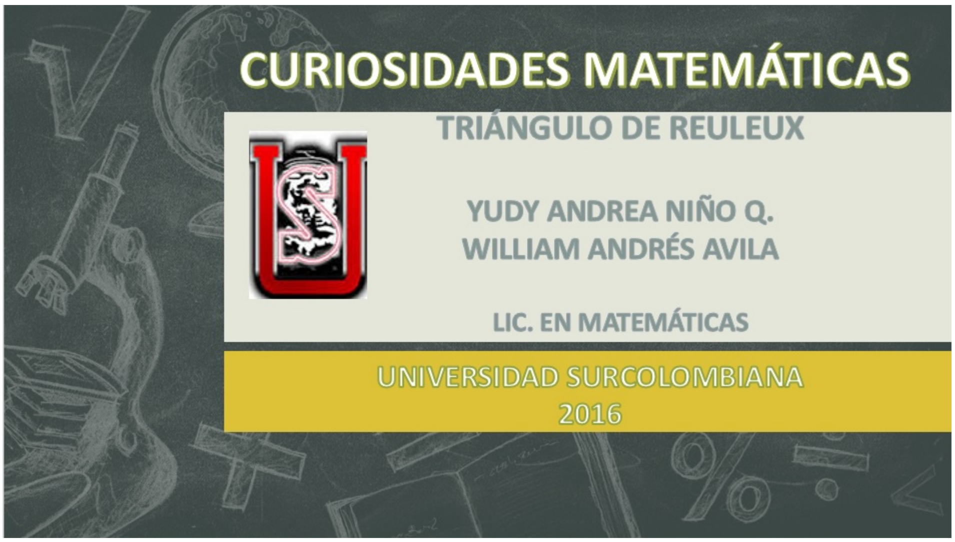
Proyecto de Clase:

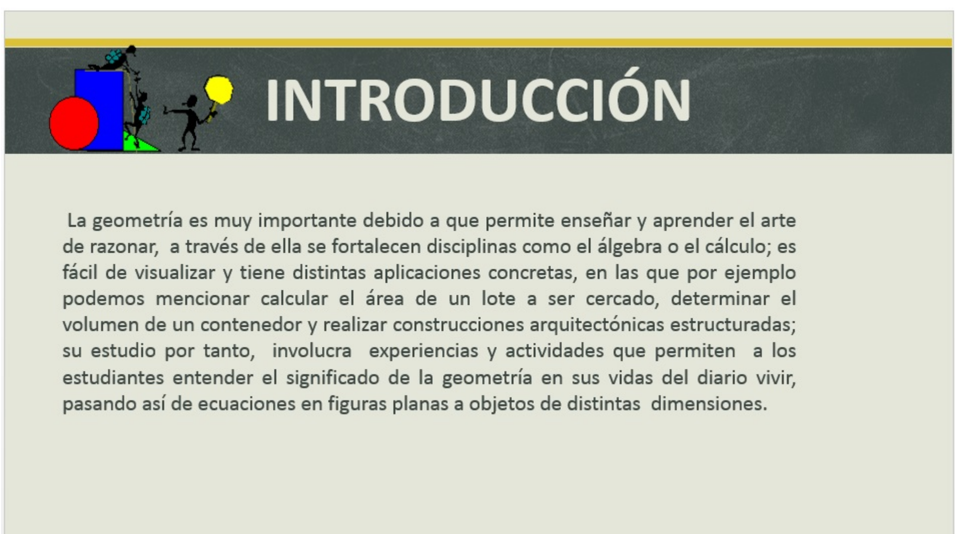
Apertura:

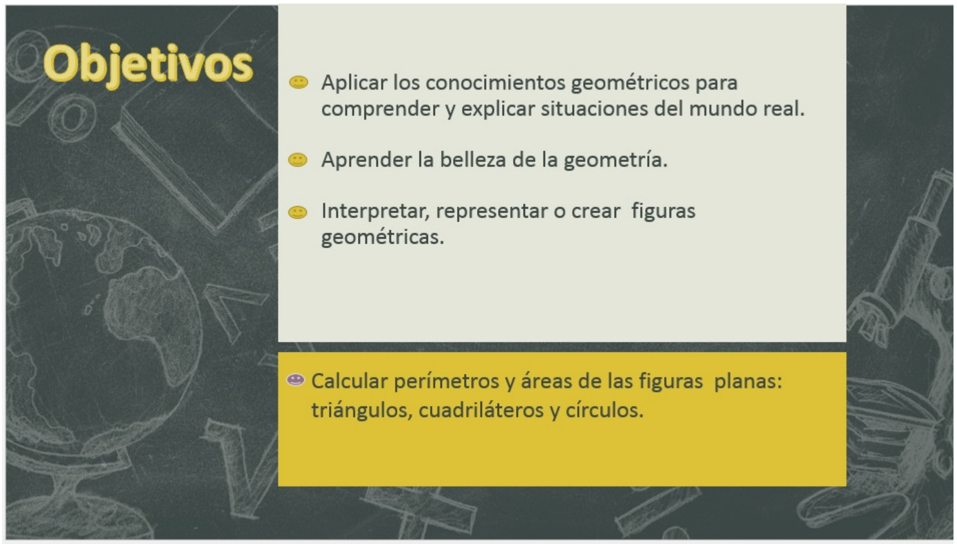
Los docentes inician con preguntas motivadoras, en las cuales, por medio de lluvia de ideas se recopilan los saberes previos (polígonos, polígonos regulares, triángulos equiláteros, áreas, perímetros y demás conceptos geométricos.) se inicia la actividad en torno a la siguiente pregunta: Además de un círculo, qué otra forma puede tener una tapa de alcantarilla para que no caiga a través de un agujero?.

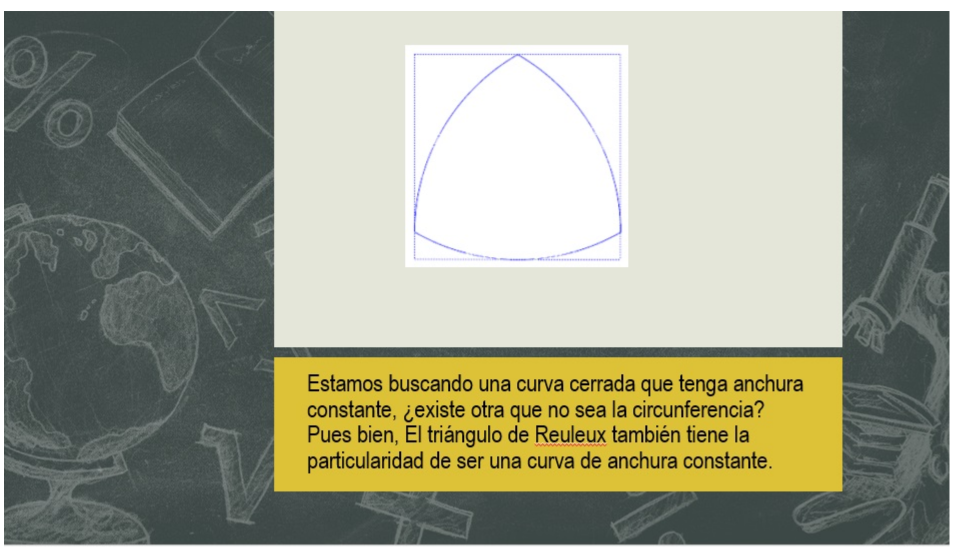
Desarrollo

Una vez discutida la pregunta motivadora y obteniendo las ideas principales se procede a desarrollar el contenido de la secuencia didáctica. Se procede a proyectar las presentaciones que exponen el tema de las figuras de anchura constante; Las mismas se visualizan a continuación:

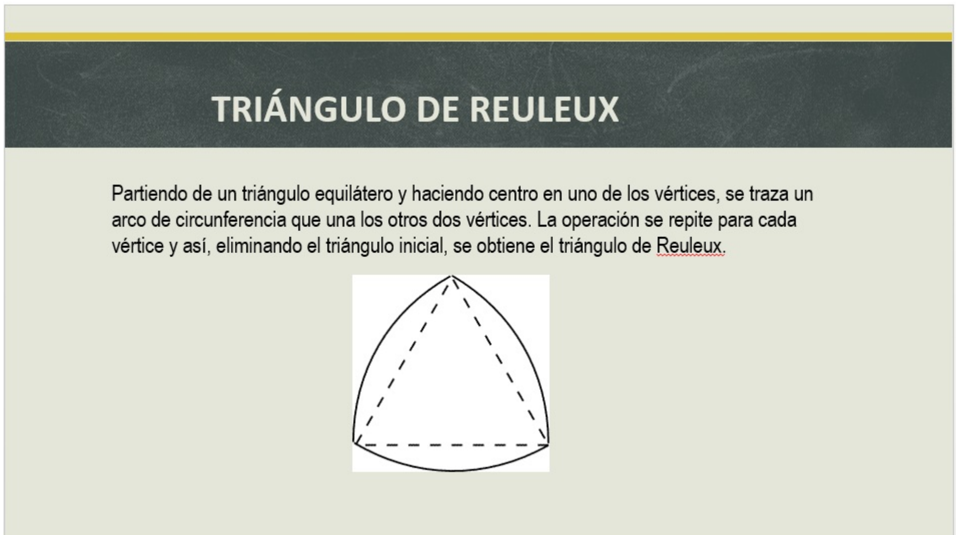


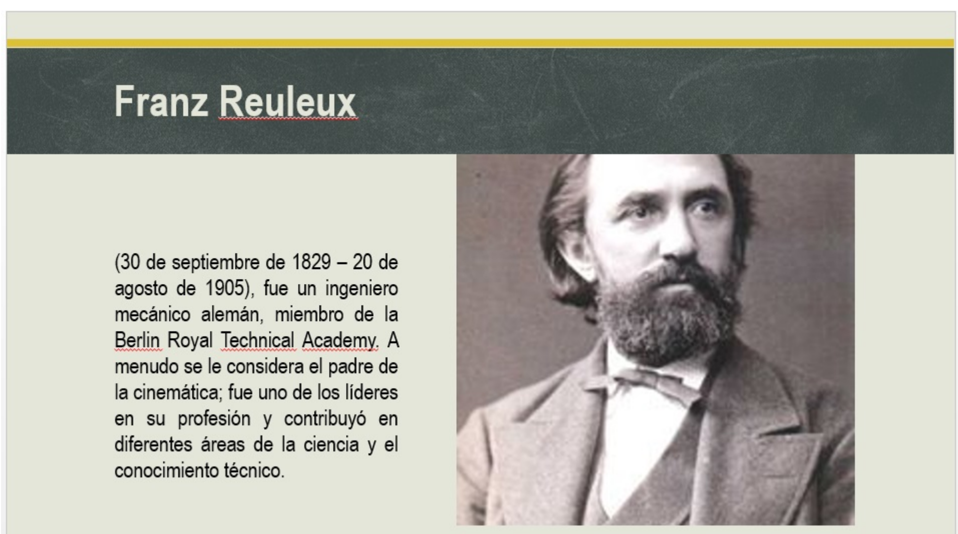



Objetivos
Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y explicar situaciones del mundo real.
Aprender la belleza de la geometría.
Interpretar, representar o crear figuras geométricas.
Calcular perímetros y áreas de las figuras planas: triángulos, cuadriláteros y círculos.

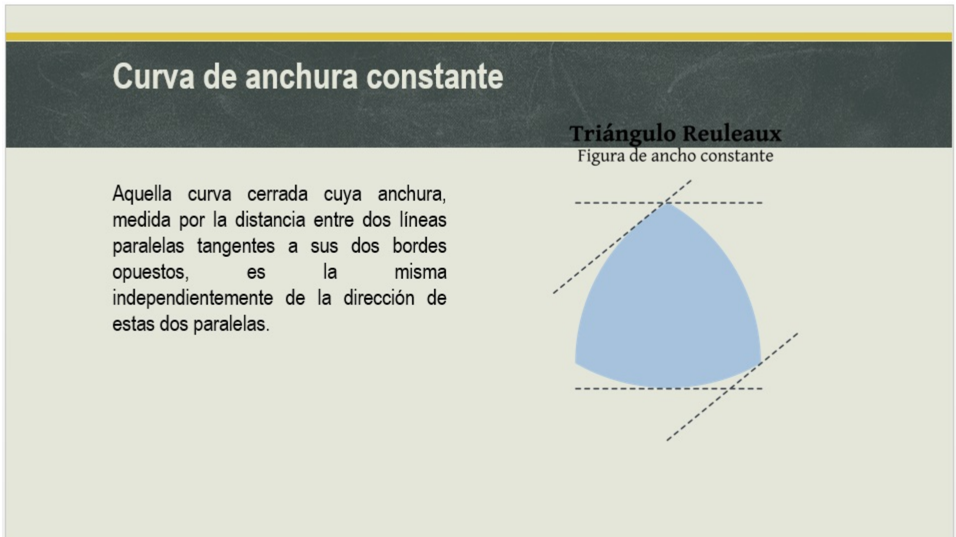

Estamos buscando una curva cerrada que tenga anchura constante, ¿existe otra que no sea la circunferencia? Pues bien, El triángulo de Reuleux también tiene la particularidad de ser una curva de anchura constante.

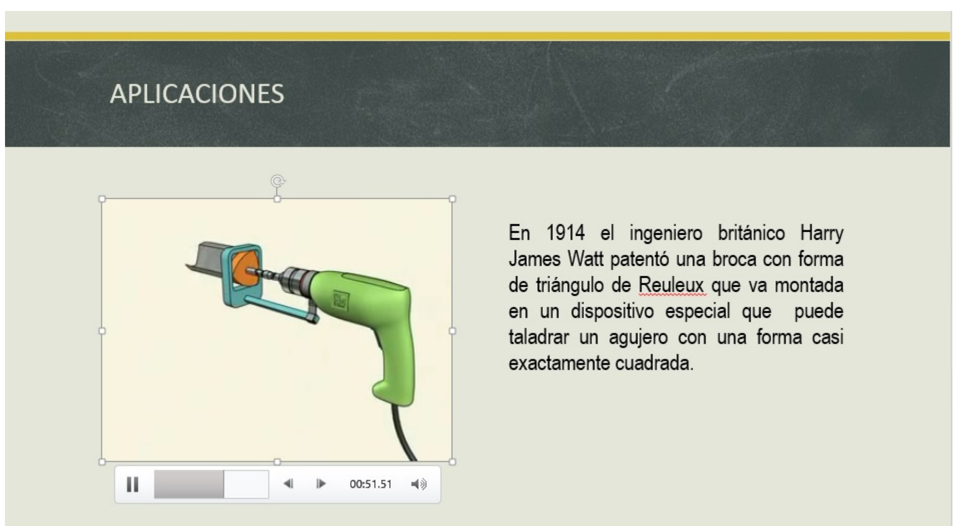
‘

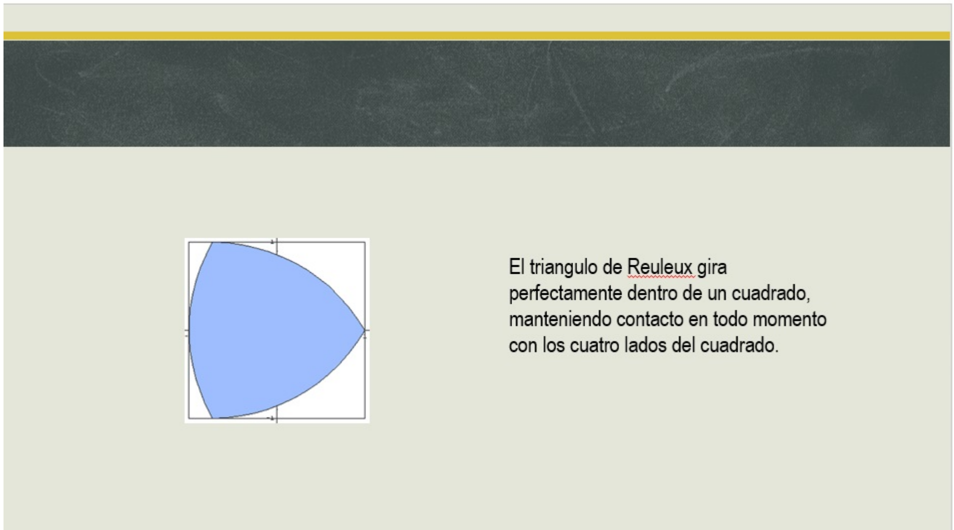

TRIÁNGULO DE REULEUX
Partiendo de un triángulo equilátero y haciendo centro en uno de los vértices, se traza un arco de circunferencia que una los otros dos vértices. La operación se repite para cada vértice y así, eliminando el triángulo inicial, se obtiene el triángulo de Reuleux.

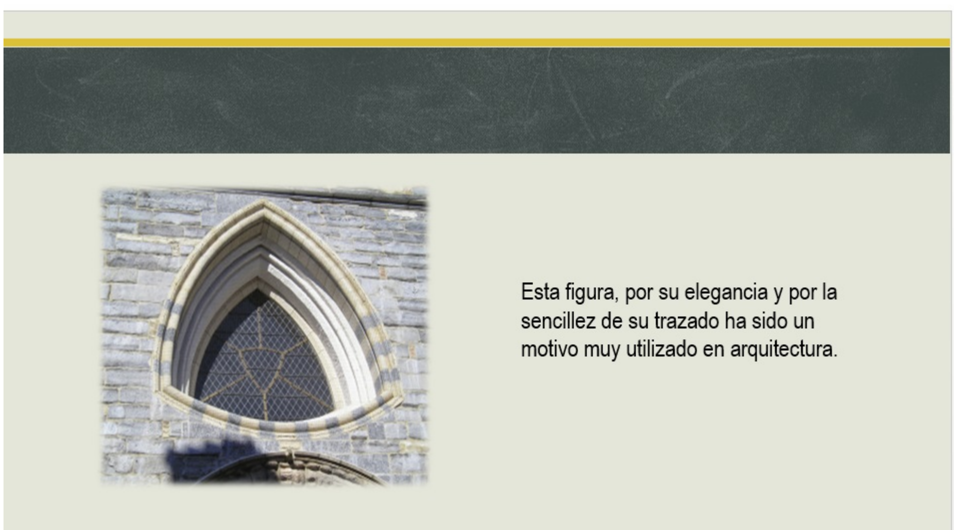

Franz Reuleux
(30 de septiembre de 1829 – 20 de agosto de 1905), fue un ingeniero mecánico alemán, miembro de la Berlin Royal Technical Academy. A menudo se le considera el padre de la cinemática; fue uno de los líderes en su profesión y contribuyó en diferentes áreas de la ciencia y el conocimiento técnico.

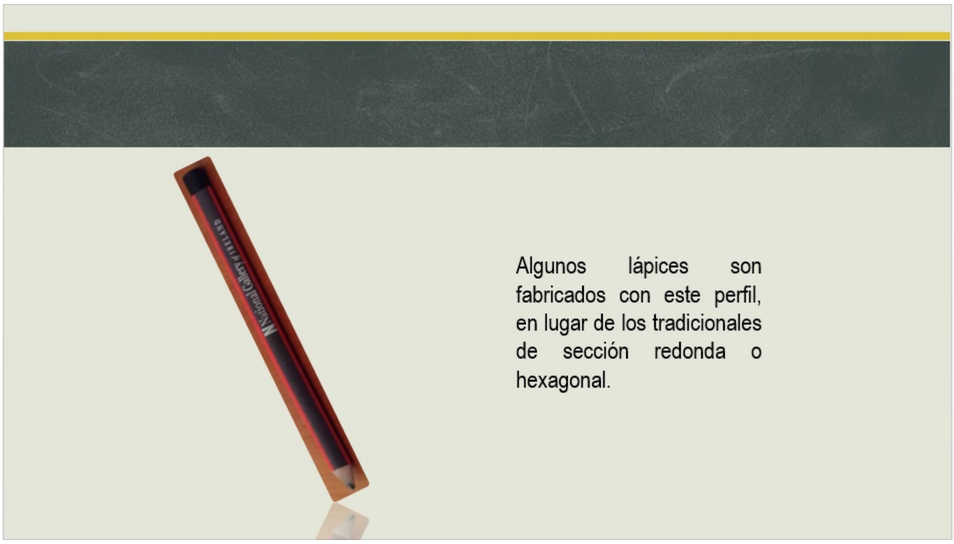
‘


Curva de anchura constante
Triángulo Reuleaux
Figura de ancho constante
Aquella curva cerrada cuya anchura, medida por la distancia entre dos líneas paralelas tangentes a sus dos bordes opuestos, es la misma independientemente de la dirección de estas dos paralelas.

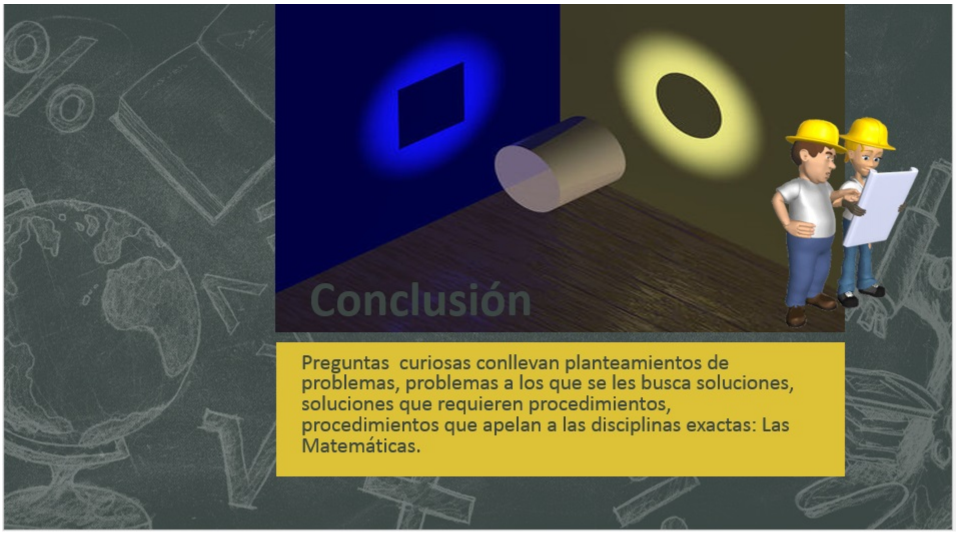

APLICACIONES
00:51.51
En 1914 el ingeniero británico Harry James Watt patentó una broca con forma de triángulo de Reuleux que va montada en un dispositivo especial que puede taladrar un agujero con una forma casi exactamente cuadrada.


El triangulo de Reuleux gira
perfectamente dentro de un cuadrado,
manteniendo contacto en todo momento
con los cuatro lados del cuadrado.


Esta figura, por su elegancia y por la
sencillez de su trazado ha sido un
motivo muy utilizado en arquitectura.


Algunos lápices son fabricados con este perfil, en lugar de los tradicionales de sección redonda o hexagonal.

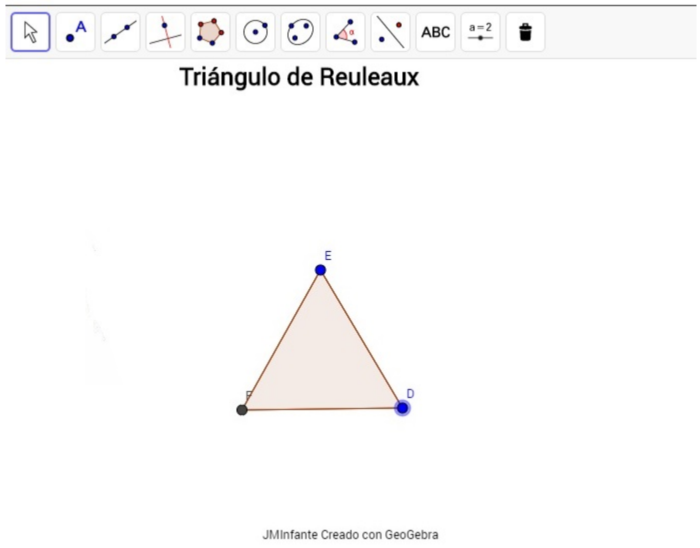

Otras aplicaciones
JUAN CARLOS I Y SOFIA
1999
500 PESETAS
ESPAÑA
ELIZABETH II·D·G·REG·F·D·2008

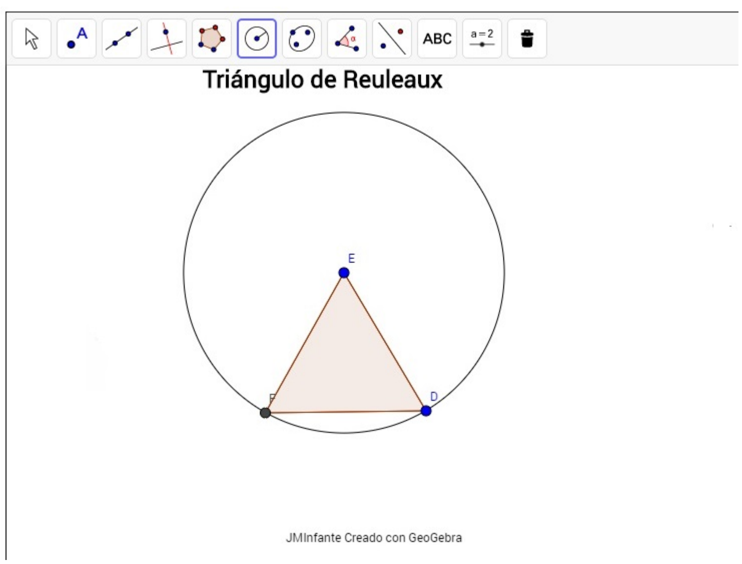


Posteriormente se explica a los estudiantes como construir un triángulo de Reuleaux, a partir de un triángulo equilátero y de la intersección de tres círculos donde cada uno de ellos toca dos vértices del triángulo. Se explica proyectando la imagen con el viedo beam de cómo hacer el polígono de anchura constante mediante el programa geógebra que previamente debe estar instalo en el portátil a utilizar, esta secuencia didáctica se programa considerando que todos los desarrollos incluidas las preguntas por parte de los estudiantes estén en un rango de 4 horas.

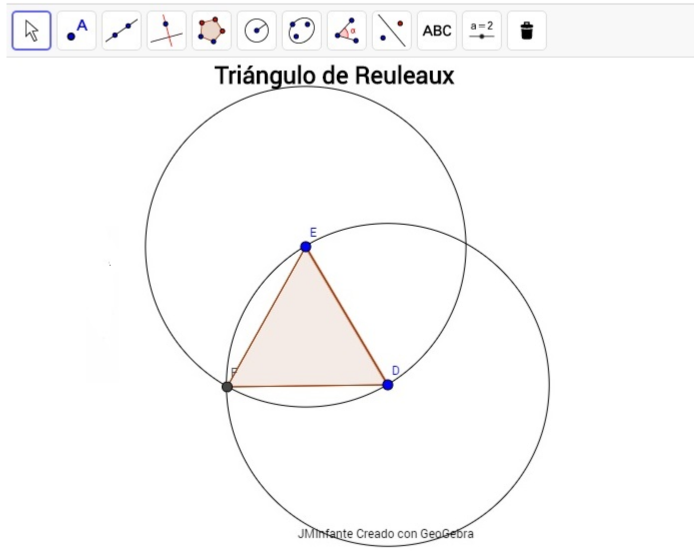
Aquí se muestran algunos de los pasos a seguir que se le dieron a los estudiantes:

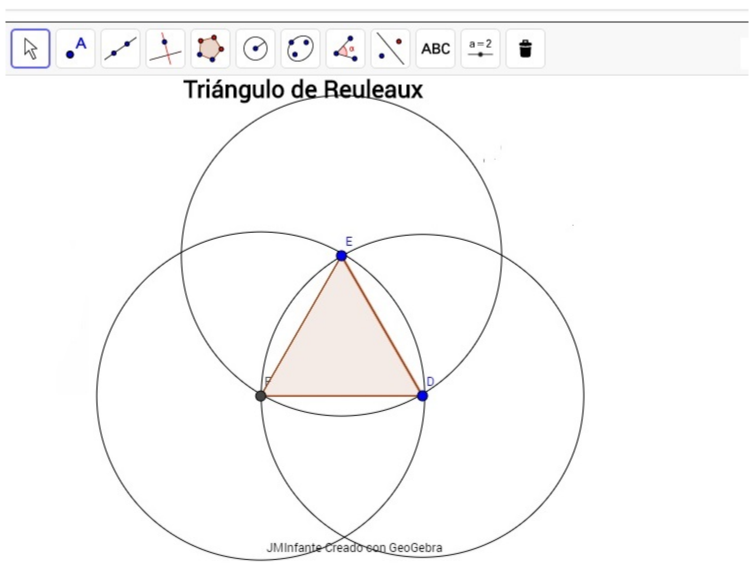
‘

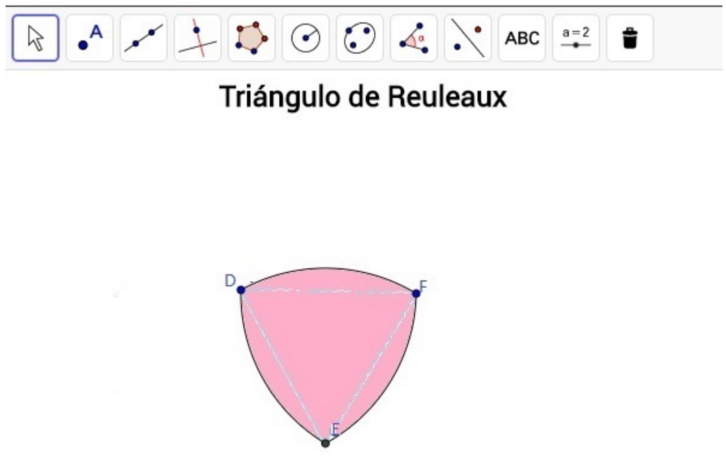




‘


Triángulo de Reuleaux
E
D
JMInfante Creado con GeoGebra


Triángulo de Reuleaux
E
D
JMInfante Creado con GeoGebra



Se espera que los estudiantes primeramente con regla y compás construyan un triángulo de Reuleaux. Posteriormente se elija algunos estudiantes para que lo construyan con el programa GeóGebra del computador.

Después de tener los polígonos dibujados se espera que los estudiantes los expongan frente a sus compañeros y empiecen a sacar sus propias conclusiones, sobre lo interesante de las figuras de ancho constante creadas a partir de polígonos ya conocidos y demás apuntes que quieran agregar sobre el tema.

Algunas conclusiones finales de la clase son las siguientes:

El mundo real en el que nos encontramos está rodeado de elementos geométricos con significados concretos: puertas ventanas, pisos, tableros, pupitres. En el entorno cotidiano, en casa, la ciudad,el colegio y espacios de juegos aprendemos a organizarnos mentalmente y a orientarnos en el espacio. Este es el contexto apropiado para desarrollar las enseñanzas geométricas, de manera significativa para los estudiantes. A partir de estas situaciones familiares y mediantes manipulativas se puede fomentar el desarrollo de los conceptos geométricos.

Lo que se trató fue de dar conocer las propiedades de las figuras de ancho constante a través de la presentación de métodos para su construcción, con la validez de construir figuras de ancho constante partiendo de polígonos regulares con un número impar de lados, teniendo como base el procedimiento para la construcción del triángulo de Reuleaux.

Para finalizar se menciona una afirmación expresada por Galileo Galilei (1564 – 1642):

"El universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto".

5.3. Analisis de la Validación Empírica.

Dentro de la secuencia que se aplicó consideramos algunos aspectos que se deben tener en cuenta para una próxima aplicación en clase de construcción de figuras de ancho constante:

Dedicar un tiempo adecuado (más amplio) para recordar y reforzar los conceptos previos de geometría en los estudiantes.

Para introducir nuevos conceptos que trae la temática de la secuencia sobre las figuras de anchura constante, es primordial hacer un recorrido histórico sobre el surgimiento de los polígonos de Reuleaux, enfatizando en su concepto, el contexto en el que se diseñaron y su utilidad.

Para la construcción de los polígonos Reuleaux es necesario resaltar cada uno de los pasos, tanto de la forma sistemática, es decir en el programa geogebra, como de la forma tradicional es decir con regla y compás, puesto que no todos están familiarizados con dicho programa.

En cuanto a los ejercicios de aplicación, para hallar el área y perímetro de un triángulo de Reuleaux es preciso inducir al estudiante a la respuesta, para facilitar su capacidad de razonamiento, sin limitarse a incorporarlo como un proceso estático.

Para que los estudiantes vean la aplicación real del tema de la secuencia didáctica son llevados a la clase objetos físicos diseñados a partir de los polígonos de Reuleaux como por ejemplo lápices, correctores de escritura, formas en madera fabricadas a partir de dichas propiedades, etc.

CONCLUSIONES

A partir de la investigación realizada se logró la construcción de algunos polígonos de Reuleaux con regla y compás y a partir de la utilización del software GeoGebra y se mencionarón sus propiedades más importantes.

Se menciona la historia de como aparecieron los mencionados polígonos, desde la antiguedad y de como el diseño se perfecciono y su utilidad a partir de necesidades del ser humano.

Fueron expuestas las principales aplicaciones y adaptaciones de estos polígonos al mundo tangible, en áreas como la ingeniería, la mecánica, la arquitectura, el arte, la cinemática y demás.

Se elaboró y aplicó una secuencia didáctica estructurada para estudiantes de grado décimo, que permite visualizar la construcción con regla y compás y vía GeoGebra que cumplía el conocimiento geométrico de los educandos y a la vez la aplicación del mismo en situaciones reales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aurelio Baldor. Geometria plana y del espacio con una introducción a la trigonométria.(2004)

[2] Bryant, J., Sangwin, C. How Round is Your Circle. Princeton University Press, New Jersey. (2008).

[3] Fernando Corbalán. Paseo matemático por la vida cotidiana. Centro de adultos de Utebo (Zaragoza).

[4] Francisco Martín e Inmaculada Fuentes. SUMA Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matematica. (Febrero 2005).

[5] Gary Antonick. New York Times Blog. (diciembre de 2012).

[6] Gleissner y Zeitler. El triángulo el Reuleaux y su centro de masas. (2000).

[7] Inmaculada Fernández Benito. Paseando entre polígonos y círculos. IES Núñez de Arce de Valladolid.

[8] J. P. Moreno. Conjuntos de anchura constante. Universidad Autónoma de Madrid.

[9] Molina Jaime Óscar Javier,Gil Fuentes Leidi Cristina, Martha Helena Orjuela Gómez.. Figuras de ancho constante: un tema por explorar. Universidad Pedagógica Nacional: ojmolina@pedagogica.edu.co . (Noviembre 2012) .

[10] Sergio Tobón Tobón, Julio H. Pimienta Prieto, Juan Antonio GarcÃ-a. Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias. Centro de Investigación en Formación y Evaluación (CIFE). (2010).

[11] Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias. (http://algebra1.dmcc.usach.cl/archivos/apuntes/complemetario/5-estructuras-algebraicas.pdf).

[12] Geogebra Online (https://www.geogebra.org/material/show/id/124609).

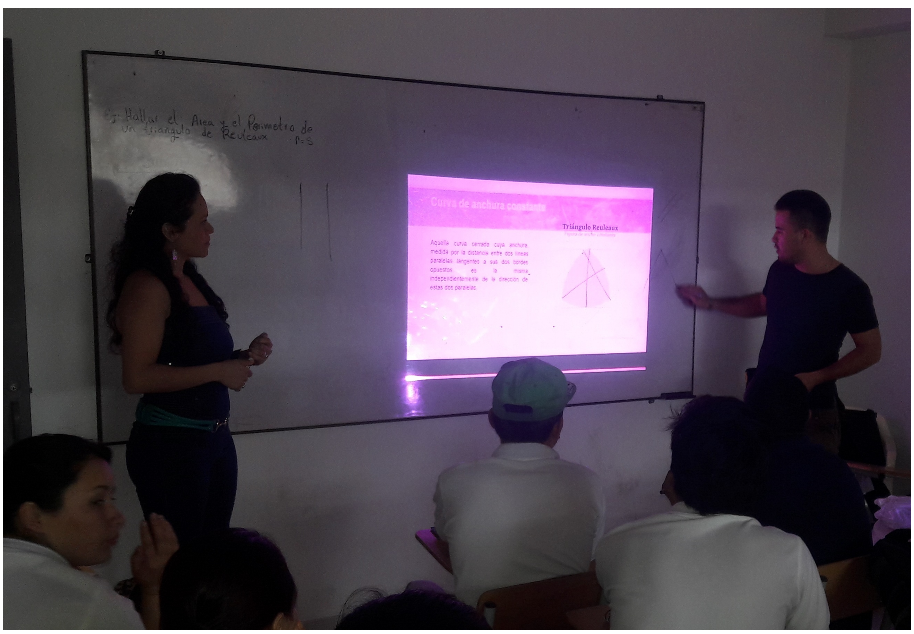
[13] Jill Britton . How to Drill a Square Hole . (https://www.youtube.com/watch?v=L5AzbDJ7KYI)

[14] VicHaunter.org, . Broca para hacer agujeros cuadrados. (https://www.youtube.com/watch?v=HTlR0OVVAmI)

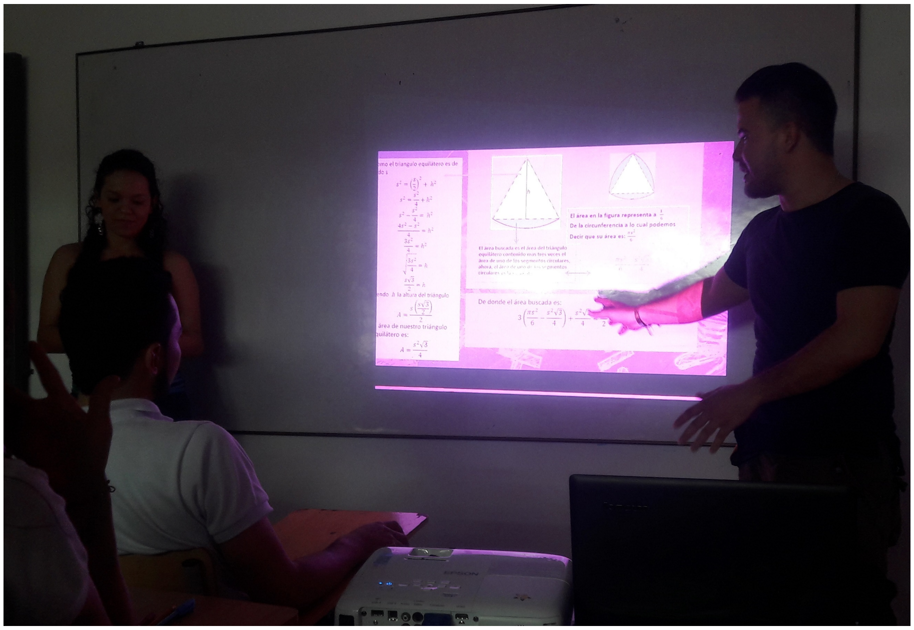
[15] Wikipedia la enciclopedia libre.. Franz Reuleaux (https://es.wikipedia.org/wiki/FranzReuleaux)

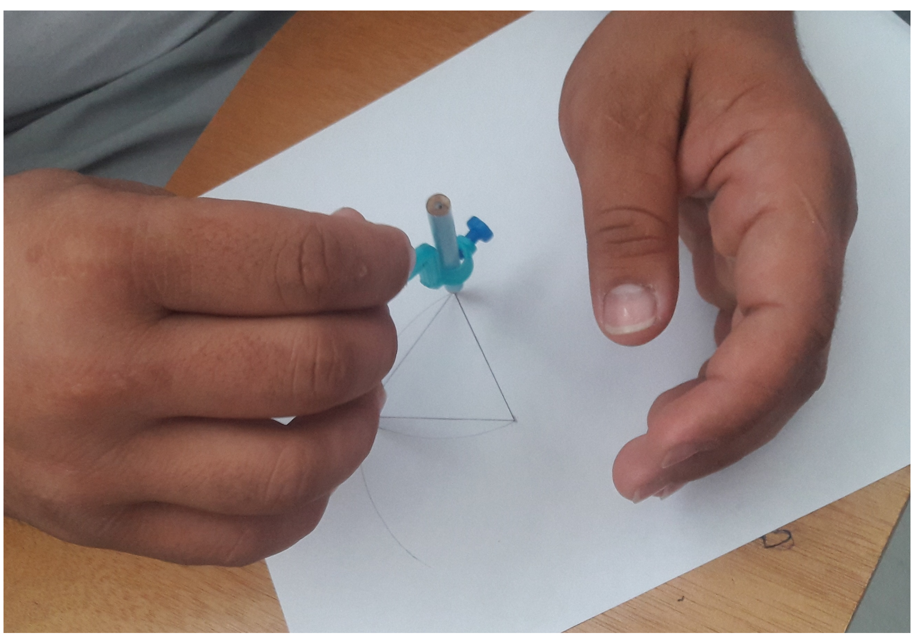
ANEXO 1

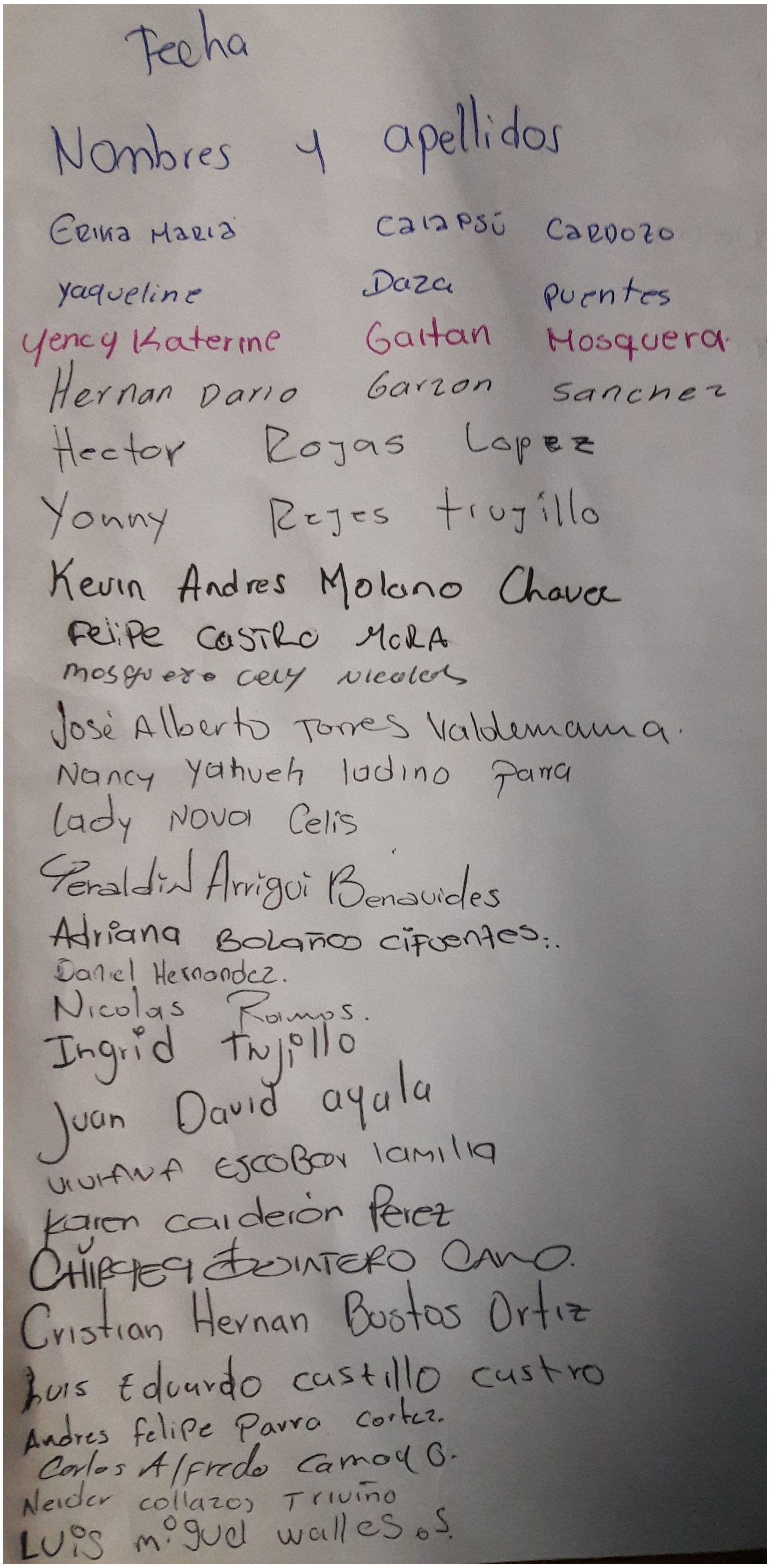
EVIDENCIA FOTOGRÁFICA



‘


mo el triangulo equilátero es de
do s
$s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2$
$s^2 = \frac{s^2}{4} + h^2$
$s^2 - \frac{s^2}{4} = h^2$
$\frac{4s^2 - s^2}{4} = h^2$
$\frac{3s^2}{4} = h^2$
$\sqrt{\frac{3s^2}{4}} = h$
$\frac{s\sqrt{3}}{2} = h$
endo h la altura del triángulo
$A = \frac{s\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$
área de nuestro triángulo
quilátero es:
$A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$
h
El área en la figura representa a $\frac{1}{6}$
De la circunferencia a lo cual podemos
Decir que su área es: $\frac{\pi s^2}{6}$
El área buscada es el área del triángulo
equilátero contenido mas tres veces el
área de uno de los segmentos circulares,
ahora, el área de uno de los segmentos
De donde el área buscada es:




Fecha

Nombres y apellidos

Erika Maria Calapsú Cardozo
yaqueline Daza puentes
yency Katerine Gaitan Mosquera.
Hernan Dario Garzon sanchez
Hector Rojas Lopez
Yonny Reyes trujillo
Kevin Andres Molano Chavez
Felipe Castro Mora
mosquera cely nicolas
José Alberto Torres Valderrama.
Nancy yaneth ladino parra
lady Nova Celis
Geraldin Arrigui Benavides
Adriana Bolaños cifuentes.
Daniel Hernandez.
Nicolas Ramos.
Ingrid Trujillo
Juan David ayala
viviana Escobar lamilla
karen calderón Perez
[illegible] QUINTERO CANO.
Cristian Hernan Bustos Ortiz
Luis Eduardo castillo castro
Andres felipe Parra cortez.
Carlos Alfredo Camargo G.
Neider collazos Triviño
Luis miguel walles o.s.

Figura 1.1: Listado de estudiantes Participantes.

ANEXO 2

SECUENCIA DADA A LOS ESTUDIANTES

INSTITUTO POLITECNICO JOSE CELESTINO MUTIS

Area de Geometría: Construyendo figuras de ancho constante

Docentes: William Andrés Avila –Yudy Andrea Niño Q.

Actividades a desarrollar

1. Visualizar las representaciones en power point que se proyectan al inicio de la clase, a manera de introducción al tema de Polígonos de Reuleaux.

2. Realizar una lluvia de ideas sobre las figuras de ancho constante, para proceder a la composición de su concepto.

____
____
____
____
____

3. Ejercicios de aplicación del triángulo de Reuleaux.

4. Explicación de la construcción para un triángulo de Reuleaux a partir de la intersección de arcos de circunferencia.

____
____
____
____
____

5. Construcción para un polígono de Reuleaux a partir de un polígono de tres lados, usando instrumentos de medición y trazo como la regla y el compás.