

	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS					  	
	CARTA DE AUTORIZACIÓN						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 2

Neiva, noviembre 23 de 2015

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Darwin Enrique Mosquera Diaz, con C.C. No. 1.075.208.256,

Luis Enrique Leiva Morantes, con C.C. No. 1.075.231.075,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o titulado: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISION EN EL GRADO TERCERO DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA.

Presentado y aprobado en el año 2015 como requisito para optar al título de

Licenciado en Matemáticas;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

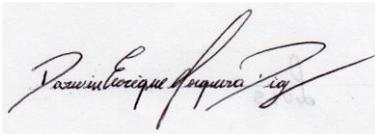
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS						  
	CARTA DE AUTORIZACIÓN						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

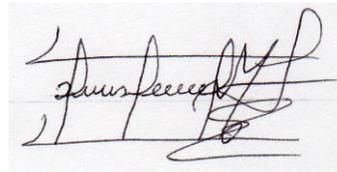
EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:





GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 3

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Estrategias didácticas para la enseñanza de la multiplicación y división en el grado tercero de educación de básica primaria.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Diaz	Darwin Enrique
Leiva Morantes	Luis Enrique

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio
Alvis	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2015 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 105



GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 3
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas __x_ Fotografías __x_ Grabaciones en discos __x_ Ilustraciones en general __ Grabados __
Láminas __ Litografías __ Mapas __x_ Música impresa __ Planos __ Retratos __ Sin ilustraciones __ Tablas
o Cuadros __x

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Procesador científico de texto "LATEX"

MATERIAL ANEXO: Fotos y guías didácticas

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Enseñanza	Teaching	6. Didáctica	Didactic
2. Aprendizaje	Learning	7. Matemáticas	Mathematics
3. Experimental	Experimental	8. Minicomputador	Minicomputer
4. Yupana	Yupana	9. Lineamientos curriculares	Curriculum guidelines
5. Estudio de clase	Study class	10. Competencias	Competitions

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El presente trabajo de grado tiene como propósito diseñar estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación y división en estudiantes de tercer grado. El desarrollo de este proyecto es factible a partir de un diseño cuasiexperimental, que se desarrolló en cuatro fases: La fase diagnóstica que permitid describir el desarrollo de las clases de matemáticas y obtener información sobre el uso de estrategias innovadoras, la fase de diseño de recursos y estrategias didácticas, la fase de aplicación donde se aplicaron estrategias lúdicas (La Yupana, multiplicación Maya, Egipcia, las regletas Cuisinare y el minicomputador de Papy) que posteriormente fueron evaluadas con el fin de llegar a una serie de conclusiones, luego de analizados los datos y las relaciones entre ellos.



GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 3

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This degree work aims to design teaching strategies for teaching and learning multiplication and division in third grade students. The development of this project is feasible from a quasi-experimental design, which was developed in four phases: diagnostic phase Allow describe the development of math classes and information on the use of innovative strategies, the design phase of resources and teaching strategies, the implementation phase where playful strategies (the Yupana, Maya multiplication, Egyptian, the Cuisinare strips and minicomputer Papy) which were then evaluated in order to reach a number of conclusions were applied, then analyzed data and relationships between them.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauricio Penagos

Firma:

Nombre Jurado: Mauricio Penagos

Firma:

Nombre Jurado: Johnny Fernando Alvis.

Firma:



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA
ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN
Y DIVISIÓN EN EL GRADO TERCERO
DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Darwin Enrique Mosquera Díaz
Luis Enrique Leiva Morantes

Neiva - Huila
2015



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA
ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN
Y DIVISIÓN EN EL GRADO TERCERO
DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

*Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas*

Darwin Enrique Mosquera Díaz
2007276616

Luis Enrique Leiva Morantes
2007270192

Asesor:
MSc. Mauricio Penagos

Neiva - Huila
2015

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar un Proceso tan arduo y lleno de dificultades como el desarrollo de un trabajo de grado es inevitable que nos asalte un muy humano egocentrismo que nos lleva a concentrar la mayor parte del mérito en el aporte que hemos hecho. Sin embargo, el análisis objetivo muestra inmediatamente que la magnitud de ese aporte hubiese sido imposible sin la participación de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este proceso llegue a un feliz término. Por ello, es para nosotros un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles nuestros agradecimientos. Por sus aportes en nuestra historia.

Nos gustaría que estas líneas sirvieran para expresar nuestro más profundo y sincero agradecimiento al MSc. Mauricio Penagos, asesor de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de este tiempo.

Ante todo, queremos agradecer a nuestros padres por apoyarnos, creer en nosotros y en nuestros sueños. Ellos son la base de las personas que somos. Con su dedicación y sus enseñanzas hemos crecido como personas muy afortunadas, dentro de un ambiente familiar acogedor y hermoso.

Durante los años que hemos pasado en esta Universidad, hemos conocido personas muy valiosas que sembraron en nosotros un amor infinito por esta profesión y nos dieron oportunidades que permitieron desarrollarnos en el medio, a las cuales también queremos agradecer: los compañeros que se convirtieron en grandes amigos y los profesores de gran calidad, que nos dieron una excelente formación académica.

A todos ustedes nuestro, mayor reconocimiento y gratitud.

PRESENTACIÓN	11
OBEJETIVOS	13
0.1. Objetivo General	13
0.2. Objetivos Específicos	13
JUSTIFICACIÓN	15
1. FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	17
1.1. Antecedentes	18
2. MARCO TEÓRICO	21
2.1. El Estudio de Clases en la enseñanza	24
2.2. Los Lineamientos Curriculares	25
2.2.1. Antecedentes	25
2.2.2. Referentes curriculares	27
2.3. Estándares de Matemáticas del MEN	31
2.4. Las Competencias en matemáticas	33
2.4.1. Aproximación a su etimología	33
2.4.2. A Nivel Nacional	33
3. MARCO METODOLÓGICO	37
3.1. Tipo de Investigación	37
3.1.1. Diseño	38
3.1.2. Ventajas	38
3.2. Diseño de la investigación	40
3.3. Fases de la Investigación	41
3.4. Población y Muestra	42
3.4.1. Población	42
3.4.2. Muestra	42
3.5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos	43
3.5.1. Cuestionario	43
3.5.2. Observación	44
3.5.3. Entrevista	44
3.5.4. Documentos Escritos	44

3.6. Validez del Instrumento	45
3.6.1. Validez	45
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS	47
4.1. Introducción	47
4.2. Fase Diagnostica	48
4.2.1. Análisis de la Prueba Diagnóstica	48
4.3. Resultados	48
4.4. El Minicomputador de Papy	49
4.4.1. Aplicación del Minicomputador de Papy en la Multiplicación.	49
4.4.2. Análisis del Minicomputador de Papy en la División	50
4.5. La Yupana	51
4.5.1. Análisis de la Yupana en la Multiplicación.	51
4.5.2. Análisis de la Yupana en la División.	52
4.6. Las Regletas de Cuisenaire	52
4.6.1. Análisis de las Regletas de Cuisenaire en la Multiplicación	52
4.6.2. Análisis de las Regletas de Cuisenaire en la División	53
4.7. Método de la Celosía, o de Fibonacci	54
4.7.1. Análisis Método de la Celosía, o de Fibonacci	54
4.8. La Multiplicación Egipcia del Año, 2500 a.C.	55
4.8.1. Análisis de la Multiplicación Egipcia del Año, 2500 a.C.	55
4.9. La Multiplicación Maya	56
4.9.1. Análisis de la Multiplicación Maya	56
4.10. Análisis Del Grupo que se le Aplico el Método Tradicional	57
4.10.1. Análisis de la Multiplicación	57
4.10.2. Análisis de la División	58
4.11. Comparación Entre El Método Tradicional Y Las Estrategias Didácticas	59
4.12. Minicomputador de Papy y el Método Tradiciona de la Multiplicación	59
4.13. La Yupana y el Método Tradiciona de la Multiplicación	60
4.14. Regletas de Cuisenaire y el Método Tradiciona de la Multiplicación	60
4.15. Método de la Celosá, o de Fibonacci y el Método Tradiciona de la Multiplicación	60
4.16. Multiplicación Egipcia y el Método Tradicional de la Multiplicación	61
4.17. Multiplicación Maya y el Método Tradicional de la Multiplicación	61
4.18. Minicomputador de Papy y el Método Tradicional de la Multiplicación	61
4.19. La Yupana y el Método Tradicional de la división	62
4.20. Regletas de Cuisenaire y el Método Tradicional de la división	62
4.21. Evaluación del Proceso	62
4.22. Alcances	62
4.23. Logros	62
4.24. Dificultades	63
5. RECURSOS	65
5.1. Recursos humanos	65
5.2. Recursos Materiales	65
6. CONCLUSIÓN	67
7. RECOMENDACIONES	69
BIBLOGRAFÍA	69

1. ANEXOS	73
1.1. Listado de estudiantes	73
1.2. Prueba Diagnostica	74
1.3. Guias Didácticas	78
1.3.1. El Minicomputador de Papy	78
1.3.2. La Yupana	84
1.3.3. La Regletas de Cuisenaire	91
1.3.4. Método de la Celosía, o de Fibonacci	93
1.3.5. La Multiplicación Egipcia del Año 2,500 a.C.	96
1.3.6. La Multiplicación Maya	99
1.4. Evidencia Fotográfica	102

PRESENTACIÓN

El presente trabajo de grado tiene como propósito diseñar estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y división en estudiantes de tercer grado. El desarrollo de este proyecto es factible a partir de un diseño cuasiexperimental, que se desarrollo en cuatro fases: La fase diagnóstica que permitid describir el desarrollo de las clases de matemáticas y obtener información sobre el uso de estrategias innovadoras, la fase de diseño de recursos y estrategias didácticas, la fase de aplicación donde se aplicarán estrategias lúdicas (La yupana, multiplicación maya, egipcia, las regletas cuisinare y el minicomputador de papy) que posteriormente fueron evaluadas con el fin de llegar a una serie de conclusiones, luego de analizados los datos y las relaciones entre ellos.

Los instrumentos y técnicas que se utilizarón fueron: cuestionarios, observación participante en el aula, escala de estimación y guías. Esperamos que los resultados de esta investigación contribuyan a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación y división en el grado tercero de primaria y a su vez proporcionen un recurso de apoyo a la labor docente.

Se presentan algunos aspectos importantes que deben tener en cuenta los docentes para la enseñanza de la multiplicación y división. Para ello, se proponen actividades que incluyen estrategias didácticas a fin de facilitar los procesos algorítmicos junto con ejemplos contextualizados para ejercitar, las cuales hoy en día son de gran importancia en la resolución de problemas que se presenten en la vida diaria de los niños.

En el ámbito de la educación matemática y su problemática siempre aparece la pregunta ¿ Qué metodología deberá utilizar el docente de manera que sus estudiantes aprendan y pongan en práctica lo que se les enseña en las clases de matemáticas?. Este interrogante siempre ha sido una de las dificultades más frecuentes y difíciles de abordar. Sus efectos se ponen de manifiesto al observar que cuando nuestros estudiantes se enfrentan a una evaluación, por no mencionar las pruebas censales que realiza el Estado (Pruebas Saber), no saben cómo aplicar los principios básicos de la matemática tratados por el docente en la clase. Se hace notoria la dificultad para razonar y deducir; no comprenden bien el sentido de los textos, y tampoco consiguen argumentar con claridad y método.

Al observar esta problemática que es usual en la mayoría de los centros escolares, por lo general se trata de buscar culpables. Para los padres de familia es fácil culpar a los docentes de estos problemas por sus métodos tradicionales de enseñanza. Afirman que son los docentes quienes

tienen la responsabilidad de que los estudiantes no logren aprendizajes significativos. Debemos tener en cuenta que la enseñanza no consiste en llenar a los estudiantes de contenidos, sino que ellos aprenden a utilizarlos y ponerlos en práctica, no solo se aprende en la escuela, sino también cuando se están fuera de ella. De la misma manera, el docente culpa al padre de familia por el desempeño educativo de sus estudiantes al afirmar que en los hogares no se educa en la responsabilidad académica.

La propuesta actual del Ministerio de Educación Nacional (MEN) es que se evalúe por competencias, con lo cual cada estudiante pueda alcanzar un cierto nivel de desempeño estandarizado que les permite promoverse a grados superiores. Pero ¿será que esto es suficiente para afirmar que cada estudiante promovido sea capaz de analizar, argumentar, deducir y solucionar problemas reales? Sin duda puede decirse que sabemos solo aquello que recordamos y logramos aplicar, lo que nos hace personas con la capacidad de crear, pensar, de ser afectivos, de aplicar bien los procesos comunicativos y de socialización.

El desarrollo de cualquier tipo de proceso matemático no consiste únicamente en memorizar un conjunto de fórmulas y algoritmos, sino en la capacidad que tenga a razonar, analizar y resolver los problemas de muchas maneras distintas. La clave de una buena educación debe estar en desarrollar en cada uno de nosotros el sentido por buscar y conocer lo que queremos lograr a futuro.

Los contenidos teóricos en la educación son importantes, en lo que tiene que ver con el conocimiento, sin embargo tienden a ser secundarios; tal vez necesitamos una educación que tenga sobre todo un propósito, un método y una actitud, solo así cada estudiante pueda desarrollar lo mejor de sí mismo y lo lleve a lograr que lo que aprenda no lo memorice, sino que aprenda a ponerlo en práctica y que tantos años de estudios se vea reflejado.

Es posible pensar que el origen de las dificultades del aprendizaje es debido fundamentalmente a unos planteamientos metodológicos inadecuados y especialmente a la falta de motivación en el aula. Efectivamente, las metodologías repetitivas basadas en el aprendizaje de los objetos matemáticos como objetos propios de la matemática y no como útiles para resolver problemas, suelen dejar indefensos a los estudiantes cuando se tienen que enfrentar a verdaderas situaciones problemáticas, que se salen de los denominados problemas tipo empleados para memorizar procesos y algoritmos de resolución. Los planteamientos metodológicos deben considerar un desarrollo y perfeccionamiento de los elementos didácticos, lúdicos y heurísticos, mutuamente interrelacionados que deben utilizar los docentes en la clase para “enamorar” a sus estudiantes.

La escuela tiene todo el tiempo para experimentar ¹, proponer estrategias y métodos de aprendizaje, que deben estar enfocados en el entusiasmo, la solidaridad, la cooperación, la motivación. Todo esto implementando el uso de la creatividad haciendo que todo sea fácilmente en el momento de resolver problemas de un modo original y armonioso que haga que de un sentimiento que logre ser llamativo a la vista de cada una de las personas que quiere aprender. Para todo esto se requiere, sin duda que conocimiento y los que lo imparte sean lo más valorado que tenga nuestra sociedad, puesto que son los principales encargados de introducir las nuevas generaciones en el mundo.

¹ Pag 37 Carta al maestro desconocido de Lámpara Maravillosa - William Ospina, Octubre de 2012

0.1. Objetivo General

Diseñar y validar estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división, en el grado tercero de primaria.

0.2. Objetivos Específicos

- Hacer un diagnóstico sobre el uso de estrategias de enseñanza y aprendizaje aplicadas por los desarrolladores del trabajo de grado.
- Diseñar estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones multiplicación y división.
- Fomentar en cada uno de los estudiantes el trabajo colaborativo para el desempeño de las actividades en el aula de clase.
- Evaluar las estrategias didácticas aplicadas, con el fin de determinar el aprendizaje de la multiplicación y división en el grado tercero.

JUSTIFICACIÓN

Hasta hoy las metodologías utilizadas con relación a la enseñanza de la matemática se han centrado principalmente en darle al estudiante una definición o una fórmula, para luego resolver ejercicios siguiendo patrones de imitación, sin que los estudiantes entiendan a veces lo que están haciendo, y en general no se desarrollara la capacidad creadora e integradora del estudiante. No se enfatizan los conceptos, pero sí los procedimientos, sin mucho sentido y dando énfasis a la memorización. (Contreras, 1995; Cabrera y Fuentes, 1996; Molina y Víquez, 1996; Bertarioni y Herrera, 1997).

En ese sentido, es necesario investigar qué metodologías pueden ser utilizados por los docentes en el proceso de E-A de la multiplicación y división, que facilita desarrollar las habilidades intelectuales que permitan al educando aprender constantemente y con independencias las cuestiones prácticas de su vida cotidiana.

El resultado de esta investigación permitirá hacer una aproximación a nivel regional de cómo superar las dificultades en la enseñanza de tales operaciones en las matemáticas del grado tercero, y a la vez promover actividades con estrategias incentivas y de reflexión a los docentes frente a los algoritmos comúnmente utilizados que le permitirán generar sus propias ideas de observación, construcción y transformación, que favorezca los procesos de enseñanza y aprendizaje. En lo que tiene que ver con estrategias, estas son motivadas grupalmente, orientadas culturalmente y adaptadas en la interacción con otros.

En definitiva, se utilizará diferentes formas para favorecer una enseñanza adaptada al entorno, una combinación de estrategias didácticas en función del tipo contenido para que se ajuste de forma individual y grupal a las características e interés del educando.

CAPÍTULO 1

FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El MEN en su preocupación de mejorar la calidad de la educación y de elevar los niveles educativos, ha considerado como prioritarios los conocimientos que se adquieren en las asignaturas de Lenguaje y Matemáticas, sin descuidar la relación de éstas con otras asignaturas. Ambas áreas fundamentales son utilizadas a menudo en la vida cotidiana, empleándose frecuentemente cuando el estudiante piensa lógicamente, lee, escribe, habla, escucha, razona o resuelve algún problema matemático.

La matemática permite al hombre resolver situaciones de variada índole como por ejemplo el dinero necesario para realizar una compra, estimación de tiempo al recorrer cierta distancia donde se conoce una velocidad aproximada constante, el volumen requerido al llenar un recipiente, etc. Éste constante empleo, que se efectúa de la matemática en todos los ámbitos, originó el interés por conocer el nivel de aprendizaje que alcanzan los educandos en el tercer y cuarto grado de educación primaria. El nivel de aprendizaje del estudiante, es factor de interés, por ser elemento de análisis del educador con relación al significado y utilidad del contenido fuera del entorno institucional. De igual manera, el ejercicio de la docencia, es otro motivo de indagación, para examinar su efectividad.

Los nuevos planes y programas, con el afán de elevar la calidad de la educación, ha sufrido cambios substanciales. Dándole más sentido al aprendizaje empleado en la vida cotidiana; sin embargo se continúa procediendo de manera rutinaria empleando memorizaciones y exposiciones.

A partir de observaciones realizadas en las prácticas pedagógicas hemos notado que la enseñanza de las matemáticas en la escuela es limitada a la exposición dirigida, (método tradicional de enseñanza) donde el docente es el actor protagónico del proceso de enseñanza-aprendizaje (E-A). Se emplea luego el cuaderno de apuntes para copiar ejercicios diseñados por el docente, copiados o cambiando datos de los libros texto de diversas editoriales, para terminar contestando el libro de texto gratuito; o en ocasiones de manera inversa. También suele suceder que se conteste el libro proporcionado por el MEN de forma grupal. Al actuar de esa manera se hace más difícil la comprensión, empleo y utilidad del contenido matemático, conceptualizando al educando como un agente pasivo - receptivo.

Otra causa de la exposición y mecanización del conocimiento matemático, es el poco tiempo extra clase que los docentes invierten para indagar actividades previas a la enseñanza de las

multiplicaciones y divisiones; elaborar material didáctico, preparación de las clases, etc. Y para aquellos docentes con doble jornada de trabajo el tiempo extra clase es menor para el empleo de estrategias que hagan a sus estudiante individuos reflexivos. Haciéndose aún más difícil cuando se labora con distintos grado o grupos donde convergen diferentes estratos sociales.

Los docentes que atienden tercer grado de educación primaria se enfrentan, entre otras cosas a lograr que el conocimiento esté asociado con el ejercicio de habilidades intelectuales y de reflexión. Con base en este propósito se debe de enseñar con actividades previas al conocimiento, requiriendo ello de indagar actividades para hacer más fácil la construcción del conocimiento, ya sea trabajando en equipo con material concreto, empleando la observación detenida por parte del docente. Pero para poder realizar esto se requiere de tiempo, siendo más cómodo, para algunos docentes exponer su clase y posteriormente ejercitar, obteniendo seres que no alcancen a comprender la utilidad de la actividad que realizan como difícil su aprendizaje.

Debido a que nuestro sistema educativo requiere de docentes que tengan un mejor desempeño profesional, se debe analizar retrospectivamente la labor docente que se efectúa en las diferentes instituciones educativas, sobre la base de reflexiones sistemáticas elaboradas estaremos en posibilidades de diseñar estrategias de solución a problemas educativos encontrados en la multiplicación y división. Indagando entorno a lo anterior, nuestra pregunta de investigación se centra en:

¿Que estrategias podemos formular y validar para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división en el grado tercero de educación primaria?

El tema escogido ya ha sido tratado antes por otros autores que mencionaremos mas adelante quienes han formulado reestructuraciones y que tomaremos en cuenta en la presente investigación.

A partir de nuestro contexto local, queremos proponer estrategias metodológicas que faciliten los procesos de la enseñanza-aprendizaje de la temática antes mencionada en los estudiantes Institución Educativa María Cristina Arango de Pastrana (jornada tarde). Así como saber si el propósito de la Educación Primaria (estimular las habilidades intelectuales y de reflexión que permitan aprender continuamente con independencia, así como actuar con eficacia e iniciativa en las cuestiones prácticas de la vida cotidiana para superar la antigua disyuntiva entre la enseñanza informativa y la enseñanza formativa) y el de la asignatura de matemáticas (interesar y encontrar el significado funcional en el conocimiento matemático valorándolo y haciéndolo un instrumento de ayuda para reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés), se están desarrollando actualmente.

1.1. Antecedentes

A continuación relacionamos algunas investigaciones que se han hecho sobre la enseñanzay el aprendizaje de la multiplicación y división en educación básica primaria

En la tesis que desarrolló Mario Roberto Canales Villanueva sobre “Estudio exploratorio sobre el uso de modelos alternativos para la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división con estudiantes de primer curso de ciclo común”, cuyo objetivo fue evaluar las situaciones de aprendizaje de los estudiantes de primer curso del Instituto José Trinidad Reyes. Para ello, se

basaron en el desempeño de los estudiantes en la realización de multiplicaciones y divisiones con números naturales utilizando métodos alternativos. Así se observó el trabajo de tres grupos de estudiantes en la utilización de los métodos para resolver multiplicaciones y divisiones con números naturales, el objetivo que conduce a la investigación es explorar si es posible y corregir los errores que cometan al multiplicar y dividir.

Las investigadoras Jessenia Lozzada y Clely Ruíz de la Universidad de los Andes de Bolivia realizaron una investigación denominada “Estrategias didácticas para la enseñanza- aprendizaje de la multiplicación y división para alumnos de primer año” cuyo objetivo estuvo marcado en el desarrollo de cuatro fases: La fase Diagnóstica que permite describir el desarrollo de las clases de matemáticas y obtener información sobre el uso de estrategias innovadoras. La fase del Diseño de recursos y estrategias didácticas. La fase de Aplicación donde se desarrollan estrategias lúdicas y con nuevas tecnologías y por último, la fase de Evaluación donde cuatro expertos y tres docentes examinan un software educativo en cuanto a aspectos pedagógicos, de funcionalidad y de diseño; los jóvenes opinan libremente al respecto y se comparan sus actuaciones con un pre y post test.

Por otra parte la investigadora Sonia Caballero Reales de la Universidad Complutense de Madrid realizó “ Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil ”, en el cual se discute el paso del conocimiento informal al conocimiento formal y algunos procedimientos de cuantificación. Se ocupó, por un lado, de la adición y sustracción y por otro, de la multiplicación y división analizando en ambos casos: el conocimiento informal de los niños sobre estas operaciones, las clasificaciones basadas en los problemas verbales, las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas verbales y por último, los errores más frecuentes.

“El análisis didáctico como una herramienta para poder identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones” es una tesis realizada por los investigadores Nielka Rojas y Pablo Flores en la que caracterizar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza es un tema ampliamente abordado en las investigaciones en educación matemática. Sin embargo, identificar en la práctica los distintos tipos de conocimientos necesarios para enseñar es una cuestión aún carente en los estudios. Los autores un ejemplo, de cómo parte del análisis didáctico del contenido matemático escolar de las fracciones, puede emplearse para identificar distintos tipos de conocimientos declarados en un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los investigadores Marta Cecilia Salazar, Sergio Martinic y Alexander Maz de la Universidad Católica Silva Henríquez (Chile), Pontificia Universidad Católica (Chile) Universidad de Córdoba (España), realizaron un investigación denominada “Avances de una investigación sobre los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de primaria para las fracciones”, en la que se centra en la investigación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, concretamente en el tema de fracciones, debido a las dificultades que se presenta al momento de su enseñanza y aprendizaje. En donde existen antecedentes que sustentan el problema de estudio. El objetivo fue identificar los significados que ponen de manifiesto los profesores de 5^o año básico en la enseñanza de las fracciones, analizando los modelos, las representaciones y los recursos utilizados.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Las experiencias con las prácticas pedagógicas en matemáticas y la labor docente desempeñada en instituciones educativas nos muestran que la enseñanza y el aprendizaje de los conjuntos numéricos son los temas de mayor dedicación por parte de los docentes de matemáticas en la educación primaria. El valor y las metodologías enfocadas en la utilidad que caracteriza a estos temas, como sus significados, aplicación en contexto y su valor de utilidad, constituyen el contexto en el que se debe desarrollar la enseñanza. Que de acuerdo a los objetivos, las estrategias a tener en cuenta en los procesos de aprendizaje y puntualización de las competencias a lograr, es necesario que el docente realice un análisis más profundo sobre formas de aprendizaje y por esta razón el objetivo de la enseñanza debe ser la de estimular el razonamiento y optar por otra manera distinta de planificar las clases, modificando un poco la manera tradicional.

A medida que el currículo escolar de matemáticas evoluciona en muchos países hacia una mayor utilización de las aplicaciones, métodos y estrategias que contribuyan a lograr el aprendizaje de esta asignatura, como también hacia una mayor importancia de la investigación individual y de grupo, algunos investigadores han comenzado a examinar los efectos de estos cambios. La antigua visión de la enseñanza de las matemáticas como facilitadora de la adquisición del conocimiento por parte del que aprende, que sea diferente al proceso actual y tradicional, en la cual se facilite una estimulación del razonamiento del estudiante para lo cual la didáctica se convierte en una herramienta útil tanto para la persona que enseña como para la que aprende y desea comprender los procesos aritméticos. Actualmente se le está dando una mayor atención tanto al proceso de la enseñanza como al contexto dentro del cual éste tiene lugar.

El currículo escolar de matemáticas ¹ se puede ver por lo menos desde tres puntos de vista según Robitaille y Travers: el currículo propuesto por las autoridades escolares, el currículo implementado por el profesor y el currículo aprendido por los estudiantes. Las diferencias entre los tres puntos de vista han sido tema de mucha investigación. En particular, se ha dado gran atención a la visión que tiene el estudiante del tema que le es enseñado como algo que es solo de simple construcción y significado y no como el uso para su vida. La problemática epistemológica de la enseñanza de las matemáticas es, hoy en día, un punto central de la investigación y de la teoría de la educación matemática (Burscheid et al., 1992; Nesher y Kilpatrick, 1990, ch. 1).

¹Cambios curriculares (Pag. 7), Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación

Es así que la enseñanza de la matemática ocupa un lugar en el currículo escolar en los cuales están planteados unos objetivos como:

- Enseñar a pensar: la matemática desempeña un rol importante en el desarrollo del intelecto. Enseña a observar con detenimiento, analizar una situación, realizar conjeturas, diseñar estrategias y utilizar un razonamiento deductivo para probarlas. En fin, enseña a pensar críticamente.
- Utilidad: se sabe que las matemáticas son muy útiles y necesarias en la vida cotidiana, así como en el campo laboral de la mayoría de las profesiones. En nuestra vida cotidiana es muy usada cuando realizamos hacer alguna compra, en la cual debemos de decidir cuál es la mejor opción para adquirir este producto mirando los precios de otros o cuando queremos saber cuantas cuotas debemos pagar para adquirir cierto bien que necesitamos.
- Comprensión del entorno: los modelos matemáticos permiten una mejor comprensión del entorno. Sea que se trate de interpretar información como los patrones de cambios climáticos, impuestos, el índice de inflación, la velocidad, los planos de una casa, la latitud y la longitud, los modelos matemáticos permiten una mirada más profunda de la naturaleza y del entorno creado por el ser humano.
- Comprensión de otras áreas del conocimiento: la matemática se enseña también porque permite la integración, comprensión y el desarrollo de otras asignaturas como lo son la física, química, biología, economía y las ciencias sociales.

La investigación en Educación Matemática se ha centrado en el aprendizaje, más que en la enseñanza. Una gran cantidad de investigación que se realizó al comienzo de los setentas tuvo que ver con la comparación de métodos para enseñar el mismo contenido matemático. Sin embargo, el interés de los investigadores giraba invariablemente alrededor del método, definido de una forma general, y no en el proceso de instrucción mismo. Recientemente, estos estudios de comparación de métodos han sido considerados infructuosos y han sido casi completamente abandonados. El interés de los investigadores se ha volcado, por una parte, hacia cómo los profesores manifiestan su conocimiento y sus creencias en el proceso de instrucción, y, por el otro, hacia cómo los estudiantes aprenden y comprenden aspectos específicos de las matemáticas.

Los estudios sobre el conocimiento y las creencias del profesor han sido muy populares en los últimos años, particularmente en América del Norte ². Una parte de estas investigaciones han estudiado la relación entre las visiones que los profesores tienen sobre el tema que enseñan y las visiones de los matemáticos. Otro tipo de investigación ha examinado la relación entre la práctica docente del profesor y sus creencias acerca de las matemáticas y de la forma en que éstas deben ser enseñadas. Se ha encontrado que los profesores experimentados tienen un conocimiento elaborado de las matemáticas, de su pedagogía y de sus estudiantes. Este conocimiento se transforma continuamente y afecta la forma en que los profesores organizan la instrucción ³, puesto que en su intento de comprender por qué las matemáticas producen tanto fracaso escolar y generan un temor hacia el tema de estudio y no logran lo que un principio esperaban y se recae nuevamente en la pedagogía tradicional.

En su libro “Mathematical Problem Solving” publicado en 1985 Allan Schoenfeld identificó cuatro aspectos centrales que son necesarios considerar cuando se enseña a los estudiantes a resolver problemas de matemáticas.

²Ver Brown, Cooney y Jones, 1990; Nesher y Kilpatrick, 1990, ch. 7

³Práctica docente (Pag 7), Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas y Evaluación

- **Recursos:** los recursos son los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y, en general, a todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. El docente debe, no solo tener en cuenta cuales son las herramientas con las que cuenta el estudiante, sino que también debe ser consciente del inventario de recursos que dispone. Es decir, que necesita conocer como los estudiantes acceden a los conceptos que tienen. Por otra parte, también es necesario considerar los recursos defectuosos, es decir, aquellos procedimientos o formulas mal aprendidas o que el estudiante aplicar en situaciones que no son las apropiadas.
- **Heurísticas:** son estrategias que se emplean para resolver un problema. Puede ser razonar por el absurdo, hace un esquema, explorar simetrías, analizar el problema, o al menos entre tipos de problemas. Es por esto, que tal vez la manera más conveniente para aprender diferentes heurísticas es a través de la resolución de problemas variados y no tanto mediante análisis teóricos de las mismas.
- **Control:** se refiere a como un estudiante controla su trabajo, en primer lugar se debe asegurar de comprender el problema y no abocarse a resolverlo antes de estar seguro de hacerlo entendido, luego debe considerar distintas posibilidades para resolverlo, es decir, debe diseñar una estrategia y es frecuente que un estudiante escoja el camino para resolver un problema que esté relacionado con los procesos algorítmicos.
- **Sistemas de creencias:** sobre la matemática inciden notablemente en la manera en la que los estudiantes, e incluso los profesores abordan la resolución de problemas que vinculen procesos algorítmicos. Las creencias condicionan prácticamente todos los aspectos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo:
 - Determinar el tiempo que le dedican los estudiantes a desarrollar procesos algorítmicos antes que le pierdan el interés.
 - Determinar si el estudiante considera que debe aplicar conocimientos formales o no.
 - Determinar la manera en que los estudiantes tratan de aprender matemáticas memorizando o no.

Los estudios del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes han pasado, durante la última generación, de teorías generales de aprendizaje a estudios del aprendizaje de un contenido matemático específico. El estudio del proceso de conteo, de los números naturales y de las operaciones con los números naturales en los primeros años de primaria ha sido por algún tiempo, quizás el área más prolífica de la investigación en educación matemática de los últimos tiempos. Aunque se ha hecho algún trabajo alrededor de las estructuras cognitivas que los estudiantes generan cuando resuelven tipos particulares de problemas (especialmente aquellos que involucran operaciones con números naturales o racionales), la investigación no ha logrado aclarar los esquemas cognitivos generales que se utilizan cuando se trabaja en matemáticas (Burscheid et al., 1992). Más aún, la investigación en el aprendizaje de las matemáticas se ha preocupado más por el aprendizaje individual y menos por el aprendizaje de grupos de estudiantes.

El propósito de introducir la historia del surgimiento de la multiplicación y la división, es tratar de transmitir a los niños, de una forma ya preestablecida los resultados de siglos de construcción por parte de matemáticos adultos. Para Miguel de Guzmán (1993, pág,98) no se puede esperar que

los estudiantes descubran en un par de semanas, lo que la humanidad elaboró a lo largo de varios siglos de trabajo de mentes brillantes.

Hoy en día la educación básica plantea la formación de un individuo proactivo y que este capacitado para iniciar su vida en sociedad, en el cual se le establezcan unos caminos que por medio de lo aprendido les permita acceder a estudios universitarios. Pero si lo vemos de otra forma, podemos encontrarnos con estudiantes que posean diferentes conocimientos elementales, por ejemplo, en la matemática, que no les permite su aplicación en la vida cotidiana a través de la resolución de problemas, lo que hará que el estudiante determine su valoración y aplicación de la misma, dentro de la cultura, su sociedad, región y su país.

En el desarrollo de la matemática en cuanto al nivel de educación primaria las bases en las que esta se apoya son las operaciones básicas como son la adición, sustracción, multiplicación y división. Entendemos estos procedimientos como el conjunto de procedimientos aritméticos que nos permitirán resolver problemas matemáticos, en los que están involucradas cantidades numéricas o variables con fines determinados.

Las llamadas operaciones básicas matemáticas, en particular la multiplicación y división, representan para el niño un gran problema por la forma como se enseña; una separación entre la multiplicación y división por una parte, y la proporcionalidad por otra (Vergnaud, 2001). Lo cual implicara la adquisición de los conocimientos de otros conceptos que dependan de estas, por otro lado los ejercicios y problemas que estén asociados a estas operaciones no se relacionan con su vida social y cultural, para lo cual estos pierden sentido del porque se les enseña.

En este trabajo haremos énfasis en las operaciones de multiplicación y división, tomando la situación de partida en que se encuentre cada estudiante de educación básica primaria, observando su proceso por mediante el cual ellos realizan estas operaciones y sus habilidades para manejarlas, para posteriormente aplicar las estrategias que le contribuyan a cada uno de los estudiantes un mejor manejo de estos procesos algorítmicos.

2.1. El Estudio de Clases en la enseñanza

El Estudio de Clases Jugyou Kenkyu, o bien “Lesson Study” se lo conoce internacionalmente que ha contribuido a la investigación de la enseñanza de la matemática en Japón, impactando las decisiones curriculares nacionales con la mirada realista del profesor, frente a las necesidades y aspiraciones de un país moderno que educa a toda su nación. El Estudio de Clases se ha instalado armoniosamente en el sistema educativo japonés en el marco de la racionalidad y consistencia de un sistema que se perfecciona a sí mismo con ajustes curriculares periódicos, coordinados con la elaboración y distribución de textos escolares nacionales y la formación continua del profesorado.

El Estudio de Clases contribuye al desarrollo profesional docente, a la implementación del currículo en las aulas y al mejoramiento permanente del currículo. No sería fidedigno afirmar que existe en Japón una única manera de enseñar matemáticas o que en todas las escuelas se enseña con igual profundidad. Pero, lo que sí se puede decir es que existe un cuidado único por hacer las cosas bien, y en ese espíritu, el currículo, los textos, los docentes y los investigadores, son fieles a los saberes de la cultura e innovan en la medida que tiene sentido hacerlo.

En los últimos 60 años el currículo escolar en matemáticas de Japón se ha ajustado a las tendencias internacionales (National Council of Teachers of Mathematics, 1980; 1989) y a las exigencias propias que el mismo país se impone. Cada década el Ministerio de Educación establece una reforma y consecuentemente promueve la implementación gradual en el Sistema con la correspondiente incorporación de los nuevos contenidos en el marco de las licitaciones de textos. Tanto las autoridades gubernamentales a cargo del currículo escolar como las editoriales mantienen contacto con los profesores, las escuelas experimentales y los Estudios de Clases, y así se mantiene una sinergia que favorece la efectividad en la innovación de la enseñanza de la matemática en Japón. Para una profundización de estas relaciones véase el libro *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas* (Isoda, Mena y Arcavi, 2007).

De este modo, el Estudio de Clases ha dado cabida a un progreso armonioso entre desarrollo curricular y gestión en el aula, contribuyendo en la práctica a la aspiración de ofrecer una educación matemática centrada en la resolución de problemas que se articula con la exigencia del tratamiento de los contenidos establecidos en el currículo y el desarrollo del interés de los estudiantes por aprender matemáticas.

2.2. Los Lineamientos Curriculares

2.2.1. Antecedentes

Durante las décadas de los años cuarenta y cincuenta se había desarrollado una exigente labor de sistematización de las matemáticas a través del lenguaje de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, liderada por el grupo que escribía con el seudónimo de Nicolás Bourbaki⁴. Esta reestructuración bourbakista de las matemáticas sedujo a la comunidad matemática por su elegancia arquitectónica y por la unificación del lenguaje, hasta tal punto que se pensó abolir el plural “matemáticas” para hablar de una sola matemática.

El lanzamiento del Sputnik por los soviéticos impulsó a los norteamericanos a iniciar una renovación de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas en la educación secundaria y media, para preparar los futuros científicos que alcanzaran a los soviéticos en la carrera espacial. Numerosos programas experimentales de matemáticas fueron desarrollados por grupos de expertos, quienes creyeron encontrar en la teoría de conjuntos y la lógica matemática los medios más aptos para lograr que todos los niños tuvieran fácil acceso a las matemáticas más avanzadas.

Surge así la llamada “nueva matemática” o “matemática moderna” o “new math” en los años 60 y 70, que produjo una transformación de la enseñanza y cuyas principales características fueron: énfasis en las estructuras abstractas; profundización en el rigor lógico, lo cual condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor se alcanza fácilmente; detrimento de la geometría elemental y el pensamiento espacial; ausencia de actividades y problemas interesantes y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres.

⁴Nicolás Bourbaki es el nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses que, en los años 1930, se propusieron revisar los fundamentos de las matemáticas con una exigencia de rigor mucho mayor que la que entonces era moneda corriente en esta ciencia.

Para atender a esta reforma, en nuestro país se promulgó el decreto 1710 de 1963, que establecía los programas para primaria, diseñados con el estilo de objetivos generales y objetivos específicos conductuales, propios de la época, y en ese mismo estilo se diseñó el decreto 080 de 1974 para los programas de secundaria.

A comienzos de la misma “matemática moderna” y en los años 70, se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados, que los problemas e inconvenientes surgidos superaban las supuestas ventajas que se esperaba conseguir como el rigor en la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea.

Se inició entonces, en los años 70 y 80, el debate entre los partidarios de esta “nueva matemática” y los que querían que se volviera a lo básico: las cuatro operaciones con enteros, fraccionarios y decimales. Este movimiento Back to Básicos tuvo muchos defensores entre matemáticos calificados, docentes y padres de familia, quienes decían que los niños aprendían muchas palabras raras, aprendían operaciones entre conjuntos y símbolos lógicos y no podían hacer operaciones entre naturales ni fraccionarios.

En 1975, la administración López Michelsen inició una reforma escolar amplia, que se llamó Mejoramiento Cualitativo de la Educación, en la cual se propuso la renovación de programas, la capacitación del magisterio y la disponibilidad de medios educativos, como estrategias para mejorar la calidad de la educación. Para llevar a cabo tal propósito, en 1976 se creó en el Ministerio de Educación la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos, la cual diseñó y experimentó en algunas escuelas del país un currículo para los grados primero a tercero.

En 1978, se nombró como asesor del Ministerio para la reestructuración de las matemáticas escolares al doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe, por comisión de la Universidad Nacional, y con un grupo de profesionales de esa dirección se comenzó a revisar los programas de matemáticas de primero a tercero, y se consideró esencial la elaboración de un marco teórico global que permitiera precisar los criterios con los cuales se deberían hacer la revisión y el diseño de los programas de los nueve grados de la educación básica.

El enfoque propuesto para los programas de matemáticas de la Renovación Curricular pretendió superar las limitaciones de las dos escuelas mencionadas, seleccionando los aspectos positivos que tenía el enfoque conceptual de la nueva matemática sin caer en enseñar lógica y conjuntos, y ofrecer esos criterios teóricos que permitieran la toma de decisiones, también propuso al docente distinguir cuidadosamente entre el sistema simbólico (que se escribe, se pinta o se habla), el sistema conceptual (que se piensa, se construye, se elabora mentalmente) y los sistemas concretos (de donde los niños pueden sacar los conceptos esperados).

Para la preparación de sus clases, el marco teórico del programa de matemáticas propuso al docente enfocarse en los diversos aspectos de las matemáticas como sistemas y no como conjuntos. Esto se llamó “enfoque de sistemas” y propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.

El análisis de la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, permite identificar los desarrollos

pedagógicos obtenidos en los decenios anteriores, que fueron asumidos en las políticas educativas actuales. En particular, el enfoque de sistemas que se adoptó para el área de matemáticas en la Renovación Curricular se retoma en los artículos 21 y 22 de la mencionada Ley.

Finalmente, desde hace unos veinte años se han venido creando y desarrollando sociedades de matemáticas, una Sociedad Colombiana de Matemáticas y diversas sociedades departamentales que entre sus propósitos incluyen el de ofrecer espacios de estudio y debate de diversos aspectos curriculares como contenidos, metodologías, evaluación y formación de educadores.

2.2.2. Referentes curriculares

Las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo *XXI*. Se propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamientos ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

Por otra parte, hay acuerdos en que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos necesarios para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella.

El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar a el estudiante la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás.

Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

El Ministerio de Educación Nacional realizó un documento que es el resultado de un proceso de reflexión, discusión, consenso, convocado y coordinado por un grupo de Investigación Pedagógica del Ministerio de Educación Nacional, con el fin de construir en forma participativa unos lineamientos curriculares para el área de matemáticas.

Los lineamientos organizan el currículo en tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.

Los procesos generales: tienen que ver con el aprendizaje, es decir, el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos. En el cual cada proceso de enseñanza - aprendizaje debe de estar relacionado no solamente con sus percepciones e ideas previas sobre las matemáticas, sino también una reflexión acerca del porqué y del para qué de los aprendizajes, como posibilidad de diseñar situaciones problemáticas acordes con el contexto, los intereses y las necesidades de los estudiantes.

Los conocimientos, experiencias, sentimientos y actitudes de éstos hacia las matemáticas van a condicionar en parte la forma en que se desarrolle el proceso de enseñanza. La selección de textos escolares y de los materiales didácticos es determinante en la calidad y pertinencia de las representaciones y por ende de la comunicación.

El diseño de las situaciones problemáticas debe ser coherente con los logros de aprendizaje propuestos en el Diseño Curricular de la institución. Conviene además prever algunos indicadores de logros como hipótesis para observar la clase, lo mismo que algunas estrategias para la solución de los problemas que se generan.

Otro de los procesos que se deben originar es la fase interactiva es donde el objetivo principal es lograr interrelacionarse con la finalidad de apoyar dos ideales como son el compartir y dar forma al significado de las matemáticas en un ambiente escolar, en el cual el docente y el estudiante deben exponer cada uno sus experiencias y conocimientos previos, en este punto es donde se puede llegar a una problemática, pero también en este proceso de discusión los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las argumentaciones de los otros, validan formas de representación y construyen socialmente el conocimiento.

Cuando el docente modifica y enriquece cada una de las estrategias, los aprendizajes no previos, en las dificultades y errores de cada uno de los estudiantes; podría decirse que para él la experiencia de enseñar es al mismo tiempo la oportunidad de aprender con los estudiantes, es así que se logra establecer conexiones entre lo que previamente saben y lo nuevo. Es por esto que cada estudiante vincula cada situación problemática procedente de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. En muchas de las actividades de la vida diaria requerimos de los procedimientos, y el no manejarlos correctamente puede tener repercusiones de orden social.

Para Polya ⁵ “resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”. Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

Además de que el estudiante razone y se comunique matemáticamente, y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, se espera también que haga cálculos correctamente, que

⁵George Pólya (13 de diciembre de 1887 - 7 de septiembre de 1985) fue un matemático que nació en Budapest, Hungría y murió en Palo Alto, EUA.

siga instrucciones, que utilice de manera correcta una calculadora para efectuar operaciones, que transforme expresiones algebraicas desde una forma hasta otra, que mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc.; es decir que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. El aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

Los conocimientos básicos: se relacionan con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y los sistemas propios de las matemáticas entre los cuales se encuentra: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

La actividad matemática dentro del currículo en la educación básica y media, además de contribuir a alcanzar los fines formativos, culturales y éticos de la educación, da cuenta de las matemáticas como herramienta fundamental, para resolver problemas y para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático de los educandos.

Uno de los primeros pensamientos matemáticos es el numérico y los sistemas numéricos, en la que debemos tener en cuenta que la mayor parte de las actividades de la vida diaria de una persona y en la mayoría de las profesiones se exige el uso de la aritmética. Para que los estudiantes logren entender el significado de los números, además de su uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.

En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que se trabajan simultáneamente con las ideas que dan lugar al concepto de número.

El pensamiento numérico implica reconocer que con frecuencia existen diferentes estrategias de solución para un problema dado. Cuando una estrategia inicial parece ser improductiva, la respuesta apropiada es formular y aplicar una estrategia alternativa. Esta tendencia a dedicarse a un problema explorándolo de diversas maneras permite comparaciones de diferentes métodos antes de hacer un juicio definitivo o dedicarse a una sola estrategia.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos se implementa como una herramienta para el estudiante pueda comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales, es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de estas representaciones. Cada una de ellas es importante para resaltar un aspecto del medio que rodea al estudiante, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio.

Howard Gardner ⁶ en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas

⁶Howard Gardner (Scranton, Estados Unidos, 11 de julio 1943) es un psicólogo, investigador y profesor de la Universidad de Harvard, conocido en el ámbito científico por sus investigaciones en el análisis de las capacidades cognitivas y por haber formulado la teoría de las inteligencias múltiples, la que lo hizo acreedor al Premio Príncipe

inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

El pensamiento métrico y los sistemas de medida en donde la interacción dinámica que genera el proceso de medir el entorno en donde conviven cada estudiante, hace que éstos encuentren situaciones de utilidad y aplicaciones prácticas donde una vez cobran sentido las matemáticas, estas actividades de la vida diaria están relacionadas con las compras en el supermercado, con la cocina, con los deportes, con la lectura de mapas, con la construcción, etc., acercan a los estudiantes a la medición de objetos que se encuentren a su alrededor o en su vida cotidiana como conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc. y les permiten desarrollar muchos conceptos y destrezas matemáticas.

Los procesos de medición comienzan desde las primeras acciones con sus éxitos y fracasos codificados como más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, en clasificaciones siempre relacionadas en alguna forma con imágenes espaciales, esto es con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, se implementa cuando cada estudiante esta expuesto al análisis de fenómenos naturales que pueden ser aleatorios, en los cuales estos son producto del azar, donde se debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas.

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico hacen que los estudiantes les resulte ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.

Los docentes, además de considerar situaciones de aplicación reales para introducir los conceptos aleatorios, deben preparar y utilizar situaciones de enseñanza abiertas, orientadas hacia proyectos y experiencias en el marco aleatorio y estadístico, susceptibles de cambios y de resultados inesperados e imprevisibles. Los proyectos y experiencias estadísticos que resultan interesantes y motivadores para los estudiantes generalmente consideran temas externos a las matemáticas lo cual favorece procesos interdisciplinarios de gran riqueza.

Por ultimo y también importante los sistemas algebraicos y analíticos en el cual el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas

cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas.

En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. De esta forma la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación.

El contexto: Hace referencia a lo que rodea al estudiante en cuanto a la parte social y cultural contribuyendo a dar sentido del porque las matemáticas se aprenden, acá cobra especial importancia las situaciones problema que surgen de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

La clase de matemáticas debe ser un el lugar para que los estudiantes se involucren en diferentes situaciones matemáticas, que les facilite la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas, la verificación, negociación y validación de las mismas, a nivel individual y colectivo. De esta manera, los estudiantes participan activamente en la construcción del conocimiento matemático socialmente compartido, aportan su propia cultura al aula de matemáticas asumiendo un papel comparable con la actividad científica de un matemático. Aprender matemáticas, entonces, le implica al estudiante actuar, formular preguntas, encontrar soluciones, construir modelos, conceptos, teorías útiles, adecuadas y correctas, lo cual debe ser posibilitado mediante situaciones problemáticas contextualizadas propuestas por el docente, que generen actividad matemática en el educando⁷.

2.3. Estándares de Matemáticas del MEN

Estos estándares son criterios que permiten conocer cuál es la enseñanza que deben recibir los estudiantes y son el punto de referencia de lo que un estudiante pueda estar en capacidad de saber y saber hacer. En este orden de ideas los estándares expuestos son el punto de partida de la labor docente. Además los estándares abordan los conceptos matemáticos y ayudan a plantear ejercicios y actividades dentro de un contexto real y familiar para el estudiante.

Los aspectos que se describen a continuación son los que ha propuesto el Ministerio de Educación Nacional, los cuales tienen en cuenta tres aspectos que deben estar presente en la actividad Matemática (competencias básicas).

- Planteamiento y resolución de problemas.
- Razonamiento Matemático (formulación, argumentación y demostración).
- Comunicación Matemática, consolidación de la manera de pensar (coherente, clara y precisa).

Los estándares están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el

⁷Competencias matemáticas: un estudio exploratorio en la educación básica y media. Marzo de 2012 (Pag. 60)

pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Durante el desarrollo y implementación de esta tesis que tiene como nombre *Estrategias didácticas para la enseñanza de la multiplicación y división en el grado tercero de educación primaria*, estará enfocada en el manejo del estándar de “pensamiento numérico y los sistemas numéricos” para el grado tercero de educación básica primaria.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

Los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989) presentan algunos indicadores de que los estudiantes comprenden la naturaleza y el papel de los procedimientos, que pueden dar pautas a los docentes sobre cómo va el aprendizaje de los procedimientos de cada uno de ellos. Al terminar el grado tercero cada estudiante debe adquirir los siguientes indicadores de desempeño.

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).
- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes.
- Uso representaciones “principalmente concretas y pictóricas” para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Uso representaciones “principalmente concretas y pictóricas” para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.)

2.4. Las Competencias en matemáticas

2.4.1. Aproximación a su etimología

La raíz etimológica de la palabra competencia es “ikano” un derivado de “iknoumai”, que significa llegar. También del antiguo griego, se solía usar como equivalente para la competencia el término “ikanótis” que se traduce como la cualidad de ser “ikanos” es decir capaz o tener la habilidad de conseguir algo (destreza). Por su parte, la expresión “Epangelmatikes ikanotita” traduce capacidad o competencia profesional-vocacional. Lo que no debería ser confundido con el término “dextiotis” que está más ligada a la inteligencia.

En tanto para la Real Academia Española, el término competencia del latín *competentia*, en un primer significado de competir, se hallan las siguientes acepciones: disputa o contienda entre dos o más personas sobre algo, del cual deriva el término competidores; competencia como oposición o rivalidad entre dos o más que aspiran a obtener la misma cosa; la situación de empresas que rivalizan en un mercado, ofreciendo o demandando un mismo producto o servicio; como persona o grupo rival; por último, como competición deportiva. En un segundo significado de su origen etimológico, se da lugar al sustantivo competente del latín *competens*, con tres acepciones diferentes: competencia como incumbencia; como pericia, aptitud, idoneidad para hacer o intervenir en un asunto determinado y como atribución legítima a un juez u otra autoridad civil, eclesiástica, etc., para el conocimiento o resolución de un asunto.

Es posteriormente que aparecen los términos derivados “competente” a principios del siglo XV, entendido como adecuado, “apto” y “competencia” que surge sobre finales del siglo XVI. Se hallan así entonces dos verbos en castellano: “competir” y “competer”, que aunque viniendo del mismo verbo latino “competere” se diferencian sustantivamente y lo mejor, ambos términos dan lugar al sustantivo “competencia” lo que dificulta enormemente su comprensión, pudiendo dar lugar seguramente a las posibles confusiones terminológicas de la actualidad.

El término competencia es complejo y variado. Coincidimos con García, Acevedo y Jurado (2003) al afirmar que sus significados se inscriben en dos grandes dimensiones, que determinan visiones políticas distintas sobre la educación: la competencia referida con la eficacia y las demandas del mercado, en donde es indispensable el saber-hacer para poder desenvolverse con las demandas del mercado laboral, las tendencias de la economía mundial, la globalización y los modelos neoliberales; y, la competencia asociada con la formación integral de personas críticas, en la que el saber-hacer se instala en los contextos socio culturales concretos y locales y en el sentido ético humanístico de las decisiones sobre los usos e impactos del conocimiento en mejoramiento de las condiciones de vida de las personas y su comunidad.

2.4.2. A Nivel Nacional

El gobierno nacional, hace cerca de una década, tomó la decisión de focalizar el currículo escolar en el desarrollo de las competencias del estudiante de educación básica y media. Hoy, por disposición del decreto 1290 de Abril de 2009, los profesores deben evaluar el nivel de desempeño del estudiante como evidencia del desarrollo de sus competencias.

Para el caso específico de las matemáticas, los Lineamientos Curriculares (1998), iniciaban este proceso de reestructuración curricular al proponer organizar el currículo mediante la interrelación entre Procesos Generales, Conocimientos básicos y Contexto, con los Pensamientos y Sistemas

matemáticos: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamiento métrico y sistemas de medidas, Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

A los Lineamientos se articularon los Estándares de Competencias (2003), que plantearon lo que significa para el MEN ser matemáticamente competente (MEN, 2003, p. 74 – 106): formular y resolver problemas, utilizar diferentes registros de representación semiótica, argumentar y justificar para validar, probar, refutar, demostrar y dominar procedimientos y algoritmos matemáticos.

Desde el punto de vista oficial, pareciera que la propuesta está consolidada como política educativa. No obstante, desde un interés específicamente investigativo, es necesario conocer lo que realmente está pasando en las instituciones educativas y entre los profesores de matemáticas respecto a aspectos como los siguientes: la concepción de competencia matemática, cuáles promueven en el aula, qué tareas matemáticas proponen los profesores, qué actividades despliegan los estudiantes para el desarrollo de sus competencias y cómo se orienta su proceso de evaluación.

En Colombia, durante la última década el MEN a través del Sistema Nacional de Evaluación de la calidad de la educación, expande el uso generalizado del concepto de competencia a todos los niveles de la educación con la aplicación de las pruebas masivas de evaluación de la calidad de los aprendizajes y de la calidad de la educación (pruebas de estado “ICFES”, Saber y ECAES).

Así mismo, puede afirmarse que sin un mayor desarrollo, las competencias constituyen el eje transversal en la actual propuesta de lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en las diferentes áreas del conocimiento. Lo que no quiere decir, desde luego, que así ocurra efectivamente entre los maestros en sus prácticas pedagógicas y didácticas cotidianas; como tampoco que estas sean conceptualizadas coherentemente en las instituciones y centros educativos del país desde sus proyectos educativos institucionales

La noción general de competencia ha venido siendo objeto de interés en muchas de las investigaciones y reflexiones que adelanta la comunidad de investigadores en educación matemática y de esta manera, se presenta una primera aproximación al concepto de competencia, precisando un poco más esta postura en el marco del estudio de la Estructura Curricular, desde la perspectiva de cinco procesos generales presentes en toda actividad matemática de enseñanza y de aprendizaje, lo que ahora se llama ser matemáticamente competente:

- **La resolución y planteamiento de problemas:** Es parte integral de la actividad matemática que realizan los estudiantes, resolver y plantear problemas les permite usar las matemáticas, desarrollar las estructuras cognitivas al identificar aspectos importantes en una situación o problema, aumentar la capacidad de comunicarse matemáticamente y utilizar procesos de pensamiento generales que les permita enfrentar y resolver la situación. permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas.
- **El razonamiento matemático:** Es la acción de ordenar ideas para llegar a una conclusión, se encuentra presente en todas las actividades matemáticas desarrolladas por los estudiantes, incluye prácticas como dar cuenta del cómo y el porqué de los procesos, justificar estrategias

y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar patrones, argumentar y exponer ideas. El desarrollo del razonamiento lógico se desarrolla en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.

- **La comunicación:** Es la necesidad común de toda actividad humana, que implica reconocer el lenguaje propio de las matemáticas, expresar, comprender, interpretar y evaluar ideas matemáticas, reconocer sus significados, usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación, construir, interpretar y relacionar representaciones de ideas, producir y presentar argumentos.

La comunicación puede relacionarse a las matemáticas no como un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan, la adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

- **La modelación:** Permite poder describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas, se constituye en un elemento básico para resolver problemas de la realidad, construyendo modelos matemáticos que reflejen fielmente las condiciones propuestas que permitan hacer predicciones de una situación original, tomar decisiones y emprender acciones. Es una construcción mental, un sistema y a veces se dice también una estructura que se utiliza como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones.

En ese sentido, todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Además permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

- **La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos:** Esta constituida por los “modos de saber hacer”, los cuales facilitan las aplicaciones de las matemáticas en la vida diaria, y se pueden clasificar en: procedimientos aritméticos, geométricos, métricos, estadísticos, analíticos, entre otros. Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”, procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas

eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

3.1. Tipo de Investigación

Existen varios tipos de investigación científica dependiendo del método y de los fines que se persiguen. La investigación, de acuerdo con Sabino (2000), se define como “un esfuerzo que se emprende para resolver un problema, claro está, un problema de conocimiento” (p. 47). Por su lado Cervo y Bervian (1989) la definen como “una actividad encaminada a la solución de problemas”. Su objetivo consiste en hallar respuesta a preguntas mediante el empleo de procesos científicos” (p. 41).

Desde el punto de vista científico, la investigación es un proceso metódico y sistemático dirigido a la solución de problemas o preguntas científicas, mediante la producción de nuevos conocimientos, los cuales constituyen la solución o respuesta a tales interrogantes.

La presente investigación la desarrollamos siguiendo una investigación cuasi experimental según Cook y Campbell (1986) consideran los cuasi-experimentos como una alternativa a los experimentos de asignación aleatoria, en aquellas situaciones sociales donde se carece de pleno control experimental:

Los cuasi-experimentos son como experimentos de asignación aleatoria en todos los aspectos, excepto en que no se puede presumir que los diversos grupos de tratamiento sean inicialmente equivalentes dentro de los límites del error muestral (p. 142).

Tal como afirma Campbell (1988), “podemos distinguir los cuasi experimentos de los experimentos verdaderos por la ausencia de asignación aleatoria de las unidades a los tratamientos” (p. 191).

Del mismo modo, Ato (1995b) considera a la metodología cuasiexperimental como:

Un conjunto de técnicas de diseño y análisis estadístico para afrontar situaciones donde no es posible o no es ético aplicar la metodología experimental, o donde los estrictos requisitos del método experimental no se satisfacen (p. 45).

La descripción de diseño cuasi-experimental propuesta por Hedrick. (1993) es la siguiente:

Los diseños cuasi-experimentales tienen el mismo propósito que los estudios experimentales: probar la existencia de una relación causal entre dos o más variables. Cuando la asignación aleatoria es imposible, los cuasi-experimentos (semejantes a los experimentos) permiten estimar los impactos del tratamiento o programa, dependiendo de si llega a establecer una base de comparación apropiada (p. 58).

En las definiciones anteriores se observa que la característica principal de las investigaciones cuasi-experimentales es la ausencia de aleatorización de los tratamientos y, por lo tanto, la carencia de un control total sobre la situación. Al interpretar los resultados de un cuasi-experimento, hay que considerar la posibilidad de que se deban a otros factores no tenidos en cuenta (Cook y Campbell, 1986). En efecto, en un diseño cuasi-experimental, en comparación con los experimentales, hay más hipótesis alternativas que pueden ajustarse a los datos. Por ello, es imprescindible que el investigador tenga, en la medida de lo posible, un conocimiento de las variables específicas que el diseño cuasi-experimental utilizado no sea capaz de controlar.

Debido al deficiente control que implican las investigaciones cuasiexperimentales, algunos autores, como por ejemplo Van Dalen y Meyer (1971), se refieren a ellas con el nombre de investigaciones con control parcial. Otros metodólogos prefieren utilizar el término de estudios no aleatorizados (Anderson et al., 1980).

Hemos tomado este método de investigación, por lo planteado en nuestros objetivos y en la pregunta de investigación, ya que las características del método cuasiexperimental son la selección y la asignación aleatoria de sujetos y el uso de un grupo control. Esto es deseable porque asegura que los grupos sean equivalentes antes de aplicar el método.

3.1.1. Diseño

El diseño cuasi-experimental consiste en la escogencia de los grupos, en los que se prueba una variable, sin ningún tipo de selección aleatoria o proceso de pre-selección.

Por ejemplo, para realizar un experimento educacional, una clase puede ser arbitrariamente dividida por orden alfabético o por disposición de los asientos. La división es a menudo conveniente y, sobre todo en una situación educacional, se genera la menor interrupción posible.

Después de esta selección, el experimento procede de manera muy similar a cualquier otro, con una variable que se compara entre grupos diferentes o durante un período de tiempo.

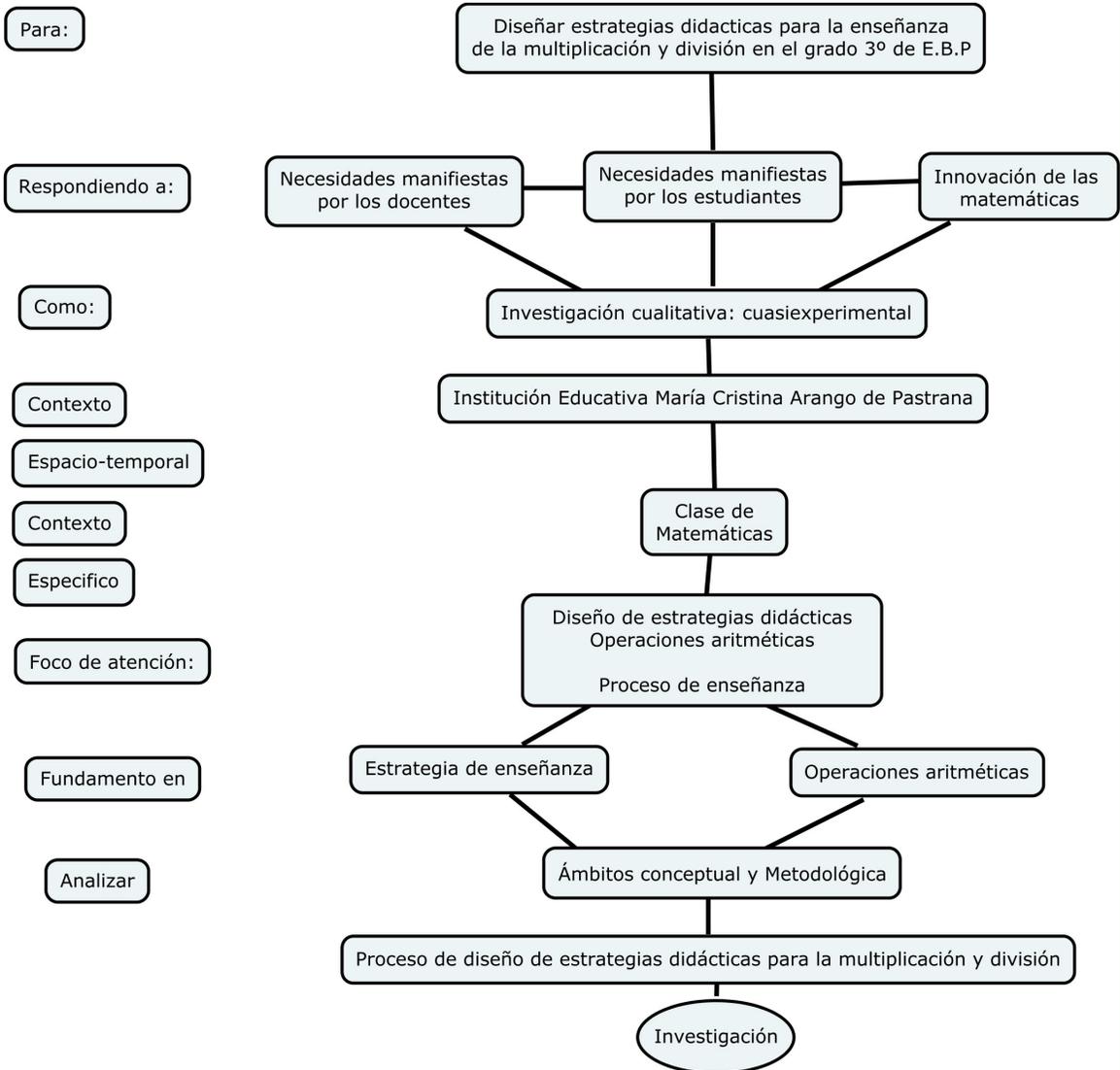
3.1.2. Ventajas

Especialmente en las ciencias, donde la pre-selección y la asignación al azar de grupos es frecuentemente difícil, ellos pueden ser muy útiles en generar resultados para las tendencias generales.

El diseño cuasi-experimental es usualmente integrado a estudios de casos individuales; las cifras y resultados generados con frecuencia refuerzan los hallazgos de un estudio de caso, y permiten que tenga lugar algún tipo de análisis estadístico.

Además, al no ser necesario llevar a cabo una amplia y aleatoria selección previa, el tiempo y los recursos necesarios para la experimentación se reducen .

3.2. Diseño de la investigación



3.3. Fases de la Investigación

La investigación se ha dividido en cuatro fases, éstas son: Diagnóstico, Diseño, Aplicación y Evaluación. Estas fases representan un proceso de acción planificada, ejecutadas y posteriormente evaluadas con el fin de llegar a una serie de conclusiones, luego de analizados los datos y las relaciones entre ellos.

La investigación se va a realizar en la Institución Educativa María Cristina Arango de Pastrana, donde se hace notar algunos problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división, por lo tanto, hemos escogido esta institución para la aplicación de estrategias didácticas a los estudiantes de tercer grado.

La primera fase de la investigación básicamente sirve para realizar un diagnóstico sobre como se encuentra académicamente los niños en sus preconcepciones sobre la multiplicación y la división sirviendo de soporte a la propuesta, tal como lo establece la definición de Proyecto Factible. Con esta fase se alcanza el primer y segundo objetivo específico de la investigación. En esta fase asistimos a talleres de Matemáticas sobre estrategias de enseñanza, organizada por los que estamos desarrollando este trabajo investigativo, en la mencionada Institución. Aprovechamos esta oportunidad para elaborar y aplicar un cuestionario a los estudiantes participantes del taller con el fin de recolectar información de la problemática existente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación primaria.

Durante la fase de diseño, se elaboraron las estrategias para la enseñanza de la multiplicación. también se ha diseñado la unidad didáctica con distintos métodos de la enseñanza de la multiplicación y división en educación primaria.

Solicitamos el acompañamiento de docentes del área de la I.E. y del asesor del trabajo de grado con relación al cumplimiento de los criterios pedagógicos y de contenido presentes en lo planteado en el trabajo de investigación. En la fase de aplicación se desarrollaran prácticas en el aula de la Institución Educativa María Cristina Arango de Pastrana.

Se escucharon y analizaron las propuestas y sugerencias de la comunidad educativa para modificar las estrategias de enseñanza-aprendizaje desarrolladas, si fuera el caso, buscando hacerla integral, sencilla y adaptada a sus conocimientos. Estas actividades constituyen la fase de evaluación donde se aplicaron cuestionarios, entrevistas y observaciones.

FASES	TAREAS
DIAGNÓSTICO	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Observación de los estudiantes en el aula de clases ▪ Entrevista con el profesor de matemáticas de tercer grado ▪ Diseño y aplicación del test a estudiantes de tercer grado
DISEÑO	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Diseño de cuestionario y entrevista. ▪ Construcción de estrategias didácticas
APLICACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aplicación de las estrategias didáctica. ▪ Validación de las estrategias didáctica. ▪ Aplicación de cuestionarios, entrevistas y observaciones.
EVALUACIÓN Y CONCLUSIÓN	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Reuniones con el asesor. ▪ Elaboración del informe final.

Cuadro 3.1: Fases de la investigación

3.4. Población y Muestra

3.4.1. Población

Para Hernández, Fernández y Batista (2006; pág. 210), la población se define como “el conjunto de todos los casos que concuerdan con una serie de especificaciones”. Por su parte, Tamayo y Tamayo (2001; pág. 176), afirma que es “la totalidad del fenómeno a estudiar, grupo de entidades, personas o elementos cuya situación se está investigando”

Para los fines de la presente investigación, la población está conformada por el docente titular de matemáticas del grado tercero y los estudiantes que cursan dicho grado en la Institución María Cristina Arango de Pastrana jornada tarde.

3.4.2. Muestra

Según Balestrini (1997:pág. 141) La muestra “es, en esencia, un subgrupo de la población. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus

características”. Una vez ya se ha determinado cual es la población para el estudio, el proceso de recolección de información, no se hizo individualmente sobre todos los sujetos que la componen ya que su número es elevado, pues resulta muy engorroso y probablemente imposible debido a diversos factores tales como: tiempo y costos, entre otros. Además no es fundamental examinar cada uno de los sujetos que la componen. Por lo que para obtener la información que se requiere en esta investigación se ha extraído una parte representativa de la población a la cual se le denomina Muestra.

Nuestra muestra es tomada del grado tercero de primaria de la institución María Cristina Arango de Pastrana, los cuales son cinco niños que fueron escogidos aleatoriamente a los cuales se les aplico las estrategias didácticas y otros cinco niños que tambien fueron seleccionados aleatoriamente y se les aplico el método tradicional.

3.5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Se refiere al uso de una gran diversidad de técnicas y herramientas que pueden ser utilizadas para desarrollar la investigación. Según Hurtado (2000), las técnicas y los instrumentos harán posible que el investigador obtenga la información que necesita para llevar a feliz término su estudio.

Las técnicas pueden ser copilación y análisis bibliográfico, así como también la observación, encuesta, cuestionarios, lista de cotejo, entre otros. Por su parte los instrumentos, que son los medios materiales que se usan para recoger y almacenar la información, pueden estar ya elaborados o estandarizado como el caso de los test y algunas escalas. No obstante, si se trata de aspecto poco estudiados el investigador puede construir sus propios instrumentos que pueden ser cuestionarios, escalas o guías de entrevistas, por ejemplo.

A continuación describimos los instrumentos y técnicas que hemos utilizado para la recolección de datos para nuestra investigación.

3.5.1. Cuestionario

El cuestionario es entendido por Tamayo y Tamayo (2001, pág. 310) como “un instrumento formado por una serie de preguntas que se contesta por escrito a fin de obtener la información necesaria para la realización de una investigación”

Un cuestionario se clasifica dependiendo del tipo de preguntas que posee, éstas pueden ser cerradas o abiertas, siendo cerradas aquellas donde las alternativas de respuestas has sido delimitadas; es decir, se muestran a los sujetos las posibilidades de respuestas y ellos deben someterse a ellas. Estas preguntas pueden ser dualidad (dos respuestas) o incluir varias alternativas de respuestas. Los cuestionarios de preguntas abiertas son aquellas en que no delimitan las respuestas, el respondiendo es libre de dar un opinión sobre el tópico especificado de acuerdo con la investigación.

En nuestra investigación las pruebas se realizaran con preguntas de selección múltiple con única respuesta.

Las preguntas de selección múltiple consisten en proporcionar varias respuestas (generalmente cuatro o cinco) para que seleccione el estudiante. Sólo hay una respuesta correcta, generalmente es

solo una opción, aunque la respuesta correcta puede consistir en seleccionar dos o más opciones.

La persona que diseñe el examen debe crear opciones de respuestas incorrectas que correspondan a los errores que los alumnos probablemente cometan. Este es un proceso complicado, y se requiere de mucha práctica para lograrlo. Como resultado, las preguntas de opciones múltiples que requieren de mucho pensamiento son muy difíciles de escribir. Estas preguntas se usan casi siempre para evaluar el conocimiento basado en hechos.

Una de las ventajas de las preguntas de selección múltiple es que son muy fáciles de calificar. Estas hace que se hayan proliferado en los últimos años debido al desarrollo de máquinas que pueden calificar grandes cantidades de estas preguntas con un mínimo esfuerzo humano.

3.5.2. Observación

La observación es una valiosa técnica que según Hernández y otros (1999: pág 309) consiste en “el registro sistemático, valido y confiable de comportamiento o conducta manifiesta”.

Para la fase Diagnóstica se diseñó una guía observación para anotar la actuación del docente y sus estudiantes del grado tercero, durante las clases de matemáticas.

En la fase de Aplicación, se realizará observaciones participativa en cada sesión de clase práctica cuando se aplica las estrategias didáctica que se investigaron.

3.5.3. Entrevista

Según Marcelo y Parrilla (1992:pág 23), la entrevista es “ un encuentro verbal, de carácter interactivo, entre dos personas y cuyo objetivo es el acceso a las perspectiva del entrevistado en torno a algún tema seleccionado por entrevistador ”.

En una entrevista interviene el entrevistador y el entrevistado. El primero, además de la iniciativa en la conversación, plantea mediante preguntas específicas el tema de interés y decide en qué momento se han cumplido los objetivos. El entrevistado facilita información sobre su experiencia del tema en cuestión.

Para este estudio se realizará dos entrevista, una al docente, encargado de impartir clases a todas las secciones de las asignaturas de matemáticas de tercer grado de la Institución Educativa María Cristina Arango de Pastrana, con el fin de ahondar en la información referida a las dificultades que presentan los alumnos en matemáticas y las estrategias que utiliza en clases.

3.5.4. Documentos Escritos

Son registro que contienen las características del grupo estudio y proporcionan un marco, para los datos de base, de procesos axiológicos (Goetz y Le compte, 1998: pág. 15)

La obtención y análisis de los documentos escritos o artefactos en la investigación cualitativa comprende cuatro actividades: localización, identificación, análisis y evaluación; las cuales están

superpuesta unas con otras

En particular, en nuestra investigación hemos obtenido cuadernos, exámenes impresos y planificadores de clase.

3.6. Validez del Instrumento

3.6.1. Validez

La validez para Morales (2000: pág.43) “ es el grado con el cual un instrumento sirve al propósito para el cual está destinado”. Para esta investigación se utilizó una validez de contenido, que según Chavez (2004 : 168) “ es la correspondencia del instrumento con su contenido teórico. Se basa en la necesidad de discernimiento y juicio independiente de expertos ”.

La validación de los cuestionarios se ha logrado a través del juicio de expertos. Contamos con la opinión del profesor Mauricio Penagos, asesor del presente trabajo de grado y el profesor Johnny Fernando Alvis. Quien es el segundo lector del trabajo. Los lectores revisaron los instrumentos en cuanto a pertinencia, redacción, correspondencia con los objetivos y emitieron constancia de conformidad.

4.1. Introducción

En el presente capítulo se dan a conocer los resultados, su correspondencia interpretación y análisis luego de haber implementado los instrumentos y técnicas descritas en el Capítulo Tres y Anexos. Recordemos que para la recolección de datos en esta investigación se siguieron cuatro fases: Fase diagnóstica, la fase de diseño, fase de aplicación y la fase de evaluación y conclusión, en cada una de ellas se definen las categorías que permiten su desarrollo, para ellos seguimos una metodología de investigación cuasiexperimental.

Para la fase diagnóstica se elaboró una prueba diagnóstica (con 11 preguntas de selección múltiple con única respuesta), dirigido a los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución María Cristina Arango de Pastrana; con el objetivo de recaudar información de las dificultades que poseen en la multiplicación y división.

También se aplicó una entrevista a la docente del grado tercero la Profesora Ana María Martínez, para conocer con más detalle la realidad educativa en su práctica diaria.

En la fase de aplicación se lleva a la práctica las estrategias didácticas: El Minicomputador de Papy, las regletas de Cuisenaire, la Yupana, la Multiplicación Egipcia, el Método de Fibonacci y la Multiplicación Maya. Estas actividades fueron dirigidas a 5 estudiantes del grado tercero y a otro grupo de 5 estudiantes del mismo grado que fueron escogidos aleatoriamente, se les implementó el modelo clásico de multiplicar y dividir. Esta parte también se llevó registro fotográfico, tomando en cuenta la participación de los dos grupos de investigación.

En la fase de evaluación se hizo un cuadro comparativo con los dos grupos observando las dificultades de cada uno de ellos. Esto con el propósito de aplicar los aspectos funcionales y pedagógicos de las estrategias didácticas, para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y división.

Todos los análisis están guiados por los objetivos de este estudio, en él está presente métodos y estudiantes del grado tercero de primaria.

4.2. Fase Diagnostica

Esta fase nos permite indagar y explorar sobre las dificultades que se presentan hoy en día en la multiplicación y división del grado tercero de primaria. Para ello se les realizó un prueba diagnóstica (ver prueba en Anexos) a ambos grupos. Dado como resultado que estudiantes presentan dificultades en la multiplicación y división. También se entrevistó a la docente del grado tercero para conocer las dificultades que se le presentan al dar sus clases, durante los temas de interés de la investigación.

4.2.1. Análisis de la Prueba Diagnóstica

Se le aplicó la prueba diagnóstica a los dos grupos de control, y los resultados que se obtuvieron fueron:

4.3. Resultados

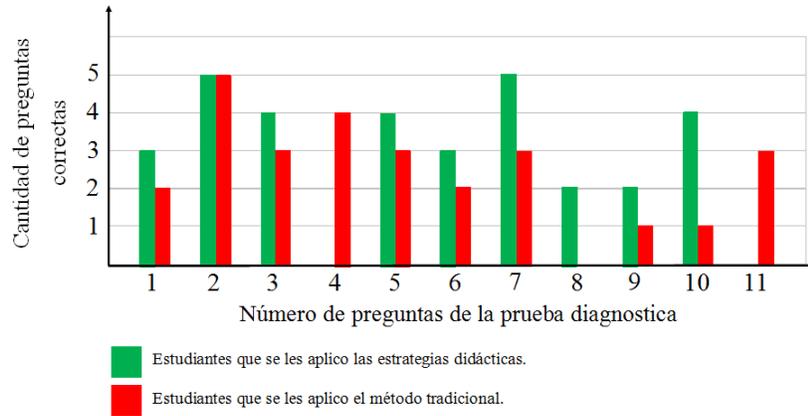
No	NOMBRE DE ESTUDIANTES	RESULTADOS
1	Covaleda Rodriguez María Camila	54,55 %
2	Gasca Rodas Maicol Duvan	81,82 %
3	Moyano Artunduaga Mariana	72,73 %
4	Olaya Torres Juan David	54,55 %
5	Oviedo Cumaco Angie Valentina	63,64 %

Cuadro 4.1: Estudiantes que se les aplicó las estrategias didácticas

No	NOMBRE DE ESTUDIANTES	RESULTADOS
1	Cuellar Mendez Jhon Kevin	72,73 %
2	Bustos Morales Danna Valentina	18,2 %
3	Gallego Caldon Juan Pablo	45,5 %
4	Piñeros Pulgarin Michel Daniela	63,64 %
5	Valderrama Artunduaga Isabela	9,1 %

Cuadro 4.2: Estudiantes que se le aplicó el método tradicional

Grafica



4.4. El Minicomputador de Popy

En esta estrategia didáctica se les presento a los estudiantes el modelo a utilizar, para ello se insertaron en un contexto para que observasen la aplicabilidad de esta estrategia.

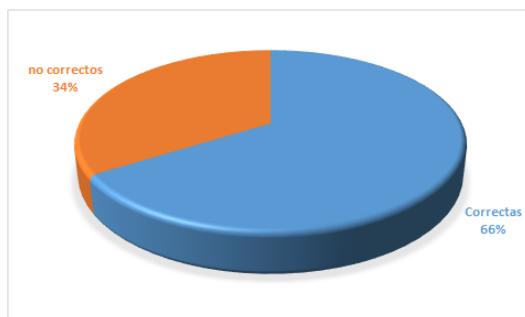
4.4.1. Aplicación del Minicomputador de Popy en la Multiplicación.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	1
2	2
3	4
4	5
5	3
6	4
7	3
8	4
9	3
10	4

En los casos de los estudiantes que no pudieron resolver correctamente el ejercicio primero de la multiplicación. En este sentido Schoenfeld (1989; pág. 144) dice que: si los alumnos solo pueden usar un procedimiento ciegamente o solo pueden usar técnicas en circunstancias exactas iguales en las que aprendieron, la educación en gran medida a fracasado.

Al concluir los ejercicios y observar los problemas, se tuvo que aplicar una retroalimentación para que logaran la comprensión total del modelo.



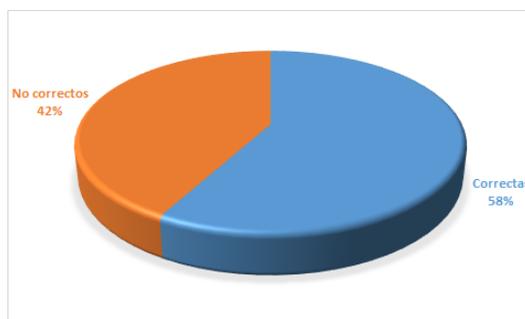
Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 66% de los problemas se resolvieron correctamente y el 34% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.4.2. Análisis del Minicomputador de Papy en la División

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	0
2	2
3	3
4	3
5	4
6	4
7	3
8	3
9	3
10	4

Uno de los problemas encontrados en los estudiantes, fue que lo confundían con el modelo de la multiplicación ya que el de la división es inverso al de la multiplicación.



Con respecto a la tabla anterior. Se tiene que 58% resolvieron correctamente los problemas planteados y 42% resolvieron los problemas de forma incorrecta.

4.5. La Yupana

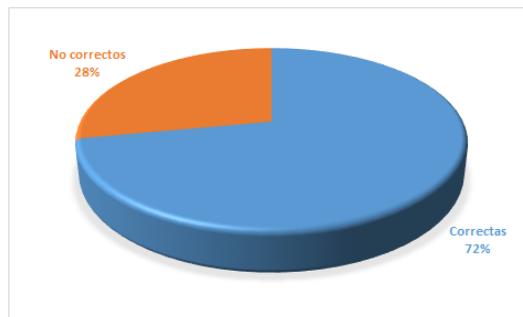
En esta estrategia didáctica se les presento a los estudiantes el modelo a utilizar, para ello se insertaron en un contexto para que observasen la aplicabilidad de esta estrategia. Así tambien, se les hablo un poco sobre la Hstoria los Incas y su antiguos métodos para resolver problemas en la matemáticas

4.5.1. Análisis de la Yupana en la Multiplicación.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	3
2	3
3	4
4	3
5	4
6	5
7	3
8	4
9	4
10	3

El problema más notorio de la aplicación de la Yupana es cuando tenían que hacer la agrupación de las fichas para poder completar las 10 y pasar al valor posicional siguiente. Se podía notar que este problema les causaba mucho inconveniente en la solución de problemas. Al concluir cada ejercicio y observar los problemas, se tuvo que aplicar una retroalimentación para que logaran la comprensión total del modelo.



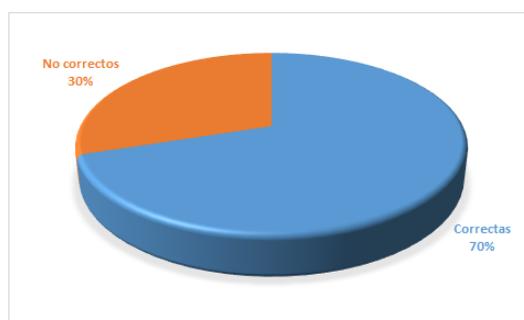
Con respecto a la tabla anterior. Se tiene que 72% resolvieron correctamente los problemas planteados y 28% resolvieron los problemas de forma incorrecta. Con esto se concluye, de acuerdo con nuestra tabla de medición, que el modelo fue comprendido medianamente satisfactorio.

4.5.2. Análisis de la Yupana en la División.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	4
2	4
3	3
4	3
5	3
6	3
7	4
8	3
9	4
10	4

En la aplicabilidad de la Yupana en la división las dificultades se redujeron ya que se comprendió su metodología, los problemas que surgieron fue al avanzar al valor numérico anterior.



Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 70% indica que el modelo fue satisfactorio y el 30% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.6. Las Regletas de Cuisenaire

Las regletas de Cuisenaire son un versátil juego de manipulación matemática utilizado en la escuela, así como en otros niveles de aprendizaje e incluso con adultos. Se utilizan para enseñar una amplia variedad de temas matemáticos, como las cuatro operaciones básicas, fracciones, área, volumen, raíces cuadradas, resolución de ecuaciones simples, los sistemas de ecuaciones, e incluso ecuaciones cuadráticas.

4.6.1. Análisis de las Regletas de Cuisenaire en la Multiplicación

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	5
2	5
3	5
4	5
5	4
6	3
7	5
8	4
9	4
10	4

En este método los estudiantes comprendieron el manejo de esta herramienta, se les dificulto menos que el Minicomputador de Papy y la Yupana.



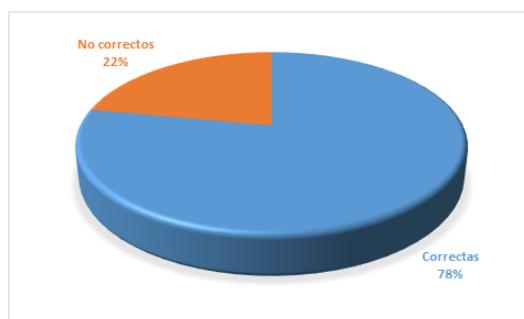
Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 88% indica que el modelo fue satisfactorio y el 12% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.6.2. Análisis de las Regletas de Cuisenaire en la División

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	4
2	5
3	3
4	4
5	4
6	3
7	5
8	3
9	4
10	4

En este método los estudiantes comprendieron el manejo de esta herramienta.



Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 78% indica que el modelo fue satisfactorio y el 22% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.7. Método de la Celosía, o de Fibonacci

4.7.1. Análisis Método de la Celosía, o de Fibonacci

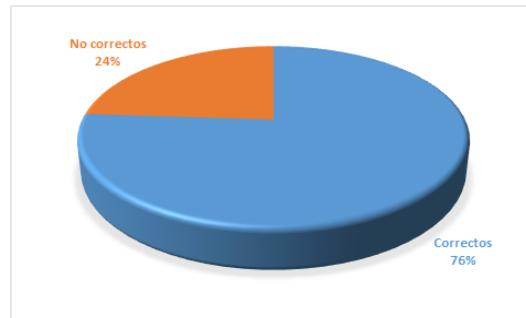
En esta estrategia didáctica se les presento a los estudiantes el modelo a utilizar, de la celosía es un método para multiplicar números enteros que inventó un matemático italiano, Luca Pacioli, en el siglo XV.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	3
2	3
3	4
4	3
5	3
6	5
7	5
8	5
9	3
10	4

Los dos únicos problemas que se pudieron evidenciar en este método, es que algunos jóvenes no ubicaban los números en su respectivo orden y un poco en las tablas de multiplicar. Ya que en este método los conocimientos previos son las tablas de multiplicar.

Al concluir los ejercicios y observar los problemas, se tuvo que aplicar una retroalimentación para que logaran la comprensión total del modelo.



Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que fueron resueltos correctamente, en este modelo el 76% indica que los estudiantes resolvieron la mayoría de los ejercicios correctamente y el 24% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.8. La Multiplicación Egipcia del Año, 2500 a.C.

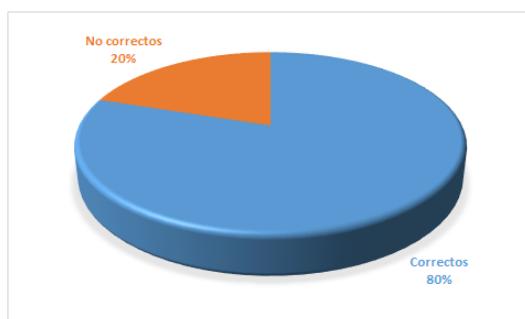
4.8.1. Análisis de la Multiplicación Egipcia del Año, 2500 a.C.

Este método es muy práctico ya que las referencias históricas nos mencionan que los egipcios utilizaron sobre todo las matemáticas para casos prácticos.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	4
2	4
3	4
4	3
5	4
6	3
7	3
8	5
9	5
10	5

La ventaja de este método es que los estudiantes no necesitan saber las tablas de multiplicar ya que en cada columna se va haciendo el doble de cada número y así fue como lo entendieron los estudiantes, el único inconveniente es que el método es un poco largo los manifestaron los estudiantes.



Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 80% indica que el modelo fue satisfactorio y el 20% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos.

4.9. La Multiplicación Maya

4.9.1. Análisis de la Multiplicación Maya

En esta estrategia didáctica se les presento a los estudiantes el modelo a utilizar, para ello se le presento un poco de la cultura Maya, y según los registros históricos los Mayas eran buenos matemáticos. La manera que tenían de multiplicar los mayas era bastante útil y rápida, y servía para prácticamente cualquier número.

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	5
2	5
3	5
4	5
5	4
6	3
7	5
8	5
9	4
10	5

Fue el método que menos dificultad tenían los estudiantes, ya que es un método más rápido para la solución de problemas, no es necesario saber las tablas de multiplicar. El único inconveniente que se presento fue cuando los números son muy grandes se vuelve un poco tedioso el contar los puntos (fue lo que manifestaron los estudiantes).



Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 92% indica que el modelo fue satisfactorio y el 8% nos muestra que los ejercicios no fueron bien resueltos. Se puede concluir que es la estrategia didáctica que tiene la mayor comprensión de los expuestos en este trabajo de grado.

4.10. Análisis Del Grupo que se le Aplico el Método Tradicional

En este método se le aplicó el algoritmo estándar para multiplicar dos números naturales, requiere el aprendizaje previo de las tablas de multiplicar. La multiplicación se empieza desde la derecha, teniendo cuidado con la ley de los signos y con colocar las unidades de un orden bajo las unidades del mismo orden (unidades bajo unidades, decenas bajo decenas, centenas bajo centenas, etc.). Luego se suman los productos de cada cifra del segundo factor por todas las del primero. Y el algoritmo de la división estándar o método de la potencia. Se escribe el dividendo arriba a la izquierda y el divisor arriba a la derecha. El cociente se construye paso a paso y se escribe sobre el divisor. Los restos sucesivos y los dividendos sucesivos se escriben bajo el primer dividendo.

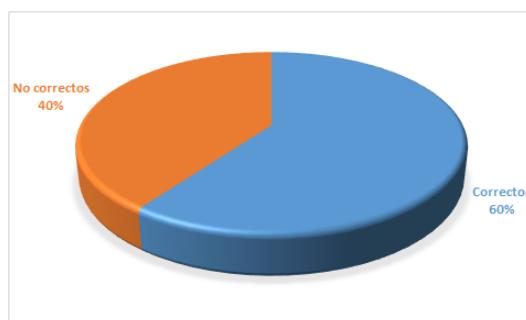
4.10.1. Análisis de la Multiplicación

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el algoritmo de la multiplicación.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	2
2	3
3	4
4	3
5	4
6	2
7	3
8	3
9	3
10	3

En este método las dificultades más notorias de los estudiantes es la falta de memorización de las tablas de multiplicar y fue una constante en las sesiones, ya que algunos estudiantes no se las aprendían y le dedicábamos tiempo para que se las aprendieran y otra dificultad que se presentó es

que los estudiantes cuando tenían que multiplicar la cifra de las decenas el resultado lo iniciaban escribiendo en la posición de las unidades. Esos fueron los dos problemas más notorios del grupo que se le aplicó el método tradicional.



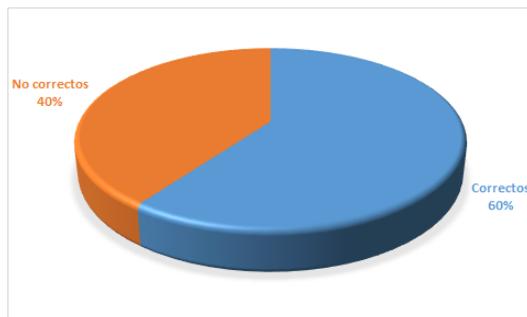
Con respecto al dominio del algoritmo, se califica de acuerdo al número de problemas que fueron solucionados correctamente, en este modelo el 60% indica que el algoritmo fue comprendido pero con las dificultades que se mencionaron anteriormente y el 40% nos muestra que los problemas no se solucionaron correctamente.

4.10.2. Análisis de la División

En la siguiente tabla se presentan los datos de los estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el algoritmo de la multiplicación.

Número de ejercicio	Cantidad de ejercicios correctos
1	2
2	3
3	3
4	3
5	3
6	3
7	3
8	4
9	3
10	3

En el caso del algoritmo de la división, las dificultades de los alumnos se manifiestan en la mayor medida debido a que el aprendizaje de la división es el más difícil de todos los algoritmos ya que cuenta con características en su resolución que la diferencian de las otras operaciones, entre éstas se encuentran las siguientes: se lleva a cabo de izquierda a derecha mientras que todos los demás se ejecutan de derecha a izquierda, aporta dos resultados (cociente y residuo) mientras que en los otros se busca un solo resultado, tiene una fase de estimación o de tanteo que no existe en las demás operaciones, requiere que los otros.

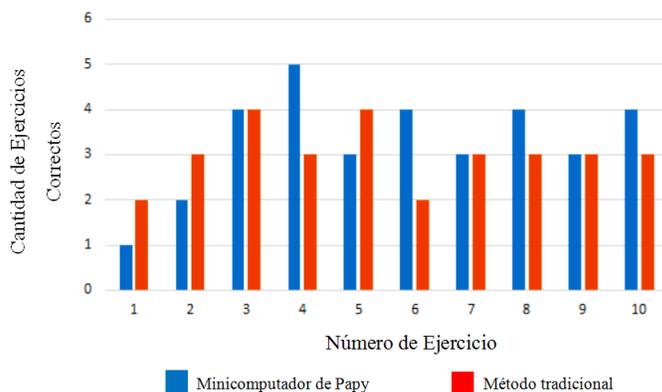


Con respecto al dominio del algoritmo, se califica de acuerdo al número de problemas que fueron solucionados correctamente, en este modelo el 60% indica que el algoritmo fue comprendido pero con las dificultades que se mencionaron anteriormente y el 40% nos muestra que los problemas no se solucionaron correctamente.

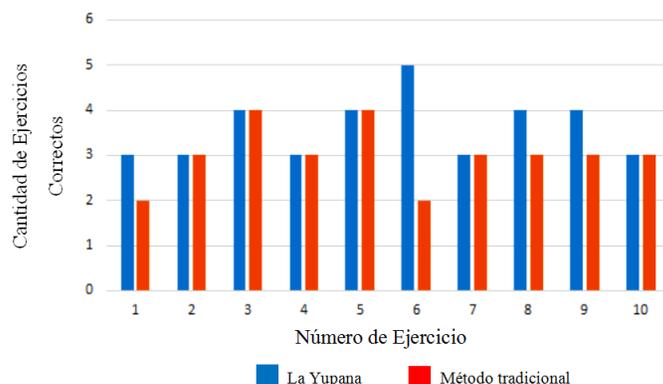
4.11. Comparación Entre El Método Tradicional Y Las Estrategias Didácticas

A continuación mostraremos una comparación grafica de cada uno de las estrategias didácticas con el método tradicional.

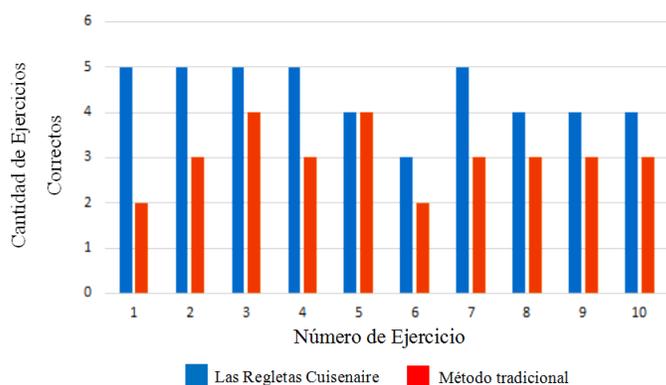
4.12. Minicomputador de Papy y el Método Tradicional de la Multiplicación



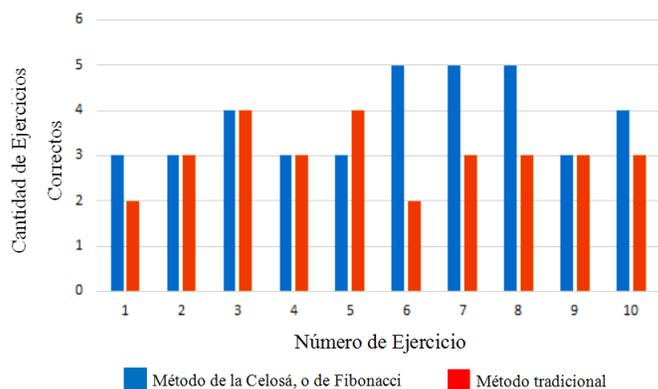
4.13. La Yupana y el Método Tradiciona de la Multiplicación



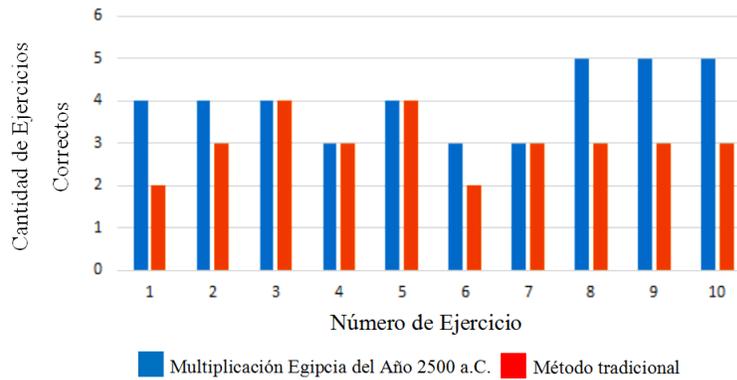
4.14. Regletas de Cuisenaire y el Método Tradiciona de la Multiplicación



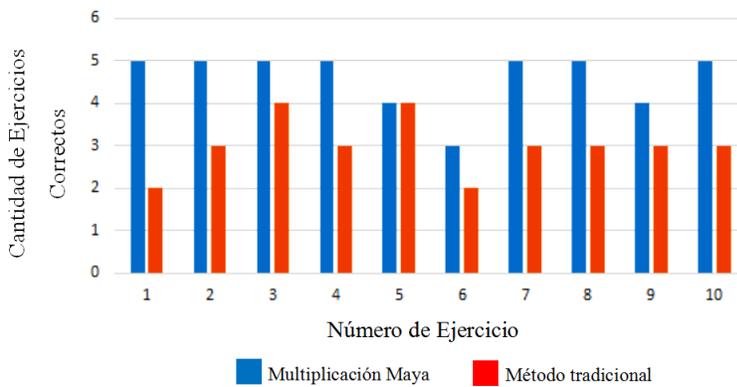
4.15. Método de la Celosá, o de Fibonacci y el Método Tradiciona de la Multiplicación



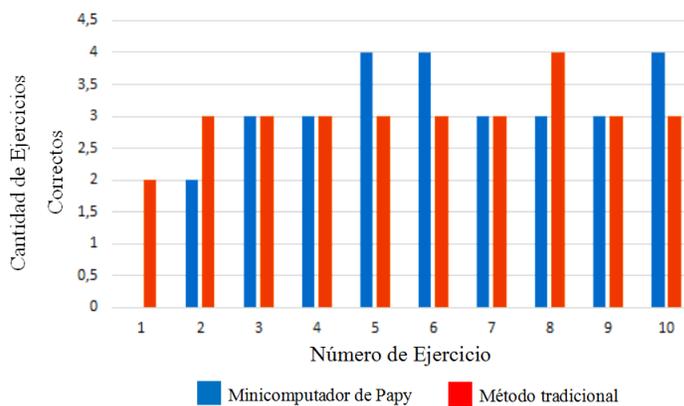
4.16. Multiplicación Egipcia y el Método Tradicional de la Multiplicación



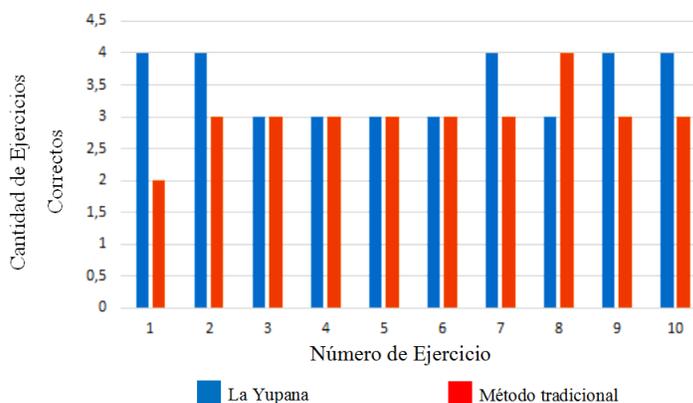
4.17. Multiplicación Maya y el Método Tradicional de la Multiplicación



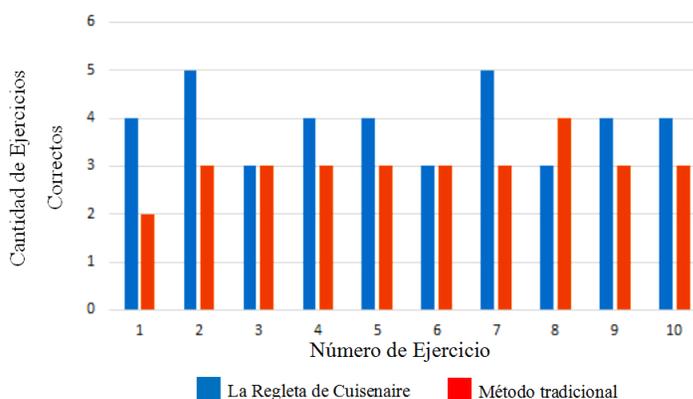
4.18. Minicomputador de Papy y el Método Tradicional de la división



4.19. La Yupana y el Método Tradicional de la división



4.20. Regletas de Cuisenaire y el Método Tradicional de la división



4.21. Evaluación del Proceso

Las estrategias fueron aplicadas con los recursos humanos y físicos necesarios para cada estrategia, logrando los objetivos propuestos en todas y cada una de ellas.

4.22. Alcances

- Validar estrategias didácticas para el mejoramiento del aprendizaje
- Integración de los conocimientos previos con los nuevos temas.
- El planteamiento de estrategias innovadoras y llamativas para los estudiantes.
- Reflexionar sobre las diferentes formas de multiplicar y dividir.

4.23. Logros

- Desarrollo y Validación de estrategias didácticas.

- Comparación de las estrategias didácticas y el método tradicional en la multiplicación y división.
- Ambientes de clase alegres y divertidos.
- Disponibilidad y actitud positiva para trabajar en clase.
- Trabajo en grupo caracterizado por el respeto y la solidaridad.

4.24. Dificultades

- El tiempo destinado al desarrollo de cada estrategia fue mayor al planeado.
- Se evidencio en algunos estudiantes inconvenientes para entender algunas de las estrategias didácticas y el método tradicional de multiplicar y dividir.

5.1. Recursos humanos

- Asesor: MSc. Mauricio Penagos.
- Estudiantes investigadores Darwin Enrique Mosquera, Luis Enrique Leiva Morantes.

5.2. Recursos Materiales

- Computador portátil con acceso a internet.
- Fotocopias.
- Impresora.
- Libros de consulta.
- Reuniones de preguntas con el asesor y la exposición del trabajo final.
- CD'S y Memorias USB.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIÓN

Las estrategias didácticas que fueron aplicadas permitieron en gran parte solucionar la problemática que se presentaba en el aprendizaje significativo de la multiplicación y división en los estudiantes del grado tercero ya que al evaluar el resultado se pudo observar que los cinco niños que se les aplicó las estrategias didácticas ya manejan diferentes formas para resolver multiplicaciones y divisiones. Esto muestra la efectividad de las estrategias aplicadas por que se logró el aprendizaje significativo de ellas.

Al efectuar las estrategias didácticas permitieron cambiar las ideas equívocas que los estudiantes del grado tercero tenían con respecto al aprendizaje de la multiplicación y división permitiendo unas clases amenas. Todas las estrategias de enseñanza son utilizadas intencional y flexiblemente por el profesor y este las puede usar antes para activar la enseñanza, durante el proceso para favorecer la atención y después para reforzar el aprendizaje de la información nueva.

Con el estudio realizado se llegó finalmente a lo siguiente: Los procedimientos de enseñanza más utilizados fueron, Maneja estrategias didácticas y emplea procedimientos tradicionalistas.

Los grupos en lo general obtuvieron niveles óptimos, ya que ninguno de los grupos presentó un nulo dominio de los aprendizajes, aunque si existió en lo particular dificultades en algunas estrategias y en el método tradicional. Ya que no tienen porcentajes máximos. Como podemos ver en los resultados.

La relación que fue establecida entre los dos grupos de control, podemos declarar que el procedimiento de enseñanza es determinante para el nivel de aprendizaje, ya que aunque se obtenga un máximo nivel de aprendizaje se puede lograr con el manejo de las estrategias didácticas y el método tradicional.

En primer lugar, brindar una amplia capacitación a los docentes en el uso de métodos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones, para que comiencen a enseñar por medio de herramientas como La Yupana. El minicomputador de Papy, las regletas de Cuisenaire, entre otras. Esto implica por parte del docente la tarea de alentar a otros docentes la invención y utilización de diversidad de procedimientos, promover la comparación de las diversas estrategias y el análisis de los errores, estimular la investigación de estrategias entre ellos.

En segundo lugar probar los métodos alternativos en estudiantes que no han interiorizado el método tradicional. Además se recomienda que el trabajo de construcción de los algoritmos se plantee a partir de situaciones de exploración en los que los alumnos usen diferentes procedimientos poniendo en juego su creatividad. Este trabajo se verá enriquecido si los alumnos aprenden a realizar cálculos mentales, elegir diversos procedimientos, a disponer de diferentes recursos de estimación y control de los resultados de la multiplicación y división.

Se recomienda tomar estos procedimientos como objeto de trabajo: compararlos, mejorarlos y también vincularlos con el algoritmo tradicional. La idea es que los estudiantes pueden decidir la conveniencia de realizar un cálculo exacto, un cálculo mental o el algoritmo tradicional en la multiplicación o división.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Asociación colombiana de matemática educativa Asocolme, *Estándares Curriculares área de Matemáticas*, 2002.
- [2] Blanco, L. (2011). La Investigación en educación matemática. *Educatio Siglo XXI*, 29 (1), 109 – 128.
- [3] Balbi, A. (2005). *El proceso de enseñanza-aprendizaje desde la perspectiva crítica*. Revista Copérnico. Año 1 – N^o3, Julio-Diciembre 2005,p.
- [4] Cammaroto, A.,Martins, F y Palella, S. (2003) *Análisis de las estrategias instruccionales empleadas por los profesores del área de matemática.: Caso: Universidad Simón Bolívar. Sede Litoral*. [Artículo en línea]. Investigación y Postgrado. abril de 2003, vol.18, n^o1.
- [5] Díaz, F y Hernández, G. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* México: Mc Graw-Hill.
- [6] Flórez Ochoa, R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Colombia:McGraw- Hill.
- [7] García, J, Eduardo y Porlan, Rafael. *Cambio escolar y desarrollo y desarrollo profesional: un enfoque basado en la investigación en la escuela*, en: Revista Investigación en la Escuela N^o11. Ediciones Diada. Sevilla. 1990.
- [8] Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- [9] Jeremy Kilpatrick, Pedro Gómez y Luis Rico *Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación*. Universidad de los Andes, Bogotá, 1998.
- [10] Jessenia Lozzada y Cleisy Ruiz. *Estrategias Didácticas para la enseñanza de la multiplicación y división en alumnos de 1er año*. Abril de 2011. Trabajo de grado.
- [11] Liliana Cattaneo, Noemí Lagreca, María Inés Gonzales y Noemí buschiazzo *Didáctica de la matemática enseñar matemática*. Editorial Homo Sapiens Ediciones 2010.
- [12] Mialaret, Gaston (1987). *Las matemáticas: ¿cómo se enseñan, cómo se aprenden?*. Barcelona: Visor.
- [13] Mario Roberto Canles Villanueva *Estudio Exploratorio sobre el uso de modelos alternativos para la enseñanza de la multiplicación y división con estudiantes de primer curso de ciclo común*. Julio del 2006.Tesis de Maestría en Educación Matemática.

-
- [14] Ministerio de Educación Nacional, *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*.
- [15] Ministerio de Educación Nacional, *serie lineamientos curriculares Matemáticas*. Bogotá D.C., 7 de Junio de 1998.
- [16] Bernardo García Quiroga, Arnulfo Coronado, Leonardo Montealegre Quintana, Blanca Adriana Tovar piza, Albeiro Giraldo Ospina, Samuel Morales Parra, Dawson Didier Cortés Joven. *Competencias matemáticas: un estudio exploratorio en la educación básica y media*. Florencia: Universidad de la Amazonia, Marzo de 2012.
- [17] Muñoz Giraldo, José Federmán y Otros. *Como desarrollar competencias investigativas en educación* Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá. 2001.
- [18] Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: el caso de la multiplicación. Febrero 2011, pp. 17 – 26. *Artículo de la revista suma*
- [19] Polilóbulos y competencias básicas. Febrero 2010, pp. 21 – 28. *Artículo de la revista suma*
- [20] Rico, L. (1995a). Didáctica de la Matemática como campo de problemas. En E. Repetto, & G. Marrero (Eds.), *Estrategias de intervención en el aula desde la LOGSE* (pp. 551 – 579). Las Palmas: ICEPSS Editores.
- [21] Rico, L. (1995b). *Conocimiento numérico y formación del profesorado. Discurso de apertura, Curso Académico 1995 – 96*. Granada: Universidad de Granada.
- [22] Rico, L. (1999). Development of Spanish doctoral studies in didactic of mathematics. En K. Hart y F. Hitt (Eds.), *Supervisión of higher degrees in mathematics education. An international perspective* (pp. 1 – 26). México: CINVESTAV.
- [23] Rico, L., & Sierra, M (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En J. Carrillo & L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XX*, (pp. 77 – 131). Huelva: Hergué Editores.
- [24] Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(3), 641 – 649.
- [25] Sierra, M. (2011) Investigación en educación matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. *Educación Siglo XXI* 29 (2), 173 – 198.
- [26] Vasco, Eloísa. *La investigación en el aula como factor de mejoramiento cualitativo de la educación* Colegio Cafam. Bogotá 1988.

ANEXO 1

ANEXOS

1.1. Listado de estudiantes

No	NOMBRE DE ESTUDIANTES
1	Covaleda Rodriguez María Camila
2	Gasca Rodas Maicol Duvan
3	Moyano Artunduaga Mariana
4	Olaya Torres Juan David
5	Oviedo Cumaco Angie Valentina

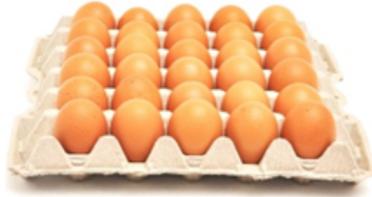
Cuadro 1.1: Estrategias didácticas

No	NOMBRE DE ESTUDIANTES
1	Cuellar Mendez Jhon Kevin
2	Bustos Morales Danna Valentina
3	Juan Pablo Gallego Caldon
4	Piñeros Pulgarin Michel Daniela
5	Valderrama Artunduaga Isabela

Cuadro 1.2: Método tradicional

1.2. Prueba Diagnostica

1. Observa la imagen. Luego identifica la multiplicación que corresponda.



- A. 6×5
- B. 5×5
- C. 6×4
- D. 3×10

2. ¿Cuál es el factor que falta de $9 \times ? = 72$?

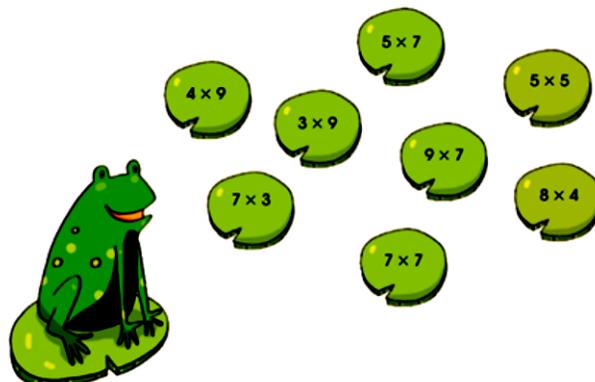
- A. 7
- B. 8
- C. 9
- D. 5

3. ¿Cuáles son los dos factores cuyo producto sea el indicado?

63

- A. 9×7
- B. 8×8
- C. 9×6
- D. 7×5

4. La rana de la figura desea saltar por las hojas que tienen productos impares.



El camino que sigue la rana es:

- A. $7 \times 3, 3 \times 9, 5 \times 7, 5 \times 5, 9 \times 7$ y 8×4
- B. $4 \times 9, 3 \times 9, 5 \times 7, 5 \times 5, 9 \times 7$ y 7×7
- C. $7 \times 3, 3 \times 9, 5 \times 7, 5 \times 5, 9 \times 7$ y 7×7
- D. $4 \times 9, 3 \times 9, 5 \times 7, 5 \times 5, 9 \times 7$ y 8×4

5. Sonia compra cuatro latas de salchichas. Si cada una tiene un peso de 254 gr, ¿Cuál es el peso total de todas las latas de salchichas?



- A. Las latas de salchichas pesan 3016 gr
- B. Las latas de salchichas pesan 2016 gr
- C. Las latas de salchichas pesan 1016 gr
- D. Las latas de salchichas pesan 5016 gr

6. Lee lo que dice cada panadero. Luego contesta. ¿Quién hornea más panes al día?



- A. Schnitzel
- B. Mung Daal
- C. Los dos hornean la misma cantidad de pan al día
- D. Todas las anteriores

7. En un campamento hay 20 niños y cuatro monitores. ¿A cuántos niños puede atender cada monitor?



- A. 5 niños
- B. 4 niños
- C. 2 niños
- D. 3 niños

8. Daniel tiene 14 dulces para repartir en tres grupos. ¿Cuántos dulces puede colocar en cada grupo?, ¿Cuántos sobran?



- A. Daniel debe entregar 5 dulces a cada grupo y le sobran 3.
- B. Daniel debe entregar 4 dulces a cada grupo y le sobran 2.
- C. Daniel debe entregar 2 dulces a cada grupo y le sobran 4.
- D. Daniel debe entregar 3 dulces a cada grupo y le sobra 1.

9. Ayuda al niño a ubicar los números de las tarjetas para formar una división.



- A. 25: residuo, 3: cociente, 8: dividendo y 1: divisor.
- B. 25: cociente, 3: residuo, 8: divisor y 1: dividendo.
- C. 25: dividendo, 3: divisor, 8: cociente y 1: residuo.
- D. 25: divisor, 3: dividendo, 8: residuo y 1: cociente.

10. Carolina tiene 16 lápices. Cada grupo necesita cuatro lápices. ¿Para cuántos grupos alcanzan?



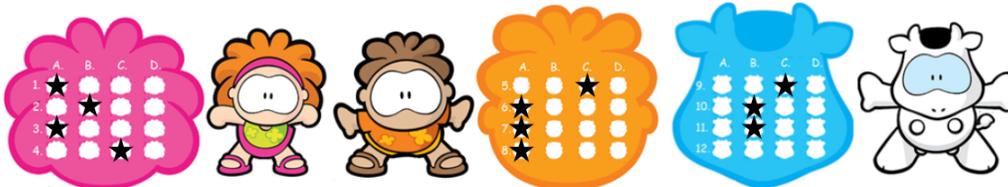
- A. 4 grupos
- B. 5 grupos
- C. 3 grupos
- D. 2 grupos

11. Enrique compra un horno microondas y lo paga en 14 cuotas iguales, ¿Cuánto debe pagar en cada cuota?



- A. 9502 pesos
- B. 9500 pesos
- C. 9503 pesos
- D. 9501 pesos

Tabla de Respuesta

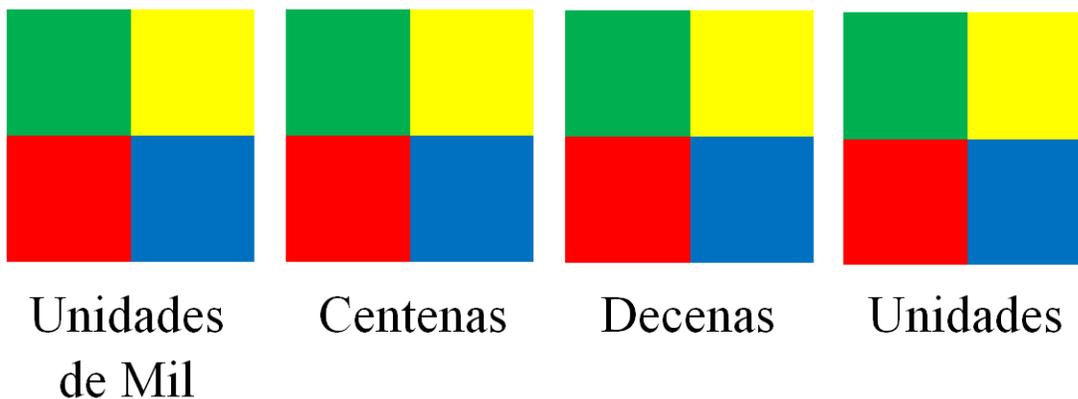


1.3. Guías Didácticas

1.3.1. El Minicomputador de Papy

Reglas

El minicomputador está formado por placas cuadradas, divididas en cuatro casillas, y fichas de diferentes colores. Las placas se alinean horizontalmente de derecha a izquierda, siguiendo la regla del sistema decimal de numeración, la cual se ilustra en la siguiente figura.

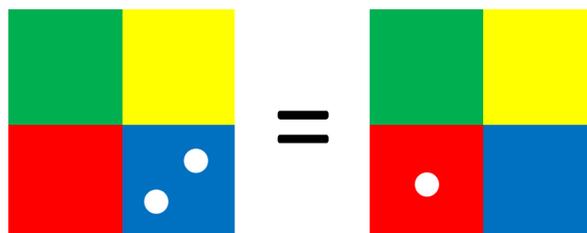


La división de cada placa en cuatro casillas es necesaria y suficiente para representar los números del 0 al 9, cada casilla tiene el color de las regletas que representan, respectivamente, a los números 1, 2, 4 y 8

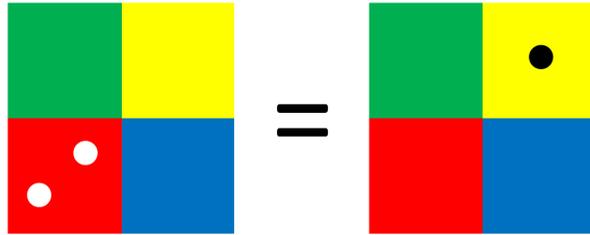


El minicomputador se rige por las siguientes reglas:

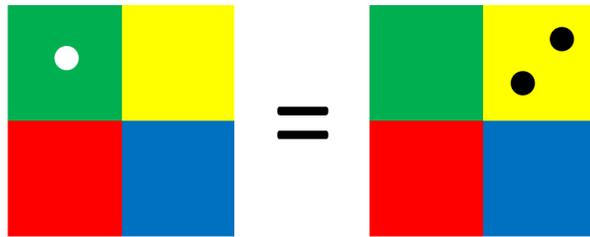
- Dos fichas en la casilla azul equivale a una en la roja



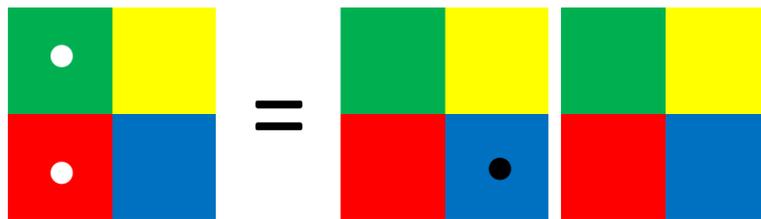
- Dos fichas en la casilla roja equivale a una en la amarilla



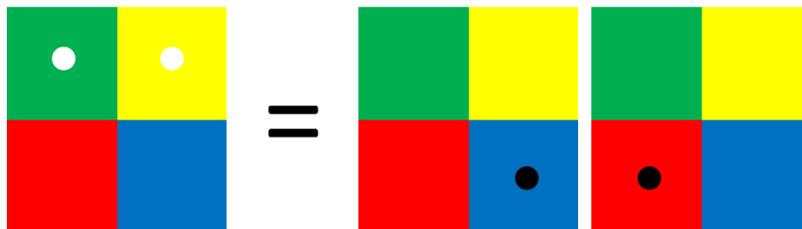
- Dos Fichas en la casilla amarilla equivale a una en la verde



- Una Fichas en la casilla verde y otra en la casilla roja equivale a una en la casilla azul de las decenas.



- Una Fichas en la casilla verde y otra en la casilla amarilla equivale a una en la casilla azul de las decenas y otra en la casilla roja de las unidades.



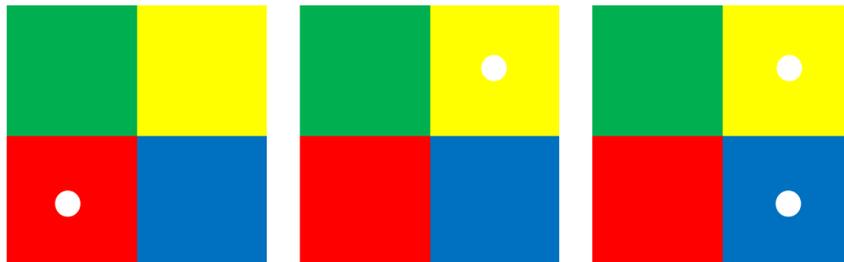
Multiplicación

Se expresa como una suma de sumandos iguales y se actúa con las mismas reglas del algoritmo de la suma, es decir, agrupando:

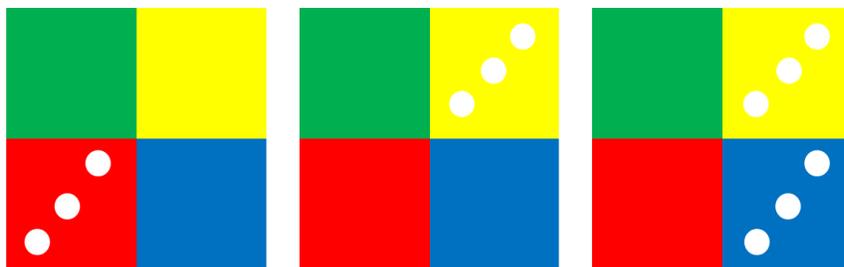
Ejemplo: El producto $245 \times 3 = 735$

Solución

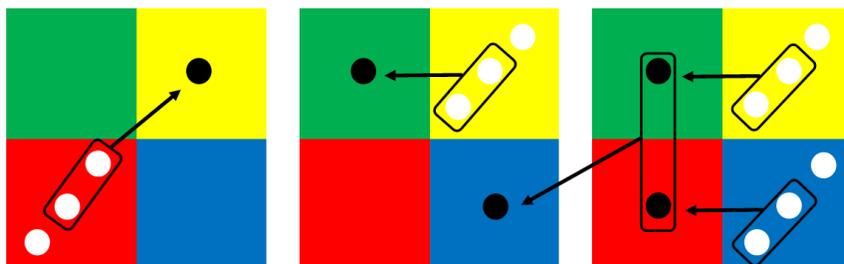
- Se escribe en el minicomputador el número que se va a multiplicar, o sea, el primer factor



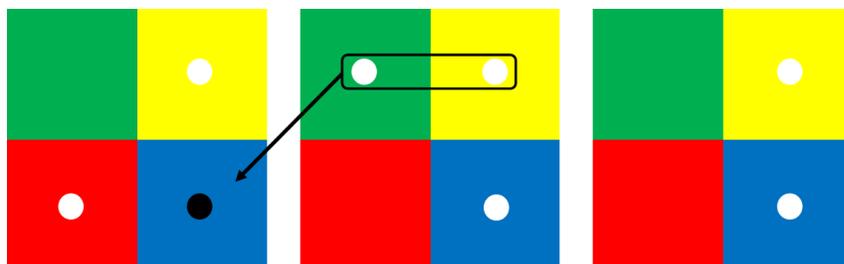
- Se reemplaza cada de una casilla por tantas cifras como indica el segundo factor.



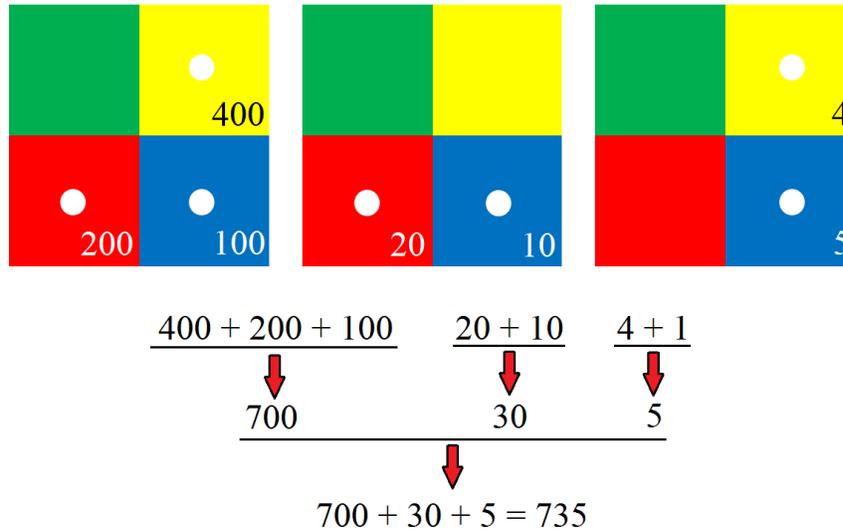
- Se realizan las agrupaciones posibles de acuerdo con las reglas del minicomputador.



- Se escribe el resultado en formación.



- El resultado.

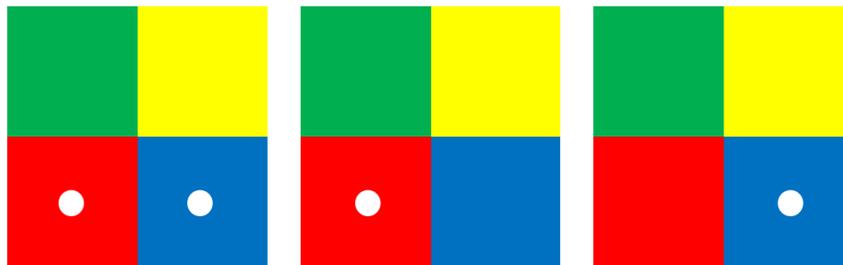


División

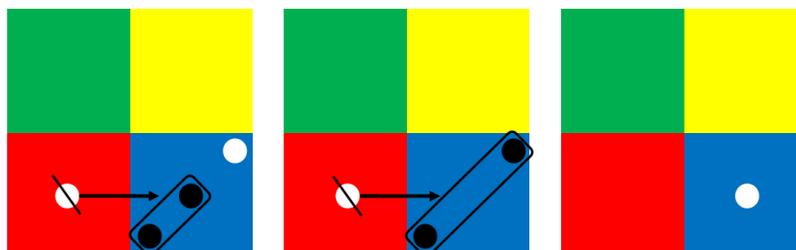
La división se efectúa desagrupando, del mismo modo que en la resta, y forma grupos iguales de fichas sobre las casillas de las placas:

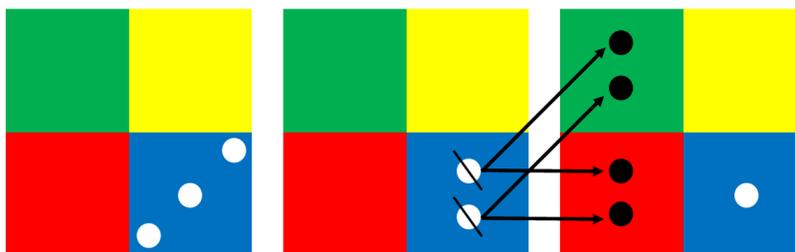
El número de fichas es el mismo que el de dígitos del divisor. A manera de ejemplo veamos cómo se procede para dividir 321 entre 3:

- Se escribe en el minicomputador el dividendo.

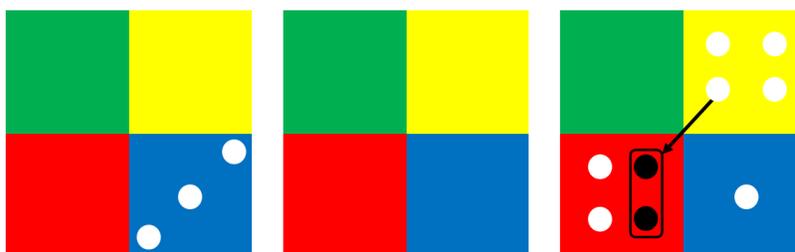
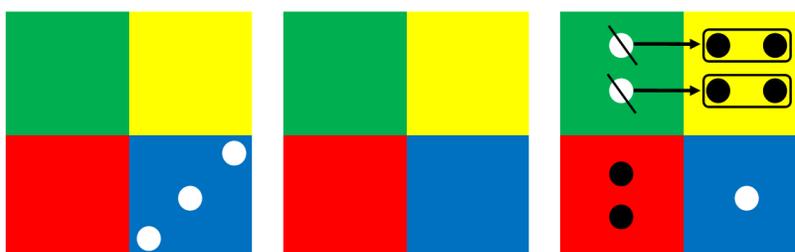


- Se desagrupa siguiendo las reglas del minicomputador de forma que en cada casilla haya tantas fichas como indica el divisor.

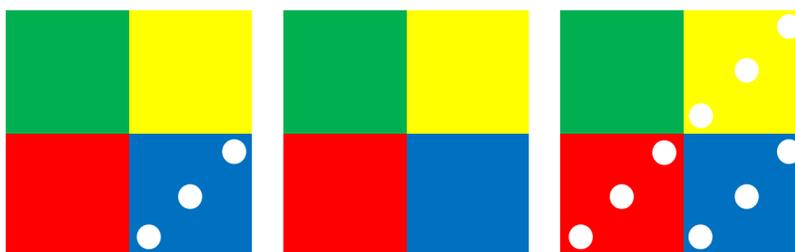
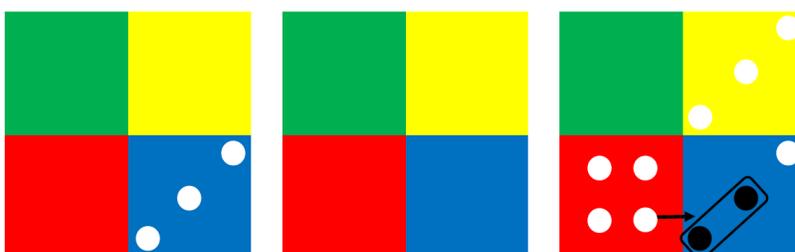




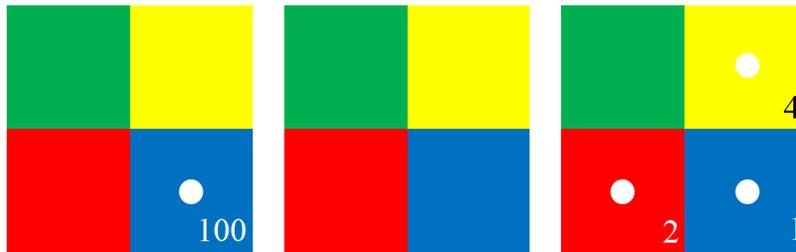
- Todas las casillas que contienen fichas tiene tantas como indica el divisor.



- Se escribe el resultado como si los conjuntos equipotentes sólo tuviesen una ficha.



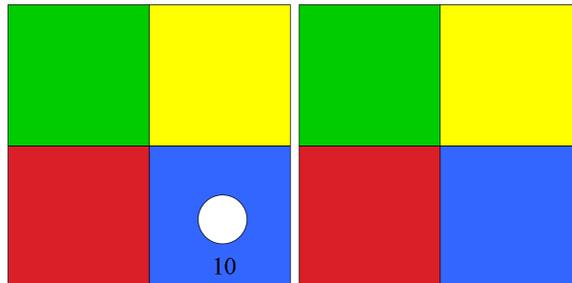
- El resultado obtenido se ilustra a continuación.



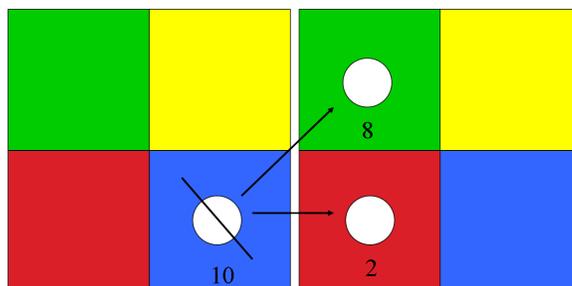
$$100 + 00 + 4 + 2 + 1 = 107$$

dividir 10 entre 5

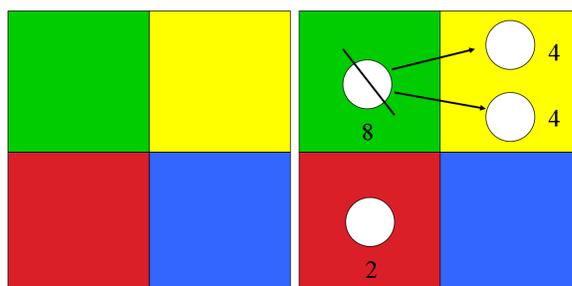
Se escribe en el minicomputador el dividendo.



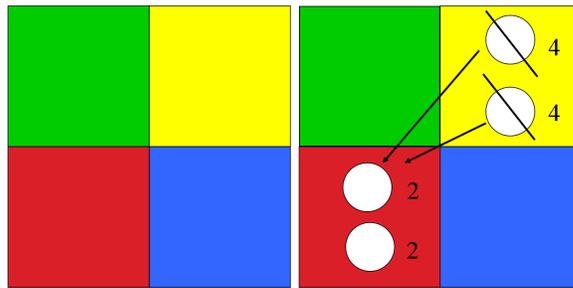
Se desagrupa siguiendo las reglas del minicomputador de forma que en cada casilla haya tantas fichas como indica el divisor.



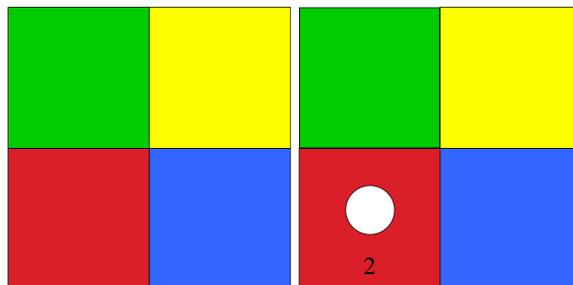
Una ficha verde equivale a dos amarillas.



Una ficha amarilla equivale a una roja.



Se escribe el resultado como si los conjuntos equipotentes sólo tuviesen una ficha y el resultado obtenido se ilustra a continuación.



1.3.2. La Yupana

Historia

Al parecer, fue William Burns Glynn en 1981 (ingeniero textil) quien le dió el nombre de Yupana a la tabla de cálculo de los incas, basado en que YUPAY (vocablo quechua) significa contar.

Aunque la yupana no fue la herramienta central del cálculo incaico aportó bastante al control numérico así como el quipú, considerado el instrumento básico de archivo y control de información numérica, estadística e histórica. Tanto en el quipú (que consta de un cordel principal del cual penden otros cordoncillos más cortos de diferentes colores, en cada uno hay varios nudos que simbolizan algún número o letra) como en la yupana se usa el sistema decimal y posicional lo cual indica un alto grado de civilización de la cultura incaica; es por esta razón que matemáticos, ingenieros e historiadores se han encargado de estudiar y analizar minuciosamente el misterio que encierran estos instrumentos; resumiremos ahora en qué hechos se ha basado el origen de la yupana al igual que la interpretación de algunos personajes acerca de ella:

- Felipe Guamán Poma de Ayala en su obra *“Nueva Crónica y buen Gobierno”* publicada en (1.615) muestra en la esquina inferior izquierda un esquema de la yupana: una tabla de forma rectangular donde se encuentran cinco filas y cuatro columnas cuya base es uno de los lados más cortos, se observa círculos negros y blancos distribuidos por columnas, en la primera se encuentran por casilla cinco círculos, en la segunda tres, en la tercera dos y en la última un círculo.



A raíz de este dibujo han aparecido varias interpretaciones con el fin de explicar el funcionamiento y lectura de la yupana, entre ellos:

- J. A. Mason enuncia que las cifras de un número se representan con granos de maíz o piedrecillas de dos colores diferentes.
- Henry Wassen indica que los dos colores representan posiciones ocupadas por fichas y posiciones desocupadas.

Estas interpretaciones se basan en la aceptación de que los números en la Yupana figuran como granos de maíz, semillas, piedrecillas,..., quizás basados en aquello que enuncia José de Acosta (1,530 – 1,616) en su libro *“Historia Natural y moral de las Indias”*:

“ Tomarán estos indios sus granos y pondrán una aquí, tres acullá, ocho no sé dónde. Pasarán un grano de aquí, trocurán tres de acullá, y en efecto ellos salen con su cuenta hecha puntualísima, sin errar tilde. Si esto en él es ingenio y estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiese, que lo que yo juzgo de cierto es que en aquello a que se aplican nos hacen grandes ventajas”

En la Yupana se representarían las cifras de un número con símbolos “○” y “●” identificables en el ábaco de Guamán Poma¹; según esta interpretación, equivaldría a 1, y tendría un valor de 5. Los números debieron escribirse de arriba hacia abajo, siguiendo el patrón acogido en el quipú y a lo que enuncia Acosta:

“... su modo no era escribir a renglón seguido, sino de alto, abajo o a la redonda”

Así se entra a otra discusión, la posición en que se debe colocar la yupana para ubicar los números:

- Un grabado de 1,503 de Margarita Philosophica por Gregorius Reich muestra la yupana girada en 90° de acuerdo a la posición dada por Guamán
- Poma, la cual es considerada la ubicación correcta: el lado más largo debe ocupar una posición horizontal, cerca del operario.

Otro aspecto de interés en la yupana es la distribución de las casillas y la presencia de la progresión: 1, 2, 3, 5 que es estimada por Burns como fundamental al sistema, los casilleros con cinco, tres y dos círculos son las posiciones para ubicar las “ayudas artificiales” (pueden ser piedras, granos,...) y la

¹representa un tablero de ajedrez 5x4

casilla con un círculo figura como “memoria”; cada círculo vale “uno” y adquiere mayor valor de acuerdo a la columna a la que pertenezca. (Este enfoque será explicado más detalladamente en la parte del trabajo Algoritmos expuestos por William Burns).

En cuanto a las operaciones desarrolladas en la yupana, los incas (al parecer) sumaban, restaban, multiplicaban y dividían; refiriéndonos a la resta, todo indica que los incas la emplearon y la yupana fue el medio utilizado para expresar numéricamente el resultado obtenido después de sustraer un número de otro; además, comparando con los quipús, registraban la entrega de una mercancía desanudando un cordel y anudando otro. Por esto último y otras semejanzas de la yupana con el quipú, Diego Pareja acepta la yupana como una sección del quipú, donde los nudos son sustituidos por piedrecillas, se manipulan objetos como en todo el proceso abacista; todo se reduce a reglas y como en el caso de quienes manejan símbolos, también hay que aprender las tablas de multiplicar.

Por último, también hace parte de la historia las reformas que hemos hecho al esquema o estructura de la yupana y el enfoque que le hemos dado, donde nuestro fin es rescatar en la multiplicación, su definición como sumas sucesivas y en la división la idea de restas sucesivas dejando de lado la memorización de tablas de multiplicar. En cuanto a la potenciación hemos querido relacionarla con la utilización de bases por ser un proceso más fácil y rápido.

Operaciones con la Yupana

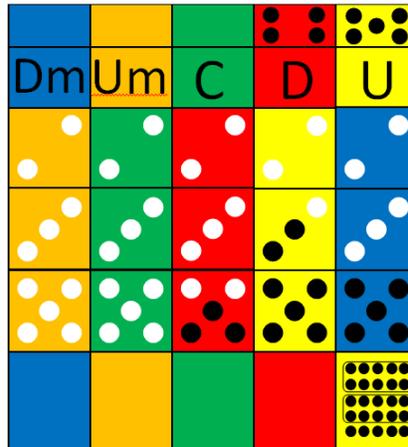
Multiplicación

Multiplicar 375 por 45

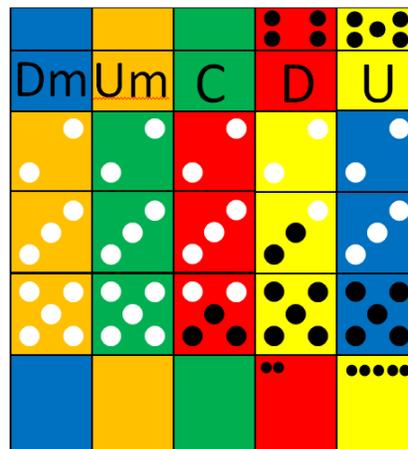
- Se escribe en la yupana el multiplicador en la parte superior, en este caso 45.

			4	5
Dm	Um	C	D	U
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
		3	7	5

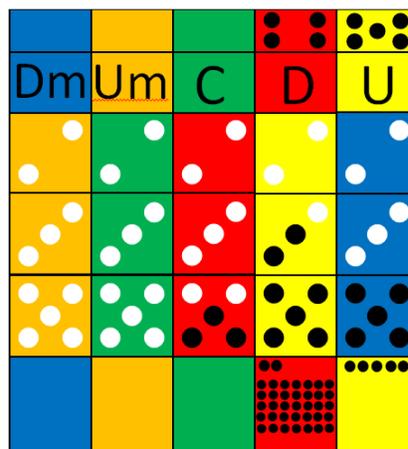
- Como en la parte superior podemos ver el 5 se repite cinco veces el número de las unidades y se hacen grupos de diez fichas.



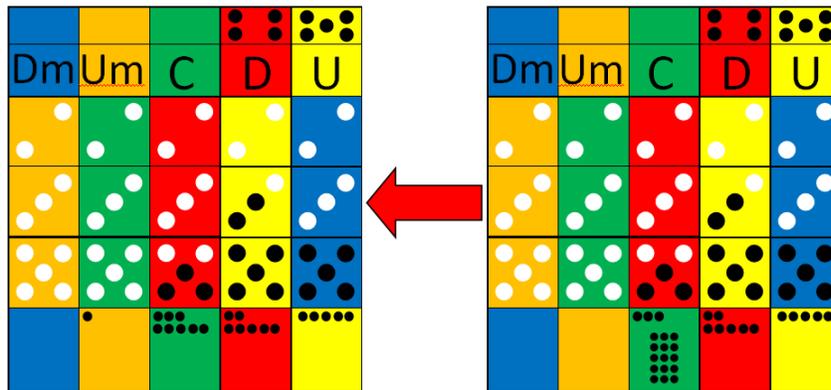
- Cada 10 unidades equivale a una decena.



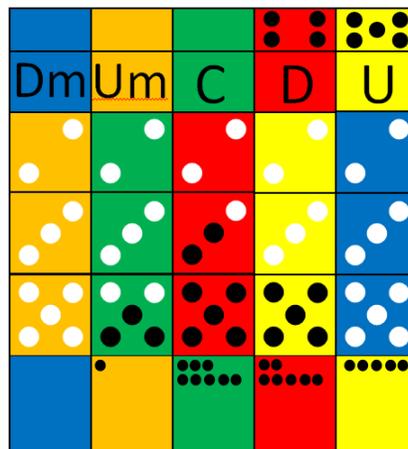
- Se repite 5 veces el 7.



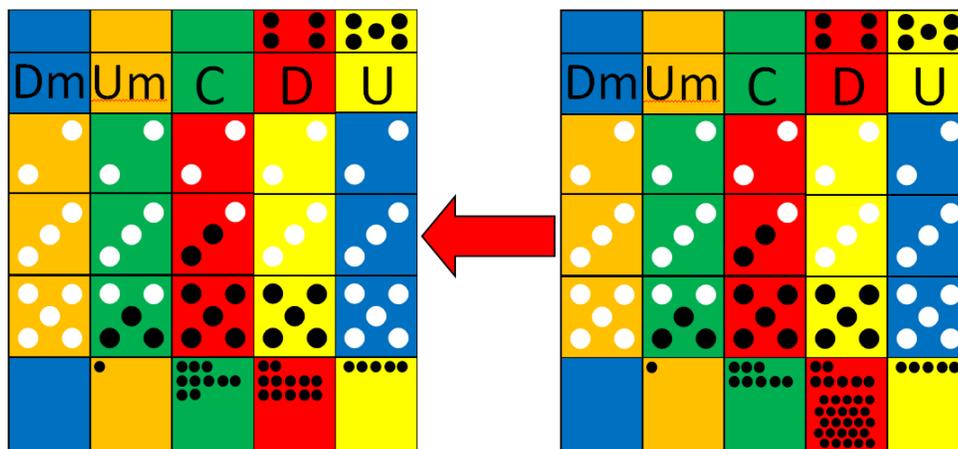
- Cada 10 decenas equivale una centena y por cada 10 centenas equivale a una unidad de mil.

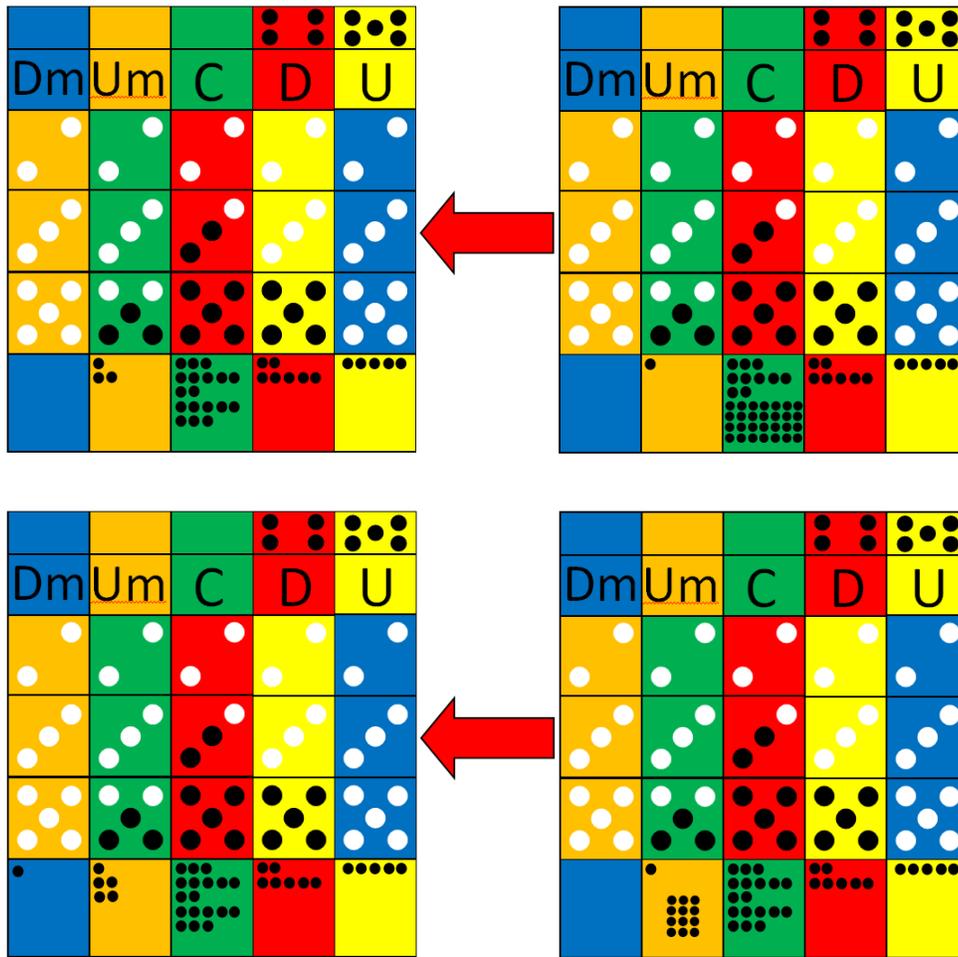


- Corremos las fichas de las centenas a las unidades de mil, las decenas a las centenas y las unidades a las decenas.

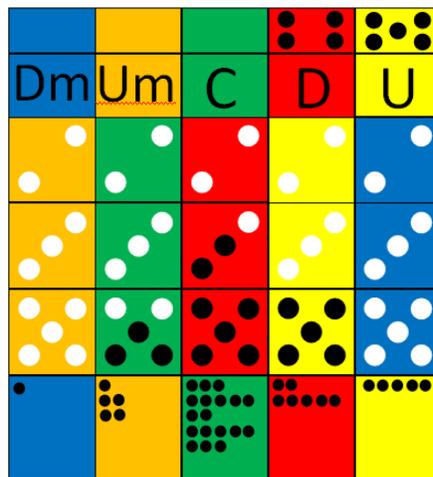


- Seguimos los mismos pasos anteriores pero esta vez repitiendo 4 veces los grupos.





- Por último, contamos las fichas de la parte inferior de la Yupana.



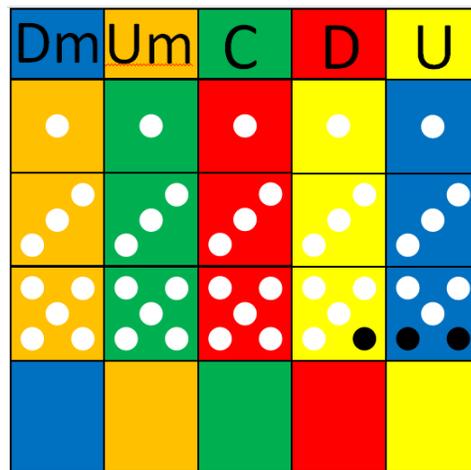
1 5 18 7 5


 $1\ 5\ (18)\ 7\ 5 = 1\ 6\ 8\ 7\ 5$

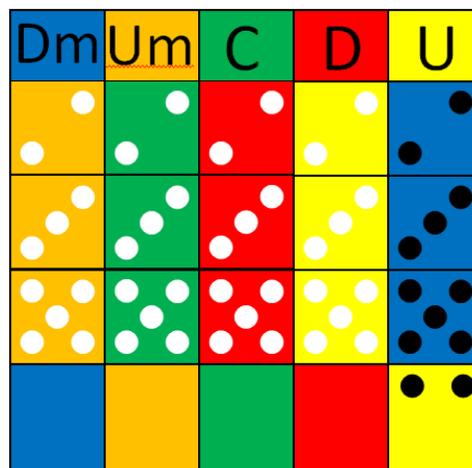
División

Dividir 12 entre 4

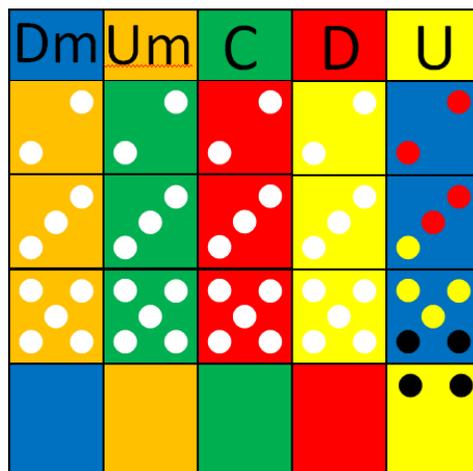
- Se escribe en la yupana el dividendo 12.



- se cambia la ficha de las decenas por diez de la unidades sabiendo que llevábamos dos fichas



- Se hacen grupos de cuatro fichas que es la cantidad que se está dividiendo.



- Por último se cuenta la cantidad de grupos que se formaron. Se formaron 3 grupos y ese es el resultado de la división.

1.3.3. La Regletas de Cuisenaire

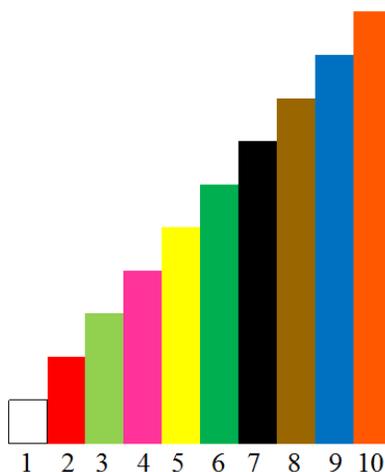
¿Qué son las regletas de Cuisenaire?

Las regletas de Cuisenaire son un material matemático destinado básicamente a que los niños y niñas aprendan la descomposición de los números e iniciarlos en las actividades de cálculo, todo ello sobre una base manipulativa acorde a las características psicológicas del periodo evolutivo de los alumnos y alumnas.

Las regletas, llamadas también “números de color” fueron inventadas por un maestro belga llamado George Cuisenaire, aunque fue el profesor Caleb Gattegno quién divulgó este material.

Consta de un conjunto de regletas de madera de diez tamaños y colores diferentes. La longitud de cada una va de 1 a 10 cm y la base es de 1 cm^2 .

Cada regleta equivale a un número determinado:



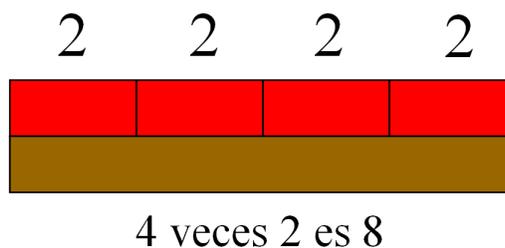
Así:

- La regleta de color madera o blanca, que es un cubo de 1 cm^2 representa al 1 y mide 1 cm.
- La regleta roja tiene 2 cm y representa al número 2.
- La regleta verde claro tiene 3 cm y representa al número 3.
- La regleta rosa tiene 4 cm y representa al número 4.
- La regleta amarilla tiene 5 cm y representa al número 5.
- La regleta verde oscuro tiene 6 cm y representa al número 6.
- La regleta negra tiene 7 cm y representa al número 7.
- La regleta marrón tiene 8 cm y representa al número 8.
- La regleta azul tiene 9 cm y representa al número 9.
- La regleta naranja tiene 10 cm y representa al número 10.

La Multiplicación

Se trata de iniciar el concepto de multiplicación mediante la suma de sumandos iguales. Para ello es necesario que la suma esté lo suficientemente practicada.

- Se eligen varias regletas del mismo color.
- Se juntan dos, tres, cuatro regletas iguales.



- Si el resultado excede de 10, se pondrá una regleta naranja y la que corresponda a las unidades restantes.

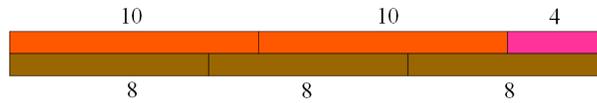
División

Dividir 24 entre 8

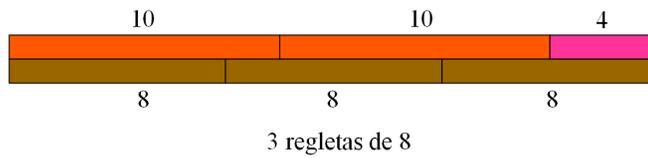
- Se toman las regletas que sumadas den 24



- Se mira cuantas regletas de 8 caben entre 24



- Se cuentan cuantas regletas de 8 son y ese sera el cociente de la división.



1.3.4. Método de la Celosía, o de Fibonacci

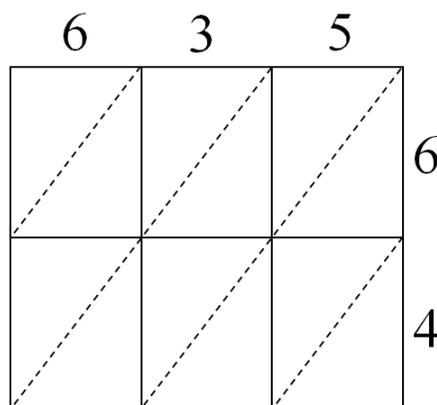
Reglas

Para ilustrar el algoritmo de la multiplicación desarrollaremos el siguiente ejemplo:

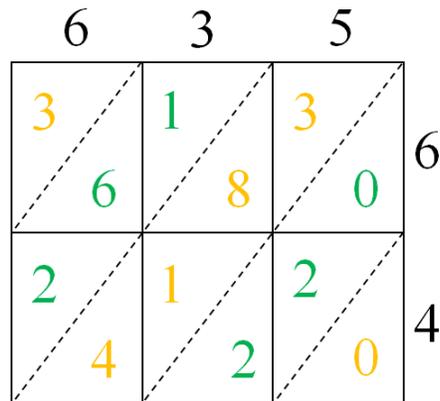
multiplicar 635×64

Solución

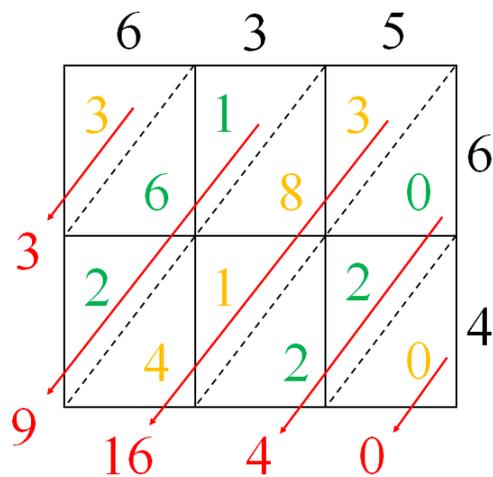
- Se construye una rejilla como lo indica la figura y se ubica en la parte superior el multiplicando, y en el lado derecho el multiplicador. Cada celda se divide en dos por la diagonal.



- Se multiplican los números de las coordenadas de cada celdilla y se colocan las decenas arriba y las unidades abajo.



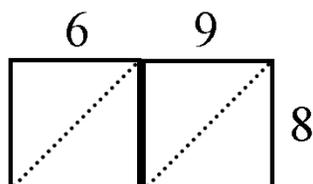
- Por último, se suman las diagonales. Si alguna de las sumas diagonales tiene más de un dígito (como ocurre con el 16) las decenas se suman la siguiente (si empezamos por abajo a la derecha).



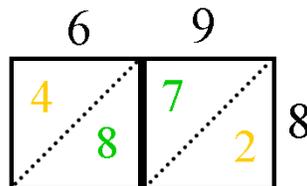
$$\begin{array}{c}
 \text{↩} \quad \text{↩} \\
 3 \ 9 \ (16) \ 4 \ 0 = 3 \ (10) \ 6 \ 4 \ 0 = 4 \ 0 \ 6 \ 4 \ 0
 \end{array}$$

Ejemplo 2: multiplicar 69 por 8:

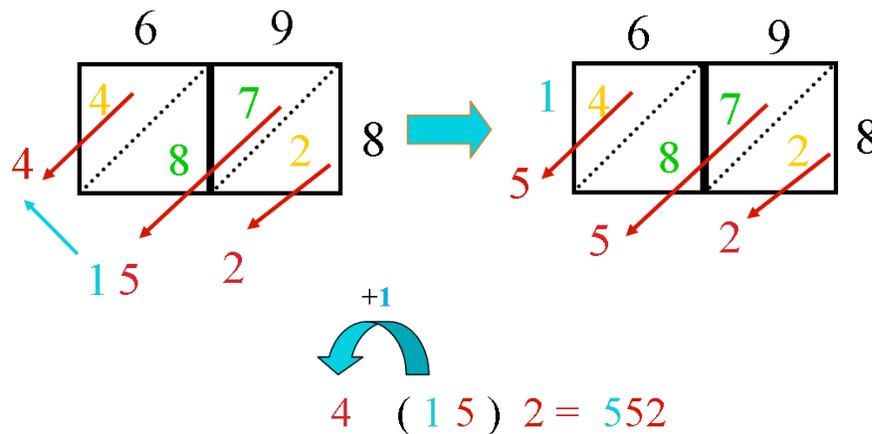
- Como en el ejercicio anterior se inicia con una rejilla de forma rectangular, como lo muestra la siguiente figura y se ubica en la parte superior el multiplicando, y en el lado derecho el multiplicador. Cada casilla se divide en dos partes por la diagonal trazada.



- Se multiplican cada uno de los números y se coloca el resultado en la casilla que se encuentra dividida por una diagonal, el resultado del de cada número se coloca en cada una de las casillas.



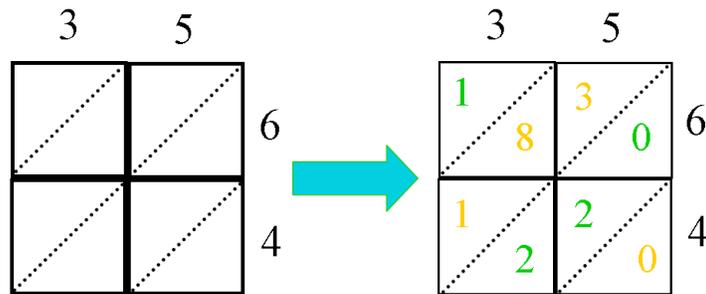
- En la primera casilla se coloca el resultado de multiplicar $9 \times 8 = 72$ y en la segunda el resultado de multiplicar $6 \times 8 = 48$, Luego se suman cada una de las diagonales. Si alguna de las sumas diagonales tiene mas de un dígito (como ocurre con el 15).



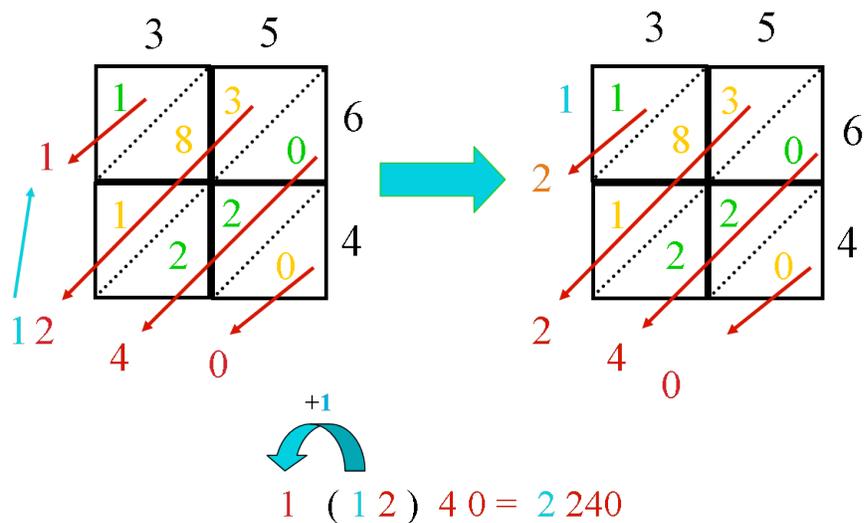
- Cuando alguna de las sumas diagonales sea mayor que 9 es decir que formen más de un dígito (como ocurre con el 15), esta cifra que son las decenas se le suman en la casilla siguiente (como ocurre al número 4 se le suma 1, $4 + 1 = 5$).

Ejemplo 3: multiplicar 35 por 64:

- Se multiplican cada uno de los números y se coloca el resultado en la casilla que se encuentra dividida por una diagonal, el resultado del de cada número se coloca en cada una de las casillas. En la casilla de abajo que se encuentra al lado derecho se coloca el resultado de multiplicar $5 \times 4 = 20$ y en la casilla de la parte de arriba que esta al lado derecho se coloca el resultado de multiplicar $5 \times 6 = 30$, después en las casillas del lado izquierdo en la que esta abajo se coloca el resultado de multiplicar $3 \times 4 = 12$ y en la ultima se coloca el resultado de multiplicar $3 \times 6 = 18$.



- Se suman cada una de las diagonales.



- Si alguna de las sumas diagonales tiene mas de un dígito (como ocurre con el 12), se le agrega esta cifra a la siguiente casilla.

1.3.5. La Multiplicación Egipcia del Año 2,500 a.C.

El método utilizado se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación y convierte la multiplicación en sumas. Ilustraremos el algoritmo a través del siguiente ejemplo:

Para multiplicar $A \times B = 34 \times 49$

Solución

Se elabora la siguiente tabla en la cual:

- Se forman dos columnas que representan las cantidades a multiplicar y estas se irán duplicando.

A	1	B	49

- En la primera columna se escribe la serie: 1, 2, 4, 8... hasta la potencia de 2 menor que en el multiplicando, es este caso 34.

A	1	B	49
	1		
	2		
	4		
	8		
	16		
	32		

- En la segunda columna se escribe la serie: 49, 2(49), 4(49)... (obteniendo cada cifra sumando dos veces la precedente).

A	1	B	49
	1		49
	2		98
	4		196
	8		392
	16		784
	32		1.568

- En la primera columna se busca que números suman 34, y se suman los respectivos números de la segunda columna. Ese será el resultado buscado.

A	1	B	49
	1		49
	2	→	98
	4		196
	8		392
	16		784
	32	→	1.568

$2 + 32 = 34$, entonces $1568 + 98 = 1666$

Ejemplo 2: Multiplicar 34×8

- Se elabora una tabla en la cual se forman dos columnas que representan las cantidades a multiplicar y estas se irán duplicando

A	1	B	8



A	1	B	8
	1		
	2		
	4		
	8		
	16		
	32		

- En la primera columna se escribe cada número duplicándolo hasta que este sea menor que 34 y en la segunda columna se sigue el mismo procedimiento hasta que se completa a la par donde termina la serie anterior de la primera columna.

A	1	B	8
	1		8
	2		16
	4		32
	8		64
	16		128
	32		256

- Luego se busca en la primera columna los números que suman 34 y se suman los cantidades que se encuentran al frente de cada uno de ellos.

A	1	B	8
	1		8
	2	→	16
	4		32
	8		64
	16		128
	32	→	256

$2 + 32 = 34$, entonces $16 + 256 = 272$

$$\begin{array}{r}
 2 + 32 = 34 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 16 + 256 = 272
 \end{array}$$

1.3.6. La Multiplicación Maya

Todo el mundo sabe que el pueblo Maya tenía una cultura avanzada para la época. Además, parece ser que eran muy buenos matemáticos teniendo en cuenta los pocos recursos con que contaban. La civilización Maya. Es una civilización misteriosa y fascinante, como demuestran todos los monumentos antiguos que se pueden ver en varios países de Centroamérica.

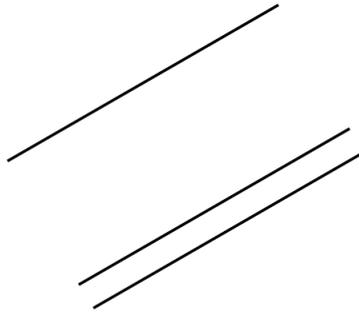


La manera que tenían de multiplicar los mayas era bastante útil y rápida, y servía para prácticamente cualquier par de número.

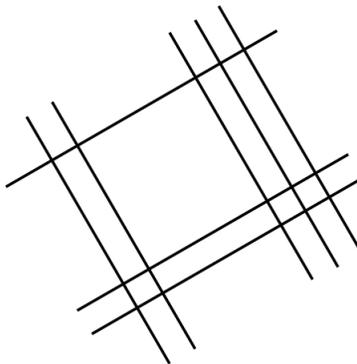
Ejemplo: Multiplicar 12×23

Reglas

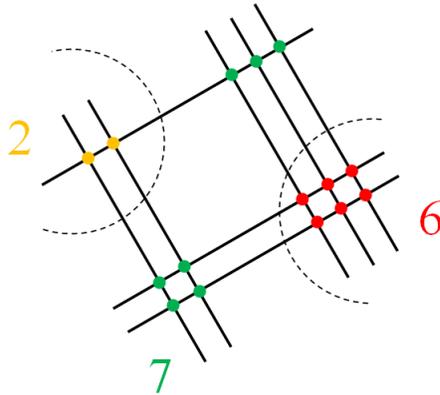
- Se mira el primer número del primer factor y debajo se hacen tantas rayas, en horizontal como el valor que tenga el primer número; se mira el segundo número y se hacen también en horizontal tantas rayas, más abajo, como el valor que tenga el número; así sucesivamente tantas veces como números haya en primer factor.



- Se mira el primer número del segundo factor y debajo se hacen tantas rayas, en vertical, como el valor de ese número; se mira el segundo número y se hacen tantas rayas, también en vertical, como el valor que tenga el número, así tantas veces como números haya en el segundo factor.



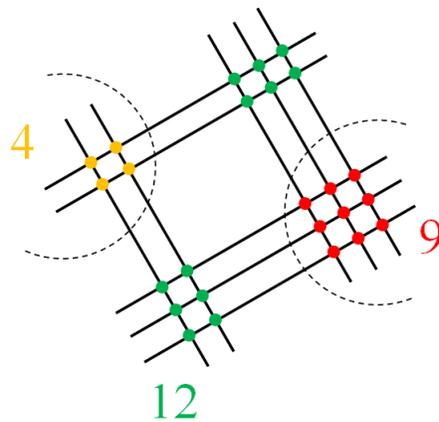
- Se suman los puntos que haya cruzados en la esquina superior izquierda y se pone a su lado la suma, eso mismo se hace en la esquina inferior derecha, y en las otras esquinas (la superior derecha y la inferior izquierda) también se suman los puntos que haya cruzados pero entre las dos esquinas y se pone al lado la esquina inferior izquierda.



- Se colocan los números de las sumas en el orden de arriba a la derecha a abajo a la derecha, luego de abajo a la derecha a arriba a la derecha, y ese es el resultado de la multiplicación, en este caso 276.
- Si hay alguna suma, que no sea la primera, que tenga dos números el de la decena se suma al número anterior.

Ejemplo: Multiplicar 23 x 23

Solución



$$4 \overset{\curvearrowright}{(12)} 9 = 529$$

1.4. Evidencia Fotográfica







