Neiva, 14 de abril de 2015.

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los) suscritos:

Álvaro Cárdenas Gasca, con C.C. No 1.075.228.786, Jhon Jaider Vanegas Cutiva, con C.C. No. 1082804157, autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado Titulado Resolución de Problemas Algebraicos presentado y aprobado en el año 2015 como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas ; autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Alvaro Cardenas Gasca.

Firma:

Jhon Jaider Vanegas Cutiva.

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Resolución de problemas algebraicos.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cárdenas Gasca Jhon Jaider	Álvaro Vanegas Cutiva

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Urrutia	Martha Cecilia

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en matemáticas

FACULTAD: Educación.

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas.

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2015 **NÚMERO DE PÁGINAS: 83**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_ X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa__ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones__ Tablas o Cuadros _X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Látex: Editor de textos científicos

MATERIAL ANEXO: Ninguno

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Problema	problem	6.	___________	___________
2.	Metodología	Methodology	7.	___________	___________
3.	Resolución	Resolution	8.	___________	___________
4.	Ecuación	Equation	9.	___________	___________
5.	Estrategia	Strategy	10.	___________	___________

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El presente trabajo de grado da a conocer diferentes estrategias para la solución de problemas algebraicos para los grados 8 y 9, con el fin de brindarle al maestro distintos métodos los cuales sean aplicados en clase como formas alternas de solución. Mediante consultas e investigación se seleccionaron algunas metodologías sobre la solución de problemas de tipo algebraico tomando como referencia distintos autores que han trabajado temáticas referentes como son Marco Aurel, Juan Perés de Moya, Alexis Claude Clairaut, Sylvestre Francois Lacroix, José Mariano Vallejo y Ortega, Colin MacLaurin, Geoger Polya y Miguel de Guz-mán. En el cual se evidencia el progreso de las metodologías utilizadas para solucionar problemas.

Se muestran algunos métodos que son adaptados al lenguaje actual y se brinda una explicación de cada uno, esto permite al lector seguir paso a paso su estructura: el Tablero de Ecuaciones, la Balanza de Orlov y las Tablas de Análisis de Luis Puig y además algunos problemas de aplicación a través de los cuales se puedan poner en práctica estos métodos.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This grade work discloses different strategies for solving algebraic problems for eight and ninth grade, in order to give the teacher different methods which are applied in class as alternative forms of solution. Through consultation and research some methodologies were selected about algebraic problem solving types taking as reference other authors who have worked similar thematics such as Marco Aurel, Juan Peres de Moya, Alexis Clairaut, Sylvestre Francois Lacroix, José Mariano Vallejo and Ortega, Colin MacLaurin, Geoger Polya and Miguel de Guz-bad. In which the progress of the methodologies used for problem solving is evidenced.

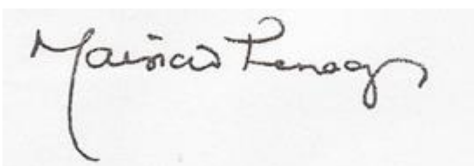
Some methods are displayed which are adapted to the current language and an explanation is offered to each one, this allows the reader to follow step by step its structure: the Board of equations, the balance of Orlov and Luis Puig's analysis tables and also some application problems through which these methods can be implemented.

APROBACION DE LA TESIS

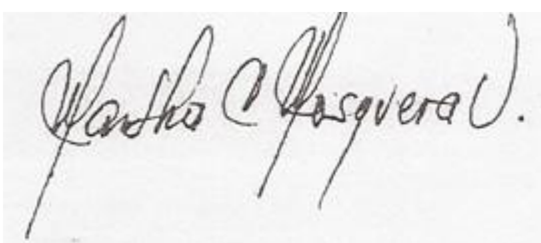
Nombre Presidente Jurado: Osmin Ferrer Valler

Firma: 

Nombre Jurado: Mauricio Penagos.

Firma: 

Nombre Jurado: Martha Cecilia Mosquera Urrutia.

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Resolución de problemas algebraicos

Jhon Jaider Vanegas Cutiva
Alvaro Cárdenas Gasca

Neiva, Huila
2015

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Resolución de problemas algebraicos

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar el título de licenciados en matemáticas

Jhon Jaider Vanegas Cutiva
2009180167
Alvaro Cárdenas Gasca
2008276902

Asesor:
MSc.Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2015

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Noviembre de 2014

RAE

Resumen Analítico de Estudio (RAE)

Titulo: Resolución de problemas algebraicos.

Universidad: Surcolombiana.

Autores: Jhon Jaider Vanegas Cutiva y Alvaro Cárdenas Gasca. (Vanegas. J. y Cardenas. A)

Director: Msc. Mauricio Penagos.(Penagos. M.)

Fecha: .

Tipo de imprenta: LATEX (escrito LaTeX en texto plano).

Nivel de circulación: Restringida.

Acceso al documento: Biblioteca USCO. Jefatura Programa Licenciatura en Matemáticas.

Keywords: Problem , Methodology , Resolution, Equation , Strategy .

Descripción del estudio: Se realizó una investigación de contenidos referentes a el planteamiento, comprensión y resolución de problemas de tipo algebraico con el fin de proponer estrategias faciliten la enseñanza de estas tematicas en los estudiantes de los grados 8° y 9°.

Contenido: El presente trabajo de grado da a conocer diferentes estrategias para la solución de problemas algebraicos para los grados 8 y 9, con el fin de brindarle al maestro distintos métodos los cuales sean aplicados en clase como formas alternas de solución.

Mediante consultas e investigación se seleccionaron algunas metodologías sobre la solución de problemas de tipo algebraico tomando como referencia distintos autores que han trabajado temáticas referentes como son Marco Aurel, Juan Perés de Moya, Alexis Claude Clairaut, Sylvestre Francois Lacroix, José Mariano Vallejo y Ortega, Colin MacLaurin, Geoger Polya y Miguel de Guzmán. En el cual se evidencia el progreso de las metodologías utilizadas para solucionar problemas.

Se muestran algunos métodos que son adaptados al lenguaje actual y se brinda una explicación de cada uno, esto permite al lector seguir paso a paso su estructura: el Tablero de Ecuaciones, la Balanza de Orlov y las Tablas de Análisis de Luis Puig y además algunos problemas de aplicación a través de los cuales se puedan poner en práctica estos métodos.

Metodología: Investigación Descriptiva, Estudio sobre resolución de problemas, realizado mediante la consulta de material bibliográfico y hemerográfico.

Conclusiones: Se realiza una recopilación de contenidos donde resaltan los distintos autores que trabajaron la resolución de problemas algebraicos, con el fin de tener una concepción clara acerca del lenguaje y como procedían a solucionar este tipo de problemas, seguido de un recorrido histórico con el fin de entender los procesos algebraicos utilizados en algunas culturas como como lo son la Egipcia, la Griega, China, Mesopotamica y la Árabe. Posteriormente se definen algunas estrategias y metodologías con el fin de contribuir en el planteamiento, comprensión y solución de problemas de tipo algebraico en los estudiantes de grado 8°y 9°.

AGRADECIMIENTOS

Con el presente trabajo de grado primeramente agradecemos a Dios por bendecirnos para llegar hasta donde hemos llegado, porque hizo realidad este sueño anhelado. A nuestros amigos, compañeros y familiares que nos acompañan gracias por el animo brindado que ha sido muy importante en nuestras vidas, a ellos muchas gracias por brindarnos fortaleza, la sabiduría y el apoyo durante este proceso en el cual culmina uno de nuestros más grandes sueños. también queremos expresar nuestros más profundos agradecimientos a nuestro primer asesor el Maestro *MSc. Mauricio Penagos* quien fue esencial en el desarrollo de este trabajo y a los docentes que nos brindaron sus conocimientos y apoyo durante nuestra carrera.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

"*Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, es encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, de conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados."* -George Polya-

En la actualidad en algunos planteles educativos de Colombia es necesario que los Proyectos Institucionales educativos (PEI) y las prácticas educativas sean redireccionadas a fin de procurar una actividad matemática en el estudiante que le permita desarrollar autonomía intelectual frente a sus procesos de aprendizaje. Esta necesidad es consecuente con los cambios que se han dado en los últimos años en la concepción sobre las matemáticas. Lograr este fin es algo que trasciende ampliamente la mera selección de los contenidos apropiados que el docente debe enseñar, o el diseño de nuevas metodologías a través de las cuales se pueda hacer más eficiente la enseñanza.

En atención a lo anterior se piensa en desarrollar el presente trabajo de grado, titulado *"Resolución de problemas Algebraicos"* , bajo la asesoría del profesor Mauricio Penagos. El problema central de investigación gira alrededor de los procesos de enseñanza y de aprendizaje relativos a la solución de problemas algebraicos para grados 8º y 9º de Educación Básica Secundaria. Para esto se presentan varias estrategias que a través de la historia diferentes civilizaciones y notables matemáticos han utilizado para este fin.

La elección de esta temática se debe a que los problemas constituyen un campo de las matemáticas que tiene gran importancia, tanto desde el punto de vista docente, como por su uso en el proceso e interpretación de situaciones de la vida cotidiana. Este sigue siendo un tema de alta complejidad y, por supuesto, apenas sus logros llegan a la comprensión de los conceptos básicos y elementales en los estudiantes de la básica secundaria según el MEN.

En este trabajo se presentan cuatro secciones, con la que se espera contribuir en el ámbito escolar como un paso necesario para realizar propuestas que mejoren el aprendizaje de los estudiantes. Se busca también que el lector tenga una visión global de la evolución histórica de la solución de problemas algebraicos y como ha trascendido esta problemática a través de diferentes civilizaciones y épocas.

En la primera parte se hace una introducción a la solución de problemas algebraicos, comenzando con una breve recorrido por la historia retomando problemas referentes a la solución de ecuaciones básicas, ecuaciones algebraicas, problemas en palabras, problemas gráficos y problemas en formas y figuras, hasta cómo plantear un problema con ecuaciones. Con base en diferentes metodologías que algunos matemáticos destacados proponen como lo son; Marco Aurel, Juan Perés de Moya, Alexis Claude Clairaut, Sylvestre Francois Lacroix, José Mariano Vallejo y Ortega, Colin MacLaurin, Geoger Polya y Miguel de Guzmán.

La segunda parte del trabajo se relaciona con planteamiento y resolución de problemas algebraicos con estrategias didácticas para solucionarlos, permitiendo así comprender mejor un problema y diseñar una solución eficiente. Además se cita los diferentes métodos de solución de problemas con ecuaciones que han utilizado civilizaciones antiguas como la Egipcia, la China, Mesopotámica, Griega y Árabe.

En la tercera parte se retoma unas propuestas referentes a estrategas que faciliten la comprensión, el planteamiento y la solución de problemas de tipo algebraico como los son el tablero de ecuaciones, la balanza de Orlov y las tablas de análisis de Luis Puig.

En la cuarta y última parte de este trabajo se propone y resuelve algunos problemas de aplicación referente al tema escogido.

Este trabajo de grado da a conocer estrategias metodológicas que contribuyen a la comprensión de como plantear y resolver problemas algebraicos que sirven de guía a los estudiantes y docentes, con ello genere una representación abstracta de la situación descrita por el problema. Se espera que lo realizado en el presente trabajo sea de mucha ayuda para los docentes, que sea aplicado en clase y profundizado por estudios posteriores.

JUSTIFICACIÓN

La razón fundamental para desarrollar el presente trabajo de grado es la de proponer diferentes metodologías que faciliten el desarrollo de competencias en pensamiento algebraico para estudiantes de grado 8° y 9°; Se busca estimular la adquisición y el desarrollo del pensamiento algebraico y de forma metodológica implementar pautas para el planteamiento y solución de problemas algebraicos.

Las matemáticas es consideradas una de las áreas del conocimiento que a nivel de la educación secundaria presenta mayor dificultad para el estudiante [1]. Se exponen múltiples razones: falta de interés del estudiante, falta de atención, deficientes preparaciones en cursos anteriores, textos inadecuados, poco tiempo para sus estudios, la metodología utilizada por algunos profesores no es la más efectiva, incluso en términos extremos se cree equivocadamente que "*las matemáticas son ciencia abstracta que está solo al alcance de ciertas mentes*". En el sentido de considerar el estudio de las matemáticas como el más importante y de mayor complejidad, atribuyéndose poderes de superioridad mental a las personas, para poder enfrentar su estudio.

De estas razones si bien algunas parecen tener algo de cierto, se considera que la mayoría se centra en la metodología. Los problemas que se presentan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, exigen una reconstrucción a nivel metodológico. La resolución de problemas plantean una serie de principios que deben inquietar al profesor de matemáticas, por eso este método constituye una base sólida para la formulación de una propuesta metodológica que permita al docente conocer más al estudiante en profundidad y que a la vez le facilite su labor de orientador y guía.

La importancia del álgebra en nuestra cultura es indudable: cada día los medios de comunicación nos entregan grandes volúmenes de información, que es cuantificada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc., y una buena comprensión del álgebra es una herramienta importante para analizarla e interpretarla. Por ejemplo, son necesarias para entender: los resultados de las encuestas y poder juzgar su credibilidad, los indicadores económicos y sociales del país, las tasas de interés que ofrece una cuenta de ahorro o que afectan a un crédito hipotecario, los descuentos de los supermercados, la probabilidad de ganar una lotería, la predicción del clima, relacionados con los hábitos de consumo y de compra etc. También son importantes en

[1] JEREMY KILPATRICK. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia. Umiversidad de los Andes. Bogotá, 1998

los procesos escolares, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación en otras disciplinas como la física, la química, la biología, geografía e historia, atletismo, también ingeniería, arquitectura, economía porque se simboliza en variables y hasta en el arte y la música; La música y el álgebra no parecen tener mucho en común, pero la realidad es que están estrechamente ligadas. Una canción es una secuencia de notas, arregladas de manera que producen patrones agradables; y el álgebra es el estudio de patrones, como los de la música.

En el álgebra se ha catalogado su aplicación de forma mecánica y poco analítica por estudiantes y algunos docentes, por el contrario, permite desarrollar en los estudiantes habilidades de pensamiento espacial y numérico, promueve características como la claridad a la hora de pensar, el orden, la secuencia, la relación, la lógica y la coherencia; además se aplica en solución de problemas de la vida cotidiana y de las matemáticas avanzadas mismas como trigonométrica y cálculo.

OBJETIVO

Objetivos generales

Ilustrar algunos métodos que facilita el planteamiento y la resolución de ecuaciones algebraicas para fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas del pensamiento algebraico en los estudiantes de grado 8° y 9°.

Objetivos específicos

Consultar diferentes Métodos de resolución de problemas utilizandos por autores reconocidos a través de la historia.

Presentar algunos elementos metodológicos para el planteamiento y solución de problemas algebraicos que puedan ser adaptados a los grados 8° y 9°.

A partir de elementos didácticos sugerir algunas estrategias para modelar y enmarcar situaciones reales que pueden traducirse en problemas de tipo algebraico.

CAPÍTULO 1

FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Estrategias metodológicas pueden utilizarse en la clase de álgebra para resolver problemas de tipo algebraico en los grados 8° y 9°

El Proceso enseñanza - aprendizaje entorno a los problemas de tipo algebraico en grado octavo y noveno en algunos planteles educativos en Colombia, se ha convertido en un problema doble. Por una parte, la mayoría de los estudiantes comprenden muy poco y se enfocan en manejar algoritmos de forma mecánica. Por otra parte, se observa el manejo de temas matemáticos de forma aislada y sin conexión con otros conceptos o aplicaciones dentro del plan de estudio [1]. Este trabajo propone una una serie de estrategias metodológicas con las cuales se pretende dar solución al problema planteado, al integrar temas de la matemática escolar a través de métodos de solución problemas de tipo algebraico, tomados del desarrollo histórico de las matemáticas, que ayuden a su compresión por parte de los estudiantes. Para ello se hace un recorrido histórico por diferentes culturas que realizaron aportes sobre el tema, y de conceptos básicos de la solución de ecuaciones algebraicas.

Un aspecto importante del presente trabajo de grado se pretende despertar en los estudiantes y docentes el gusto por el álgebra y de esta manera aproximarlos al mundo de las matemáticas desde perspectivas más reales y flexibles dando a conocer estrategias metodológicas, motivados en principio por una presentación histórica del álgebra y posteriormente por diferentes maneras de resolver ecuaciones algebraicas lineales.

La temática expuesta se enfoca a nivel de la educación secundaria, específicamente en los grados 8º y 9º, esta encaminada principalmente en la resolución de problemas y nos ofrece la posibilidad de presentar problemas de aplicación en un contexto real a los estudiantes que despierte su atención. Presentamos diferentes métodos para resolver tales ecuaciones, entre ellos la tabla de análisis de Luis Puig la cual muestra una manera práctica cómo podemos transformar el enunciado de un problema a una ecuación algebraica, apoyados de pautas para la compresión y solución de dichos problemas.

[1] Zambrano García, Luis Enrique (2011) Planteamiento y Solución de Problemas de Ecuaciones, Usando Estrategias y Métodos Propuestos en el Desarrollo Histórico de la Teoría de Ecuaciones. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia.

1.1. Antecedentes

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) son varias dificultades que presentan los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra en los grados 8° y 9° de educación secundaria, esta situación requiere el empleo de diversas experiencias de aprendizaje de parte del profesorado que satisfagan tanto las necesidades educativas, así como los intereses de los estudiantes. La temática que ocupa el presente trabajo de grado ha sido objeto de estudio en publicaciones anteriores, pues es conocido que muchos estudiantes tienen una precaria apropiación del conocimiento algebraico. Los estudiantes tienen problemas relativos a la naturaleza y significado de los símbolos y las letras, el uso inapropiado de fórmulas o procedimientos, la traducción entre diferentes lenguajes, y se les dificulta resolver problemas verbales.

En tal sentido, se hace referencia a algunas investigaciones, de las cuales se destacan sus aspectos más relevantes:

⧫ *Planteamiento y Solución de Problemas de Ecuaciones, Usando Estrategias y Métodos Propuestos en el Desarrollo Histórico de la Teoría de Ecuaciones"* (Luis Enrique Zambrano García. Universidad Nacional de Colombia. 2011)

"*El proceso enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones lineales y cuadráticas en grado octavo y noveno, se ha convertido en un problema doble. Por una parte, la mayoría de los estudiantes comprenden muy poco y se enfocan en manejar algoritmos de forma mecánica. Por otra parte, se observa el manejo de temas matemáticos de forma aislada y sin conexión con otros conceptos o aplicaciones dentro del plan de estudio. Este trabajo propone una unidad didáctica que pretende ser una solución al problema planteado, al integrar temas de la matemática escolar a través de métodos de solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, tomados del desarrollo histórico de las matemáticas, que ayuden a su compresión por parte de los estudiantes. Para ello se realiza una revisión histórica del tema y de conceptos básicos de la teoría de ecuaciones polinómicas."*

⧫ "*Cambios en el aula con el uso de tecnologías y resolución de problemas algebraicos"* (Miguél Herrera de Salgado. Politécnico Nacional. México 2010).

"*En este documento se reportan los resultados derivados de mi participación en el proyecto de desarrollo "Patrones de cambio en la cultura escolar a través de la incorporación de herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas" dentro del programa de Maestría en Educación en Matemáticas del Cinvestav. Mis objetivos en este proyecto de desarrollo fueron investigar i) los posibles cambios que se dan en la cultura escolar cuando se utilizan herramientas computacionales; y ii) analizar los posibles beneficios al usarlas en la resolución de problemas algebraicos, pues dichas herramientas pueden facilitar la exploración, modelación y resolución de un problema. Para el primer objetivo se observaron los cambios desde cinco perspectivas: 1) Del profesor y del uso didáctico de la tecnología, 2) de las interacciones en el salón de clases, 3) del impacto posible en estudiantes, 4) la perspectiva técnica, y 5) el contexto social."*

⧫ "*Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta"*(Maryam Acevedo de Manrique. Universidad Nacional de Colombia, 1997)

"*En este documento plantea desde sus más remotos orígenes, un problema central tratado en el álgebra es el de la solución de ecuaciones polinómicas. Inicialmente se obtuvo la solución de las* *ecuaciones lineales y de la ecuación general de segundo grado, pero pasó mucho tiempo antes de obtenerse un algoritmo para solucionar ecuaciones de tercer y cuarto grado. Sin embargo, este logro motivó la búsqueda de un algoritmo para solucionar ecuaciones de quinto grado, lo cual no es posible para todas las ecuaciones de este tipo, según demostraron posteriormente Abel y Galois. Este último desarrolló tópicos importantes de la teoría de grupos para conseguir su objetivo. En este curso se hace un estudio sistemático de los cuerpos (también llamados campos), sus extensiones e isomorfismos, para comprender, con ayuda de la teoría de Galois, por qué ocurre la insolubilidad de la quíntica y ecuaciones de grado mayor. Se verá como se integran tópicos de la teoría de grupos, la teoría de anillos y el álgebra lineal para conseguir este objetivo."*

1.2. Alcances y limitaciones

Los trabajos de grado mencionados anteriormente tienen como objetivo llegar de una forma metodológica y practica a los estudiantes de la básica secundaria en los grados 8° y 9°, para que puedan comprender, plantear y solucionar problemas matemáticos de tipo algebraico implementando métodos que faciliten la comprensión de las matemáticas para ellos. También se puede observar que los estudiantes aprenden a solucionar ecuaciones, pero no tienen claro como plantear un problema, es por eso que la propuesta de este trabajo de grado proporciona a los profesores de básica secundaria elementos para facilitar la comprensión de estos problemas por medio de métodos como lo son "*El tablero de ecuaciones*", "*La balanza de Orlov*" y *"Tablas de análisis de Luis Puig"* las cuales buscan proporcionar al los estudiantes herramientas a la hora de plantear y resolver problemas.

Cabe resaltar algunas limitaciones que se consideran relevantes en el presente trabajo como: La falta aplicación del contenido con los estudiantes de los grados 8° y 9° en el aula de clases, el no tener acceso a fuentes de información las cuales son fundamentales para tener una visión clara y concisa de las falencias, fortalezas y aspectos a mejorar del material recopilado y estudiado en el presente trabajo. Se espera que esta temática sea abordada pos otros grupos para realizar las faces de implementación y evaluación, e incorporar más el uso de las herramientas tecnológicas, no sólo para la resolución de problemas algebraicos, sino para otros temas, adquiriendo más experiencia en ello.

1.3. La resolución de problemas en Colombia

En las últimas décadas, la preocupación porque la resolución de problemas fuese una actividad del pensamiento, ha generado una inquietud de búsqueda de solución a un problema que, cada vez más, se presenta como "fracaso escolar". Siguen siendo actuales las indicaciones del informe*Cockcroft* (Las matemáticas sí cuentan, 1985: 90−91) donde se acentúa la utilidad de las matemáticas en la medida en que pueden ser aplicadas a la resolución de problemas. Añade lo importante que es ayudar a los niños a comprender las nociones matemáticas y a reconocer el tipo de cálculo o de procesos mentales que requiere una situación problemática. Sin embargo, veinte años más tarde, los datos recogidos revelan una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más importa (*Gaulín*, 2001). La iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, son prácticamente inexistentes y están subrayadas por una reiteración de movimientos apoyados en la imitación de intenciones vacías −muchas veces no comprendida−, y, por lo tanto, desnaturalizada en los procesos y resultados. La participación, la autoestima y la seguridad del alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, intervienen habitualmente de forma negativa.

En Colombia alrededor del 70% de los individuos (Instituto Nacional de la Calidad y Evaluación (INCE)), presentan dificultades para la resolución de problemas matemáticos. Se observa en ellos la tendencia general a imitar modelos realizados anteriormente, articulando preguntas que dejan al descubierto su falta de seguridad y comprensión de conceptos básicos. Los diseños curriculares subrayan la necesidad de pensar, como principio activo en la resolución de problemas; pero, esto es tan escaso en la práctica como reconocido en la teoría.

1.4. Los lineamientos curriculares

Los lineamientos curriculares (MEN,1998), del área de Matemáticas, son una propuesta del Ministerio de Educación Nacional y un grupo de docentes del área que plantean algunos criterios para orientar el currículo y los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas en el país, con el fin de que se estudie la fundamentación pedagógica de dicha área y se intercambien experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales.

Los lineamientos organizan el currículo en tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.

Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje, es decir, el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Los conocimientos básicos se relacionan con los conceptos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con los sistemas propios de las matemáticas: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

El contexto hace alusión a los ambientes que rodean al estudiante y que contribuyen al sentido de las matemáticas que aprende, acá cobra especial importancia las situaciones problema que surgen de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

Las competencias básicas en matemáticas según el Ministerio de Educación son las siguientes:

Comunicación matemática: La adquisición y dominio de los lenguajes de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos conceptos y movilizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos, universales y valore la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

El razonamiento: El desarrollo del razonamiento lógico en los primeros grados apoyados en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes;

proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tiene sentido, son lógicas, potencias la capacidad de pensar y son divertidas.

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: Para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y compresivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos mecanismos es la alteración del momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, los cuales requieren atención, control, planeación, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

Estas competencias son importantes en el proceso cognitivo a la hora de enfrentarse a los problemas de tipo algebraico pues sirven para adaptarlos a situaciones reales donde adquiera y desarrolle los conocimientos necesarios de forma autónoma, colectiva y critica logrando que el estudiante adquiera el pensamiento matemático.

1.5. Los Estándares de matemáticas (MEN)

Estos estándares son referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que alcanzan los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar y que son el punto de referencia a lo que pueda estar en capacidad de saber y saber hacer. Teniendo en cuenta estos estándares expuestos son el punto de partida de la acción docente.

Los estándares que se describen a continuación son los que ha propuesto el Ministerio de Educación, los cuales tiene en cuenta tres aspectos que deben estar presentes en la actividad matemática.

♦ Planteamiento y resolución de problemas.

♦ Razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración)

♦ Comunicación matemática. Consolidación de la manera de pensar (coherente, clara, precisa)

Los estándares están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático de los cuales mencionaremos algunos que tratan sobre resolución de problemas [2].

Pensamiento numérico y sistemas numéricos:
Comprensión del número, su representación, las relaciones que existen entre ellos y las operaciones que con ellos se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos. Se debe aprovechar el concepto intuitivo de los números que el niño adquiere desde antes de iniciar su proceso escolar en el momento en que empieza a contar, y a partir del conteo iniciarlo en la comprensión de las operaciones matemáticas, de la proporcionalidad y de las fracciones. Mostrar diferentes estrategias y maneras de obtener un mismo resultado. Cálculo mental. Logaritmos. Uso de los números en estimaciones y aproximaciones.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Procesos de cambio. Concepto de

[2] OCHOA, Myriam. Lineamientos curriculares y estándares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional

variable. El álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio. Relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas. Modelos matemáticos.

A continuación se mencionará los estándares de calidad referentes al Pensamiento Variacional Y Sistemas Algebraicos Y Analíticos propuestas por el MEN referentes a la solucion de problemas algebraicos para los grados octavo y noveno de educación básica secundaria:

♦ Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

♦ Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

♦ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

♦ Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

♦ Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

En resumen, Los lineamientos curriculares son directrices generales sobre el currículo; son la filosofía de las áreas. Los estándares están fundamentados en ellos, pero son más precisos, son para cada grado y dentro del grado para un desempeño concreto.

1.6. Importancia del trabajo de grado.

La matemática siempre ha estado presente en todos los programas de estudio desde que se inicia la vida escolar. Y es que provee de los recursos necesarios para enfrentar los quehaceres de la vida en sociedad y a conocer la forma y el tamaño de los objetos que nos rodean, nos ubica en tiempo y espacio, nos enseña a contar, comprar, medir y realizar operaciones estrictamente necesarias para la vida, y además nos enseña a pensar correctamente.

Fundamentalmente se ha distinguido dos momentos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo.

Estos dos tipos básicos lo enfocamos en transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella.

Podemos ver con claridad que se retoman los procesos generales que contemplan los lineamientos curriculares, como **resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, razonar y algoritmos,** aunque estos procesos tiene peculiaridades distintas y deben superar obstáculos diferentes. Los aspectos referidos anteriormente, el contenido y procesos del presente trabajo están relacionados con los estándares de matemáticas y con las competencias puesto que abarcamos tanto el pensamiento lógico y el pensamiento matemático y los ejes el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y variacional. Queremos resaltar que tocamos partes de cada uno de estos pensamientos especificaos para los grados 8º y 9º tales como **pensamiento numérico y sistemas numérico** "Utilizar la notación científica para representar cantidades y medidas", **pensamiento espacial y sistemas geométricos** "Usar representaciones geométricas para resol ver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas", **pensamiento métrico y sistemas de medidas** "Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos", **pensamiento aleatorio y sistemas de datos** "Reconocer que, diferentes maneras de presentar la información, pueden dar origen a distintas interpretaciones", **pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos** "Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales".

CAPÍTULO 2

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS.

2.1. Breve recorrido por la historia.

Los problemas de tipo algebraico se remonta a los orígenes de la matemática misma. Algunas culturas antiguas utilizaban procedimientos para eliminar incógnitas, por ejemplo, los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia desde el siglo XVII a.C. tenían el conocimiento para resolver ecuaciones de primer y segundo grado siendo considerados los precursores de este tipo de problemas.

El periodo que comprende de año 1800 a.C. al 1700 d.C., es caracterizado por la invención e implementación de la simbología para de operar, también por la resolución de ecuaciones[1]. En siglo XVI a.C. la cultura egipcia desarrolla un álgebra elemental la cual era utilizada para resolver problemas cotidianos de repartir. Alrededor del siglo I d.C. los matemáticos de la cultura china escribieron *"El Arte del cálculo"* en cual trataron distintos métodos para solucionar ecuaciones de primer grado, también plantearon métodos de solucionar sistemas de ecuaciones, e implementaron un ábaco donde podían tratar números positivos y negativos.

En el siglo III, el matemático griego Diofanto de Alejandría publio su obra llamada *"Aritmética "* en la cual trata en forma rigurosa las ecuaciones lineales, también introdujo una simbología elemental para designar las incógnitas la cual se denominaba arithmos, que significa número. En el siglo VII la cultura hindú desarrollo unas reglas algebraicas fundamentales para el manejode números positivos y negativos en las ecuaciones. En el siglo IX, el matemático y astrónomo musulmán Al−Jwarizmi[2] considerado como el precursor del álgebra, realiza una investigación acerca de los números, sus métodos de cálculo y formas de proceder algebraicamente para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Un siglo después, el gran algebrista musulmán Abu Kamil, fue el sucesor en los trabajos de Al−Jwarizmi, los cuales fueron posteriormente implementados en los estudios en siglo XIII por Fibonacci. El matemático Abul Wafa al Bujzani en este mismo siglo, realizó comentarios sobre los avances de Diofanto y Al-Jwarizmi,pues gracias a ellos, ahora es conocida la Arithmetica de

[1] Tomado de [1]

[2] Abu Abdallah Muhammad ibn Mers al−Jwarizmi fue un matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán, que vivió aproximadamente entre 780 y 850.

Diofanto. Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el año 1202, en sus viajes al norte y Oriente de África obtuvo los conocimientos de la numeración indoarábigo, realiza una publicación llamada "*El tratado del Ábaco"*. En el siglo XV, el matemático francés Nicolás Chuquet realiza la introducción el uso de los números negativos en Europa occidental.

A Francois Viète se le asocia la introducción de la notación simbólica, la cual marcó el inicio de una nueva etapa en las matemáticas en la cual Descartes realiza una importante contribución al desarrollo de dicha notación[3]. En este momento, el álgebra es considerada en la ciencia de los cálculos y ecuaciones simbólicas. Johann Widmann de Eger el matemático alemán inventa la simbología "$+$" y "$-$" para expresar la suma y la resta, posteriormente Christoph Rudolff de origen alemán en 1525 introdujo el símbolo de la raíz cuadrada. Este símbolo era una forma estilizada de la letra "r" de radical o raíz. Años después, Euler define la ciencia de las matemáticas como la teoría de los "*cálculos con cantidades de distintas clases"*

Pasaron mas de 3.000 años para llegar al proceso actual para solucionar la ecuación $ax+b=c$.

2.2. Qué es el lenguaje algebraico.

En lenguaje algebraico tiene sus orígenes en la época de Al−khwarizmi, y está conformado por las letras del alfabeto y algunos vocablos griegos. La función principal del lenguaje algebraico es formar un idioma que facilite el planteamiento de situaciones que permita la comprensión y solución, ayudando también a generalizar las diferentes situaciones y operaciones que se ven en las matemáticas y en la vida cotidiana; por ejemplo: si queremos adicionar dos números distintos a y b basta con decir $a+b$; donde las letras a y b representan estos números de una forma generalizada[4].

Para comprender el lenguaje algebraico es preciso tener en cuenta lo siguiente:

♦ Las constantes generalmente están representadas por las primeras letras del alfabeto como $a, b, c, ...etc.$
♦ Generalmente las letras x, y y z son utilizadas como las incógnitas o variables de la función o expresión algebraica.

Con la ayuda del lenguaje algebraico se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar expresiones, formular ecuaciones e inecuaciones y permite el estudio de cómo resolverlas.

A la ahora de traducir un problema en lenguaje algebraico se debe tener en cuenta que es un lenguaje en el que sólo se puede hablar de cantidades, operaciones y relaciones de estas cantidades. [5]

2.3. Algunos tipos de problemas matemáticos.

Existen diferentes tipos de problemas en las matemáticas los cuales se pueden clasificar de la siguiente manera:

[3] tomado de [1]
[4] Tomado de [9]
[5] tomado de [1]

2.3.1. Ecuaciones básicas.

Éstas son aquellas del tipo más sencillo que hay en las matemáticas; en estas se presentan los números y las operaciones en la cual debes encontrar su respuesta. Por ejemplo, "$3 \cdot 4 = 12$" es uno de los enunciados numéricos en estas ecuaciones, al igual que "$78(\frac{3^2}{4}) - 9{,}5 = 166$". En este método se procede de manera directa resolviendo las operaciones y damos la respuesta como tal.

2.3.2. Ecuaciones algebraicas

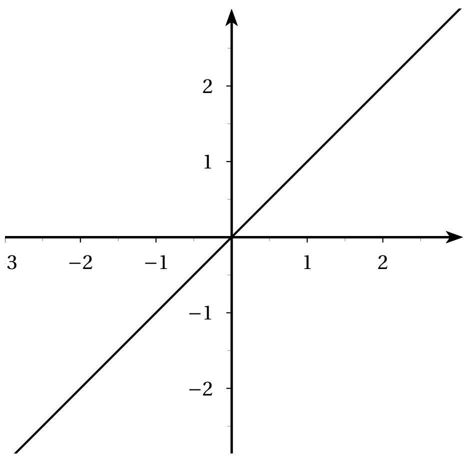
En éstas están relacionadas las variables y constantes por medio de operaciones y se requiere de un algoritmo para la solución de una parte de la respuesta en la ecuación y, en su lugar, se debe resolver una parte del problema, representados regularmente por variables. Un ejemplo de ecuación en un problema es "$x + 4 = 12$", al igual que "$2x^2 - 45z + 28 = y$". Saber como plantear y resolver ecuaciones algebraicas constituye las bases para la matemáticas de mayor nivel, incluyendo la trigonometría y el cálculo.

2.3.3. Problemas en Palabras.

Son aquellos que permiten mostrar la aplicación de las matemáticas en mundo real. Por ejemplo: Juan vende manzanas en paquetes de tres. Sí Camilo compra cuatro paquetes de manzanas. ¿Cuántas reúnen?. Otro ejemplo es el siguiente: Un bote de motor mantiene una velocidad de 27 mph (43,45 km/h) relativa al agua subiendo 20 millas (32,19 km) corriente arriba y regresando. El tiempo total del viaje fue de 1,5 hrs. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?.

2.3.4. Problemas Gráficos.

Son aquellos problemas representados por una o más gráficas que representan una situación los cuales pueden ser interpretados con gráficas de ecuaciones simples y algebraicas. Ejemplo:



¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A). La recta pasa por el origen.

B). La recta pasa por los puntos (1 , 0) y (1 , 3).

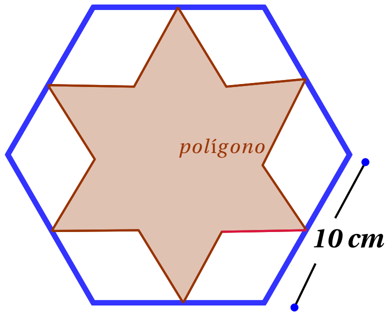
C). La pendiente de la recta es negativa.

D). La recta corta al eje x en el punto (-0.5 , 0).

2.3.5. Problemas en Formas y figuras.

Las formas y figuras pueden convertirse en problemas matemáticos cuando se trata de calcular sus dimensiones. Los problemas que involucran área, volumen, perímetro etc., son problemas de

formas y figuras, este tipo de problemas generalmente se vinculan con el álgebra pues se pueden traducir a lenguaje algebraico, por ejemplo:
Si el lado del hexágono regular de la figura es 10 cm, ¿ Cuanto vale el área del poligono rojo?



Donde la incógnita se convierte en un problema de aplicación de tipo geométrico o algebraico.[6].

2.4. Como plantear un problema con ecuaciones

La resolución de problemas matemáticos recorre cuatro fases:

⧫ Comprender el problema.

⧫ Elaborar un plan para resolverlo.

⧫ Ejecutar el plan.

⧫ Revisar y extender el trabajo realizado.

Cuando se conoce el lenguaje algebraico, una parte importante del proceso de resolución de un buen número de problemas consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje, es decir, consiste en traducir el problema en ecuaciones. El problema que hay que resolver se transforma entonces en el problema de resolver la ecuación. Una vez resuelta la ecuación falta volver al problema planteado para verificar y comprobar el resultado obtenido, y revisar y extender el trabajo realizado.

A continuación se citaran algunos algebristas y la metodología utilizada por los mismos para planear y resolver ecuaciones algebraicas, alguna métodos importantes para poner un problema en ecuaciones, y estudiaremos algunas clases de problemas también presentaremos algunos libros y sus autores que nos ayudaran a entender los métodos de resoluciones de problemas.

2.4.1. Marco Aurel.

Matemático alemán con fechas de nacimiento y muerte desconocidas. Su libro "*Arithmetica Algebratica*"[7] impreso en 1552 ocupa un lugar especial en la historia del álgebra y su enseñanza

[6]Tomado de [14]

[7]Libro primero de Marco Aurel, de Arithmetica Algebratica, en el cual se contiene el arte Mercantiuol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa de la época

en España, fue impreso en Valencia en casa de Joan de Mey, Flandro, en 1552, es el primer libro impreso escrito en español que trata el álgebra.
Marco Aurel,en su libro utiliza los signos $+ y -$, ? para la raíz cuadrada y los términos y caracteres çosicos"para las potencias de la incógnita. El texto se compone de tres partes y 24 capítulos. La primera parte ocupa la aritmética práctica y en los capítulos X a XX estudia el álgebra, hasta las raíces de los binomios. La segunda y tercera parte tratan de geometría y geometría práctica.

Marco Aurel plantea un lenguaje donde se evidencia al uso de las variables según su exponente:

Denominación del símbolo de Aurel	Símbolo actual
Diagrama o número	x^0
Radix o cosa	x^1
Censo	x^2
Cubo	x^3
Censo de censo	x^4
Sursolidum o primo relativo	x^5
Censo y Cubo	x^6
Bissursoludum	x^7
Censo censo de censo	x^8

Donde expresa los términos o el lenguaje a utilizar a la hora de resolver un problema.
A este autor también se atribuye otra obra de desigual interés. Es uno de los numerosos manuales de "*cuentas"* que, durante el siglo XVI se imprimieron en España en relación directa con los principales centro de actividad mercantil y financiera.

2.4.2. Juan Perés de Moya (1613-1597).

Diez años después de la publicación del libro de Marco Aurel se edita el libro ala *Arithmetica Práctica, y Speculativa del Bachiller de Juan Perés de Moya*[8]. La importancia de este libro reside con que es el primer Tratado de Mathematicas que reúne aspectos de Arithmetica, Geometría, Cosmografía, y filosofía natural[9]..

En el Libro Primero de esta obra, el autor quiere ayudar a sus lectores a superar el obstáculo de la *experiencia común* en el estudio de las matemáticas. Para ello utiliza una técnica didáctica,que repite en otros capítulos la obra y consiste en dar dos concepciones de todo objeto matemático: una concepción natural, intuitiva y espontánea y otra concepción más formal y rigurosa.

El autor intenta hacer entender que la concepción natural es la que todos normalmente adquirimos a través de la experiencia común, luego busca conducirles a construir otra concepción diferente observando esa misma realidad bajo el punto de vista matemático de modo abstracto, según *razón solamente*. Los objetos reales se transforman en objetos matemáticos y adquieren otra dimensión epistemológica.

En primer lugar presenta los caracteres o dignidades: número, cosa, censo,cubo, censo de censo,

[8]Aritmética, práctica, y especulativa del bachillér Juan Perez de Moya,Don Plácido Barco Lopez, 1798
[9]Tomado de [6]

primer relato, etc. hasta un total de treinta. En la Tabla se expresan sus equivalencias con las notaciones actuales:

Carácter cócico	Denominación del símbolo de aurel	Símbolo actual
n	Diagrama o numero	x^0
co	Radix o cosa	x^1
ce	Censo	x^2
cu	Cubo	x^3
cce	Censo de censo	x^4
R	Sursolidum o primo relativo	x^5
cecu	Censo y Cubo	x^6
RR	Bissursoludum	x^7
ccce	Censo censo de censo	x^8

2.4.3. Leonhard Euler

Euler trabajó prácticamente en todos los ámbitos las matemáticas: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra, teoría de números, además de la física. Adicionalmente, hizo apuntes a la lógica matemática con su diagrama de conjuntos.

Ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Su actividad de publicación fue incesante (un promedio de 800 páginas de artículos al año en su época de mayor producción, entre 1727 y 1783). Se le considera el ser humano con mayor número de trabajos y artículos en cualquier campo del saber, sólo equiparable a Gauss.

Los aspectos generales a la solución algebraica de problemas planteados por Euler[10] fueron:

1.Cuando se tiene que resolver un problema, el número buscado se indica por una de las últimas letras del alfabeto. Después, se considera de qué manera, a partir de las condiciones dadas, se puede formar una igualdad entre las dos cantidades, esta igualdad se presta por un tipo de formula llamada ecuación , que nos permite determinar el valor del número buscado y, por consiguiente resolver el problema. En ocasiones, se deben encontrar varios números que también se puedan determinar por ecuaciones.

2. Resulta evidente que, en todos los problemas, es esencial considerar atentamente las condiciones de la cuestión, para poder deducir una ecuación en la que los números desconocidos se expresan con letras. Después de esto todo el arte consiste en resolver estas ecuaciones determinando los valores de los números desconocidos[11].

2.4.4. Alexis Claude Clairaut

Clairaut nació en París en (1713 - 1765), fue considerado un niño prodigio. A los doce años escribió un desarrollo sobre cuatro curvas geométricas, y llegó a alcanzar tal progreso en el tema (bajo

[10]Los *elementos del álgebra* en el el capitulo *resolución de problemas en general* de la cuarta sección de la primera parte dedicada a los epígrafes 566-569

[11]Tomado de [3]

la tutela de su padre quien era profesor de matemáticas), que a la edad de 13 años leyó ante la academia francesa un resumen de las propiedades de las cuatro curvas que había descubierto. Tres años más tarde, completó un tratado sobre curvas de doble curvatura, "*Recherches sur les courbes a double courbure*", que la valió su admisión a la Academia de Ciencias Francesa tras su publicación en 1731, a pesar de que aún no contaba con la mínima edad legal de 18 años para ser admitido.

En 1741, Clairaut participó en una expedición cuyo objetivo era medir la longitud de un meridiano en la tierra, y a su regreso en 1743 publicó su trabajo *"Théorie de la figure de la terre"*. Estas ideas se basaban sobre un trabajo de Maclaurin, que había demostrado que una masa de fluido homogéneo en rotación alrededor de un eje que pase por su baricentro tomaría, bajo la atracción mutua de sus partículas, la forma de un esferoide.

Además de sus contribuciones a la ciencia en general a las matemáticas en particular, escribió dos textos dedicados a la enseñanza que alcanzaron varias ediciones: Uno de ellos es *"Élémens d´algébre"* y el otro de geometría *"Élémens d´géométrie"*. Donde resaltaba la importancia de la solución de problemas a través de la historia que dieron origen al álgebra o análisis[12].

2.4.5. Sylvestre Francois Lacroix

Nacido en una familia modesta en París(1765,1843), Lacroix se introdujo a las matemáticas por el Padre Joseph-François Marie , profesor de la Universidad de las Cuatro Naciones , En 1782 a la edad de 17 años se convirtió en un instructor de matemáticas en el cole Gardes de Marina en Rochefort, Francia. Regresó a París y enseñó cursos de astronomía y matemáticas en el Liceo. En 1787 fue co-ganador del Gran Premio de los franceses Acadmie des Sciences de ese año, pero nunca fue galardonado con el premio. Cuando se abolió el Liceo, de nuevo se trasladó a las provincias. Sin embargo, no enseñó la geometría descriptiva, debido a que los métodos de esta disciplina (doble proyección, subir, bajar, planos tangentes) Se han celebrado como un secreto militar. Sin embargo Lacroix sospecha la existencia de una disciplina a la solución geométricas problemas en el espacio geometría.

Se debe a Lacroix la expresión *geometría analítica* y la denominación *integración por partes* que es uno de los mas conocidos método de integración.

Miembro del Instituto, profesor del colegio de Francia, de la Facultad de Ciencias y de otras muchas instituciones. Es uno de los sabios a quienes más debe la enseñanza de las matemáticas en Francia y ha dejado de casi todas las ramas de esta ciencia obras muy estimadas como: " *El ementos de geometría* "[13]; "*Elementos de aritmética*"; Elementos de álgebra; Tratado elemental de trigonométrica rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la trigonométrica; Tratado elemental de cálculo de las probabilidades; Manual de agrimensura; Tratado del cálculo diferencial; Tratado de cálculo integral.

De los E´lémens dálgébre(5° edición) mencionaremos en los párrafos siguientes, un método de propuesto por lacroix dedicado a la formación de las ecuaciones asociadas a los problemas del álgebra: He aquí el precepto: *Indicar, con la ayuda de los símbolos algebraicos, sobre las cantidades conocidas, representadas por los números o letras, y sobre las incógnitas, representadas siempre por*

[12] Tomado de [7]

[13] René Taton, « Laplace et Sylvestre-François Lacroix », Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, vol. 6, no 4, 1953, p. 350-360.

letras, los mismos razonamientos y las mismas operaciones que se deberían efectuar para comprobar los valores de las incógnitas si ellas fuesen conocidas... Para ponerlos en practica es necesario, en primera instancia determinara cuales son las operaciones que encierran el problema ya sea de forma explicita o implícita; pero esto precisamente en lo que reside la dificultad de poner en la ecuación un problema propuesto.

2.4.6. Propuesta de otros autores

José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846) nació en Granada y es uno de los matemáticos españoles mas importantes durante las primeras décadas del siglo XIX. Estudió en la Universidad de Granada, aunque su formación matemática fue autodidacta. En 1801 fue profesor sustituto de geometría práctica en la Real Academia de San Fernando y colaboró en diversos trabajos técnicos por encargo de dicha institución. Al año siguiente ganó la cátedra de matemática y fortificación del Real Seminario de Nobles de Madrid, puesto en el que desarrolló la mayor parte de su obra científica[14].

Vallejo publicó Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails (1806) en la que, sin estar todavía familiarizado con la obra de los más destacados matemáticos del momento, desarrolló algunos aspectos en una línea semejante a la de éstos. Su obra más importante es *"Memoria sobre la curvatura de las líneas"* (1807), una monografía original dedicada a las evolutas que concluye con la siguiente afirmación: De toda curva algebraica se puede obtener la expresión de su radio de curvatura, y las evolutas de estas curvas serán todas rectificables, es decir, se podrá señalar la longitud de sus curvas por una fórmula algebraica[15].

En su libro *tratado elemental de las matemáticas* ofrece las siguientes instrucciones sobre cómo plantear y resolver problemas:

1. El expresar las condiciones del problema en ecuaciones se llama *plantear el problema;* y para conseguirlo no se pueden dar reglas que sean del todo independientes del talento del calculador; no obstante las más generales son las que observa una rigurosa traducción. Así observando las palabras del lenguaje común *sumando, más, con, junto, y , agregando, unido* y todas sus semejantes, conducen a escribir el signo +; las palabras *restado de, quitado de, disminuido en, menos, y sus semejantes, conducen al signo* −; las palabras *multiplicando, tantas veces mayor* y semejantes conducen al signo X; y las palabras *dividido, partido* y todas sus semejantes conducen al signo dividir; las palabras *elevados a tal potencia*, como cuadrado, cubo, y semejantes conducen al elevar a potencias; las palabras de *extraer a tal o raíz* al signo radical; y finalmente las palabras *dé, componga, resulte* y todas sus equivalentes conducen a escribir el signo =.

2. Cuando después de planteado un problema se hallan tantas ecuaciones como incógnitas, entonces la ecuación es *determinada* ; cuando resultan menos ecuaciones que incógnitas es indeterminada; y cuando resultan más ecuaciones que incógnitas se debe llamar *más que determinada*; pero en este caso la cuestión o es absurda, o es inútil alguna condición de las que se dieron, y por lo mismo no se considera esta clase de cuestiones.

[14] Tomado de [7]

[15] José María Gentil Baldrich, Nuevos datos sobre la vida y la obra de José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846), Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas 22: 381-404, 1999.

2.4.7. Colin Maclaurin y la solución de problemas algebraicos de primer grado.

Colin MacLaurin (Kilmodan, febrero de 1698 - Edimburgo, 14 de junio de 1746) Matemático escocés. Hijo de un ministro de parroquia en Argyll (Escocia), quedó huérfano de padre a los seis meses y huérfano de madre a los nueve años de edad. A los once años ingresó en la universidad de Glasgow y se graduó a los catorce.

En 1725 Maclaurin fue recomendado por Isaac Newton para un puesto en la Universidad de Edimburgo, donde pasó el resto de su vida. Ocho años después se casó con Ana Stewart, con quien tuvo siete hijos. En 1742 publicó *"Treatise of fluxions"*, donde introduce la llamada serie de Maclaurin, que permite evaluar funciones.

También en 1742 halló la fórmula que relaciona la velocidad de rotación de una esfera autogravitante con su achatamiento. Para deducirla consideró el equilibrio hidrostático entre dos columnas de líquido, una polar y otra ecuatorial, que confluyen en el centro de la Tierra.

En 1748, póstumamente, se publica el libro *"Treatise of Algebra"*. En el cual utilizó determinantes para resolver ecuaciones de cuatro incógnitas. Dos años después este método fue popularizado por Gabriel Cramer como Regla de Cramer. En ste libro además Maclaurin propone diversas reglas para la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, y para lo cual propone lo siguiente[16]

1. "Una ecuación es una *proposición que afirma la igualdad de dos cantidades*. Comúnmente esto se expresa escribiendo el signo igual (=) entre ellas"...

2. "Una ecuación proporciona el valor de la cantidad cuando ésta se aísla en uno de los miembros de la ecuación. Este valor es conocido cuando todas las cantidades que están en el otro miembro son conocidas"...

3. "Si solo hay una incógnita en una ecuación dada y sólo una dimensión de ella, entonces su valor siempre se puede encontrar mediante las reglas siguientes:"

Regla I: Cualquier cantidad se puede trasponer de un miembro de la ecuación al otro, cambiándole el signo... Esto es cierto en virtud de que *cuando de cantidades iguales se quitan cantidades iguales los restos también son iguales.* por ejemplo:

$$x - a = b$$

$$x - a + a = b + a$$

$$x = b + a$$

Regla II: "Se puede quitar cualquier cantidad que multiplique a las incógnitas si se divide por dicha cantidad todas las demás cantidades de los dos miembros de la ecuación. Es decir: dividir los dos miembros de la ecuación por la misma cantidad; y cuando se dividen cantidades iguales por la misma cantidad, los cocientes también son iguales". Por ejemplo:

$$ax = b$$

$$x = \frac{b}{a}$$

[16]Tomado de [4]

Regla III: Si la incógnita esta dividida por cualquier cantidad, dicha cantidad se puede quitar si se multiplica por ella todos los otros términos de la ecuación. Por ejemplo:

$$\frac{x}{a} = b$$

$$x = \frac{b}{a}$$

Por esta regla, una ecuación, algunos cuyos términos son fraccionarios, se puede reducir a otra ecuación que se expresara con números enteros. Si en la ecuación hay mas de una fracción, reduciéndolas a común denominador se pueden simplificar los cálculos.

Regla IV: "Si el término de la ecuación que contiene la incógnita es un radical, entonces la ecuación se puede reducir a otra sin radicales aislando primero en un miembro el término que contiene el radical; después se elimina el signo radical y se eleva el otro miembro al índice del radical". A manera de ilustración:

$$\sqrt[c]{x+a} = b$$

$$(\sqrt[c]{(x+a)})^c = (b)^c$$

$$x+a = b^c$$

Regla V: Si el miembro de la ecuación que contiene la incógnita es un cuadrado, cubo u otra potencia, entonces, extrayendo la raíz cuadrada, cubica, etc., de ambos miembros de la ecuación. ésta se reduce a otra de menor grado:

$$x^a = b$$

$$\sqrt[a]{x^a} = \sqrt[a]{b}$$

En el caso de la raíz par

$$x = \pm\sqrt[a]{b}$$

Ó bien

$$x = \sqrt[a]{b} \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt[a]{b}$$

Regla VI: "Una proposición se puede transformar en una ecuación, igualando el producto de los términos extremos al producto de los términos medios; o, de otro modo, uno cualquiera de los extremos es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo".

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

$$cx = ba$$

Regla VII: "Si cualquier cantidad se encuentra en los dos miembros de una ecuación, precedida de los mismos signos, entonces se puede eliminar de ambos. Si todos los términos de una ecuación están multiplicados o divididos por la misma cantidad, entonces ésta se puede borrar de todos ellos". Es evidente que esta regla es un caso particular de la Regla I:

$$x+b = c+b$$

$$x = c$$

Regla VIII: $\delta 77$. En lugar de cualquier cantidad de una ecuación se puede sustituir otra igual que ella.

$$x + y = c + b \text{ con } y = b \text{ entonces}$$

$$x + b = c + b$$

$$x = c$$

2.4.8. Geoger Polya (1887−1985)

George Polya nació en Hungría en 1887. Obtiene el doctorado en la Universidad de Budapest y en la disertación para obtener el grado aborda temas de Probabilidad. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federalen Zurich, Suiza. Durante su larga vida, académica y profesional recibió numerosos premios y galardones por su excepcional trabajo sobre la enseñanza de las matemáticas y su importantísima obra investigativa. Los aportes de Pólya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro "*Cómo plantear y resolver problemas*"[17] que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la Heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas.

En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

1. Entender el problema.

2. Configurar un plan.

3. Ejecutar el plan.

4. Mirar hacia atrás.

Paso 1: Entender el Problema.

¿Puede replantear el problema en sus propias palabras?
¿Distingue cuáles son los datos?
¿Sabe a qué quiere llegar?
¿Hay suficiente información?
¿Hay información extraña?
¿Es este problema similar a algún otro que haya resuelto antes?

Paso 2: Configurar un plan.

Se pueden usar las siguientes estrategias:

♦ Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).

[17]Cómo plantear y resolver problemas es un libro del matemático húngaro George Pólya, que describe métodos para resolver problemas y elaborar pequeñas demostraciones. Este libro fue publicado en 1945 en la Universidad de Princeton.

♦ Usar una variable.
♦ Buscar un Patrón.
♦ Hacer una lista.
♦ Resolver un problema similar más simple.
♦ Hacer una figura o diagrama.
♦ Usar razonamiento directo.
♦ Usar razonamiento indirecto.
♦ Usar propiedades de los números.
♦ Trabajar hacia atrás (Devolverse).
♦ Usar casos.
♦ Plantear y Resolver una ecuación.
♦ Buscar una fórmula.
♦ Usar un modelo.
♦ Usar análisis dimensional.
♦ Usar coordenadas.
♦ Usar simetrías.

Paso 3: Ejecutar el Plan.

Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos.
¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?.

Al implementar estrategias que se ha escogido para solucionar el problema, puede suceder que la misma acción le sugiera tomar un nuevo curso. Es necesario tomar tiempo razonable para darle solución al problema. Si a la hora de solucionar el problema no ha obtenido éxito, solicite una opinión o sugerencia entorno a este, puede dejarlo de lado por un momento para redireccionar sus ideas. Muchas veces es necesario volver a empezar, no desista. Es muy común que iniciar de nuevo o implementar nuevas estrategias conduzcan al resultado esperado.

Paso 4: Mirar hacia atrás.

¿Puedes comprobar el resultado? ¿Puedes comprobar el razonamiento? ¿Puedes demostrar el resultado de forma diferente, por ejemplo, a la inversa? ¿Puedes verlo de un golpe?
¿Puedes usar el resultado, o el método, en algún otro problema?

Tener una buena idea para resolver un problema, nos dice Polya, es difícil cuando se tiene poco conocimiento y experiencia en la materia, ya que éstas se basan en experiencias pasadas y conocimiento ya adquirido. Pero la buena memoria no es suficiente para obtener una buena idea, hay que recordar elementos claves como lo son problemas similares ya resueltos e intentar significar los conceptos de la química orgánica y, de preferencia resolver los problemas modelo por varios métodos[18].

2.4.9. Miguel de Guzmán (1963-2004)

Nace en Cartagena (Murcia) el día 12 de Enero de 1936. Muere en Madrid el día 14 de Abril de 2004. Matemático, escritor, miembro de la Real Academia Española. Ingresó como agregado de la cátedra de Análisis Matemático en la Universidad Autónoma de Madrid hasta el año 1982 cuando

[18] Tomado de [14]

alcanzó la cátedra de la misma donde permaneció dos años más. Es nombrado miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en 1983 y su discurso de recepción se tituló Impactos del análisis armónico. De 1991 a 1998 fue presidente del ICMI, Comisión Internacional de Instrucción Matemática. La mayor parte de su carrera docente transcurre en la Universidad Complutense de Madrid, como catedrático de universidad. Miguel de Guzmán posee en su honor un aula homónima dedicada a las matemáticas en dicha universidad.

Miguel de Guzmán plantea lo siguientes cuatro pasos:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Llevar adelante la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Al comienzo, en la familiarización, debemos actuar sin prisa, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender.

Una vez que se ha entendido el problema pasamos a buscar estrategias que nos permiten resolverlo. Apuntamos las ideas que nos surgen relacionadas con el problema.

Tras acumular varias estrategias llevamos a cabo la estrategia escogida, con confianza y sin prisa. Si no acertamos con el camino correcto volvemos a la fase anterior y reiniciamos el trabajo.

Al llegar a la solución queda la fase más importante, revisión del proceso y extraer consecuencias de él. Debemos reflexionar sobre el camino seguido, si podemos extender estas ideas a otras situaciones.

En el siguiente capitulo haremos un recorrido a través de la historia por los distintos tipos de problemas y métodos que existen para solucionarlos[19]..

[19] Tomado de [13]

CAPÍTULO 3

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS.

3.1. Estrategia para solucionar problemas

La solución de un problema de tipo matemático puede ser muy complicado si no se utiliza un método adecuado para ello, pues algunos problemas incluyen muchos datos o a algunos problemas aparentemente les falta información que facilite su solución. Por tanto, se requiere de un plan o estrategia que facilite su solución. Los siguientes pasos permiten comprender mejor un problema, y diseñar una solución eficiente para resolverlo [9].

1. Escribir el problema: Escribir el problema ayudará a que podamos comprenderlo más rápidamente e independientemente de lo que trate el problema. Muy pocas personas tiene la capacidad de comprender y solucionar un problema mentalmente.

2. Trasladar el problema a lenguaje algebraico: Este paso es uno de los mas importantes a la hora de resolver un problema, pues consiste en trasformar el enunciado del problema en un lenguaje que facilita su solución, pues, permite plantearlo de modo que sea posible hacer las operaciones debidas para obtener dicha solución.

3. Determinar si se trata de un problema de álgebra o geometría: En las matemáticas la mayoría de problemas se reducen a dos categorías; *álgebra o geometría*, es necesario identificar el tipo de problema para poder saber que aplicar a la hora de solucionarlos.

4. Buscar recursos para su solucionar el problema: Es recomendable buscar fuentes de información para obtener herramientas que faciliten la solución de un problema como formulas, teoremas, etc. dependiendo la dificultad del problema.

5. Simplificar cuando se pueda: En los problemas con ecuaciones es muy común ver problemas que se vuelven muy complicados y al simplificar, o factorizar, el problema se torna mucho mas fácil.

[9] Aparicio Pedrerio,J.J(2002):.Ecuaciones lineales y anillos Conmutativos".Extracta Mathematicae .Vol.17,Num.2,247-257.

6. Resuelve mentalmente lo que sea posible: Siempre es mejor que lo escriba, pero para algunos problemas, esto no es factible. Es por eso que se debe aprender a resolver problemas básicos mentalmente. A la hora de solucionar un problema debemos tener en cuenta cuatro fases fundamentales para resolverlo: comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y, finalmente, revisar y extender el trabajo realizado. Además es también necesario conocer *el lenguaje algebraico*, pues es una parte importante a la hora de solucionar problemas ya que facilita su comprensión , es decir poner el enunciado del problema en ecuaciones para facilitar su comprensión.

Después que el problema se transforma en una ecuación sigue el proceso lógico matemático, de argumentación y si éste es correcto basta con corroborar el resultado en el enunciado del problema para ver si cumple con la condición planteada.

3.2. Métodos para solucionar problemas con ecuaciones a través de la historia

3.2.1. La matemática en la cultura Egipcia:

En documentos encontrados referentes a la época, como el papiro del Rhind y el papiro de Moscú, entre otros, es posible afirmar que la cultura egipcia logró grandes avances en álgebra y geometría. Esta cultura dominaba la suma, la resta,la división y la multiplicación. Además, los números racionales los expresaban como sumas de fracciones unitarias, teniendo la unidad como numerador 1, excepto para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

A pesar que la suma funcionaba correctamente, su sistema de numeración tenía algunas dificultades aritméticas entre las que destaca, que no era muy práctico a la hora de multiplicar, sin embargo a pesar de esto consiguieron que la aritmética fuese uno de sus fuertes. La multiplicación se realizaba a partir de duplicaciones y sumas, y en la división utilizaban la multiplicación a la inversa.

En el papiro del Rhind se encuentran resueltos 85 problemas, en los cuales algunos están modelados por medio de ecuaciones lineales de la forma:

$$x + \frac{1}{a}x = b$$

Fueron solucionadas usando el método[1] de Regula falsi o falsa posición, la cual consiste en partir de una solución aparentemente verdadera inicial y corregirla de acuerdo a los resultados obtenidos. Este método de solución es muy similar al que hoy conoce como el método de ensayo y error.

Ejemplo: Una cantidad más su séptima parte es igual 19 ¿ Cuál es la cantidad?

Daremos solución al problema utilizando el método egipcio para solucionar el problema planteado. Si nombramos con x la cantidad buscada, podremos plantear la ecuación: $x + \frac{x}{7} = 19$. Si suponemos que una solución es $x_1 = 7$ entonces

$$7 + \frac{7}{7} = 8$$

[1] Tomado de [7]

Podemos ver que no es el resultado que buscamos, entonces tomamos $x_2 = 8$ y buscamos un k de modo que $k_2 = b$, teniendo en cuenta que k es el factor de corrección que relaciona a 19 y 8. entonces $\frac{19}{8} = k$ pues $x_2 = 8$ y $b = 19$. Implementando *el método egipcio de la división* tenemos que;

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Por lo tanto la solución es $x = k_1$ ya que

$$x = \frac{19}{8} \cdot 7$$

$$x = (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \cdot 7$$

$$x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

(Papiro de Rhind. problema 24.documento del siglo XIX a. C.)

3.2.2. La matemática en la Cultura china:

Aunque se tiene poca información sobre la matemática de la cultura China, es conocido el ábaco como una buena herramienta para el cálculo en las matemáticas, los cuadrados mágicos, y el tangrám entre otros aspectos didácticos de la matemática. También se resalta el manejo de los números negativos para dar solución a sistemas de ecuaciones y el Teorema Chino del Residuo.

La cultura china maneja métodos sistemáticos y generales para la solucionar sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas,que se asemeja al método de eliminación [10] utilizado en las matemáticas modernas. En el manuscrito chino de los nueve capítulos se hace una explicación de este método generalizado(*ninguno de los pasos depende propiedades particulares de los números involucrados*).

Ejemplo: Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

Este método de la cultura china se emplea disponiendo en una columna los coeficientes de la primera ecuación dada y en otra columna al lado izquierdo los de la segunda ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la columna de la izquierda por 5 entonces tendremos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 25 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

[10] El objetivo de este método es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable

Restando a la columna de la izquierda la columna de la derecha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 24 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$24y = 7$$
$$5x + y = 3$$

Donde $y = \dfrac{7}{24}$ y sustituyendo en la segunda ecuación tendremos

$$x + 5\frac{7}{24} = 2$$

$$x = 2 - \frac{35}{24}$$

$$x = \frac{13}{24}$$

Luego la capacidad del recipiente grande es de $\frac{13}{24}$ y del recipiente pequeño es $\frac{7}{24}$.

(El Manuscrito chino de los nueve capítulos.Capitulo 3. Entre los siglos II y I a.C.)

3.2.3. La matemática en la cultura Mesopotámica:

Los matemáticos babilónicos desarrollaron una matemática avanzada en el álgebra y la geometría. Lograron una aproximación al número $\sqrt{2}$ de cinco posiciones decimales, clasificaron los números, las matemáticas babilónicas usaban un sistema de numeración de base sesenta (sexagesimal). [2]"También se deriva la división de un minuto en 60 segundos y de una hora en 60 minutos, así como la de un círculo en 360 (60 x 6) grados y las subdivisiones sexagesimales de esta unidad de medida de ángulos en minutos y segundos".

Los babilonicos lograron resolver ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + bx + c = 0$, con $b, c \in \mathbb{N}$. Los problemas que se modelan[3] con ecuaciones de este tipo, se enunciaban de la siguiente manera: çonocidos la suma y el producto de dos números, encontrar estos", o "dados el área y el semiperimetro de un rectángulo, encontrar sus lados". En la notación moderna sus desarrollos babilónico de estos problemas es:

Si $x + y = a$ (1) , y, $xy = b$ (2).

Para resolver este tipo de problemas procedían como sigue;

Se considera $x = \frac{a}{2} + z$, (3) y, $y = \frac{a}{2} - z$ (4).

Se realiza una sustitución en las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (2) y tenemos:

[2]Aaboe, Asger (1998). Episodes from the Early History of Mathematics. New York: Random House. pp. 30-31.

[3]Tomado de [8]

$$(\frac{a}{2}+z)(\frac{a}{2}-z)=b.$$

Si despejamos z se tiene;

$$z=\sqrt{\frac{a^2}{2}-b}$$

Ahora reemplazamos z en las ecuaciones (3) y (4) se obtiene la expresión que se conoce como la fórmula cuadrática;

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a}{2}^2-b} \qquad \text{y} \qquad y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a}{2}^2-b}.$$

Ejemplo: Encontrar dos números de modo que al sumarlos sea $\frac{7}{6}$ y su producto $\frac{1}{3}$.

Solución: Sean x e y los números buscados.

Partimos suponiendo la mitad de la suma, de modo que $x=\frac{7}{12}$ y $x=\frac{7}{12}$
Esta suposición es verdadera pues

$$x+y=\frac{7}{6}$$

$$\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=\frac{7}{6}$$

Pero no se cumple para el producto pedido.

Luego se procede multiplicando los dos valores iniciales entre si y restando el valor buscado

$$(x\cdot y)-\frac{1}{3}=(\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12})-\frac{1}{3}=\frac{49}{144}-\frac{1}{3}=\frac{1}{144}$$

Procedemos a sacarle raíz cuadrada el valor encontrado para luego sumarlo a x y restarlo a y de esta forma

$$\sqrt{\frac{1}{144}}=\frac{1}{12}$$

$$x=\frac{7}{12}-\frac{1}{12} \qquad \text{y} \qquad y=\frac{7}{12}-\frac{1}{12}$$

Entonces $x=\frac{2}{3}$ y $y=\frac{1}{2}$

3.2.4. La matemática en la cultura Griega.

Los griegos le dieron un punto de vista característico a las matemáticas de la época gracias a los aportes de Thales de Mileto, Pitagóras y su escuela, Euclides, Arquímedes y Diofanto de Alejandría, entre otros. [11]"Tales de Mileto se le atribuye el uso de la geometría para plantear y resolver problemas tales como el cálculo de la altura de las pirámides y la distancia de los barcos desde la orilla". A Pitágoras es atribuida la primera demostración del teorema el cual lleva su nombre. "[12] *Los elementos* incluye una demostración de que la raíz cuadrada de dos es un número irracional y otra sobre la infinitud de los números primos. La Criba de Eratóstenes (hacia 230 a. C.) fue usada

[11] Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics, Saunders, 1990, ISBN 0-03-029558-0
[12] O'Connor, J.J. and Robertson, E.F. (febrero de 1996). «A history of calculus». University of St Andrews.

para el descubrimiento de números primos".
Los griegos resolvieron ecuaciones de la forma $x^2 = n$ donde $n \in \mathbb{N}$ esta solución consiste en hallar la raíz cuadrada de un número. Para solucionar este tipo ecuaciones, se procede utilizando el método de solución de Herón y el método de Euclides.

• **El Método de Herón:(Alejandria 120 aC - 50 aC)**

Es el métodos[4] más antiguo en las matemáticas para resolver ecuaciones y consiste en optimizar la aproximación a $\sqrt{n}$ de la siguiente manera:

Si x_k es una aproximación con parte entera de $\sqrt{n}$, teniendo en cuenta que:

$$x_k < \sqrt{n} < x_k + 1$$

Se escoge $x_k < p < x_k + 1$, y, $px_k = n$.

Herón logró demostrar que la media aritmética $\frac{x_k+p}{2}$ es una aproximación mas cercana a la $\sqrt{n}$. este proceso de la media aritmética se repite varias veces para obtener una media aritmética mas aproximada a $\sqrt{n}$.

$$x_{k+1} = \frac{x_k + p}{2} = \frac{x_k \frac{n}{x_n}}{2} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{n}{x_k})$$

Ejemplo: Hallar $\sqrt{2}$ utilizando el método de Herón.

Tomamos como $x_0 = 1$ luego se reemplaza en ecuación general $\frac{1}{2}(x_k + \frac{n}{x_k})$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0})$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12} = 1,414221...$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}) = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408} = 1,41421345...$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}) = \frac{1}{2}(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}) = 1,414213...$$

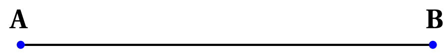
A medida que Seguimos haciendo este proceso tendremos una mejor aproximación a la raíz buscada.

[4] Tomado de [9]

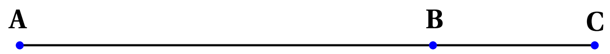
• **EL Método Geométrico de Euclides para Hallar la $\sqrt{n}$ con $n \in N$:**

Este método[5] se encuentra en el libro *"Los Elementos de Euclides"* en la proposición 13 del libro *VI* y y se procede de la siguiente manera:

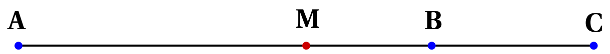
1. Se construye un segmento $\overline{AB}$ de modo que $l(AB) = n$.



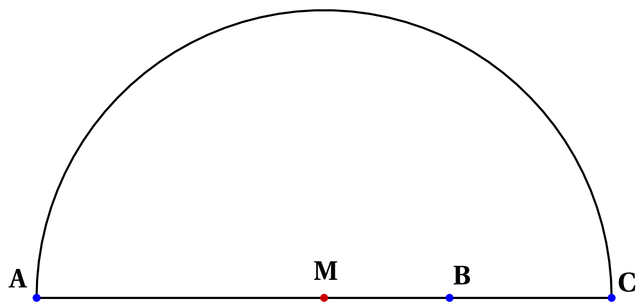
2. Luego se procede a extender el segmento $\overline{AB}$ desde el punto B a un punto C de tal manera que $l(BC) = 1$.



3. Posteriormente se biseca el segmento $\overline{AC}$ con punto medio M.

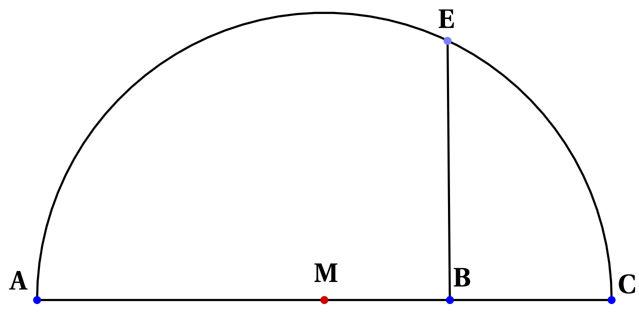


4. Se construye un semicírculo con centro en M y $r = l(AM)$.

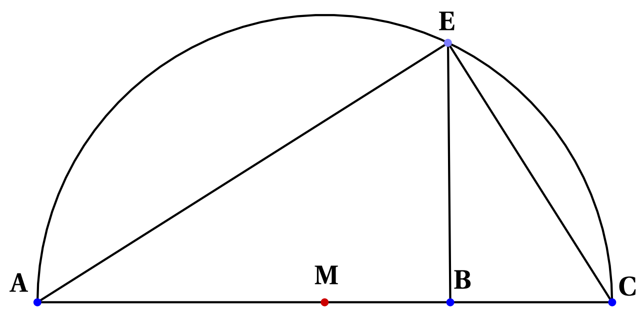


5. Se construye una perpendicular al segmento $\overline{AC}$ desde el punto B. al punto de intersección de la perpendicular a la semicircunferencia se nombra como E.

[5]Tomado de [9]



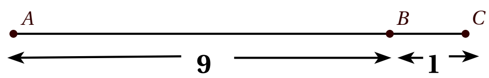
6. Como último paso se trazan los segmentos de recta $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$.



En el cual la longitud del segmento $\overline{BE}$ es la $\sqrt{n}$ buscada.

Ejemplo: Hallar por el método de Euclides la raíz cuadrada de de 9, ($\sqrt{9}$).

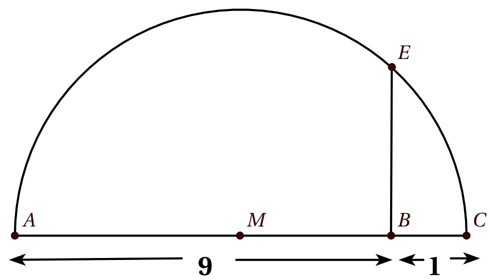
Primero trazamos un segmento de 9 unidades y le adicionamos una unidad.



Luego procedemos a trazar un arco hallando el punto medio del segmento

$$\overline{AC}$$

, el cual llamamos M, que en este caso es 4,5



Posteriormente trazamos los segmentos

$$\overline{AE}$$

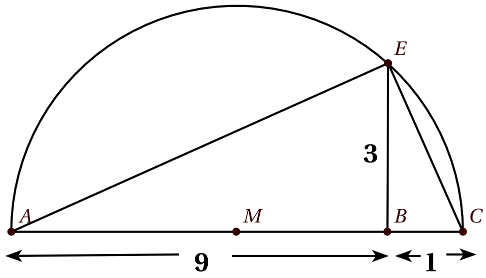
y

$$\overline{CE}$$

, teniendo como resultado que el segmento

$$\overline{BE}$$

tiene como medida 3 unidades.

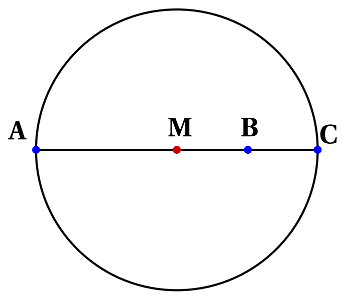


Luego $\sqrt{9} = 3$

• **Uso de la geometría para la Solución de Ecuaciones de** $x^2 - bx + c$ **donde** $b, c \in \mathbb{N}$

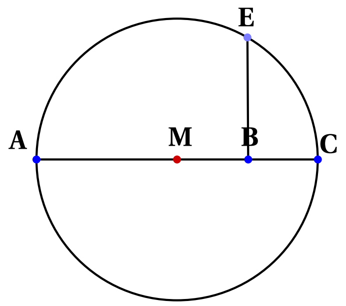
Para solucionar este tipo de ecuaciones de forma geométrica, se realizan los tres primeros pasos escritos anteriormente en el método[6] de Euclides para hallar la $\sqrt{n}$ de un número y después se procede así:

1. Se traza una circunferencia con centro en M y de radio $l(AM)$.

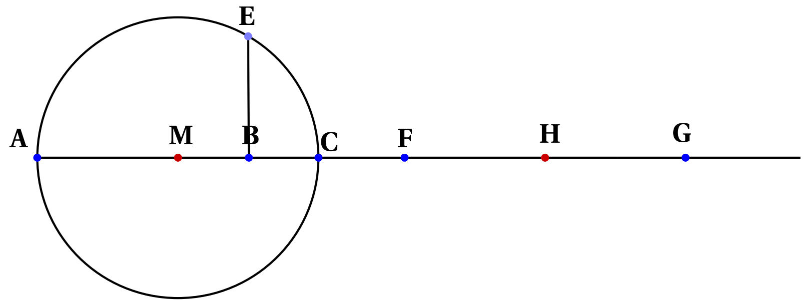


2. Luego se traza una perpendicular al segmento $\overline{AC}$ en el punto B y se nombra al punto E a la intersección con la circunferencia.

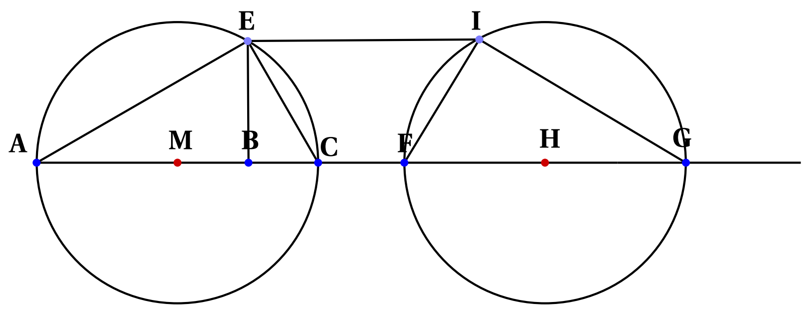
[6]Tomado de [10]



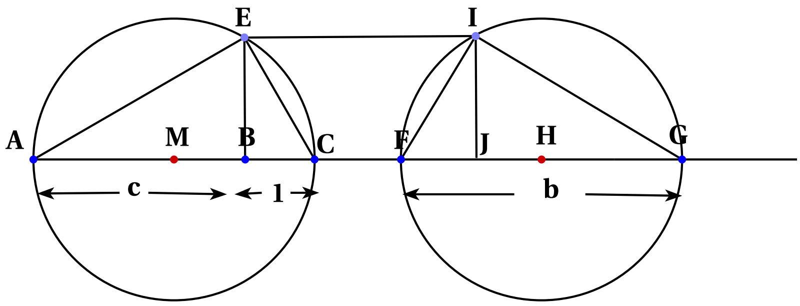
3. Se extiende el segmento $\overline{AC}$ indefinidamente, en este tomamos una longitud indefinida $\overline{CF}$ y $\overline{FG}$ donde $l(FG) = b$, luego bisecar al segmento $\overline{FG}$ donde su punto medio se llamara H.



4. Construimos una circunferencia con centro en H y radio $l(FH)$, luego se construye una perpendicular al segmento $\overline{BE}$ por el punto E y que intercepte la circunferencia de radio $l(FH)$y se nombra I al punto de intersección, luego se construye el triangulo $\triangle FGI$.



5. Se construye un segmento $\overline{IJ}$ que es paralelo el segmento $\overline{BE}$ y que sea perpendicular al segmento $\overline{FG}$.



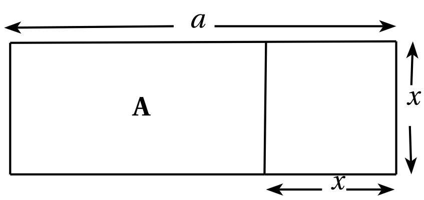
Observando esta figura de forma analítica podemos ver que $l(FG)$ es una raíz, también se tiene que si $c = x_1(b - x_1)$ se puede ver que

$$c = x_1(b - x_1) \longrightarrow x_1^2 - x_1 b + c = 0$$

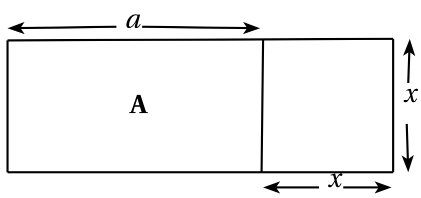
De la misma forma se comprueba que $x_2 = l(JG)$, también es solución de la ecuación, teniendo en cuenta que $l(AB) = L(JG)$.

•Método Griego de Aplicación de áreas para la Solución de Ecuaciones de la Forma $x^2 + bx + c$, donde b y $c \in \mathbb{N}$

Este método[7] tiene una representación geométrica la cual se expresa construyendo sobre un segmento de recta a, un rectángulo con altura x, de modo que el área del rectángulo exceda al cuadrado de lado x. En el primer caso tenemos $ax - x^2 = b^2$, con $a > 2b$ como se ilustra en la siguiente figura:



Y el segundo caso el cual es $ax - x^2 = b^2$, con los segmentos $a < 2b$ como ilustra la figura

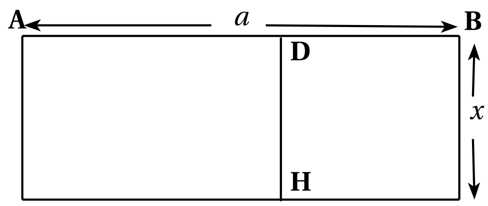


Con este método gráfico los griegos lograron darle solución a ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas, a continuación veremos como hacían:

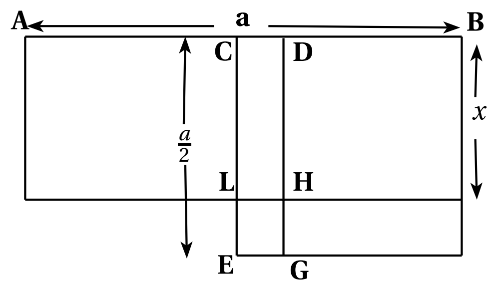
En nuestra notación actual, la ecuación $ax - x^2 - b^2$, los griegos la resolvían de la siguiente manera:

[7] Tomado de [10]

Determinamos un segmento de recta $\overline{AB}$, con una longitud de a ($\overline{AB} = a$), se construye un rectángulo $ABMK$ el cual tiene área de ax. Luego en el rectángulo construido $ABMK$, se fija un cuadrado $DBMH$ de lado x y de este modo obtenemos un nuevo rectángulo $ADHK$ el cual tiene área $ax - x^2$ el cual es igual al cuadrado de lado b, como podemos ver en la figura:



Ahora fijamos en el rectángulo inicial $ABMK$, un cuadrado de lado $\frac{a}{2}$ el cual llamamos $CBFE$ el cual tiene un área de $(\frac{a}{2})^2$, de donde se deduce que excede el área del $ax - x^2 = b^2$ del rectángulo $ADHK$, el cuadrado $LHGE$ de lado $\frac{a}{2} - x$.



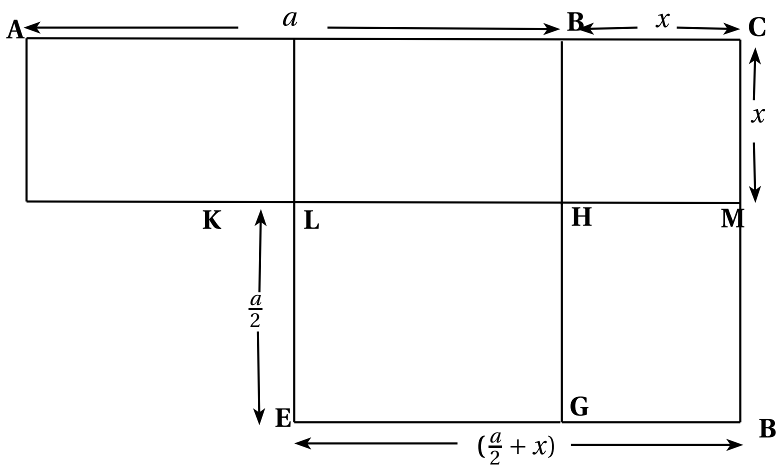
Es decir que:

$$(\frac{a}{2} - x)^2 = (\frac{a}{2})^2 - x^2$$

La cual nos permite solucionar $ax - x^2 = b^2$, de este modo:

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b^2}$$

Del mismo modo en nuestra notación actual, la ecuación $ax + x^2 = b^2$, los griegos la resolvían de la siguiente manera: Determinamos un segmento de recta $\overline{AB}$, con una longitud de a ($\overline{AB} = a$), se construye un rectángulo $ABMK$ el cual tiene área de ax. Luego se construye en el rectángulo $ABMK$, un rectángulo de lado $ax + x^2$, el cual excede al área del rectángulo $ABHK$ en un cuadrado que tiene área x^2, el cual es igual al cuadrado de lado b, es decir $ax + x^4 = b^2$, como podemos observar en la siguiente figura:



Si completamos la figura con el cuadrado $LHGE$ de lado $\frac{a}{2}$ y el lado rectángulo $HMFC$ que tiene lado X y $\frac{2}{a}$, entonces tenemos que el área del cuadrado $CDFE$ es

$$(\frac{a}{2})+x^2+ax$$

Donde el segmento CD es

$$\overline{CD}=\frac{a}{2}+x=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+x^2}$$

Es decir que

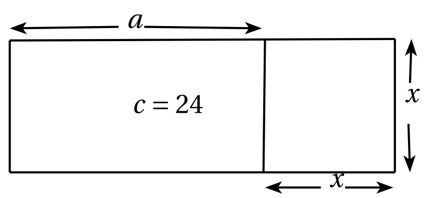
$$x+\frac{a}{2}=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+x^2}$$

Ejemplo: Solucionar la ecuación cuadrática

$$x^2+24=10x$$

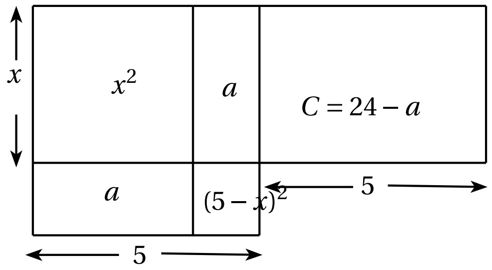
Solución:

1.Realizamos un cuadrado de lado x unidades acompañado de un rectángulo con 24 unidades de área, de modo que, sus lados midan 10 unidades y x unidades, de esta forma:



2. Ahora trazamos un segmento el cual divida en dos el área del rectángulo $10x$. Del cual obtenemos dos casos, el primero, donde $x \leq 5$ (la mitad del segmento de 10 unidades) y el segundo caso que $x > 5$.

3. Ahora analizaremos el caso para $x \leq 5$: para encontrar el valor de x , completamos un cuadrado de lado 5 el cual incluye al cuadrado de lado x, como podemos ver a continuación:



La figura esta formada por dos rectángulos de área a y por dos cuadrados, uno tiene área x^2 y el otro tiene área $(5-x)$. Si sumamos $(5-x)$ con el rectángulo de area $C = 24$, tenemos que $(5-x)+24$ es igual al cuadrado de lado 5 pues:

$$x^2 + a = 24 - a$$

$$x^2 + a + a = 24[1]$$

Pero el área del cuadrado de lado 5 es.

$$x^2 + a + a + (5-x)^2 = 5^2[2]$$

Si reemplazamos la ecuación [1] en la ecuación [2] obtenemos:

$$24 + (5-x)^2 = 5^2$$

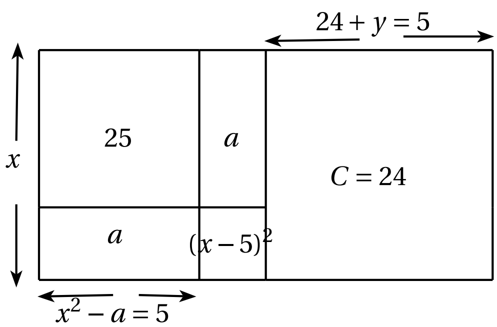
$$(5-x)^2 = 25 - 24$$

$$(5-x)^2 = 1$$

$$(5-x)(5-x) = 1$$

Luego $x = 4$.

Ahora analizaremos el caso cuando $x > 5$, podemos ver que el cuadrado de lado x se incluye en el cuadrado de lado 5, de esta manera:



El cuadrado de lado x lo forman dos rectángulos de área a y otros dos cuadrados, de áreas 25 y $(x-5)^2$, entonces

$$x^2 - a = 24 + a$$

$$x^2 - a - a = 24[1]$$

Luego el área del cuadrado de lado 5 es

$$x^2 - a - a + (x-5)^2 = 5^2 [2]$$

Si reemplazamos la ecuación [1] en la ecuación [2] obtenemos:

$$24 + (x-5)^2 = 5^2$$

$$(x-5)^2 = 25 - 24$$

$$(x-5)^2 = 1$$

$$(x-5)(x-5) = 1$$

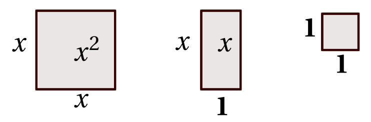
Luego $x = 6$.

3.2.5. La Cultura Árabe.

Los árabes a través de la historia hicieron un estudio de las matemáticas griegas y de los avances astronómicos de la cultura hindú, los cuales fueron considerados los herederos de las matemáticas Griegas. La matemática hindú parte principalmente de los avances de la cultura griega en las áreas de geometría y aritmética anteriormente mencionada en este capítulo.

Método geométrico para ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c$, donde b y $c \in \mathbb{N}$

El matemático de origen arábico Tabit Ben Qurra[8] manejó un método[9] para solucionar este tipo de ecuaciones a través de figuras geométricas como lo son cuadrados y rectángulos por medio de la formación de áreas y volúmenes. Planteó tres tipos el primero es un cuadrado de lado x y area x^2, el segundo es un rectángulo de lado x y lado 1 el cual equivale a tener un rectángulo de área $x \cdot 1 = x$ y el tercero un cuadrado de lado 1 el cual tiene como área 1 representando la unidad.



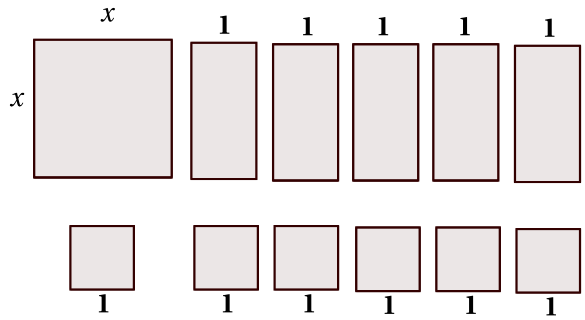
El siguiente ejemplo ilustrara el método.

Ejemplo: Solucionar por el método geométrico árabe, la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$.

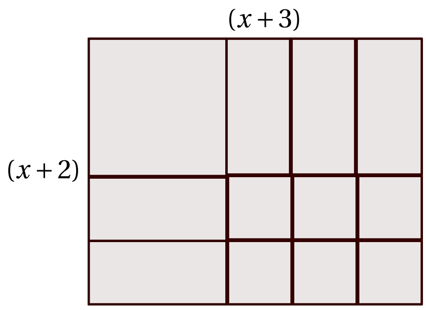
Para solucionar esta ecuación primero la representamos en términos de figuras geométricas anteriormente mencionadas donde x^2 esta representado por un cuadrado de lado x, $5x$ esta representado por rectángulos de lados x y 1, por ultimo el 6 estará representado por 6 cuadrados de lado 1.

[8] Thabit ibn Qurra ibn Marwan al–Sabi al-Harrani (8261 Harrán, actual Turquía - 901, Bagdad) . Destacó en su época como un gran astrónomo y matemático. Resulta sorprendente su gran conocimiento de idiomas, habilidad que le facilitó viajar muy a menudo por la mayoría de los países del Islam.

[9] Tomado de [11]



Luego se arma un rectángulo con las figuras con el fin de representar las sumas de las áreas de las figuras como un producto.



Las dimensiones del rectángulo formado son de (x + 2) y (x + 3), lo cual nos lleva a encontrar las raíces de la ecuación cuadrática, las cuales son $x = -2$ y $x = 3$.

Hoy en día estos rectángulos y cuadrados son conocidos como "*Bloques de Dienes"* y son utilizados hoy en día como material didáctico.

•**Método de la doble falsa posición para ecuaciones de la forma:** $ax + b = c$

La civilización árabe fue la que tuvo mayor desarrollo en este *método*[10] *de la falsa posición* en donde podemos resaltar la obra del matemático árabe de Muhammad Ibn Al banna Al−Marrakushi (1256-1321), pues describe este método como **regla de los platillos de la balanza".** Este método funciona de la siguiente manera:

1. Tenemos la ecuación : $ax + b = c$

2. Consideramos dos valores m, n cualquiera para la incógnita.

$$am + b = p$$
$$an + b = q$$

3. Calculamos los errores que corresponden a los valores dados

$$p - c = d_1$$

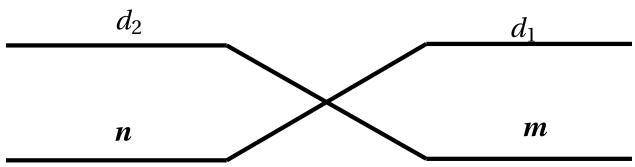
[10]Tomado de [10]

$$q - c = d_2$$

4. Se halla en función valores dados inicialmente y sus errores encontrados, el valor de la incógnita:

$$x = \frac{d_1 n - d_2 m}{d_1 - d_2}$$

5. Lo representamos en este diagrama

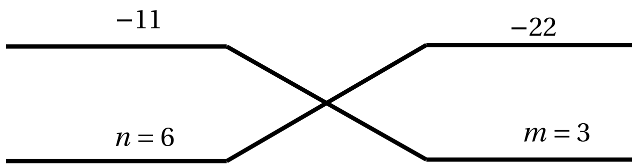


Ejemplo: Resolver por medio de regula falsi el segundo ejercicio $2x + \frac{5}{3}x = 33$

Si Tomemos como primer valor falso igual $m = 3$ y se reemplaza en la ecuación obteniendo como resultado $11 \neq 33$. Del cual se obtiene calculando el primer error $d_1 = 11 - 33 = -22$.

Luego se toma como segundo valor $n = 6$ y se reemplaza en la ecuación obteniendo como resultado $22 \neq 33$ y calculamos en segundo error $d_2 = 22 - 33 = -11$.

Posteriormente se aplica la regla de las escalas.

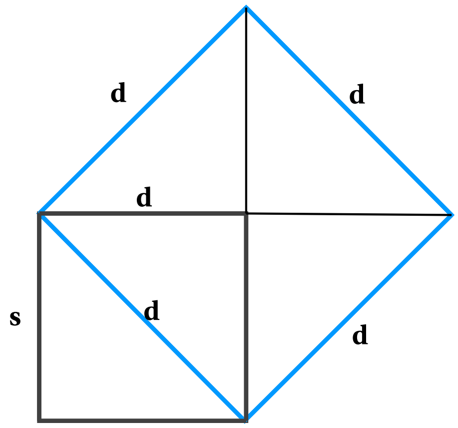


Reemplazamos los valores encontrados en la formula para encontrar x.

$$x = \frac{6(-22) - 3(-11)}{-22 - (-11)} = 9$$

3.3. Solución de ecuaciones cuadráticas por iteraciones

Dado un cuadrado de lado s, se quiere hallar la medida de la diagonal[11] d de dicho cuadrado.



Para ello se construye un nuevo cuadrado cuyo lado sea d, como se muestra en la figura, entonces

$$d^2 = 2s^2$$

$$d = \sqrt{2}s$$

Ahora llamamos $x = \sqrt{2}$, entonces $x^2 - 2 = 0$

Por otro lado, como $2 < \frac{9}{4}$, podemos obtener que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ conservando su desigualdad.
sabemos que $\frac{3}{2}.\frac{4}{3} = 2$, ahora si $(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$, entonces $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$;
partiendo de los resultados anteriores y por propiedad de la transitividad obtenemos, $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

A través del promedio podemos deducir la segunda aproximación a $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

La segunda aproximación a $\sqrt{2}$ es: $\left(\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}{2}\right) = \dfrac{17}{12}$.

Ahora, $2 < \dfrac{289}{144}$, así que $\sqrt{2} < \dfrac{17}{12}$,

y puesto que $\left(\dfrac{17}{12}\right)\cdot\left(\dfrac{24}{17}\right) = 2$, y, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ entonces $\dfrac{24}{17} < \sqrt{2}$;

y así $\dfrac{24}{17} < \sqrt{2} < \dfrac{17}{12}$

[11] Tomado de [15]

Luego la tercera aproximación a $\sqrt{2}$ es: $\left(\dfrac{\dfrac{24}{17}+\dfrac{17}{12}}{2}\right)=\dfrac{577}{408}\approx 1,414216...$

Notese que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{2}\\
x_2 &= \frac{17}{12} = \frac{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}}\right)}{2}\\
x_3 &= \frac{577}{408} = \frac{\left(\dfrac{17}{12}+\dfrac{2}{\dfrac{17}{12}}\right)}{2}\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= \frac{\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)}{2}
\end{aligned}
$$

es decir, $x_{n+1}=F(x_n)$, $n=1,2,3,...$

siendo

$$F(x)=\frac{\left(x+\dfrac{2}{x}\right)}{2}$$

Dado $k>0, x^2-k=0$, generaliza la ecuación $x^2-2=0$.

Luego si x_1 es la primera aproximación a $\sqrt{k}$, y como $\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}=k$,
y, $x_1\left(\dfrac{k}{x_1}\right)=k$.

Por lo tanto, si $\sqrt{k}<x_1$, entonces $\sqrt{k}>\dfrac{k}{x_1}$; y así

$$\frac{k}{x_1}<\sqrt{k}<x_1$$

Luego, la segunda aproximación a $\sqrt{k}$ es

$$x_2=\frac{x_1+\dfrac{k}{x_1}}{2}$$

$$\vdots$$

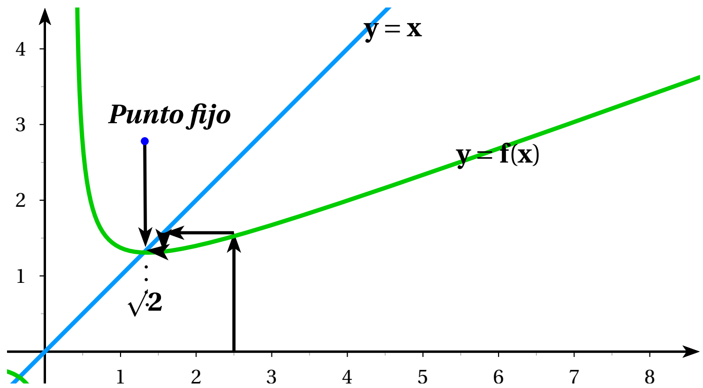
$$x_{n+1} = \frac{x_n + \dfrac{k}{x_n}}{2}$$

ó bien, $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

siendo $F(x) = \dfrac{x + \dfrac{k}{x}}{2}$ el iterador.

Extendiendo este procedimiento a la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$.

En primer lugar, se considera el caso especial $a \neq 0, b = 0$, y, $\dfrac{c}{a} < 0$,
es decir, $ax^2 + c = 0$, se puede colocar en la forma $x^2 - k = 0$, siendo $k = -\dfrac{c}{a} > 0$. Interpretación gráfica de la iteración



El iterador es

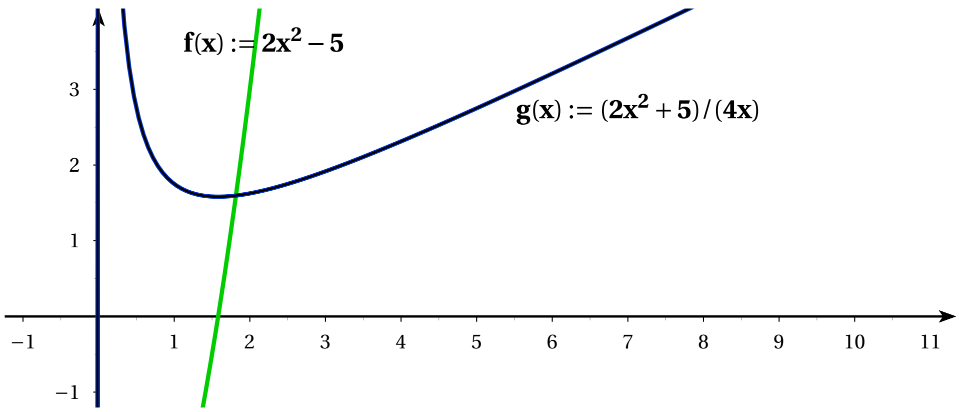
$$F(x) = \frac{\left[x + \dfrac{\left(-\dfrac{c}{a}\right)}{x}\right]}{2} = \frac{ax^2 - c}{2ax}$$

Nótese, que los puntos fijos del iterador F son las mismas soluciones de $ax^2 + c = 0$.

En efecto, $F(x) = x$, $\Longleftrightarrow$, $\dfrac{ax^2 - c}{2ax} = x$, $\Longleftrightarrow$, $ax^2 = -c$,
$\Longleftrightarrow$, $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$; lo cual tiene sentido, pues $-\dfrac{c}{a} > 0$

Por ejemplo, $2x^2 - 5 = 0$
Se elabora una tabla en excel como sigue:

x	$2x^2-5$	$\dfrac{2x^2+5}{4x}$
0.5	-4.5	2.75
0.75	-3.875	2.041
1	-3	1.75
1.25	-1.875	1.625
1.5	-0.5	1.583
1.75	1.125	1.589
2	3	1.625
2.25	5.125	1.68
2.5	7.5	1.75
2.75	10.125	1.829
3	13	1.916



Para la ecuación cuadratica $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$; $b\neq 0$, el proceso iterativo nos da

$$x_{n+1}=\frac{ax_n^2-c}{2ax_n+b};\quad n=1,2,3,\ldots$$

es decir, $x_{n+1}=G(x_n)$; $n=1,2,3,\ldots$

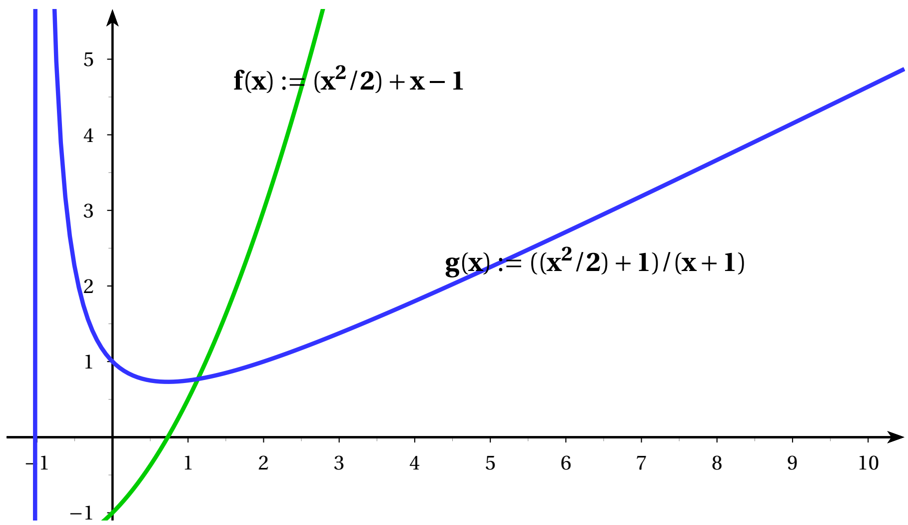
donde $G(x)=\dfrac{ax^2-c}{2ax+b}$ es el iterador.

Nuevamente, los puntos fijos de G son las mismas soluciones de $ax^2+bx+c=0$.

En efecto, $G(x)=x$, $\Longleftrightarrow$, $\dfrac{ax^2-c}{2ax+b}=x$, $\Longleftrightarrow$, $ax^2+bx+c=0$.

Por ejemplo, $\dfrac{x^2}{2}+x-1=0$

x	$\dfrac{x^2}{2}+x-1$	$\dfrac{\frac{x^2}{2}+1}{x+1}$
0	-1	1
0.5	-0.375	0.75
1	0.5	0.75
1.5	1.625	0.85
2	3	1
2.5	4.625	1.178
3	6.5	1.375
3.5	8.625	1.583
4	11	1.8



En el siguiente capítulo veremos algunos métodos enfocados en la didáctica para plantear y solucionar problemas de tipo algebraicos.

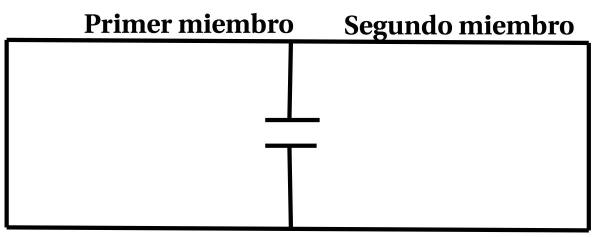
CAPÍTULO 4

ELEMENTOS METODOLÓGICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES.

En este capitulo encontrará algunos elementos metodológicos que contribuyen a comprender, plantear y resolver problemas de tipo algebraico en estudiantes de grados Octavo y Noveno, a través del planteamiento de situaciones problemas e implementando estrategias para darles solución.

4.1. El tablero de ecuaciones.

En la antigüedad, los griegos propusieron este método para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Consiste de un tablero[1] dividido con dos zonas equivalentes (los dos miembros de una ecuación) conectadas por el signo de igualdad y de una colección de fichas.



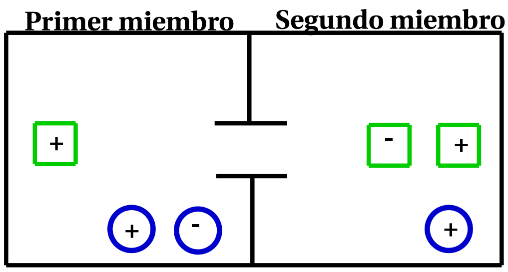
las fichas son de dos tipos: cuadradas y circulares. Cada ficha cuadrada representa la incógnita (x) y cada ficha circular representa la unidad (1). Además, cada tipo de fichas está decorado con los signos $-$ y $+$ en el anverso y reverso, respectivamente. y los valores son:

[1] Tomado de y [16]

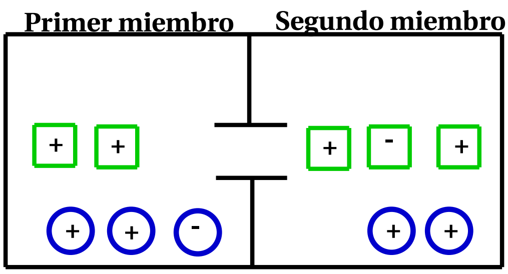
Ficha	Valor
$\boxed{+}$	**x**
$\boxed{-}$	**-x**
$\oplus$	**1**
$\ominus$	**-1**

Para resolver ecuaciones sencillas del tipo $ax+b=cx+d$ (con a,b,c y d números enteros) se procede como sigue:

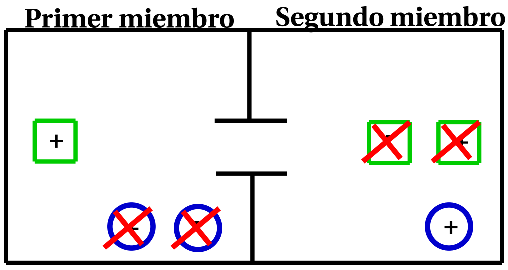
(i) Si a cada miembro de la ecuación se le añade el mismo numero de fichas de la misma forma y con el mismo signo, la ecuación no varía.



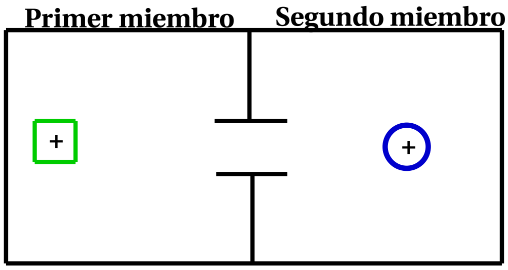
Adicionando fichas de igual signo tenemos



(ii) Dos fichas de la mima forma y con distinto signo, situadas en el mismo miembro de una ecuación se anulan.[Se pueden quitar del tablero]



Retirando las fichas marcadas tenemos



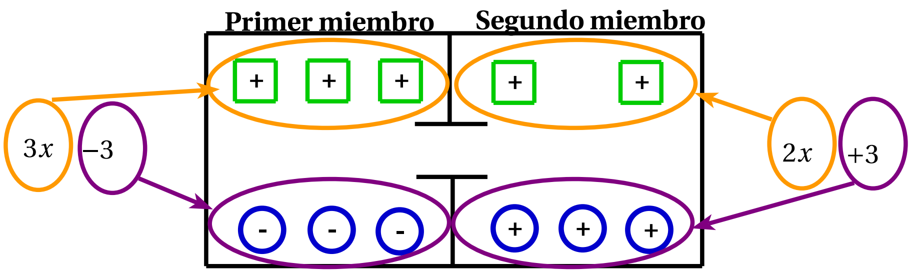
Ejemplo: Si un granjero tiene que sembrar dos terrenos de igual tamaño. En uno gasta tres paquetes de semillas y le queda faltando 3 metros por sembrar, y en el otro gasta dos paquetes de semillas y le queda para sembrar tres metros más. ¿ Cuantos metros puede sembrar con un paquete de semillas?

Sea x el número de metros que siembra con un paquete se semillas.

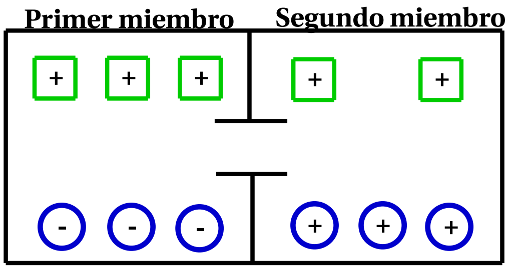
El área sembrada del primer terreno es $3x-3$ y el área del segundo terreno es $2x+3$.
Como los dos terrenos son de igual tamaño entonces:

$$3x-3=2x+3$$

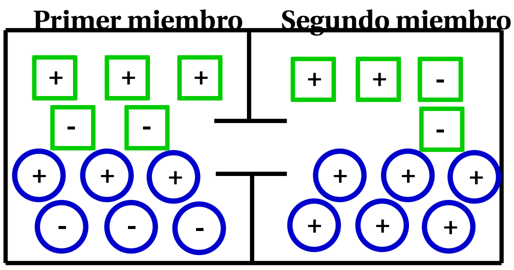
Ya escrita la ecuación se dará solución por el método de tablero de ecuaciones así:
En primer lugar, con la ayuda de las fichas escribimos la ecuación teniendo en cuenta que $3x-3$ es el primer miembro y que $2x+3$ es el segundo miembro tal como se indica en la figura siguiente.



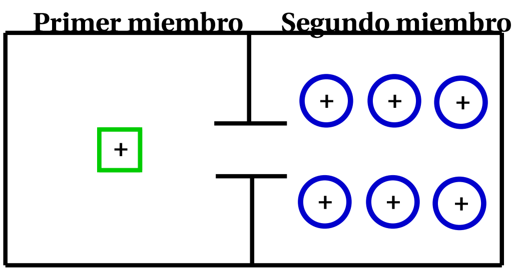
De modo que



A continuación, se aíslan las incógnitas en el primer miembro y los números en el segundo. Para ello, de acuerdo al paso (i) añadimos incógnitas negativas y tres unidades positivas a los dos miembros de la ecuación. así:



Por último, aplicando la regla (ii), obtenemos la siguiente disposición de fichas:



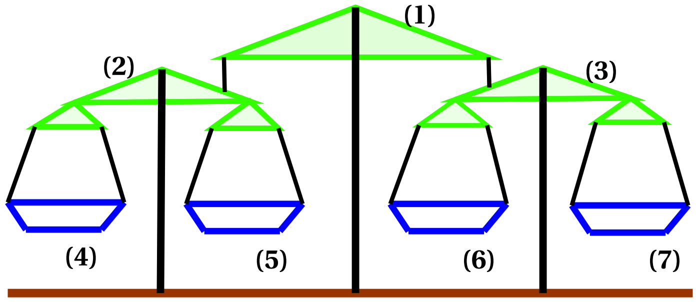
Con lo cual, se concluye que $x = 6$ metros.

El método de el tablero de ecuaciones puede resultar una herramienta útil para los estudiantes que incursionan en el campo de los problemas de ecuaciones algebraicas por su simpleza y utilidad a la hora de plantear y resolver este tipo de ecuaciones.

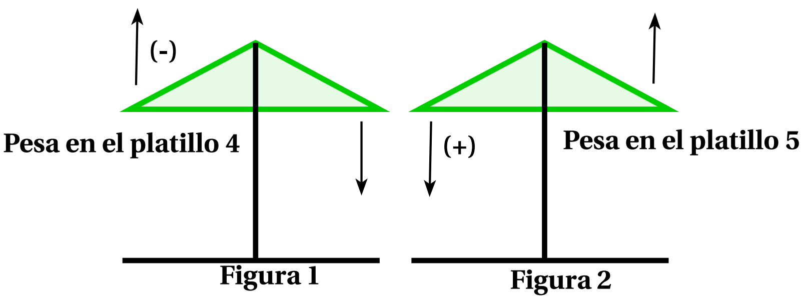
4.2. La balanza de Orlov.

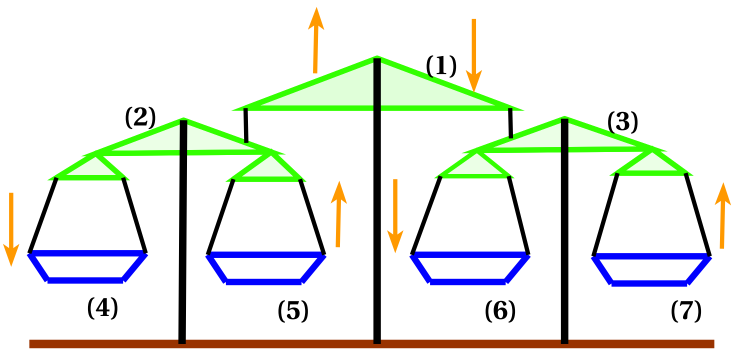
La balanza de orlov de cuatro platillos[2] es un material didáctico para la resolución de algunas ecuaciones de primer grado con una incógnita, más sofisticado que el tablero de ecuaciones debido a la complejidad de su diseño .

Dicha balanza consta de astil principal (1) y dos astiles secundarios (2) y (3), que están unidos formando un sistema. En los extremos de cada astil secundario hay un platillo (4), (5), (6) y (7).



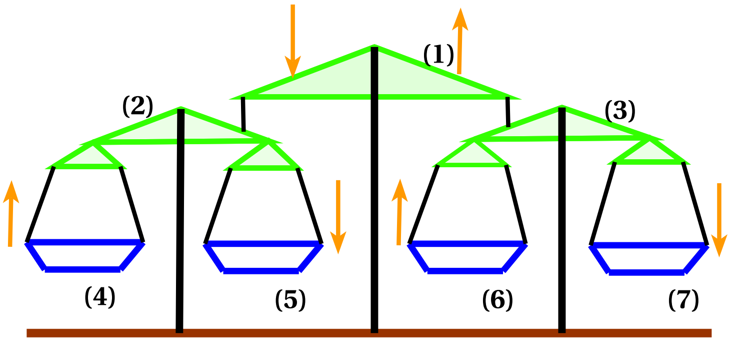
Si se pone una pesa en el platillo (4), el astil (1) se mueve en sentido de las flechas de la **figura 1**. Por ese motivo en la figura 1 esta marcado con el signo (−).





Si colocamos una pesa en el platillo (5), entonces el astil (1) se mueve en el sentido contrario de las flechas de la figura (2). por esta causa el platillo (5) tiene el signo (+).

[2]Tomado de [5] y [16]



Si ponemos una pesa en el platillo (6). el astil se desplaza en el sentido de las flechas de la figura 3. por ese motivo el platillo (6) tiene el signo (+).

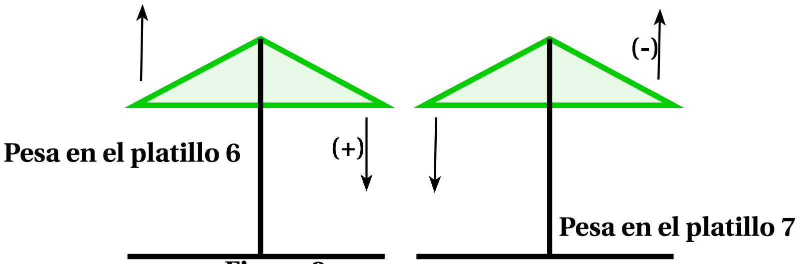
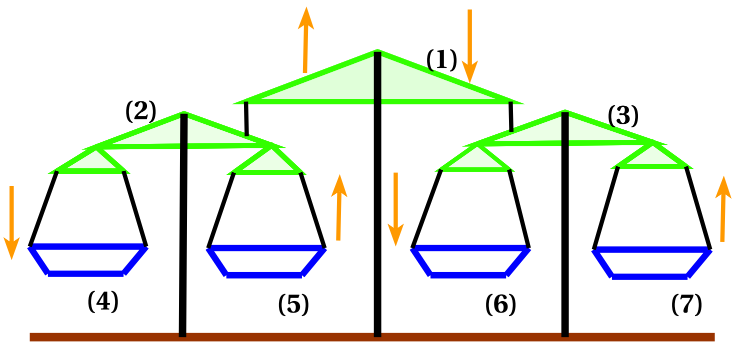
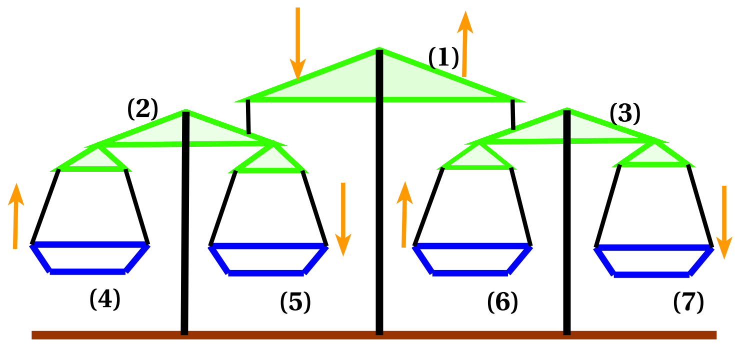


Figura 3 Figura 4



Si colocamos una pesa en el platillo (7), entonces el astil (1) se mueve en el sentido de las flechas de la figura 4. por esta causa el platillo (7) tiene el signo (−).



De este modo podemos concluir que:

1). los platillos de los extremos (4) y (7) son donde se ingresan las cantidades que representaran las unidades o variables con valor negativo.

2). los platillos del centro (5) y (6) son donde se ingresan las cantidades que representan las unidades o variables con valor positivo.

Para solucionar ecuaciones lineales por medio de este método hay que tener en cuenta dos reglas fundamentales:

(i) Se mantiene el equilibrio si se pasan las pesas del platillo positivo de un lado de la balanza al platillo negativo del otro lado.
Se mantiene el equilibrio si se pasan las pesas del platillo negativo de un lado dela balanza al platillo positivo del otro lado.

(ii) Se mantiene el equilibrio si se quita el mismo peso de dos platillos al mismo lado de la balanza.

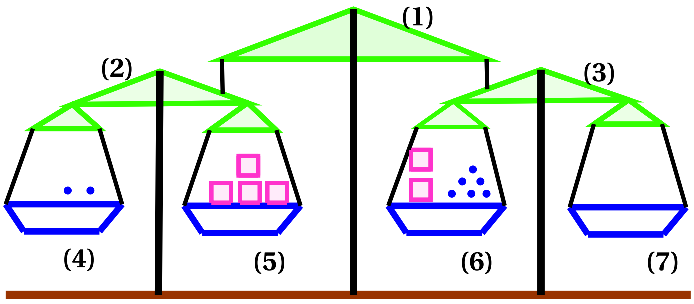
Además se utilizaran dos tipos de figuras las cuales son: Cuadrado fucsia para representar las variables y puntos azules para representar las las unidades

Variable	Unidad
□	•

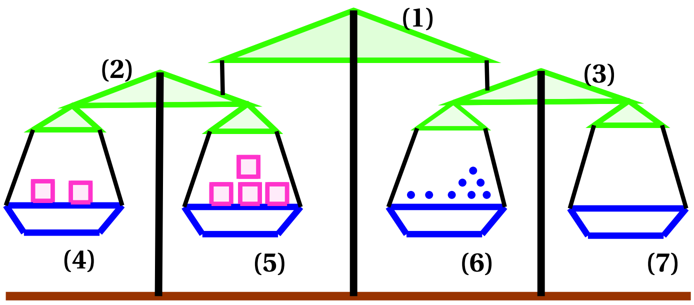
Ejemplo:

Resolver por medio de la balanza de Orlov la siguiente ecuación $4x - 2 = 2x + 6$:

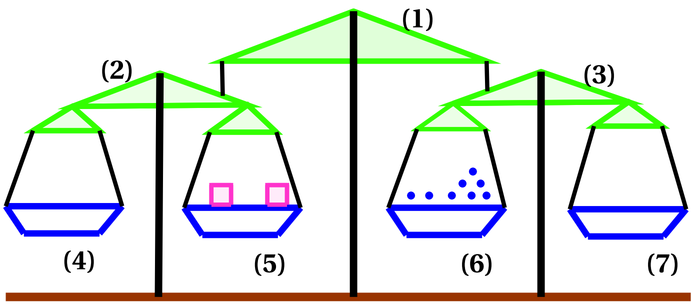
Para resolver esta ecuación primero se organizan las unidades y las variables en la balanza teniendo en cuenta que $4x - 2$ debe ir en el platillo (2) ya que esta a la izquierda de la igualdad y $2x + 6$ debe ir en el platillo (3) pues esta a la derecha de la igualdad, de acuerdo a su signo como se menciono anteriormente



En virtud de la regla **(i)** la cual dice que se mantiene el equilibrio si se pasan las pesas del platillo positivo de un lado de la balanza al platillo negativo del otro lado y se mantiene el equilibrio si se pasan las pesas del platillo negativo de un lado dela balanza al platillo positivo del otro lado, se puede afirmar:



Por otro lado, aplicando la regla **(ii)** la cualal dice que se mantiene el equilibrio si se quita el mismo peso de dos platillos al mismo lado de la balanza en el diagrama anterior se obtiene en el siguiente diagrama:



Traduciendo al simbolismo algebraico la información contenida en la figura anterior resulta que $2x = 8$ y realizando un despeje de variable se obtiene que $x = 4$.

La balanza de Orlov es una estrategia metodológica la cual contribuye a la compresión de los estudiantes de grados octavo y noveno a la hora de resolver ecuaciones lineales debido a su simpleza y diseño. A continuación veremos una estrategia para plantear y solucionar problemas de tipo algebraico.

4.3. Las tablas de análisis de Luis Puig.

La resolución de problemas de matemáticas recorre cuatro fases[3]: Comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y, finalmente, revisar y extender el trabajo realizado como se ha mencionado anteriormente en el capitulo 1.

Conociendo el lenguaje algebraico, él cual es una parte importante del proceso de resolución de ejercicios pues consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje, es decir, consiste en poner el problema en términos de ecuaciones.

El problema a resolver se transforma en resolver el ejercicio planteado. Una vez resuelta la ecuación falta volver al problema planteado para comprobar el resultado obtenido, revisar y extender el trabajo realizado.

A continuación veremos los pasos a seguir para poner un problema en ecuaciones, formularemos una regla y estudiaremos algunas clases de problemas que usualmente se resuelven poniéndolos en ecuaciones.

Problema a resolver:

1. Un grupo de jóvenes quiere ir a un concierto de rock. Para ello alquilan un autobús que los lleve desde el instituto. El autobús tiene capacidad para 55 personas y hay cuatro veces más plazas para ir sentado que plazas para ir de pie. ¿Cuál es el número de plazas para ir de pie?

En el problema se pregunta por el número de plazas que hay para ir de pie. Ésa es la incógnita del problema.

En el problema se dice además que la capacidad del autobús, es decir, el número total de plazas es 55. Esta cantidad es conocida, es un dato del problema.

También se habla del número de plazas sentado. Esta cantidad es desconocida, pero no es la incógnita del problema.

Las cantidades mencionadas en el problema son, por tanto, tres:

- ⧫ El número de plazas de pie.
- ⧫ El número de plazas sentado,
- ⧫ El número total de plazas.

Estas cantidades están relacionadas entre sí pues:

- ⧫ El número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado.
- ⧫ El número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas de pie.
- ⧫ el número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado.

Para poner un problema en ecuaciones hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico. Al traducir al lenguaje algebraico tenemos que tener

[3]Tomado de [14] y [17]

en cuenta que en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas. Así que tenemos que buscar cuáles son las cantidades de las que se habla en el enunciado del problema y qué se dice de ellas.

Lo que hemos hecho para poner en ecuaciones el problema ha sido lo siguiente:

En primer lugar, hemos analizado el enunciado del problema para averiguar cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas que aparecen en él. Al hacerlo hemos reescrito algunas frases para mostrar con claridad la relación entre cantidades. Así, el enunciado del problema ha quedado preparado para traducirlo al lenguaje algebraico, que sólo habla de cantidades.

La traducción la hemos hecho entonces en tres partes:

1). Identificar que cantidad desconocidas vamos a designar con una letra:

Número de plazas de pie $\rightarrow x$

2). Otras cantidades las hemos expresado a partir de ésta, usando las relaciones que hemos encontrado entre las cantidades.

♦ El número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas de pie.

Número de plazas sentado $\rightarrow 4x$

♦ El número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado.
Número total plazas $\rightarrow x+4x$

3). Hemos escrito una ecuación cuando hemos encontrado una cantidad representada de dos maneras.

Número total plazas $\rightarrow x+4x$

Número total plazas $\rightarrow 55$

La siguiente tabla ilustra cómo hemos hecho la traducción:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Número de plazas de pie	x
Número de plazas sentado es cuatro veces número de plazas de pie	$4x$
Total de plazas es plazas de pie más de plazas sentado	$x+4x$
Número total de plazas es 55	$x+4x=55$

En la primera columna de la tabla está reescrito el enunciado del problema, preparado para la traducción. Esa preparación es el resultado del análisis del enunciado. En la segunda columna están escritas las expresiones algebraicas correspondientes y la ecuación obtenida al traducir el problema.

Después de tener un análisis detallado del problema daremos solución a la ecuación obtenida:

$$x + 4x = 55$$

$$5x = 55$$

$$x = 11$$

El número de plazas para ir de pie son 11.

Es importante tanto como el planteamiento y la solución del problema, darle una buena conclusión a la pregunta a responder en el enunciado del problema.

Existen numerosas técnicas las cuales son usadas para resolver ecuaciones algebraicas, pues son aquellas que contienen variables. Todas las técnicas utilizadas tienen el mismo objetivo que es el de despejar o aislar una variable en un lado de la ecuación. Es muy importante tener en claro a la hora de incursionar en este campo los conceptos de valor negativo y positivo en una ecuación, así como las propiedades de la adición, multiplicación, el uso propiedades de la igualdad y sus inversas para así realizar un despeje exitoso.

En el siguiente capítulo se plantearán y resolverán problemas de tipo algebraico de acuerdo como se han venido planteando en los capítulos anteriores en el presente trabajo de grado.

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

La categoría problema se ha definido durante generaciones por múltiples autores. La dificultad a la hora de definir el término problema esta ligado a la relación que existe al intentar ser resuelto por un individuo. Es decir, mientras que para algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo al intentar resolver un problema, para otro puede ser un simple ejercicio rutinario. Así, tener un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática, sino que la palabra está ligada a la relación que existe entre el individuo y esa tarea[1].

5.1. Problemas sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita

A continuación resolveremos problemas de tipo algebraico de los autores mencionados anteriormente como "*Arithmetica Algebratica*" de Marco Aurel, "*Arithmetica Práctica, y Speculativa del Bachiller de Juan Perés de Moya*" , "*Elementos del Álgebra*" de Leonhard Euler, *"Théorie de la figure de la terre"* de Alexis Claude Clairaut entre otros.

Problema 1: Divide 19 en dos partes tales que sumando 11 a la primera y restando 5 de la segunda la suma sea el cuádruplo de la diferencia.

Solución: Planteamos el problema teniendo en cuenta las indicaciones o datos que de el mismo:

El enunciado habla de:

⧫ La primera parte de la división (desconocida), llamemosla a.
⧫ La segunda parte de la división (desconocida), llamemosla b.
⧫ Número dado 19 (Conocido).

De acuerdo con el enunciado del problema,

$$a + b = 19$$

[1] 1. Ballester, S. y otros. Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Cuba. 2001.

Y llevándola a términos de una sola variable, obtenemos:

$$b = 19 - a$$

La siguiente tabla ilustra la situación del problema:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Parte 1	a
Parte 2	$19 - a$
En la parte 1 le sumamos 11	$a + 11$
A la parte 2 le restamos 5	$(19 - a) - 5$
Al restarle 5 a la parte 2 se agranda 4 veces	$4[(19 - a) - 5]$
Condición del problema	$a + 11 = 4[(19 - a) - 5]$

La solución usual de este problema se da continuación.

Sea x la primera parte y $19 - x$ la segunda. entonces:

$$a + 11 = 4[(19 - a) - 5]$$

y así,

$$a + 11 = 4[(14 - a)]$$

$$5a = 45$$

Con lo cual

$$a = 9$$

Luego,

$$b = 19 - a = 19 - 9 = 10$$

En conclusión, $a = 9$ y $b = 10$.

[Esteiner de la Roche[2]. Lasrimetiqe (1520)]

Problema 2: Un mercader va a tres ferias. En la primera gana la mitad de las monedas que tiene y gasta 6 monedas. En la segunda gana la tercera parte de lo que trae y gasta cuatro monedas. En la tercera gana la cuarta parte de lo que trae y gasta dos monedas. Al final termina con 13 monedas más con las que inicio en la primera feria. ¿ Con cuántas monedas llegó a la primera feria?

Solución:

Sea x el número de monedas con el que inicio su recorrido por las ferias.
♦ Se sabe que luego de pasar por las tres ferias la suma del dinero gastado y ganado es igual a la cantidad inicial x mas 13 monedas (condición del problema).

[2] De Esteinder de la Roche sólo sabemos que nació en Lion y escribió *Lasrimetiqe*. En esta obra en matemático francés plagió buena parte del contenido de la *tritarty* de Nicolás chuquet

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Feria 1 gana la mitad de lo que tiene	$x+\frac{x}{2}$
Después en feria 1 gasta 6 monedas	$x+\frac{x}{2}-6=\frac{3x}{2}-6$
Luego en la feria 2 gana la tercera parte de lo que tiene	$\frac{3x}{2}-6+\frac{1}{3}(\frac{3x}{2}-2)$
En la feria 2 gasta 4 monedas	$\frac{3x}{2}-6+\frac{1}{3}(\frac{3x}{2}-2)-4=2x-12$
En la feria 3 gana la cuarta parte de lo que tenia	$2x-12+\frac{1}{4}(2x-12)$
Luego en la feria 3 gasta 2 monedas	$2x-12+\frac{1}{4}(2x-12)-2=\frac{5x}{2}-17$
Condicion del problema	$\frac{5x}{2}-17=x+13$

Por lo tanto:

$$\frac{5x}{2}-17=x+13$$

con que,

$$\frac{3x}{2}=30$$

Con la cual

$$x=20$$

[Marco Aurel. *Libro primero, de Arithmetica Algebratica (1552)*]

Problema 3: En una visita hay ciertas señoras con las cuales se juntan otras 12 señoras. De ahí se van la mitad de todas ellas y luego vuelven otras 2. Ahora hay entre todas 3 señoras más de las que primero habían. ¿ Cuántas señoras eran primero?

Solución:

Tenemos un número desconocido de señoras desconocidas, que notamos con a.

El cuadro ilustra la secuencia de los datos que da el problema.

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Cantidad inicial de señoras	a
Luego llegan 12 señoras más	$a+12$
Ahora se va la mitad de señoras de la visita	$a+12-\frac{a+12}{2}$
Después llegan 2 señoras más	$a+12-\frac{a+12}{2}+2$
Al final solo quedan 3 señoras más que las iniciales	$(a+12)-\frac{a+12}{2}+2=a+3$

Esto significa que

$$(a+12)-(\frac{a+12}{2})+2=a+3$$

$$\frac{a+12}{2} = a+1$$

y así,

$$a = 10$$

Es decir, que habían 10 señoras inicialmente.

[Marco Aurel. *Libro primero, de Arithmetica Algebratica (1552)*]

Problema 4: Dos jóvenes tienen diferente cantidad de dinero. El primer joven tiene cinco denarios mas que el otro, y multiplicando lo que tiene el primer joven por 3 y lo que tiene el segundo joven por 4, y sumando luego los dos resultados de las multiplicaciones se obtiene 69 denarios. ¿ Cuánto dinero tienen entre los dos jóvenes?

Solución:

El cuadro ilustra la secuencia de los datos que da el problema.

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Denarios del primer joven	a
El segundo joven tiene 5 denarios mas que el primero	$a+5$
Multiplicamos por 3 los denarios del primer joven	$3a$
Multiplicamos por 4 los denarios del segundo joven	$4(a+5)$
Al sumar sus denarios multiplicados por 3 y por 4 resulta 69	$3a+4(a+5)=69$

Supongamos que uno tiene a denarios y el otro $a+5$ denarios.
Entonces:

$$3a+4(a+5) = 69$$

$$3a+4a+20 = 69$$

$$7a+20 = 69$$

$$7a = 49$$

primer joven $a = 7$ denarios y el segundo joven $a+5 = 12$ denarios.

[Juan Pérez Moya. *Arithmetica practica, y speculativa (1562)*]

Problema 5: Tenemos tres números. El primero con $\frac{2}{3}$ del segundo y del tercero valen 100. El segundo con $\frac{3}{4}$ del primero y del tercero hacen 100. El tercero con $\frac{4}{5}$ del primero y el segundo hacen 100. Queremos saber cuanto es cada uno de ellos.

Solución:

Llamemos x el tercer número.

Entonces, los $\frac{4}{5}$ del primero y el segundo valen $100-x$. Por lo tanto la suma del primero y el segundo es:

$$\frac{4}{5}(100-x) = 125 - \frac{5x}{4}$$

Como el primer numero más $\frac{2}{3}$ del segundo y el tercero vale 100, entonces el primero más $\frac{2}{3}$ del segundo es:

$$100 - \frac{2x}{3}$$

Por lo tanto un tercio del segundo numero será:

$$(125 - \frac{5x}{4}) - (100 - \frac{2x}{3}) = 75 - \frac{7x}{12}$$

Luego el segundo número es:

$$3(125 - \frac{5x}{4}) = 75 - \frac{7x}{4}$$

Por ultimo, como la suma del primero y del segundo es $125 - \frac{5x}{4}$y el segundo es igual a $75 - \frac{7x}{4}$, el primero es :

$$(125 - \frac{5x}{4}) - 75 - \frac{7x}{4} = 50 - \frac{x}{2}$$

Entonces, teniendo en cuenta que el segundo mas $\frac{3}{4}$ del primero y el tercero hacen 100 resulta que:

$$75 - \frac{7x}{4} + \frac{3}{4}(50 - \frac{x}{2} + x) = 100$$

$$75 - \frac{7x}{4} + \frac{150}{4} + \frac{9x}{8} = 100$$

$$\frac{225}{2} - \frac{5x}{8} = 100$$

$$\frac{5x}{8} = \frac{25}{2} \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} x = 20(3^\circ número) \\ \\ 75 - \frac{7x}{4} = 40(2^\circ número) \\ \\ 50 + \frac{x}{2} = 60(1^\circ número) \end{array} \right.$$

[Pedro Núñez.*Libro de Álgebra en Arithmetica y geometría (1567)*]

Problema 6: Un móvil recorre 40m en linea recta a la derecha de un punto A y luego retrocede en la misma dirección a razon de 15m por segundo. Expresar a qué distancia se halla el punto A al cabo de 3 segundos.

Solución:
Sea x la distancia que esta el móvil del punto A y s los segundos trascurridos.
Se toma como positivo el sentido de izquierda a derecha y sentido negativo de izquierda a derecha.
La siguiente tabla ilustrara la situación del problema:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
El móvil recorre 40m a la derecha	$x = 40$
Retrocede 15m por cada segundo	$x = 40 - 15s$
Condicion del problema: $s = 3$	$x = 40 - 15(3)$

Por lo tanto:

$$x = 40 - 15(3)$$

con lo cual

$$x = -5$$

Como x es una distancia se toma positiva, entonces el móvil se halla a 5 metros del punto A.

[Algebra de Baldor. , *pagina 6 ejercicio 3.)*]

Problema 7:A las 6 a.m. el termómetro marca -4°. A las 9 a.m. ha subido 7° y desde esta hora hasta las 5 p.m. ha bajado 11°. Expresar la temperatura a las 5 p.m.

solución:
Sea x la temperatura final.

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Temperatura	x
6 a.m. temperatura $-4°$	-4
9 a.m. subio 7°	$-4+9$
Luego a las 5 p.m. bajo 11°	$(-4+9)-11$
Condición del problema	$x = (-4+9)-11$

Por lo tanto

$$x = (-4+9) - 11$$

Con lo cual $x = -8$, es la temperatura a las 5 p.m.

[Algebra de Baldor. , *pagina 6 ejercicio 8.)*]

A continuación dejaremos algunos problemas sin resolver para que el lector ponga en practica lo aprendido durante la lectura del presente trabajo:

Problema 1: Divide a 100 en tres partes tales que la primera sea $\frac{2}{3}$ de la segunda, y la segunda $\frac{1}{4}$ de la tercera.

[Esteiner de la Roche . Lasrimetiqe (1520)]

Problema 2: Divide 10 en dos partes tales que el doble de una menos 4 sea el triple de la otra.

[Esteiner de la Roche . Lasrimetiqe (1520)]

Problema 3: Un sastre contrata un obrero por 30 días y, porque lo ha de conocer, y conoce que el mozo es holgazán, le hace tal partido que todos los días que trabajase le dará tres sueldos y el día que no trabaje el mozo le dará al amo 20 denarios. el mozo trabaja y huelga que al cabo de 30 días, el amo no debe al mozo y el mozo no debe al amo.¿ Cuántos días trabajo y cuantos holgó el mozo?

[Marco Aurel. *Libro primero, de Arithmetica Algebratica (1552)*]

Problema 4: Encontrar 3 números que se excedan uno a otros en uno, o en lo que quisieres, y que la suma de todos monte 10.

[Marco Aurel. *Libro primero, de Arithmetica Algebratica (1552)*]

Problema 5: Un señor compró 60 fanegas de trigo y 30 de cebada por 90 denarios y la fanega de trigo costo diez por 100 más que la de cebada. ¿ Cuánto es el precio de la fanega de trigo y de cebada?

[Juan Perez De Moya. *Libro primero, de Arithmetica Práctica (1562)*]

Problema 6: A estos dos números 3 y 2 que están en proporción sesquiáltera, se añadieron a otros dos que están en proporción quíntupla e uno con el otro. Y después de ser acrecentados quedó el uno con el duplo del otro. Queremos saber qué números son los que se dieron [= añadieron] a los primeros 3 y 2, para que sepamos que valores tienen.

[Pedro Núñez.*Libro de Álgebra en Arithmetica y geometría (1567)*]

Problema 7: Partamos 60 en 6 partes que vayan procediendo de 3 diferencia. De manera que la segunda exceda a la primera en 3, y la tercera a la segunda en 3, así por el mismo exceso a las otras.

[Pedro Núñez.*Libro de Álgebra en Arithmetica y geometría (1567)*]

Problema 8: Busquemos dos números que sacando el numero 2 del segundo y dándole al primero quede el primer duplo del segundo, y sacando 2 del primero y dándolos al segundo, quede el segundo el triple del otro.

[Pedro Núñez.*Libro de Álgebra en Arithmetica y geometría (1567)*]

Problema 9: Tres personas A, B y C aportan conjuntamente un capital de 76 libras, de las cuales A aporta una cierta cantidad desconocida; B contribuye con un capital igual al de A, más 10 libras; y C con una cantidad igual a la suma de las aportaciones de A y B.¿ Cuáles son las contribuciones de A, B y C?

[Nicolás Saunderson.*Select parts of professor Saunderson Elements of Algebra for the use of students at the University (1756)*]

Problema 10: Un hombre dejo 11000 escudos para repartir entre su viuda, sus dos hijos y sus tres hijas. Él quería que la mujer recibiese el doble de la parte de cada hijo y que cada hijo recibiese el doble de la parte de cada hija.¿ Cuánto recibió cada uno?

[Leonhard Euler.*Élemens d´algébre (1795)*]

Problema 11: Encontrar una progresión aritmética cuyo primer termino sea 5, el último termino 10 y la suma 60.

Problema 12: Uno tiene dos cubiletes de plata con una sola tapa para los dos. El primer cubilete pesa 12 onzas y con la tapa pesa dos veces más que el otro. Pero sí se tapa el segundo cubilete, entonces este pesa tres veces más que el primero. ¿ Cuál es el peso del segundo cubilete y cual es el peso de la tapa?

[Leonhard Euler.*Élemens d´algébre (1795)*]

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Los métodos de solución de ecuaciones propuestas en el presente trabajo de grado facilita al estudiante comprender el planteamiento y la resolución de ecuaciones algebraicas, contribuyendo fortalecimiento al desarrollo de competencias matemáticas del pensamiento algebraico para estudiantes de grado 8º y 9º.

Al estimular al estudiante con problemas algebraicos contextualizados y mostrarle diferentes estrategias de solución, permite que adquieran habilidades, destrezas y desarrollo del pensamiento algebraico.

El presente trabajo de grado da a conocer estrategias metodológicas que contribuyen a la comprensión de como plantear y resolver problemas algebraicos que sirven de guía a los estudiantes y docentes, con ello genere una representación abstracta de la situación descrita por el problema.

Las metodologías planteadas para la solución de problemas algebraicos de grado 8º y 9º, se espera que sean trabajadas por los docentes en la clase de matemáticas con el fin de que presenten nuevas herramientas y diferentes formar de como comprender, plantear y resolver este tipo de problemas.

Se espera que este trabajo sea profundizado con estudios más avanzados y logren ampliar estas estrategias que son de mucha ayuda para los docentes, que se interesen por promover nuevas formas de presentar este tipo de conocimiento, donde se puede empezar mediante exposiciones, guías, talleres y diversas maneras las cuales crea conveniente el docente para que tenga buena acojina por parte de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] HERNAN SIFUENTES. *Breve historia de las ecuaciones.* Revista Números 2002.

[2] AUREL, MARCO . *Libro primero, de la Arithmetica Algrebratica*, Valencia: Ioan de Mey(1552).

[3] EULER, LEONHARD. *Elements d´Algébre*, Lione: Bruyset (1795).

[4] MACLAURIN, COLIN. *A Treatise of Algebra in tree parts* (the sixth editión),London: Wingrave et al, 1796.

[5] ORLOV, K. *Experimental verificatión of the use of the mathematical balance in seconday teaching*, Educational studies in mathematics 3, pp, (192- 205).

[6] PÉREZ DE MOYA, JUAN. *Arithmetica practica, y speculativa*, Salamanca: Mathias Gast, (1562).

[7] ACEVEDO DE MANRIQUE, MARYAM. *Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* ,Colombia : Universidad Nacional de Colombia, (1997).

[8] BAUTISTA BALLEN, MAURICIO *Álgebra y geometría I* Colombia : Santillana (2004).

[9] BARNETT A, RAYMON. *Álgebra y trigonométrica. México.* Mc graw−hill, (1994).

[10] LUQUE ARIAS, CARLOS; MORA MENDIETA, LYDA; TORRES DIAZ, JHOANA *Solución de ecuaciones: Algunas maneras pasadas de moda.* Colombia: Bogotá (2008).

[11] PAENZA, ADRIAN. *Matemáticas, estás ahí?* Colombia : Círculo de lectores (2008).

[12] MIGUEL HERRERA DE SALGADO. *Cambios en el aula con el uso de tecnologías y resolución de problemas algebraicos* Politécnico Nacional. México (2010).

[13] BALLESTER, S. y otros. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. Cuba. 2001.

[14] GEORGE POLYA . *Como plantear y resolver problemas.* Editoral Trillas. décimo quinta impresión 1989.

[15] ARTURO POLANIA. *Charla sobre Solución de ecuaciones cuadráticas por iteraciones.* Induccion a practica docente. USCO 2014.

[16] VICENTE MEAVILLA. *¿ Cuanto vale la x?.* Editorial: ALMUZARA 2013.

[17] LUIS PUIG. *Poner un problema en ecuaciones.* Articulo de personalizado.