APLICACIONES Y CURIOSIDADES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Por:
ANYI CAROLINA SÁNCHEZ RIVERA
Código 2007269298
DANIEL FERNANDO TOVAR VANEGAS
Código 2006262807

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA
2014

APLICACIONES Y CURIOSIDADES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Por:

ANYI CAROLINA SÁNCHEZ RIVERA

Código 2007269298

DANIEL FERNANDO TOVAR VANEGAS

Código 2006262807

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS

Asesor

MSc. MAURICIO PENAGOS

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

NEIVA - HUILA

2014

Nota de Aceptación

Presidente del jurado.

Jurado.

Jurado.

Neiva, Octubre de 2014

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Dios, por haber estado siempre a nuestro lado, para guardarnos y llevarnos por el camino del bien, por permitirnos estar aquí delante de estas personas tan importantes.

A nuestros padres, por ese amor que nos tienen, por el apoyo incondicional que nos brindan para poder ser alguien en la vida.

Al cuerpo docente de la Licenciatura en Matemáticas, en especial a nuestro asesor, porque gracias a sus enseñanzas y consejos hoy estamos aquí demostrando lo aprendido.

A todas aquellas personas que tuvieron un acercamiento con nosotros, gracias a ellos también hemos podido brindar todo lo que somos.

Índice general

PRESENTACIÓN

"Aplicaciones y curiosidades de los Núneros de Fibonacci" es el nombre del presente trabajo de grado, que está a cargo de los estudiantes ANYI CAROLINA SÁNCHEZ RIVERA y DANIEL FERNANDO TOVAR VANEGAS, elaborado como requisito para optar al título de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.

El contenido se fundamenta en una revisión bibliográfica organizada en torno al estudio de los Números de Fibonacci,su naturaleza,curiosidades sobre los mismos y su aplicación en otros campos de la ciencia. En la organización del material nos preocupamos por presentar algunas propiedades notables que la hacen un elemento de estudio inquietante no solo por las propiedades matemáticas que presentan sino porque dicha sucesión aparece en nuestro mundo natural, muy a menudo y probablemente sin que nos demos cuenta.

El trabajo consta de cuatro capítulos; en el primero se hace una reseña histórica de los Números de Fibonacci; en el capítulo II se hace un repaso de las nociones básicas sobre las sucesiones y las series. En el tercer capítulo se muestran algunas propiedades de los Números de Fibonacci que se obtienen apartir de funciones generadoras e inducción matemática; el último capítulo presentan ejemplos de aplicación de dichos números. Al final se agregan anexos relacionados con la didáctica.

JUSTIFICACIÓN

Dentro de la matemática clásica existen varios problemas de gran importancia que se hacen interesantes por su formulación sencila, solución y utilidad que surgen de la propia experiencia de lo que vemos, sentimos y tocamos en nuestro diario vivir.

Consideramos que fue interesante investigar sobre los números de Fibonacci ya que a partir de ellos pudimos profundizar en temas como las suesiones, las series, relaciones de recurrencia y la inducción matemática entre otros. Además nos ayudó a mostrar la gran importancia de los números de Fibonacci en la naturaleza.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Presentar una reseña histórica de la sucesión de Fibonacci, justificar algunos resultados curiosos en lo que tiene que ver con las propiedades, los términos que la conforman y exponer algunas aplicaciones importantes y la aparición de esta sucesión en fenómenos de la naturaleza.

Objetivos Específicos

- Hacer una descripción de la manera como Leonardo de Pisa, mas conocido como Fibonacci formula la sucesión de números que llava su nombre.
- Enunciar y justificar algunos resultados matemáticos, relacionados con los Números de Fibonacci.
- Presentar al lector aplicaciones curiosas de los Números de Fibonacci en áreas de la matemática como la geometría y la teoría de números y en otras áreas del conocimiento humano.

Capítulo 1

RESEÑA HISTÓRICA

Leonardo de Pisa (Pisa, Italia $1170 - 1250$) era hijo de Bonaccio, de ahí su nombre Fibonacci, que significa hijo de Bonaccio. De su padre aprendió todo lo referente a los números, ya que era director de una aduana en Argelia. Bonaccio, necesitaba que su hijo supiese de números, por lo que obligó a su hijo a estudiar aritmética posicional hindú. Dedicó su vida a recopilar todas las enseñanzas que recogió en sus numerosos viajes al mundo árabe, de quienes difundió sus principios de cálculo en el mundo occidental. A esta presentación agregó una explicación de procedimientos algebraicos y aplicaciones a numerosos problemas.

El aporte de Fibonacci a la matemática es muy grande, pero sin duda por lo que más se le conoce es por crear la suceción de números que lleva su nombre y que fueron un intento de describir el crecimiento de una población de conejos teniendo en cuenta que cada individuo tendría dos hijos a lo largo de su vida.

Los Números de Fibonacci constituyen una sucesión de enteros positivos notada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y definida explícitamente por la relación de recurrencia:

$$f_0 = 1, f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Esta sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$ ha dado lugar a muchas teorías, demostrándose que está presente en la naturaleza como por ejemplo en la organización de los panales de las abejas, e incluso en la descendencia de los zánganos, como también en el girasol.

1.1. La naturaleza de los números de Fibonacci

Sin duda, lo más interesante de esta sucesión matemática, es que aparece en una gran cantidad de fenómenos y elementos de la naturaleza.Por ejemplo, los números de Fibonacci son utilizados en los estudios sobre el azar, en clasificación de datos e incluso en los mecanismos para recuperar información en las computadoras, como también en los fractales. Una de las aplicaciones más conocida de esta serie es la que rige la estructura de los caparazones espirales de muchos caracoles, así como ciertas proporciones de la anatomía humana, animal y vegetal. Además, también se ha hallado la misma estrutura en manifestaciones de artes plásticas, la arquitectura y la poesía, por ejemplo en la obra de Virgilio, ”La Eneida”.

Las abejas también tienen relación con la sucesión de Fibonacci, por ejemplo en la colocación de las celdas de una colmena, en las que sólo hay una ruta posible para ir a la siguiente celda, dos hacia la siguiente y así sucesivamente según la serie. Además, los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente la misma distribución, no tienen padre, por lo que sólo hay una madre, dos abuelos... y así siguiendo la serie propuesta por Fibonacci. Esta fórmula también la encontramos en la distribución de las falanges de la mano. El número de pétalos en una flor es a menudo uno de los números de Fibonacci. Se sabe que el árbol genealógico del macho de la colmena es inusual debido a que sigue estrictamente una distribución de Fibonacci para poder ser contados sus miembros. La abeja hembra tiene 2 padres, un macho y una hembra debido a que todas las hembras son productoras cuando la reina se tiene que aparear con un macho, mientras que la abeja macho tiene justamente una madre, una hembra. En efecto, los machos no tienen padre, por lo que él (1), tiene una madre $(1, 1)$, dos abuelos, los padres de la reina, $(1, 1, 2)$, tres bisabuelos, porque el padre de la reina no tuvo padre, $(1, 1, 2, 3)$, cinco tatarabuelos $(1, 1, 2, 3, 5)$ y ocho tataratatarabuelos.

Figura 1.1: Las Espirales levógiras (Contario a las manecillas del reloj) y Dextrógiras (Sentido de las manecillas del reloj)

En las ciencias, los botánicos han reconocido los números Fibonacci en la disposición de las semillas en los girasoles, pues las semillas ubicadas en la parte central de las flores, tienen una organización en espiral: Hay dos grupos de espirales, gobernadas por dos funciones logarítmicas. Un grupo gira en sentido horario y otro en sentido antihorario. La cantidad de espirales logatítmicas en cada grupo sigue números de Fibonacci consecutivos.

Otro ejemplo de los números de Fibonacci, se observa en el número de pétalos de ciertas flores, algunas margaritas generalmente tienen $34, 55$ u 89 pétalos, los botones tienen 5 pétalos, los lirios tienen 3 pétalos; de la misma forma se pueden observar estos números en la disposición de las semillas de la cabeza de las flores y en los espirales que se forman en las bases de las piñas; finalmente se puede decir que en varias plantas, flores, se reconocen dichos números.

Hay plantas que se caracterizan por mostrar los números de Fibonacci, en cuanto al punto de crecimiento que está desarrollada. Supongamos que cuando la planta retoña nuevamente, debe crecer dos meses antes de ponerse suficientemente resistente para soportar las hojas. Si miramos más detenidamente una de aquellas plantas que tienen 3 pétalos, como la Hemerocallis y los lirios en el retoño, que se caracterizan por aparentar tener 6 pétalos, pero la realidad es que 3 son de hecho

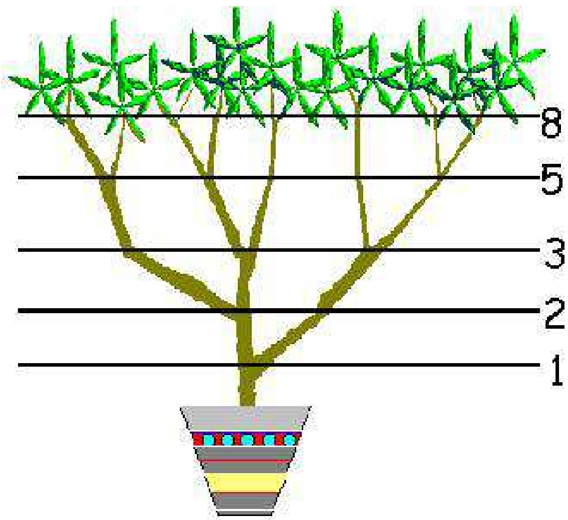


Figura 1.2: Ramificación de las plantas y los números de Fibonacci

sépalos y 3 son pétalos. Los sépalos forman la protección exterior de las flores cuando estas brotan. Se puede identificar 3 sépalos que protegen los brotes que son más externos, luego 3 pétalos naranja.

Figura 1.3: Hemerocallis: Flor con tres pétalos y tres sépalos

Existen plantas que también muestran los números de Fibonacci en la disposición de las hojas alrededor de sus tallos. Como enseña la filotaxia, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir la máxima de luz para cada una de ellas; por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior.Por lo tanto estas hojas están ubicadas de modo que las hojas que están arriba no oculten totalmente a las que están abajo, es decir, que estas hojas comparten luz y agua de lluvia; pero es importante resaltar que para lograr esto es necesario que las hojas se ordenen de tal manera que mantengan un cierto ángulo en relación al punto central, lo asombroso es que un sólo ángulo de rotación permite un diseño de organización óptimo, y el valor de este ángulo corresponde a una fracción decimal del número áureo: 0,618034. que se obtiene, como veremos mas adelante, a partir de los f_n.

Existen alrededor de 30,000 especies de abejas que en su gran mayoría viven de manera solitaria. Una de las especies que es más conocia es la Abeja melífera o abeja de miel, la cual se caracteriza por ser social y productora de los cultivos de frutas, nueces hortalizas y vegetales forrajeros, así como plantas más cultivadas que impiden la erosión del suelo, al fijarse en él e impedir que sea arrastrado a los océanos. Usualmente estas abejas sólo pueden sobrevivir como miembro de una comunidad, llamada colonia, nido o colmena. La comunidad de las abejas malíferas está compuesta por tres miembros diferentes: la reina (hembra), el zángano (macho), y las obreras (hembras estériles) estas están asociadas a diferentes funciones en la colonia; cada una posee sus propios instintos especiales respecto a las necesidades de la comunidad.

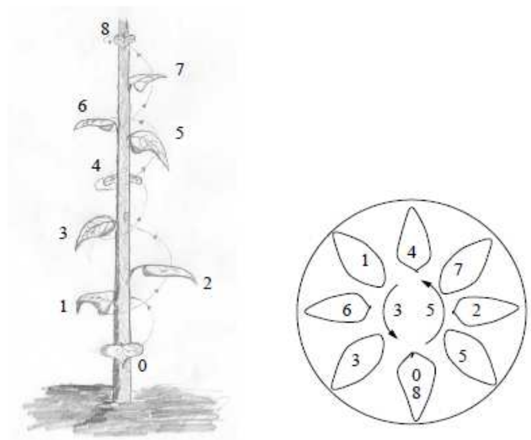


Figura 1.4: La distribución angular de las hojas de las plantas y la sucesión de Fibonacci

En la planta mostrada, la relación entre el número de vueltas y el número de hojas es $\frac{5}{8}$, que es una fracción de Fibonacci. (Al dividir cada término de la Sucesión de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ por el término que le sigue, obtenemos la sucesión de las fracciones de Fibonacci : 1/1; 1/2; 2/3; 3/5; 5/8...). Si observamos la planta desde arriba (vista Horizontal) y la posición de 2 hojas sucesivas en un círculo dividido en 8 partes (número de hojas), veremos que la segunda hoja ha salido a una distancia de 5/8 de la primera. Al graficar la posición de las otras hojas, que mantienen la misma distancia entre sí en el círculo, puede comprobarse que las plantas crecen según las relaciones indicadas por las fracciones de Fibonacci.

Los números de Fibonacci también pueden ser vistos en las colmenas debido a su forma tan particular. Si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se ubica a una abeja en una de ellas y se le consiente nutrir a la larva, teniendo en cuenta que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, tendremos sólo una ruta posible para la siguiente celdilla; dos rutas posibles para la segunda celdilla, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, trece hacia la sexta y así sucesivamente.

En la física, también se ve reflejada esta sucesión. Si se colocan dos láminas planas de vidrio en contacto y se proyectan rayos de luz sobre ellas que las atraviesen, algunos rayos, dependiendo del ángulo de incidencia, las atravesarán sin reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión. El rayo que no sufre reflexión tiene sólo una trayectoria posible de salida; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco... y asśucesivamente.

La sucesión de Fibonacci también ha servido de inspiración para varias obras literarias. Por ejemplo, en la famosa novela de Dan Brown, El código Da Vinci aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci que funcionan como una pista dejada por el conservador del museo del Louvre, Jacques Saunière. Esta misma sucesión la podemos encontrar en el álbum Lateralus de la banda estadounidense Tool, en la que los patrones de la batería de la canción Lateralus siguen el mismo patrón de la sucesión de Fibonacci del número 13 que es el número de pistas del disco.

1.2. El problema de los conejos

Vale la pena mencionar que el problema sobre la cría y reproducción de los conejos, ha sido objeto de muchos estudios que han permitido descubrir algunas propiedades que tienen los números de Fibonacci. Este problema fué planteado por Leonardo de Pisa, Fibonacci en el año 1202 y con él se quería dar explicación de cómo los conejos podrían reproducir en circuntancias ideales.

Proponía Leonardo: “ Imaginémos una pareja de conejos recién nacidos un macho y una hembra, encerrados en un patio donde puedan vivir y engendrar. Supongamos que los conejos empiezan a criar a los dos meses de vida y que nunca mueren, engendrando siempre un único par macho y hembra, y a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes nacerá un par más de conejos con las mismas características. Teniendo en cuenta y admitiendo que los conejos nunca mueren, podriamos preguntarnos al cabo de un año ¿Cuántos conejos habrá? ”

Para Resolver este problema Leonardo planteó lo siguiente: Indicando una pareja de conejos con el símbolo (M, H), M macho, H hembra, y una edad 0 =recién nacidos, 1 = un mes de edad,$*$ =por lo menos dos meses) podemos representar la evolución de la población de conejos en la siguiente tabla:

Mes	Población	N° de parejas de conejos
0-1	$(M,H)^0$	1
1-2	$(M,H)^1$	1
2-3	$(M,H)^*(M,H)^0$	2
3-4	$(M,H)^*(M,H)^1(M,H)^0$	3
4-5	$(M,H)^*(M,H)^*(M,H)^1(M,H)^0(M,H)^0$	5
5-6	$(M,H)^*(M,H)^*(M,H)^*(M,H)^1(M,H)^1$ $(M,H)^0(M,H)^0(M,H)^0$	8

Al mirar la tabla, observamos que esta cifra es fácil de encontrar para valores pequeños de n.

$\boxed{1.}$ Como al culminar el primer mes ellos aún no engendran, se tiene todavía solamente un par.

$\boxed{2.}$ Finalizando el segundo mes la hembra da cría a una nueva pareja, por lo cual ahora hay dos parejas de conejos.

$\boxed{3.}$ En el tercer mes, la hembra original ha producido un segundo par, completandose tres parejas de conejos.

$\boxed{4.}$ Al cuarto mes, la hembra original y la hembra de la primera nueva pareja da cría a otras dos parejas obteniéndose así cinco parejas en total.

$\boxed{5.}$ En el quinto mes, tres de las cinco parejas dan origen cada una a un par de conejos obteniéndose un total de ocho parejas.

Al continuar de esta manera se obtiene el número de parejas de conejos al cabo de un año, que pordemos representar mediante la sucesión:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.$$

Es decir 233 es el número de parejas producidas por la primera pareja en el patio, al término de un año.

De esta manera es fácil calcular el número de parejas de conejos para cualquier número de meses. Si denotamos por F_{n+2} el número de parejas de conejos durante el $(n+2)-$ésimo mes, este estará dado por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, ...$$

Donde conocemos que $F_1 = F_2 = 1$

Los términos de esta sucesión son los Números de Fibonacci.

La anterior puede verse como la definición usual de los F_n la cual es llamada una fórmula de recurrencia

Capítulo 2

CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo estudiaremos el concepto de sucesión y su convergencia hasta llegar a las sucesiones de Cauchy. De la misma manera se hará un breve repaso de las series y las pruebas de algunos teoremas sobre su convergencia.

2.1. Definiciones

En el lenguaje corriente las palabras *sucesión* y *serie* son sinónimas y se utilizan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. En matemática, estas palabras tienen un significado técnico especial. La palabra *sucesión* tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra *serie* se usa en un sentido completamente distinto, específicamente hace referencia a la suma de los términos de una sucesión

2.2. Sucesiones y propiedades de las sucesiones

Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n , entonces el conjunto ordenado

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del **primer término** a_1, del **segundo término** a_2 y en general del **n-ésimo término** a_n. Cada término a_n tiene un siguiente a_{n+1} y por tanto no hay un último término.

Equivalentemente una sucesión de números reales es una función del tipo:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales

Una sucesión se puede notar como: $(a_n)_{n=1}^{\propto}$, o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sucesión creciente y decreciente

Una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice:

- ***Creciente:*** Si $a_n \leq a_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$
- ***Decreciente:*** Si $a_n \geq a_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es únicamente creciente o decreciente, se le llama ***monótona*** . Si $a_n < a_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión se dice ***estrictamente creciente.*** por el contrario, si $a_n > a_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión se dice que es ***estrictamente decreciente.***

La convergencia sucesiones permite formalizar la idea de que los términos de una sucesión se van aproximando hacia un número real fijo llamado el límite de la sucesión.

Sucesión convergente

Una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\propto}$ de números reales converge a un punto $L \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid L - L_n \mid < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

En el caso que se pueda decir que $\{a_n\}$ converge a L, o que L es el límite de $\{a_n\}$ se puede escribir

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \text{ o también, } a_n \longrightarrow L \text{ cuando } n \longrightarrow \propto$$

Si $\{a_n\}$ no es convergente se dice que es divergente

Proposición 1. Toda sucesión convergente de números relaes es acotada.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucsión de números reales y supongamos que a_n es convergente. Entonces:

$$\mid a_n \mid = \mid a_n - L + L \mid \leq \mid a_n - L \mid + \mid L \mid < \varepsilon + \mid L \mid$$

Así $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ está acotada.

Proposición 2. Unicidad del límite

Si el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe en $\mathbb{R}$, este es único

Si suponemos que L_1 y L_2 son límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, distintos, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_1$ entonces $\mid L_1 - a_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$, y si $n \geq N_2$ entonces $\mid L_2 - a_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ por tanto si $n \geq N$ se tiene que:

$$\mid L_1 - L_2 \mid \leq \mid L_1 - a_n \mid + \mid a_n - L_2 \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Entonces:

$$L_1 = L_2$$

Definición. 1 *(Sucesión acotada) Una sucesión numérica* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se denomina acotada si el conjunto de los términos de la sucesión* $X = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ *es un subconjunto acotado de* $\mathbb{R}$*. Ello significa la existencia de un número real* $k > 0$ *tal que* $|x_n| < k$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice ***acotada*** si lo es superior e inferiormente.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si y sólo si $\exists h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \leqslant h. \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ***acotada superiormente*** si y sólo si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n \leqslant M; \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.3. Series, propiedades de las series y criterios de convergencia

Series infinitas

A partir de una sucesión de números reales, se puede formar una nueva sucesión sumando los términos sucesivamente. Así, si la sucesión dada tiene los términos: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

Se forma la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ así:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

y así sucesivamente, el término n-ésimo de esta nueva sucesión es:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales se llama serie infinita o simplemente serie, y se representa también por los símbolos siguientes:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

En la representación $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ se quiere recordar que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ se obtiene de la sucesión $\{a_n\}$ por adición de términos sucesivos.

Si existe un número real S tal que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Se dice que la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ es convergente y tiene suma S en cuyo caso se escribe :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S$$

Si $\{S_n\}$ diverge se dice que la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge y no tiene suma.

2.4. Algunas propiedades de las series

Las sumas finitas tienen las siguientes propiedades:

$\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, (Propiedad aditiva)

$\sum\limits_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, (Propiedad homogénea)

Estas propiedades también se tienen para series convergentes:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Adicionalmente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_{k-p}$$

2.4.1. Algunos criterios de convergencia de series

Criterio de la integral

Sea f una función continua, decreciente, y de valores positivos para toda $x \geq 1$. Entonces la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ...$$

es convergente si la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existe, y es divergente si la integral:

$$\int_1^b f(x)dx = \text{no existe}$$

Definición. 2 *Si* $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *entonces las series*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$$

y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ... + (-1)^{n} a_n + ...$$

se denominan ***series alternantes.***

2.4.2. Criterio de la razón

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie infinita para la cual cada $a_n \neq 0$:

i. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.

ii. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, la serie es divergente.

iii. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

2.4.3. Criterio de la raíz

Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie infinita para la cual cada $a_n \neq 0$

i. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.

ii. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$,o si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, entonces la serie divergente.

iii. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

2.4.4. Criterio de Leibniz

Suponga que se tiene la serie alternante $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ o $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n$ donde $a_n > o$ y $a_{n+1} < a_n$ $\forall \in \mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

Definición. 3 *La serie infinita* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Definición. 4 *Una serie que es convergente, pero no absolutamente convergente, se denomina* ***condicionalmente convergente****.*

Teorema. 1 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *es convergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es convergente.*

2.4.5. Series de potencias

Definición. 5 *Una serie de potencias en* $(x-a)$ *es una serie de la forma*

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

Teorema. 2 *Si la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ *es convergente para* $x = x_1 (x_1 \neq 0)$*, entonces es absolutamente convergente para todo* x *que cumpla* $|x| < |x_1|$.

Teorema. 3 *Si la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ *es divergente para* $x = x_2$*, entonces es divergente para todo* x *que cumpla* $|x| > |x_2|$.

Teorema. 4 *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ *una serie de potencias. Entonces sólo una de las siguientes condiciones se cumple:*

(i) *la serie converge sólo cuando* $x = 0$.

(ii) *la serie es absolutamente convergente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) *existe un número* $R > 0$ *tal que la serie es absolutamente convergente para todo* x *que cumpa* $|x| < R$ *y divergente para todo* x *que cumpla* $|x| > R$.

2.5. Relaciones de recurrencia

Una relación de recurrencia para una sucesión $a_0, a_1, a_3, ...$ es una fórmula que expresa cada término a_n, a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, en función de uno o más de los términos que le preceden. Los valores de los términos necesarios para empezar a calcular se llaman condiciones iniciales.

La formulación de relaciones de recurrencia es un arma poderosa y versátil en la resolución de problemas combinatorios, incluso varios problemas considerados difíciles a primera vista son resueltos facilmente por ésta técnica.

Se dice que una sucesión es una solución de la relación de recurrencia si su término general verifica dicha relación. En ésta técnica se parte del problema particular y se aborda el problema genérico.

Esta técnica es utilizada para la obtención de una ecuación para la función generadora,lo que se hace es multiplicar ambos lados de la ecuación de recurrencia por x^n que expresa el n-simo término de la sucesión en función de dos anteriores y sumamos la ecuación obtenida para todo $n \geq 2$, donde $n-k$ es el menor índice de términos de la sucesión que aparece al lado derecho de la ecuación de recurrencia. El paso siquiente consiste en resolver la ecuación resultante para encontrar un expresión para la función.

En ésta sección abordaremos el problema de los números de Fibonacci utilizando funciones generadoras para ello tomaremos como ilustración el cálculo del tamaño de una población de conejos. Supongamos que una pareja de conejos recién nacidos es colocada en un patio y no producen crías hasta que completen dos meses de edad. Una vez que llegan a ésta edad cada pareja de conejos produce exactamente otro par de conejos por mes. ¿Cuál sería la población de conejos en el patio, después de nueve meses, asumiendo que ninguno de los conejos muere ?

A continuación vamos a determinarla función generadora que representa la población de conejos.

La población de conejos satisface la relación

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Con las condiciones iniciales $f_0 = 0,\ f_1 = 1$

Explícitamente:

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f_1 + f_0 \\
f_3 &= f_2 + f_1 \\
f_4 &= f_3 + f_2 \\
&\vdots \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Multiplicando cada igualdad por el respectivo x^n obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x^2 f_2 &= x^2 f_1 + x^2 f_0 \\
x^3 f_3 &= x^3 f_2 + x^3 f_1 \\
x^4 f_4 &= x^4 f_3 + x^4 f_2 \\
&\vdots \\
x^n f_n &= x^n f_{n-1} + x^n f_{n-2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n f_{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n f_{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n = x \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} f_{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} f_{n-2}$$

Utilizando propiedades de las series

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1+1} f_{n-1+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-2+2} f_{n-2+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^n f_n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_n$$

(1)

Llamando $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_n$ entonces:

$f(x) = f_0 + x f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n$, así que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n = f(x) - f_0 - x f_1$$

Similarmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n f_n = f(x) - f_0$$

Reemplazando en (1) obtenemos:

$$f(x) - f_0 - x f_1 = x(f(x) - f_0) + x^2 f(x)$$
$$\vdots$$

Como sabemos que $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$

$$f(x) - x = x f(x) + x^2 f(x)$$
$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = x$$
$$f(x)(1 - x - x^2) = x$$
$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Esta expresión define la función generadora para la sucesión recurrente $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ \forall n \geq 2$

2.6. Cálculo de los números de Fibonacci a partir de sus índices

La fórmula conocida con el nombre de "Fórmula de Binet", en honor al matemático que la demostró por primera vez, y expresa a f_n en función de n es :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

La cuál puede ser obtenida a partir de la función generadora de la sucesión de Fibonacci. Aquí la probaremos por inducción:

$n = 0$: $\quad f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = 0$

Para $n = 1$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Para $n = 2$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \quad \text{por diferencia de cuadrados}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{2}.\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Ahora supongamos que la fórmula es válida para $n = k$, es decir, que:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

Y demostremos su validez para $n = k + 1$, es decir, que:

$$f_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right]$$

Utilizando la relación recurrente $f_{k+1} = f_{k+2} - f_k$, tenemos:

$$f_{k+1} = f_{k+2} - f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2} - 1 \right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2} - 1 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{2\sqrt{5}+6}{4} \right) - 1 \right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{-2\sqrt{5}+6}{4} \right) - 1 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4} \right) \right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{2-2\sqrt{5}}{4} \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right]$$

Capítulo 3

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

3.1. Suma de los n primeros números de Fibonacci

Una pregunta interesante para tener en cuenta es si existe una fórmula para la suma de los n primeros números de Fibonacci; es decir, preguntarnos por el valor de $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$

Llamamos $S_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ entonces a partir de la definición de recurrencia de los f_n, tenemos que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$ Asi que:

$$f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} n = 3: &\quad f_1 = f_3 - f_2 \\ n = 4: &\quad f_2 = f_4 - f_3 \\ n = 5: &\quad f_3 = f_5 - f_4 \\ &\quad \vdots \\ &\quad f_n = f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

Luego,

$$S_3 = f_1 + f_2 + f_3 = (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + (f_5 - f_4) = f_5 - f_2 = f_5 - 1$$

Y en general,

$$S_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$$

Donde hemos utilizado el hecho de que $f_2 = 1$.

Demostremos esta afirmación utilizando Inducción Matemática

En efecto:

$Si\ n = 1, f_1 = f_3 - f_2 = 2 - 1 = 1;$
$n = 2, f_2 = f_4 - f_3 = 3 - 2 = 1;$
$n = 3, f_3 = f_5 - f_4 = 5 - 3 = 2;$

Note ahora lo siguiente:

$f_2 = f_4 - f_3 = 3 - 2 = 1;$
$f_2 + f_1 = 2 = 3 - 1 = f_4 - 1;$
$f_3 + f_2 + f_1 = 4 = 5 - 1 = f_5 - 1;$

Supongamos que para $n = k$, se tiene que:

$$f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = f_{k+2} - 1$$

Y veamos que:

$$f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k + f_{k+1} = f_{k+3} - 1$$

también se cumple

Esto es cierto, pues

$$f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k + f_{k+1} = (f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k) + f_{k+1}$$
$$(f_{k+2} - 1) + f_{k+1} = (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1 = f_{k+3} - 1$$

3.2. Suma de los n primeros términos pares de los números de Fibonacci

Supongamos que deseamos calcular la suma de los n primeros términos pares de los números de Fibonacci, es decir , el valor de $S_{2n=}f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n}$

Si $S_{2n} = f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n}$; a partir de la recurrencia de los f_n tenemos que:

$$f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1} \quad \forall n \geq 1$$

A manera de comprobación

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad & f_2 = f_3 - f_1 = 2 - 1 = 1 \\
n = 2: \quad & f_4 = f_5 - f_3 = 5 - 2 = 3 \\
n = 3: \quad & f_6 = f_7 - f_5 = 11 - 3 = 8 \\
& \vdots \\
& f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1} \\
& S_6 = f_2 + f_4 + f_6 = (f_3 - f_1) + (f_5 - f_3) + (f_7 - f_5) \\
& \quad = f_7 - f_1 = f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1 \\
& \quad = f_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la identidad $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ y el hecho de que $f_1 = 1$.

Demostremos la proposición $p(n) = f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1 \ \ \forall n \geq 1$ haciendo inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

Si $n = 1$: $\quad f_2 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$

Si $n = 2$: $\quad f_2 + f_4 = 1 + 3 = 4 = f_5 - 1 = 5 - 1 = 4$

Supongamos que para $n = k$, se tiene:

$$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$$

Y veamos que $p(n)$ vale para $n = k + 1$, es decir:

$$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2k} + f_{2k+2} = f_{2k+3} - 1$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2k} + f_{2k+2} &= (f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2k}) + f_{2k+2} \\ &= (f_{2k+1} - 1) + f_{2k+2} \\ &= (f_{2k+2} + f_{2k+1}) - 1 \\ &= f_{2k+3} - 1 \end{aligned}$$

Luego $p(n)$ vale para todo $n \geq 1$

3.3. Suma de los n primeros términos impares de los números de Fibonacci

Ahora vamos a deducir la suma de los n primeros términos impares de los números de Fibonacci, es decir , el valor de:

$$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1}$$

Sea $S_n = f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1}$, entonces partir de la relación de recurrencia de los f_n, tenemos que:

$f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Luego:

$f_{2n-1} = f_{2n-1} - f_{2n-2}$ $\forall n \geq 1$

Así que:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & f_1 = f_2 - f_0 \\ n = 2: \quad & f_3 = f_4 - f_2 \\ n = 3: \quad & f_5 = f_6 - f_4 \\ & \vdots \\ & f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta los tres primeros términos impares de los números de Fibonacci, obtenemos:

$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} - f_0 = f_{2n}$, pues $f_0 = 0$

$S_3 = f_1 + f_3 + f_5 = (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + (f_5 - f_4) = f_5 - f_2 = f_5 - 1$

$S_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1, para\ n\ impar$

En general vamos a probar que:

$$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$$

Nuevamente utilizaremos Inducción sobre $n \in \mathbb{N}$

$n = 1: \qquad f_1 = f_2 = 1$

$n = 2: \quad f_1 + f_3 = 3 = f_4$

Ahora supongamos que para $n = k$ se tiene:

$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2k-1} = f_{2k}$ y veamos que:

$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k+2}$

En efecto:

$f_1+f_3+f_5+...+f_{2k-1}+f_{2k+1} = (f_1+f_3+f_5+...+f_{2k-1})+f_{2k+1} = f_{2k}+f_{2k+1} = f_{2k+2}$

Así que el resultado es verdadero para todo n

3.4. Suma de los cuadrados de los n primeros números de Fibonacci

Encontremos la suma de los cuadrados de los n primeros números de Fibonacci, es decir de

$$S_k^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2$$

Tenemos que:

$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_1f_1 + f_2f_2 + f_3f_3 + ... + f_nf_n$
$= f_1(f_3 - f_1) + f_2(f_3 - f_1) + f_3(f_4 - f_2) + ... + f_n(f_{n+1} - f_{n-1})$
$= (f_1f_3 - f_1f_1) + (f_2f_3 - f_2f_1) + (f_3f_4 - f_3f_2) + ... + (f_nf_{n+1} - f_nf_{n-1})$
$= f_1f_3 - f_1f_1 - f_1f_2 + (f_2f_3 - f_3f_2) + (f_3f_4 - f_4f_3) + ... + (f_{n-1}f_n - f_nf_{n-1}) + f_nf_{n+1}$
$= f_1f_3 - f_1f_1 - f_1f_2 + f_nf_{n+1}$
$= 2 - 1 - 1 + f_nf_{n+1}$
$= f_nf_{n+1}$

Ahora, al igual, probaremos la afirmación usando inducción matemática:

Veamos:

Si $n = 1$: $\quad f_1^2 = f_1f_1 = 1 = f_1f_2$

Si $n = 2$: $\quad f_1^2 + f_2^2 = f_1f_1 + f_2f_2 = f_1f_2 + f_2f_2 = f^2(f_1 + f_2) = f_2f_3$

Si $n = 3$: $\quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f_2f_3 + f_3f_3 = f_3(f_2 + f_3) = f_3f_4$

Supongamos que para $n = k$ se tiene:

$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_k^2 = f_k f_{k+1}$

Ahora veamos que:

$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$

Ciertamente, pues

$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2$
$= (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_k^2) + f_{k+1}^2$
$= f_k f_{k+1} + f_{k+1} f_{k+1}$
$= f_{k+1}(f_k + f_{k+1})$
$= f_{k+1} f_{k+2}$

Luego el resultado vale para todo n.

3.5. Propiedades de divisibilidad de los números de Fibonacci

Presentaremos algunos conceptos previos relacionados con la divisibilidad de los números enteros:

Definición: Sean $a \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, si existe un $c \in \mathbb{Z}$, tal que $ac = b$, decimos que: a divide b, o que es un factor de b, o que a es un divisor de b, o que b es un múltiplo de a, y se denota por $a|b$

Proposición 1

1. Si $a|b$, y $a|c$ entonces $a|b \pm c$, y $a|b.c$
2. Si $a|b$, y $b|c$
3. $1|a$, $-1|a$, $a|a$, $-a|a$, $\forall a \neq 0$
4. Si $a|b$, y $b|a$ entonces $a = b$, o $a = -b$
5. $(\forall a \neq 0)(a|0)$

6. Si $1|a$ entonces $a = 1$, o $a = -1$

7. Si $a|b$, y $a|c$ entonces $a|(bx + cy)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$

8. Si $a|b$ entonces $a| - b$

Proposición 2 Si $d|a$ entonces $|d| \leq |a|$, para $a \neq 0$

Definición: Sea $a \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, y $a \neq \pm 1$, se dice que a es un número primo si a tiene exáctamente cuatro divisores: ± 1, $\pm a$

Si $a = bc$, con $|b| > 1$, y $|c| > 1$, decimos que a es un número compuesto

Definición: Sean $a \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathbb{Z}$ (no ambos ceros). Un entero positivo c, se denomina el máximo común divisor de a y b, notado $c = (a, b), si$:

(i) $c|a, \wedge c|b$.

(ii) $\forall p \in \mathbb{Z}, \wedge p|b \Longrightarrow p|c$.

Teorema Sean $a \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathbb{Z}$ (no ambos ceros), entonces existe (a, b) y es único. Además $(a, b) = m_0 a + n_0 b$, para $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$

Proposición 4 Sean $a \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathbb{Z}$ (no ambos ceros)

1. Si $(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (|a|, |b|)$

2. $(a, 1) = 1$,para todo $a \neq 0$

3. $a \neq 0$, $(a, 0) = |a|$, $\wedge$ $(a, a) = |a|$

4. Si $a|b$, $y\, b|a$ entonces $a = b$, o $,a = -b$

5. $(\forall a \neq 0)(a|0)$

6. Si $1|a$ entonces $a = 1$, o , $a = -1$

7. Si $a|b$, y $a|c$ entonces $a|(bx + cy)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

8. Si $a|b$ entonces $a|-b$

Proposición 5: Dos números consecutivos de Fibonacci, son primos relativos.

Definición: Dos números enteros positivos a y b son primos relativos si $(a, b) = 1$

Para demostrar que dos números consecutivos de Fibonacci son primos relativos entre si, iniciaremos suponiendo el caso contrario, es decir , que su máximo común divisor es diferente de 1.

Para ello, supongamos que dos números consecutivos de Fibonacci f_{n+1} y f_{n+2} tienen un divisor en común $b > 1$, es decir, que $b \mid f_{n+1}$ y $b \mid f_{n+2}$ para todo n, de esto debe suceder que $b \mid (f_{n+2} - f_{n+1})$ y de esto $b \mid f_n$.

Esto implicaría que $b \mid f_1$, es decir, $b \mid 1$. Esto contradice el hecho que hemos supuesto que $b > 1$, con lo cual se concluye que $(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 6: Si n es divisible por m, entonces f_n es divisible por f_m

En otras palabras queremos probar que si $m \mid n$ entonces $f_m \mid f_n$. Si $m \mid n$ esto existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = km$

Si $n = km$ entonces $f_n = f_{km}$. Vamos a probar que $f_m \mid f_n$

Si $k = 1$ entonces $n = m$ y evidentemente $f_m \mid f_n$

Si $k = 2$ entonces $n = 2m$ y $f_n \mid f_{2m} = f_{m+1}^2 - f_{m-1}^2 = (f_m + f_{m-1})^2 - f_{m-1}^2 - f_m^2 + 2f_m f_{m-1} = f_m(f_m + 2f_{m-1})$, Esto significa que $f_m \mid f_{2m}$

Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$, si $n = km$ entonces $f_m \mid f_n$ y mostraremos que si $n = (k+1)m$ entonces $f_m \mid f_n$

Tenemos que $f_n = f_{(k+1)m} = f_{km+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}$, puesto que $f_m \mid f_m$ y $f_m \mid f_{mk}$, tenemos que $f_m \mid f_n$

un ejemplo, a manera de ilustración como $5 \mid 20$, $f_5|f_{20}$, como puede comprobarse en forma directa.

Capítulo 4

APLICACIONES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Las aplicaciones de los números de Fibonacci son también, al parecer , infinitas: se utilizan en generacion de números al azar, en la búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones complejas de las que se ignora la derivada, en trabajos de clasificación de datos, en recuperación de información y juegos didácticos entre otros. A continuación enunciaremos algunas de estas aplicaciones de manera general.

4.1. Los números de Fibonacci en las ciencias del conocimiento

4.1.1. En la física

Si se colocan dos láminas de vidrio planas en contacto y se hace que rayos luminosos las atraviesen, algunos(dependiendo del ángulo de incidencia) las atravesarán sin reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión . El rayo que no sufre reflexión tiene sólo una trayectotia posible de salida ; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco, y así sucesivamente. Tenemos aquí nuevamente la serie de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ Al ir creciendo el número de reflexiones, el número de trayectorias posibles va ajustándose a la sucesión de Fibonacci.

4.1.2. En la música

Se dice que la música es capaz de afectar el pensamiento, el carácter y los estados emocionales de las personas. Desde los pitagóricos formó parte de la matemática como una de las cuatro disciplinas del cuadrivium. Fue a partir del Barroco ($s.XVI$) cuando se empezó a distinguir entre la música como ciencia y la música como arte.

En toda canción, la melodía se basa en un conjunto de notas que llevan asociado un patrón. Existen múltiples maneras de combinarlas, para suerte de todos, pero ciertas sucesiones son tan buenas que pueden repetirse en muchas composiciones, resultando en fórmulas distintas pero que realmente tienen la misma base. Por decirlo de otra forma es como en las sucesiones de números; existen muchas pero algunas son tan interesantes y prácticas que pueden encontrarse en múltiples sitios, como la sucesión de Fibonacci.

Existen diferentes autores, como es el caso de Bérla Bartók ($1881-1945$), que han utilizado dicha sucesión como patrón para determinar ciertos elementos de sus composiciones. Dicho autor desarrolló una escala musical basándose en la sucesión que denominó escala fibonacci. Así mismo, en su obra Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta, un análisis de su fuga muestra la aparición de la serie y de la razón Áurea. Por otra parte, estudios realizados acerca de la Quinta Sinfonía de Beethoven ($1770 - 1827$) muestran como el tema principal incluido a lo largo de la obra, está separado por un número de compases que pertenece a la sucesión. También en varias sonatas para piano de Mozart ($1756 - 1791$) la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es la más cercana posible a la razón áurea.

Relaciones matemáticas de este estilo se han encontrado también en la coral situada al final de Kunst der Fuge de Johann Sebastián Bach $(1685-1750)$. En ella determinados motivos se repiten, por disminución a escalas menores, una y otra vez con distintas variaciones dentro de una región mayor de la pieza. Así, por ejemplo, varias voces repiten al doble de velocidad la melodía de la voz principal. Este es un ejemplo de pieza musical auto semejante, que, como veremos más adelante, es una característica de la geometría fractal, un concepto matemático de finales del siglo XX. Existen trabajos que analizan la manifestación de estas características fractales en otras obras, como en el tercer movimiento de la sonata numero 15 de Beethoven y el triángulo de Sierpinski, o la analogía entre el conjunto de Cantor y la primera Ecossaisen de Beethoven.

SONIDO: Un proceso de vibraciones físicas que se transmiten a través del algún medio material, como el aire.

FRECUENCIA (f) **DE UN SONIDO:** Es el número de vibraciones o ciclos por un segundo. Su unidad es el Hertz (Hz) en honor al físico alemán H. Hertz $(1857-1894)$. Por ejemplo, la nota musical do tiene frecuencia aproximadamente de 260 Hz.

Si dos sonidos uno tiene frecuencia f y el otro frecuencia $2f$, se dice que el primero es una octava más baja (ó grave) que el segundo. El intervalo de extremos f y $2f$ se denomina una octava.

Los pitagóricos descubrieron que al tener una cuerda tensa y pulsarla se producen sonidos y mientras más corta es la cuerda, la frecuencia es mayor. Experimentando con el monocordio, si se fija la cuerda de longitud L en su punto medio se verifica que $\dfrac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{1}} = \dfrac{1}{2}$ y la razón de frecuencias (intervalos musicales) es $\dfrac{f_{nueva}}{f_{vieja}} = \dfrac{2}{1}$ el inverso de $\dfrac{1}{2}$ lo que produce la octava nueva: $f_{nueva} = 2f_{vieja}$.

Los pitagóricos también encontraron la quinta: Si la cuerda original tiene longitud L y es la primera nota es DO, entonces $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ L produce la quinta nota de la escala, Sol, siendo $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)L}{\dfrac{L}{1}} = \dfrac{2}{3}$ y la razón de las frecuencias es : 3 : 2.

La escala musical diatónica contiene siete notas fundamentales: do, re, mi, fa, sol, la, si.

La escala pitagórica fue primordial hasta la creación de la afinación temperada de Bach. También Fibonacci estudió una serie de relaciones matemáticas con la música. Inicialmente observamos que el conjunto de notas musicales en una octava es una sucesión de finita de intervalos de extremos f_0 y $2f_0$:

$$f_0 < f_1 < f_2 < ... < f_{n-1} < f_n < 2f_0$$

Siendo f_0 una frecuencia patrón.

En la afinación temperada de J. Sebastián Bach, esa sucesión es una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}$

Y en esta escala la octava queda dividida en doce intervalos de razón igual (que pasan a ser doce intervalos de la misma longitud cuando se toman logarítmos de base 2). Con la misma se afinan el piano y el arpa.

Así, los primeros seis números de la sucesión de Fibonacci figuran en una octava de piano, la cual consiste en 13 teclas: 8 teclas blancas, 5 teclas negras (un grupo de 2 y 5).

Esas relaciones de la sucesión de Fibonacci con la música las ha trabajado fundamentalmente el compositor y director de orquesta venezolano Eduardo Marturet, quien, pasó a otro nivel del trabajo e incorporó una serie de elementos y conocimientos claves, como fué la aplicación de la Escala Matemática de Leonardo de Pisa dentro de la composición musical. La serie de Fibonacci, conocida como Serie de Oro, permite explicar el crecimiento proporcional de la forma según una sucesión numérica.

Desde la antiguedad, la Sucesión de Fibonacci ha sido utilizada por arquitectos y artistas para lograr efectos armoniosos, proporcionados y equilibrados formalmente.

4.2. En los juegos

4.2.1. En el de dominó

Si se toma un grupo de fichas de dominó, de tamaño 2x1, la cantidad de maneras de construir rectángulos de tamaño 2xn será, por supuesto, una sucesión de Fibonacci. Hay una sola forma de armar un rectángulo 2x1; dos de construir el de 2x2; tres de hacer el de 2x3, cinco para el 2x4; ocho para el 2x5, trece para el 2x6, y así sucesivamente.

4.2.2. El juego del Nim de Fibonacci

Resulta muy curioso y entretenido, el juego conocido como el Nim de Fibonacci, el cual reside en ir retirando fichas de una pila que inicialmente contiene n fichas. Los jugadores actúan por turno. En la jugada inicial no es permitido retirar la pila completa, aunque sí en las posteriores, siempre y cuando los jugadores respeten las siguientes reglas:

1 En cada turno es obligatorio retirar al menos una ficha.

2 Ningún jugador puede retirar más del doble de número de fichas que haya retirado su oponente en el turno anterior.

3 Gana la partida quien retire la última ficha.

Debemos resaltar como dato importante que si n es un número de Fibonacci, el segundo jugador puede ganar siempre; en cambio si no es así el ganador, si sigue la estrategia correcta, será el primero.

Ejemplo:

Una partida comienza con 20 fichas (que no es un número de fibonacci), ¿Cuántas debe retirar el primer jugador para asegurarse la victoria?

Primero que todo debemos mencionar que todo número natural se escribe mediante la suma de un número finito de términos de la sucesión de Fibonacci, cada uno de ellos es distinto a los demás e igualmente cada descomposición se caracterizará por no contener nunca números de fibonacci consecutivos.

Ahora si desscomponemos el número 20 en números de fibonacci, comenzando por el mayor posible el (13) sumando después el mayor posible (5) y después el siguiente (2).

Así que $20 = 13 + 5 + 2$ que es la descomposición buscada

El último número, el 2, es el número de fichas que debe retirar el primer jugador para ganar. El segundo queda imposibilitado por las reglas a tomar más del doble de 2, por consiguiente no puede reducir la pila (que ahora tiene 18 fichas) al número de fibonacci más cercano (13).

Supongamos que retire 4; la pila tendrá ahora 14 pilas, número que se expresa como $14 = 13 + 1$ en números de fibonacci, por lo que el primero retirará ahora una ficha, prosiguiendo con ésta estrategia, ganará.

Capítulo 5

ANEXOS

5.1. La geometría y los números de Fibonacci

5.1.1. Número de Oro

Se denomina número áureo o número de oro a $\varphi = 1,61803...$, La letra griega φ es la inicial del nombre del escultor griego, Fidias, que utilizó tal proposición en sus obras. Este número también fué estudiado por Fra Luca Pacioli $(1416 - 1492)$ quien seguramente conocía muy bien los elementos de la geometría de Euclides.

Este número se caracteriza por aparecer, de forma más o menos natural, en las proporciones de la antigua pirámide de Keops, en el partenón, en las catedrales de Colonia o Notre Dame, demostrándonos así que los arquitectos de distintas épocas lo habían empleado en sus diseños por ser generador de una excelente armonía. También se dice que fué utilizado en el célebre grabado de Leonardo Da Vinci sobre las proporciones humanas (la altura hasta el ombligo de una persona divide a la altura total según la sección áurea). A partr de ahí otras muchas zonas de nuestra anatomía fueron divididas según la razón áurea: la cara, los dedos, etc...

Además este número presenta propiedades curiosas como, por ejemplo, que es el cociente entre la diagonal y un lado del pentágono regular, lo que lo hace aparecer de forma mágica. Es el símbolo de los seguidores de pitágoras. La secta de los pitagóricos usaba como símbolo-contraseña la estrella de cinco puntas formada por las diagonales de un pentágono regular.

Los números de Fibonacci tienen varias propiedades, quizás una de las más curiosas es que el cociente entre dos números consecutivos de la sucesión, se aproxima al número de oro. Esto es : $\dfrac{F_{n+1}}{Fn}$ crece a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, cuando n crece indefinidamente.

5.2. La sucesión de Fibonacci y el triángulo de Pascal

Entre la ilustre parentela de los números de Fibonacci, se cuenta el triángulo de Pascal, sin duda uno de los objetos matemáticos más bellos, relacionado con el cálculo de probabilidades. El triángulo de Pascal es bien conocido, y se estudia en matemática elemental para introducir, por ejemplo, el binomio de Newton, o trabajar con números combinatorios.

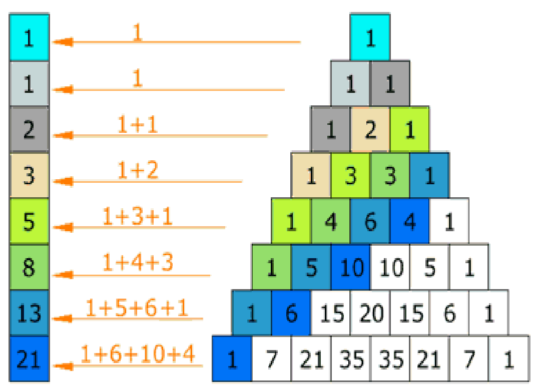


Figura 5.1: Números de Fibonacci en el Triángulo de Pascal

5.2.1. Matriz triangular

Si procedemos a sumar los números que aparecen en cada columna obtenemos de nuevo la sucesión de Fibonacci. Podemos expresar este resultado singular de la siguiente forma:

Esta es dividiendo el coeficiente central binomial por la mitad del número del renglón más uno, es decir por $n+1$.

Lo que no es tan conocido es su relación con la sucesión de Fibonacci. Representemos el triángulo de Pascal como una matriz triangular superior, que obtenemos situando los unos en la diagonal:

Dada la matriz A:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 6 & 4 & 1 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 10 & 10 & 5\cdots \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

5.3. Ternas pitagóricas usando números de Fibonacci

A una terna de números naturales (a, b, c) que satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ se le llama una terna pitagórica. Al correspondiente triángulo rectángulo de catetos con medidas a y b e hipotenusa con medida c se le llama triángulo pitagórico.

Considere cuatro números de fibonacci consecutivos cualesquiera, por ejemplo $3, 5, 8$, y 13. A partir de los números anteriores se puede construir una terna pitagórica. Para ello, se procede de la siguiente manera.

1 El producto de los dos números de los extremos, en este caso 3 y 13, genera un cateto.

2 El doble del producto de los dos números intermedios, en este caso 5 y 8, genera el otro cateto.

3 La hipotenusa se obtiene al sumar los cuadrados de los números intermedios.

Por lo tanto, $a = 3{,}13 = 39$, $b = 2{,}5{,}8 = 80$, y $c = 5^2 + 8^2 = 89$. Así , se obtiene la terna pitagórica $(39, 80, 89)$

En general, considere los cuatro números de fibonacci consecutivos: $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ y defina:

$$a = F_n.F_{n+3}, b = 2F_{n+1}.F_{n+2}, c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$$

Luego, se satisface que $a^2 + b^2 = c^2$. Para demostrarlo, basta recordar que:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1},\ y\ F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (F_n.F_{n+3})^2 + (2F_{n+1}.F_{n+2})^2 \\
&= [(F_{n+2} - F_{n+1})]^2 + (2F_{n+1}.F_{n+2})^2 \\
&= (F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2)^2 + 4.F_{n+1}^2.F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 - 2.F_{n+1}^2.F_{n+2}^2 + F_{n+1}^4 + 4.F_{n+1}^2.F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 + 2F_{n+1}^2.F_{n+2}^2 + F_{n+1}^4 \\
&= (F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2)^2 \\
&= c^2
\end{aligned}$$

Luego a, b, c son números pitagóricos.

5.3.1. Los Números de Fibonacci y la Geometría

Se denomina número áureo o número de oro a $\varphi = 1,61803...$, es la inicial del nombre del escultor griego, Fidias, que utilizó tal proporción en sus obras. Además este número también fué estudiado por Fra Luca Pacioli $(1416 - 1492)$ quien seguramente conocía muy bien los elementos de Geometría de Euclides.

Este número se caracteriza por aparecer, de forma más o menos natural, en las proporciones de la antigua pirámide de Keops, en el Partenón, en las catedrales de Colonia o Notre Dame, demostrándonos así que los arquitectos de distintas épocas lo habían empleado en sus diseños por ser generador de una excelente armonía. También se dijo que fué utilizado en el célebre grabado de Leonardo da Vinci sobre las proporciones humanas (la altura hasta el ombligo de una persona divide a la altura total según la sección áurea). A partir de ahí, otras muchas zonas de nuestra anatomía fueron divididas según la razón áurea: la cara, los dedos, etc.

Además, este número presenta propiedades curiosas como, por ejemplo, que es el cociente entre la diagonal y un lado del pentágono regular, lo que lo hace aparecer de forma mágica en el símbolo de los seguidores de Pitágoras. La secta de los pitagóricos usaba como símbolo - contraseña la estrella de cinco puntas formada por las diagonales de un pentágono regular. Los números de Fibonacci poseen varias propiedades, quizas una de las más curiosa, es que el cociente de dos números consecutivos de la serie se aproxima al número de oro. Esto es: $\frac{F_{n+1}}{{}_{F}n}$ tiende a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cuando n crece indefinidamente.

La sucesión formada por los cocientes (resultados de la división) de números de Fibonacci consecutivos converge, rápidamente, hacia el número áureo.

Cociente	Diferencia con valor absoluto con φ
$\frac{F_2}{F_1} = 1$	0,61803398...
$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$	0,38196601...
$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$	0,11803398...
$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,666...$	0,04863267...
$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$	0,01803398...
$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$	0,00696601...
$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,61538461..$	0,00264937...
$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,61904776..$	0,00101363...

5.4. Construcción geométrica del número de Oro

La proporción áurea surge cuando los griegos estudian la división de un segmento en dos partes de forma que la longitud total del segmento $a+b$, es a la parte mayor a, como la parte mayor es a la menor b, o sea:

Tenemos que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ y esto equivale a $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, si denominamos x al cociente $\frac{a}{b}$, obtenemos la ecuación $1 + \frac{1}{x} = x$, que tiene por soluciones $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

La primera solución es positiva y es precisamente el Número de Oro que hemos simbolizado con φ y la segunda solución es otro número irracional negativo, cuyo valor no es de interés especícifo al descartarse, por ser las longitudes siempre positivas. La solución $\varphi = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034...$ es la que se denomina número de oro.

El valor del recíproco de φ es también un número irracional y su valor es:

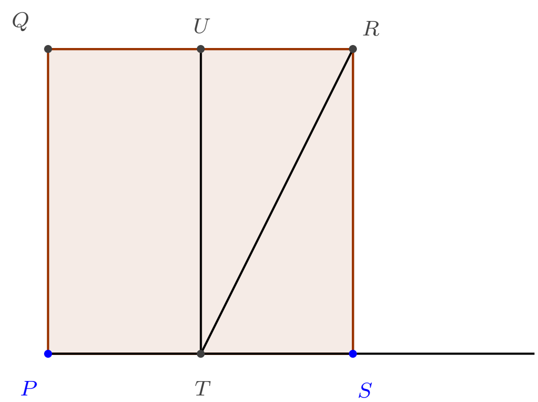
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

Lo que significa que $\frac{1}{\varphi}$ corresponde a la parte decimal de φ

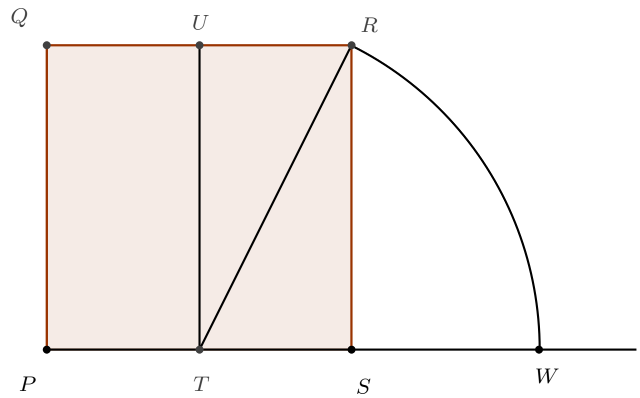
5.4.1. Construcción del rectángulo áureo

Vamos a construir un rectángulo de tal forma que la relación entre el largo y el ancho sea el número de oro.

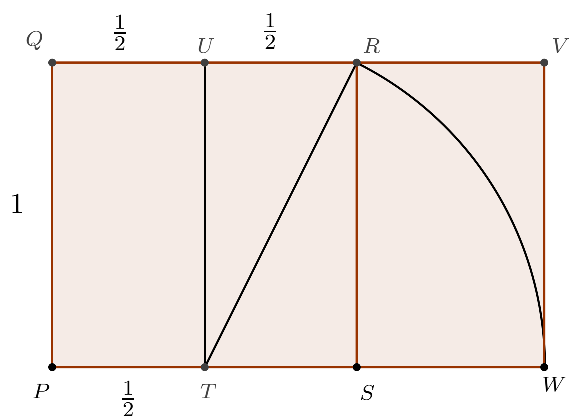
Inicialmente dibujamos un cuadrado $PQRS$ y marcamos los puntos medios T y U de los segmentos PS y QR respectivamente y unimos los puntos T y U. Ahora unimos T con R y prolongamos PS.

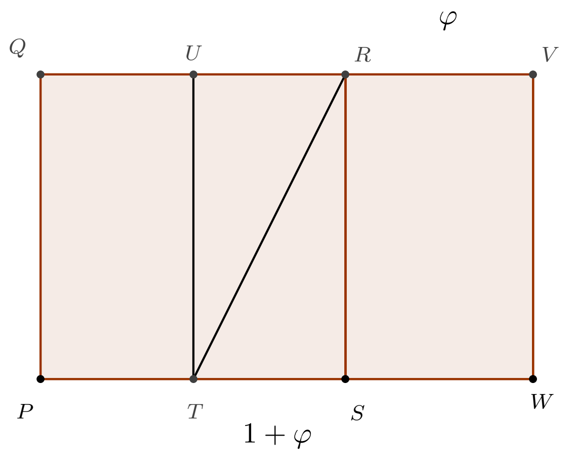


Luego, la medida de la diagonal TR la trasladamos sobre la prolongación del segmento PS a partir del punto T, de tal forma que nos quede el segmento TW congruente con TR



De la misma forma construimos un rectángulo que tenga como largo el segmento PW y como ancho el lado del cuadrado inicial, o sea PQ. De esta forma obtenemos un nuevo rectángulo $PQVW$, llamado rectángulo áureo o rectángulo de oro.





Cálculos directos, muestran que $\overline{TR} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, luego el largo del rectángulo es:

$$\frac{1}{2} + \overline{TR} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

Capítulo 6

BIBLIOGRAFÍA

6.1. Bibliografía Básica

- Apostol Tom M. *Cálculo*, Editorial Reverte, Volumen 1, segunda edición, 1978 Barcelona.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial, Madrid, 1986
- MATILA, C.G *Estética de las proporciones de la naturaleza y en las artes*, poseidon, Barcelona 1977.
- Silva, Augusto. *Teoría de números*, notas de clase, universidad surcolombiana, Neiva. 2006.

6.2. Webgrafía

- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci
- http://math.holycross.edu/ davids/fibonacci/fibonacci.html
- http://ulcar.uml.edu/ iag/CS/Fibonacci.html
- http://vviana.es/doc/LaSorprendente