# *Universidad Surcolombiana*

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Geometría Espacial

Faiber Alonso Narváez Puentes
Andrey Casas Polanco

Neiva, Huila
2013

*Universidad Surcolombiana*

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Geometría Espacial

*Trabajo presentado como requisito de grado*
*para optar al título de Licenciado en Matemáticas*


Faiber Alonso Narváez Puentes
*2004101735*
Andrey Casas Polanco
*2001101463*


Asesor:
Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2013

# Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Mag. Ricardo Cedeño Tovar

Asesor

Mag. Ricardo Cedeño Tovar

Segundo Lector

Mag. Osmin O. Ferrer Villar

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Diciembre de 2013

# AGRADECIMIENTOS

Agradecemos de todo corazón a Dios y a nuestros padres porque a través de ellos se nos concedió la vida en este mundo, así como a nuestros abuelos, tíos, hermanos, suegros, esposa e hijos y a todas las personas que directa o indirectamente han tenido a bien ayudarnos en forma moral y económica para nuestra formación como seres humanos y profesionales, en respuesta a esto, entregamos nuestro trabajo de grado "***Geometría espacial***" a todos aquellos lectores que están a la vanguardia de la educación para mejorar la calidad de nuestra región Surcolombiana.

A nuestro asesor "***Ricardo Cedeño Tovar***" a quien jamás encontrarémos la forma de agradecerle el que nos haya brindado su mano en las derrotas y logros de nuestras vidas, haciendo de este triunfo más suyo que nuestro por la forma en la que guio nuestro proceso formativo con amor y energía, sabemos que jamás tendremos la forma de agradecer su constante apoyo y confianza; sólo esperamos que comprendan que nuestros ideales, esfuerzos y logros han sido también suyos e inspirados en ustedes queridos lectores.

Agradecemos a todo el cuerpo docente del Programa de Licenciatura en Matemáticas porque siempre estuvieron con nosotros inculcándonos conocimientos, ética, profesionalismo y sobre todo por tener la paciencia necesaria para que pudiéramos lograr esta meta.

# ÍNDICE GENERAL

**Introducción** **11**

**Presentación** **13**

**Justificación** **15**

**Objetivos** **17**

**Marco Teórico** **19**

**1. Conceptos Preliminares** **29**

1.1. Espacio Tridimensional . . . . . 29
1.2. Lugar Geométrico . . . . . 31
1.3. Método de Exhaución . . . . . 32
1.4. Figuras en el Espacio . . . . . 33
1.5. Rectas y Planos en el Espacio . . . . . 34
1.6. Cuerpos Geométricos . . . . . 37
1.6.1. Clasificación de Cuerpos Geométricos . . . . . 38
1.6.2. Elementos de un Poliedro . . . . . 38
1.7. Teoría de grafos . . . . . 42
1.7.1. Circuitos . . . . . 43
1.7.2. Circuitos de Euler . . . . . 45
1.7.3. Relación de Euler . . . . . 46
1.8. Problemas Propuestos . . . . . 47

**2. PRISMA** **49**

2.1. Introducción . . . . . 49
2.2. Hechos Históricos . . . . . 49
2.3. Los Empaques Secundarios . . . . . 50
2.4. Concepto Geométrico del Prisma . . . . . 50
2.5. Elementos de un Prisma . . . . . 52
2.6. Clasificación de los Prismas . . . . . 54
2.6.1. Clasificación de acuerdo a la Base: . . . . . 54
2.6.2. Clasificación de acuerdo a su Inclinación: . . . . . 54
2.7. Casos Especiales de Prismas Cuadrangulares . . . . . 55

2.7.1. Paralelepípedo . . . 55
2.7.2. Cubo . . . 55
2.8. Desarrollo del Prisma . . . 56
2.9. Cálculo del área y volumen de un Prisma . . . 56
2.9.1. Principio de Cavalieri . . . 58
2.10. Cálculo de la Diagonal de un Paralelepípedo . . . 59
2.11. Laboratorio: Familiarización con las fórmulas del prisma . . . 60
2.11.1. Aplicación de las fórmulas del prisma . . . 60
2.12. Problemas Propuestos . . . 61

**3. PIRÁMIDE** **65**
3.1. Introducción . . . 65
3.2. Hechos Históricos . . . 65
3.3. Los Tejados . . . 66
3.4. Concepto Geométrico de Pirámide . . . 68
3.5. Elementos de una Pirámide . . . 69
3.6. Clasificación de las Pirámides . . . 70
3.6.1. Clasificación según su Base: . . . 70
3.6.2. Clasificación de acuerdo a su Inclinación: . . . 71
3.7. Desarrollo de una Pirámide . . . 71
3.7.1. Desarrollo Plano del Tetraedro . . . 71
3.7.2. Desarrollo Plano de la Pirámide Cuadrangular . . . 72
3.8. Cálculo del área y volumen de una Pirámide . . . 72
3.9. Tronco de una Pirámide . . . 76
3.10. Desarrollo Plano del Tronco de Pirámide . . . 80
3.11. Laboratorio: Construcción del Tronco de Pirámide . . . 80
3.11.1. Montaje de un Tronco de Pirámide . . . 80
3.12. Problemas Propuestos . . . 81

**4. CILINDRO** **85**
4.1. Introducción . . . 85
4.2. Hechos Históricos . . . 85
4.3. La Olla de Presión . . . 86
4.4. Cuerpos Redondos . . . 87
4.5. Concepto Geométrico de Cilindro . . . 88
4.6. Elementos de un Cilindro . . . 90
4.6.1. Detalles Relativos del Cilindro Circular recto . . . 91
4.7. Desarrollo Plano del Cilindro . . . 91
4.8. Cálculo del área y volumen de un Cilindro . . . 92
4.9. Laboratorio: Comprobación de Datos de una Olla de Presión . . . 95
4.10. Problemas Propuestos . . . 97

**5. CONO** **101**
5.1. Introducción . . . 101
5.2. Hechos Históricos . . . 102
5.3. El Cono de Señalización . . . 102
5.4. Concepto Geométrico de Cono . . . 104
5.5. Elementos del Cono . . . 105
5.5.1. Detalles Relativos del Cono Circular Recto . . . 106
5.5.2. Relación Matemática del Cono Circular Recto . . . 106

5.6. Desarrollo Plano de un Cono . . . . . 107
5.7. Cálculo del área y Volumen de un Cono . . . . . 107
5.8. Tronco de un Cono . . . . . 111
5.9. Desarrollo Plano del Tronco de un Cono . . . . . 112
5.10. Laboratorio: Construcción del Tronco de Cono . . . . . 114
5.10.1. Montaje de un Tronco de Cono . . . . . 114
5.11. Problemas Propuestos . . . . . 115

**6. ESFERA 121**
6.1. Introducción . . . . . 121
6.2. Hechos Históricos . . . . . 121
6.3. El balón de Fútbol . . . . . 122
6.4. Concepto Geométrico de Esfera . . . . . 123
6.5. Elementos de una Esfera . . . . . 124
6.6. Cálculo del área y volumen de la Esfera . . . . . 125
6.7. Laboratorio: Área de la superficie de la Esfera . . . . . 128
6.7.1. Fórmula del área de la superficie de la Esfera . . . . . 128
6.8. Problemas Propuestos . . . . . 129

**7. PROBLEMAS RESUELTOS 133**
7.1. Introducción . . . . . 133
7.2. Problemas . . . . . 133

**Conclusiones 151**

**Bibliografía 153**

# INTRODUCCIÓN

Las figuras planas de dos dimensiones, en la realidad, no existen como tales sino que forman parte de figuras del espacio. Todo comenzó en Egipto, el ser humano necesitó contar, y creo los números; quiso hacer cálculos y definió las operaciones; hizo relaciones y determinó las propiedades numéricas; más aún, uso la lógica y obtuvo herramientas que utilizó para resolver situaciones de problemas cotidianos. Pero, admiró la belleza de la creación y observó la naturaleza de todo lo que lo rodeaba y así fue como ideo conceptos de formas, figuras, cuerpos y líneas que dieron origen en la matemática a lo que hoy llamamos Geometría.

Los materiales que utilizamos habitualmente tales como madera, papel, hierro, cartón, etc., se nos presentan como figuras tridimensionales, pues tienen un cierto grosor. Sólo mentalmente separamos las figuras planas de las figuras del espacio lo cual nos permite estudiarlas aisladamente.

Los estudiantes de secundaria, frecuentemente deben resolver situaciones mediante el uso de las matemáticas, por esta razón nos esforzaremos en facilitar la comprensión de ideas y adquisición de destrezas al presentar al estudiante dichos conceptos geométricos y destrezas geométricas que son básicas para el aprendizaje de la geometría espacial; es por eso, que daremos mayor importancia a los temas que creemos, son la base fundamental para el aprendizaje de la geometría en $\mathbb{R}^3$.

Desde el punto de vista de compañeros y asesores, nos hemos visto en la tarea de encontrar una manera de expresar y mostrar habilidades y destrezas que mejoren el aprendizaje de la geometría espacial y lo acepten sin ninguna dificultad para su desempeño académico; Este proyecto "***Geometría espacial***" pretende ser un aporte tanto para docentes, como para los mismos estudiantes que serían los más beneficiados en su proceso de aprendizaje de las Matemáticas.

Este trabajo es en cierta manera continuación del trabajo "*Problemas de Geometría Euclidiana*", elaborado por Jimmy Sabi Ticora y Maritza Cuadrado Peraza.

# PRESENTACIÓN

Este trabajo es elaborado dentro del Grupo de Investigación "*Leonard Euler*" y su semillero "*Olímpicos* $\pi e$".

Con una mirada a nuestro alrededor, basta para encontrarnos con cuerpos que sugieren formas geométricas; por eso, la geometría, es una de las ciencias más antiguas con las que ha tratado el hombre e incluso desde épocas remotas, surge con los primeros pictogramas trazados por el hombre primitivo en sus cavernas.

Si damos un vistazo a nuestro alrededor, podemos clasificar algunos elementos según su forma geométrica; un ladrillo, una ficha de dominó y una caja, son formas imperfectas de paralelepípedos; un tambor y una lata de gaseosa nos muestran la forma de un cilindro; una canica y una pelota de tenis, la de una esfera, un gorro de fiesta infantil, la de un cono. Aún, las ciencias más abstractas como la matemática, tienen su origen en lo experimental.

Las experiencias primitivas, son simples observaciones de hechos, que la misma naturaleza, pone a nuestra consideración. Es por eso, que en nuestro trabajo de grado, titulado: "***Geometría espacial***" presentaremos ilustraciones, ejercicios, ejemplos y problemas de los cuerpos geométricos (prismas, poliedros y cuerpos redondos) entre otros.

Para esto iniciaremos en el primer capítulo con los conceptos preliminares de la geometría espacial, tales como: el concepto de un espacio tridimensional (3D), el método de Exhaución, cuerpos geométricos, teoría de grafos, relación de Euler y problemas propuestos entre otros.

En el segundo capítulo se estudiará el Prisma y será abordado inicialmente con la presentación de algunos hechos históricos que lo relacionan, un texto sobre "*los empaques secundarios*", el concepto geométrico del Prisma, sus principales elementos, su clasificación, ejemplos de desarrollos planos, el cálculo de áreas y volúmenes. Para finalizar se proponen algunas actividades que el estudiante y/o el profesor podrá trabajar con sus alumnos.

En el tercer capítulo se estudiará la Pirámide y el tronco de Pirámide, su estudio inicia con algunos hechos históricos y un texto sobre "*los tejados*", cuya forma es piramidal y continuando la secuencia, se discutirá el concepto de Pirámide, sus elementos, su clasificación, su desarrollo plano, sus relaciones matemáticas, como el cálculo de áreas y volúmenes entre otros; además, al finalizar el capítulo se proponen algunas actividades que el estudiante y/o el profesor podrá trabajar con sus alumnos.

En el cuarto capítulo se estudiará el cilindro, empezando por algunos hechos históricos y un texto denominado "*la olla de presión*", luego se aborda su concepto matemático, sus principales elementos, su desarrollo plano, sus relaciones matemáticas. Para terminar se proponen algunas actividades que el estudiante y/o el profesor podrá trabajar con sus alumnos.

En el quinto capítulo se discutirá el Cono y el tronco de cono; este enfoque se iniciará con su desarrollo histórico y el texto "*el cono de señalización*"; a continuación, el concepto matemático del cono, sus principales elementos, sus desarrollos planos, relaciones matemáticas pertinentes a esta figura geométrica, más tarde, se estudiará el desarrollo plano del tronco de cono y cálculo de áreas y volúmenes. Para finalizar, se proponen algunas actividades que el estudiante y/o el profesor podrá trabajar con sus alumnos.

En el sexto capítulo se estudiará la Esfera, iniciando con algunos hechos históricos y un texto denominado "*el balón de fútbol*", luego, se aborda su concepto matemático, se muestran sus elementos principales, se muestra una posibilidad de su desarrollo plano, cálculo de áreas y volúmenes. Para terminar, se proponen algunas actividades que el estudiante y/o el profesor podrá trabajar con sus alumnos.

En el séptimo capítulo y último, se desarrollan algunos problemas y su aplicación en los diferentes contextos de la vida real.

La presentación de este trabajo tiene como objetivo el estudio de la geometría del espacio en relación con la vida cotidiana de los estudiantes y así despertar el mismo interés en la observación y el análisis del entorno en que viven, y con él, interactuar y transformar este medio.

Esperamos que este trabajo de grado contribuya de forma concreta al proceso de enseñanza y aprendizaje, especialmente el de matemáticas, y que podamos fomentar el desarrollo intelectual y social de los involucrados en el proceso educativo.

# JUSTIFICACIÓN

Teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria y de la Licenciatura en Matemáticas y continuando con el trabajo "*Problemas de Geometría Euclidiana*", surge la necesidad de recopilar, analizar, organizar y producir de manera formal este material completo acerca del cálculo de áreas y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, junto a otros temas de la geometría espacial.

Además, este trabajo busca promover el uso de argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias, estudiando sus posiciones relativas, reconociendo y construyendo los elementos básicos de la geometría del espacio.

Por otro lado, este trabajo se ha desarrollado como una guía de estudio que encierra aspectos conceptuales y operativos que apoyaran el crecimiento en la solución de problemas significativos de la vida real.

# OBJETIVOS

**Objetivos Generales**

- Usar representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas como los que involucran áreas de superficie y volumenes.
- Reconocer y construir los elementos básicos de la geometría del espacio.
- Estudiar las posiciones relativas de la geometría espacial.

**Objetivos Específicos**

- Valorar la geometría como instrumento fundamental para expresar y comprender situaciones del entorno físico, del arte o de la ciencia.
- Reconocer e identificar las propiedades de conos, prismas y pirámides.
- Reconocer los poliedros, sus componentes y sus características.
- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

# LA HISTORIA Y LA GEOMETRÍA

Las primeras consideraciones geométricas del hombre son incuestionablemente muy antiguas, y parecería que tienen su origen en las observaciones simples que provienen de la habilidad humana para reconocer la forma física y para comparar formas y tamaños.
Sabemos que la matemática es la más antigua de las ciencias y que su origen se oculta en las arenas de las antiguas civilizaciones egipcias. El estudio de la geometría del espacio por los pueblos de la Mesopotamia (la región del Oriente Medio situado en el valle del Tigris y el Éufrates) está fechado en aproximadamente dos mil años antes de Cristo y todo el conocimiento que tenemos hoy en día se basan en documentos llamados papiros; Entre los más importantes podemos mencionar el "***Papiro de Rhind*** " y "***Papiro de Moscú***".

## Papiro de Rhind

En 1858 el egiptólogo escocés A. Henry Rhind visitó Egipto por motivos de salud (padecía tuberculosis) y compró en Luxor el papiro que actualmente se conoce como *papiro Rhind* o de *Ahmes*, encontrado en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Rhind murió 5 años después de la compra y el papiro fue a parar al Museo Británico. Desgraciadamente en esa época gran parte del papiro se había perdido, aunque 50 años después se encontraron muchos fragmentos en los almacenes de la Sociedad histórica de Nueva York. Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres. Comienza con la frase "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios".

**Figura 1: Papiro de Rhind**

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y su resolución. Nos da información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrito por el escriba *Ahmes* aproximadamente en el año 1650 a.C a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el propio *Ahmes* al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes corresponden a estos textos anteriores y cuáles no.

### Papiro de Moscú

El papiro de Moscú, es junto con el de Rhind el más importante documento matemático del Antiguo Egipto. Fue comprado por Golenishchev en el año 1883, a través de Abd-el Radard, una de las personas que descubrió el escondite de momias reales de Deir el Bahari. Originalmente se le conocía como Papiro Golenishchev pero desde 1912, cuando fue a parar al Museo de Bellas Artes de Moscú (nº 4576), se conoce como Papiro de Moscú. Con 5 metros de longitud y tan sólo 8 cm de anchura consta de 25 problemas, aunque algunos se encuentran demasiado dañados para poder ser interpretados. El papiro fue escrito en hierática en torno al 1890 a.C. (XII dinastía) por un escriba desconocido, que no era tan meticuloso como *Ahmes*, el escriba del papiro de Rhind. Se desconoce el objetivo con el que fue escrito. En la imagen que se muestra se puede ver el original en hierática y la traducción en jeroglífico.

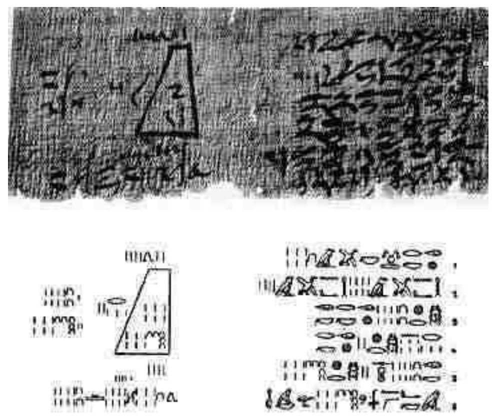
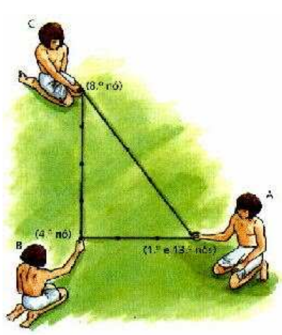


**Figura 2: Papiro de Moscú**

De los 25 problemas de que consta hay 2 que destacan sobre el resto; son los relativos al cálculo del volumen de una pirámide truncada (problema 14, que aparece en la imagen anterior), y el área de una superficie parecida a un cesto (problema 10). Este último es uno de los problemas más complicados de entender, pues no está clara la figura, y si la figura buscada fuese un cesto o un hemisferio entonces sería el primer cálculo de tal superficie conocido.

## Origen de la palabra Geometría



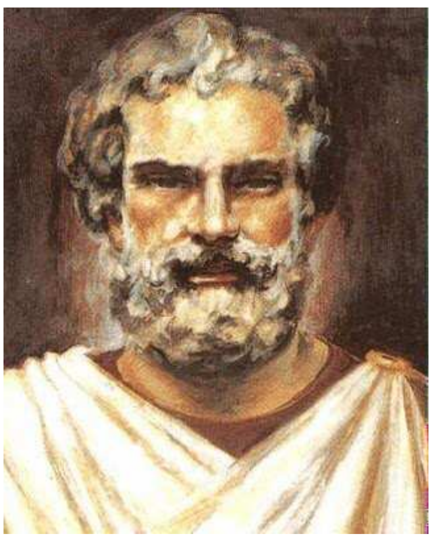

La palabra *geometría* está formada por las raíces griegas: "*geo*", tierra, y "*metrón*", medida, por lo tanto, su significado es "*medida de la tierra*". Según lo registra la historia, los conceptos geométricos que el hombre ideó para explicarse la naturaleza nacieron en forma práctica a orillas del río Nilo, en el antiguo Egipto.
Las principales causas fueron tener que remarcar los límites de los terrenos ribereños y construir diques paralelos para encauzar sus aguas. Esto, debido a los desbordes que causaban las inundaciones periódicas. Pero el verdadero motivo era que las clases altas conocían de esta manera cuánto sembraban sus súbditos para luego saber cuánto debían cobrarles de impuestos. Para medir las tierras los egipcios aprendieron a calcular el área de los rectángulos y de los triángulos. Para medir los triángulos usaban cuerdas.

Los babilonios, en cambio, también conocían las áreas de los triángulos y los rectángulos, sobre todo para resolver problemas de herencia *¿Cómo repartir las tierras entre los herederos?*; También conocieron las áreas de los pentágonos, hexágonos y heptágono. Pero en especial estudiaron mucho los círculos.

Eran unos excelentes geómetras, ellos bautizaron las doce constelaciones del zodíaco, dividiendo cada una de ellas en 30 partes iguales. Es decir, dividieron el círculo zodiacal en 12 x 30 = 360 partes. Recordemos que ellos crearon el sistema de numeración sexagesimal (de base 60). Este zodíaco les serviría para elaborar calendarios y almanaques muy útiles para el cultivo de los cereales. Es decir que junto a la geometría nace la astronomía. De ellos hemos heredado la división de la circunferencia en 360 grados y la de cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Y la patente de nuestra manera de contar el tiempo también es suya.

Por otro lado, quienes dieron carácter científico a la geometría fueron los griegos, ***Thales de Mileto*** y ***Pitágoras de Samos***, al incorporar demostraciones en base a razonamientos geométricos. Veamos entonces quienes eran:

# Thales de Mileto



Thales vivió en Mileto (Jonia), ciudad situada en las orillas del Mar Egeo. Sus padres fueron Euxamias y Cleobulina (conocidos también como Examio y Cleóbula). Hay controversia acerca de su origen: puede que Thales naciese en Mileto y fuese de sangre noble o que haya nacido en Fenicia pero haya vivido en Mileto.
Seguramente, como en las islas de Jonia había mucho tráfico con las civilizaciones babilónica y egipcia, podría ser que Thales hubiera ido a Egipto y allí haber estudiado con los sacerdotes, donde habría aprendido geometría. Entonces, es muy probable que los alumnos que tuviera Thales en Egipto fueran, entre otros, Solón y Ferecides de Siros. Más tarde, habría conocido personalmente a Pitágoras y habría estudiado con los sacerdotes de Menfis y de Diópolis. Luego deja Egipto y se fue a Babilonia, donde habría aprendido astronomía. También se dice que Thales fue maestro de Anaximandro y de Anaxímenes.

Una de las anécdotas más importantes que se contaban sobre Thales era que él pudo medir las pirámides simplemente midiendo su sombra "***cuando la sombra que proyectaba medía exactamente igual que la pirámide***". Esto habría sido aprendido a partir del estudio de la geometría. Según otra anécdota, también pudo predecir un eclipse solar que tuvo lugar en el año 585 a.C., mediante el método que Thales aprendió cuando estuvo en Babilonia.
A Thales se le atribuyen los cinco teoremas siguientes:

1. Ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
2. Un círculo es bisecado por algún diámetro.
3. Los ángulos opuestos entre dos líneas rectas que se cortan son iguales.
4. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen dos ángulos y un lado igual.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

# Pitágoras de Samos

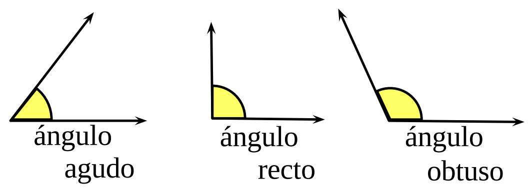
Es uno de los hombres más famoso y enigmático de la antigüedad, se escribieron varias biografías pero se han perdido y es difícil separar en su biografía lo que es de histórico de lo legendario. Tenemos detalles de la vida de Pitágoras a partir de biografías antiguas que usan importantes fuentes originales a pesar de estar escritas por autores que le atribuyen poderes divinos, y cuya finalidad era presentarle como una figura divinizada. Existe un consenso bastante aceptable sobre los principales hechos de su vida, pero la mayoría de las fechas son discutibles, aportando fechas que difieren en unos 20 años.

Fue después de Thales la figura más importante de las matemáticas griegas. Fundó en Crotona, Magna Grecia, la primera escuela-internado del mundo. Sus alumnos recitaban los Versos Áureos al amanecer, al compás de la lira. Epitafio esculpido en piedra por su profesor Ferécides de Siros: "*Pitágoras fue el primero de los griegos*".

Los sabios de la antigüedad griega utilizaron sus conocimientos sobre circunferencias y esferas para crear un modelo matemático que describiera los movimientos de las estrellas y de los planetas. Pitágoras suponía que las estrellas estaban fijadas a una esfera de cristal que daba diariamente una vuelta sobre si misma en torno a un eje que pasaba a través de la Tierra y que los siete planetas (Sol, Luna, Mercurio, Marte, Júpiter, Venus y Saturno), estaban cada uno anclado a su propia esfera móvil. Esta idea, que se convertiría en la teoría del movimiento de los cuerpos celestes, fue el fundamento de la astronomía hasta el siglo XVI.

Pitágoras nació en la isla de Samos y dicen que estudió con Thales, quién le animó a desplazarse hasta Egipto para estudiar matemáticas. Viajó por Egipto durante varios años y allí adquirió una sólida formación mística y religiosa. De vuelta a Samos fundó la fraternidad de los pitagóricos, una sociedad religiosa y filosófica. Cuando el tirano Polícrates accede al poder, abandona Grecia y se instala, con su escuela, en Crotona, al sur de Italia. La fraternidad se regía por un régimen muy estricto y un rígido código de conducta. Superado un período de prueba, se permitía a los iniciados en la secta oír al maestro, oculto tras una cortina. Años más tarde se les permitiría ver a Pitágoras directamente. Los pitagóricos creían que, merced a las matemáticas, su espíritu podría ascender a través de las esferas celestiales hacia un mundo mejor.

Son muchos los resultados matemáticos atribuidos a esta secta, pero entre ellos destaca el ***Teorema de Pitágoras*** y como una consecuencia natural de este teorema, los pitagóricos descubren los números irracionales; por ejemplo, el número raíz de 2 existe, ya que es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1. El descubrimiento de estos nuevos números desestabilizó totalmente sus antiguas concepciones. Cuenta la leyenda que, en un principio, intentaron mantener oculta una verdad tan ingrata incluso que su descubridor, *Hipaso de Metaponto*, fue arrojado al mar durante un viaje. Quizás por primera vez en la historia de la ciencia, el pensamiento abstracto había conducido inexorablemente a una conclusión que reducía a añicos las creencias de todos. Muchas fueron las suspicacias que levantaron el carácter secreto de la sociedad pitagórica y sus rituales místicos, que se decía habían importado de Egipto. Hacia el año 500 a.C, Pitágoras se vio obligado a huir a Tarento y después a Metaponto, donde fue asesinado. Sus seguidores continuaron sus enseñanzas en diversos lugares aproximadamente durante un siglo.




A Pitágoras se debe la idea intuitiva del punto, como unidad con posición; también es pitagórica la clasificación de los ángulos en las tres categorías que se encuentran en la escuela básica: rectos, agudos y obtusos, según midan 90º, menor de 90º y mayor de 90º, respectivamente.

También de Pitágoras es la concepción ***geométrica del espacio***, como entidad continua, homogénea e ilimitada. Concepción que se mantiene actualmente con el nombre de ***Estereometría***.

Se atribuye a Pitágoras la construcción de figuras cósmicas o sólidos regulares. Estos sólidos son el tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y sus ángulos poliédricos son todos iguales. Es decir, únicamente los poliedros antes mencionados son poliedros regulares. El tetraedro tiene cuatro caras triangulares, el cubo seis caras cuadradas, el octaedro ocho caras triangulares, el dodecaedro doce caras pentagonales, y por último, el icosaedro está limitado por 20 caras triangulares.

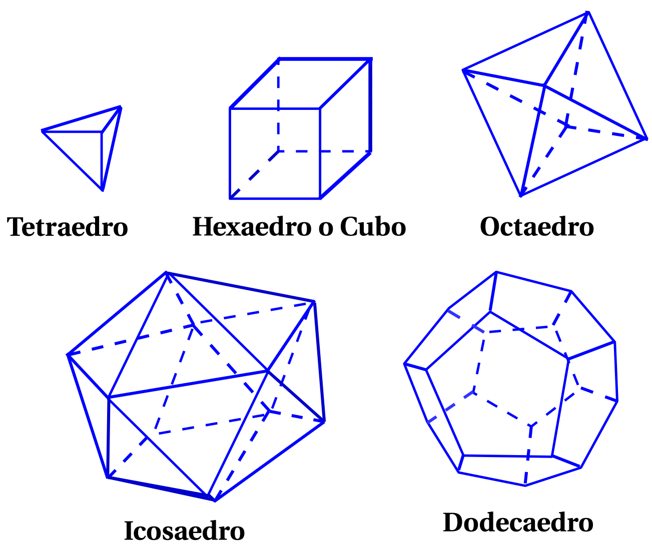



Figura 3: *Solidos Platónicos*

"*Los sólidos platónicos, también conocidos como cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos, poliedros de Platón o, con más precisión, poliedros regulares convexos; son cuerpos geométricos caracterizados por ser poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras*".[1]

[1]Tomado del libro COSMOS de Carl Sagan.

El mundo en el que vivimos y nos movemos es un mundo de tres dimensiones representado a veces bidimensionalmente por medio de pinturas, dibujos y fotografías. Los libros de texto representan los objetos tridimensionales en un plano y esto, a lo que ya nos hemos acostumbrado, no resulta nada fácil de captar en un primer momento.

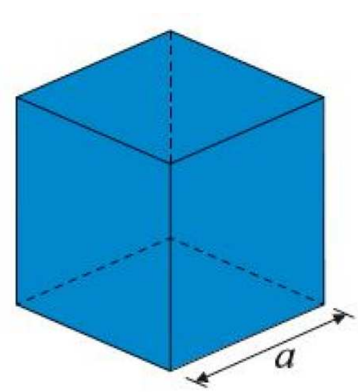
Una experiencia que se realizó en 1980 con alumnos de 11 a 15 años constato que las dos dificultades que encuentra el alumno en la representación del volumen son: la ocupación del espacio y la coordinación multiplicativa de las tres dimensiones. Dificultad esta última que surge al pasar medidas de longitud a medidas de volumen, esto es, de una a tres dimensiones y de no haber trabajado con los cuerpos sino con dibujos de los mismos; el objetivo de dicha experiencia era el de favorecer el desarrollo de la intuición espacial mediante la realización de actividades que implican el paso de la representación plana a la construcción espacial y de la construcción espacial a la representación plana.

La geometría es la exploración del espacio. Un niño, desde su nacimiento explora el espacio. Al principio lo mira, después extiende sus miembros en él, y luego se desplaza. Le hace falta un tiempo bastante largo para desarrollar las ideas de perspectiva, de distancia, de profundidad; para adquirir nociones tales como “dentro”, “fuera”, “arriba” o “abajo”; Cuando el niño llega a la escuela, algunos de estos procesos de desarrollo ya están iniciados: sólo falta animarlos y ampliarlos, multiplicando las experiencias ofrecidas a los niños. Pero, previamente el maestro tendrá que esforzarse en descubrir a qué nivel ha llegado cada niño, tomando individualmente, y qué conceptos ha adquirido ya.

Es por eso, que luego de observar tanta dificultad en el paso de una a tres dimensiones y viceversa de parte de los estudiantes, se desarrolla este trabajo en donde nos centraremos en la ***Geometría Espacial*** o ***Estereometría*** para facilitar la comprensión, animación y ampliación de los temas geométricos.

# *¿QUÉ ES LA GEOMETRIA ESPACIAL?*

Esta rama de la geometría, también denominada ***Estereometría***, se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el ***espacio tridimensional***. Estas figuras se denominan sólidos y entre ellas se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio y la geometría descriptiva, entre otras.




El estudio de la geometría tridimensional data de la antigua Grecia, cuando se planteó el famoso problema de la *duplicación del cubo*. Cuenta la leyenda que la peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Un embajador de la ciudad fue al oráculo de Delfos, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delfos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Los atenienses construyeron un altar cúbico en el que las medidas de los lados eran el doble de las medidas del altar de Delfos, pero la peste no cesó.

Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino 8 veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su arista $\left((2a)^3 = 8a^3\right)$. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos; no obstante la enfermedad también.

Es así, que la geometría tridimensional, estereometría o geometría en 3D, se preocupa por el estudio de las figuras sólidas; es decir, de las figuras cuyos puntos no pertenecen a un mismo plano. Se menciona que en 1615 Joannes Kepler (1571-1630) cataloga como la "**Stereometria**" (stereo-volumen/metria-medida) el cálculo de volumen. La palabra viene del volumen que es propiedad de un barril (vino, aceite, etc.) para rodar con facilidad.

Más adelante, llega la geometría desarrollada por el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), mezcla de Álgebra y Geometría, enseña los puntos de inflexión, líneas y círculos en los números, que muestra cómo hacer las cuentas con figuras geométricas. En 1669 el físico Inglés Isaac Newton (1642-1727) desarrolla el cálculo diferencial e integral. Así se hace posible calcular el área y volumen de cualquier figura geométrica, independientemente de su forma.

Recordemos algunos axiomas ya conocidos.

1. Tres puntos del espacio, no colineales, pertenecen a uno y solo a un solo plano.

2. Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, toda la recta pertenece a dicho plano.

3. Toda recta de un plano divide a dicho plano en dos regiones (semiplanos) que son conjuntos convexos.

4. Todo plano $\alpha$ divide a los puntos del espacio en dos regiones (semiespacios) que son conjuntos convexos.

Con el desarrollo de la geometría proyectiva y los nuevos medios de cálculos, se abre el camino para nuevos campos de estudio de la geometría moderna. Esta nueva ruta en el estudio de los cuerpos geométricos se analiza desde diversos ángulos.

Su creador, el francés Jean Víctor Poncelet (177 - 1867) en 1822 muestra sus diferentes raciocinios; Visto, por ejemplo, una pirámide puede aparecer como un triángulo (vista frontal) o un cuadrado (vista superior). Es en el siglo XIX que la geometría es la mayor restructuración desde sus estudios iniciales en la antigua Grecia. Hasta entonces todos los argumentos se basaban en los establecidos postulados de Euclides y sus "**Elementos**" griegos. Esto se conoce como la geometría euclidiana.

Pero, Gauss fue el primero que creyó construir una geometría (un modelo del espacio) en la que no se cumple el **V** postulado de Euclides, pero no publicó su descubrimiento. Son ***Bolyai*** y ***Lobachevsky*** quienes, de manera independiente y simultánea, publicaron cada uno una geometría distinta en la que no se verifica tampoco el **V** postulado. ¿Qué quiere decir esto?, Tanto ***Bolyai*** como ***Lobachevsky*** parten de un objeto geométrico y establecen sobre él, unos postulados que son idénticos a los de Euclides en "**Elementos**", excepto el quinto: "*Postulado de las paralelas*".

V postulado de Euclides

*Postúlese... Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*[a]

[a] *Elementos, Libro I, postulado V*

Pretenden originalmente razonar por reducción al absurdo: si el **V** postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquél que dice exactamente lo contrario, se ha de llegar a alguna contradicción lógica.

Lo sorprendente es que no se llega a contradicción alguna, lo cual indica dos cosas:

1. El **V** postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado.
2. Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, un punto que no esté contenido en una cierta recta no necesariamente forma parte de una única recta paralela a la dada. Esto no es intuitivo, pues no podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta, plano, etc. Pero desde el punto de vista lógico, es perfectamente válido.

Como es de imaginar, esto supuso una fuerte crisis en las matemáticas del siglo XIX, que vino a sumarse a otras controversias.

# János Bolyai

János Bolyai fue un matemático húngaro, nacido el 15 de diciembre del año 1802 en Kolozsvár (actual Rumania), que en ese entonces era parte del Imperio Austro-Húngaro. Su padre, Farkas Bolyai, también era matemático y amigo de Carl Friedrich Gauss.

A los 13 años ya dominaba el cálculo. Entre 1818 y 1822 estudió en el Colegio Real de Ingeniería en Viena. En 1832 publicó un completo tratado sobre geometría no euclídea, sin conocer a Nikolái Lobachevski, que tres años antes había publicado un estudio similar, por lo que sus logros matemáticos no fueron merecidamente reconocidos. Su padre le había enviado una carta a Carl Gauss para que este lo tomara como discípulo, pero este se negó, aduciendo que sus logros los había concebido diez años atrás, pero que no los había publicado. Aunque en cartas a otros matemáticos reconoce su prominente genio. Ello desanimó irremediablemente a János Bolyai y nunca continuó su carrera como matemático.

Afirmó que el postulado de Euclides relativo a las líneas paralelas no podría confirmarse ni refutarse y le llevó a añadir un apéndice a un trabajo publicado por su padre (1832), donde sostenía los principios de lo que posteriormente se conoció como la geometría no euclídea.


Su obra que revolucionó la geometría fue publicada en 1831: "La ciencia verdadera absoluta del espacio. En discurso independiente del carácter cierto o erróneo del axioma euclidiano Nº XI (nunca resuelto a priori): en caso de ser éste equivocado, con la cuadratura geométrica del círculo".

La nueva geometría descubierta por Bolyai y Lobachevski constituye un viraje aún mayor que la de Copérnico, es una revolución realmente extraordinaria del pensamiento; dijo E. T. Bell en su gran obra de historia de las matemáticas; "*debemos remontarnos hasta el mismo Copérnico para poder encontrar algo de trascendencia semejante, es más, ni siquiera eso es suficiente*". El trabajo matemático de Bolyai no se limitaba sólo a sus investigaciones geométricas, ni su obra científica meramente a las matemáticas. Reconoció la estrecha interrelación de la estructura espacial geométrica y el campo de acción de la fuerza de gravedad.

Perteneció al cuerpo de oficiales-ingenieros de la armada austríaca durante 11 años, donde se destacó por su gran capacidad lingüística, que le permitió hablar hasta nueve idiomas extranjeros (incluido el chino) y por sus cualidades de violinista, bailarín y esgrimista.

En 1843, aquejado de fiebres, tuvo que jubilarse de su carrera militar. Desde entonces se dedicó a la investigación matemática. Murió de neumonía, el 27 de enero de 1860 en Marosvásárhely, Hungría.

# Nikolai Lobachevsky

Nikolai Ivanovich Lobachevsky o Lobachevski; (Nizhni Novgorod, Rusia, 1792 - Kazán, id., 1856) Matemático ruso considerado, junto con el alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y con el húngaro János Bolyai (1802-1860), como uno de los fundadores de la geometría no euclidiana o hiperbólica (*imaginaria* en la denominación de Lobachevski) y como uno de los geómetras más ilustres de todos los tiempos.

Hijo de una familia de funcionarios de baja cualificación, entró en la Universidad de Kazán a la edad de 14 años. En 1820 fue nombrado decano de la facultad de física y matemáticas; en 1827, rector. El tiempo y la atención demandados por sus obligaciones administrativas no impidieron a Nikolai Lobachevski desarrollar una importantísima labor académica que cristalizó en 1829 con la publicación de una geometría particular, la denominada hiperbólica, que no respetaba el postulado de las paralelas de Euclides, pero que aun así era lógicamente correcta.

A lo largo de un período superior a los dos mil años, los geómetras habían estado convencidos de la validez incondicional del postulado de las paralelas de Euclides, según el cual, dada una línea recta y un punto exterior, sólo puede existir en el plano una línea paralela que pase por dicho punto. Al demostrar la coherencia interna de esta geometría «no-euclídea», Lobachevski probó asimismo que el postulado de las paralelas no podía deducirse del resto de los postulados propuestos por Euclides.

A pesar de la trascendencia de sus descubrimientos, la obra de Lobachevski fue poco apreciada en su tiempo y apenas trascendió de un estrecho círculo de especialistas en su Rusia natal, y tuvo que esperar a los trabajos de B. Riemann y F. Klein sobre los fundamentos de la geometría para alcanzar una postrera repercusión.

La prioridad de Lobachevski respecto del húngaro János Bolyai, quien llegó de una manera independiente a la nueva geometría en su *Testamen*, publicado en 1832, está actualmente comprobada, por cuanto la primera exposición oral de Lobachevski en la facultad físico-matemática de Kazán tuvo lugar en 1826, y su primera publicación referente al tema en cuestión (*Sobre los principios de la geometría*) vio la luz en 1829. Gauss, por su parte, nunca quiso publicar sus apuntes de geometría "antieuclidiana", temeroso de la reacción de la filosofía dominante y del "sentido común", y fue quizá el único que comprendió y apreció la obra de Lobachevski al conocerla.

Entre los estudios de Lobachevski deben destacarse *Geometría (1823), Nuevos principios de la geometría con una teoría completa de las paralelas (1835), Geometría imaginaria (1835), Investigaciones sobre pangeometría (1835), Aplicación de la geometría imaginaria a algunos integrales (1837), Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas (1840) y Pangeometría (1855).*

CAPÍTULO 1

# CONCEPTOS PRELIMINARES

## 1.1. Espacio Tridimensional

La Tierra es un planeta rico en objetos, tanto naturales como creados por las manos de los hombres. Estos objetos son parte del espacio que nos rodea, sin embargo, va mucho más allá de lo que podemos ver, de hecho, de acuerdo con la teoría del Big Bang, que se llama el espacio del universo, el universo está en constante expansión, de modo que se puede ver el infinito.

Sin embargo, el estudio propuesto en este documento, que es suficiente para comprender la noción de espacio en un lugar determinado, representan principalmente la ubicación de este, a través de lo que se llama el ***"espacio de tres dimensiones"***, es decir, el espacio cartesiano.

Para entender esta representación espacial, se iniciará con la representación de punto y llegar a una representación del objeto tridimensional, por supuesto, a través de una representación de la línea y el plano, a saber:

La siguiente figura representa un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ y el punto $O = (0,0,0)$, origen del espacio en 3D. Veamos lo fácil que es representar un punto en el espacio tridimensional.

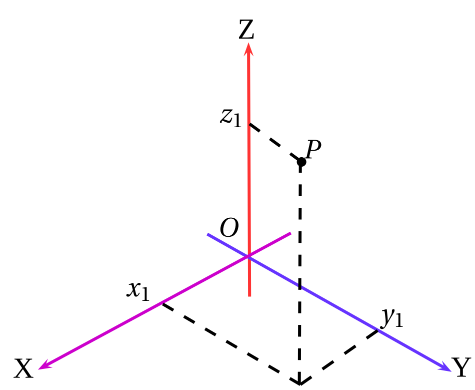



Figura 1.1: *Representación de un punto P en el Espacio 3D*

Para dar continuidad a esta idea será representada una recta en este espacio, para esto, simplemente representamos dos puntos, debido a que la geometría euclidiana del plano que conocemos dice que por dos puntos se puede trazar una y solo una recta que los contenga. Luego, consideremos la recta $\boldsymbol{r}$ que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$ en el espacio 3D, tal como se muestra en la figura.

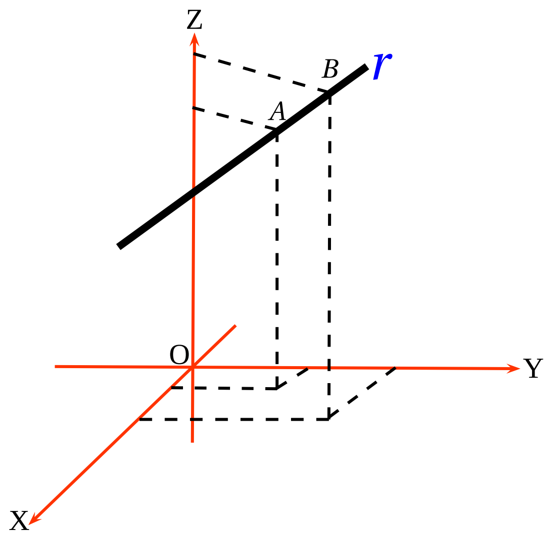



Figura 1.2: *Representación de una recta en 3D*

De la Geometría euclidiana del plano, también sabemos que los tres puntos no colineales (*no contenidos en una misma recta*), definen un plano, por lo tanto, tengamos en cuenta los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ y $C = (x_3, y_3, z_3)$ en el espacio 3D, trazando las líneas que pasan por $AB$, $BC$ y $AC$, tenemos un plano, como se ve en la siguiente figura:

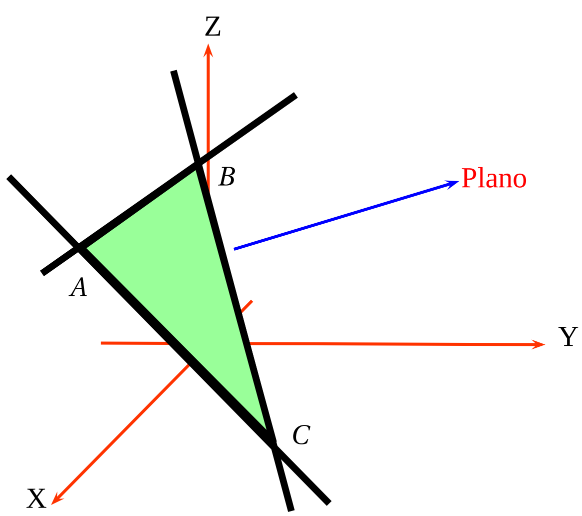



Figura 1.3: *Representación del plano en 3D*

A través del espacio cartesiano tridimensional pueden representarse objetos en tres dimensiones, lo cual es imposible en el plano cartesiano (2D). Dado que el objetivo de este trabajo es el estudio de las figuras espaciales, es necesaria para la visión espacial y al mismo tiempo, debe tenerse en cuenta, que todo lo que vemos y tocamos están incluidos en este espacio infinito que se llama universo y de una forma u otra, es necesario crear modelos para la ubicación de estos objetos en el espacio o en un espacio dado, por ejemplo, el mesón de su cocina.

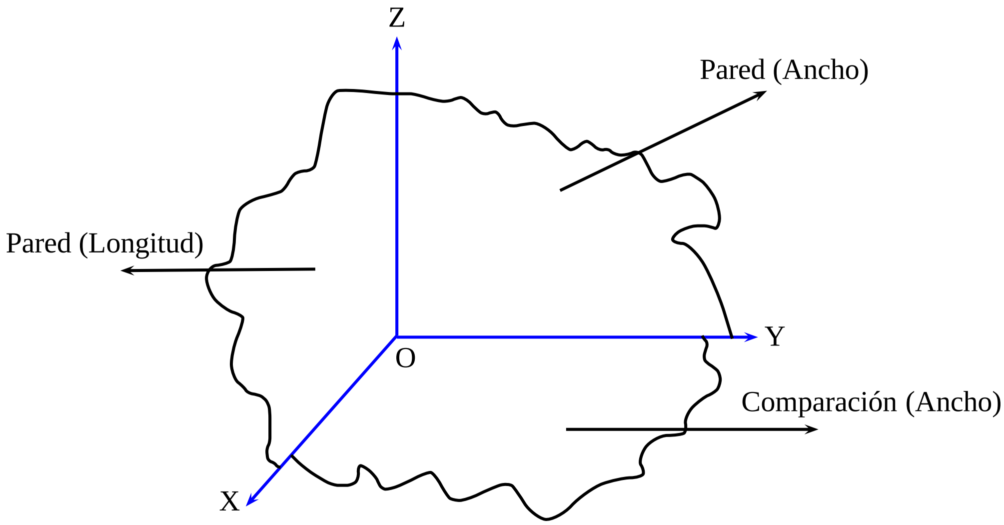



Figura 1.4: *Modelo de espacio cartesiano*

## 1.2. Lugar Geométrico

Es muy común el uso del lugar geométrico en las matemáticas, especialmente en el estudio de la geometría, por lo que es necesario entender claramente este concepto de manera que podamos continuar con este trabajo. Por consiguiente, como ***lugar geométrico*** se entiende un lugar del espacio que consta de un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

En la figura 1.5 podemos ver un ejemplo, es decir, un círculo con centro en **C**. Tenga en cuenta que todos los segmentos de línea que parten de y llegan a la circunferencia **C** son todas de la misma medida, por lo tanto podemos decir que el círculo es el lugar de todos los puntos equidistantes de un punto llamado centro.

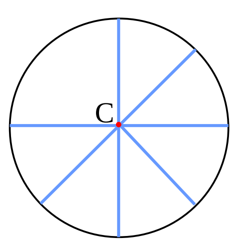



Figura 1.5: *Circunferencia de Centro C*

## 1.3. Método de Exhaución

El método de exhaución o el método de Eudoxio de Cnido (408-355 a. C) es un método ampliamente utilizado en la geometría, ya que ayuda a calcular áreas y volúmenes de figuras y objetos geométricos. Por ejemplo, para calcular el área de una determinada figura plana desconocida sólo se tiene que ir completando esta figura con polígonos conocidos tales que la suma de estos polígonos convergerá al área de la figura, este método es ampliamente utilizado en el cálculo integral.

El método de agotamiento está descrito en el *Método*, un libro de Arquímedes en el que se explica este procedimiento. Es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a Isaac Newton y a Leibniz unificar el cálculo diferencial con el integral, lo cual conllevó la posterior definición rigurosa de límite de una función por Bernard Bolzano, Cauchy y Weierstrass.

El método de agotamiento es el precursor del concepto de *Suma de Riemann* que permite definir con rigor la integral de una función en un intervalo.

Cuando pensamos en la idea del método de volumen es la misma, por ejemplo, para calcular la capacidad de un contenedor desconocida puede ser comparado con la capacidad de un recipiente conocido y por lo tanto a lo largo de la historia de las relaciones matemáticas son tales que el volumen de una esfera es cuatro veces el volumen de un cono de radio de la base de la altura de la bola circular y también igual a su radio.

En la vida cotidiana, se utiliza este método, por ejemplo, cuando tenemos que saber la cantidad de leche que se puso en un pastel y no tenemos un recipiente graduado con la medida indicada, entonces, se puede utilizar otro recipiente más pequeño a medida y se gradúa de acuerdo a la cantidad indicada en la receta, sólo hay que ir poco a poco para completar la cantidad requerida.

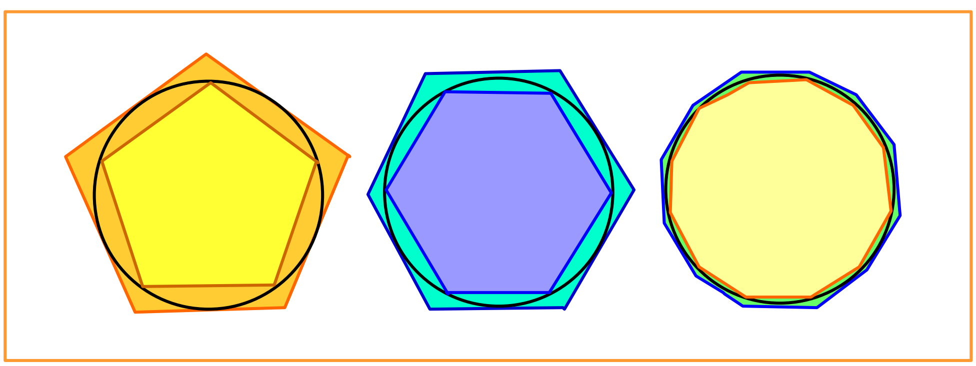


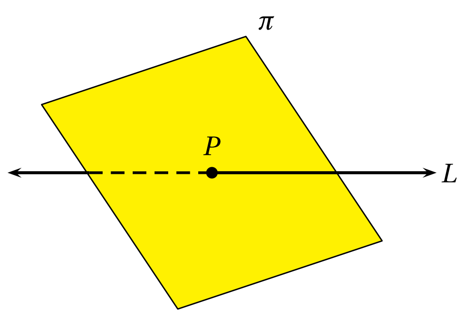
Figura 1.6: *Método de Eudoxio de Cnido*

## 1.4. Figuras en el Espacio

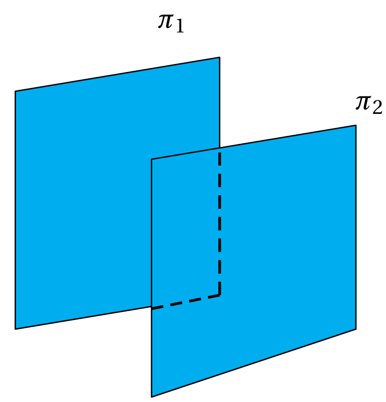
En este capítulo se identifican los elementos que participan en la geometría espacial, los cuales son fundamentales para la creación de objetos en tres dimensiones.

Dado que el objetivo de este estudio es comprender el espacio tridimensional, debe dejar de lado el plano cartesiano y adoptar un modelo en tres dimensiones; es decir, un teórico espacio tridimensional (3D), cuyas dimensiones están de acuerdo con $x$, $y$, $z$.

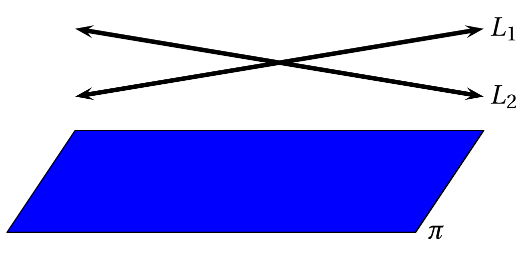
En el espacio existen figuras (conjuntos de puntos) que no están contenidas en plano alguno, a continuación mostraremos algunos de ellos y sus relaciones.



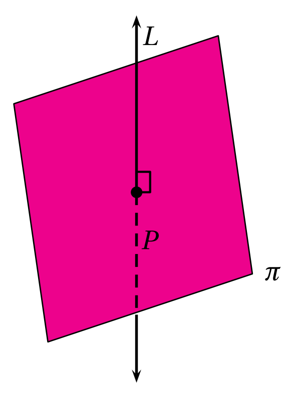

**a) Recta intersecando un Plano.**




**b) Planos Paralelos.**




**c) Dos rectas concurrentes paralelas a un mismo plano.**



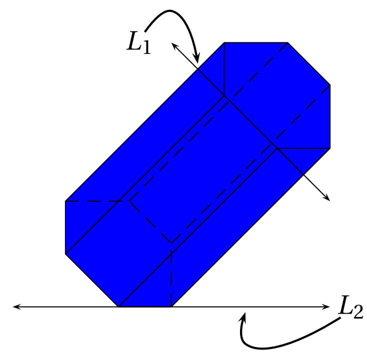

**d) Recta Perpendicular a un plano**

Figura 1.7: *Figuras en el Espacio*

## 1.5. Rectas y Planos en el Espacio

En el espacio puede ocurrir que dos rectas no sean paralelas o no tengan algún punto de intersección, lo cual no ocurre en el plano.

***Definición* 1.1.** *(Rectas Alabeadas):*
*Dos rectas $L_1$ y $L_2$ son alabeadas cuando no son paralelas ni se intersecan.*




Con respecto a un plano $\pi$, una recta $L$ puede ocupar una de las tres posiciones siguientes:

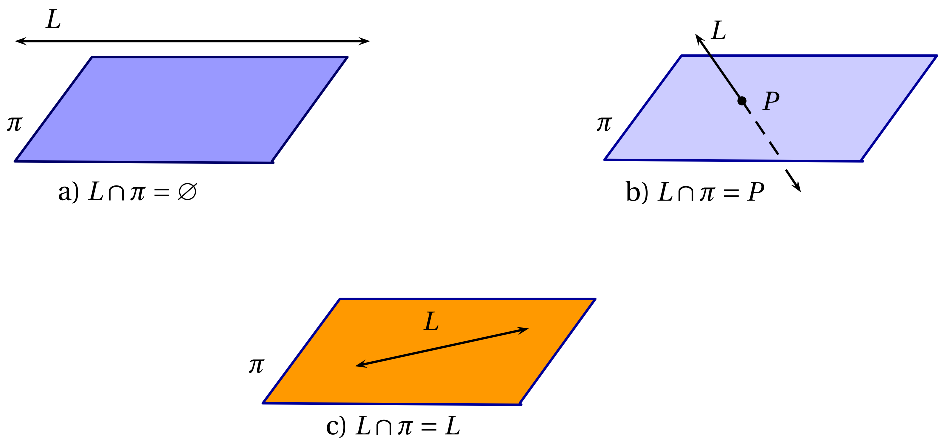



Figura 1.8: *Rectas y Planos en el Espacio*

a) $L$ es paralela al plano $\pi$ y no está contenida en él,

b) $L$ interseca a $\pi$ en un punto $P$, y

c) $L$ es paralela a $\pi$ y es un subconjunto de $\pi$.

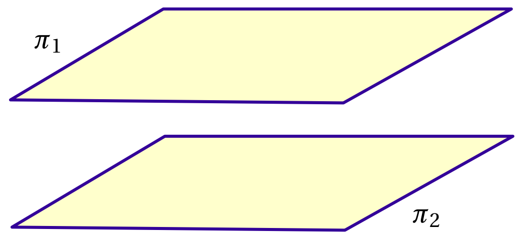
De los casos a) y c) se entiende el paralelismo entre el plano $\pi$ y la recta $L$, así:

$$\left(L \parallel \pi\right) \equiv \left((L \cap \pi = \varnothing) \vee (L \subset \pi)\right)$$

***Definición* 1.2.** *(Planos Paralelos):*
*Un plano es paralelo a otro cuando no se intersecan o son coincidentes. La notación para el paralelismo es:*

$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

$$(\pi_1 \parallel \pi_2) \equiv ((\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset) \vee (\pi_1 = \pi_2))$$




1. Un plano siempre divide al espacio en dos ***semiespacios***.
2. Dos planos no paralelos se denominan ***planos secantes***.

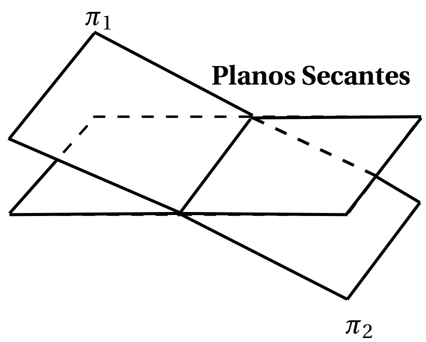



Figura 1.9: *Planos Secantes*

***Definición* 1.3.** *(Ángulo Diedro):*
*Es la unión de dos semiplanos que se intersecan en su borde. Al ángulo diedro se lo suele denominar simplemente diedro; a los semiplanos se los denomina caras del diedro y al borde común se lo denomina arista del diedro.*

Dos planos secantes determinan un ángulo diedro. Un ejemplo de este ángulo lo encontramos en la figura que se forma al abrir una tarjeta de cumpleaños.

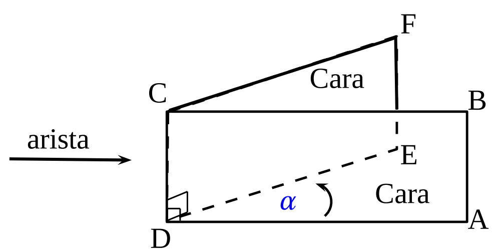



Figura 1.10: *Ejemplo Ángulo Diedro*

En el diedro $ABCDEF$, los semiplanos $ABCD$ y $CDEF$ son las ***caras*** del diedro, y la recta $\overline{CD}$ es la ***arista*** del diedro.

Se denomina ***ángulo rectilíneo*** al ángulo formado por dos rectas perpendiculares, $\overline{DA}$ y $\overline{DE}$, a la arista $\overline{DC}$, cada una situada en caras diferentes del diedro. ***La medida del ángulo diedro*** es la medida de su ángulo rectilíneo $\alpha$.

***Definición* 1.4.** *(Ángulo Poliedro):*
*Es la unión de semirrectas que se intersecan en su extremo **V** y que tienen un punto común con la poligonal **d** contenida en un plano que no contiene a **V**. A las semirrectas que se intersecan con uno de los vértices de la poligonal se las denomina aristas del ángulo poliedro y el punto **V** se denomina vértice del ángulo poliedro.*

Por ejemplo, el ángulo triedro (*intersección de tres semiplanos*) es un ángulo poliedro formado por el vértice ***V***, tres aristas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, y tres caras VAB, VBC, VCA.

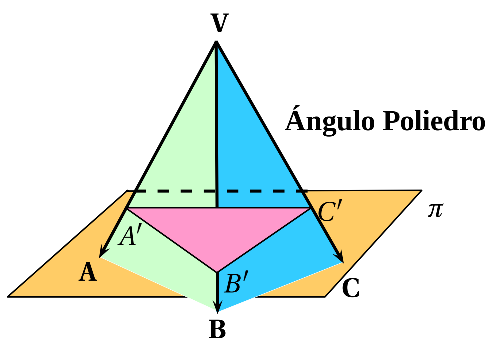
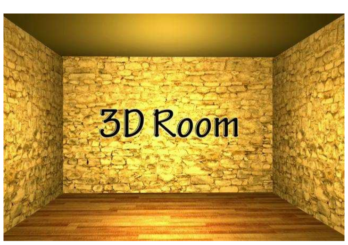



Figura 1.11: *Ángulo Poliedro*

La intersección del ángulo triedro con el plano $\pi$ determina el triángulo ***A'B'C'***.

***Ejemplo* 1.1.** *La figura que forman en un rincón de una habitación las dos paredes y el techo que inciden en ese punto es un claro ejemplo de un ángulo triedro. Las pirámides utilizadas por civilizaciones como las egipcias emplearon el concepto de ángulo tetraedro. La plomada, que es un peso que se emplea en construcción, tiene en su punta un ángulo hexaedro.*




## 1.6. Cuerpos Geométricos

En este trabajo nos referimos a los objetos espaciales que se encuentran en nuestra vida cotidiana con los conceptos teóricos adoptados en la geometría del espacio euclidiano. Para ello miraremos las figuras geométricas conocidas dentro de la geometría del espacio, que muchos autores llaman sólidos geométricos.

Algunos libros de texto describen el concepto de sólido geométrico como una porción finita del espacio ilimitado por superficies planas y curvas. Sin embargo, buscando la palabra "***sólido***" en el diccionario enciclopédico Larousse es: "***que tiene consistencia, integra, firme, macizo, fuerte...*** ".[1] Hasta este momento, todo está bien, sin embargo, se dan cuenta que hay algunos contradicciones cuando nosotros denominamos a la esfera, cilindro, cono, cubo, tetraedro y así sucesivamente en forma de sólidos geométricos.

De acuerdo con algunos libros de texto, por ejemplo, el cubo es ***un sólido geométrico limitado por seis caras cuadradas***, de hecho, pensando en el concepto de sólido, en forma sólida geométrica particular, es correcta, es decir, es una ***porción finita del espacio***, por lo que es un ***cuerpo sólido***. Sin embargo, el mismo libro que define el cubo como un sólido, está planeando lo mismo, al parecer en contradicción con su propio concepto, por lo tanto, no podemos decir que el cubo es un sólido geométrico.

Pero entonces, ***¿Qué es un cubo?;*** Puede decirse que es una superficie que envuelve un sólido, por lo tanto el cubo es sólo la forma del sólido (sólido cúbico) así como la esfera, el cilindro y las otras figuras geométricas.

Por lo tanto, en este trabajo se estudiaran las superficies de los sólidos y cuando sea necesario para estudiar el propio sólido, se denominará de acuerdo a su forma, por ejemplo, sólido esférico, sólido cilíndrico, con la forma de una pirámide y así sucesivamente.

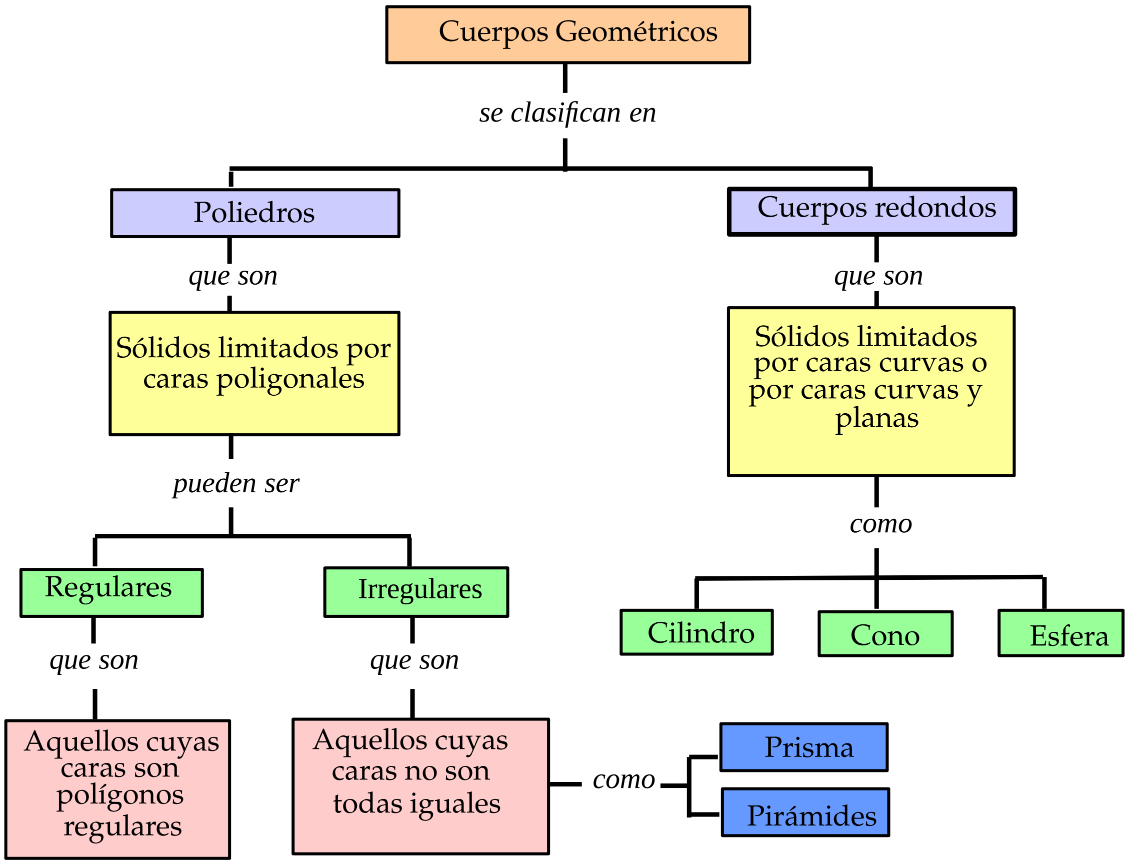
Ahora, en esta sección se clasificarán diferentes cuerpos que se pueden presentar en el espacio tridimensional, atendiendo a los elementos estudiados anteriormente.

***Ejemplo*** **1.2.** *Algunos minerales y esqueletos de criaturas marinas son modelos de los sólidos denominados poliedros que se estudiarán en esta sección.*

[1] Tomado del Diccionario Enciclopédico Larousse.

### 1.6.1. Clasificación de Cuerpos Geométricos

Los cuerpos Geométricos se clasifican como se muestra a continuación.




***Definición* 1.5.** *(Poliedro):*
*Se define como poliedro al cuerpo que está limitado por superficies planas (denominadas caras) y de contorno poligonal (denominadas aristas de las caras). Los vértices del poliedro son los vértices de las caras. Por ejemplo, un cubo, paralelepípedos, el tetraedro, hexaedro y así sucesivamente.*

### 1.6.2. Elementos de un Poliedro

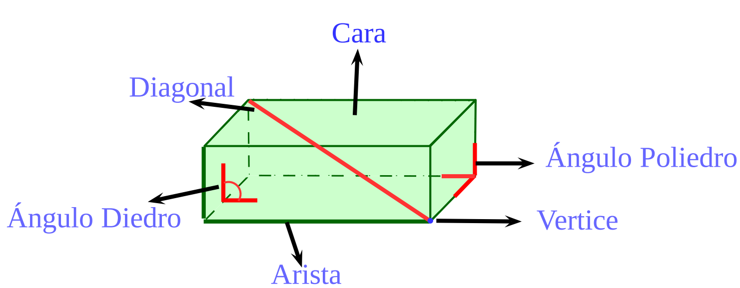



Figura 1.12: *Elementos del Poliedro*

- ♣ ***Caras:*** Cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- ♣ ***Aristas:*** Los lados de las caras del poliedro. Dos caras tienen una arista en común.
- ♣ ***Vértices:*** Los vértices de cada una de las caras del poliedro. Tres caras coinciden en un mismo vértice.
- ♣ ***Ángulos diedros:*** Los ángulos formados por cada dos caras que tienen una arista en común.
- ♣ ***Ángulos poliédricos:*** Los ángulos formados por tres o más caras del poliedro con un vértice común.
- ♣ ***Diagonales:*** Segmentos que unen dos vértices no pertenecientes a la misma cara.

Los poliedros, se dividen generalmente en ***poliedro convexo*** y ***no convexo (cóncavos)***. Poliedros convexos son poliedros en el que cualquier segmento de recta que une a dos de los puntos está contenida dentro de ese poliedro, por supuesto, en los no-convexos (cóncavos) hay una recta que no está contenida en el poliedro.

***Definición* 1.6.** *(Poliedro Convexo):*
*Un poliedro convexo es aquel que está limitado por polígonos convexos. Entre sus propiedades más importantes figuran:*

- *Cada arista de una cara pertenece también a otra cara y únicamente a otra. Dichas caras se denominan* ***contiguas.***
- *Dos caras contiguas están en planos distintos.*
- *El plano que contiene a cada cara deja a todas las demás a un mismo lado del espacio, es decir, en un mismo semiespacio.*
- *El número de aristas es igual al número de caras más el número de vértices disminuido en 2.*

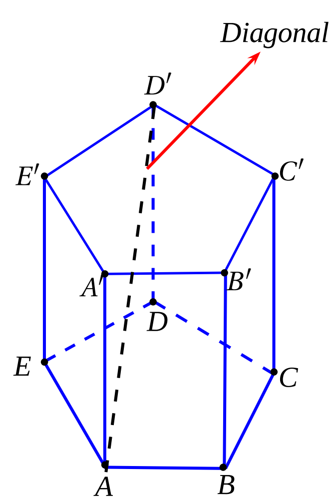



Figura 1.13: *Poliedro Convexo*

En el poliedro anterior se tienen los vértices $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, las aristas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, y las caras $AEE'A'$, $BAA'B'$, $CBB'C'$, $DCC'D'$, $EDD'E'$. En cada vértice deben concurrir al menos tres aristas.

Ahora observa en la Figura 1.14, la parte del segmento $\overline{AB}$ está fuera del poliedro, por lo tanto, es un ejemplo de poliedros no convexo o cóncavo.

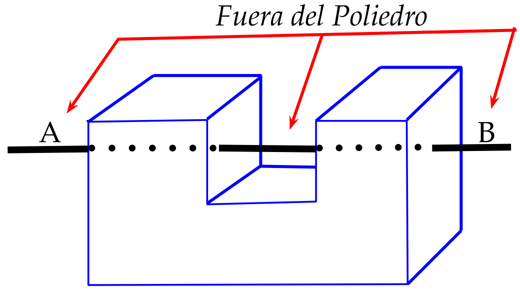



Figura 1.14: Poliedro Cóncavo

Sin embargo, este estudio se limitará a los ***POLIEDROS CONVEXOS***, que pueden ser regulares o irregulares.

***Definición*** **1.7.** *(Poliedro Regular):*
*Un poliedro de **n** caras se dice que es regular, si y sólo si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras; además, sus ángulos poliedros también son congruentes.*

En el grupo de polígonos regulares convexos (***Poliedros Regulares***) encontramos solo cinco, y también suelen ser denominados solidos platónicos, (en honor a Platón): ***tetraedro***, ***cubo***, ***hexaedro***, ***dodecaedro*** e ***icosaedro***, ver figura 1.15:

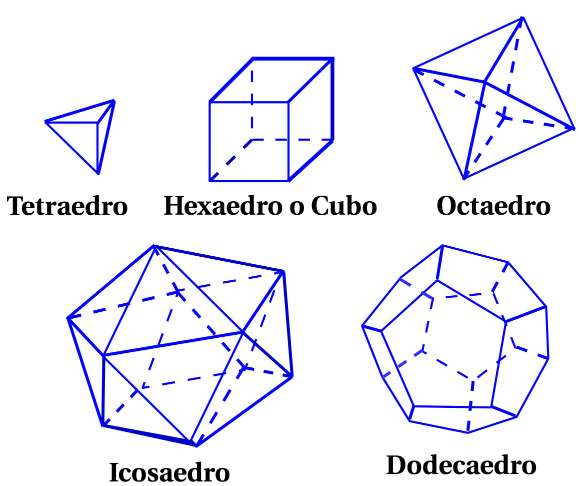
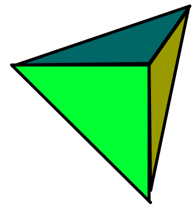
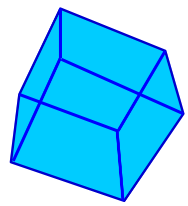



Figura 1.15: *Solidos Platónicos*

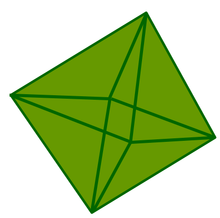
1. ***Tetraedro Regular:*** Está limitado por 4 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 4 vértices, 4 ángulos triedros, 6 aristas y 6 ángulos diedros.



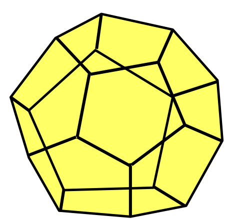
2. ***Hexaedro regular o cubo:*** Está limitado por 6 caras que son cuadrados. Tiene 8 vértices, 8 ángulos triedros, 12 aristas, 12 ángulos diedros y 4 diagonales congruentes y concurrentes.



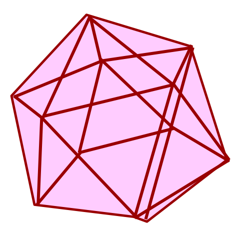
3. ***Octaedro regular:*** Está limitado por 8 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 6 vértices, 6 ángulos tetraedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros. Está formado por dos pirámides unidas por su base común.



4. ***Dodecaedro regular:*** Está limitado por 12 caras que son pentágonos regulares. Tiene 20 vértices, 20 ángulos triedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



5. ***Icosaedro regular:*** Está limitado por 20 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 12 vértices, 12 ángulos pentaedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



Otro tipo de poliedros importantes son los prismas y las pirámides, los mismos que serán estudiados más adelante.

## 1.7. Teoría de grafos

En el último siglo, la matemática se ha convertido más que en una ciencia, en una herramienta muy importante para optimizar procesos en campos como la economía, la administración, la ingeniería y la física, entre otras áreas.

Es así como muchos de los algoritmos y conceptos de la matemática moderna tienen su origen en la necesidad de solucionar problemas de la vida cotidiana.

En esta sección, se plantearán ideas y propiedades de uno de los conceptos relacionados con lo mencionado anteriormente: ***grafo***.

> ***Definición*** **1.8.** *(Grafo):*
> *Es un conjunto finito de puntos y enlaces entre esos puntos. Los puntos reciben el nombre de vértices y los enlaces reciben el nombre de aristas.*

**Ejemplo**

***Ejemplo*** **1.3.** La empresa de energía de una ciudad paga a una compañía de mensajería por entregar; en cada una de las casas de los usuarios del servicio, el recibo correspondiente a cada mes.

El siguiente plano muestra las cuadras de uno de los sectores que debe visitar un empleado de la empresa.

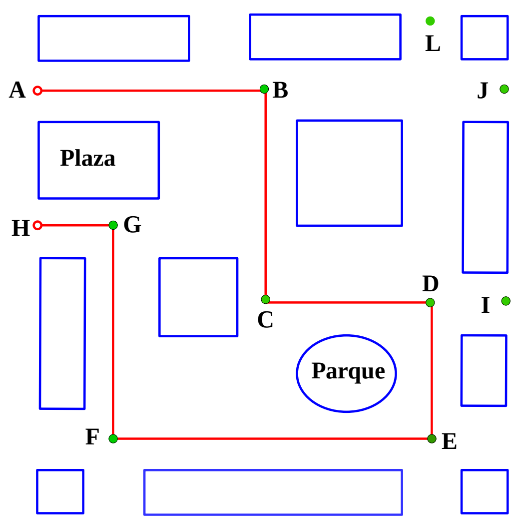



Figura 1.16: *Ejemplo de grafo*

El empleado debe entregar recibos en cada una de las casas del sector. Este tipo de problemas se relaciona con varios aspectos:

- ¿Cuál será la manera más productiva de hacerlo?
- ¿Cuál será el recorrido óptimo en tiempo, dinero y esfuerzo?

- ¿Cuántas veces, como mínimo, tendrá que pasar el empleado por la misma esquina?
- ¿Tendrá que pasar varias veces por la misma cuadra?

El problema de repartir los recibos se puede plantear a partir de una estructura matemática denominada ***grafo***.

En el caso del empleado de la empresa de energía, cada una de las esquinas marcadas con A, B, C, D, E, F, G, H, son los vértices y cada recorrido señalado con un segmento entre dos vértices hace las veces de arista.

Como se puede ver en el plano del ejemplo, cada arista conecta dos vértices distintos.

***Definición*** **1.9.** *(Camino):*
*Es una secuencia de aristas que produce una ruta en el grafo que comienza en un vértice y termina en otro.*

**Algo importante**
Los caminos se notan con el nombre, en orden, de cada uno de los vértices que se visitan en el recorrido.

### 1.7.1. Circuitos

En la cartelera de una aerolínea se presenta el siguiente esquema para que los viajeros identifiquen los vuelos que se ofrecen en la temporada de vacaciones.

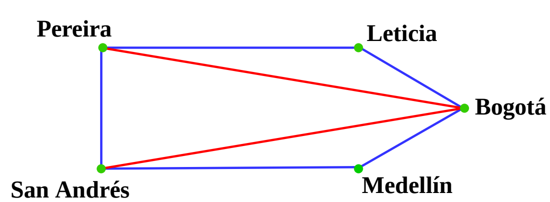



Figura 1.17: *Esquema*

En este caso, los vértices representan las ciudades y las aristas los vuelos entre ellas. Del grafo se puede afirmar, entre otras cosas, que:

- Hay vuelos directos entre Bogotá y cualquiera de las otras cuatro ciudades.
- No hay vuelo directo entre Leticia y Medellín.
- Hay vuelo directo entre Pereira y San Andrés.
- No hay vuelo directo entre Pereira y Medellín.

Si un viajero decide ir de Leticia a Bogotá, de Bogotá a Pereira y volver a Leticia, el grafo que determina su ruta será el que se muestra en la figura 1.18.

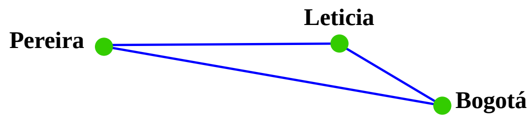


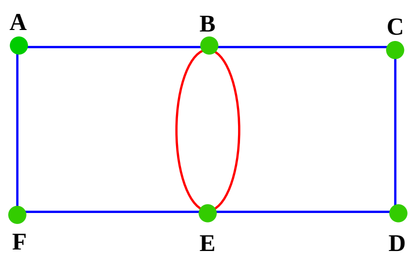

Figura 1.18: *Ejemplo de Circuito*

Es importante anotar que los grafos que se trabajarán son precisamente estos, en los que se parte de un punto y se vuelve a él.

> ***Definición* 1.10.** *(Circuito):*
> *Un circuito es un camino que recorre todo el grafo; comienza y acaba en un mismo vértice.*

**Ejemplo**

***Ejemplo* 1.4.** El grafo de la siguiente figura, representa la ronda que debe hacer el vigilante de un parqueadero.

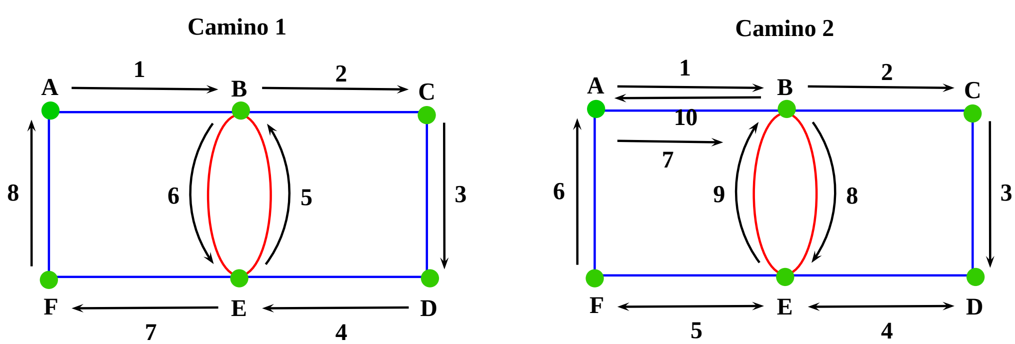



*a.* Trazar dos circuitos diferentes si debe partir del punto $A$.

*b.* Determinar cuál será el camino óptimo para el recorrido.

***Solución:***

*a.* Para realizar la ronda completa el vigilante puede seguir los siguientes caminos:




*b.* En el camino 1 el vigilante hace la ronda completa sin pasar dos veces por la misma arista; en el camino 2 el vigilante cumple su función pero pasa tres veces por la arista que va de $A$ hasta $B$. Así que, el camino óptimo es el que se determina en uno, pues por el que cumple su función y camina menos.

### 1.7.2. Circuitos de Euler

En el ejemplo del vigilante que debe hacer la ronda en el parqueadero se determinaron dos caminos diferentes que iniciaban y terminaban en el punto $A$. La determinación del camino óptimo se plantea teniendo en cuenta aquel en el que el vigilante no pasa dos veces por el mismo sector, es decir, no recorre dos veces la misma arista. Este tipo de circuitos recibe el nombre de ***Circuitos de Euler***.

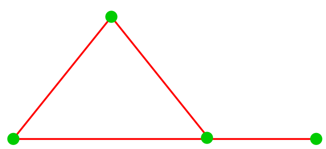
***Definición* 1.11.** *(Circuito de Euler):*
*Un circuito en el cual se recorre cada arista una sola vez se llama circuito de Euler.*

**Algo importante**
No todos los grafos tienen circuitos de Euler.

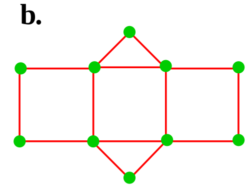
**Ejemplo**

***Ejemplo*** **1.5.** Determinar si es posible trazar un circuito de Euler en cada uno de los siguientes grafos.

**a.**



**b.**

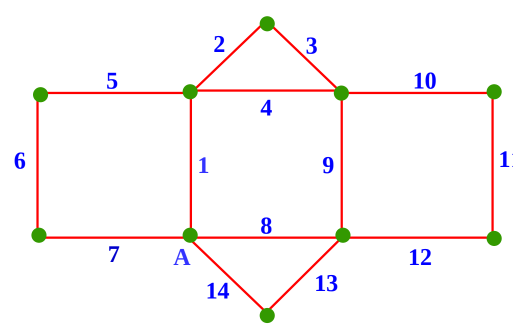


***Solución:***

Se realizan trazos sobre el grafo para determinar si es posible encontrar un circuito de Euler.

**a.** En este caso es imposible trazar un circuito sin tener que pasar dos veces por la misma arista.

**b.** Sobre este grafo sí es posible encontrar un circuito de Euler:

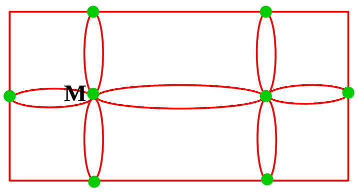



**El circuito inicia en A y termina en A.**

**Determinación de la existencia de circuitos de Euler en un grafo**

Hasta ahora encontrar circuitos de Euler parece ser una tarea de ensayo y error, pero es posible determinar si en un grafo se puede trazar un circuito de Euler teniendo en cuenta dos conceptos: *valencia* y *conexión*.

•**Valencia de un vértice**: La valencia de un vértice en un grafo corresponde al número de arista que se unen en él. Por ejemplo,




**El vértice M tiene valencia 8.**

•**Grafo conexo**: Se dice que un grafo es conexo si para cada par de vértices existe almenos un camino de una o más aristas que conectan los dos vértices.

Si en un grafo hay al menos un par de vértices que no están conectados por una arista, se dice que el grafo es *no conexo*.

Por ejemplo, el grafo de la figura 1.19 no es conexo, pues no existe una arista que una los vértices $B$ y $D$.

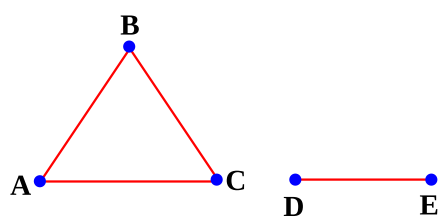



Figura 1.19: *Grafo no conexo*

### 1.7.3. Relación de Euler

El matemático Leonhard Euler demostró la relación conocida como “**la relación de Euler**" sobre las “**partes**" de los poliedros convexos, es decir, el número de caras (**C**) que se añade al número de vértices (**V**) es igual al número de bordes (**aristas (A)**) más **2**, además, dicha relación se denomina ***fórmula de Euler*** es decir:

$$\mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + \mathbf{2}$$

***Nota:*** **esta relación es válida para cualquier poliedro y solo para poliedros convexos.**

Por ejemplo, podemos comprobar si el cubo es un poliedro convexo, de modo que, podemos utilizar la relación de Euler. Observe en la figura 1.20 que en el cubo se cuentan seis caras ($C = 6$), ocho vértices ($V = 8$) y 12 aristas ($A = 12$).

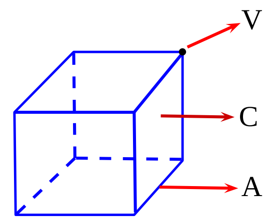



Figura 1.20: *Cubo*

sustituyendo el número de caras, vértices y aristas en la relación de Euler, tenemos:

$$6+8=12+2$$

Por lo tanto, como los dos lados de la ecuación son el mismo valor, se puede concluir que el cubo es un poliedro convexo.

Ahora, observemos el Tetraedro,

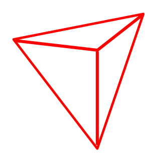


Figura 1.21: *Tetraedro*

sustituyendo el número de caras, vértices y aristas en la relación de Euler, tenemos:

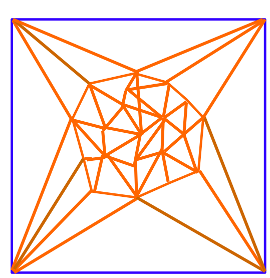
$$4+4=6+2$$

Por lo tanto, también se puede concluir que el Tetraedro es un poliedro convexo y que la relación de Euler, solo será válida para poliedros convexos.

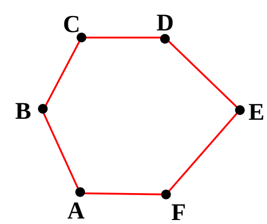
## 1.8. Problemas Propuestos

- **Problema 1:** En la ciudad de los lagos hay 7 lagos conectados por 10 canales, de modo que se puede navegar desde un lago hasta otro cualquiera a través de ellos. ¿Cuántas islas hay en la ciudad de los lagos?

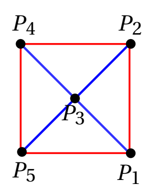
- **Problema 2:** En el interior de un cuadrado marcamos 20 puntos y los unimos entre sí y con los vértices del cuadrado mediante segmentos que no se cortan de modo que el cuadrado queda dividido en triángulos. ¿Cuántos triángulos han quedado dibujados?



- **Problema 3:** Prueba que para un grafo plano, $2A \geq 3F$.
- **Problema 4:** Prueba que para un grafo conexo y plano $A \leq 3V - 6$
- **Problema 5:** ¿Se pueden construir tres casas y tres pozos de modo que hayan caminos desde cada casa hasta cada pozo sin que los caminos se crucen?
- **Problema 6:** Prueba que el grafo completo de orden 5 no es plano.
- **Problema 7:** Encontrar los grafos que corresponden a cada uno de los cinco poliedros regulares, comprobar que son grafos planos, y a partir de ahí, demostrar que para ellos se cumple la relación de Euler.
- **Problema 8:** Determinar si el siguiente grafo tiene un circuito de Euler. En caso de verificar que existe tal circuito, trazarlo.




- **Problema 9:** La creación de cierta pieza electrónica debe pasar por cinco procesos $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ y $P_5$, pero no es necesario que pase por ellos en orden. El siguiente grafo representa la situación.

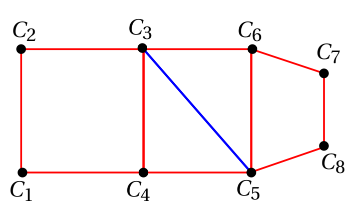



a. Escribir tres caminos diferentes si es indispensable que la pieza pase primero por $P_1$.

b. Dibujar un circuito que inicie en $P_2$.

c. ¿Es posible encontrar varios circuitos en este grafo? En caso afirmativo dibujarlos.

- **Problema 10:** Cierta empresa de transporte ofrece a su clientela ruta para transportarse entre ocho ciudades. El siguiente esquema muestra los recorridos.




a. ¿Cuál es la mejor ruta para ir de $C_1$ a $C_6$?

b. Trazar un circuito que inicie en $C_3$.

# CAPÍTULO 2

# PRISMA

## 2.1. Introducción

En el capítulo anterior hablamos sobre algunos conceptos básicos de la geometría espacial. Ahora vamos a hablar sobre el prisma y la discusión será el contexto de la secuencia en la historia de este dentro de las matemáticas.
Posteriormente, se presentarán los principales elementos del prisma, como se clasifican, ejemplos y sus relaciones matemáticas, el cálculo de las áreas laterales, totales y su volumen. Para terminar este capítulo, se proponen algunas actividades que el estudiante y/o profesor puede trabajar como actividad de afianzamiento.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

1. Dado un prisma, reconocer los elementos que lo conforman.
2. Dado un prisma, identificar si es oblicuo, recto o regular.
3. Dado un paralelepípedo, analizar sus principales características.

## 2.2. Hechos Históricos

Los textos históricos muestran que el prisma es una figura geométrica conocida desde antes del año 2000 (a.C.), porque, de acuerdo con *Eves (2004)*,[1] el tiempo ha demostrado estar familiarizado con el volumen del paralelepípedo recto y, más en general, el volumen del prisma recto de base trapezoidal. Los estudios muestran que, históricamente, produjo muchos eruditos dedicados al estudio del prisma. Entre estos se destacan ***Platón***, ***Demócrito*** y ***Arquímedes***.

Platón, quien vivió en el siglo IV a.C., entre sus estudios geométricos mostró interés en estudiar el cubo cuando estudió los poliedros regulares. Cada poliedro estaba asociado con uno de los elementos naturales, y era el cubo el asociado con la tierra. Mientras que Demócrito, comparó el volumen del prisma con el volumen de la pirámide y Arquímedes (287-212 a.C.) definió los sólidos Arquímedianos.

[1] Howard W. Eves, autor bien conocido y veterano profesor de la Universidad de Maine, fallecido el 6 de junio de 2004, tras una larga enfermedad. Tenía 93 años.

Con base en estos y otros datos, varios matemáticos se han dedicado al estudio del prisma con diferentes objetivos, en este trabajo de grado se abordará el concepto de ***prisma*** de acuerdo con algunos autores contemporáneos como *"Vissotto Bongiovanni"* en su libro *"Matemática y Vida"*.

## 2.3. Los Empaques Secundarios

Hoy en día, casi todo lo que compramos o vendemos termina siendo entregado en paquetes. Podemos ver esto en las compras de rutina, por ejemplo, al comprar el pan, por lo general viene empaquetado en bolsas de papel o plástico, así como la compra de otros objetos tales como refrigeradores, licuadoras, lavadoras, que por lo general vienen protegidas por espuma de polietileno, burbujas de plástico y se empacan en cajas de cartón de gran tamaño.

Pero en última instancia, ***¿Qué es el empaque?***, podemos decir que un empaque son todos los materiales que envuelven un producto en particular y tiene como objetivo protegerlo mientras se mantienen las propiedades del producto durante su transporte y almacenamiento hasta llegar al consumidor final.

Observamos que algunos productos se presentan con más de un empaque, por ejemplo medicamentos, que generalmente vienen en una caja de cartón.


Figura 2.1: *Cajas de Cartón*

Sin embargo, no solo viene en la caja, sino también en otro paquete que lo contiene, por ejemplo, una botella, un tubo etc. Esto se denomina ***el empaque secundario***.

La función principal del empaque secundario es hacer que el producto llegue al consumidor sin cambiar sus características y propiedades. Además, estos empaques traen impresos una gran cantidad de información importante, para el consumidor, por ejemplo, el número del lote, fecha de fabricación, la dosificación, el registro ante el Ministerio de Salud, etc.

Hay que recordar, también, que estos empaques se presentan con pistas y cada pista tiene un cierto significado, es decir, la banda roja significa que el producto debe ser vendido sólo con receta médica, pero sin un control especial (venta libre), mientras que para la venta y distribución de otros medicamentos, la banda negra significa que el producto es para un uso particular y para controlar los puntos de venta o distribución de ese producto.

Por lo tanto, podemos comprobar que estos paquetes no sólo sirven para proteger el transporte de medicamentos, sino también para informar, supervisar y, al mismo tiempo, proteger al consumidor contra posibles manipulaciones.

## 2.4. Concepto Geométrico del Prisma

En la geometría del espacio, el formato de la mayoría de empaques secundarios de medicamentos, representan una importante figura del espacio, llamada prisma. Por lo tanto, vamos a estudiar en detalle el empaque secundario de los medicamentos, por supuesto, con énfasis en las matemáticas.

En la preocupación de definir el prisma, se hizo una indagación en Internet y a través de enciclopedias y diccionarios relacionados con las matemáticas y en la consulta se destacan algunos de los conceptos que se encuentran enumerados a continuación:

1. ***El Prisma*** *es un sólido geométrico limitado por caras planas, en el que las bases se encuentran en planos paralelos. De acuerdo a la inclinación de las aristas, los prismas pueden ser rectos u oblicuos.* (PRISMA, Matemáticas en esencia, 2009).

2. ***El Prisma*** *es un poliedro formado por dos caras (una superior y otra inferior) opuestas paralelas y congruentes (también llamados bases) unidos por aristas. Los lados de un prisma son paralelogramos. El nombre del prisma se proporciona de acuerdo con la forma de las bases. Así, si las bases son hexágonos, tenemos un prisma hexagonal. El prisma se clasifica en recto, cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases, y oblicuas cuando no lo son.* (PRISMA, Wikipedia, 2009)

3. ***El Prisma*** *es una figura sólida cuyas bases o extremos tienen el mismo tamaño y la misma forma y son paralelas entre sí, y cada lado es un paralelogramo.* (PRISMA, el diccionario libre por Farlex, 2009)

4. ***El Prisma*** *es un poliedro en el que ambas partes son polígonos (las bases del prisma), mientras que los otros lados (los lados) son paralelogramos. Las bases son congruentes y situadas en planos paralelos. Un prisma se llama recto si los lados son ortogonales con las bases.* (PRISMA, Link Springer, 2009).

5. ***Los Prismas*** *son sólidos limitados por dos superficies poligonales convexas de $n$ lados, paralelas y congruentes determinadas por paralelogramos.* (Bongiovanni; VISSOTO, Laureano, 1993).

Basados en estas indagaciones, podemos concluir que:

***Definición*** **2.1.** *(Prisma):*
*Es un poliedro que consta de dos caras poligonales idénticas y paralelas entre sí rodeado por polígonos cuadriláteros de acuerdo al número de lados de las caras que atraviesan el mismo.*

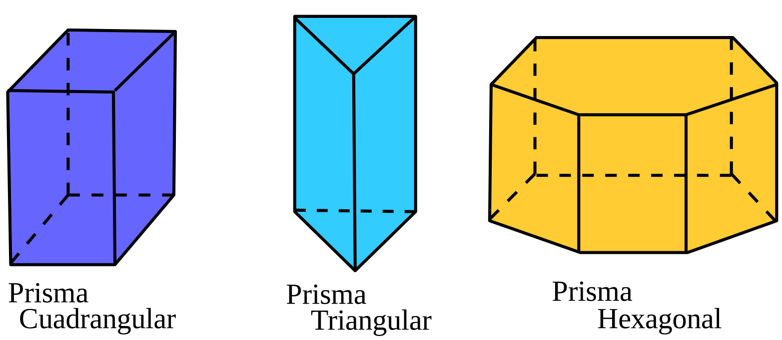



Figura 2.2: *Modelos de Prisma*

Los empaques secundarios (cajas de cartón) por lo general tienen la forma de un prisma de base rectangular, es decir, la superficie de sus bases es rectangular. Podremos observar en la siguiente figura, un modelo para el envasado de medicamentos en forma de un prisma de base rectangular:

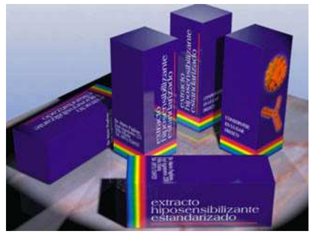



Figura 2.3: *Empaque secundario de medicamento*

## 2.5. Elementos de un Prisma

En base a la ***definición 2.1*** adoptada en la sección anterior y tomada para este trabajo, se destacan los elementos del prisma, como se muestra en la figura 2.4.

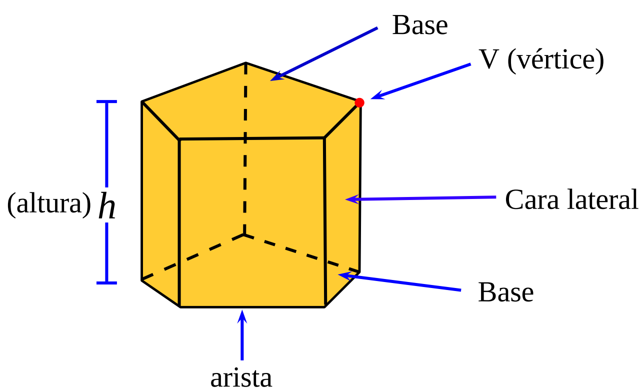



Figura 2.4: *Prisma y sus partes*

- Bases (***B***) son las dos superficies paralelas que ofrecen prisma poligonal.
- La altura (***h***) es la distancia entre los planos que contienen las bases.
- Las caras laterales (***Cl***) son todas las superficies (paralelogramo) que rodean las bases del prisma.
- Superficie lateral es la unión de todos los paralelogramos que forman las caras laterales, cuya medida se llama área lateral del prisma.
- La superficie de las bases es la unión de las dos bases, cuya medida se denomina área de las bases del prisma.
- El área total es la unión entre la superficie lateral y la superficie de las bases, cuya medida se denomina la superficie total del prisma.

- Vértice (***V***) son puntos de intersección entre tres caras, es decir, dos caras y la cara vista de una base.
- Las aristas o bordes (***al***) son los segmentos de recta comunes entre dos caras.

Al desarmar el prisma de la figura 2.4, se obtiene una figura plana llamada ***desarrollo del prisma***. (En este caso pentagonal)

El desarrollo del prisma está formado por:

- Dos pentágonos congruentes.
- Rectángulos cuyas bases son iguales al perímetro del pentágono y cuyas alturas son iguales a la altura del prisma.

Desarrollo del prisma pentagonal

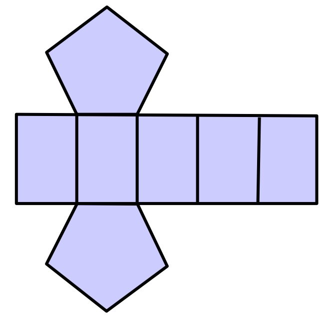


Figura 2.5: *D. Prisma Pentagonal*

En cualquier prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

- El ***área lateral*** ($A_L$) de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales y corresponde al producto de la altura del prisma por el perímetro de una de las bases.

$$A_L = h \bullet P_B \qquad P_B\text{: perímetro de la base.}$$

- El ***área total*** ($A_T$) del prisma es la suma del área de las dos bases y el área lateral del prisma.

$$A_T = A_L + 2A_B \qquad\qquad A_B\text{: área de la base.}$$

  Al reemplazar,

$$A_T = P_B \bullet h + 2A_B$$

- El ***área de la base*** ($A_B$) es el área de una figura plana, por lo general un polígono, por tanto su cálculo se realiza igual que en geometría plana.

**Recordemos:** La fórmula para obtener el área de un polígono regular cualquiera es:

$$A = \frac{P \bullet a}{2}$$

donde ***P***, es el perímetro del polígono y ***a*** es la ***apotema***. El área del círculo es:

$$A = \pi r^2$$

que junto con la fórmula de la longitud de la circunferencia (perímetro del círculo):

$$C = 2\pi r$$

posibilita el cálculo del área de cualquier figura regular; al aplicar estas fórmulas en la resolución de problemas es conveniente que en las medidas dadas se utilicen las mismas unidades (Km, m, cm, etc.).

Por lo tanto, $A_B$ del prisma podrá ser calculada sin ningún problema.

## 2.6. Clasificación de los Prismas

Los prismas se clasifican según el polígono que corresponde a sus ***bases*** y a su ***inclinación***. También, se pueden clasificar los prismas en ***rectos*** y ***oblicuos***. Así, los prismas pueden ser:

### 2.6.1. Clasificación de acuerdo a la Base:

De acuerdo a la base del prisma tenemos por ejemplo:

- ***Prisma triangular:*** prisma cuyas bases son triángulos.
- ***Prisma cuadrangular:*** prisma cuyas bases son cuadriláteros.
- ***Prisma pentagonal:*** prisma cuyas bases son pentágonos.
- ***Prisma hexagonal:*** prisma cuyas bases son hexágonos.

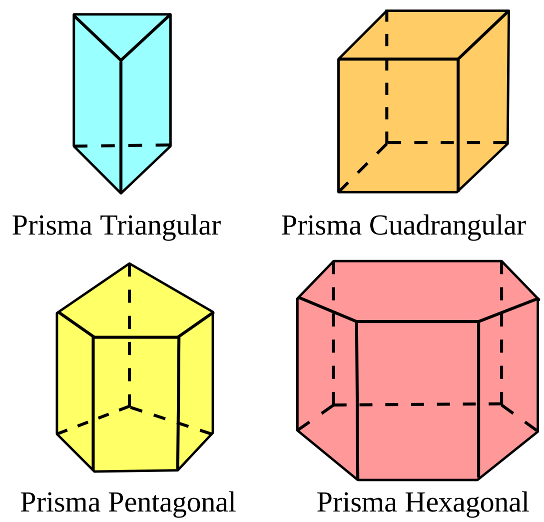



Figura 2.6: *Según su base*

Teniendo en cuenta lo anterior, los prismas toman su nombre de acuerdo con los polígonos que forman sus bases.

### 2.6.2. Clasificación de acuerdo a su Inclinación:

De acuerdo a la inclinación, los prismas se clasifican de dos maneras:

- ***Prisma Recto:*** las aristas laterales son paralelas a los planos que contienen las bases.

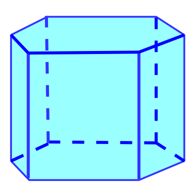


Figura 2.7: *Prisma Recto*

- ***Prisma Oblicuo:*** las aristas laterales no son paralelas a los planos que contienen las bases.

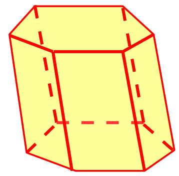


Figura 2.8: *Prisma Oblicuo*

> ***Definición* 2.2.** *(Prisma Regular):*
> *Un prisma recto se llama regular cuando el polígono de sus bases es regular, o sea, todos sus lados o aristas son congruentes.*

## 2.7. Casos Especiales de Prismas Cuadrangulares

Cuando la base del prisma es un cuadrilátero se puede llamar: ***Cubo*** o ***paralelepípedo***.

### 2.7.1. Paralelepípedo

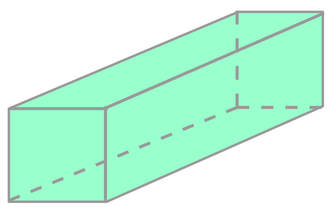


Figura 2.9: *Ortoedro*

El Paralelepípedo es una forma sólida con seis caras de forma que todas las caras opuestas son paralelas. En un paralelepípedo, las seis caras son paralelogramos. Si las caras son rectángulos, se le llama paralelepípedo rectangular; un ejemplo es el ortoedro que se muestra en la figura: 2.9.

### 2.7.2. Cubo

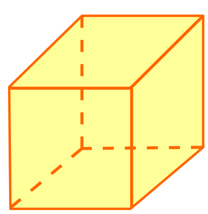


Figura 2.10: *Cubo*

Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base.

## 2.8. Desarrollo del Prisma

Todos los prismas son ***desarrollables***, es decir, sus caras pueden ubicarse en un plano y se puede construir el prisma mediante pliegues. El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por un rectángulo que tiene tantas divisiones como número de caras laterales.

En la siguiente figura se puede observar un prisma recto triangular y su desarrollo:

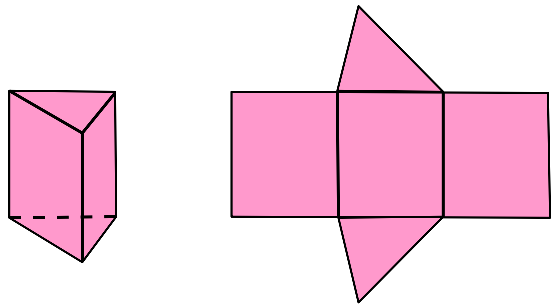


Figura 2.11: *Prisma Triangular y su desarrollo*

Ahora, teniendo en cuenta la figura 2.11 podemos verificar el desarrollo de un prisma triangular que consiste en cinco caras (dos triángulos y tres cuadriláteros) dispuestas en un plano.
Así, de esta manera se puede extender el desarrollo del plano, para todos los prismas, independientemente, de su base.

## 2.9. Cálculo del área y volumen de un Prisma

En cualquier prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

**Ejemplos**

***Ejemplo*** **2.1. Calcular el área lateral, área total y volumen del siguiente prisma triangular.**

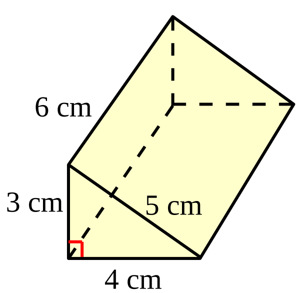



Figura 2.12: *Prisma Triangular*

***Solución:***
Para calcular el área lateral del prisma se determina el perímetro de la base y se multiplica por la altura.

$$\begin{aligned} P_B &= 3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 12 \text{ cm} \\ A_L &= h \bullet P_B = 6 \text{ cm} \bullet 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Para calcular el área total del prisma se calcula el área de la base. Luego, se suma el área lateral con el doble del área de la base. (ver Pág. 53)

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{3 \text{ cm} \bullet 4 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2 \\ A_T &= A_L + 2A_B = 72 \text{ cm}^2 + 2 \bullet 6 \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, para calcular el volumen del prisma se multiplica el área de la base por la altura.

***(Volumen del Prisma):***
*El volumen (V) del prisma es el producto del área de la base por la altura del prisma.*

$$V = A_B \bullet h$$

Por lo tanto, tenemos:

$$V = A_B \bullet h = 6 \text{ cm}^2 \bullet 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^3$$

Luego, el volumen del prisma triangular es de 36 $\text{cm}^3$.

***Ejemplo*** **2.2. Calcula el volumen del siguiente prisma.**

***Solución:***
Para calcular el área de la base ($A_B$), se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el apotema ($a$).

$$\begin{aligned} h^2 = a^2 + b^2 \quad &\Longrightarrow \quad a = \sqrt{h^2 - b^2} \\ &\Longrightarrow \quad a = \sqrt{25 - 16} \\ &\Longrightarrow \quad a = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

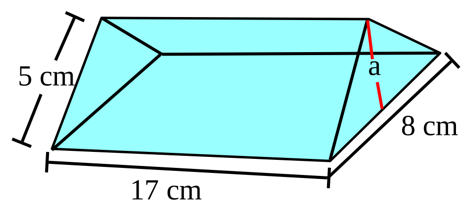



Figura 2.13: *Prisma Triangular*

Se calcula el área de la base que es un triángulo:

$$A_B = \frac{(8 \text{ cm})(3 \text{ cm})}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Luego, se remplaza en la fórmula del volumen de un prisma.

$$V = A_B \bullet h = (12 \text{ cm}^2)(17 \text{ cm}) = 204 \text{ cm}^3$$

***Ejemplo*** **2.3. Calcula el área total y el volumen del siguiente prisma oblicuo.**

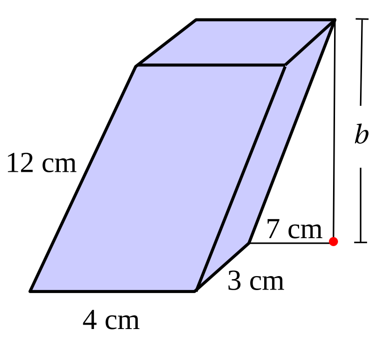



Figura 2.14: *Prisma Oblicuo*

***Solución:***
Para calcular el área lateral del prisma oblicuo, se obtiene el perímetro de la base y se multiplica por la altura; antes debemos recurrir al ***teorema de Pitágoras*** para encontrar la altura ($b$) del prisma:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 \\ (12 \text{ cm})^2 &= (7 \text{ cm})^2 + b^2 \\ 144 \text{ cm}^2 &= 49 \text{ cm}^2 + b^2 \\ 144 \text{ cm}^2 - 49 \text{ cm}^2 &= b^2 \\ 95 \text{ cm}^2 &= b^2 \\ \sqrt{95 \text{ cm}^2} &= b \\ 9{,}74 \text{ cm} &\cong b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura del prisma oblicuo es $b = 9{,}74$ cm.

Luego, calculamos el perímetro de la base y el área lateral:

$$\begin{aligned} P_B &= 4\text{ cm} + 3\text{ cm} + 4\text{ cm} + 3\text{ cm} = 8\text{ cm} + 6\text{ cm} = 14\text{ cm} \\ A_L &= 2((4\text{ cm})(9{,}74\text{ cm})) + 2((3\text{ cm})(12\text{ cm})) \end{aligned}$$

Luego, el área total del prisma es:

$$\begin{aligned} A_T &= 2\,((4\text{ cm})(3\text{ cm})) + 2\,((4\text{ cm})(9{,}74\text{ cm})) + 2\,((3\text{ cm})(12\text{ cm})) \\ &= 2\left(12\text{ cm}^2\right) + 2\left(38{,}96\text{ cm}^2\right) + 2\left(36\text{ cm}^2\right) \\ &= 2\left[12\text{ cm}^2 + 38{,}96\text{ cm}^2 + 36^2\right] \\ &= 2\left[86{,}96\text{ cm}^2\right] \\ &= 177{,}92\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

finalmente, para calcular el volumen del prisma se multiplica el área de la base por la altura.

$$V = A_B \bullet h = \left(12\text{ cm}^2\right) \bullet (9{,}74\text{ cm}) = 116{,}88\text{ cm}^3$$

Luego, el área total y el volumen del prisma oblicuo son respectivamente:

$$\begin{aligned} A_T &= 177{,}92\text{ cm}^2 \\ V &= 116{,}88\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

### 2.9.1. Principio de Cavalieri

El Principio de Cavalieri (denominado en honor a su descubridor Bonaventura Cavalieri en el siglo XVII) es una ley geométrica que enuncia la diferencia de volumen en dos cuerpos. El enunciado es:

***Definición* 2.3.** *(Principio de Cavalieri):*
*Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, poseen entonces igual volumen.*

Hoy en día en la moderna teoría de geometría analítica el principio de Cavalieri es tomado como un caso especial del Principio de Fubini. Cavalieri no hizo un uso extensivo del principio, empleándolo sólo en su ***Método de las indivisibles*** que expone en el año 1635 con la publicación de su obra ***Geometría indivisibilibus*** y también aparece en 1647 en su ***Exercitationes Geometricae***. Antes del siglo XVII sólo se podría calcular el volumen de algunos cuerpos especiales ya tratados geométricamente por los resultados obtenidos por el griego Arquímedes y Kepler.

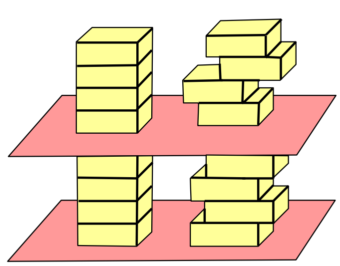


Figura 2.15: *Principio de Cavalieri Ilustrado*

## 2.10. Cálculo de la Diagonal de un Paralelepípedo

Para calcular la diagonal de un prisma ($D$), (*segmento de recta imaginario que une un vértice con otro opuesto de otra base del prisma*), basta con utilizar el teorema de Pitágoras, usando el triángulo rectángulo destacado en la construcción del paralelepípedo de la figura 2.16:

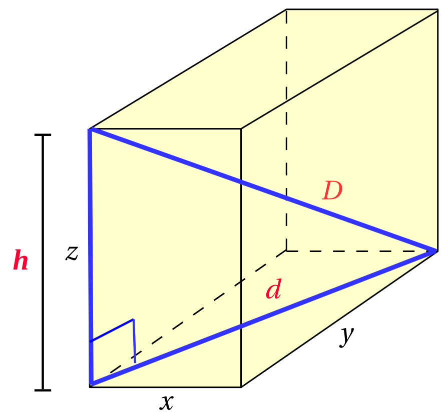



Figura 2.16: *Diagonal de un prisma*

Aplicando el teorema de Pitágoras y usando las aristas del prisma de la figura 2.16 de $x$, $y$ e $z$, tenemos:

$$D^2 = d^2 + z^2$$

sustituyendo la diagonal de la base (d) del prisma, tenemos:

$$D^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2$$

simplificando y extrayendo la raíz, tenemos:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

***Ejemplo* 2.4.** *Calcule la longitud de la diagonal (D) de un cubo.*

**Solución:**
*En el cubo o hexaedro regular, las tres dimensiones son iguales:*

$a = b = c$, *entonces*, $D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

*luego*, $D = \sqrt{3}a$

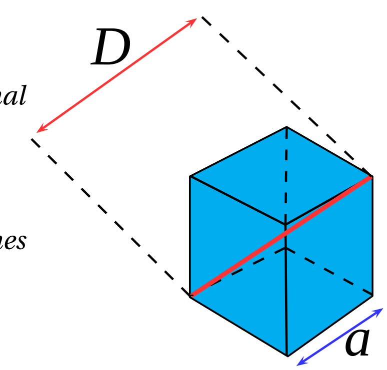



Figura 2.17: *Cubo*

## 2.11. Laboratorio: Familiarización con las fórmulas del prisma

A través de la implementación de objetos cotidianos (*objetos de la vida real*), trabajamos de una manera práctica con las fórmulas correspondientes para los prismas.

### 2.11.1. Aplicación de las fórmulas del prisma

A través de la experimentación, manejar algunos objetos con forma de prismas con diversas bases.

#### Objetivo

Utilizar objetos con la forma de un prisma, la medición de sus dimensiones y aplicar las fórmulas mostradas anteriormente.

#### Materiales

- Objetos con forma de prisma.
- Regla / Escuadra.
- Cinta métrica.
- Arena lavada.
- Probeta graduada.

#### Procedimiento

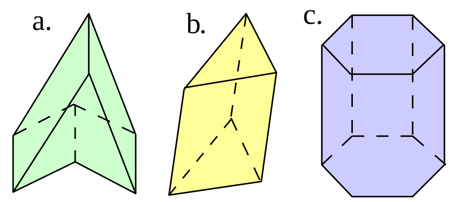
1. Divida la clase en pequeños grupos, cada grupo debe hacer un trabajo;
2. Cada grupo debe traer 4 objetos en forma de prisma, preferiblemente de diferentes bases;
3. Medir las dimensiones de uno de estos objetos;
4. Haz un dibujo con el desarrollo plano de este objeto, utilice la escala, si el objeto es grande;
5. Calcular el área de la superficie del objeto, utilizando las fórmulas propuestas;
6. Calcular el volumen de este objeto, con las fórmulas, y si es posible comparar el volumen con la probeta graduada;
7. Hacer el cálculo de las diagonales del objeto;
8. Repetir el procedimiento desde el punto 3 al 7 para los otros tres objetos;
9. Hacer un informe donde concluya sus comentarios.

#### Nota:

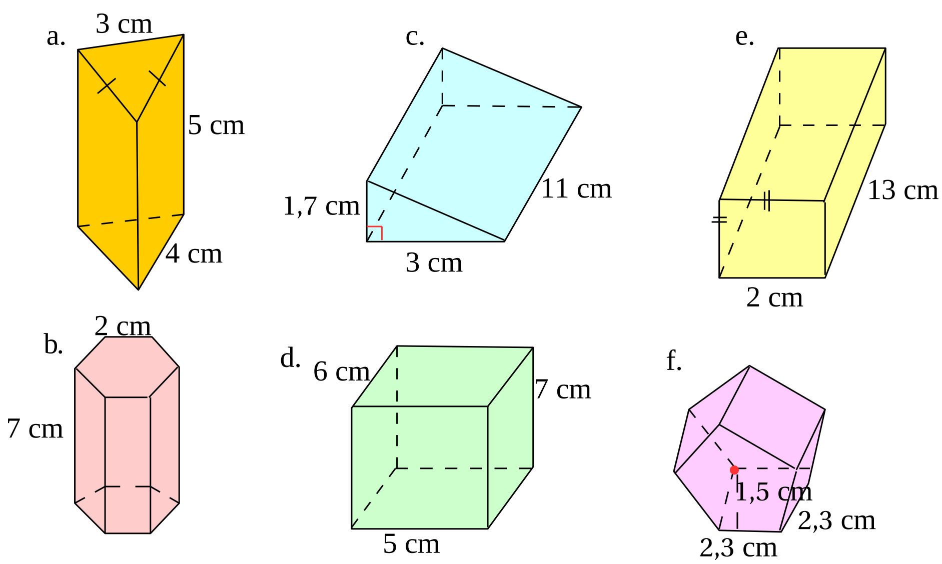
El profesor puede sugerir que un alumno de cada grupo vaya fotografiando o filmando el procedimiento paso a paso para la preparación de una exposición y luego explicarla a sus compañeros.

## 2.12. Problemas Propuestos

1. Determina cuáles de las siguientes figuras son prismas. Justifica tu respuesta.




2. Encuentra el área lateral, el área total y el volumen de cada uno de los prismas.




***Soluciona Problemas***

3. El empaque de un perfume es una caja en forma de prisma hexagonal y la etiqueta ocupa completamente tres de las caras laterales del empaque. Si la base es un hexágono regular de lado 3 cm y la altura del empaque es 15 cm, ¿cuál es la cantidad de etiqueta que se requiere para la elaboración de 6 cajas de perfume?

4. Un recipiente en forma de prisma rectangular tiene 6 cm de ancho, 10 cm de largo y contiene agua hasta una altura de 5 cm. Al colocar una piedra en el interior del recipiente la altura aumenta en 1,5 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

5. Una caja rectangular mide 4 cm de ancho por 3 cm de alto por 2 cm de largo. Con respecto a esta caja responde:

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado caben en la caja?

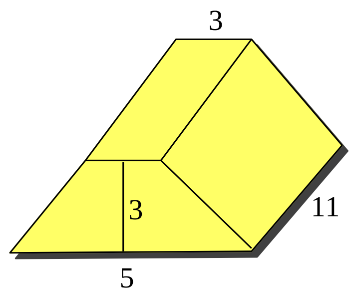
b. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado caben en la caja?

c. ¿Cuántos cubos de $\frac{1}{2}$ cm de lado caben en la caja?

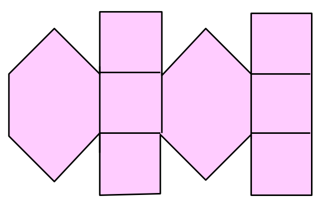
d. Si las dimensiones de la caja se duplican, ¿en cuánto aumenta el área total de la superficie de la caja?

e. Si las dimensiones de la caja se duplican, ¿en cuánto aumenta el volumen de la caja?

6 Los lingotes de oro tienen la forma de un prisma cuya base es un trapecio isósceles. ¿Cuál es el volumen del lingote de oro?




7 ¿El siguiente desarrollo corresponde a un prisma? justificar la respuesta.



8 Debido a la intensidad de la lluvia, la carretera se ha dañado y se ha formado un hoyo en forma de prisma rectangular, de dimensiones 4 m de alto, 5 cm de ancho y 2,8 m de largo. ¿Cuántos $m^3$ de tierra son necesarios para rellenar el hoyo?

9 Una caja de bolsitas de aromática mide 12,5 cm de largo, 6 cm de ancho y 4 cm de alto. ¿Cuántas de estas cajas contiene una caja que mide 100 cm de largo, 60 cm de ancho y 42 cm de alto?

10 Un tanque para almacenar agua con forma de prisma pentagonal regular, contiene 9225 litros de agua. Si el lado del pentágono es de 50 cm y su apotema mide 42 cm, ¿qué altura lleva el agua si se ha llenado solo hasta la mitad?

11 Debemos construir una caja con forma de paralelepípedo, con el objetivo de empacar en ella un horno de microondas, cuyas dimensiones son: 60 cm de ancho, 30 cm de alto y 40 cm de profundidad. Sin embargo, el horno de microondas está protegido por una capa de espuma de 2 cm en todas sus dimensiones. ¿Qué volumen deberá tener la caja?

***Sugerencia:*** Haz un dibujo de la caja (base de prisma rectangular) y aplica la fórmula de volumen discutida en el texto.

12 Un tanque de agua construido en fibra tiene la forma de un cubo, sin embargo, no tenemos el valor de su borde, pero sabemos que la longitud de su diagonal es 63 m. ¿con sólo estos datos podremos calcular su volumen?, si su respuesta es sí, ¿cuál es el valor?.

***Sugerencia:*** Evaluar la asociación entre el borde y la diagonal del cubo a través de las relaciones dadas en el texto.

13 Una caja de cartón, en forma de un paralelepípedo, con 40 cm de altura, 20 cm de longitud y 20 cm de ancho se utiliza para llevar un medicamento en particular desde la fábrica hasta el punto de venta; sabiendo que el empaque secundario de ese producto tiene la forma de un cubo de arista 10 cm. ¿Cuántos medicamentos se pueden transportar en estas cajas?

***Sugerencia:*** comparar el volumen del paralelepípedo con el del cubo.

14 El empaque secundario, de un perfume francés, tiene la forma de un prisma hexagonal regular (lado de la base 5 cm y 10 cm de altura), hechos de un material acrílico. ¿Cuál es la cantidad (área superficial total del prisma) en $cm^2$, de acrílico para producir 1.000 de estos empaques?

***Sugerencia:*** Calcular el área de la superficie de una caja y multiplicarlo por el número total de cajas.

15 Un silo de almacenamiento de grano se construyó con la forma de un prisma octogonal regular, con el lado de la base de 5 m y la altura 10 m. ¿Cuál es la capacidad total (volumen) del silo?

***Sugerencia:*** Utilizar las fórmulas del volumen del prisma, discutidas en el texto.

16 Un cocinero hace una tarta con forma de un prisma cuya base es un triángulo regular, en la que el lado de la base es de 30 cm y 5 cm de altura. Sin embargo, alguien abrió el horno antes de hornear y el pastel se mermo de tal manera que sus medidas lo hicierón de manera proporcional, quedando una altura de 3 cm. ¿Cuál es el volumen final de la tarta? ¿Qué tanto de la tarta se perdio?

***Sugerencia:*** A través de las dimensiones de la figura de la base y de la altura, calcule el volumen de la torta.

17 Una fábrica de artefactos de cemento construye por día 5000 pilares para la elaboración de cercas, en la forma de paralelepípedos cuyas dimensiones son 10 cm de ancho, 15 cm de longitud y 2,5 m de altura. ¿Cuál es la cantidad de concreto (volumen del prisma), en $m^3$, que esta fábrica gasta por día?

***Sugerencia:*** Calcule el volumen de un pilar y multiplíquelo por la cantidad total.

18 Un niño recibe de sus padres cubo de 10 cm de arista, lleno de arcilla y resuelve dividirlo en recipientes más pequeños, con forma de paralelepípedos cuyas dimensiones son 2, 2, y 5 cm respectivamente. ¿Cuál es la cantidad de recipientes que utilizó para distribuir la arcilla?

***Sugerencia:*** Compara el volumen del cubo, con el volumen de un prisma cuadrangular.

19 Una piscina construida en fibra, cuyas dimensiones son $4 \times 8 \times 1{,}4$ m (4 metros de ancho, 8 metros de largo y 1,4 metros de profundo), de borde a borde, y cuyo borde es de 20 cm. ¿Cuál es la cantidad de agua requerida para llenar la piscina de hasta 10 cm de la superficie?

***Sugerencia:*** Calcule el volumen o la capacidad de la piscina de acuerdo con las relaciones dadas en el texto.

20 En un prisma cuadrilátero regular recto, el lado de la base mide 8 cm, si la arista lateral mide 10 cm calcular el valor del área total.

# CAPÍTULO 3

# PIRÁMIDE

## 3.1. Introducción

En el capítulo 2, se estudió, el prisma centrándose en su contexto histórico, sus desarrollos planos, su clasificación, cálculo de área, volumen entre otras, así como algunas actividades propuestas.

Ahora vamos a discutir sobre la pirámide y esta discusión se iniciará abordando el contexto histórico de estas figuras geométricas.

Posteriormente, se presentarán los principales elementos de la pirámide, su clasificación, ejemplos de desarrollos planos y sus relaciones matemáticas, como son, el cálculo de áreas y volumenes. Posteriormente, se discute la sección entre un plano paralelo a su base y su base misma, es decir, el tronco de donde también se mostraran sus aplicaciones.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

1. Dada una pirámide, reconocer los elementos que la conforman.
2. Dada una pirámide, identificar si es oblicua, recta o regular.

## 3.2. Hechos Históricos

Se puede ver a través de las pirámides de Egipto, que el estudio de las Pirámides ha sido de interés por millares de años. Podemos ver esto a través de la Gran Pirámide de Giza, construida alrededor de 2600 a.C que "*el error relativo de la participación de los lados de la base cuadrada es menos de 1/14000 y el error en la participación de los ángulos rectos de los vértices de la base no debe exceder 1/27000*"(Eves, 2004), lo que demuestra la capacidad de conocimiento y la ingeniería en el mencionado trabajo.

Para un análisis más detallado sobre la ingeniería en este tiempo, se debe tener en cuenta que los eruditos babilonios tenían conocimiento matemático superior a los egipcios en el mismo período, mientras que la matemática romana era muy inferior a la de Grecia en estos mismos años.

Un hecho que pone de manifiesto la inferioridad de las matemáticas egipcias es el hecho de que no se distinguían claramente las mediciones exactas de medidas aproximadas. Un ejemplo de esto es que "*se encontró que el volumen de un tronco de una pirámide se encuentra a veces tomando la media aritmética de las bases y multiplicarla por la altura*". (Boyer, 1974).

Por otro lado está el ***papiro de Moscú*** que da una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide con una base cuadrada que puede ser utilizado hoy en día.

Con base en estos y otros datos, varios matemáticos se han dedicado al estudio de la pirámide con diferentes objetivos, en este trabajo de grado se abordará el concepto de pirámide y el de tronco de pirámide de acuerdo con algunos autores contemporáneos.

## 3.3. Los Tejados

En la sociedad en que vivimos se puede observar una gran preocupación por la cobertura de casas, galpones, cobertizos, cabañas, en fin, todos aquellos lugares que de cierta forma son utilizados como vivienda o almacenamiento.

En otros tiempos, esta preocupación también existió. Los animales, y especialmente el hombre, siempre se han preocupado de protegerse de los fenómenos naturales, tales como el frio, la lluvia, el sol en exceso, entre otros. Sin embargo, a menudo se utilizaban cuevas naturales que se formaron bajo las piedras.

Hoy en día, esta preocupación va más allá de la protección contra estos fenómenos, pero generalmente tiene por objeto un factor estético y también el factor económico. En base a estas preocupaciones al momento de elegir el tipo de cobertura más adecuado para una construcción en particular, debe tenerse en cuenta la función del edificio, es decir, su utilidad y, sin embargo, en la mayoría de los casos se debe usar material impermeabilizante, aislante térmico y acústico.

Pensando en el factor estético, la elección del material utilizado en la cubierta debe hacerse mediante la observación de la forma y especialmente en el aspecto armónico con respecto a la línea arquitectónica, así mismo, las dimensiones, textura y color de estos materiales.

Pensando en el factor económico, debe hacerse un análisis, de costo-beneficio es decir, pensar en el costo en relación con la sostenibilidad y la conservación del aspecto natural del material elegido.

Figura 3.1: *Tejado Piramidal*

Básicamente, para hacer la elección de la cubierta (techo) más apropiada, deben tenerse en cuenta estos detalles. De otro lado, es necesario realizar un análisis técnico de la región a la que será utilizado, teniendo en cuenta el clima de la región, es decir, la incidencia de calor, frío, lluvia, granizo y similares.

Basados en todas estas preocupaciones hay muchas opciones de material que se pueden escoger para el techo, de modo que en el futuro no se arrepentirá. Sin embargo, las coberturas que son más utilizadas en la actualidad consisten en un armazón, generalmente de madera y cubierta con tejas (material de recubrimiento). Este tipo de cobertura se llama ***el techo***. Si bien todos los tipos de techos son importantes, pero vamos a dar énfasis a los ***tejados de forma cuadrangular***.

Algunos techos requieren estructuras más grandes, generalmente, para la cobertura de grandes almacenes o depósitos, tales que, optan por tejas más ligeras, mientras que las estructuras que pueden abarcar más, no se usan teniendo en cuenta un factor estético o económico ni Práctico. Pero cuando se trata de la estética, de construcciones residenciales, es común utilizar estructuras de madera con acabados y tejados sofisticados; de hecho, hoy en día son diversos los modelos y materiales que se producen.

Sin embargo, las baldosas de barro cocido se han utilizado durante muchos años y sigue siendo el campeón de uso, también conocido como tejas de barro. Hasta hace poco el azulejo fue el azulejo de la arcilla modelo francés más conocido y más utilizado consecutivamente. Sin embargo, hoy podemos decir que este modelo, aunque hermoso, está fuera de moda, dando lugar a la teja romana y teja portugués.

Una vez que se hizo la elección de tejas de arcilla con estructura de madera, tendrá que decidirse qué tipo de techo, ya que hay varios tipos que se pueden elegir, por supuesto, hay que recordar el diseño arquitectónico y el factor económico. Para tomar esta decisión, es importante entender cómo se define el techo, que, por definición, tienen sus nombres por la cantidad de lados planos inclinados que sirven para drenar el agua de lluvia: un canal, dos canales, tres y cuatro canales y múltiples canales.

En este texto se hará énfasis en los tejados de cuatro canales, como los de la casa de la figura 3.2.

Figura 3.2: *Casa de 4 canales*

Este tipo de techo se utilizó ampliamente hasta mediados del siglo pasado, se caracterizó por un tejado de forma cuadrangular con formas regulares e irregulares, que consta de cuatro planos inclinados cuya reunión de estos cuatro planos forman un vértice, es decir, toma la forma de una pirámide de base cuadrada. Podemos ver, especialmente, este tipo de techo en los edificios antiguos y barrios, así como en el pueblo cuya arquitectura es de tipo colonial.

## 3.4. Concepto Geométrico de Pirámide

En la Geometría del Espacio, la forma del tejado de cuatro canales, representa una importante figura del espacio, llamada pirámide. Por lo tanto, vamos a estudiar detalladamente el tejado de cuatro canales, por supuesto, enfocado hacia las matemáticas.

En la preocupación de definir la pirámide se hizo una consulta en Internet a través de enciclopedias y diccionarios relacionados con las matemáticas y entre ellos se destacan algunos de los conceptos enumerados a continuación:

1. "*Consideremos un polígono contenido en un plano **P** (por ejemplo, el plano horizontal) y **V** un punto situado fuera de este plano. Una **pirámide** es la reunión de todos los segmentos que tienen un extremo en **V** y otro en cualquier punto del polígono **P**. El punto **V** se llama el vértice de la pirámide*". (PIRÁMIDE, Matemáticas fundamentales, 2009).

2. "*Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado ápice. El ápice o cúspide también es llamado vértice de la pirámide, aunque una pirámide tiene más vértices, tantos como el número de polígonos que lo limitan*". (http://es.wikipedia.org)

3. "*Una **pirámide** es un poliedro en el que una de sus caras es un polígono ( base), mientras que las otras caras (caras laterales) son triángulos con un vértice común (o vértice de la pirámide)*". (PIRÁMIDE, Springer Link, 2009).

4. "*Una **pirámide** de $n$-**lados** es un poliedro formado por una base poligonal y un punto, llamado vértice, y por $n$ caras triangulares ($n \geq 3$). En otras palabras, es un sólido cónico con base poligonal*". (PIRÁMIDE, Diccionario Libre por Farlex, 2009)

5. "*Una **pirámide** es la unión de todos los segmentos de recta que unen un determinado punto con los puntos que se sitúan sobre un determinado polígono*". (PIRÁMIDE, Diccionario Matemático, 2009).

Basados en estas indagaciones, podemos concluir que:

> ***Definición* 3.1.** *(Pirámide):*
> *Una pirámide está formada por todos los segmentos de recta que unen cada punto del contorno del polígono (de $n$-lados con $n \geq 3$) de su base con un punto llamado vértice representado por **V**, que no está en el plano de la base.*

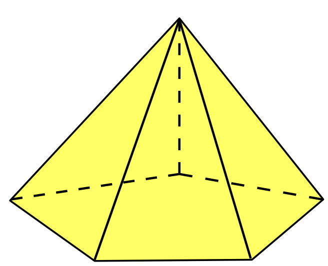


Figura 3.3: *Pirámide Pentagonal*

Con base en esta definición, podemos destacar algunos tipos de pirámides, como los que se muestran a continuación:

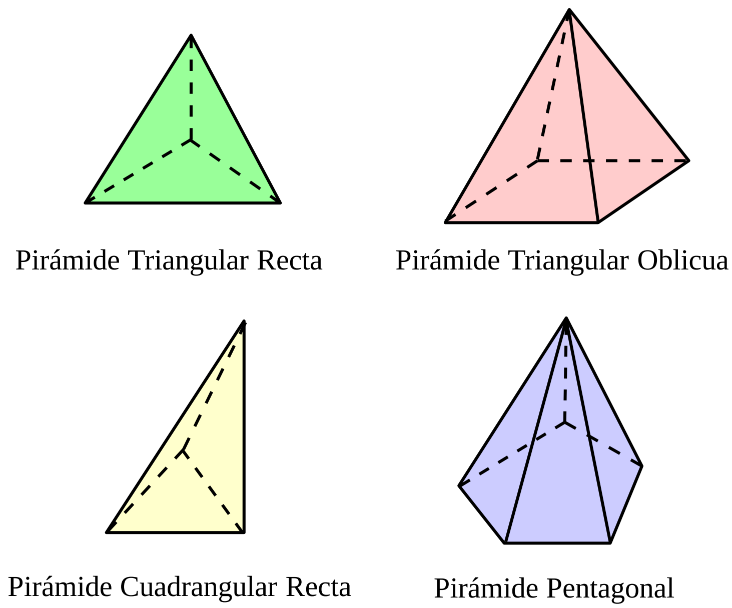



Figura 3.4: *Modelos de Pirámides*

## 3.5. Elementos de una Pirámide

En base a la ***definición 3.1***, se destacan los elementos de la pirámide, como se muestra en la figura 3.5.

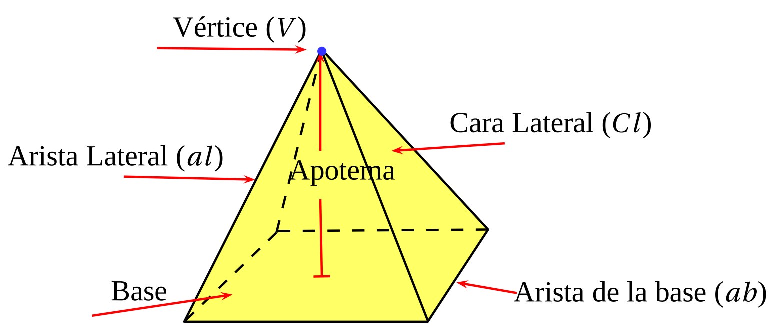



Figura 3.5: *Elementos de la Pirámide*

- Arista lateral (***al***) son todos los segmentos de recta que unen los vértices de la base con el vértice de la pirámide.
- La altura (***h***) es la distancia perpendicular entre el vértice y el plano que contiene a la base.
- Arista de la base (***ab***), son todos los lados del polígono que forman la base de la pirámide.
- Base (***b***) es la región poligonal en que se apoya la pirámide.

- Superficie lateral, es la suma de las áreas de las caras laterales, cuya medida se llama área lateral de la pirámide.
- Superficie de la base, es la superficie de la región poligonal que forma la base de la pirámide, cuya medida se denomina área de la base.
- Vértice de la pirámide es un punto, generalmente, denotado por ($\boldsymbol{V}$), en el que todas las caras laterales se encuentran.
- La superficie total de la pirámide, es la unión de la superficie lateral con la superficie de la base, por lo tanto, el área total de la pirámide es la suma entre el área lateral y el área de la base.
- Apotema ($\boldsymbol{a}$) es la altura de cada triángulo que forma cada cara lateral.

## 3.6. Clasificación de las Pirámides

Las pirámides se clasifican según el polígono que corresponde a su ***base***, en pirámide triangular, hexagonal, pentagonal, entre otras. Además, una pirámide puede ser ***recta*** u ***oblicua***.

### 3.6.1. Clasificación según su Base:

De acuerdo a su base, tenemos:

- ***Pirámide triangular:*** pirámide cuya base es un triángulo.
- ***Pirámide cuadrangular:*** pirámide cuya base es un cuadrilátero.
- ***Pirámide pentagonal:*** pirámide cuya base es un pentágono.
- ***Pirámide hexagonal:*** pirámide cuya base es un hexágono.

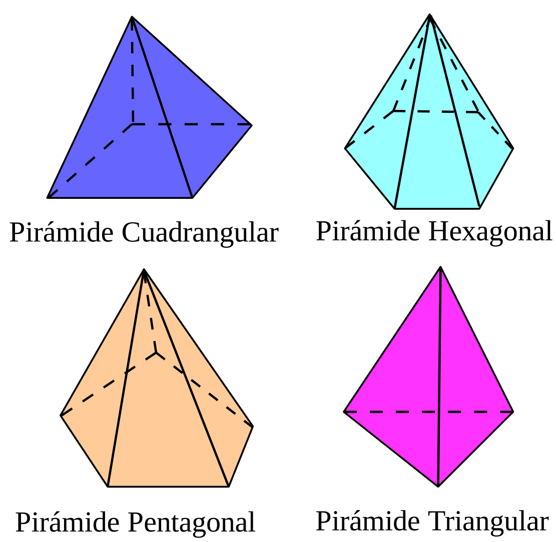



Figura 3.6: *Según su base*

### 3.6.2. Clasificación de acuerdo a su Inclinación:

De acuerdo a su inclinación, las pirámides se clasifican de dos maneras:

- ***Pirámide Recta:*** es un tipo de pirámide cuyas caras laterales son triángulos isósceles. En este tipo de pirámides la recta perpendicular a la base que pasa por el ápice corta a la base por su circuncentro.

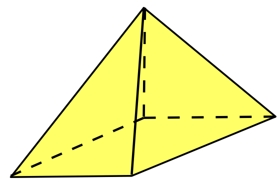


Figura 3.7: *Pirámide Recta*

- ***Pirámide Oblicua:*** es aquella en la que no todas sus caras laterales son triángulos isósceles; es decir, alguna de sus caras laterales es un triángulo escaleno.

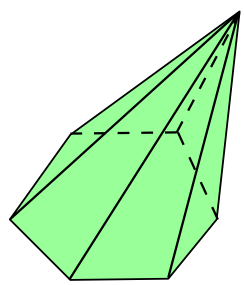


Figura 3.8: *Pirámide Hexagonal Oblicua*

Otra manera de definir si una pirámide es recta u oblicua es observar las aristas laterales, si son todas congruentes entre si entonces es una pirámide recta, en caso contrario es una pirámide oblicua.

## 3.7. Desarrollo de una Pirámide

Cada tipo de pirámide tiene su propio desarrollo plano, por lo tanto, no podremos generalizar su desarrollo, pues esta dependerá de su base.

### 3.7.1. Desarrollo Plano del Tetraedro

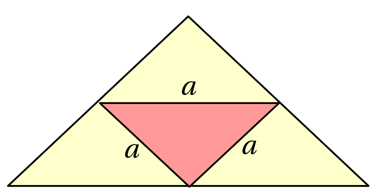



Figura 3.9: *Desarrollo Plano del Tetraedro*

En la figura 3.9 se observa el desarrollo plano de un tetraedro. Este desarrollo plano está formado por cuatro triángulos, en este caso específico, congruentes entre sí, o sea, equiláteros. El desarrollo plano de las pirámides triangulares siempre estará conformado por cuatro triángulos.

### 3.7.2. Desarrollo Plano de la Pirámide Cuadrangular

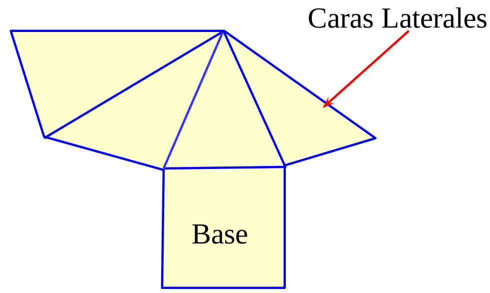



Figura 3.10: *Desarrollo Plano de la Pirámide Cuadrangular*

En la figura 3.10 observa el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular recta. Esta planificación está formada por un cuadrilátero y cuatro triángulos, si el cuadrilátero es un cuadrado, los cuatro triángulos serán congruentes entre sí.

## 3.8. Cálculo del área y volumen de una Pirámide

En una pirámide se puede calcular el área correspondiente a la superficie de las caras, el área total de la superficie que la conforma y el volumen.

- El ***área lateral*** $(A_L)$ de una pirámide es la suma de las áreas de las caras laterales. Así, si ***n*** es el número de lados de la base y $(A)$ es el área de una de las caras laterales, se tiene que:

$$A_L = nA$$

- El ***área total*** $(A_T)$ de una pirámide es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_B + A_L$$

- El ***área de la base*** $(A_B)$ es el área de una figura plana, por lo general un polígono, por tanto su cálculo se realiza igual que en geometría plana.

***Definición* 3.2.** *(Volumen de una Pirámide):*
*El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la medida de la altura.*

$$V = \frac{1}{3}(A_B \bullet h)$$

**Recordemos:** La fórmula para obtener el área de un polígono regular cualquiera es:

$$A = \frac{P \bullet a}{2}$$

donde ***P***, es el perímetro del polígono y ***a*** es la ***apotema***. El área del círculo es:

$$A = \pi r^2$$

que junto con la fórmula de la longitud de la circunferencia (perímetro del círculo):

$$C = 2\pi r$$

posibilita el cálculo del área de cualquier figura regular; al aplicar estas fórmulas en la resolución de problemas es conveniente que en las medidas dadas se utilicen las mismas unidades (Km, m, cm, etc.).

Por lo tanto, el área de la base $A_B$ de la pirámide podrá ser calculada sin ningún problema.

**Ejemplos**

***Ejemplo* 3.1.** Calcular el volumen de la pirámide de la figura, cuya base es un hexágono regular de 6 cm de lado y $3\sqrt{3}$ cm de apotema.

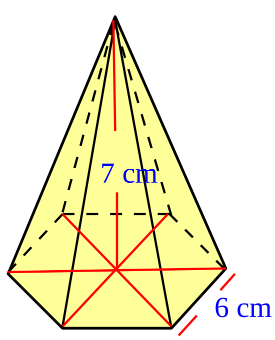



Figura 3.11: *Pirámide Hexagonal*

***Solución:***
Primero, se calcula el perímetro del hexágono:

$$P_B = 6 \bullet (6 \text{ cm}) = 36 \text{ cm}$$

Después, se calcula el área de la base. Para ello, se remplaza en la fórmula del área del hexágono, así.

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{P \bullet a}{2} \\ &= \frac{(36 \text{ cm})(3\sqrt{3} \text{ cm})}{2} \\ &= \frac{108\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \\ &= 54\sqrt{3} \approx 91,8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

finalmente, se aplica la fórmula de volumen de una pirámide.

$$V = \frac{1}{3}(A_B \bullet h) = \frac{1}{3}\left(91,8 \text{ cm}^2\right)(7 \text{ cm}) = 214,2 \text{ cm}^3$$

luego, el volumen de la pirámide es de $214,2 \text{ cm}^3$.

***Ejemplo*** **3.2.** Calcular el área lateral y total de la pirámide.

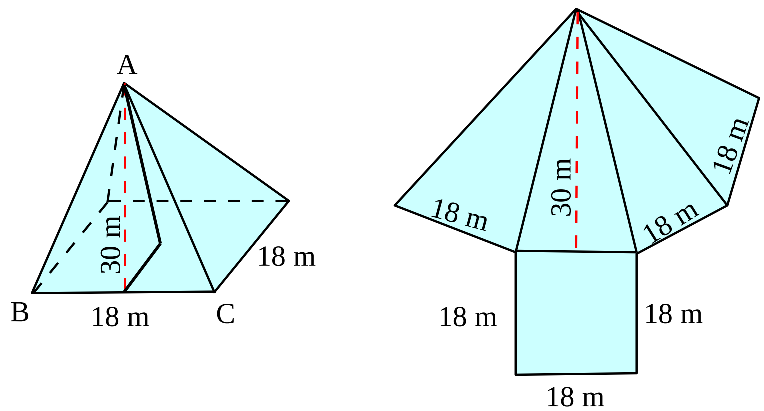



Figura 3.12: *Pirámide Cuadrangular*

***Solución:***

Esta pirámide cuadrada tiene de base un cuadrado de 18 m de lado. La apotema mide 30 metros y queremos saber el área lateral y el área total. Tiene 4 triángulos de 18 m de base por 30 de altura.

**Recuerda que...**
*El área de un triángulo se calcula como:*

$$A_{\triangle} = \frac{b \bullet h}{2}$$

*Donde b es la base y h la altura del triángulo.*

Así,

$$A_{\triangle} = \frac{(18 \text{ m})(30 \text{ m})}{2} = 270 \text{ m}^2$$

como hay 4 triángulos, el área lateral será

$$(270 \text{ m}^2) \bullet (4) = 1080 \text{ m}^2$$

El área lateral también se puede calcular multiplicando el perímetro de la base por la apotema dividido entre 2.

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{P_B \bullet a}{2} \\ &= \frac{(72 \text{ m})(30 \text{ m})}{2} \\ &= 1080 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El área de la base (que es un cuadrado) es:

$$\begin{aligned} A_B &= l \bullet l = l^2 \\ &= (18 \text{ m}) \bullet (18 \text{ m}) \\ &= 324 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El área total, es la suma del área lateral más el área de la base:

$$A_T = A_B + A_L = 1080 \text{ m}^2 + 324 \text{ m}^2 = 1404 \text{ m}^2$$

Luego, el área total de la pirámide es de 1404 $\text{m}^2$.

***Ejemplo* 3.3.** Calcular el área lateral y el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 4 cm y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.

***Solución:***

Para calcular el área lateral, se calcula el área del $\triangle EBA$ y se multiplica por el número de lados de la base así:

Primero, se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura del $\triangle EBA$.

$$\begin{aligned}
\overline{AF} &= \sqrt{(4 \text{ cm}^2) - (2 \text{ cm}^2)} \\
&= \sqrt{(16 \text{ cm}^2) - (4 \text{ cm})^2} \\
&= \sqrt{(12 \text{ cm}^2)} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \\
&\approx 3,46 \text{ cm}
\end{aligned}$$

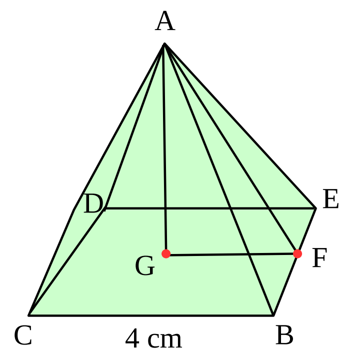



Figura 3.13: *Pirámide Cuadrangular*

Luego, se calcula el área del $\triangle EBA$

$$A_\triangle = \frac{(4 \text{ cm})(3,46 \text{ cm})}{2} = \frac{13,84}{2} \text{ cm}^2 = 6,92 \text{ cm}^2$$

finalmente, se calcula el área lateral, para ello se multiplica por 4 el área del $\triangle EBA$.

$$A_L = 4(6,92 \text{ cm}^2) = 27,68 \text{ cm}^2$$

Se calcula la altura de la pirámide mediante el teorema de Pitágoras, así:

$$\begin{aligned}
\overline{AG} &= \sqrt{(2\sqrt{3} \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2} \\
&= \sqrt{12 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2} \\
&= \sqrt{8 \text{ cm}^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm} \\
&\approx 2,83 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$V = \frac{1}{3}(A_B \bullet h) = \frac{1}{3}\left(16 \text{ cm}^2 \bullet 2,83 \text{ cm}\right) = \frac{1}{3}\left(45,28 \text{ cm}^3\right) = 15,09 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el volumen de la figura es de 15,09 $\text{cm}^3$ aproximadamente.

## 3.9. Tronco de una Pirámide

Para obtener un tronco de pirámide, basta seccionar transversalmente en un plano paralelo al plano de la base de la pirámide, con eso, se obtienen dos cuerpos geométricos espaciales, siendo uno de ellos, una pirámide de altura menor y un tronco de pirámide, como se muestra a continuación:

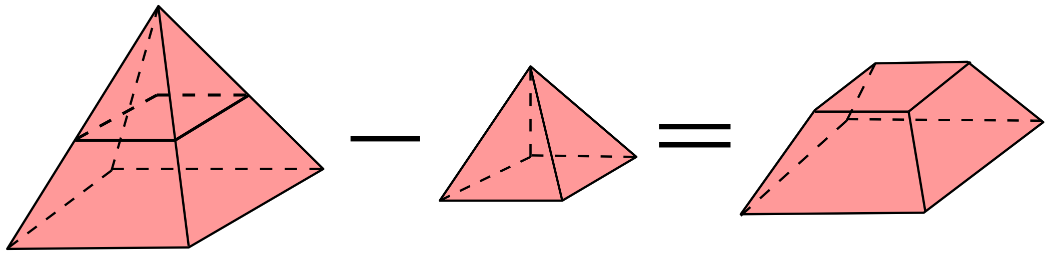


Figura 3.14: *Formación del Tronco de Pirámide*

El tronco de pirámide tiene una base mayor y una base menor. Además, sus caras laterales son trapecios cuya altura es la apotema $(a)$ del tronco de la pirámide. La altura $(h)$ del tronco de la pirámide es la distancia entre las dos bases.

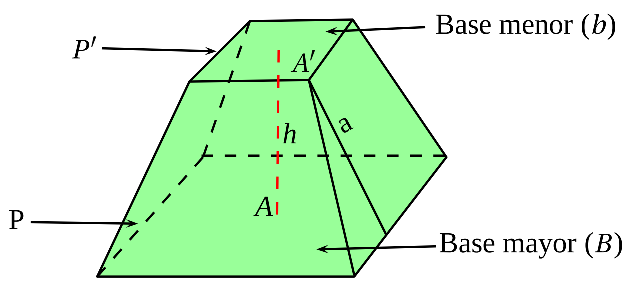



Figura 3.15: *Tronco de una Pirámide*

Si $P$ y $A$ son el perímetro y el área de la base mayor, $P'$ y $A'$ son el perímetro y el área de la base menor, se tiene que:

- El ***área lateral*** se calcula mediante la expresión:

$$A_{L_T} = \frac{P + P'}{2} \bullet a$$

- El ***área total*** se calcula con la expresión:

$$A_{T_P} = \frac{P + P'}{2} \bullet a + A + A'$$

- Y el ***volumen*** se determina mediante la expresión:

$$V_{T_P} = \frac{h}{3}\left(A + A' + \sqrt{AA'}\right)$$

La expresión del *volumen del tronco de Pirámide*, se determinó teniendo en cuenta algunas relaciones matemáticas.

Por tanto, dada una pirámide de altura $(H)$ y realizando un corte en un plano paralelo a la base a una distancia $(h_T)$, tenemos un tronco de pirámide cuya altura será $h_T = H - h_P$, siendo $h_P$, la altura de la nueva pirámide. Ver figura 3.16

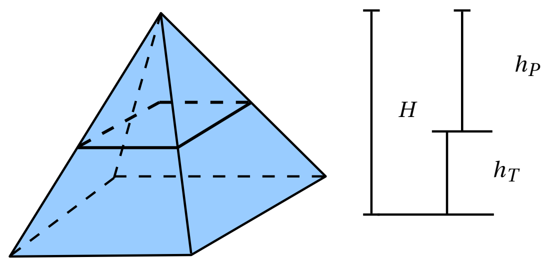



Figura 3.16: *Altura del Tronco de Pirámide*

Con base en esto, podemos decir que el volumen de la nueva pirámide y el tronco de pirámide, también siguen las mismas proporciones, luego podemos afirmar que:

$$V_{T_P} = V - V_P$$

donde $V_{T_P}$ es el volumen del tronco de pirámide, $V$ el volumen de la pirámide inicial u original y $V_P$ el volumen de la nueva pirámide. Entonces, siendo una pirámide de altura $H$ y semejante a la pirámide de altura $h_P$, tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{H}{h_P}\right)^2 \text{ y } \quad V = V_P \left(\frac{H}{h_P}\right)^3$$

basados en estas informaciones y partiendo de $V_{T_P} = V - V_P$, tenemos:

$$\begin{aligned}
V_{T_P} &= V_P \left(\frac{H}{h_P}\right)^3 - V_P \\
&= V_P \left[\left(\frac{H}{h_P}\right)^3 - 1\right] \\
&= V_P \left[\frac{H^3}{h_P{}^3} - 1\right] \\
&= V_P \left[\frac{H^3 - h_P{}^3}{h_P{}^3}\right] \\
&= V_P \left[\frac{(H - h_P)(H^2 + H h_P + h_P{}^2)}{h_P{}^3}\right]
\end{aligned}$$

ahora, sustituyendo $h_T = H - h_P$ y $V_P = \dfrac{1}{3} A' h_P$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
V_{T_P} &= V_P\left[\frac{(h_T)(H^2+Hh_P+h_P{}^2)}{h_P{}^3}\right]\\
&= V_P h_T\left[\frac{H^2+Hh_P+h_P{}^2}{h_P{}^3}\right]\\
&= \frac{1}{3}A'h_P h_T\left(\frac{H^2+Hh_P+h_P{}^2}{h_P{}^3}\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{H^2+Hh_P+h_P{}^2}{h_P{}^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{H^2}{h_P{}^2}+\frac{Hh_P}{h_P{}^2}+\frac{h_P{}^2}{h_P{}^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{H^2}{h_P{}^2}+\frac{H}{h_P}+1\right)
\end{aligned}
$$

reemplazando $\dfrac{H^2}{h_P{}^2}=\dfrac{A}{A'}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
V_{T_P} &= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{A}{A'}+\sqrt{\frac{A}{A'}}+1\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{A}{A'}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}}+1\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{A}{A'}+\frac{\sqrt{AA'}}{A'}+1\right)\\
&= \frac{1}{3}A'h_T\left(\frac{A+\sqrt{AA'}+A'}{A'}\right)\\
&= \frac{1}{3}h_T\left(A+\sqrt{AA'}+A'\right)
\end{aligned}
$$

ahora, reemplazando $h_T$ por $h$ y utilizando la propiedad conmutativa en la adición, tenemos:

$$V_{T_P}=\frac{h}{3}\left(A+A'+\sqrt{AA'}\right)$$

**Ejemplo**

***Ejemplo*** **3.4.** Calcula el área lateral, el área total y el volumen del siguiente tronco de pirámide.

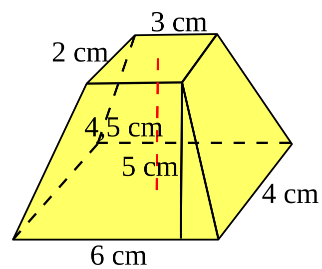



Figura 3.17: *Tronco de Pirámide*

***Solución:***

Para calcular el área lateral de la pirámide, se calcula el perímetro de la base menor ($P'$) y su área ($A'$), junto con el perímetro ($P$) de la base mayor y su área ($A$).

*Perímetro de la base menor*

$$\begin{aligned} P' &= 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

*Perímetro de la base mayor*

$$\begin{aligned} P &= 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \\ &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

luego, como el $a = 5$ cm, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{P + P'}{2} \bullet a \\ &= \frac{(20 \text{ cm} + 10 \text{ cm})}{2} \bullet (5 \text{ cm}) \\ &= \frac{(30 \text{ cm})}{2} \bullet (5\text{cm}) \\ &= (15\text{cm}) \bullet (5 \text{ cm}) \\ &= 75 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ahora, como $A_L = 75 \text{ cm}^2$, calculamos el área de la base mayor ($A$) y el área de la base menor ($A'$) así:

*Área de la base mayor*

$$\begin{aligned} A &= b \bullet h \\ &= (6 \text{ cm}) \bullet (4 \text{ cm}) \\ &= (24 \text{ cm}^2) \end{aligned}$$

*Área de la base menor*

$$\begin{aligned} A' &= b \bullet h \\ &= (3 \text{ cm}) \bullet (2 \text{ cm}) \\ &= (6 \text{ cm}^2) \end{aligned}$$

luego, el área total será:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{P + P'}{2} \bullet a + A + A' \\ &= (75 \text{ cm}^2) + (24 \text{ cm}^2) + (6 \text{ cm}^2) \\ &= 105 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

El volumen del tronco de la pirámide lo calculamos así:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3}\left(A + A' + \sqrt{AA'}\right) \\ &= \frac{4,5 \text{ cm}}{3} \bullet \left(24 \text{ cm}^2 + 6 \text{ cm}^2 + \sqrt{(24 \text{ cm}^2) \bullet (6\text{cm}^2)}\right) \\ &= (1,5 \text{ cm}) \bullet \left(30 \text{ cm}^2 + \sqrt{144 \text{ cm}^4}\right) \\ &= (1,5 \text{ cm}) \bullet \left(30 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2\right) \\ &= (1,5 \text{ cm}) \bullet (42 \text{ cm}^2) \\ &= 63 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

luego, el volumen del tronco de la pirámide es de $V = 63 \text{ cm}^3$.

## 3.10. Desarrollo Plano del Tronco de Pirámide

Teniendo en cuenta la figura 3.15, que nos muestra un tronco de pirámide de base cuadrada, vamos a construir su desarrollo plano, para eso podemos observar que su desarrollo estará formado por dos cuadrados y cuatro trapecios.

Entonces, en la siguiente figura podemos observar un ejemplo de este desarrollo, el cual nos muestra la base menor ($b$) y la base mayor ($B$) y, además, por ser un tronco de base regular todos los trapecios que se forman son congruentes entre sí.

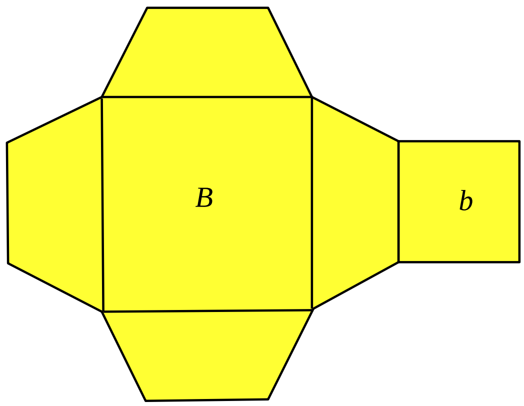



Figura 3.18: *Desarrollo del Tronco de Pirámide*

## 3.11. Laboratorio: Construcción del Tronco de Pirámide

### 3.11.1. Montaje de un Tronco de Pirámide

La figura 3.14 sugiere que en una pirámide, haciendo un corte plano paralelo al plano de su base se obtiene un tronco de pirámide y una nueva pirámide, pero más pequeña.

#### Objetivos

Mostrar que para obtener un tronco de pirámide, basta cortar una Pirámide en un plano paralelo a su base.

#### Materiales

- Papel cartulina 180 g/m$^2$.
- Cola.
- Tijeras.
- Regla.
- Escuadra.

### Procedimiento

1. Distribuir la clase en pequeños grupos, cada grupo deberá hacer una construcción del tamaño que escojan.

2. Recortar en el papel un molde del desarrollo plano de un tronco de pirámide, conforme la figura 3.18.

3. Pegar un imán en la parte de atrás de la base menor del tronco.

4. Pegar el tronco de pirámide.

5. Recortar un molde de pirámide con base igual a la base menor del tronco de Pirámide, como si fuese la continuación del tronco para obtener una pirámide mayor.

6. Pegar un imán en la parte de atrás de la base de la pirámide.

7. Ensamble la pirámide; colocando la pirámide menor sobre la base menor del tronco de la pirámide.

8. Colocar la pirámide menor sobre la base del tronco de pirámide.

9. Anotar las observaciones y escribir un informe.

### Nota:

El profesor podrá proponer que un alumno de cada grupo pase fotografiando o filmando el procedimiento paso a paso para montar una presentación en el computador y explicarlo a sus compañeros.

## 3.12. Problemas Propuestos

1. Con base en una pirámide de base cuadrada, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué pasa con el volumen si se duplican las medidas de los lados de la base?

b. ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el de una pirámide con la misma base y una altura que es el doble de la pirámide inicial?

c. ¿En cuánto aumenta el volumen de la pirámide si se duplica el área de la base?

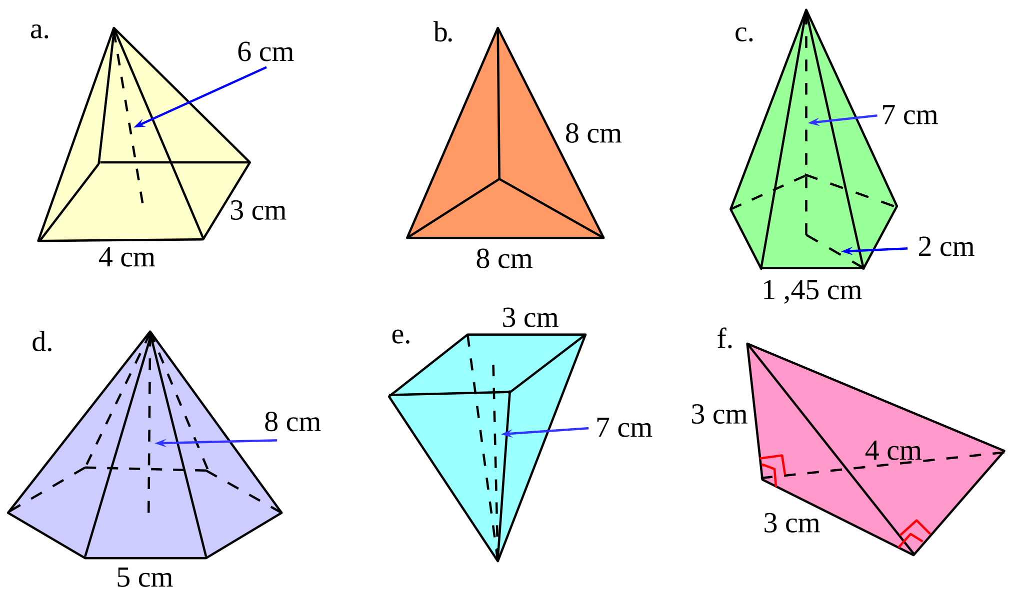
2. Halla la altura de una pirámide si se conoce que su volumen es 12 $cm^3$ y el área de su base es 24 $cm^2$.

3. Dos pirámides con base cuadrada tienen la misma altura. si la medida de los lados de los cuadrados de la base son 4 cm y 5 cm, respectivamente, ¿qué relación existe entre sus volúmenes?

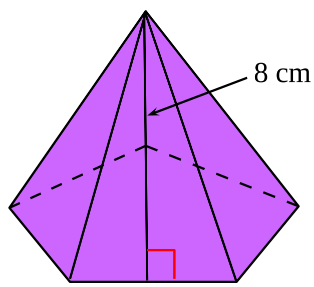
4. Determina las expresiones que permiten calcular el área lateral, total y el volumen de una pirámide de base cuadrada si se sabe que sus aristas son congruentes.

5. Calcula el área total de una pirámide cuya base es un hexágono regular de lado 6 cm y cuya altura mide 8 cm.

**6** Calcula el área lateral, el área total y el volumen de las pirámides.




**7** Calcula el área total y el volumen de la siguiente pirámide, si se sabe que la base es la mitad de un hexágono regular cuyo lado mide 6 cm.




***Soluciona Problemas***

**8** La pirámide de Keops tiene como medidas aproximadas 230,3 m de lado y 146,6 m de altura. Las autoridades egipcias, preocupadas por el deterioro de las pirámides, decidieron aplicarles un impermeabilizante sobre las paredes.

a. ¿Cuántos metros cuadrados de impermeabilizante se requieren para proteger la pirámide de Keops?

b. ¿Cuál es el volumen de la pirámide de Keops, aproximadamente?

**9** En una construcción en Bogotá, se levantaron 4 pilares macizos en concreto, con forma de pirámide recta de base cuadrada de lado 2 metros y altura 3 metros. ¿Cuál es la cantidad (volumen de la pirámide), en $m^3$, de concreto necesaria para construir estos pilares?

***Sugerencia:*** Cálculo del volumen de una de las pirámides.

**10** Una pirámide regular tiene base cuadrada de 16 cm de lado. Calcular su volumen si se sabe que la razón del área lateral al área de la base es $\frac{5}{2}$.

11 Para la feria de la ciencia, los estudiantes resolvieron construir un tetraedro con aristas de 1 metro, usando placas de EVA (Etilo, vinilo y Acetato). ¿Cuál es la cantidad de este material (área total de la superficie de la pirámide), en m$^2$, que los estudiantes deberán comprar suponiendo que el 10% del material es usado para recortes y enmendaduras?

***Sugerencia:*** Calcular el área de la superficie de una pirámide y de sus recortes.

12 En una fiesta exótica, los organizadores tuvieron la idea de construir un pastel con forma de un tronco de pirámide de base rectangular de 1 metro de largo por 50 cm de ancho. Sabiendo que la altura del pastel debería ser 20 cm. ¿Cuál es la cantidad de masa (volumen del tronco de pirámide), en cm$^2$, que se usó para producir ese pastel, siendo esta el 20% del relleno?

***Sugerencia:*** Cálculo del volumen del tronco de pirámide y revisar el porcentaje.

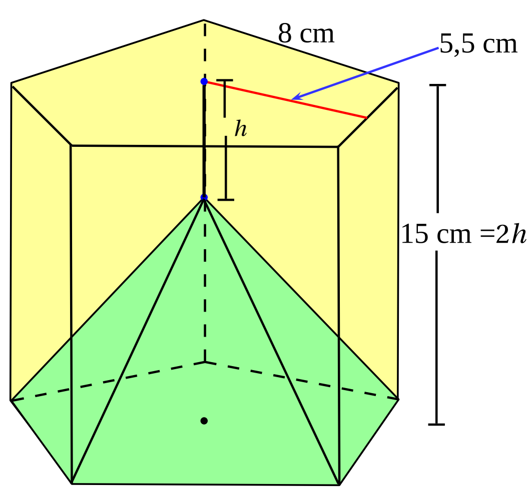
13 Un alumno resolvió construir una pieza de adorno para darle a su madre y para eso escogió una pirámide de base hexagonal hecha de vidrio. Decidió que la base seria regular de lado 15 cm y su altura debería ser 20 cm. ¿Cuál es la cantidad de vidrio (área de la superficie de la pirámide), en cm$^2$, que el utilizo para construir ese regalo?

***Sugerencia:*** Cálculo del área de la superficie de la pirámide

14 En un depósito de arena tienen una caja con forma de cubo de 3 metros de arista completamente lleno de arena. Pero, al dueño del depósito, le gustaría pasar toda esa cantidad de arena a recipientes con forma de pirámides de base cuadrada, con base de 3 metros de arista y altura 1 metro. ¿Cuál es la cantidad de recipientes que el deberá usar?

***Sugerencia:*** Comparar el volumen del cubo con el volumen de la pirámide de base cuadrada.

15 Calcula la diferencia entre el volumen del prisma y el volumen de la pirámide, considerando que tienen la misma base y la altura de la pirámide es la mitad de la altura del prisma.



# CAPÍTULO 4

# CILINDRO

## 4.1. Introducción

En el capítulo 3, se estudió la pirámide y el tronco de pirámide, enfocados en su contexto histórico, la contextualización, los desarrollos planos, sus clasificaciones, cálculos de áreas, volumen entre otros, y, también, fueron propuestas actividades y situaciones problemas.

Estudiaremos ahora el cilindro y nuestro estudio tendrá inicio en el contexto histórico del cilindro y para contextualizar usaremos la olla de presión por tener la forma de esa figura geométrica, posteriormente, será discutido el concepto matemático para esa figura geométrica referenciado en algunos sitios y autores de libros didácticos.

Luego, serán presentados los elementos principales del cilindro y se harán ejemplos de sus desarrollos planos y posteriormente, se realizara un estudio sobre las relaciones matemáticas pertinentes a esa figura geométrica.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

1. Explicar las características de los cuerpos de revolución.
2. Dado un cilindro de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.
3. Dada una región en el plano cartesiano y un eje de revolución, calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región en torno al eje.

## 4.2. Hechos Históricos

La mayor cantidad de registros que conocemos de la matemática antigua fueron escritos en papiros, dentro de ellos se destaca el ***papiro de Moscú***, que consiste en una tira de 5,5 metros de largo por 8 cm de ancho, con 25 problemas entre los cuales se encuentra el de realizar el cálculo del volumen de un cilindro recto determinándolo finalmente como el producto del área de la base por la medida de su altura. Esta relación es la que hemos utilizado hasta nuestros días.

En el trabajo de Arquímedes sobre ***la esfera y el cilindro***, encontramos una relación entre el área de la superficie esférica con la superficie lateral de un cilindro, así como, una relación del volumen de la esfera con el volumen del cilindro. Arquímedes también defendió la idea de Eudoxio que relacionaba el volumen del cilindro con el volumen del cono de igual base y altura.

Arquímedes, por haber descubierto y probado la razón entre el volumen del cilindro y de la esfera, pidió que sobre su tumba fuese esculpida una esfera inscrita en un cilindro circular recto cuya altura es igual a su diámetro. Por tanto, debemos a Arquímedes buena parte de los conocimientos de la Geometría Espacial que se estudian hoy en día. Siendo así, es justificable la importancia del siguiente texto.

## 4.3. La Olla de Presión

¿Quién nunca ha visto una olla de presión?; Una olla de presión, es un objeto bastante conocido, tanto por los niños y estudiantes como por toda la sociedad. Ciertamente, ese objeto hace parte de los utensilios domésticos de prácticamente todas las residencias, tanto de las personas más favorecidas como las menos favorecidas.

Sin embargo, escogimos la olla de presión, para estudiar su forma ya que es bastante conocida y además, por su función e importancia, sobre todo en la sociedad contemporánea.

Pero, ***¿Qué es una olla de presión?***; De una manera bien simple, podemos decir, que una olla de presión es un recipiente herméticamente sellado (completamente sellado) que al ser llevada al fuego conteniendo cierta cantidad de líquido (agua) y algunos alimentos (sólidos) en su interior, produce vapor y con eso, facilita la cocción de esos alimentos, o sea los cocina más rápidamente.

Figura 4.1: *Olla de Presión*

Aunque en la actualidad, la olla de presión es un utensilio fundamental en las residencias y restaurantes, esta sólo fue inventada al final del siglo XVII por el físico francés ***Denis Papir***. Pues, Denis consiguió percibir que el agua en un recipiente completamente sellado, podría adquirir una temperatura superior a $100^{0}$C (temperatura del agua en su punto de vaporización al nivel del mar) y permanecer en estado líquido y con eso cocer alimentos en menos tiempo y sin disminuir sus valores vitamínicos y minerales.

Es por eso, que la olla a presión fue ganando espacio especialmente en lugares de altitudes altas, visto que la temperatura de ebullición del agua va disminuyendo a medida que la altitud va aumentando y consecutivamente la presión atmosférica va disminuyendo, dificultando cada vez más el cocimiento de los alimentos y el recipiente herméticamente sellado, consigue mantener la presión interna alta, independientemente de la altitud.

Las fábricas de ollas de presión, en la actualidad, se han preocupado por la seguridad de los consumidores y por eso, vienen con un aislamiento de goma y una tapa mejorada considerablemente, ligeramente circular provista de una válvula de seguridad que se rompe cuando la presión interna es grande, evitando así la explosión de la olla de cocción y también una válvula de regulación de presión para eliminar el exceso de vapor interno.

Después de todo, ***¿Qué es la presión?***; Presión es la fuerza aplicada en una determinada área, por lo tanto, cuando el gas es comprimido en un determinado recipiente, las moléculas de esa cantidad de gas tienden a expandirse aplicando diversas fuerzas, chocando una molécula contra las otras y consecutivamente contra las paredes del recipiente "*como si fuesen muchas personas dentro de una sala pequeña tratando de salir*", forzando así su rompimiento, por lo tanto si las paredes no fueran lo suficientemente fuertes se podrían romper causando una explosión, por lo que en este recipiente puede concentrarse mucha energía en poco espacio.

Además, existe la preocupación acerca del material en que la olla es fabricada y su forma, ya que es importante para que tenga suficiente fuerza para resistir la presión a la que se somete. Pues, las fuerzas internas son aplicadas en dirección normal en relación a las paredes del recipiente, y como las resistencias de los materiales van disminuyendo cuando se desvían los puntos de apoyo (eso debido al momento de la fuerza) y además, siendo la presión interna constante, tiende a ir redondeando las paredes inicialmente planas, moldeando por lo tanto, un recipiente esférico.

Para entender ese fenómeno basta observar las ollas de presión que han sido bastante usadas, es decir, con el tiempo de uso su fondo se ha vuelto de forma redondeada y podemos decir que la tendencia de los contenedores que se someten a altas presiones internas es esférica.

Sin embargo, no es práctica ni segura, una olla con esa forma por lo que se opta por la forma cilíndrica donde sus paredes laterales, tienen la misma resistencia en cualquier punto.

## 4.4. Cuerpos Redondos

Un ***Cuerpo Redondo*** es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Uno de los principales cuerpos redondos es el ***Cilindro***, que estudiaremos a continuación; pero antes, daremos algunas definiciones importantes:

***Definición*** **4.1.** *(Superficie de revolución):*
*Una superficie de revolución es una superficie generada por una línea o una curva plana continua, sin autointersecciones (los puntos de la línea son coplanares), que gira alrededor de una recta denominada eje de revolución. La línea que gira se denomina* ***generatriz***.

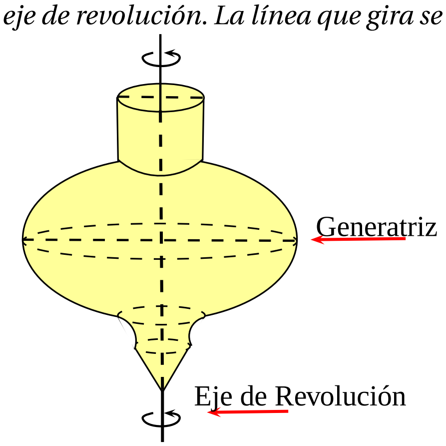



*Figura 4.2: Superficie de Revolución*

***Definición*** **4.2.** *(Sólido de revolución):*
*Un sólido de revolución es el cuerpo limitado por una superficie de revolución y dos planos perpendiculares al eje de revolución de dicha superficie.*

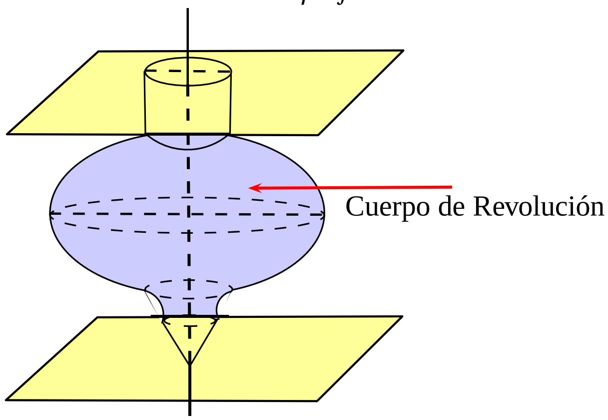



*Figura 4.3: Sólido de Revolución*

## 4.5. Concepto Geométrico de Cilindro

En la Geometría Espacial, la forma de una olla de presión, representa una figura espacial importante, llamada cilindro. Con el fin de definirlo de la mejor manera, se realizó una indagación en Internet, a través de enciclopedias y diccionarios relacionados con la matemática de la cual se han destacado algunos de los conceptos encontrados, indicados a continuación:

1. "*Observamos que un **cilindro** es una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$, aunque la mayoría de las veces, vale la pena considerar al cilindro como la región sólida contenida dentro del cilindro*". (CILINDRO, Matemática Fundamental, 2009).

2. "*Un **Cilindro** (geometría), es una figura geométrica tridimensional, formada por la revolución de un rectángulo en torno a uno de sus lados*". (CILINDRO, Wikipédia, 2009).

3. "*Un **cilindro** es un sólido con dos extremos planos circulares o elípticos idénticos y un lado curvo. Tiene la misma sección cruzada de un lado al otro*". (Diccionario ilustrado de matemáticas)

4. "*Cuerpo geométrico limitado por una superficie lateral no plana, cuyo desarrollo es un rectángulo, y por dos bases circulares iguales y paralelas*". (http://www.definicionesde.com/e/cilindro)

5. "*Un **Cilindro** es la unión de todos los segmentos de recta que conectan a los puntos correspondientes sobre círculos contenidos en planos paralelos*". (CILINDRO, Diccionario Matemático, 2009).

Basados en estas indagaciones, podemos concluir que:

***Definición* 4.3.** *(Cilindro):*
*Es considerado el lugar geométrico formado por la unión de todos los segmentos de recta que tienen una de sus extremidades en la superficie de una curva suave (base inferior) y la otra extremidad en la superficie de una segunda curva (base superior) congruente y contenida en un plano paralelo al plano de la primera curva.*

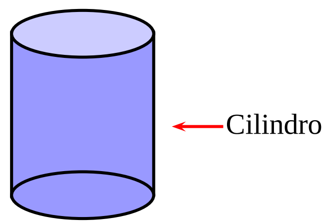
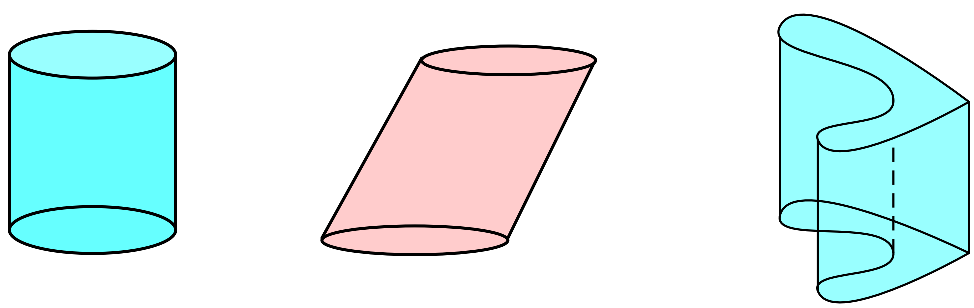



*Figura 4.4: Cilindro*

Por lo tanto, Tomaremos el cilindro como una superficie, sin embargo, cuando sea necesario trabajar con un objeto en forma de cilindro sólido, lo llamaremos ***sólido Cilíndrico***.

Con base en la definición, podemos destacar algunos tipos de cilindro, como se muestran a continuación:



Cilindro Circular Recto | Cilindro Circular Oblicuo | Cilindro Con Cualquier Base

Figura 4.5: *Modelos de Cilindros*

A pesar de poder ser definidos diversos tipos de cilindros, en este trabajo se hará énfasis en el cilindro circular recto.

El ***cilindro circular recto*** puede ser construido a través de la rotación de la superficie de un cuadrilátero, tomando como eje uno de sus lados.

En la siguiente figura, podemos observar un ejemplo de cilindro circular recto proveniente de la rotación de un cuadrilátero, observe que el cuadrilátero (rectángulo) gira alrededor de uno de sus lados que coincide con el eje de rotación que genera el cilindro.

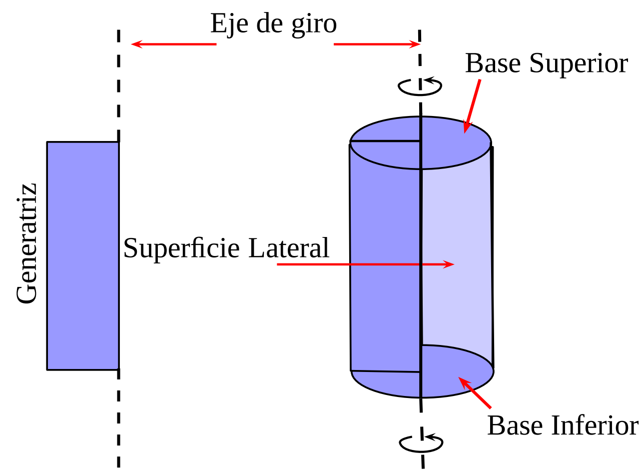



Figura 4.6: *Cilindro Formado por Rotación*

En el caso de la olla de presión, tenemos un cilindro recto, una vez que podemos imaginar un eje perpendicular al centro de su base y todos los puntos de la pared lateral equidistantes a ese eje imaginario. Por lo tanto, la olla de presión, tiene forma cilíndrica, ya que su superficie es un cilindro.

## 4.6. Elementos de un Cilindro

En base a la ***definición 4.3***, tomada para este trabajo, se destacan los elementos del Cilindro, como se muestra en la siguiente figura:

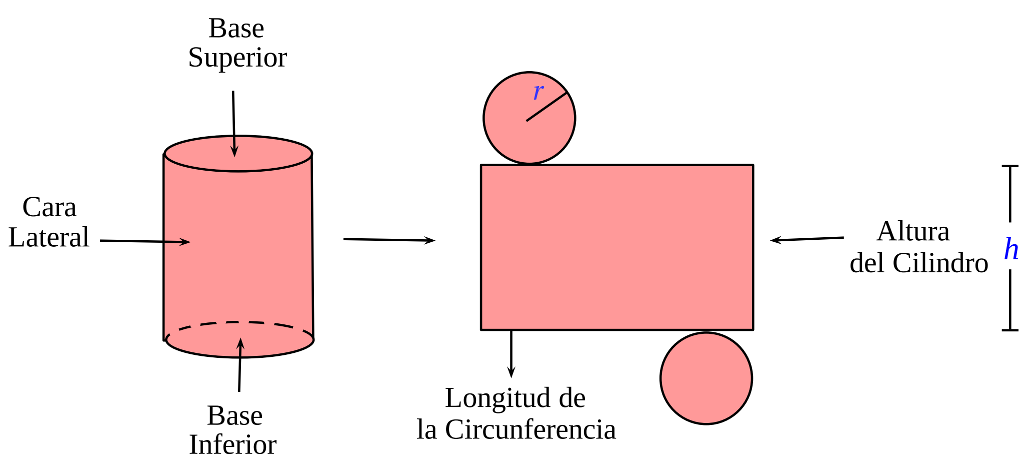



Figura 4.7: *Elementos de un Cilindro*

- Base Superior y base Inferior ($\boldsymbol{B}$); Superficies de contorno suave.
- Altura ($\boldsymbol{h}$); Distancia entre los planos que contienen las bases.
- Radio ($\boldsymbol{r}$); Radio de la base.
- Superficie lateral o cara lateral ($\boldsymbol{Sl}$); Es la suma de todos los puntos que están equidistantes al eje de rotación y su medida se llama área lateral.

- Superficie de las bases; Es la superficie interna de las curvas que generan el cilindro y su medida se llama área de las bases.
- Superficie Total; Es la unión entre la superficie lateral (***St***) y la de las bases y el área total es la suma del área de la superficie lateral con las áreas de las bases.

### 4.6.1. Detalles Relativos del Cilindro Circular recto

Características especiales en el cilindro circular recto:

1. Tanto la base inferior como la base superior son circulares.
2. El eje de rotación es perpendicular al plano que contiene la base.
3. La altura coincide con la generatriz, es decir, el lado del rectángulo que generó el cilindro.
4. El área lateral es el área del rectángulo cuya longitud es el radio de circunferencia de la base de "***r***" y la altura coincide con la altura del cilindro "***h***".
5. El área de las bases es la suma de la superficie de dos círculos congruentes.

**Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)**

*Geómetra y matemático italiano.*
*Fue discípulo de Galileo, quien lo llamo el nuevo Arquímedes. Realizo la primera demostración del teorema de Pappus, que habla sobre el volumen de un sólido de revolución.*

## 4.7. Desarrollo Plano del Cilindro

En la geometría espacial es común realizar el desarrollo plano de las figuras espaciales para facilitar la visualización de sus partes, lo que facilita los cálculos, principalmente para averiguar la cantidad de material necesario para la fabricación de un determinado objeto.

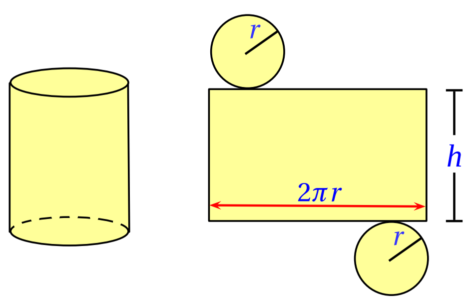



Figura 4.8: *Desarrollo Plano del Cilindro*

Al efectuar el desarrollo de un cilindro se puede observar que la cara lateral pertenece a un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia que corresponde a la base y cuyo ancho es la altura de cilindro. Así que podemos ver a través de la figura 4.8 el desarrollo plano de un cilindro circular recto de radio $(r)$ y altura $(h)$.

## 4.8. Cálculo del área y volumen de un Cilindro

Para hallar el área total y el volumen de un cilindro, es necesario identificar en él las siguientes medidas:

- **Radio** $(r)$: es el radio del círculo de la base.
- **Altura** $(h)$: es la distancia entre las dos bases.

También es necesario recurrir al desarrollo del cilindro, para deducir las fórmulas del área lateral y área total.

- El ***área lateral*** corresponde al área del rectángulo. Como la base del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia, entonces tenemos:

$$A_L = (2 \bullet \pi \bullet r) \bullet h = 2\pi r h$$

- El ***área total*** del cilindro es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2A_B \\ &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= (2\pi r)(h + r) \end{aligned}$$

- El ***área de la base*** $(A_B)$ es el área de una figura plana, por lo general una circunferencia, por tanto su cálculo se realiza igual que en geometría plana.

**Recuerda que...**
El área del círculo es:

$$A = \pi r^2$$

que junto con la fórmula de la longitud de la circunferencia (perímetro del círculo):

$$C = 2\pi r$$

donde $r$ es la medida del radio de la circunferencia; posibilita el cálculo del área de cualquier figura regular; al aplicar estas fórmulas en la resolución de problemas es conveniente que en las medidas dadas se utilicen las mismas unidades (Km, m, cm, etc.).

Por lo tanto, el área de la base $A_B$ de un cilindro podrá ser calculada sin ningún problema.

***Definición*** **4.4.** *(Volumen de un Cilindro):*
*El volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura del cilindro.*

$$\begin{aligned} V &= (A_B \bullet h) \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo raciocinio y suponiendo que el diámetro de la base $(2r)$ es igual a la altura del cilindro, se tiene un caso particular, llamado ***cilindro equilátero*** y podemos calcular el área de su superficie total $A_{CE}$ sustituyendo la altura del cilindro por "$2r$" y obtendremos:

$$A_T = (2\pi r)(h + r) = 2\pi r(2r + r) = 6\pi r^2$$

Luego, el área de un cilindro equilátero estará dada por la fórmula

$$A_{CE} = 6\pi r^2$$

***Definición* 4.5.** *(Cilindro Equilátero):*
*Es aquel cuya sección meridiana es un cuadrado, es decir, el que tiene por diámetro el mismo valor que de altura.*

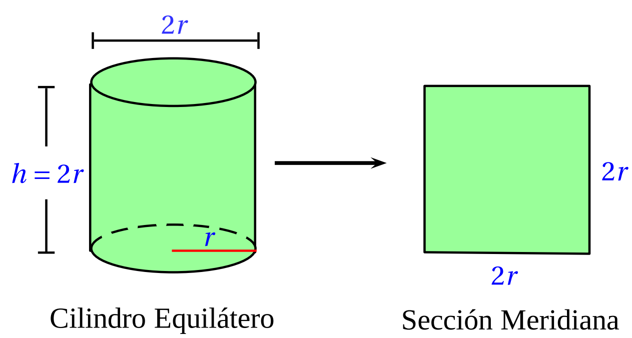



*Figura 4.9: Cilindro Equilátero*

Además de calcular el área de la superficie del cilindro, también podemos calcular el volumen de un sólido cuya forma es un cilindro (sólido cilíndrico) que ocupa el espacio o la capacidad de un recipiente cilíndrico tal como una olla de presión. Para hacer esto simplemente realizamos el producto de la superficie de la base por la altura del cilindro:

En el caso del cilindro equilátero en el que $h = 2r$, tenemos:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$$

Luego, el volumen de un cilindro equilátero será calculado por la fórmula:

$$V = 2\pi r^3$$

**Ejemplos**

***Ejemplo* 4.1.** Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro de radio 3 cm y altura 4 cm.

***Solución:***
Se remplazan las medidas del radio y de la altura en las expresiones correspondientes al área lateral, al área total y al volumen del cilindro. Luego, se realizan las operaciones indicadas así:

**Área Lateral**

$$A_L = 2\pi r h = 2(3,14)(3\text{ cm})(4\text{ cm}) = 75,36\text{ cm}^2$$

**Área Total**

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r(h+r) \\ &= (2)(3,14)(3\text{ cm})(4\text{ cm}+3\text{ cm}) \\ &= 131,88\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

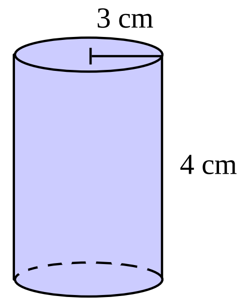


Figura 4.10: *Cilindro*

***Volumen del Cilindro***

$$V = \pi r^2 h = (3,14)(3\text{ cm})^2(4\text{ cm}) = 113,04\text{ cm}^3$$

***Ejemplo*** **4.2.** En una fábrica se producen dos tipos de empaques cilíndricos de latas para atún.

**a.** Determinar cuál de los empaques requiere mayor cantidad de lámina de lata para su fabricación.

**b.** Determinar cuál de los empaques tiene mayor volumen.

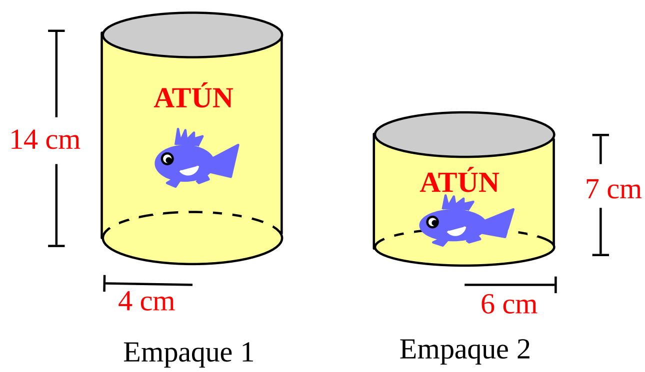


Figura 4.11: *Empaques Cilíndricos*

***Solución:***

**a.** Se calcula el área total de cada empaque. Así,

- **Empaque 1**

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &\approx 2(3,14)(4\text{ cm})(14\text{ cm}) + 2(3,14)(4\text{ cm})^2 \\ &= 452,16\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- **Empaque 2**

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &\approx 2(3,14)(6\text{ cm})(7\text{ cm}) + 2(3,14)(6\text{ cm})^2 \\ &= 489,84\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Luego, el ***empaque 2*** requiere mayor cantidad de lámina de lata.

**b.** Se calcula el volumen de cada empaque. Así,

- **Empaque 1**

$$V = \pi r^2 h \approx (3,14)(4 \text{ cm})^2(14 \text{ cm}) = 703,36 \text{ cm}^3$$

- **Empaque 2**

$$V = \pi r^2 h \approx (3,14)(6 \text{ cm})^2(7 \text{ cm}) = 791,28 \text{ cm}^3$$

Luego, el ***empaque 2*** tiene mayor volumen.

## 4.9. Laboratorio: Comprobación de Datos de una Olla de Presión

Volvamos a la olla de presión (Pág. 86), y calculemos la cantidad de aluminio necesaria para fabricarla. Pero, *¿Cómo calcular el área de su superficie si no podemos hacer su desarrollo plano?*

Para esto, existen varias técnicas, una de ellas es envolver toda su superficie lateral con papel, pues la cantidad de papel será el área de la superficie lateral del cilindro que contiene el cuerpo de la olla y lo mismo debe hacerse con sus bases, obteniendo así la superficie total del cilindro.
Sin embargo, solo vamos a realizar medidas y cálculos aproximados para hallar el área del cilindro que contiene la olla de presión tapada.

Calcular la altura es fácil, se puede hacer directamente sobre la olla, sin embargo, para calcular el radio con mayor precisión, será necesario hacer una medición auxiliar. O sea, medir el perímetro de la base y compararlo con la ecuación:

$$C = 2\pi r$$

Como ejemplo, usaremos una olla de presión con capacidad de 7 litros, cuya medida de la circunferencia de la base es de 72 cm (0,72 m) y su altura es de 18 cm (0,18 m), también, para facilitar los cálculos, vamos a considerar que las bases son círculos, o sea, figuras planas.

Una vez definidos los valores, podemos realizar los cálculos, recordando que nuestro objetivo es determinar la cantidad de placa de aluminio utilizados para la construcción de dicha olla. Por lo tanto, la longitud de la circunferencia es de 80 cm o 0,8 metros que puede medir el radio.

Substituyendo los datos obtenidos mediante la medición de la longitud de la fórmula de la circunferencia y usando $\pi = 3,14$, obtenemos:

Puesto que $C = 2\pi r$, entonces $0,72 \text{ m} = 2(3,14)r$

de donde

$$r \approx \frac{0,72 \text{ m}}{6,28} = 0,1146 \text{ m}$$

Ahora, sabemos que el radio de la circunferencia de la base de la olla de presión es $0,1146$ m, podemos, entonces, calcular el área de la base $(A_B)$.

$$A_B = \pi r^2 \approx (3,14)(0,1146 \text{ m})^2 \approx (3,14)(0,01313 \text{ m}^2) \approx 0,04122 \text{ m}^2$$

Luego, como el área lateral del cilindro es un rectángulo, en este caso de longitud 72 cm (0,72 m) y altura 18 cm (0,18 m), podemos calcular el área de la superficie lateral así:

$$A_L = b \bullet h = (0,72 \text{ m})(0,18 \text{ m}) = 0,1296 \text{ m}^2$$

Con el área de la superficie lateral $(A_L)$ y el área de la base $(A_B)$ podemos calcular el área total, recordando que tenemos dos bases, o sea, una base inferior y una base superior, entonces:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Sustituyendo los valores del área de la superficie lateral y la de la base obtenemos:

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2A_B \\ &= (0,1296 \text{ m}^2) + 2(0,04122 \text{ m}^2) \\ &= (0,1296 \text{ m}^2) + (0,08244 \text{ m}^2) \\ &\approx 0,2120 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Podría ser calculado también mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r(h + r) \\ &\approx 2(3,14)(0,1146 \text{ m})(0,18 \text{ m} + 0,1146 \text{ m}) \\ &\approx (6,28)(0,1146 \text{ m})(0,2946 \text{ m}) \\ &\approx (0,719688 \text{ m})(0,2946 \text{ m}) \\ &\cong 0,2120 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Recordando que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia de la base igual a 0.8 m, entonces:

$$A_{T_l} = 0,212 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, la cantidad de aluminio que se usó para construir la olla de presión mencionada es de 0,212 m$^2$, y, para descubrir cuánto dinero se gastó en aluminio para fabricarla, bastaría saber el precio de 1 m$^2$ de este material y multiplicar ese valor por 0,212.

Podemos, también, verificar si la capacidad (volumen de la olla de presión), especificada por el fabricante, en este caso particular, 7 litros, es correcta, y para eso sabemos que:

$$V = A_B \bullet h$$

Substituyendo a $(A_B)$, ya calculada anteriormente y la altura que medimos, tendremos:

$$V = A_B \bullet h = (0,04122 \text{ m}^2)(0,18 \text{ m}) \cong 0,0074 \text{ m}^3$$

Para que podamos comparar la capacidad de la olla ofrecida por el fabricante con el valor calculado por nosotros, es necesario que estos valores estén en la misma unidad física, o sea que, debemos transformar la unidad del fabricante a m$^3$ o la nuestra a litros. Para realizar esa transformación debemos utilizar conceptos de la matemática básica, o sea, debemos hacer una regla de tres simple.

Para esto es necesario saber que 1 m$^3$ equivale a 1000 litros:

$$\begin{array}{rcl} 1\ \text{m}^3 & \rightarrow & 1000l \\ 0,0074\ \text{m}^3 & \rightarrow & V_l \end{array}$$

de donde:

$$\frac{1\ \text{m}^3}{0,0074\ \text{m}^3} = \frac{1000l}{V_l}$$

así que

$$V_l = (0,0074)(1000l) = 7,4l$$

Obsérvese que hay una diferencia de $0,4l$, lo cual es común ya que nuestros cálculos fueron hechos con medidas aproximadas, sin embargo, se obtiene un valor bastante similar.

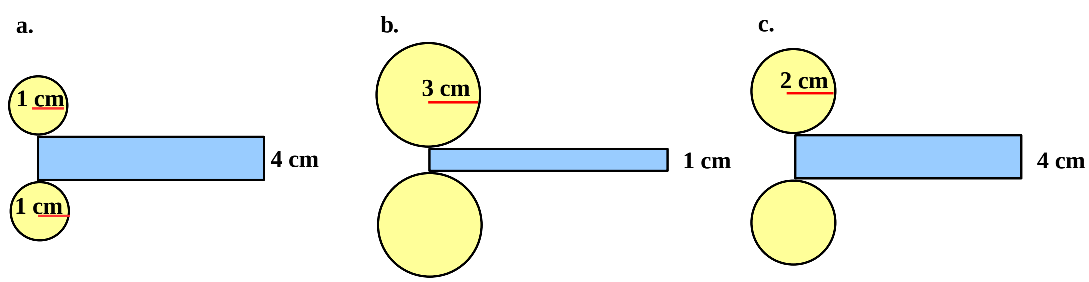
Ahora es tu turno, probablemente en tu casa haya una olla de presión, con capacidad diferente. Haga uso del ejemplo realizado y calcule la cantidad de aluminio utilizado en su fabricación, compruebe si la cantidad ofrecida por el fabricante es correcta.

**Nota:**

Para la realización de esta actividad, el profesor podrá dividir la clase en grupos y cada grupo usará una olla u otro recipiente cilíndrico de tamaño diferente. Cada grupo podrá fotografiar o filmar paso a paso el experimento, para posteriormente presentar las conclusiones a sus compañeros.

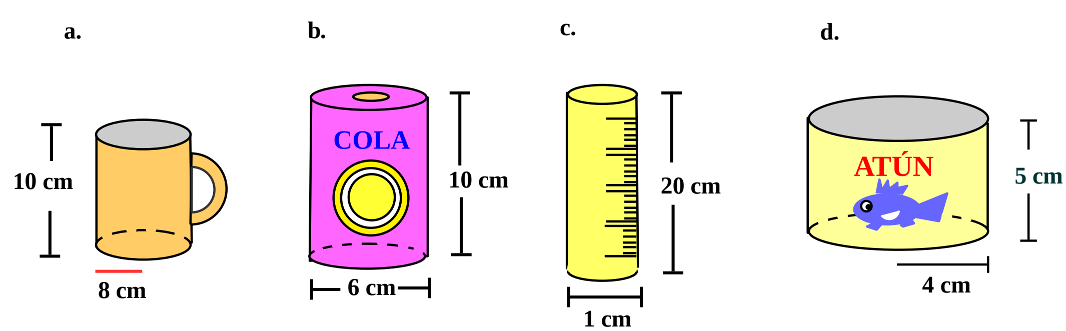
## 4.10. Problemas Propuestos

1. Determinar el volumen del cilindro que se genera en cada desarrollo.

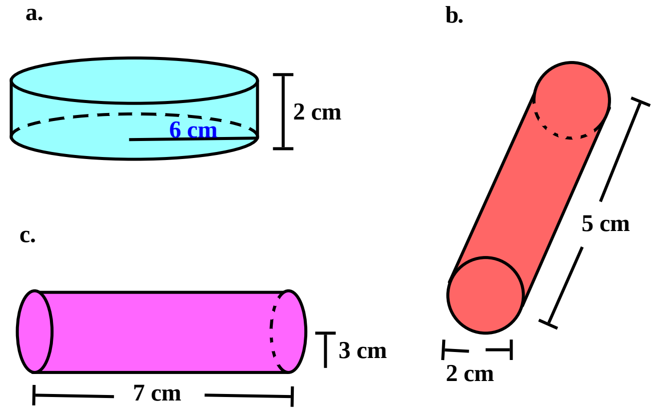



2. Si se van a forrar con papel seda, los cilindros anteriores, ¿Qué cantidad de papel se usará en cada uno?

3. Determinar cuál de los cilindros dibujados puede albergar una mayor cantidad de líquido (sugerencia 1 $\text{dm}^3$= 1 litro).



4. Calcule el área lateral, el área total y el volumen de los cilindros.




5. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de los cilindros, teniendo en cuenta las condiciones dadas.

a. El radio de la base del cilindro es 0,9 m y su altura es 30 cm.

b. El diámetro de la base del cilindro es 14 cm y su altura es 7 cm.

c. El área de la base es $144\pi$ cm$^2$ y la altura es 10 cm.

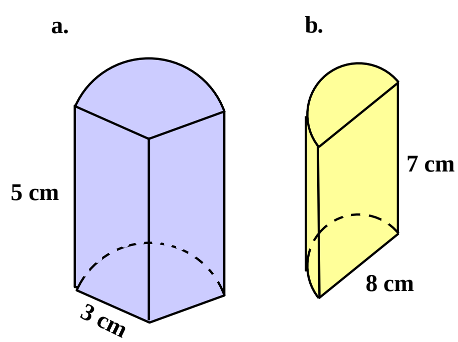
d. El valor del área lateral es igual al valor del volumen y la altura mide 5 cm.

6. Calcula el radio de la base de un cilindro si su volumen es $48\pi$ cm$^3$ y su altura es 3 cm.

7. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 5 cm de radio y un área lateral de $70\pi$ cm$^2$.

8. Calcula la altura de un cilindro si su área lateral es de 75,36 cm$^2$ y el radio de su base es 4 cm.

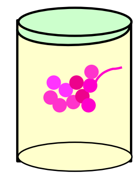
9. Calcula el área total y el volumen de los siguientes sólidos.




### *Soluciona Problemas*

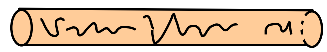
10. Un tubo en forma de cilindro tiene 40 cm de largo. Si el diámetro interno es de 6 cm y el diámetro externo es de 8 cm, ¿Cuántos cm$^3$ de metal se utilizaron para la construir el tubo?

11. Se vende leche en polvo de la misma marca en dos recipientes distintos. El recipiente $A$ tiene el doble de alto que el recipiente $B$, pero su diámetro es la mitad de la del recipiente $B$.
Si la leche en polvo del recipiente $A$ cuesta \$8000 y la leche en polvo del recipiente $B$ cuesta \$12000, ¿Cuál de los recipientes es más económico?



**12** ¿Cuánto mide el área de la etiqueta del frasco de mermelada que tiene 20 cm de altura y 6 cm de radio, si se sabe que la etiqueta llega hasta $\frac{2}{5}$ de la altura del frasco?

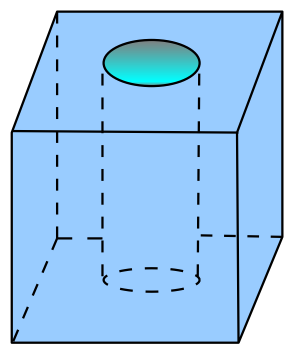
**13** Un barquillo tiene 6 cm de fondo y 2 cm de diámetro. ¿Cuál es la capacidad del barquillo? y ¿Qué cantidad de galleta se utilizó en cada barquillo?



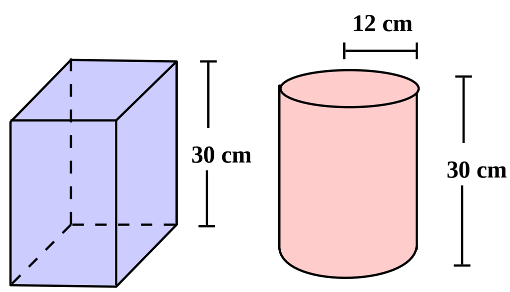
**14** Calcular la cantidad de material que se necesita para construir una torre en forma de cilindro de 8 metros de altura si el muro debe tener un grosor de 50 cm y el círculo exterior debe tener 4 metros de diámetro.

**15** Un cubo está inscrito en un cilindro circular recto cuyo diámetro de la base mide 4 m. ¿Cuál es el volumen que hay entre el cilindro y el cubo?

**16** A una caja cúbica de lado 15 cm se le hizo un hueco en forma de cilindro con un radio de 5 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja con el hueco?



**17** Una empresa empaca pañuelos faciales en cajas con forma cilíndrica de radio 12 cm y altura 30 cm. Debido a los costos del empaque se cambiará su presentación y ahora se utilizarán cajas rectangulares, de tal forma que se conserve la altura del empaque anterior y la base sea cuadrada. Para que la caja rectangular tenga la misma capacidad de la caja cilíndrica, ¿cuál debe ser la medida del lado de la base?




**18** Se tiene un tronco de madera, cuya forma es aproximadamente un cilindro recto de base circular. Para medir la cantidad de $m^3$ de madera se midió su contorno con una cuerda y esta medición dio como resultado cuatro metros. Sabiendo que la altura del tronco es de 10 metros. ¿Cuál es su volumen?

19 En el tronco del ejercicio anterior, fue retirada una cubierta que lo rodea todo. ¿Cuál es la superficie de la cubierta en $m^2$?

***Sugerencia:*** Calcular el área de la superficie lateral del tronco.

20 Se compró aceite y se empaco en una lata con forma de cilindro circular recto de 20 cm de diámetro por 30 cm de altura, el cual se distribuye en tubos más pequeños con la misma forma pero, con 4 cm de diámetro y 10 cm de alto. ¿Cuántos tubos se pueden llenar completamente con el contenido de la lata de aceite?

***Sugerencia:*** Comparar el volumen de la alta con el de los tubos.

21 Un tubo de PVC (Poli Clorato de Vinil) de 100 mm, generalmente, se vende con una medida de 6 metros de largo con la forma de un cilindro circular recto. ¿Cuál es la cantidad (área lateral), en $m^2$, de PVC que el fabricante usa para producir uno de esos tubos?

***Sugerencia:*** Calcular el área lateral del cilindro.

22 Para hacer los cuatro pilares de una baranda, fueron usados tubos de PVC de 150 mm llenos de concreto. Sabiendo que cada pilar tiene 3 m de altura, ¿cuál es la cantidad de concreto (volumen) usado para hacer esos pilares?

***Sugerencia:*** Calcular la capacidad (volumen) del cilindro.

23 Un determinado dulce era vendido en latas cilíndricas de radio 10 cm y altura 2,5 cm, pero el fabricante resolvió utilizar otras latas, también, cilíndricas de radio 5 cm y altura 10 cm. Suponiendo que el dulce llena totalmente la lata en los dos casos, ¿en cuál de esas latas viene mayor cantidad de dulce?; Haga los cálculos.

***Sugerencia:*** Compare el volumen conforme varían la altura y el radio de la base del cilindro.

24 ¿En cuál de las latas del ejercicio anterior se gasta más material para producirlas, inclusive la tapa?. El comerciante obtiene ganancia o pérdida por el cambio de empaque, ya que el precio de este depende de la cantidad de material que se usó para construirlo?

***Sugerencia:*** Comparar la cantidad de material usado para construir cada empaque.

25 Un tanque de combustible con forma de cilindro circular recto de radio 1 m y 5 metros de profundidad, estaba completamente lleno en la mañana, y al medirlo en la tarde tenía apenas el 25% de su capacidad. ¿Cuál es la cantidad de combustible vendida durante este período, en $m^3$?

***Sugerencia:*** Calcular el volumen del cilindro y hacer las operaciones pertinentes.

# CAPÍTULO 5
# CONO

## 5.1. Introducción

En los capítulos 2, 3 y 4, se estudió el prisma, la pirámide, y el cilindro; haciendo énfasis en su contexto histórico, su contextualización, desarrollos planos, cálculos de áreas, volúmenes entre otros; y al final fueron propuestas actividades y situaciones problemas.

Abordaremos ahora el cono y el tronco del cono tomando como inicio su contexto histórico y como ejemplo de contextualización, hablaremos del cono de señalización. Luego, será discutido el concepto matemático de cono, teniendo como referencia algunos sitios y algunos autores de libros didácticos.

Posteriormente, serán presentados los principales elementos del cono y algunos ejemplos de desarrollos planos del mismo; finalmente, se realizará un estudio sobre los cálculos de áreas y volumen pertinentes a esa figura geométrica.

Más adelante, será estudiado el tronco de cono haciendo énfasis en su desarrollo plano y el cálculo de su área y volumen.

Para cerrar el capítulo 5, serán propuestas actividades que se podrán trabajar de manera integral o adaptarlas a la realidad de la escuela o colegio.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

1. Explicar las características de los cuerpos de revolución.

2. Dado un cono de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.

3. Dado un rectángulo, triángulo rectángulo, trapecio o semicírculo, calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la figura en torno a un eje.

4. Dada una región en el plano cartesiano y un eje de revolución, calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región en torno al eje.

## 5.2. Hechos Históricos

Los datos históricos nos muestran que los babilónicos calculaban el volumen del tronco del cono, erradamente, como el producto de la altura por la semi suma de las bases, sin embargo, estos mismos informes indican que estas mismas personas ya se habían preocupado por el cono desde hace más de 2000 años antes de Cristo.

También encontramos relaciones tales como: "***La métrica***" de Herón, quien vivió probablemente en el siglo I de nuestra era. Este material se resume en tres libros que traen los estudios geométricos de Herón y entre estos estudios se encuentra uno relacionado con la superficie del cono que, desafortunadamente, permaneció oculto durante casi dos mil años, ya que, esta solo se encontró en 1896.

En el camino recorrido por los geómetras de todas las edades también había momentos de confusión, por ejemplo, el relato de Plutarco diciendo que Demócrito en una ocasión "*... consideró la posibilidad de que un cono estuviera compuesto por una multitud de secciones planas paralelas a la base*"(Boyer, 1974); esto no fue así, puesto que "*... si dos secciones "**adyacente**" fueran del mismo tamaño, el sólido no sería un cono sino un cilindro.*"(Boyer, 1974).

Además, estos trabajos presentaban algunos defectos tales como las medidas con aproximaciones bruscas, hechas por los egipcios. Por ejemplo, para realizar el cálculo del volumen del tronco del cono, sumaban el área de las bases y lo dividían por dos, y el resultado lo multiplicaban por la altura del tronco.

Sin embargo, hubo muchos aciertos, tales como el descubrimiento de la relación entre el cono y el cilindro de la misma base y la misma altura, lo que el mismo Arquímedes atribuyo a Eudoxio, junto con el método de Exhaución. (*Observado en el Cap. 1*)

Algunas generalizaciones importantes fueron hechas, como la prueba de Apolonio, que muestra que un cono para serlo no tiene que ser necesariamente recto ya que, el cono podría tener inclinaciones, o sea, Apolonio demostró que el cono puede ser oblicuo o escaleno aún y, sin embargo, fue él quien definió el cono con el concepto que utilizamos hoy en día, es decir: "*Si desde un punto trazamos rectas que pasen por cada uno de los puntos de una circunferencia que no esta contenida en el mismo plano, la recta móvil describe la superficie de un cono.*"(Boyer, 1974).

## 5.3. El Cono de Señalización

La preocupación por la integridad de la seguridad física de las personas se ha venido intensificando debido al aumento significativo en el número de vehículos que viaja en las carreteras y autopistas de nuestro país. Por lo que el Código de Tránsito de nuestro país ha sido regularmente actualizado. Además, recientemente fue promulgada la ley seca es decir, se aumentaron las penas y sanciones para aquellos conductores quienes sean capturados conduciendo en estado de embriaguez.
Este objeto consiste en una pieza con la forma cónica y una base (patas de soporte) hecho de material flexible y sirve para ayudar a la señalización emergencial, ya que ayuda a canalizar el control del tráfico y dirigir el flujo de vehículos y a menudo también sirve para delimitar un área determinada en la carretera.

Figura 5.1: *Cono de Señalización Vial Reglamentario*

Lógicamente, la seguridad y la integridad física de los automovilistas y peatones se consolida no sólo a través de las leyes, normas y sanciones, sino también mediante la prevención y la atención, tanto del propio conductor o peatón, como autoridades oficiales, especialmente de la policía de tránsito. En cuanto a la prevención y el cuidado, hay algunos objetos necesarios para que esto ocurra, entre ellos, podemos destacar los triángulos de advertencia, neumáticos en buen estado, limpiaparabrisas en orden y así sucesivamente.

Sin embargo, haremos énfasis en un objeto bastante usado, principalmente, en carreteras y vías rápidas, el cono de señalización Vial.

Debido a la importancia del cono para la señalización vial, el ICONTEC (Instituto Colombiano de Normas Técnicas) determina algunas especificaciones en su fabricación, tales como el material utilizado, el tamaño, color, etc.

Por lo tanto, el cono de señalización debe estar hecho de un material flexible y resistente. Su tamaño debe tener una altura entre 75 cm y 95 cm, mientras que el color predominante debe ser de color naranja con blanco con bandas reflectantes de 10 cm de ancho. Su masa debe ser de un mínimo de 3 kg y como máximo 4 kg, y cuando dos conos sean apilados, la nueva altura no puede ser superior a 1,1 veces la altura de un cono.

Figura 5.2: *Señalización de Eventos Deportivos*

Para fines distintos de señalización vial (eventos deportivos, entrenamientos, marcando áreas para señalar las filas, etc.); el color y tamaño pueden cambiar.

Además de realizar las recomendaciones necesarias para su fabricación, también son necesarias algunas recomendaciones en cuanto a su uso. Por lo tanto, para llevar a cabo la señalización de emergencia utilizando el cono se recomienda la elaboración de un proyecto de señalización de emergencia enfatizando el posicionamiento adecuado y sus normas de seguridad.

En este proyecto también se requiere un análisis de la topografía y geometría local con el fin de garantizar la visibilidad del cono adecuado con el fin de evitar posibles accidentes y/o colisión de vehículos con los conos.

Para garantizar que esas normas sean cumplidas es necesario un control de calidad lo cual es responsabilidad de la empresa que los fabrica. De modo general, las empresas hacen ese control a través de una muestra aleatoria, comúnmente, llamada de ensayo, de la siguiente manera: de un lote de 100 piezas, se toma una pieza y en lotes mayores se toma como muestra el 1 % del total de piezas del lote.

En fin, la gran cantidad de uso de los conos, independientemente de su finalidad, se debe a su forma privilegiada la cual le da una gran estabilidad vertical, pues, su base es mayor a medida que aumenta su altura y se va canalizando hasta terminar con un diámetro muy pequeño haciendo que su punto de gravedad esté cada vez más cerca de su base.

## 5.4. Concepto Geométrico de Cono

En la geometría espacial, la forma del cono para señalización de vías representa una figura espacial importante que coincidencialmente, también, es llamada cono. Por lo tanto, vamos a estudiar detalladamente el cono de señalización, evidentemente, haciendo énfasis en las matemáticas.

En la preocupación de definir el cono, se realizó una consulta en Internet a través de enciclopedias y diccionarios relacionados con la matemática y de allí se obtuvieron los siguientes resultados:

1. "*Consideremos una región plana limitada por una curva suave (sin esquinas) cerrada y un punto P fuera del plano. Denominamos cono al sólido formada por la unión de todos los segmentos de recta con un vértice en el punto P y el otro en cualquier punto de la región*". (CONO, Matemáticas Fundamentales, 2009).

2. "*Un **cono** es un sólido geométrico formado por todos los segmentos de recta que tienen una extremidad en un punto V (vértice) en común y la otra extremidad en un punto cualquiera de una misma región plana R (delimitada por una curva suave, llamada base)*". (CONO, Wikipedia, 2009).

3. "*Cuerpo geométrico limitado por una base circular y una superficie curva formada por los infinitos segmentos que parten de la base y se unen en un punto llamado vértice*". (CONO, Diccionario Libre por Farlex, 2009).

4. "*Un **cono** es un sólido formado al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos*". (CONO, Diccionario Matemático 2009).

5. "*Un **cono** es un cuerpo redondo limitado por una cara curva y una cara plana con forma de círculo, llamada base*". (CONO, Nueva Matemática, Santillana 2009).

Basados en estas indagaciones, podemos concluir que:

***Definición* 5.1.** *(Cono):*
*El cono es considerado el lugar geométrico formado por la unión de todos los segmentos de recta que tienen una extremidad en un punto (denominado vértice, representado por V) y la otra extremidad en un punto cualquiera (P) de una curva suave.*

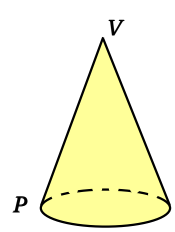



*Figura 5.3: Cono*

Por lo tanto, en este trabajo, el cono está definido como una superficie y cuando sea necesario hablar del cono como sólido, será referido como un ***sólido Cónico***.

Con base en esta definición, podemos destacar algunos tipos de Cono como se muestran a continuación:

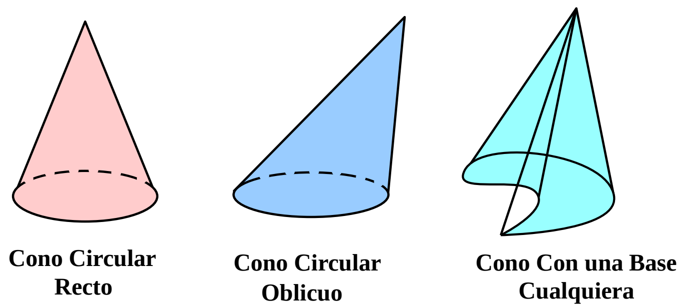



Figura 5.4: *Modelos de Cono*

A pesar de poder definir diversos tipos de cono, en este trabajo haremos énfasis en el cono circular recto.

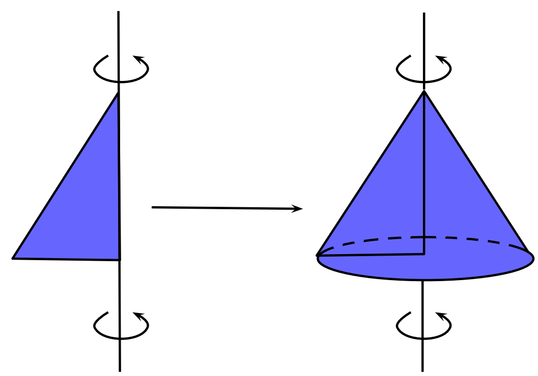


Figura 5.5: *Construcción de un Cono por Rotación*

En la figura 5.5, se puede ver un cono obtenido por la rotación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en torno al cateto que está contenido en el eje de rotación.

## 5.5. Elementos del Cono

En base a la ***definición 5.1***, tomada para este trabajo, se destacan los elementos del Cono, como se muestra en la figura 5.6:

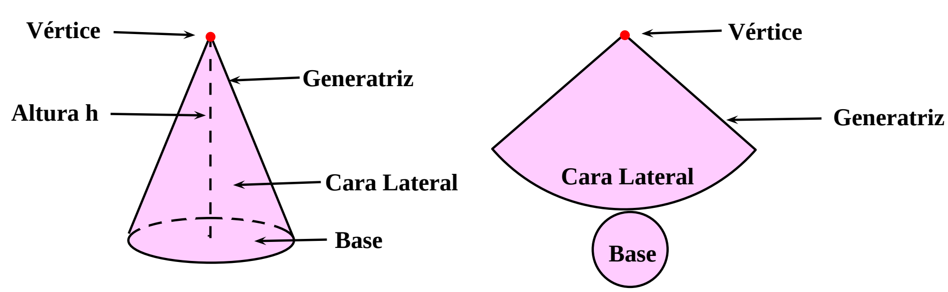



Figura 5.6: *Elementos de un Cono*

- Vértice (***V***) es el punto, generalmente, denotado por ***V***, en el que todos los segmentos de recta concurren.
- Base (***B***) es la superficie de contorno suave.
- Altura (***h***) es la distancia entre el Vértice y el plano que contiene la Base.
- Superficie lateral es la superficie obtenida por la unión de todos los segmentos que ligan el vértice a la curva que envuelve la base.
- Superficie del cono es la unión de la superficie lateral con la superficie de la base. Es decir, es la suma del área de la superficie lateral con el área de la superficie de la base.
- La ***generatriz*** es el segmento que tiene como puntos extremos el vértice del cono y un punto de la circunferencia de la base.

Se debe tener en cuenta que el radio de la base del cono se simbolizara con (***r***) y la generatriz del cono con (***g***).

### 5.5.1. Detalles Relativos del Cono Circular Recto

En el cono circular recto, existen algunas particularidades a saber:

1. *El eje es la recta* que contiene tanto al vértice como al centro de la base.
2. *La sección meridiana es un triángulo isósceles*.
3. La *Generatriz* es un segmento de recta que une al vértice con un punto arbitrario en la circunferencia que envuelve la base del cono.
4. La *Altura* es la distancia entre el vértice y el centro de la base.

### 5.5.2. Relación Matemática del Cono Circular Recto

En la figura 5.7 se destacan algunos elementos del cono tales como, la altura ($h$), la generatriz (g), el vértice ($V$) y el diámetro ($2r$) y, además, la base circular y la Sección Meridiana.

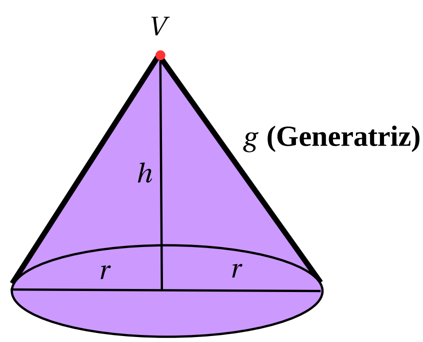



Figura 5.7: *Elementos del Cono Circular Recto*

Utilizando el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta la figura 5.7, tenemos la relación:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

En el caso particular, en que el diámetro de la base y la generatriz tengan la misma medida o sea, $g = 2r$, el cono circular será *equilátero*, luego, podemos obtener una relación entre el radio de la base del cono con la altura del mismo, o sea:

$$h^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2, \quad \text{de donde } h = r\sqrt{3}$$

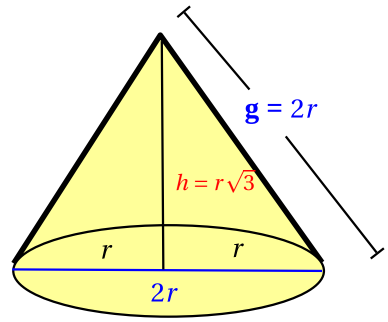



Figura 5.8: *Cono Equilátero*

***Definición* 5.2.** *(Cono Equilátero):*
*Es el cono cuya sección meridiana es un triángulo equilátero, es decir, el que tiene por diámetro el mismo valor que el de las generatrices.*

## 5.6. Desarrollo Plano de un Cono

En la figura 5.9, tenemos un ejemplo del desarrollo plano del cono.

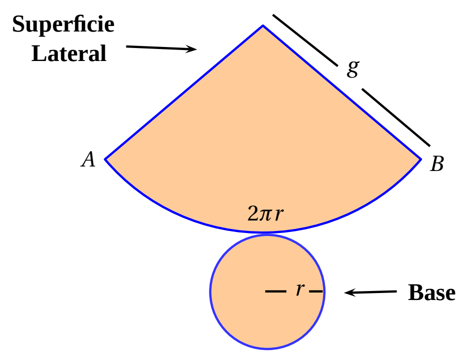



Figura 5.9: *Desarrollo Plano del Cono*

En la figura se observa un círculo de radio ($r$) de perímetro $2\pi r$ y un sector circular de radio ($g$) y arco $AB$, que llamaremos en esta sección *longitud de arco (l)* cuya longitud es igual al perímetro de la circunferencia de la base del cono $2\pi r$ y de la geometría plana, se sabe que el área del sector o área lateral del cono ($A_L$) está dada por:

$$A_L = \frac{(arco\ \ AB) \bullet (radio\ \ del\ \ sector)}{2} = \frac{lg}{2} = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

## 5.7. Cálculo del área y Volumen de un Cono

De acuerdo con el desarrollo plano del cono, el área lateral ($A_L$) es el área del sector circular.

**Algo Importante...**
Si no se conoce la longitud de un cono, se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Por consiguiente, el área total $(A_T)$ es la suma del área lateral $(A_L)$ y el área de la base $(A_B)$; es decir,

$$A_T = A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)$$

Por lo tanto, el área lateral $A_L$ y el área de la base $A_B$ de un cono podrá ser calculada sin ningún problema.

***Definición* 5.3.** *(Volumen de un Cono):*
*El volumen del cono es un tercio del producto del área de la base por la altura.*

$$\begin{aligned} V_{Co} &= \frac{1}{3}(A_B \bullet h) \\ &= \frac{1}{3}(\pi r^2 h) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo proceso y suponiendo que el diámetro de la base $(2r)$ es igual a la generatriz $(g = 2r)$, se tiene un caso particular, llamado ***cono equilátero*** y podemos calcular el área de su superficie total $A_{Co_E}$ sustituyendo la generatriz por "$2r$" en el área total del cono y obtendremos:

$$A_{Co_E} = \pi r (g + r) = \pi r (2r + r) = \pi r (3r) = 3\pi r^2$$

Luego, el área de la superficie del cono equilátero estará dada por la relación:

$$A_{Co_E} = 3\pi r^2$$

Esta relación se puede utilizar para calcular el área de la superficie del cono en función de la generatriz, para eso, basta usar $r = \frac{g}{2}$ y tendremos:

$$A_{Co_E} = 3\pi r^2 = 3\pi \left(\frac{g}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi g^2$$

Entonces, el área de la superficie en función de la generatriz será:

$$A_{Co_E} = \frac{3}{4}\pi g^2$$

.
Podemos, también, obtener una relación entre el área de la superficie del cono con su altura que es, $h = \sqrt{3}r$ ,o, $r = \frac{h}{\sqrt{3}}$ y además, $r = \frac{g}{2}$ por lo tanto, $g = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ y de aquí

$$A_{Co_E} = \frac{3}{4}\pi g^2 = \frac{3}{4}\pi \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3\pi \bullet 4h^2}{4 \bullet 3} = \pi h^2$$

Luego, la relación será:

$$A_{Co_E} = \pi h^2$$

Por lo tanto, para obtener el área de la superficie de un cono equilátero es suficiente conocer el radio de su base, la generatriz o su altura.

Podemos calcular el volumen de un sólido, cuya superficie es un cono (sólido cónico). Para esto, partiremos de que el *volumen del sólido cilíndrico equilátero* está dado por

$$V = 2\pi r^3$$

En la siguiente figura, podemos observar que el volumen del sólido cónico equilátero es igual a un tercio del volumen del sólido cilíndrico equilátero, de igual base e igual altura. Por lo tanto, siendo el área de la base del cilindro o del cono igual a $\pi r^2$, entonces el volumen del cono

$$V_{Co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

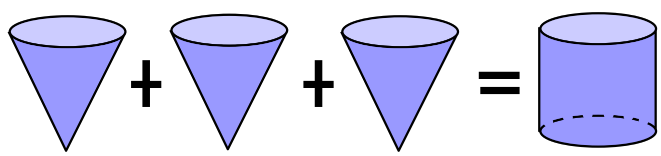


Figura 5.10: *Relación del Volumen del Cono con el Cilindro*

es válida para un sólido cónico cualquiera, sin embargo, si la superficie de este sólido fuera un cono equilátero, se sabe que $h = \sqrt{3}r$, en consecuencia, el volumen del cono equilátero ($V_{Co_E}$), es:

$$V_{Co_E} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi r^2(\sqrt{3}r)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$$

**Ejemplos**

***Ejemplo*** **5.1.** Calcular la medida de la generatriz, el área lateral, el área total y el volumen de un cono cuyo radio es 5 cm y su altura es 6 cm.

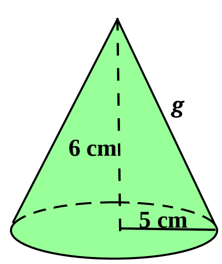



Figura 5.11: *Cono con* $r = 5$ cm

***Solución:***

Para hallar la medida de la generatriz se aplica el teorema de Pitágoras, así que

$$g = \sqrt{(6\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{36\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2} = \sqrt{61\text{ cm}^2} \approx 7{,}81\text{ cm}$$

Luego, se remplazan las medidas del radio, la altura y la generatriz para calcular el área lateral, el área total y el volumen.

**Área Lateral**

$$A_L = \pi r g \approx (3,14)(5 \text{ cm})(7,81 \text{ cm}) = 122,617 \text{ cm}^2$$

**Área Total**

$$A_T = \pi r(g + r) \approx (3,14)(5 \text{ cm})(7,81 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) = 201,11 \text{ cm}^2$$

**Volumen**

$$V_{C_o} = \frac{(\pi r^2 h)}{3} \approx \frac{((3,14)(5 \text{ cm})^2(6 \text{ cm}))}{3} = (2 \text{ cm})(25 \text{ cm}^2)(3,14) = 157 \text{ cm}^3$$

***Ejemplo*** **5.2.** Gabriela va a comprar un empaque de helado para su fiesta. Si las tres presentaciones tienen el mismo pecio, ¿Cuál debería, comprar? ¿Por qué?

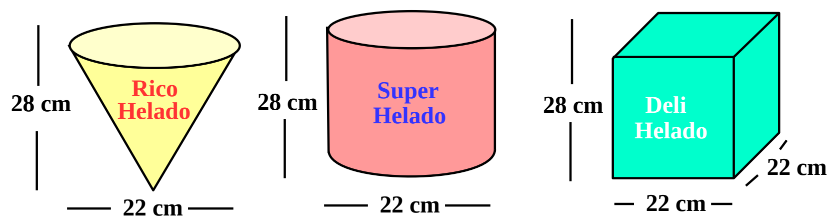



Figura 5.12: *Empaques de Helado*

***Solución:***

- El empaque Rico Helado es un cono, así que su volumen es:

$$V_{C_o} = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx \frac{(3,14)(11 \text{ cm})^2(28 \text{ cm})}{3} = 3546,10 \text{ cm}^3$$

- El empaque Super Helado es un cilindro, así que su volumen es:

$$V_{C_i} = \pi r^2 h \approx (3,14)(11 \text{ cm})^2(28 \text{ cm}) = 10638,32 \text{ cm}^3$$

- El empaque Deli Helado es un prisma rectangular con base cuadrada. Así

$$V_{C_2} = A_B \bullet h = (22 \text{ cm})^2(28 \text{ cm}) = (484 \text{ cm}^2)(28 \text{ cm}) = 13552 \text{ cm}^3$$

Luego, Gabriela debería comprar el empaque Deli Helado pues tiene mayor contenido.

***Ejemplo*** **5.3.** Calcular el área lateral, el área total y el volumen del siguiente cono.

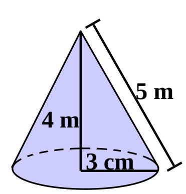



Figura 5.13: *Cono Propuesto*

***Solución:***
Como $r = 3$ m, $h = 4$ m y $g = 5$ m, tenemos:

- Se calcula el área lateral:

$$A_{L_C} = \pi r g \approx (3,14)(3\text{ m})(5\text{ m}) = 47,1\text{ m}^2$$

- El área total es:

$$A_{T_C} = \pi r(g+r) \approx (3,14)(3\text{ m})(5\text{ m}+3\text{ m}) = (3,14)(3)(8)\text{ m}^2 = 75,36\text{ m}^2$$

- El Volumen es:

$$V_{C_o} = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx \frac{(3,14)(3\text{ m})^2(4\text{ m})}{3} = (3,14)(3)(4)\text{ m}^3 = 37,68\text{ m}^3$$

Luego de aproximar los resultados, se tiene que el área lateral es $47,1\text{ m}^2$, el área total es $75,36\text{ m}^2$ y el volumen es $37,68\text{ m}^3$.

## 5.8. Tronco de un Cono

Basado en la definición de cono estudiada hasta ahora se puede percibir que el cono para señalización, a pesar de su nombre, no es de hecho un cono, pues ese "*cono*" está seccionado en planos paralelos a su base lo cual lo convierte en un ***tronco de cono***, el cual podemos observar en la figura 5.14.

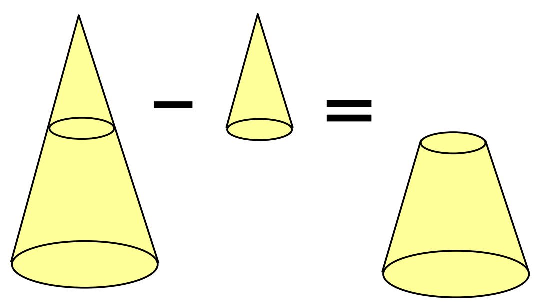


Figura 5.14: *Formación del Tronco de Cono*

Luego, para obtener un tronco de cono, basta seccionar transversalmente un plano paralelo al plano de la base del cono, con eso, se obtienen dos objetos geométricos espaciales, siendo uno de ellos, un cono de altura menor y un tronco de cono, conforme la figura 5.14.

Por lo tanto, podemos definir un tronco de cono:

> ***Definición* 5.4.** *(Tronco de Cono):*
> *Es la porción de un cono comprendido entre dos planos que lo cortan y son perpendiculares a su eje. Si el tronco de cono es circular, tanto la base superior como la inferior serán círculos.*

Teniendo en cuenta la figura 5.15, podemos observar que para formar un tronco de cono circular recto, basta rotar un *trapecio rectángulo* en torno a un eje; por lo que tendrá base mayor ($B$) y base menor ($b$).

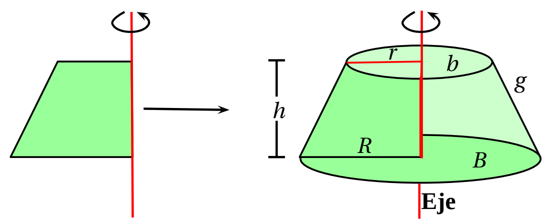



Figura 5.15: *Construcción del Tronco de Cono mediante Rotación*

## 5.9. Desarrollo Plano del Tronco de un Cono

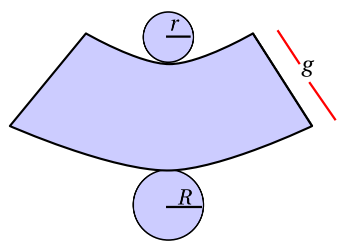



Figura 5.16: *Desarrollo Plano del Tronco de Cono*

Se puede observar que el desarrollo plano del tronco de cono, está formado por un trapecio circular y dos círculos. Así, que el área lateral está dada por:

$$A_{L_T} = \pi g\,(R + r)$$

El área total del tronco está dada por:

$$A_{T_T} = \pi \bullet g\,(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi\left[g(r + R) + R^2 + r^2\right]$$

Así como en el Cono, podemos calcular el volumen de un sólido, cuya forma sea la de un tronco de cono. Ya vimos que un sólido cónico ocupa el volumen de un tercio de un sólido cilíndrico y vimos que para calcular el volumen del sólido cilíndrico se multiplica el área de la base por la altura de este cilindro.

Basado en esta información, adoptaremos un cono de altura $(H)$ y partiendo de él, se hará un corte paralelo a su base a una altura $(h_T)$, con eso, obtendremos un nuevo cono con menor altura $(h_c)$ y radio $(r)$, semejante al original y un tronco de cono cuya altura será $h_T = H - h_c$ y el radio de la base mayor $(R)$ y el de la base menor $(r)$, conforme podemos ver en la figura 5.17:

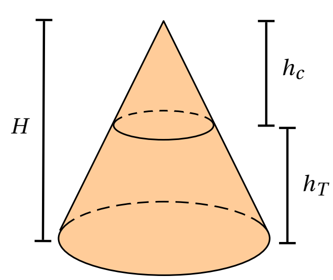



Figura 5.17: *Relación entre el Cono y el Tronco de Cono*

Así como en la pirámide, en la que el volumen es igual a $\left(\frac{1}{3}\right)$ del prisma de igual base, el volumen del sólido cónico, también, tiene su volumen igual a $\left(\frac{1}{3}\right)$ del sólido cilíndrico de igual base. Entonces, podemos afirmar que el volumen de un sólido cuya forma es un tronco de cono es igual al volumen del tronco de pirámide, ya demostrado anteriormente como: (*ver Pág. 76*)

$$V_{T_{Pirámide}} = \frac{h_{T_{Pirámide}}}{3} \bullet \left(A + A' + \sqrt{A \bullet A'}\right)$$

Evidentemente, con algunas adaptaciones y condiciones definidas, tenemos:

- $h_T$ es la altura del tronco de cono
- $A$ es la base mayor, cuya área está dada por $A = \pi R^2$
- $A'$ es la base menor, cuya área está dada por $A' = \pi r^2$

Sustituyendo esas relaciones y colocando $\pi$ como factor común, tendremos:

$$V_{T_C} = \pi \frac{h_T}{3} \bullet \left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

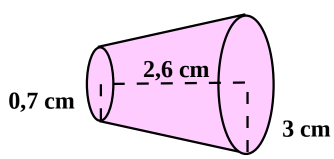
Luego, el Volumen del tronco de cono se calculara aplicando la siguiente fórmula:

$$V_{T_C} = \frac{\pi h_T}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Por lo tanto, para obtener el volumen de un sólido con forma de un tronco de cono $(V_{T_C})$ basta conocer su altura, el radio de la base mayor y el radio de la base menor.

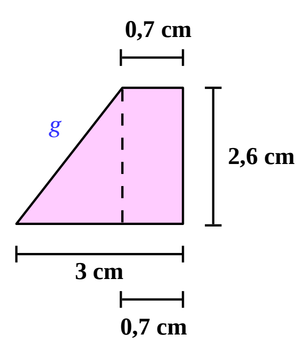
**Ejemplo**

***Ejemplo*** **5.4.** Calcula el área lateral, el área total y el volumen del siguiente tronco de cono.




***Solución:***

- Para calcular el área lateral, debemos encontrar la medida de la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras.




$$\begin{aligned}
g^2 &= a^2 + b^2 \\
g^2 &= (2,6 \text{ cm})^2 + (2,3 \text{ cm})^2 \\
g^2 &= 6,76 \text{ cm}^2 + 5,29 \text{ cm}^2 \\
g^2 &= 12,05 \text{ cm}^2 \\
\sqrt{g^2} &= \sqrt{12,05 \text{ cm}^2} \\
g &\approx 3,47 \text{ cm}
\end{aligned}$$

- Luego, el área lateral será:

$$A_{L_T} = \pi g\,(R+r) \approx (3,14)(3,47\text{ cm})(3\text{ cm}+0,7\text{ cm}) = (3,14)(3,47\text{ cm})(3,7\text{ cm}) = 40,28\text{ cm}^2$$

- Ahora, el área total será:

$$\begin{aligned}
A_{T_T} &= \pi\left[(r+R)g + R^2 + r^2\right]\\
&= (3,14)\left[(0,7\text{ cm}+3\text{ cm})(3,47\text{ cm}) + (3\text{ cm})^2 + (0,7\text{ cm})^2\right]\\
&= (3,14)\left[(3,7\text{ cm})(3,47\text{ cm}) + (9\text{ cm}^2) + (0,49\text{ cm}^2)\right]\\
&= (3,14)\left[(12,83\text{ cm}^2) + (9\text{ cm}^2) + (0,49\text{ cm}^2)\right]\\
&= (3,14)\left[22,32\text{ cm}^2\right]\\
&= (3,14)(22,32\text{ cm}^2)\\
&\approx 70,08\text{ cm}^2
\end{aligned}$$

- Y el volumen se determina así:

$$\begin{aligned}
V_{T_C} &= \frac{\pi h_T}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)\\
&= \left(\frac{(3,14)(2,6\text{ cm})}{3}\right)\left((3\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})(0,7\text{ cm}) + (0,7\text{ cm})^2\right)\\
&= \left(\frac{8,164\text{ cm}}{3}\right)\left((9\text{ cm}^2) + (2,1\text{ cm}^2) + (0,49\text{ cm}^2)\right)\\
&= (2,7213\text{ cm})\left(9\text{ cm}^2 + 2,1\text{ cm}^2 + 0,49\text{ cm}^2\right)\\
&= (2,7213\text{ cm})\left(11,59\text{ cm}^2\right)\\
&\approx 31,53\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

## 5.10. Laboratorio: Construcción del Tronco de Cono

Es importante que el alumno construya las figuras geométricas para observar cada uno de sus elementos.

### 5.10.1. Montaje de un Tronco de Cono

La figura 5.17, sugiere que haciendo una sección en un cono en un plano paralelo al plano de su base, se obtiene un tronco de cono y un nuevo cono con menor altura.

#### Objetivo

Mostrar que para obtener un tronco de cono, basta seccionar un cono en un plano paralelo a su base.

#### Materiales

- Papel cartulina 180g/m$^2$.
- Pegante.
- Tijeras.
- Regla

- Compas.
- Placa de imán.

**Procedimiento**

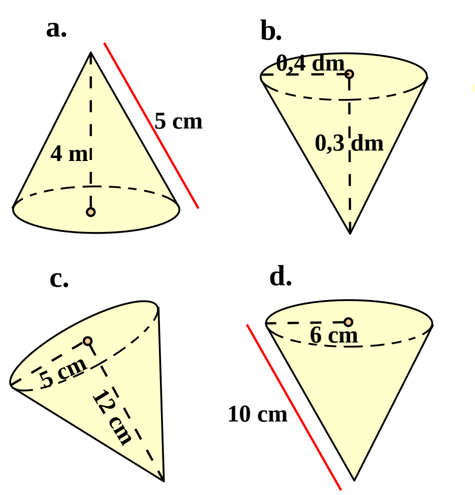
1. Distribuir la clase en pequeños grupos, cada grupo deberá hacer una construcción del tamaño que escojan.
2. Recortar en el papel un molde del desarrollo plano de un tronco de cono, conformando la tercera parte de la figura 5.14.
3. Pegar una placa de imán en la parte posterior de la base menor del tronco.
4. Pegar el tronco de cono.
5. Recortar un molde de pirámide con base igual a la base menor del tronco de cono, como si fuese la continuación del tronco para obtener un cono mayor, conformando la segunda parte de la figura 5.14.
6. Colocar una placa de imán en la parte posterior de la base del cono.
7. Montar el cono.
8. Colocar el cono menor sobre la base menor del tronco de cono.
9. Anotar las observaciones y elaborar un informe escrito.

**Nota:**

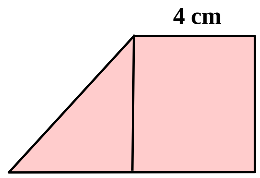
El profesor podrá proponer que un alumno de cada grupo pase fotografiando o filmando el procedimiento pasó a paso para montar una presentación en el computador y explicarlo a sus compañeros.

## 5.11. Problemas Propuestos

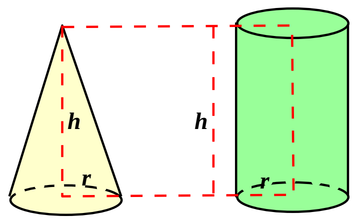
1. Calcular el área lateral, total y el volumen de los siguientes conos.



2. Calcular el área total y el volumen del cuerpo que se forma al rotar 360° el triángulo isósceles y el cuadrado, como se indica.



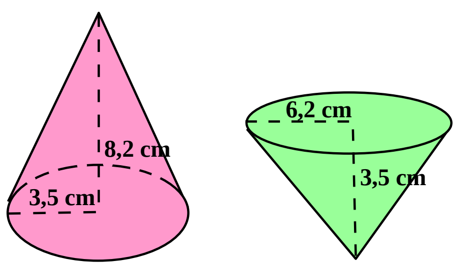

3. Observar cada par de imágenes y determinar si la afirmación es verdadera o falsa.




a. El volumen del cilindro es mayor que el volumen del cono. ( )

b. Para forrar el cilindro se necesita mayor cantidad de papel que para forrar el cono. ( )

4. Compara los dos conos y responde.



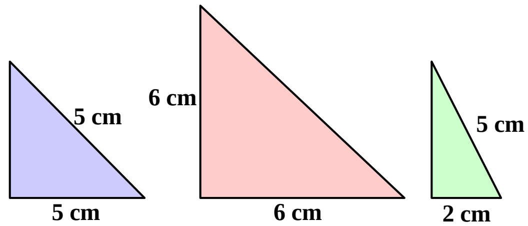

a. ¿Cuál de los conos tiene menos capacidad?

b. ¿Cuál requiere menos material en su elaboración?

5. Calcula el radio y la generatriz del cono que tiene un volumen de $6\pi$ cm$^3$ y una altura de 2 cm.

6. Calcula el volumen de un cono si su área lateral es $15\pi$ cm$^2$ y su área total es $24\pi$ cm$^2$.

7. Cuando se hace girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos se genera un cono. Determina el área total del cono que se genera al girar cada triángulo rectángulo sobre cada uno de los catetos.

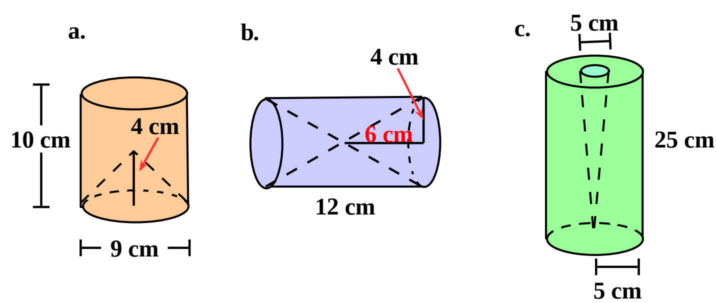



**8** Calcula el área lateral, el área total y el volumen de cada cono, a partir del radio ($r$) y de la altura ($h$).

| | | |
|---|---|---|
| a. $r = 3$ cm; $h = 8$ cm | d. $r = 80$ cm; $h = 2,2$ m | g. $r = 4$ cm; $h = 15$ cm |
| b. $r = 2$ m; $h = 0,5$ m | e. $r = 0,4$ m; $h = 0,75$ m | h. $r = 5$ cm; $h = 12$ cm |
| c. $r = 5$ cm; $h = 10$ cm | f. $r = 0,2$ m; $h = 70$ cm | i. $r = 5$ cm; $h = 14$ cm |

**9** Santiago quiere hacer 10 gorros de piñata de 14 cm de diámetro y 24 cm de altura cada uno. Si utiliza un pliego de cartulina de 70 cm por 100 cm para hacer los 10 gorros, aproximadamente, ¿cuántos centímetros cuadrados del pliego de cartulina le sobran a Santiago?.

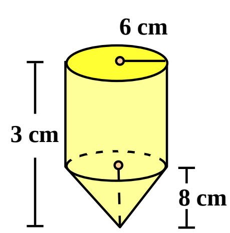
**10** Calcula la diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen de los conos que aparecen en cada figura.




### *Soluciona Problemas*

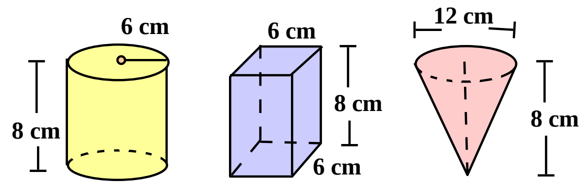
**11** Se revisaron los planos de una ciudad, con el fin de decidir la construcción de un nuevo depósito de agua. Se concluyó que era necesario construir un tanque con el doble de capacidad de lo planeado originalmente. Luego, se ordenó la construcción con el doble del diámetro y la misma altura. ¿Cuál es el error en la decisión?

**12** La figura muestra un depósito de acero. ¿Qué capacidad tiene el depósito?

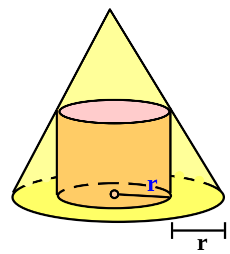



**13** Cuál de los siguientes cuerpos geométricos tiene:

a. Mayor volumen. b. Mayor área lateral. c. Mayor área total.



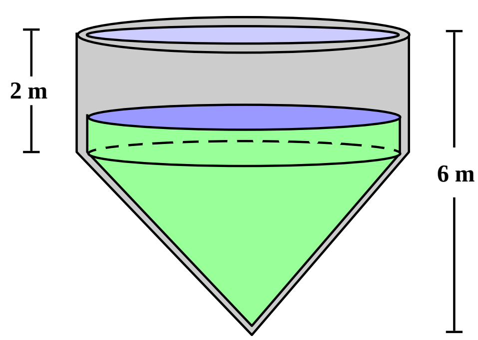

**14** Un cilindro de radio $r$ tiene una altura de 17,5 cm y está inscrito en un cono de 35 cm de altura, cuya generatriz mide 37 cm.




a. Calcula el área total del cilindro.

b. Calcula la diferencia entre el volumen del cono y el volumen del cilindro.

**15** El siguiente es un tanque donde se almacena el agua para el riego en época de sequía. Si el radio de la base mide 2,5 m, responde:




a. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

b. Si el agua que hay en el tanque marca una altura de 5 m, ¿cuánta agua hay en el tanque?

c. Si un litro de agua pesa 1 Kg, ¿cuánto pesa el agua del tanque cuando está lleno?. (Recuerda que 1 litro equivale a 1 dm$^3$.)

**16** Suponiendo que el cono para señalización vial no tuviese su punta cortada y su altura hasta el vértice fuera de 75 cm y el diámetro de su base fuese de 40 cm. Calcule la cantidad, en cm$^2$, de placa de material para confeccionar la superficie lateral.

***Sugerencia:*** Calcular el área de la superficie lateral del cono.

17. Un embudo cónico equilátero construido de aluminio tiene su diámetro que mide 20 cm. ¿Cuál es la cantidad de hoja de aluminio, en $cm^2$, para construir la superficie lateral de ese embudo?

***Sugerencia:*** Calcular el área de la superficie lateral del cono.

18. Una caja de agua está hecha de PVC con la forma de un cono invertido, sabiendo que su altura es de 4 metros y el radio de la base es de 2 metros. ¿Cuál es la cantidad de PVC, en $m^2$, que se utilizó para producir esa caja y su tapa?

***Sugerencia:*** Calcular el material necesario para la construcción de un cono, o sea, el área de la superficie del cono.

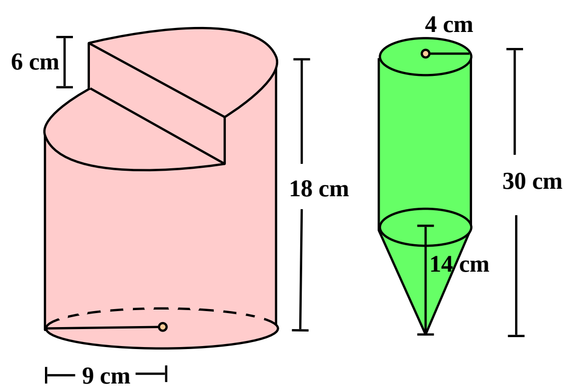
19. Un lavamanos tiene forma de un tronco de cono invertido, de tal forma que la base mayor mide 40 cm, la base menor 10 cm y su altura es 20 cm. ¿Cuál es su capacidad?.

***Sugerencia:*** Cálculo del volumen del tronco de un cono.

20. Para confeccionar gorros de fiesta infantil con o forma de cono circular recto, tengo 10 hojas de papel, cuyas medidas son 40 cm por 50 cm. Sabiendo que cada gorro deberá tener el diámetro y altura igual a 15 cm. ¿Cuántos gorros se pueden hacer con esas hojas? ¿Cuál es la cantidad de papel que se perdió en recortes, en $cm^2$?.

***Sugerencia:*** Cálculo del área de la superficie del cono.

21. Determina el área total y el volumen de los siguientes cuerpos.

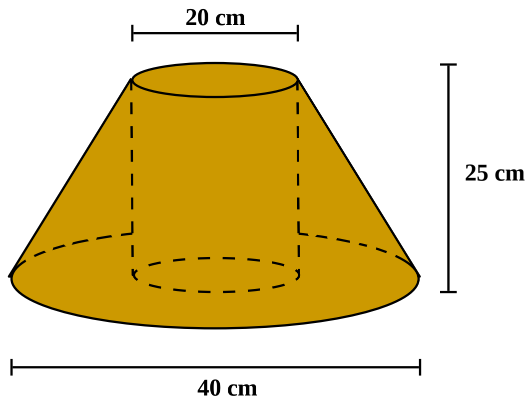



22. ¿Cuál es la cantidad de material, en $cm^2$, necesario para construir un tanque con forma de un tronco de cono con base menor de 20 $cm^2$, base mayor 30 $cm^2$ y altura de 25 cm?

***Sugerencia:*** Cálculo del área de la superficie del tronco de cono.

23. En un tronco de cono la medida de la generatriz es el doble de la medida del radio de la base mayor. Si el $A_{L_{Tco}} = 54$ $cm^2$ y el área total $A_{T_{Tco}} = 78$ $cm^2$, ¿cuál es el volumen del tronco de cono?.

24. A continuación se muestra una base en madera para colocar el asta de una bandera. ¿Cuántos $cm^3$ de madera se utilizaron para hacer la base?




25 En el parque de las Naciones en Lisboa hay una fuente volcán de agua con forma de tronco de cono. Si los radios de las bases miden 0,6 m y 1,8 m, y la altura aproximada es de 4 m, calcula:

a. El área lateral de la fuente volcán de agua.

b. El volumen de la fuente volcán de agua.

# CAPÍTULO 6

# ESFERA

## 6.1. Introducción

En los capítulos anteriores se estudió el prisma, la pirámide, el tronco de pirámide, el cilindro, el cono y el tronco de cono, haciendo énfasis en el contexto histórico de esas figuras geométricas, sus desarrollos planos, cálculos de áreas, volumen entre otros y al final fueron propuestas actividades y situaciones problemas.

A partir de aquí estudiaremos la esfera y durante este estudio será discutido su contexto histórico y para contextualizar será estudiado el balón de fútbol. Luego, será abordado el concepto matemático de la esfera usando como referencia sitios en internet y libros didácticos.

Más adelante, serán presentados sus principales elementos y las relaciones matemáticas pertinentes a esa figura geométrica, y, además, serán estudiadas las secciones de la esfera.

Para cerrar el capítulo 6, serán propuestas algunas actividades en las que el profesor podrá trabajar de manera integral o adaptarlas para la realidad de su escuela o institución.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

1. Explicar las características de los cuerpos de revolución.
2. Diferenciar entre esfera sólida y superficie esférica.
3. Identificar los elementos de la Esfera.
4. Calcular el volumen de la Esfera.
5. Diferenciar algunas relaciones matemáticas.

## 6.2. Hechos Históricos

Muchos matemáticos dedicaron parte de sus vidas estudiando y trabajando en geometría espacial, entre ellos podemos destacar a Arquímedes que en su tratado titulado "*Sobre la esfera y el cilindro*" que consta de dos libros, en el primero fueron encontrados estudios sobre el cálculo del área de una esfera y de un casquillo esférico, también, una relación entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro hacían parte de este material.

En cuanto, al segundo libro consta de estudios sobre secciones de esferas, esto es, si seccionamos una esfera en dos partes cada una de esas partes son proporcionales entre sí.

Por mucho tiempo se creyó que los egipcios sabían calcular el área de una semiesfera, mientras que, Arquímedes es conocido como el primero en "*probar que el área de la esfera es igual a cuatro veces el área de su círculo máximo*". (BOYER, 1974).

Los Hindús, también, se aventuraron en el estudio de la esfera, pero como trabajaban, generalmente, con la idea de una geometría mensurable y casi nunca hacían demostraciones, llegaban a relaciones imprecisas, como, por ejemplo, el volumen de la esfera $\pi^{3/2}r^3$ y además usaban para $\pi$ los valores de 3 o $\sqrt{10}$.

Así como el volumen de la pirámide, alrededor del siglo seis de nuestra era, el volumen de la esfera era calculado, erróneamente, como el producto entre el área del círculo mayor y la raíz cuadrada del mismo círculo.

Desde ***Karl Friedrich Gauss***, alrededor del año 1820, los geómetras comenzaron a estudiar geometría sobre superficies curvas, entre estas superficies como la de la esfera y posteriormente esa geometría se llamó geometría no euclidiana porque aparentemente contradice la geometría de Euclides que incluso en ese entonces era el único "*verdadero*", pero, al no hacer publicaciones Gauss rápidamente, Nikolai Ivanovich Lobachevsky y Bolyai János publicaron su trabajo sobre esta nueva geometría.

La geometría no euclidiana se divide actualmente en algunas partes para su estudio las cuales son: *la geometría fractal, la geometría proyectiva, la geometría esférica e hiperbólica.* En este momento, lo que nos interesa es la *geometría esférica* la que *Georg Friedrich Bernhard Riemann* estudió por tanto tiempo, lo cual es ver la circunferencia como una esfera y su diámetro como el círculo mayor de la esfera. Fue exactamente este estudio de *Riemann* el que motivó a Albert Einstein a escribir el artículo sobre ***la Teoría General de la Relatividad***.

## 6.3. El balón de Fútbol

¿Qué seria del fútbol sin un balón? Quién nunca pateó una bola de papel o de trapo en los corredores de la casa, en la calle o en el colegio?. ¿Será que el balón de fútbol siempre tuvo esa belleza que, generalmente, vemos en los campeonatos? Después de todo, ¿Qué es el balón? Observemos entonces el balón de futbol.

Figura 6.1: *Balón de Fútbol*

La forma del balón siempre ha sido esférica, sin embargo, no siempre se ha conseguido que queden de esa forma, al comienzo, los balones eran traídos de Europa, estos consistían en una armazón de cuero con un agujero a través del cual se introducía una cámara de aire inflable, la cual después se cocía con un cordón el cual no era muy cómodo, especialmente cuando el jugador tenía que cabecearla.

Pronto los fabricantes de calzado de Brasil comenzaron a producir balones, para su uso tanto en el Brasil como para la exportación, principalmente a Argentina y Uruguay. A pesar de esto, la personas más pobres de Brasil, no podían darse el lujo de comprar un balón de estos y por lo tanto, continuaron utilizando medias rellenas de papel, de trapos o de otros materiales suaves para divertirse.

Los balones producidos por los zapateros brasileros eran de buena calidad; sin embargo, el gran problema aparecía en juegos con lluvia, pues el cuero se mojaba y el balón se hacía demasiado pesado. Pero, con el tiempo, el balón fue pasando por grandes transformaciones y con el avance de la tecnología fue adquiriendo una mejor calidad. Actualmente, el balón es producido con material sintético y eso hace que tenga un mejor desempeño, mayor durabilidad y resistencia.

Gracias a esa tecnología tenemos balones que consiguen permanecer de forma esférica desde el comienzo hasta el final del juego. Las reglas actuales del fútbol exigen que la bola sea esférica, con cubierta exterior de cuero o material apropiado, debe tener una circunferencia máxima de 70 cm y mínima de 68 cm, su peso debe ser de 450 gramos máximo 410 gramos mínimo, con una presión de 0,6 a 1,1 atm a nivel del mar.

En fin, el fútbol escogió un objeto perfecto para su práctica, el balón, cuya forma es esférica. Este objeto además de ser importante para el buen desempeño del fútbol, también, tiene en su forma una gran importancia para el estudio de la Geometría Espacial.

## 6.4. Concepto Geométrico de Esfera

En la geometría espacial, la forma del balón de fútbol representa una figura espacial importante, o sea, la esfera y en la preocupación de definirla, se realizaron algunas indagaciones en internet a través de enciclopedias y diccionarios relacionados con la matemática y de allí se han destacado algunos conceptos tales como:

1. "*La **esfera** en el espacio $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los puntos del espacio que están localizados a una misma distancia denominada radio de un punto fijo llamado centro*". (ESFERA, Matemáticas Fundamentales, 2008).

2. "*En geometría, una **esfera** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro de la esfera*". (ESFERA, Wikipedia 2012).

3. "*Bola perfectamente redonda. Una **esfera** es un sólido cerrado delimitado por una superficie en la que todos los puntos se encuentran equidistantes de un punto central llamado centro*".(ESFERA, Diccionario Matemático, 2012).

4. "*Cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cuyos puntos están todos a igual distancia de uno interior llamado centro*". (ESFERA, Diccionario Larousse, 2012).

A través de las indagaciones hechas en internet y en algunos libros, podemos percibir que algunos autores definen la esfera como una superficie y otros como un sólido geométrico.

Sin embargo, en este trabajo, la esfera será definida como:

***Definición* 6.1.** *(Esfera):*
*Es el lugar geométrico formado por la unión de todos los puntos del espacio que están equidistante (misma distancia) a un punto llamado centro de la esfera, que será representado por "**o**" y la distancia será llamada radio de la esfera representada por la letra "**r**".*

Por lo tanto, la esfera es una superficie del espacio. Luego, cuando nos queramos referir a un sólido con o forma de esfera lo llamaremos ***sólido esférico***.

También, podemos asumir a la esfera, como una superficie rotacional, pues rotando una semicircunferencia en torno de un eje cualquiera, tendremos una esfera, como lo muestra la siguiente figura:

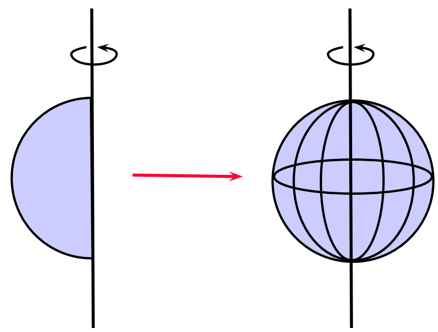


Figura 6.2: *Construcción de una Esfera por rotación*

## 6.5. Elementos de una Esfera

En base a la ***definición 6.1***, tomada para este trabajo, se destacan los elementos de la Esfera, como se muestra en la figura 6.3:

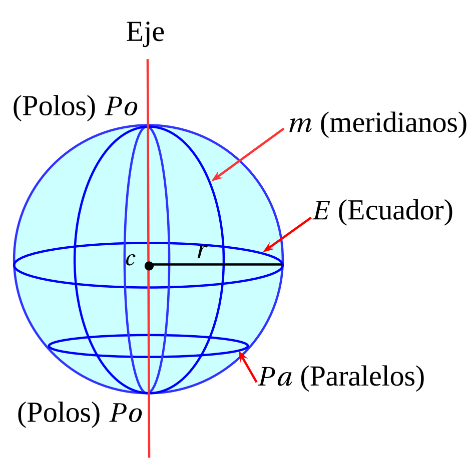



Figura 6.3: *Elementos de la Esfera*

- Ecuador ($\boldsymbol{E}$): circunferencia mayor de la esfera de centro "$c$", también llamada "circulo máximo".

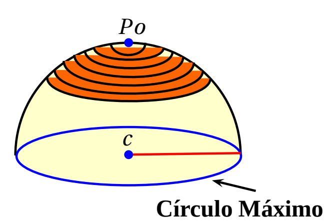
- Paralelos (***Pa***): circunferencias concéntricas al ecuador que no pasan por el centro "$c$", pues están en un plano paralelo al ecuador.
- Meridianos (***m***): circunferencias resultantes de la intersección de un plano que pasa por el centro "$c$" de la esfera y es perpendicular al plano que contiene el ecuador.
- Eje esférico: segmento de recta que liga los dos polos y pasa por el centro de la esfera.
- Polos (***Po***): puntos de intersección entre la esfera y el eje.
- Centro esférico (***o***): punto que marca el centro de la esfera.
- Semiesfera: una de las dos partes de la esfera seccionada en la circunferencia mayor.
- Radio (***r***): Radio del círculo máximo.

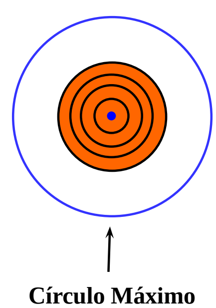
Podemos percibir que los nombres dados anteriormente a las partes de la esfera, son básicamente los mismos cuando nos referimos al globo terrestre, pues podemos considerar el globo como una esfera, o sea, el planeta tierra podrá ser considerado un sólido esférico, por lo tanto, tiene un eje, los polos, que son llamados polo norte y polo sur, los meridianos, el ecuador y los paralelos, que en el caso de la tierra se destacan dos llamados trópicos de cáncer y de capricornio.

## 6.6. Cálculo del área y volumen de la Esfera

Hacer el desarrollo en el plano de una esfera para hallar su área, es un procedimiento complicado. Sin embargo, la siguiente actividad permite deducir una expresión para hallar el área de una esfera.

1. Dividir una esfera en dos partes iguales (dos semiesferas).
2. Enrollar pita desde el punto ($Po$) en forma de espiral de tal manera que cubra la superficie de una semiesfera.
3. Soltar la pita.
4. Con la misma pita, enrollar la base de la semiesfera o círculo máximo, en forma de espiral desde el centro ($c$).




Al comparar, la longitud de la pita usada para cubrir la superficie de la semiesfera se observa que es el doble de la longitud de la pita usada para cubrir el círculo máximo.

Así se deduce que el área de la semiesfera es igual a dos veces el área del círculo máximo, esto es

$$A_{S_E} = 2\pi r^2$$

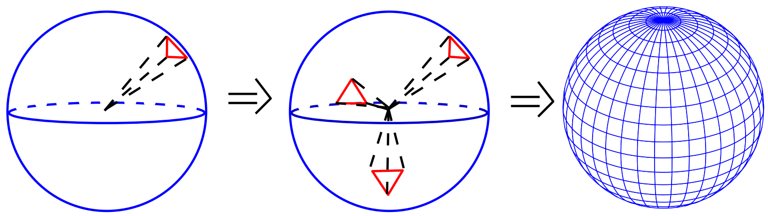
Por tanto, el área de la esfera es dos veces el área de la semiesfera:

$$A_E = 4\pi r^2$$

(Área de la superficie de la Esfera):
El área de la superficie de una esfera de radio $r$, es igual a cuatro veces el área del círculo máximo.

$$A_E = 4\pi r^2$$

El volumen de una esfera se puede aproximar sumando los volúmenes de muchas pirámides triangulares iguales, cuyas bases están sobre la superficie esférica y cuyos vértices están en el centro de la esfera.



Si llamamos $B_1, B_2, B_3, \cdots B_n$ el área de las bases de las pirámides triangulares y $h$ la altura, el volumen de la esfera se aproxima a la suma de los volúmenes de las pirámides, así:

$$\frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + \frac{1}{3}B_3h + \cdots + \frac{1}{3}B_nh = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n)h$$

A medida que el número $(n)$ de triángulos aumenta, ocurre que:

- La suma de las áreas de las bases de las pirámides tienden a ser el área de la superficie esférica: $4\pi r^2$.
- Las alturas $(h)$ de las pirámides tienden a ser el $(r)$ de la superficie esférica: $r = h$.

Por tanto, el volumen de la esfera es

$$V = \frac{1}{3}(4\pi r^2)r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

***Definición* 6.2.** *(Volumen de la Esfera):*
*El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto de $\pi$ por el radio al cubo.*

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Ejemplos**

***Ejemplo* 6.1.** Los balones oficiales usados en los mundiales de fútbol tienen forma esférica. Aunque en los últimos mundiales su diseño ha cambiado, sus medidas han variado muy poco. Según la FIFA, la longitud de la circunferencia del balón oficial debe estar comprendida entre 68,5 cm y 69,5 cm.

Para el mundial de Alemania 2006, el balón "Teamgeist" que significa "espíritu de equipo" tuvo una longitud de circunferencia de 69 cm.

De acuerdo con la información dada, calcular:

*a.* Radio del balón Teamgeist.

*b.* Diámetro del balón Teamgeist.

*c.* Área de la superficie del Teamgeist.

*d.* Volumen del balón Teamgeist.

***Solución:***

*a.* Como la longitud $l$ de la circunferencia máxima del balón Teamgeist es 69 cm, tenemos que el radio es:

$$r = \frac{l}{2\pi} \approx \frac{69 \text{ cm}}{6,28} \approx 10,98 \text{ cm}$$

*b.* El diámetro $d$, es

$$d = 2r \approx 2(10,98 \text{ cm}) = 21,96 \text{ cm}$$

*c.* El área de la superficie esférica del balón es

$$A_E = 4\pi r^2 \approx 4(3,14)(10,98 \text{ cm})^2 = 1514,23 \text{ cm}^2$$

*d.* El volumen del balón es:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}(3,14)(10,98 \text{ cm})^3 = 5542,11 \text{ cm}^3$$

***Ejemplo* 6.2.** Calcular el área de la superficie de una esfera de dos metros de radio.

***Solución:***

El área está dada por:

$$A_E = 4\pi r^2 = 4\pi(2 \text{ m})^2 = 4\pi(4 \text{ m}^2) = 16\pi \text{ m}^2 \approx 16(3,14) \text{ m}^2 = 50,24 \text{ m}^2$$

Por tanto, la superficie de una esfera de dos metros de radio es, aproximadamente, 50,24 $\text{m}^2$.

***Ejemplo* 6.3.** Calcular el radio de una esfera, si el área de su superficie es 113 $\text{cm}^2$

***Solución:***

El radio es $r = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$, así que

$$r = \sqrt{\frac{113 \text{ cm}^2}{4\pi}} \approx \sqrt{\frac{113 \text{ cm}^2}{4(3,14)}} = \sqrt{\frac{113 \text{ cm}^2}{12,56}} = \sqrt{8,99 \text{ cm}^2} \approx 3 \text{ cm}$$

***Ejemplo*** **6.4.** Calcular el volumen de una esfera de 14 cm de diámetro.

***Solución:***

Puesto que $r = \dfrac{d}{2}$, entonces, $r = 7$ cm. De esto

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}(3,14)(7\ \text{cm})^3 \approx 1436,02\ \text{cm}^3$$

## 6.7. Laboratorio: Área de la superficie de la Esfera

Podemos calcular el área de la superficie de una esfera comparándola con el área del círculo mayor de la misma esfera.

### 6.7.1. Fórmula del área de la superficie de la Esfera

Para mostrar la fórmula del cálculo del área de la superficie de la esfera, identificada por:

$$A_E = 4\pi r^2$$

La siguiente figura sugiere que la suma del área de cuatro círculos mayores de una esfera es igual al área de toda la superficie de esa esfera. Podemos a través de una experimentación mostrar esa relación.

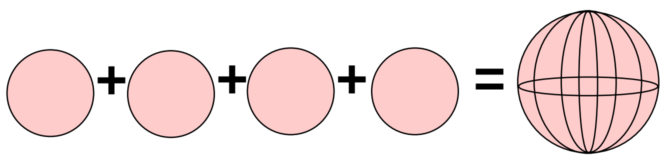


Figura 6.4: *Relación entre el área del circulo máximo y la superficie de la Esfera*

### Objetivo

Demostrar la relación:

$$A_E = 4\pi r^2$$

### Materiales

- Papel cartulina 180g/m$^2$.
- Pegante.
- Tijeras.
- Regla
- Compas.
- Arena
- Semiesfera de Icopor.

**Procedimiento**

1. Dividir la clase en pequeños grupos, cada grupo deberá hacer un trabajo.
2. Medir La circunferencia mayor de la semiesfera de icopor.
3. Construir cuatro círculos con radio igual al de la circunferencia mayor de la esfera.
4. Cortar esos círculos en pequeños pedazos formando diversos sectores.
5. Pegar cada pedazo en la esfera de icopor, teniendo cuidado de no sobreponer los pedazos y no dejar espacios sin cubrir (método de exhaución).
6. Observar que la esfera quedó totalmente cubierta y que no sobraron pedazos de los círculos.
7. Hacer un informe concluyendo su observación.

**Nota:**

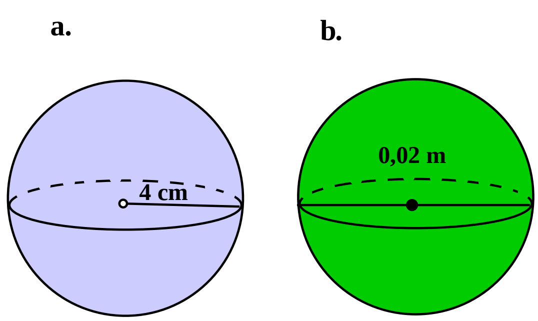
El profesor podrá proponer que un alumno de cada grupo vaya fotografiando o filmando el procedimiento paso a paso para montar una presentación en el computador y explicarlo a sus compañeros.

## 6.8. Problemas Propuestos

1. Calcula el área de la superficie de cada esfera a partir de su radio $r$.

| | | |
|---|---|---|
| a. $r = 3$ cm | c. $r = 12$ cm | e. $r = 2,4$ m |
| b. $r = 8$ cm | d. $r = 11$ m | f. $r = 0,015$ m |

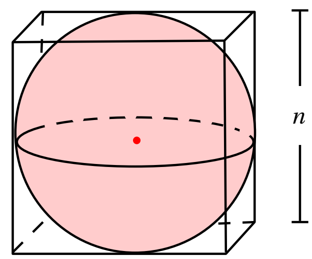
2. Calcula el volumen de las siguientes esferas.



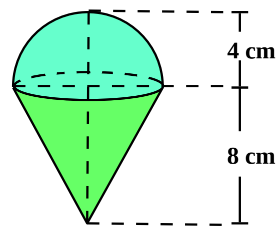

3. Calcula la expresión que permite calcular el volumen de una esfera circunscrita en un cubo de arista $a$.
4. Si el radio de una esfera mide 0,3 m. ¿Cuál es el área de la superficie de la esfera en centímetros cuadrados?
5. Si el área de la superficie de una esfera equivale a $36\pi$ cm$^2$. ¿Cuántos metros tiene el diámetro de la esfera?
6. Si el volumen de una esfera es $972\pi$ cm$^3$. ¿Cuál es el área de la superficie de la esfera en metros cuadrados?

7 Si el área de la superficie de una esfera corresponde a $676\pi$ m$^2$. ¿Cuál es el volumen de la esfera en centímetros cúbicos?

8 Una esfera se inscribe en un cubo de arista $n$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la esfera?



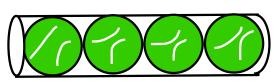

9 Calcula el volumen y el área de la superficie del siguiente cuerpo geométrico.




10 En un recipiente cilíndrico se colocan cuatro pelotas de tenis como se muestra en la figura. Si cada pelota tiene un diámetro aproximado de 67 milímetros:

a. ¿Cuál es el volumen de una pelota de tenis?

b. ¿Cuál es el volumen del recipiente cilíndrico en centímetros cúbicos?



### *Soluciona Problemas*

11 Vimos que el balón de fútbol debe tener 68 cm a 70 cm de circunferencia Como máximo. Suponiendo que un balón oficial está hecho con material sintético con 70 cm de circunferencia máxima. ¿Cuál es la cantidad (área de la superficie da esfera), en cm$^2$, de ese material necesaria para fabricar ese balón?

***Sugerencia:*** Usar la relación dada para el cálculo de la superficie de la esfera.

12 Un globo de fiesta cuando se llena toma una forma esférica y puede llegar a una circunferencia máxima con un radio de 20 cm. Si continuamos llenándolo de aire después de alcanzar este valor por lo general explota. ¿Cuál es la superficie del globo en el momento de la explosión?

***Sugerencia:*** Usar la relación dada para el cálculo del área de la superficie total de la esfera.

13 En la situación del problema anterior, se puede con los datos que debemos descubrir encontrar el volumen que el globo ocupa en el espacio al momento del estallido? De ser así, ¿cuál es ese volumen?

***Sugerencia:*** Usar la relación dada para el cálculo del volumen de la esfera.

14 Se quiere construir un acuario con la forma de un casco esférico de radio 2 metros y altura 1 metro. ¿Cuál es la cantidad de agua necesaria para llenar el acuario hasta 10 cm de su borde?

***Sugerencia:*** Cálculo del volumen del casquillo esférico, recuerda de descontar los 10 cm.

15 En una piscina de pelotas en un parque de diversiones, fueron colocadas 10.000 pelotas de plástico con radio igual a 4 cm. ¿Cuál es el volumen, en $m^3$, que debe tener la piscina para soportar todas las pelotas?

***Sugerencia:*** Calcular el volumen de una pelotita y después multiplicar por el total (10.000).

16 Un invernadero, fue construido en plástico, con la forma de una semiesfera de 10 m de radio. ¿Cuál es la cantidad de plástico usada para construirla?

***Sugerencia:*** Usar la relación dada para calcular la superficie de la semiesfera.

17 Un depósito de agua tiene forma esférica con 5 metros de radio. ¿Cuál es la cantidad de agua necesaria para llenarlo hasta sólo el 20 % de su capacidad?

***Sugerencia:*** Calcular el volumen de la esfera y revisar el porcentaje.

18 Una boya de orientación de barcos, está formada por una semiesfera de 3 m de diámetro y un cono de 1 m de altura. ¿Cuál es el volumen de esta boya?

***Sugerencia:*** Puedes calcular por separado el volumen de la semiesfera y el volumen del cono y después sumarlos.

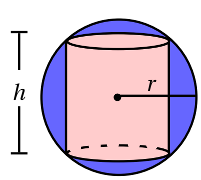
19 *La Géode* es un cinema con forma de esfera de 36 metros de diámetro, situado en el parque de la Villete en París. Está conformado por una pantalla semiesférica de 26 metros de diámetro.

a. Calcula el volumen aproximado de *La Géode*.

b. Calcula el área aproximada de la pantalla de *La Géode*.

20 Cerca de tres cuartas partes de la superficie de la Tierra están cubiertas de agua. ¿Cuántos kilómetros cuadrados de la superficie de la Tierra constituyen terreno seco? (Considere 6400 km como longitud del radio de la Tierra).

21 Determine el volumen de un cilindro de altura $h$ inscrito en una esfera de radio $r$.



22 Una esfera está inscrita en un cono y la longitud del diámetro de la base del cono es igual a la longitud de la generatriz del mismo, los cuales miden 10 cm. Determine el volumen de la esfera.

23 En una esfera de radio $r$ se tiene inscrito un cilindro de tal manera que el diámetro del cilindro es congruente con el radio de la esfera. Calcule la relación entre el volumen del cilindro y el volumen de la esfera.

24 Dos esferas tangentes externamente tienen radios de longitud igual a 8 cm y 12 cm respectivamente. Las esferas están situadas sobre la superficie lisa de una mesa. Determine la distancia entre los dos puntos de tangencia de las esferas con la mesa.

25 Calcula el área y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima (longitud de la circunferencia mide 47,1 cm).

# CAPÍTULO 7

# PROBLEMAS RESUELTOS

## 7.1. Introducción

En los capítulos anteriores se ha hecho un completo desarrollo del prisma, la pirámide, el tronco de pirámide, el cono, el tronco de cono, el cilindro y la esfera, haciendo énfasis en el contexto histórico de esas figuras geométricas, su contextualización, cálculos de áreas, volumen entre otros y al final de cada capítulo fueron propuestas actividades y situaciones problemas.

A partir de aquí desarrollaremos algunos problemas y su aplicación en los diferentes contextos de la vida real.

## 7.2. Problemas

***Ejercicio* 7.1.** Demuestre que en un paralelepípedo recto rectangular el cuadrado de la longitud de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.

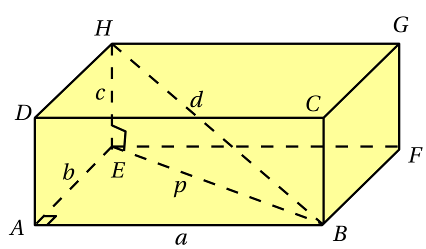



Figura 7.1: *Paralelepípedo*

**Hipótesis:** Sean $a$, $b$ y $c$ las dimensiones del paralelepípedo recto rectangular. Debemos encontrar a la diagonal $d$.

**Tesis:** $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

***Solución:***

En la figura, $d$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $BEH$, entonces

$$d^2 = p^2 + c^2$$

En el triángulo rectángulo $BAE$, $p$ es la hipotenusa, por lo tanto

$$p^2 = a^2 + b^2$$

Luego,

$$d^2 = p^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

***Ejercicio* 7.2.** Calcula el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.

***Solución:***

$$\begin{aligned} Área: A &= 6a^2 = 6(5\ \text{m})^2 = 150\ \text{m}^2 \\ Volumen: V &= a^3 = (5\ \text{m})^3 = 125\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

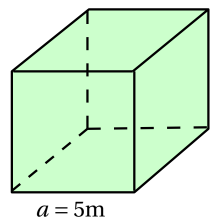
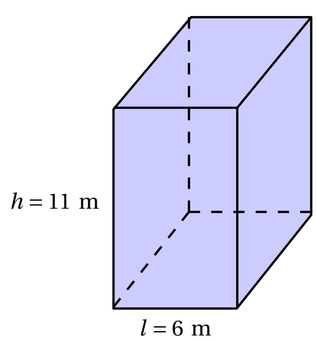



Figura 7.2: *Cubo*

***Ejercicio* 7.3.** Calcula el área de la base, área lateral, área total y el volumen de un prisma de base cuadrada en el que la arista de la base mide 6 m y su altura es de 11 m.

***Solución:***




$$\begin{aligned} A_B &= l^2 = (6\ \text{m})^2 = 36\ \text{m}^2 \\ A_L &= 4lh = 4(6\ \text{m})(11\ \text{m}) = 264\ \text{m}^2 \\ A_T &= 2A_B + A_L = 2(36\ \text{m}^2) + 264\ \text{m}^2 = 336\ \text{m}^2 \\ V &= A_B \bullet h = (36\ \text{m}^2)(11\ \text{m}) = 396\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

Figura 7.3: *Prisma de base cuadrada*

***Ejercicio* 7.4.** Calcule el área de la superficie total de un prisma recto hexagonal regular, si su arista lateral mide $4\sqrt{3}$ m (altura) y la arista de la base mide 2 m.

***Solución:***

En la figura 7.4, el segmento $\overline{OP}$ es la apotema del hexágono regular.

$$\overline{P_1Q_1} = 4\sqrt{3}\ \text{m},\ \overline{P_1P_2} = 2\ \text{m}$$

además, $\overline{OP_2} = 2$ y $\overline{OP} = \sqrt{3}$.

Luego, el área de la base es:

$$A_B = (6)\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) \text{m}^2 = 6\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Ahora, el área lateral es:

$$A_L = (6)(2)(4\sqrt{3}\ \text{m}) = 48\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

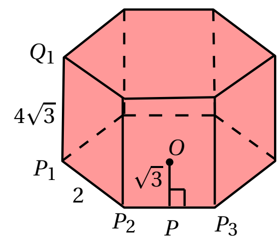



Figura 7.4: *Prisma hexagonal*

Así que el área total es:

$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$A_T = 48\sqrt{3}\ \text{m}^2 + 12\sqrt{3}\ \text{m}^2 = 60\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

***Ejercicio*** **7.5.** La suma de las tres dimensiones de un ortoedro es 15 m y el área de su superficie total es 200 m$^2$. Calcule la longitud de la diagonal del paralelepípedo.

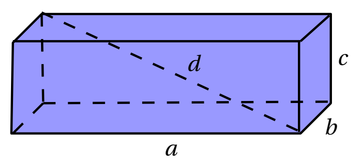



Figura 7.5: *Ortoedro*

***Solución:***

Sean $a$, $b$ y $c$ las dimensiones del ortoedro, entonces, tenemos que $a+b+c = 15$ m y

$$200\ \text{m}^2 = A_T = 2(ab) + 2(bc) + 2(ac)$$

Así que:

$$ab + bc + ac = 100\ \text{m}^2$$

ahora,

$$\begin{aligned} d^2 = a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) \\ &= (15\ \text{m})^2 - 200\ \text{m}^2 = 225\ \text{m}^2 - 200\ \text{m}^2 = 25\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

de donde $d^2 = 25$ m$^2$ y por consiguiente $d = 5$ m.

***Ejercicio*** **7.6.** Calcula las áreas de las bases, el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro recto cuya base mide 7,5 m de radio y cuya altura es el doble del radio de la base.

***Solución:***

Tenemos que el área de la base del cilindro recto corresponde al área de un círculo de radio 7,5 m, así que:

$$A_B = \pi r^2 = \pi(7,5 \text{ m})^2 \approx (3,14)(56,25 \text{ m}^2) = 176,63 \text{ m}^2$$

El área lateral está dada por:

$$A_L = 2\pi r h \approx 2(3,14)(7,5 \text{ m})(15 \text{ m}) = 706,5 \text{ m}^2$$

El área total es:

$$A_T = 2A_B + A_L \approx 2(176,63 \text{ m}^2) + (706,5 \text{ m}^2) = 1059,76 \text{ m}^2$$

El volumen está dado por:

$$V = A_B \bullet h \approx (176,63 \text{ m}^2)(15 \text{ m}) = 2649,45 \text{ m}^3$$

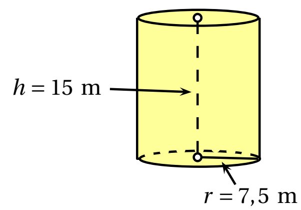



Figura 7.6: *Cilindro recto*

***Ejercicio* 7.7.** Calcula las áreas y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 12 m y su altura es de 25 m.

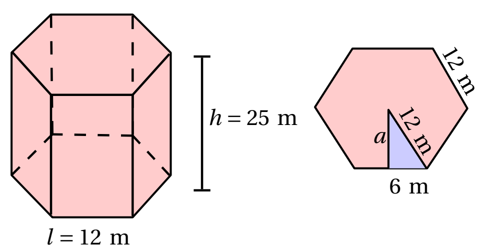



Figura 7.7: *Prisma hexagonal*

***Solución:***

Siguiendo la figura tenemos que:

$$a = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (6 \text{ m})^2} = \sqrt{144 \text{ m}^2 - 36 \text{ m}^2} = \sqrt{108 \text{ m}^2} = 6\sqrt{3} \text{ m}$$

El área de la base es:

$$A_B = \frac{(6)(12 \text{ m})(6\sqrt{3} \text{ m})}{2} = 236\sqrt{3} \text{ m}^2 \approx 374,12 \text{ m}^2$$

El área lateral es:

$$A_L = 6l \bullet h = 6(12 \text{ m})(25 \text{ m}) = 1800 \text{ m}^2$$

El área total es:

$$A_T = 2A_B + A_L = 2(236\sqrt{3} \text{ m}^2) + 1800 \text{ m}^2 \approx 2617,52 \text{ m}^2$$

El volumen está dado por:

$$V = A_B \bullet h = (236\sqrt{3} \text{ m}^2)(25 \text{ m}) \approx 10219,09 \text{ m}^3$$

***Ejercicio* 7.8.** Un cono recto está inscrito en una esfera de radio $R$ y centro $O$. Si el volumen y radio del cono es $12\pi$ cm$^3$ y 3 cm respectivamente. Halle el área de la esfera.

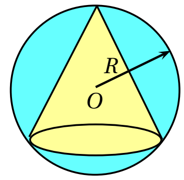



Figura 7.8: *Cono inscrito en una esfera de radio R y centro O*

***Solución:***

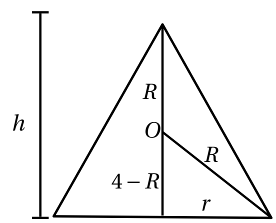
Sean $R$, el radio de la esfera, $r$ el radio de la base del cono y $h$ la altura del cono.
Tenemos que:

$$12\pi\ \text{cm}^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (3)^2 h\ \text{cm}^2$$

luego,

$$4\ \text{cm} = h$$

ahora, tenemos la figura:




por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + (4-R)^2 = r^2 + 16 - 8R + R^2$$

de donde

$$r^2 + 16 - 8R = 0$$

así que

$$R = \left(\frac{r^2+16}{8}\right)\ \text{cm} = \left(\frac{(3)^2+16}{8}\right)\ \text{cm} = \frac{25}{8}\ \text{cm}$$

finalmente

$$A_E = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{25}{8}\ \text{cm}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{625}{64}\ \text{cm}^2\right) = \frac{625\pi}{16}\ \text{cm}^2 \approx 112{,}65\ \text{cm}^2$$

***Ejercicio*** **7.9.** Los lingotes de oro son barras moldeadas como la de la figura, cuyas dimensiones se miden en cm. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es su volumen?

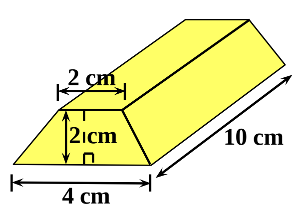



Figura 7.9: *Prisma trapezoidal*

***Solución:***

$$V = A_B \bullet h = \frac{(4+2)(2\ \text{cm}^2)}{2}(10\ \text{cm}) = 60\ \text{cm}^3$$

***Ejercicio* 7.10.** Encuentre el área de la superficie lateral de un tetraedro, cuyas caras laterales son congruentes, cuya apotema mide el triplo de la arista de la base y la circunferencia circunscrita a la base mide $24\pi$ m.

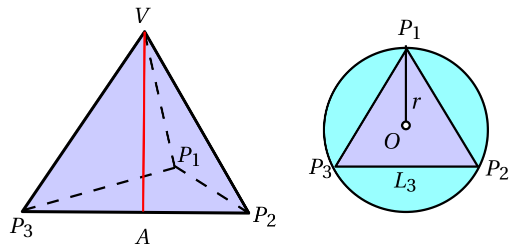



Figura 7.10: *Tetraedro*

***Solución:***

Puesto que $24\pi\ \text{m} = 2\pi r$, luego $r = 12$ m.

$\overline{VA} = 3\left(\overline{P_2P_3}\right)$

En la circunferencia circunscrita al triángulo, se cumple que: $L_3 = r\sqrt{3}$, en este caso, $L_3 = 12\sqrt{3}$ m. Luego, el área lateral es:

$$A_L = (3)\left(\frac{(12\sqrt{3})(3(12\sqrt{3}))}{2}\right)\ \text{m}^2 = (3)\left(\frac{(12\sqrt{3})(36\sqrt{3})}{2}\right)\ \text{m}^2 = (3)\left(\frac{(12)(36)(3)}{2}\right)\ \text{m}^2 = 1944\ \text{m}^2$$

***Ejercicio* 7.11.** Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 8,5 cm, 7,4 cm y 5,2 cm.

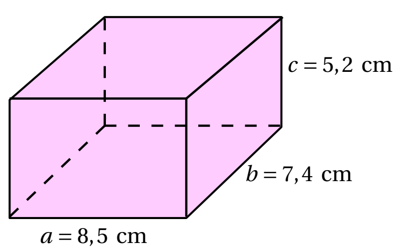



Figura 7.11: *Ortoedro*

***Solución:***

Área:

$$A = 2(ab + ac + bc) = 2((8{,}5\ \text{cm})(7{,}4\ \text{cm}) + (8{,}5\ \text{cm})(5{,}2\ \text{cm}) + (7{,}4\ \text{cm})(5{,}2\ \text{cm})) = 291{,}16\ \text{cm}^2$$

Volumen:

$$V = abc = (8{,}5\ \text{cm})(7{,}4\ \text{cm})(5{,}2\ \text{cm}) = 327{,}08\ \text{cm}^3$$

***Ejercicio* 7.12.** El depósito de gasoil de un sistema de calefacción tiene forma de ortoedro, cuyas dimensiones en metros son $1,5\ \mathrm{m} \times 0,75\ \mathrm{m} \times 1,8\ \mathrm{m}$. Calcula cuánto cuesta llenarlo si cada litro de gasoil cuesta $0,55$ dólares. Si la calefacción consume uniformemente todo el gasoil en 120 días, ¿cuánto se gasta diariamente en calefacción?.

***Solución:***

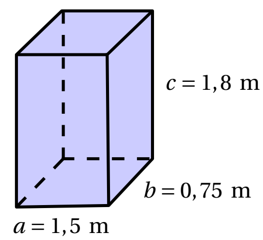



Figura 7.12: *Depósito de gasoil con forma de ortoedro*

El volumen del depósito es:

$$V = (1,5)(1,8)(0,75)\ \mathrm{m}^3 = 2,025\ \mathrm{m}^3$$

Ahora, 1 litro equivale a 1000 $\mathrm{cm}^3$, de donde:

$$2,025\ \mathrm{m}^3 = 2,025 \times 1000\ \mathrm{cm}^3 = 2025 \text{ litros}$$

Como cada litro cuesta US\$ $0,55$, tendremos que el costo para llenarlo es:

$$C = (2025)(0,55) = \text{US\$ } 1113,75$$

Y el costo diario en calefacción es:

$$\text{US\$ } \frac{1113,75}{120} = \text{US\$ } 9,28 \text{ aproximadamente.}$$

***Ejercicio* 7.13.** La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

***Solución:***

Área de la base:

$$A_B = l^2 = (230\ \mathrm{m})^2 = 52900\ \mathrm{m}^2$$

Su volumen aproximado es:

$$V = \frac{A_B h}{3} = \frac{(52900\ \mathrm{m}^2)(137\ \mathrm{m})}{3} = 2'415,767\ \mathrm{m}^3$$

***Ejercicio* 7.14.** Calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje $y$.

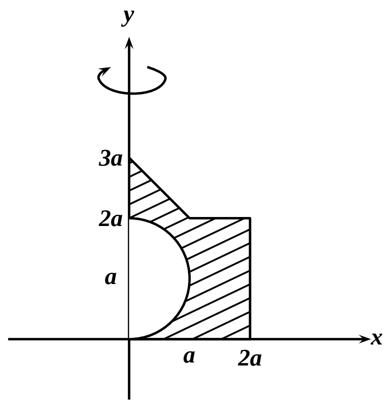
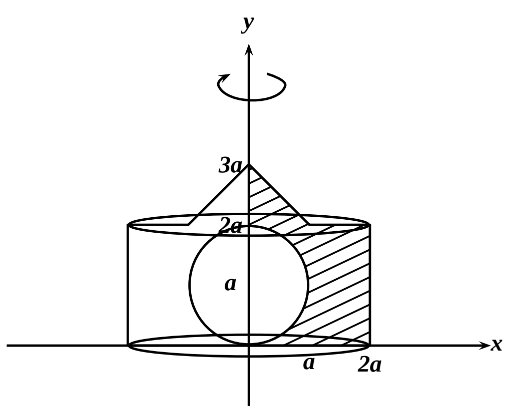



Figura 7.13: *Sólido generado alrededor del eje y*

***Solución:***

Observe que al hacer girar 360 grados la región sombreada alrededor del eje $y$, se forma un sólido compuesto de un cono con un cilindro y en su interior hay un vacío de una esfera.




Por tanto:

$V = V_{Cono} + V_{Cilindro} - V_{Esfera}$

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 a + \pi(2a)^2(2a) - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi a^3 + 8\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = 7\pi a^3$$

***Ejercicio* 7.15.** Calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

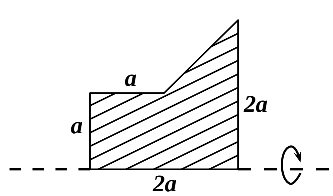
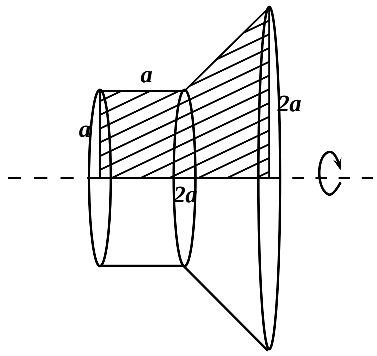



Figura 7.14: *Sólido generado alrededor del eje indicado*

***Solución:***

El sólido generado está compuesto por un cilindro y un tronco de cono.




Por tanto:

$$V = \pi a^2 a + \frac{\pi}{3}\left(a^2 + 2aa + (2a)^2\right) a = \pi a^3 + \frac{7}{3}\pi a^3 = \frac{10}{3}\pi a^3$$

***Ejercicio*** **7.16.** Un recipiente con forma de pirámide regular tiene la parte superior abierta. Esta parte es un hexágono regular con las dimensiones que muestra la figura. Si se van a pintar 100 de estos recipientes, por dentro y por fuera, con una pintura que cubre 450 $pies$ cuadrados por galón, ¿cuántos galones se requieren?.

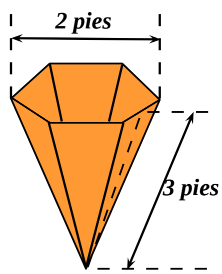
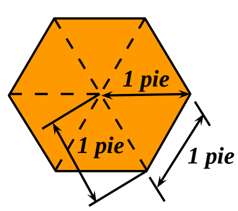


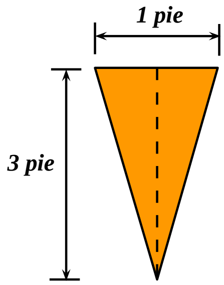

Figura 7.15: *Recipiente con la parte superior abierta*

***Solución:***

La parte superior es un hexágono regular formado por 6 triángulos equiláteros. La longitud de cada lado del triángulo sería entonces $1pie$.




La superficie triangular a pintar tiene el siguiente valor de área.




$$A = \frac{(3)(1)}{2} pies^2$$
$$A = \frac{3}{2} pies^2$$

- Las 6 caras tienen un área de $6A = 9\ pies^2$.
- Como es por dentro y por fuera tenemos que el área total a pintar es 18 $pies^2$ y los 100 recipientes tiene un área de 1800 $pies^2$.
- Como son 450 $pies^2$ por galón, entonces, se requieren 4 galones.

***Ejercicio* 7.17.** En una caja se empacan seis latas cilíndricas. ¿Cuál es la razón entre el volumen de las seis latas juntas y el volumen de la caja?

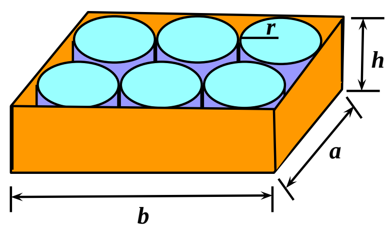



Figura 7.16: *Caja con seis latas cilíndricas*

***Solución:***

Se cumple que $b = 6r$ y $a = 4r$, el volumen de cada lata cilíndrica es $V_L = \pi r^2 h$ y el volumen de la caja es $V_C = abh$.

La razón entre volúmenes se calcula así:

$$\frac{V_{Latas}}{V_{Caja}} = \frac{6V_L}{V_C} = \frac{6\pi r^2 h}{abh} = \frac{6\pi r^2}{(4r)(6r)} = \frac{\pi}{4}$$

***Ejercicio* 7.18.** Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor mide 16 m; la arista de la base menor, 12 m; y la altura, 20 m.

***Solución:***

$$A_{B_1} = {l_1}^2 = (16\ \text{m})^2 = 256\ \text{m}^2$$
$$A_{B_2} = {l_2}^2 = (12\ \text{m})^2 = 144\ \text{m}^2$$

Tenemos que calcular la apotema del tronco de pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

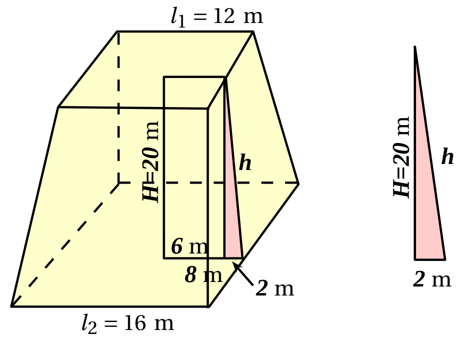



Figura 7.17: *Tronco de pirámide cuadrangular*

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{(20 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = \sqrt{404 \text{ m}^2} \approx 20,1 \text{ m} \\
A_L &= 4\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) h = 4\left(\frac{16+12}{2}\right)(20,1) = 1125,6\text{m}^2 \\
A_T &= A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \approx 256 + 144 + 1125,6 = 1525,6 \text{ m}^2 \\
V &= \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} A_{B_2}}\right) H = \frac{(256 + 144 + \sqrt{(256)(144)})}{3}(20) \approx 3946,67 \text{ m}^3
\end{aligned}
$$

***Ejercicio* 7.19.** Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide $7,5$ m.

***Solución:***

$$
\begin{aligned}
A &= 4\pi r^2 = 4\pi (7,5 \text{ m})^2 \approx (4)(3,14)(7,5 \text{ m})^2 = 706,5 \text{ m}^2 \\
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}(3,14)(7,5 \text{ m})^3 = 1766,25 \text{ m}^3
\end{aligned}
$$

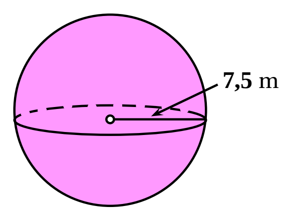



Figura 7.18: *Esfera de radio 7,5 m*

***Ejercicio* 7.20.** Calcula el área y el volumen de un tronco de cono sabiendo que el radio de la base mayor mide 7 m; el de la base menor, 4 m; y la altura, 11 m.

***Solución:***

$$
\begin{aligned}
A_{B_1} &= \pi R^2 = \pi (7 \text{ m})^2 \approx (3,14)(49 \text{ m}^2) = 153,9 \text{ m}^2 \\
A_{B_2} &= \pi r^2 = \pi (4 \text{ m})^2 \approx (3,14)(16 \text{ m}^2) = 50,24 \text{ m}^2
\end{aligned}
$$

Tenemos que calcular la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras:

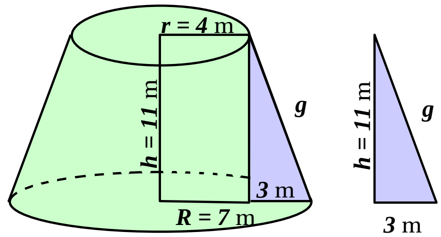



Figura 7.19: *Tronco de cono*

$$
\begin{aligned}
g &= \sqrt{(11\text{ m})^2 + (3\text{ m})^2} = \sqrt{130\text{ m}^2} \approx 11{,}4\text{ m} \\
A_L &= \pi(R+r)g = \pi(7\text{ m} + 4\text{ m})(11{,}4\text{ m}) \approx (3{,}14)(11\text{ m})(11{,}4\text{ m}) = 393{,}76\text{ m}^2 \\
A_T &= A_{B_1} + A_{B_2} + A_L = 153{,}9\text{ m}^2 + 50{,}24\text{ m}^2 + 393{,}76\text{ m}^2 \approx 598\text{ m}^2 \\
V &= \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1}A_{B_2}}\right)h \\
&= \frac{\left(153{,}9\text{ m}^2 + 50{,}24\text{ m}^2 + \sqrt{(153{,}9\text{ m}^2)(50{,}24\text{ m}^2)}\right)}{3}(11\text{ m}) \approx 1070{,}85\text{ m}^3
\end{aligned}
$$

***Ejercicio* 7.21.** Calcula el área y el volumen de un cilindro recto en el que el radio de la base mide $12{,}5$ m y cuya altura es de $27{,}6$ m.

***Solución:***

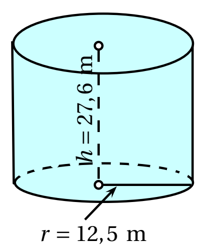



Figura 7.20: *Cilindro recto*

$$
\begin{aligned}
A_B &= \pi r^2 = \pi(12{,}5\text{ m})^2 \approx (3{,}14)(156{,}25\text{ m}^2) = 490{,}63\text{ m}^2 \\
A_L &= 2\pi r h \approx (2)(3{,}14)(12{,}5\text{ m})(27{,}6\text{ m}) = 2166{,}6\text{ m}^2 \\
A_T &= 2A_B + A_L \approx (2)(490{,}63\text{ m}^2) + 2166{,}6\text{ m}^2 = 981{,}26\text{ m}^2 + 2166{,}6\text{ m}^2 = 3147{,}86\text{ m}^2 \\
V &= A_B h \approx (490{,}63\text{ m}^2)(27{,}6\text{ m}) = 13541{,}4\text{ m}^3
\end{aligned}
$$

***Ejercicio* 7.22.** Las dimensiones en centímetros de un cartón de leche de un litro son $9{,}5 \times 6{,}4 \times 16{,}5$. Si lo construyésemos de forma esférica, ¿cuántos centímetros cuadrados de cartón ahorraríamos?

***Solución:***

- Área del cartón de leche:

$$\begin{aligned} A_{Cartón} &= 2\left((9,5 \text{ cm})(6,4 \text{ cm}) + (9,5 \text{ cm})(16,5 \text{ cm}) + (6,4 \text{ cm})(16,5 \text{ cm})\right) \\ &= 2\left(60,8 \text{ cm}^2 + 156,75 \text{ cm}^2 + 105,6 \text{ cm}^2\right) \\ &= 2\left(323,15 \text{ cm}^2\right) = 646,3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Radio de una esfera de volumen 1 litro.

$$\text{Puesto que } \frac{4\pi r^3}{3} = 1 \text{ entonces } r^3 = \frac{3}{4\pi}, \text{ de donde}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \approx \sqrt[3]{\frac{3}{4(3,14)}} = \sqrt[3]{\frac{3}{12,56}} \approx \sqrt[3]{0,238} \approx 0,62 \text{ dm} = 6,2 \text{ cm}$$

- Área de la esfera de un litro:

$$A = 4\pi r^2 = 4(3,14)(6,2 \text{ cm})^2 = (12,56)(38,44 \text{ cm}^2) \approx 482,8 \text{ cm}^2$$

- Luego, Ahorraríamos:

$$646,3 \text{ cm}^2 - 482,8 \text{ cm}^2 = 163,5 \text{ cm}^2$$

***Ejercicio* 7.23.** A un tarro de miel que tiene forma cilíndrica queremos ponerle una etiqueta que lo rodee completamente. El diámetro del tarro mide 9 cm y la altura de la etiqueta es de 5 cm. Calcula el área de la etiqueta.

***Solución:***

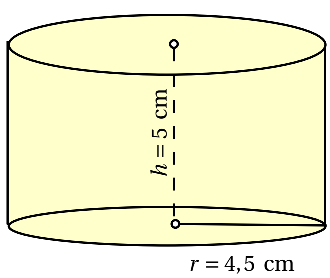



Figura 7.21: *Tarro de miel*

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi r h \\ &\approx (2)(3,14)(4,5 \text{ cm})(5 \text{ cm}) \\ &= 141,3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

***Ejercicio* 7.24.** Un canal de desague tiene forma de un tubo cilíndrico de 50 cm de largo. Los radios interno y externo tienen longitudes de 9 cm y 12 cm, respectivamente. Determine el volumen de cemento necesario para construir el canal.

***Solución:***

Se deduce que el canal tiene la siguiente forma:

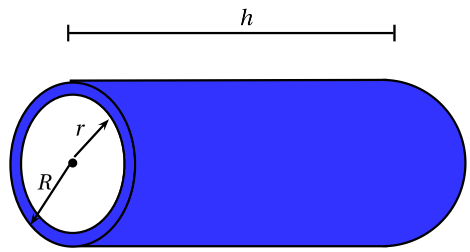



Figura 7.22: *Canal de desague con forma cilíndrica*

El volumen del tubo cilíndrico será el volumen del cilindro exterior menos el volumen del cilindro interior.

$$\begin{aligned} V &= V_{Ext} - V_{Int} \\ &= \pi R^2 h - \pi r^2 h \\ &= \pi h (R^2 - r^2) \\ &= \pi (50 \text{ cm}) \left[ (12 \text{ cm})^2 - (9 \text{ cm})^2 \right] \\ &= \pi (50 \text{ cm}) \left[ 144 \text{ cm}^2 - 81 \text{ cm}^2 \right] \\ &= \pi (50 \text{ cm}) \left[ 63 \text{ cm}^2 \right] \\ &= 3150\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

El volumen de cemento necesario para construir el canal es $3150\pi$ cm$^3$.

***Ejercicio*** **7.25.** Determine el volumen del sólido que se muestra en la figura adjunta.

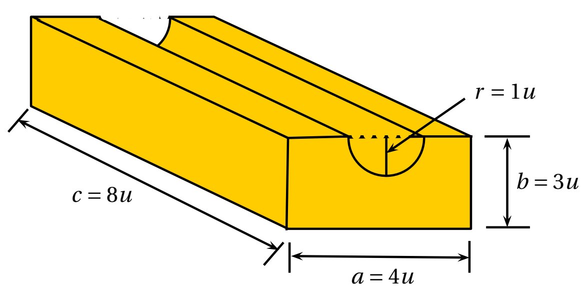



Figura 7.23: *Sólido propuesto*

***Solución:***

Sea $U$ el volumen del paralelepípedo y $W$ el volumen semicilíndrico.

$$U = abc = (4u)(3u)(8u) = 96u^3$$
$$W = \frac{1}{2} V_{Cilindro} = \frac{1}{2}\pi r^2 c = \frac{1}{2}\pi (1u)^2 (8u) = 4\pi u^3$$

El volumen $V$ del sólido será:

$$V = U - W = 96u^3 - 4\pi u^3 = 4(24 - \pi)u^3 \approx 4(24 - 3,14)u^3 = 4(20,86)u^3 = 83,44u^3$$

***Ejercicio* 7.26.** Un rey decide que se fundan 100 esferas de oro de radio $a$ unidades y que, con el material que quede, se formen conos rectos cuyas alturas midan $\frac{a}{2}$ y cuyas bases tengan diámetros de $a$ unidades de longitud. Calcule cuántos conos como esos se podrán formar para repartirlos entre sus súbditos.

***Solución:***

Denominaremos $V_1$ al volumen de las 100 esferas.

$$V_1 = (100)(V_{Esfera}) = (100)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(\frac{400\pi}{3}a^3\right)$$

Denominaremos $V_2$ al volumen de los $x$ conos.

$$V_2 = x(V_{Cono}) = x\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = x\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) = x\left(\frac{1}{24}\pi a^3\right)$$

Suponiendo que no hay pérdida de material, debe cumplirse que $V_1 = V_2$, luego:

$$\frac{400\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{24}x$$

Despejando $x$:

$$x = \frac{(24)(400\pi a^3)}{3(\pi a^3)} = (8)(400) = 3200$$

Luego, el rey podrá repartir 3200 conos de las características anotadas entre sus súbditos.

***Ejercicio* 7.27.** Calcula el volumen de la siguiente pieza:

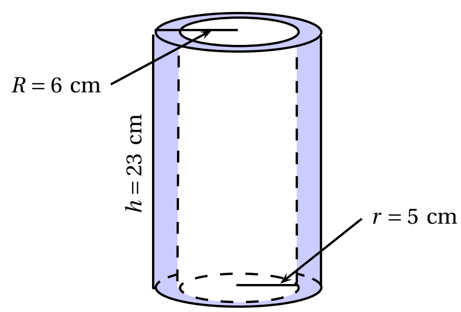



Figura 7.24: *Pieza propuesta*

***Solución:***

Volumen:

$$V = A_B \bullet h = \pi((6\text{ cm})^2 - (5\text{ cm}^2))(23\text{ cm}) = \pi(11\text{ cm}^2)(23\text{ cm}) = (3,14)(253\text{ cm}^3) = 794,42\text{ cm}^3$$

***Ejercicio* 7.28.** Hay que rebajar un montículo con forma de semiesfera cuyo radio mide 25 m. Calcula el número de viajes que tiene que hacer un camión que lleva cada vez 5 metros cúbicos.

***Solución:***

$$V = \left(\frac{4\pi(25 \text{ m})^3}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{62500 \text{ m}^3\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{62500 \text{ m}^3\pi}{6}\right) \approx \left(10416,67 \text{ m}^3\pi\right) \approx 32708,34 \text{ m}^3$$

Número de viajes:

$$\frac{32708,34 \text{ m}^3}{5 \text{ m}^3} \approx 6541,67 \text{ es decir, } 6542 \text{ viajes.}$$

***Ejercicio*** **7.29.** El volumen del cuerpo de la figura 7.25 es de 135 centímetros cúbicos. Calcula el área total.

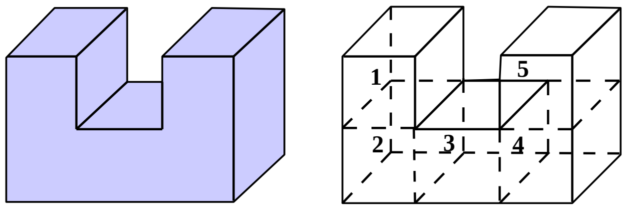



Figura 7.25: *Cuerpo propuesto*

***Solución:***

- Hay 5 cubos iguales de arista $a$; por tanto, el volumen de cada cubo es: $\dfrac{135 \text{ cm}^3}{5} = 27 \text{ cm}^3$.
- Como el volumen de un cubo es $V = a^3$; $27\text{cm}^3 = a^3$; $a = \sqrt[3]{27 \text{ cm}^3} = 3 \text{ cm}$
- Área de la figura: Hay 22 caras distribuidas así:

  - $\infty$ 3 que se ven en la base,
  - $\infty$ 5 que se ven de frente,
  - $\infty$ 5 que se ven atrás,
  - $\infty$ 3 al lado izquierdo,
  - $\infty$ 3 al lado derecho.

  En total tiene 22 caras cuya área es igual a:

$$A = 22(3 \text{ cm})^2 = 22(9 \text{ cm}^2) = 198 \text{ cm}^2$$

***Ejercicio*** **7.30.** En un recipiente con forma de prisma de base un cuadrado de 8 centímetros de lado y altura 12 centímetros se introduce una bola de hierro de 8 centímetros de diámetro. Calcula el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

***Solución:***

$$V_{PRISMA} = A_B \bullet h = ((8 \text{ cm})(8 \text{ cm})(12 \text{ cm})) = 768 \text{ cm}^3$$

$$V_{BOLA\ DE\ HIERRO} = \frac{4\pi r^3}{3} \approx \frac{(4)(3,14)(4 \text{ cm})^3}{3} \approx 267,94 \text{ cm}^3$$

Cantidad de agua necesaria para llenar el recipiente:

$$768\ \text{cm}^3 - 267,94\ \text{cm}^3 = 500,06\ \text{cm}^3 = 0,50006\ \text{dm}^3 = 0,50006\ \text{L}$$

Se necesitan aproximadamente $0,5$ L, o sea, medio litro de agua.

***Ejercicio*** **7.31.** Con el agua de un recipiente con capacidad de 5 litros, ¿cuántos vasos cilíndricos de 7 centímetros de diámetro y 8 centímetros de altura se pueden llenar?

***Solución:***

$$\begin{aligned} V_{VASO} &= \pi r^2 h \approx (3,14)(3,5\ \text{cm})^2(8\ \text{cm}) = 307,72\ \text{cm}^3 \\ 5\text{L} &= 5\ \text{dm}^3 = 5000\ \text{cm}^3 \\ \frac{5000\ \text{cm}^3}{307,72\ \text{cm}^3} &\approx 16,25 \end{aligned}$$

Luego, se pueden llenar aproximadamente 16 vasos.

***Ejercicio*** **7.32.** Una lata cilíndrica de conservas tiene 11 centímetros de altura y 10 centímetros de diámetro. El papel que la rodea se desprende, ¿qué figura es y cuáles son sus dimensiones?.

***Solución:***

El papel es un rectángulo de $2\pi r$ centímetros de largo y 11 centímetros de ancho.

Largo: $2\pi r = \pi d \approx (3,14)(10\ \text{cm}) = 31,4\ \text{cm}$, Ancho: $11\ \text{cm}$.

***Ejercicio*** **7.33.** ¿Cuántos hectolitros de líquido puede contener una tolva cónica de 8 metros de diámetro y 5 metros de generatriz?

***Solución:***

Radio: $r = \dfrac{8\ \text{m}}{2} = 4\ \text{m}$

Altura de la tolva: $h = \sqrt{(5\ \text{m})^2 - (4\ \text{m})^2} = \sqrt{25\ \text{m}^2 - 16\ \text{m}^2} = 3\ \text{m}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx \frac{1}{3}(3,14)(4\ \text{m})^2(3\ \text{m}) = 50,24\ \text{m}^3 = 50,24\ \text{KL} = 502,4\ \text{hL}$$

***Ejercicio*** **7.34.** Determina el volumen de un cilindro de 15 centímetros de altura. Si se duplica el valor del radio, ¿qué ocurrirá con el valor del volumen? ¿Por qué?.

***Solución:***

- $V_{CILINDRO} = \pi r^2 h$

- $V_{CILINDRO\ CON\ EL\ DOBLE\ DEL\ RADIO} = \pi(2r)^2 h = 4\pi r^2 h = 4V_{CILINDRO}$
- $V_{CILINDRO} = \pi r^2 (15 \text{ cm}) = (3,14) r^2 (15 \text{ cm}) = 47,1 r^2 \text{ cm}$

Si el radio aumenta el doble, el volumen aumenta el cuádruplo, porque el radio de la fórmula está elevado al cuadrado.

***Ejercicio*** **7.35.** La altura de un embudo de hojalata, excluyendo el tubo de salida, mide 26 centímetros, y el diámetro 30. Si el metro cuadrado de hojalata pesa 3,25 kilogramos, ¿cuánto pesará el embudo?.

***Solución:***

- Radio: $r = \dfrac{30 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}$
- Generatriz: $g = \sqrt{(15 \text{ cm})^2 + (26 \text{ cm})^2} = \sqrt{225 \text{ cm}^2 + 676 \text{ cm}^2} = \sqrt{901 \text{ cm}^2} \approx 30 \text{ cm}$
- $A_L = \pi r g \approx (3,14)(15 \text{ cm})(30 \text{ cm}) = 1413 \text{ cm}^2 = 14,13 \text{ dm}^2 = 0,1413 \text{ m}^2$
- El embudo pesa: $(0,1413)(3,25 \text{ Kg}) = 0,459 \text{ Kg} \approx \dfrac{1}{2}$ Kilogramo.

# CONCLUSIONES

Este trabajo de grado como propuesta pedagógica de ***GEOMETRÍA ESPACIAL***:

- Desarrolla los procesos asociados al pensamiento espacial como: visualizar, definir, conjeturar y justificar.
- Apoya el proceso de conceptualización para que el estudiante comprenda, asimile y aplique las definiciones para deducir información.
- Hace énfasis en el desarrollo de un pensamiento orientado hacia la solución de problemas.
- Presenta ambientes de aprendizaje dinámicos que apoyan el razonamiento deductivo.
- Contiene situaciones de aprendizaje que ayudan a que los y las estudiantes aprecien la importancia de la justificación deductiva como herramienta de explicación.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] SABI, Jimmy y CUADRADO, Maritza. *Problemas de Geometría Euclidiana*, Neiva, 2012.

[2] BOYER, Carl Benjamín. *Historia de las matemáticas*, Sao Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[3] BUENO, Francisco da Silveira. *Mini Diccionario de la lengua portuguesa*, Sao Paulo, 1996.

[4] EVES, Howard. *Introducción a la Historia de la Matemática*, Campinas, SP: Unicamp, 2004.

[5] SMOLE, Katia Cristina y Diniz Vieira, María Inés de Souza. *Matemáticas: High School*, 5 edición. Saraiva 2005, volumen 2.

[6] RUBIO, Panadés Ángel y FREITAS, Luciana María de Tenuta. *Matemáticas y su Tecnología*, IBEP, 2005, volumen 3.

[7] JULIANI, Sebástian Kebler, *Geometría Espacial "Un paseo del espacio para la vida"*, Londrina, 2008.

[8] RICH, Barnett, *Geometría*, editorial, Mc Graw Hill, volumen 2.

[9] *Empaque Secundario*, Agencia Nacional de Vigilancia Sanitaria. Disponible en: <http://e-legis.anvisa.gov.br/leisref/public/showact.php>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[10] CASTAÑEDA, Neyla Yamile; *Hipertexto Matemáticas 9*, Editorial Santillana, 2010. Texto para la enseñanza del área de formación de matemáticas para el grado noveno de educación básica secundaria, edición del docente. 304 pág.

[11] MIKAN, Abondano; *Mi Aventura Matemática 10*, Editorial educativa ltda, 2011. Enseñanza secundaria libros de texto I. 376 pág.

[12] ACOSTA, Mahecha Martha Lucía; *Aritmética y Geometría I*. Editorial Santillana, 2004. Texto para la enseñanza del área de matemáticas para el grado sexto de la educación básica secundaria, edición del docente. 296 pág.

[13] Prisma (geometría). *Matemática Fundamental*, Disponible en: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/prisma/prisma.htm>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[14] Prisma. WIKIPEDIA. Disponible en: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Prisma>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[15] Prisma. *Springer obras de referencia en línea*, Disponible en: <http://eom.springer.de/P/p074830.htm>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[16] Prisma (geometría). *El diccionario libre por Farlex*, Disponible en: <http://ww.thefreedictionary.com/prism)>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[17] SALGADO, Diana Constanza; *Nuevas Matemáticas 8 (Álgebra, Geometría, Estadística)*, Editorial Santillana, 2010. Texto para la enseñanza del área de formación de matemáticas para el grado octavo de educación básica secundaria, edición del docente. 336 pág.

[18] CUBIERTAS, Disponible en: <http://www.uepg.br/denge/aulas/Coberturas/Coberturas.doc>. Consultado el 05 de noviembre de 2009.

[19] Pirámide. WIKIPEDIA. Disponible en: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Piramide>. Consultado el 30 de Octubre de 2009.

[20] Pirámide (Geometría), *Matemática Fundamental*, Disponible en: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/piramide/piramide.htm>. Consultado el 30 Octubre de 2009.

[21] Pirámide. *Springer obras de referencia en línea*. Disponible en: <http://eom.springer.de/P/p075930.htm>. Consultado el 30 de Octubre de 2009.

[22] Pirámide (geometría). *El diccionario libre por Farlex*, Disponible en: <http://encyclopedia.farlex.com/Pyramid+(geometry)>. Consultado el 23 de octubre de 2009.

[23] Pirámide. *Diccionario Matemático*, Disponible en: <http://users.erols.com/bram/Pdictionary.html>. Consultado el 30 Octubre 2009.

[24] Techo III. Fácil lo hace. Disponible en: <http://www.fazfacil.com.br/reforma_construcao/telhado_3.html>. Consultado el 04 de Noviembre de 2009.

[25] Cilindro (Geometría). *Matemática Fundamental*, Disponible en: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cilindro/cilindro.htm>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[26] Cilindro. *Wikipedia*. Disponible en: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cilindro>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[27] Superficie del Cilindro. *Springer obras de referencia en línea*. Disponible en: <http://eom.springer.de/C/c027590.htm>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[28] Cilindro. *Diccionario Libre por Farlex*. Disponible en: <http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cylinder+(geometry)>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[29] Cilindro. *Diccionario Matemático*. Disponible en: <http://users.erols.com/bram/Cdictionary.html>. Consultado el 22 Octubre de 2009.

[30] Olla de presión. *INVENSIONES*. Disponible en: <http://www.fernandodannemann.recantodasletras.com.br/visualizar.php?idt=122956>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[31] Olla de presión. *SALA DE FÍSICA*. Disponible en: <http://br.geocities.com/saladefisica7/funciona/panela.htm>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[32] Cono (Geometría). *Matemática Fundamental*. Disponible en: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[33] Cono. WIKIPEDIA. Disponible en: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cone>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[34] Superficie Cónica. *Springer obras de referencia en línea*. Disponible en: <http://eom.springer.de/c/c024980.htm>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[35] Cono (Geometría). *Libre diccionario por Farlex*. Disponible en: <http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cone+(geometry)>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[36] Cono. *Diccionario Matemático*. Disponible en: <http://users.erols.com/bram/Cdictionary.html>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[37] Cono. *Miscelánea de las matemáticas y rompecabezas interactivos*. Disponible en: <http://www.cut-the-knot.org/do-you-know/few-words.shtmlcone>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[38] Conos para señalización vial. *Departamento de Carreteras*. Disponible en: <ftp://ftp.sp.gov.br/ftpder/normas/ET-DE-L00-012-A.pdf>. Consultado el 14 de Octubre de 2009.

[39] La Historia del fútbol. *Museo del Deporte*. Disponible en: http://www.museudosesportes.com.br/noticia.php?id=1362. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[40] Esfera (Geometría). *Matemática Fundamental*. Disponible en: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/esfera/esfera.htm>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[41] Esfera. WIKIPEDIA. Disponible en: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera-(geometria)>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[42] Historia del futbol. *Su búsqueda*. Disponible en: <http://www.suapesquisa.com/futebol/>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.

[43] Esfera. *Diccionario Matemático*. Disponible en: <http://users.erols.com/bram/Sdictionary.html>. Consultado el 22 de Octubre de 2009.