*Universidad Surcolombiana*

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Álgebras de Banach

Jhonatan David Mena Galvis

Neiva, Huila
2013

# *Universidad Surcolombiana*

## Facultad de Educación

## Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Álgebras de Banach

*Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciados en matemáticas*

Jhonatan David Mena Galvis
*2008171380*

Asesor:
Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2013

# Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Junio de 2013

# AGRADECIMIENTOS

***A Dios.***

*Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.*

***A mi familia.***

*Por haberme apoyado en todo momento, agradezco sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien,*

***A mis maestros.***

*Ricardo Cedeño Tovar, por su gran apoyo y motivación para la culminación de nuestros estudios profesionales y para la elaboración de esta tesis; Al profesor Osmin Ferrer Villar, por su apoyo ofrecido en el acompañamiento en este trabajo y al grupo de maestros del programa de Licenciatura en Matemáticas quienes ayudaron en mi formación profesional.*

# ÍNDICE GENERAL

# INTRODUCCIÓN

Un área importante dentro del Análisis Funcional es la que estudia las Álgebras, como ejemplo típico, se tiene a las Álgebras de Operadores Lineales en Espacios de Hilbert. El concepto de Álgebra $C^*$ es una abstracción de las propiedades fundamentales de los Operadores Lineales Acotados; sin embargo, no es tan abstracto, como se explicara más adelante.

Las Álgebras de Banach fueron estudiadas por primera vez por el matemático soviético I. M. Gelfand alrededor del año 1940. Su teoría reviste una gran importancia y tiene aplicación en la Teoría de Aproximación, el Análisis Armónico, la $K$-teoría, la Física Teórica, etc. El estudio de una clase importante de Álgebras de Banach, llamadas $C^*$-Álgebras, es un tema de investigación muy activo en el universo matemático de hoy.

En el estudio de las Álgebras de Banach, sobresale por su simplicidad y generalidad, características y propiedades que cumplen ciertas funciones como es el caso de los Espacios de Funciones Continuas $C(X)$, definidas en un Espacio Compacto $X$, que constituye un Álgebra $C^*$ conmutativa y con unidad. Es bien sabido que en dicho estudio se han generado grandes aportes al Análisis Funcional entre otros; el Teorema de Gelfand-Naimark; para Álgebras de Banach conmutativas junto con el estudio de la Teoría Espectral que permiten establecer en forma general algunas tendencias actuales del Análisis Funcional.

Para la comprensión de este trabajo será necesario introducir aspectos necesarios de la Teoría de Álgebras de Banach, los cuales ha sido organizados y detallados de la siguiente manera.

En el primer capítulo, introduciremos los conceptos fundamentales a la Teoría básica del Análisis Funcional a utilizarar durante el estudio de este trabajo, giramos entorno a las propiedades principales de los Espacios de Operadores lineales Acotados, definidos en Espacios Normados y Espacios de Banach, En el segundo capítulo presentaremos un caso particular de Operadores Lineales conocidos como Funcionales Lineales, veremos una caracterización de los Funcionales Lineales Acotados, definiremos los Espacios Producto Interno y Espacios de Hilbert, los cuales nos introducirán al tercer capítulo que es el estudio de las Álgebras de Banach y algunos teoremas como lo son el de GELFAND-

MAZUR, el cual nos permite identificar que un Álgebra es isoforma e isométrica al campo de los numeros complejos, el conjunto de Operadores Acotados que constituyen un Álgebra $C^*$ y el teorema de GELFAND-NAIMARK, que son resultados importantes dentro del Análisis Funcional.

# OBJETIVOS

**Objetivo General**

- Exponer los fundamentos teóricos e históricos sobre los cuales se sustentan los desarrollos conceptuales de las Álgebras de Banach.

**Objetivos Específicos**

- Enunciar y estudiar algunas definiciones y algunos resultados bÃ¡sicos del AnÃ¡lisis Funcional.

- Estudiar espacios de Banach, álgebras y álgebras de Banach.

- Estudiar el espectro y la fórmula del radio espectral de un operador.

- Estudiar el teorema de Gelfand Mazur.

- Realizar una extensión de un álgebra sin unidad, a una álgebra cualquiera.

# JUSTIFICACIÓN

Dentro del ámbito del conocimiento matemático es crucial cuando surge una teoria capaz de generalizar muchas otras alrededor de ella, sobre todo porque con ello se generaliza todo un lenguaje capaz de mostrar claramente la solución de muchos problemas y de agilizar la solución de ellos. También se abren muchas posibilidades de visionar la solución de problemas no resueltos y de generalizar muchos resultados.

Precisamente esto sucede con las Álgebras de Banach, que surgió como el marco abstracto adecuado para solucionar una serie de problemas del Análisis Funcional. importantes en esos momentos. Desde entonces ha experimentado un gran desarrollo y en este momento es una herramienta sofisticada útil para abordar una amplia variedad de problemas del Análisis Funcional, el Álgebra, la ecuaciones diferenciales e incluso otras disciplinas distintas a las matemáticas .

Desde el desarrollo del Cálculo Diferencial, al considerar las soluciones de una ecuación diferencial, se vio que en ocasiones era necesario considerar propiedades del espacio (o conjunto) de soluciones de la ecuación, pero no estaba claro cuál era la estructura que poseía dicho espacio de soluciones. Los trabajos de D. Bernouilli (1700-1782), Lagrange (1736-1813) y sobre todo Fourier (1772-1837) acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales se empiezan a enfrentar a cuestiones que anticipan lo que será el desarrollo posterior del Análisis Funcional. Una de las características comunes a varios de estos procesos era el paso de un problema finito, por ejemplo, la solución de un sistema finito de ecuaciones lineales, a la versión infinita del problema, lo que les fuerza a enfrentarse a situaciones de convergencia que en esa época no eran entendidos. Afortunadamente en una serie de esfuerzos de grandes matemáticos del momento se da la creación de la Teoría de Operadores como una herramienta sofisticada de resolver dichos problemas.

Esperamos que esta revisión, motive a quien generosamente lea este trabajo a profundizar en el tema, puesto que la gran variedad de problemas interesantes ligados a esta teoría es de gran interés y belleza.

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES : ESPACIOS DE BANACH

En este capitulo estudiaremos las propiedades principales de los Espacios de Operadores Lineales Acotados, definidos en Espacios Normados y Espacios de Banach; conceptos preliminares para el estudio de las Álgebras de Banach.

## 1.1. Preliminares

**Definición 1.** Un ***Espacio Vectorial*** (o Espacio Lineal) consta de lo siguiente:

($E_{1.}$) Un cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares

($E_2$.) Un conjunto $\mathbf{V} \neq \phi$, de objetos llamados vectores;

($E_3$.) Una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores $u, v$ de $\mathbf{V}$ un vector $u + v$ de $\mathbf{V}$, que se llama suma de $u$ y $v$; de tal modo que:

(a). *la adición es conmutativa,* $u + v = v + u$

(b). *la adición es asociativa,* $u + (v + w) = (u + v) + w$

(c). *Existe el vector nulo,* $0$ *en* $\mathbf{V}$*, tal que* $u + 0 = u$ *para todo* $u$ *de* $\mathbf{V}$

(d). *para cada vector* $u$ *de* $\mathbf{V}$ *existe un unico vector* $-u$*, de* $V$*; tal que* $u + (-u) = 0$ *para todo* $u$ *de* $\mathbf{V}$.

($E_4$) Una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar $c, c_1, c_2$ de $\mathbb{K}$ y cada vector $w$ de $\mathbf{V}$; un vector $cw$ en $\mathbf{V}$, llamado producto de $c$ y $w$, de tal modo que:

(e). $1w = w$, para todo $w$ de $\mathbf{V}$;

(f). $(c_1c_2)w = c_1(c_2w)$;

(g). $c(v + w) = cv + cw$;

(h). $(c_1 + c_2)w = c_1w + c_2w$

**Definición 2.** Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Un **subespacio** de **V**, es un subconjunto **W** de **V**, que con las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre **V**, es el mismo un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

**Teorema 1.** Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea **W** un subconjunto no vacío de **V**, **W** es un subespacio vectorial de **V** si y solamente si:

*a.*) Si $x, y \in \mathbf{W}$, entonces $(x+y) \in \mathbf{W}$

*b.*) Si $u \in \mathbf{W}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $(\alpha u) \in \mathbf{W}$

*Demostración.* $(E_{1.})$ se cumple, pues que $\mathbb{K}$ es el conjunto de escalares del espacio vectorial en este caso.

$(E_{2.})$ se verifica por hipótesis , que $W \neq \phi$

$(E_{3.})$ Si $x, y \in W$, entonces $(x+y) \in W$ por la hipotesis. *a.*).

*a.*) Sean $x, y \in W$, entonces $x, y \in W \subseteq V$, luego $x, y \in V$, por lo tanto se cumple $x+y = y+x$, pues $V$ es un espacio vectorial.

*b.*) Sean $x, y, z \in W$, entonces $x, y, z \in W \subseteq V$, luego $x, y, z \in V$, por lo tanto se cumple que $x+(y+z) = (x+y)+z$, pues $V$ es un espacio vectorial.

*c.*) sean $x \in W$ y $-1 \in \mathbb{K}$, entonces $x \in W$ y $(-1)x \in W$ esto ultimo por *b.*) de la hipotesis. Luego $(x+(-1)x) \in W$ por *a.*), por lo tanto $(x+(-x)) = 0$.

*d.*) Si $x \in W$, entonces $x \in W$ y $(-1) \in \mathbb{K}$, luego $(-1)x \in W$ por $a_2$ de la hipotesis, por tanto $-x \in W$

$(E_{4.})$ Si $c \in \mathbb{K}$ y $v \in W$, entonces $c \cdot v \in W$ por hipótesis *b.*)

*e.*) Sea $w \in W$ entonces igualmente $w \in W \subset V$, luego $w \in V$ en efecto $1 \cdot w = w$, pues $V$ es un Espacio vectorial

*f.*) Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $w \in W \subset V$, es decir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $w \in V$, por lo tanto $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)w = \alpha_1(\alpha_2 w)$, pues $V$ es un Espacio vectorial

*g.*) Si $u, w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $u, w \in W \subset V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, en efecto $u, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ por lo tanto $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha w$, pues $V$ es un Espacio vectorial

*h.*) Si $w \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, entonces como $w \in W \subset V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, en efecto $w \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, luego $(\alpha_1 + \alpha_2)w = \alpha_1 w + \alpha_2 w$, pues $V$ es un Espacio vectorial

## 1.2. Operador Lineal

**Definición 3.** Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un operador, $\mathbf{T}: \mathbf{D} \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ; se dice **lineal** si:

$(i)$ El dominio $\mathbf{D}(T)$ del operador T, es un espacio vectorial y el rango $R(\mathbf{T})$ del operador T, cae sobre un espacio vectorial sobre el mismo campo de $\mathbf{D}$.

$(ii)$ $T(x+y) = T(x)+T(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{D}$
$T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

El *espacio de operadores lineales* de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$, se nota como

$$\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \{T / T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}, \textit{es un operador lineal}\}$$

Si $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, entonces notaremos $\mathscr{L}(X, X)$ como $\mathscr{L}(X)$.

**Proposición 1.** Si $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal, sea $0_X \in X$ entonces $T(0_X) = T(0_X + 0_X) = T(0_X) + T(0_X)$. Luego $0_Y = T(0_X) - T(0_X) = T(0_X) + \underbrace{T(0_X) - T(0_X)} = T(0_X) + 0_Y = T(0_X)$. Por lo tanto $T(0_X) = 0_Y$

**Definición. 4.** Sean $X, Y$ espacios vectoriales $T : D(T) \subset \mathbf{X} \rightarrow R(T) \subset \mathbf{Y}$ se dice **inyectivo** (uno a uno) si $T(x) = T(y)$ implica $x = y$

**Definición 5.** Si $T$ es uno a uno, entonces se puede definir un operador $T^{-1} : R(T) \subset \mathbf{Y} \rightarrow D(T) \subset \mathbf{X}$ llamado **Operador inverso** de $T$, de la siguiente manera,

$$T^{-1}(y) = x \text{ donde } T(x) = y$$

nótemos que

$$T^{-1}(T(x)) = x, \quad \forall x \in D(T) \qquad T(T^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in R(T)$$

**Teorema 2.** Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espacios vectoriales ambos sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $D(T) \subset \mathbf{X}$ y $R(T) \subset \mathbf{Y}$ con $T : D(T) \rightarrow R(T)$ un operador lineal, se cumple que:

i.) $T^{-1}$ existe si y sólo si $Tx = 0$ entonces $x = 0$.

*Demostración.*
$\Rightarrow$ Supongamos que existe $T^{-1}$ inverso del operador.
supongamos que $T(x) = 0$, por la propoposición. 1, así $T(x) = 0$ y $T(0) = 0$, entonces $T(x) = T(0)$ y $T$ es inyectivo; entonces $x = 0$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $T(x) = 0$ implica que $x = 0$, veamos que $T$ es biyectivo. Sean $x_1, x_2 \in D(T)$ tal que $T(x_1) = T(x_2)$, entonces $T(x_1) - T(x_2) = 0$, luego $T(x_1 - x_2) = 0$, donde $x_1 - x_2 = 0$. Por lo tanto $x_1 = x_2$. $T$ es entonces inyectivo.

ii.) Si $T$ es un operador lineal entonces, $T^{-1}$ es un operador lineal.

*Demostración.*
Sean $y_1, y_2 \in R(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces existen $x_1, x_2 \in D(T)$, tales que $T(x_1) = y_1$ y $T(x_2) = y_2$. entonces

$$x_1 = T^{-1}(y_1) \quad x_2 = T^{-1}(y_2)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2) &= T^{-1}(y_1 + y_2) \\ &= T^{-1}(T(x_1) + T(x_2)) \\ &= T^{-1}(T(x_1 + x_2)) \\ &= x_1 + x_1 \\ &= T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Ahora

$$T^{-1}(\alpha y_1) = T^{-1}(\alpha T(x_1)) = T^{-1}(T(\alpha x_1)) = \alpha x_1 = \alpha T^{-1}(y_1)$$

**Definición 6.** Sean **X,Y** espacios vectoriales, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, un operador lineal, se define:

(a) *Ker(T)*$:= \{x \in \mathbf{X} : T(x) = 0\} \subset X$

(b) *Im(T)*$:= \{y \in \mathbf{Y} : y = T(x)$ para algún $x \in \mathbf{X}\} \subset Y$

**Proposición 2.** Si $T : X \to Y$ es un operador lineal, entonces $0 \in \ker(T)$ y $0 \in Im(T)$

*Demostración* Si $0 \in X$ y $T(0) = 0$, entonces, $0 \in \ker(T)$ y ademas como $y = T(0)$, entonces, $0 \in Im(T)$

**Observaciónes**

a.) $Ker(T)$ es un subespacio de **X**

*Demostración.*
Como por la proposición 2, se tiene que $\ker(T) \neq \phi$, pues $0 \in \ker(T)$

Sea $x, y \in Ker(T)$, $\alpha$ escalar y $T(x) = 0$, entonces

Entonces

$$(i.) \quad \begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= T(x_1) + T(x_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

entonces $(u + v) \in \ker(T)$

$$(ii.) \quad \begin{aligned} T(\alpha x_1) &= \alpha T(x_1) \\ &= \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\alpha x_1) \in \ker(T)$

Así $\ker(T)$ es un subespacio de $X$

*b*.) $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbf{Y}$

*Demostración.*

Por la proposición 2, se tiene que $Im(T) \neq \phi$

*Im(T)*$:= \{y \in \mathbf{Y} : y = T(x)$ para algún $x \in \mathbf{X}\} \subset \mathbf{Y}$

Sean $\alpha$ escalar y $u, v \in Im(T) \subset \mathbf{Y} \rightarrow \exists x_1 \in \mathbf{X} \backslash T(x_1) = u \;\wedge\; \exists x_2 \in \mathbf{X}/T(x_2) = v$.

Entonces

$$(i.) \quad u + v = T(x_1) + T(x_2) \qquad (ii.) \quad \alpha u = \alpha T(x_1)$$
$$= T(x_1 + x_2) \;\wedge\; (x_1 + x_2) \in \mathbf{X} \qquad = T(\alpha x_1) \;\wedge\; \alpha x_1 \in \mathbf{X}$$

Por lo tanto $(u + v) \in Im(T)$ Por lo tanto $(\alpha u) \in Im(T)$

Así $Im(T)$ es subespacio vectorial de $\mathbf{Y}$

**Proposición. 3** Si $T : X \rightarrow Y$, es un operador lineal.

- ⋆ El inverso $T^{-1}$ de $T$; existe si y solo si *KerT={0}*
- ⋆ Sean $G : Y \rightarrow W$ y $T : X \rightarrow Y$ operadores lineales, entonces podemos hablar de $G \circ T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{W}$ el cual notaremos como $G(T)$ ó simplemente $GT$.

## 1.3. Espacio Normado

**Definición 7.** Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, Una **Seminorma** es una función - $p : \mathbf{X} \rightarrow [0, \infty)$ con las siguientes propiedades.

(i). $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$

(ii). $p(\alpha x) = |\alpha| p(x); \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbf{X}$

**Definición 8.** Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial sobre ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$), una ***norma*** en $\mathbf{X}$, es una funcion $\| \, . \, \| : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual cumple;

$N_1$.) $\| x \| \geq 0; \forall x \in \mathbf{X}$ No negatividad

$N_2$.) $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

$N_3$.) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|;$ Para cualquier $x \in \mathbf{X}$ y $\alpha \in \mathbf{K}$

$N_4$.) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ Para cualquier $x, y \in \mathbf{X}$, (Desigualdad triangular)

$(\mathbf{X}, \| \cdot \|)$, recibe el nombre de ***Espacio normado***

**Observación.** Sea $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ espacio normado, $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$; entonces se cumple:

$$|\parallel x_1 \parallel - \parallel x_2 \parallel| \leq \parallel x_1 - x_2 \parallel$$

*Demostración.*

$$\parallel x_1 \parallel = \parallel x_1 - 0 \parallel = \parallel x_1 + (x_2 - x_2) \parallel = \parallel (x_1 - x_2) + x_2 \parallel \leq \parallel x_1 - x_2 \parallel + \parallel x_2 \parallel$$

$$\parallel x_1 \parallel - \parallel x_2 \parallel \leq \parallel x_1 - x_2 \parallel \quad (\mathbf{1})$$

Intercambiando el papel de $x_1$ y $x_2$ obtenemos que, $\parallel x_2 \parallel - \parallel x_1 \parallel \leq \parallel x_2 - x_1 \parallel = \parallel x_1 - x_2 \parallel$

$$- \parallel x_1 - x_2 \parallel \leq \parallel x_1 \parallel - \parallel x_2 \parallel \quad (\mathbf{2})$$

luego de $(\mathbf{1})$ $y$ $(\mathbf{2})$ obtenemos;

$$- \parallel x_1 - x_2 \parallel \leq \parallel x_1 \parallel - \parallel x_2 \parallel \leq \parallel x_1 - x_2 \parallel$$

Por lo tanto en un espacio normado se cumple,

$$|\parallel x_1 \parallel - \parallel x_2 \parallel| \leq \parallel x_1 - x_2 \parallel$$

**Definición 9.** Si $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbf{Y}, \|\cdot\|_2)$ son espacios normados, un operador lineal, $T : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ es **continuo** en un punto $x_0$ de $\mathbf{X}$, si para $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\parallel T(x) - T(x_0) \parallel_2 < \varepsilon \quad siempre\ \ que \quad \parallel x - x_0 \parallel_1 < \delta$$

Si $T$ es continuo en todo $\mathbf{X}$, entonces se dice que $T$ **es continuo**.

**Definición 10.** Sean $\mathbf{X}$ un espacio normado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{X}$, se dice que

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $x_0$ en $\mathbf{X}$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\parallel x_n - x_0 \parallel < \epsilon \quad \forall n \geq K$$

Lo anterior se nota $\{x_n\}_{n\to\infty} \longrightarrow x_0$ ó tambien

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = x_0$$

**Definición 11.** Sea $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** en $\mathbf{X}$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq K$, entonces $\parallel x_n - x_m \parallel < \varepsilon$

**Definición 12.** Sea $\mathbf{X}$ un conjunto distinto de vacio, se dice que $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, es una metrica (o una distancia en $\mathbf{X}$) si, para cualquier $x, y \in \mathbf{X}$

$M_1$.) $d(x, y) \geq 0$;

$M_2$.) $d(x, y) = 0$; sii $x = y$

$M_3$.) $d(x, y) = d(y, x)$; *Simetria*

$M_4$.) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *Desigualdad triangular*

Al par $(\mathbf{X}, d)$ se le llama ***Espacio metrico***

**Proposición 4.** Todo espacio normado induce una métrica

*Demostración.* Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
Definamos

$$\begin{aligned} d: \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \longrightarrow d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Luego si $x_1, x_2, x_3$ en $X$, entonces

$M_1)$ $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \geq 0$

$M_2)$ $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\| = 0 \leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$M_3)$

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= \|x_1 - x_2\| = \|(-1)(x_2 - x_1)\| = |-1|\,\|x_2 - x_1\| \\ &= \|x_2 - x_1\| = d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

$M_4)$

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2 + 0\| \\ &= \|x_1 - x_2 + x_3 - x_3\| = \|(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)\| \\ &\leq \|x_1 - x_3\| + \|x_3 - x_2\| \\ &\leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) \end{aligned}$$

Así que toda norma induce una métrica. ■

**Definición 13.** Sea $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico se dice, $(\mathbf{X}, d)$ es ***Completo***, si toda sucesión de Cauchy en $\mathbf{X}$ converge a un elemento de $\mathbf{X}$. ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ Són espacios metricos completos)

## 1.4. Espacio de Banach

**Definición 14.** Un **Espacio de Banach** es un espacio vectorial $\mathbf{V}$, sobre el cuerpo de los ($\mathbb{R}$, ó $\mathbb{C}$), con una norma $\|\cdot\|$, tal que toda sucesión de Cauchy (*con respecto a la metrica* $d(x, y) = \| x - y \|$) en $\mathbf{V}$, tiene limite en $\mathbf{V}$ ( El espacio vectorial $\mathbf{V}$ es completo, con respecto a la métrica inducida por la norma)

## 1.5. Operadores Acotados:

**Definición 15.** Sean $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbf{Y}, \|\cdot\|_2)$ espacios normados, $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, se dice que es **acotado**; si existe una constante positiva $c \in \mathbb{R}^+$ tal que.

$$\| T(x) \|_2 \leq c \| x \|_1 \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

**Observación:** Se notará $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \{T / T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y};\ T : \textit{un operador lineal acotado}\}$

## 1.6. Norma de un Operador

**Observación.** Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados, si $T \in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
Entonces $\exists c \in \mathbb{R}^+ / \| T(x) \| \leq c \| x \|$; $\forall x \in \mathbf{X}$, por lo tanto.

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq c \qquad \forall x \in D(T) \backslash \{0\}$$

Sea $\mathbf{A} := \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} / x \in D(T) \backslash \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente por $\mathbf{c}$, $\mathbf{A} \neq \phi$; por lo tanto existe el $\sup \mathbf{A}$,

el cual se nota $\| T \| := \sup A \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} / x \in D(T) \backslash \{x \neq 0\} \right\}$, llamada *norma del operador T*

Nótese que $\| T(x) \| \leq \| T \| \| x \| \quad \forall x \in D(T)$

**Proposición 5.** La función $\| . \| : B(X) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\| T \|_{B(X)} = \sup_{0 \neq x} \frac{\| T_x \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| = 1} \| T_x \|$$

Define una norma en $B(\mathbf{X})$

*Demostración.*

(i.) Como $\forall x \in \mathbf{X}$, $\| x \| \geq 0$ y $\| Tx \| \geq 0$, entonces $A = \left\{ \frac{\| Tx \|}{\| x \|}, x \neq 0 \right\}, \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Luego

$$\| T \| := \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \right\} = \sup A \geq 0$$

Así

$$\| T \| \geq 0$$

(ii.) Si $x = 0 \to T(x) = 0$, entonces $\| T \| = 0$

(iii) y (iv) si $T_1, T_2$ pertenecen a $B(\mathbf{X})$, entonces para cualquier escalar $\lambda$ y cualquier $x \in \mathbf{X}$ de norma uno.

$$\begin{aligned} \| (\alpha T_1 + T_2)x \| &= \| \alpha T_1 x + T_2 x \| \leq |\alpha| \| T_1 x \| + \| T_2 x \| \\ &\leq |\alpha| \sup_{\| x \| = 1} \| T_1 x \| + \sup_{\| x \| = 1} \| T_2 x \| \\ &= |\alpha| \| T_1 \| + \| T_2 \| \end{aligned}$$

Por lo que

$$\| \alpha(T_1 + T_2) \| \leq |\alpha| \| T_1 \| + \| T_2 \|$$

Si $T_2$ es igual a cero las desigualdades se convierten en igualdades.

Se puede hablar, de ahora en adelante de la norma de un operador lineal acotado, y al mismo tiempo preguntarse cuándo el espacio vectorial normado $B(\mathbf{X})$ es un espacio de Banach, en ese sentido, se tiene el siguiente teorema

**Proposición 6.** Sean $(\mathbf{X} \| \cdot \|)$ espacio normado, $T$ y $U$ operadores lineales en $\mathbf{X}$, entonces;

(a.) $T$ es continuo en un punto, entonces $T$ es acotado en $X$

(b.) $T$ es acotado, si y sólo si, $T$ es continuo

(c.) $T$ es acotado, entonces el $Ker(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{X}$.

(d.) $T, U$ son acotados, entonces $UT$ es acotado.

*Demostración*

(a.) Supongamos que $T$ es continuo en $x_0$

Sea $x \in X$, $x \neq 0$, y $\epsilon = 1 > 0$, tomemos $x_1 := \left(x_0 + \frac{1}{2\|x\|}x\right)$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\exists \delta > 0 \ / si \ \| x_1 - x_0 \| < \delta \rightarrow \| Tx_1 - Tx_0 \| < \epsilon = 1 \\
&\rightarrow \quad \| T(x_1 - x_0) \| < 1 \\
&\rightarrow \quad \| T\left(x_0 + \frac{1}{2\| x \|}x - x_0\right) \| < 1 \\
&\rightarrow \quad \| T\left(\frac{1}{2\| x \|}x\right) \| < 1 \\
&\rightarrow \quad \| \frac{1}{2\| x \|}T(x) \| < 1 \\
&\rightarrow \quad |\frac{1}{2\| x \|}| \| T(x) \| < 1 \\
&\rightarrow \quad \| T(x) \| < 1 \cdot 2 \| x \| \\
&\rightarrow \quad \| T(x) \| < 2 \| x \|
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
Si \quad x = 0 \rightarrow \| T(x) \| = \| T(0) \| &= \| 0 \| \\
&= 0 \\
&= 2 \cdot 0 \\
&= 2 \| 0 \|
\end{aligned}$$

Asi que $\forall x \in \mathbf{X}, \quad \exists c = 2 \in \mathbb{R}^+ / \| T(x) \| < 2 \| x \|,$ Por lo tanto T es *acotado* (b.) Reciprocamente si $T$ es acotado $\rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ / \parallel T(x) \parallel \leq c \parallel x \parallel$; Consideremos $x_0 \in \mathbf{X}$ y $\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|} > 0$; $\parallel T \parallel \neq \parallel 0 \parallel = 0$,

Si $x \in \mathbf{X}$, cumple que $\parallel x - x_0 \parallel \leq \delta$; entonces $\parallel T(x) - T(x_0) \parallel = \parallel T(x - x_0) \parallel$

$$
\begin{aligned}
&\leq \parallel T \parallel \parallel x - x_0 \parallel \leq \parallel T \parallel \delta \\
&\leq \parallel T \parallel \frac{\epsilon}{\parallel T \parallel} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

lo cual muestra que $T$ es continuo en $\mathbf{x}_0$

(c.) Supongase que $T$ es acotado, entonces por el inciso anterior $T$ es continuo. Puesto que $\{0\}$ es cerrado. $Ker\, T = T^{-1}\{0\}$ es cerrado.

(d.) Como $U$ y $T$ son acotados, existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ y de tal forma que $\parallel U(x) \parallel \leq c_1 \parallel x \parallel$ y $\parallel T(x) \parallel \leq c_2 \parallel x \parallel$ para todo $x$ en $\mathbf{X}$, por lo tanto

$$
\parallel (UT)(x) \parallel = \parallel U(T(x)) \parallel \leq c_1 \parallel T(x) \parallel \leq c_1 c_2 \parallel x \parallel . \qquad \forall x \in X
$$

**Teorema 3.** Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach, entonces $B(\mathbf{X})$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B(\mathbf{X})$ y $T \in \mathscr{L}(X)$, supongase que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de Cauchy en donde $T_n \rightarrow T$

Para $\epsilon > 0$; Existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq K$ entonces

$$
\parallel T_n - T_m \parallel < \epsilon
$$

Ademas como $T$ es un operador lineal acotado y por tanto continuo entonces $x_n \rightarrow x$ implica $T_n x \rightarrow Tx$. Asi para $x \in X$ y $n, m \geq K$ tenemos

$$
\parallel T_n x - T_m x \parallel = \parallel (T_n - T_m)x \parallel \leq \parallel T_n - T_m \parallel \parallel x \parallel < \epsilon \parallel x \parallel
$$

Luego $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de Cauchy para todo $x$ en el espacio, ademas como la sucesión del operador es convergente en $X$, $T : X \rightarrow X$ esta dado por $Tx = \lim_{n\rightarrow\infty} T_n x$

Ahora por probar que $T$ es acotado y ver que la sucesion $T_n$ converge a $T$ en $B(X)$; $T_n \rightarrow T$, $\forall \epsilon$,0; $\forall x \in X$ $\exists K \in \mathbb{N}$, si $n \geq K \rightarrow \parallel T_n - T \parallel < \epsilon$

Asi para $x \in X$ y $\{T_n\} \subset B(X)$

$$
\parallel T_n x - Tx \parallel = \parallel (T_n - T)x \parallel \leq \parallel T_n - T \parallel \parallel x \parallel < \epsilon \parallel x \parallel
$$

Es decir $\parallel (T_n - T)x \parallel \leq \varepsilon \parallel x \parallel$ y esto es para todo $x$, por lo que

$$
\parallel T_n - T \parallel \leq \varepsilon, \qquad n \geq N
$$

Con esto se ve que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T$, en particular $T_N - T$ es un operador lineal cotado. como $T = T_N - (T_N - T)$ y el espacio $B(\mathbf{X})$ es un espacio vectorial, se sigue que $T$ es acotadoo.

$$\| T_1 T_2 \| \leq \| T_1 \| \| T_2 \| \qquad \forall T_1 T_2 \in B(X)$$

# CAPÍTULO 2

# ESPACIOS DE HILBERT

Antes de continuar con el estudio del espacio de operadores lineales acotados, se verá un caso particular de operadores lineales, conocidos como **funcionales lineales**, los cuales no son más que operadores lineales cuya imagen esta en el campo complejo.

## 2.1. Funcionales lineales

**Definición 1.** Un **funcional lineal** $f$; es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial $\mathbf{X}$, y rango en el campo escalar $\mathbb{C}$ esto es

$$f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$$

**Definición 2.** Un **funcional lineal es acotado**, si existe un $c \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbf{X}$.

$$|f(x)| \leq c \parallel x \parallel$$

**Observación:** Un funcional lineal $f$ definido en un espacio normado, es continuo si y solo si; es acotado.

Conocido también con el nombre de **espacio dual** de $\mathbf{X}$ y denotado mediante $\mathbf{X}^*$.

**Teorema 1.** El espacio de funcionales lineales acotados definidos en un espacio normado, representa un espacio de Banach.

**Definición 3.** Se define **norma del funcional** $f$ como;

$$\parallel f \parallel = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\parallel x \parallel} = \sup_{\parallel x \parallel = 1} |f(x)|$$

## 2.2. Preliminares.

**Definición 4.** Sea **X** un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$. Se dice que la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to \mathbb{C}$ es un **producto interno** en **X**, si para cualesquiera vectores $x, y, z \in \mathbf{X}$ y escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene:

$P1.)$ $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$P2.)$ $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$P3.)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$P4.)$ $\langle x, x\rangle \geq 0$

$P5.)$ $\langle x, x\rangle = 0$ si y solo si $x = 0$

Al par $(\mathbf{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se le llama *espacio producto interno en* ***X***

**Proposición 1.** Un espacio producto interno $(X, \langle .,.\rangle)$ define una norma $\|.\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ dada por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

*Demostración.* Para todo $u$ y $v$ en $X$ se cumple

$$N_1)\ \|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$N_2)\ \| u \| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

$$\begin{aligned} N_3)\ \|\alpha u\| &= \langle \alpha u, \alpha u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha\langle u, \alpha u\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\langle\overline{\alpha u, u}\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\overline{\alpha}\langle\overline{u, u}\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\overline{\alpha}\langle u, u\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\overline{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\,\|u\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4)\ \|u+v\| &= \langle u+v, u+v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

De $N_1)$, $N_2)$, $N_3)$ y $N_4)$ se puede concluir que todo producto interno induce una norma. ■

## 2.3. Espacios de Hilbert: propiedades.

**Definición 5.** Un espacio producto interno $(\mathscr{H}, \langle , \rangle)$ (espacio pre-Hilbert) se dice que es un **Espacio de Hilbert**, si es completo respecto a la métrica inducida por el producto interno. De ahora en adelante $\mathscr{H}$ denotará un espacio de Hilbert.

**Proposición 2.** *Ley del paralelogramo,* Sea $(\mathscr{H}, \langle , \rangle)$ un espacio de Hilbert, entonces

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \quad \forall x, y \in \mathscr{H}$$

*Demostración.* Sean $x, y \in \mathscr{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\
&= 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)
\end{aligned}$$

**Observación.** Si una norma no satisface la ley de paralelogramo, entonces no puede obtenerse de un producto interno.

**Proposición 3.** En un *Espacio de Hilbert* $(\mathscr{H}, \langle , \rangle)$ se verifcan

$i.)$ la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \| y \| \quad \forall x, y \in \mathscr{H}$$

$ii.)$ La desigualdad del triángulo,

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall x, y \in \mathscr{H}$$

*Demostración.*

$(i.)$ Sea $y \neq 0$. Para cada escalar $\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 \leq \| x-\alpha y \|^2 &= \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \langle x, \alpha y\rangle - \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \langle \overline{\alpha y, x}\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + \alpha\langle \overline{\alpha y, y}\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle \overline{y,x}\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle \overline{y,y}\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\left[\langle y,x\rangle - \overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right]
\end{aligned}$$

Observemos que para $\overline{\alpha}=\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$ obtenemos la expresion

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle - \alpha\left[\langle y,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,y\rangle\right]\\
&\leq \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,y\rangle} - \alpha\left[\langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle\right] = \langle y,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,y\rangle} = \| x \|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|}{\| y \|^2}
\end{aligned}
$$

$$0 \leq \| x \|^2 - \frac{|\langle y,x\rangle|}{\| y \|^2}$$

de donde obtenemos $|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$

$(ii.)$ Por la desigualdad de Schwarz,

$$
\begin{aligned}
\| x+y \|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\
&\leq \| x \|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2\\
&\leq \| x \|^2 + 2\| x \| \| y \| + \| y \|^2\\
&\leq (\| x \| + \| y \|)^2
\end{aligned}
$$

**Proposición 4.** El producto interno $\langle x,y\rangle$ es una función continua con respecto a las dos variables: $\langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ cuando $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

*Demostración.* Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente,entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Luego $\exists M \in \mathbb{R}^+/$ $\| x_n \| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle + 0 - \langle x,y\rangle|\\
&= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|\\
&\leq |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle| + |\langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|\\
&= |\langle x_n,y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x,y\rangle|\\
&\leq \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \|\\
&\leq M \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \|
\end{aligned}
$$

Esto último tiende a cero, pues $(y_n - y) \to 0$ y $(x_n - x) \to 0$ para $n$ sufcientemente grande.

**Definición 6.** Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales , $T : X \to Y$ un operador lineal , se dice que es un isomorfismo si $\langle T_x, T_y\rangle = \langle x,y\rangle$, (preserva el producto interno) y ademas es un operador lineal biyectivo.

Veamos algunos ejemplos de espacios de Hilbert.

**Ejemplo 1.** La norma

$$\| x \| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

se obtiene

$$\langle x,y\rangle = \left(\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Ejemplo 2.** El espacio $\ell^2$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por.

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_i\overline{y_j}$$

La norma se define por

$$\| x \| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_i|\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nuestro objetivo a continuación es mostrar la representación de un *Espacio de Hilbert* como suma directa de un subespacio cerrado y su complemento ortogonal. Para lo cual definiremos los siguientes conceptos.

**Definicion 7.** Un elemento $x$ de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, se dice que es **Ortogonal** a un elemento de $\mathscr{H}$ si

$$\langle x,y\rangle = 0$$

También decimos que $x$ y $y$ son ortogonales y se nota como $x \perp y$. De la misma forma se dice que dos conjuntos $A$ y $B$ son ortogonales si $a \perp b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

**Definición 8.** Si **Y** es un espacio vectorial, definimos su **Complemento ortogonal** $Y^{\perp}$, como el conjunto de todos los vectores ortogonales a $Y$ , es decir,

$$\mathbf{Y}^{\perp} = \{z \in \mathscr{H} \mid z \perp \mathbf{Y}\}$$

**Definición 9.** El **Segmento** que une dos elementos $x$ y $y$ de un espacio vectorial **X**, es el conjunto de todos los $z \in \mathbf{X}$ de la forma.

$$z = \alpha x + 1(1-\alpha)y \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1)$$

**Definición 10.** Un subconjunto $Y$ de $X$, se dice que es **Convexo** si para cada $x,y \in Y$; el segmento que une a $x$ y $y$ está contenido en $Y$

**Proposición 5.** Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $Y \subset \mathscr{H}$, $Y \neq \phi$, un subconjunto convexo completo. Entonces para cada $x \in \mathscr{H}$, existe un único $y \in Y$ tal que

$$\delta = \inf_{\hat{y} \in Y} \| x - \hat{y} \| = \| x - y \|$$

Es decir, minimiza la distancia del conjunto convexo al punto.

*Demostración.* Por definición de ínfimo existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Y$ tal que

$$\delta_n \to \delta \quad donde \ \ \delta_n = \| x - y_n \|$$

Por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned}
\| y_n - y_m \|^2 &= \| (y_n - x) + (x - y_m) \|^2 \\
&= \| (y_n - x) + (x - y_m) \|^2 + \| (y_n - x) - (x - y_m) \|^2 - \| (y_n - x) - (x - y_m) \|^2 \\
&= 2(\| y_n - x \|^2 + \| x - y_m \|^2) - \| (y_n - x) + (x - y_m) \|^2 \\
&< 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) - \| (y_n + y_m) - 2x \|^2 \\
&= 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) - 2^2 \| \frac{(y_n + y_m)}{2} - x \|^2 \\
&\leq 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) - 2^2\delta^2
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad porque $Y$ es convexo: $\frac{y_n + y_m}{2} \in Y$ y en consecuencia $\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \| \geq \delta$, como $\delta_n \to \delta$ tenemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de Cauchy a algún y $\in Y$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\| x - y \| &= \| x - \lim_{n\to\infty} y_n \| \\
&= \lim_{n\to\infty} \| x - y_n \| \\
&= \lim_{n\to\infty} \delta_n \\
&= \delta
\end{aligned}$$

Resta probar que $y$ es único, para ello supongamos que existe $y_0 \in Y$ tal que

$$\| x - y \| = \delta \quad y \quad \| y - y_0 \| = \delta$$

Por la ley del paralelogramo

$$\begin{aligned}
\| x - y_0 \|^2 &= \| (x - y) + (y - y_0) \|^2 \\
&= \| (x - y) + (y - y_0) \|^2 + \| (x - y) - (y - y_0) \|^2 - \| (x - y) - (y - y_0) \|^2 \\
&= 2(\| x - y \|^2 + \| y - y_0 \|^2) - \| (x - y) - (y - y_0) \|^2 \\
&\leq 2(\delta^2 + \delta^2) - \| x + y_0 - 2y \|^2 \\
&= 4\delta^2 - 4 \| \frac{1}{4}(x + y_0) - \frac{1}{2} y \|^2 \\
&\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0
\end{aligned}$$

Asi obtenemos que $y = y_0$

**Lema 1.** Sea $\mathscr{H}$ y $Y$ subespacios completos, $x \in \mathscr{H}$ fijo. Entonces $z = x - y$ es ortogonal a $Y$.

*Demostración.* Si $z \perp Y$ fuera falso, existiria un $y_1 \in Y$ tal que,

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$$

Claramente $y_1 \neq 0$, ademas, para cualquier escalar $\alpha$

$$\begin{aligned} \| z - \alpha y_1 \| &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha [\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle] \\ &= \| z \|^2 - \overline{\alpha} \beta - [\overline{\beta} - \overline{\alpha} \| y_1 \|^2] \end{aligned}$$

tomando $\alpha = \dfrac{\beta}{\langle y_1, y_1 \rangle}$, con $\langle y_1, y_1 \rangle \neq 0$, obetenemos

$$\begin{aligned} \| z - \alpha y_1 \|^2 &= \| z \|^2 - \frac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \\ &= \| x - y \|^2 \frac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \\ &= \delta^2 - \frac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \leq \delta^2 \end{aligned}$$

Pero esto no es posible, pues $\| z - \alpha y_1 \| = \| x - (y + \alpha y_1) \| \geq \delta$ Entonces no puede ocurrir.

El recíproco del lema anterior también se cumple.

**Proposición 6.** Si $x \in X$ y $y \in Y$ es tal que $(x - y) \perp Y$ , entonces $\| x - y \| = \delta$.

*Demostración.* Si $y_0 \in Y$, entonces $(y - y_0) \perp (x - y)$. Asi que

$$\begin{aligned} \| x - y_0 \|^2 &= \| x - y \|^2 + \| y - y_0 \|^2 \\ &\geq \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

Tomando el infimo sobre los $y_0 \in Y$ obtenemos $\| x - y \| \leq \delta$ Dado que $\delta \leq \| x - y \|$ se sigue $\| x - y \| = \delta$

A continuación introduciremos el concepto de suma directa, el cual tiene sentido para cualquier espacio vectorial.

**Definición 11.** Un espacio vectorial $X$, se dice que es la **Suma directa** de dos subespacios $Y$ y $Z$, y se denota por

$$X = Y \oplus Z$$

Si cada $x \in X$, tiene una única representación como.

$$x = y + z, \quad con \;\; y \in Y, z \in Z$$

**Teorema 3.** Sean $X$, un espacio vectorial y $Y$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ Entonces.

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

*Demostración* Dado que $\mathscr{H}$ es completo y $Y$ es cerrado, $Y$ es completo. Además $Y$ es convexo, implican entonces que para cada $x \in \mathscr{H}$ existe $y \in Y$ tal que

$$x = y + z, \qquad z \in Y^{\perp}$$

Para probar la unicidad supongamos que

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

donde $y, y_1 \in Y$ y $z, z_1 \in Y^{\perp}$.
Entonces $y - y_1 = z - z_1 \in Y \bigcap Y^{\perp} = \{0\}$. Esto implica que $y = y_1$ $y$ $z = z_1$.

Luego como $Y$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$ y $x \in \mathscr{H}$, entonces existe un único $y \in Y$ tal que $(x - y) \in Y^{\perp}$. Esto define una función.

$$\begin{aligned} P : H &\to Y \\ x &\mapsto y = P(x) \end{aligned}$$

**Teorema 4.** P se llama la **Proyección ortogonal** de $\mathscr{H}$ en $Y$ y satisface las propiedades.

$P_{1.}$ $P$ es una transformación lineal en $\mathscr{H}$,

$P_{2.}$ $P^2 = P$,

$P_{3.}$ $N(P) = Y^{\perp}$ y $Rang(P) = Y$

*Demostración.*

$P_1$ Sean $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$, existen $y_1, y_2 \in Y$, únicos; tales que $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in Y^{\perp}$. De las propiedades del producto interno se tiene que

$$\langle(\alpha x_1 + x_2)) - (\alpha y_1 + y_2), z\rangle = \alpha\langle x_1 - y_1, z\rangle + \langle x_2 - y_2, z\rangle = 0$$

para todo $z \in Y$ . De aquí que $(\alpha x_1 + x_2) - (\alpha y_1 + y_2) = 0$ y por tanto

$$P(\alpha x_1 + x_2) = \alpha y_1 + y_2 = \alpha P(x_1) + P(x_2)$$

$P_2$ Si $y \in Y$ entonces $Py = y$, pues $y - y \perp Y$ . Para cada $x \in \mathscr{H}$ tenemos $Px = y$, entonces

$$P^2 x = P(Px) = Py = y = Px$$

$P_3$ Por definición de $P, Rang(P) \subset Y$ . Para cada $y \in Y$ tenemos $Py = y$ luego $Y \subset Rang(P)$. Por último, $Px = 0$ cuando $x \in Y^{\perp}$ y reciprocamente $x \in Y^{\perp}$ cuando $Px = 0$. Por lo tanto $N(P) = Y^{\perp}$.

El siguiente teorema justifica el hecho por el cual utilizamos subespacios cerrados en este contexto. Dado que $Y^{\perp\perp} = Y$ , escribimos $\mathscr{H} = Y \oplus Y^{\perp}$.

**Teorema 5.** Sean $\mathscr{H}$ y $Y$ un subespacio, se dice que $Y$ es cerrado si y sólo si:

$$Y = Y^{\perp\perp}$$

**Colorario 1.** Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert.

(a.) Si $M \subset \mathscr{H}$, entonces $\overline{genM} = M^{\perp\perp}$,

(b.) Si $Y$ es un subespacio de $\mathscr{H}$; entonces $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$.

## 2.4. Teorema: Representacion de Riesz

**Teorema 6.** Si $f$ es un funcional lineal acotado definido en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, entonces existe un único $z$ en $\mathscr{H}$ que depende de $f$, tal que la norma del funcional coincide con la norma de $z$, Ádemas $f$ se define de la forma

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in \mathscr{H}$$

*Demostración.* Para el caso en que $f = 0$, el elemento $z = 0$ cumple lo deseado:

$$f(x) = 0 = \langle x, 0 \rangle \quad \forall x \in \mathscr{H} \qquad y \quad \| f \| = 0 = \| z \|$$

Supóngase que $f \neq 0$. El $z$ que se busca debe estar en $(Ker f)^{\perp}$ pues tendrÃa que ocurrir

$$\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in Ker f$$

Por ser $f$ un funcional lineal acotado, se tiene que $Ker f$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$. Luego $\mathscr{H} = Ker f \oplus Ker f^{\perp}$. Como $f \neq 0$, el $Ker f \neq \mathscr{H}$, con lo que $(Ker f)^{\perp} \neq \{0\}$. Con ésto se garantiza la existencia de un elemento $z_0 \neq 0$ en $(Ker f)^{\perp}$.

Sea $x$ cualquier elemento en $\mathscr{H}$ y hágase $x_1 := f(x)z_0 - f(z_0)x$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= f(f(x)z_0) - f(f(z_0)x) \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $x_1$ pertenece al $Ker f$ . Por pertenecer $x_1$ al $Ker f$ y $z_0$ al $(Ker f)^\perp$ lo siguiente es válido:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle x_1, z_0\rangle \\
&= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\
&= \langle f(x)z_0, z_0\rangle - \langle f(z_0)x, z_0\rangle \\
&= f(x)\langle z_0, z_0\rangle - f(z_0)\langle x, z_0\rangle.
\end{aligned}$$

Como $z_0 \neq 0$,

$$f(x) = \frac{f(z_0)\langle x, z_0\rangle}{\| z_0 \|^2} = \frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2}\langle x, z_0\rangle = \langle x, \overline{\frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2}} z_0\rangle$$

luego para $z := \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$

$$f(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in \mathscr{H}$$

El $z$ que se acaba de encontrar es único. En efecto, sea $z_1$ en $\mathscr{H}$ tal que $f(x) = \langle x; z_1\rangle$ para todo $x$ en el espacio $\mathscr{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, z\rangle = \langle x, z_1\rangle \quad \forall x \in \mathscr{H} &\Rightarrow \langle x, z\rangle - \langle x, z_1\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathscr{H} \\
&\Rightarrow \langle x, z - z_1\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle z - z_1, z - z_1\rangle = 0 \\
&\Rightarrow z - z_1 = 0 \\
&\Rightarrow z = z_1
\end{aligned}$$

Esta última serie de implicaciones también proporciona la siguiente propiedad en espacios de Hilbert: cuando $\langle x, z\rangle = \langle x, z_1\rangle$ para todo $x$, no queda más que $z = z_1$.

Finalmente para la igualdad en las normas obsérvese que

$$\begin{aligned}
\| z \|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) &\leq \| f \| \| z \| \\
&\leq \| f \| \| z \|
\end{aligned}$$

Por ser $z$ distinto de cero, $\| z \| \leq \| f \|$. Por otro lado, por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}
|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \| x \| \| z \| \qquad \forall x \in \mathscr{H} \\
\frac{|\langle x, z\rangle|}{\| x \|} \leq \| z \|
\end{aligned}$$

con lo que $\| f \| \leq \| z \|$.

por lo tanto si $\| z \| \leq \| f \|$ y $\| f \| \leq \| z \|$, se conluye que $\| f \| = \| z \|$

CAPÍTULO 3

# ÁLGEBRAS DE BANACH

En este capitulo nos dedicaremos a introducir el concepto de Álgebras y Álgebras de Banach, clasificando cada una con ejemplos para luego definir brevemente el teorema mas importante del estudio las Álgebras de Banach (teorema de Gelfand Mazur).

## 3.1. Fundamentos de Álgebras de Banach

**Definición 1.** Sea $\mathscr{A}$ es un espacio vectorial dotado, de las operaciónes suma $(+)$, producto algebraico $(\cdot)$ y un producto vectorial $(*)$. Para el cual dados $a, b, c \in \mathscr{A}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$; se cumple las siguientes propiedades.

$A_1$ $(a * b) * c = a * (b * c)$; Asociatividad con respecto al producto.

$A_2$ $a * (b + c) = a * b + a * c$; Distributividad izquierda

$A_3$ $(a + b) * c = a * c + b * c$; Distributividad derecha

$A_4$ $\alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * b = a * (\alpha \cdot b)$; Distributividad de un escalar con respecto con un producto $*$.

La cuaterna $(\mathscr{A}, +, \cdot, *)$ se le llama Álgebra.

**Definición 2.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra, si existe el elemento 1 en el álgebra; tal que $\forall a \in \mathscr{A}$ se tiene que

$$1 * a = a * 1 = a$$

Entonces se dice que $\mathscr{A}$ es un **álgebra unital** y 1 es el elemento unital.

**Definición 3.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra sobre el campo $\mathbb{C}$. Una **subálgebra** de $\mathscr{A}$ es un subespacio vectorial $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ tal que.

$$a, b \in \mathscr{B} \ \ entonces \ \ (a * b) \in \mathscr{B}$$

**Definición 4.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra, si para cualquier $a \in \mathscr{A}$ existe un elemento $e \in \mathscr{A}$; que cumple con la propiedad

$$e * a = a * e = a$$

Entonces se dice que $\mathscr{A}$ es un **álgebra con identidad** y $e$ recibe el nombre de elemento identidad.

**Observación 1.** Si $\mathscr{A}$ tiene una identidad, ésta es única.

*Demostración.* Sean $e_1, e_2$ identidades en el álgebra $\mathscr{A}$, entonces para todo $a$ en el álgebra, $a * e_1 = a$ y $a * e_2 = a$. En particular tenemos $e_2 * e_1 = e_2$ $y$ $e_1 * e_2 = e_1$ Por lo tanto

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

**Definición 5.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra, $a$ en $\mathscr{A}$. Si existe $b$ en $\mathscr{A}$. tal que

$$a * b = b * a = e$$

entonces diremos que $b$ es inverso de $a$

Si cada elemento de $\mathscr{A}$, tiene inverso entonces se dice que $\mathscr{A}$, es un **álgebra invertible**.

**Proposición 1.** Sean $\mathscr{A}$ un álgebra, $a$ un elemento invertible en $\mathscr{A}$, entonces el inverso de $a$ es único.

*Prueba.* Supongamos que $b_1, b_2 \in \mathscr{A}$ son elementos inversos de $\mathscr{A}$, entonces se cumple $a * b_1 = b_1 * a = e$ y $a * b_2 = b_2 * a = e$, luego

$$b_1 = b_1 * e = b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2 = e * b_2 = b_2$$

Por lo tanto el inverso de **a** es unico y se nota como $a^{-1}$.

**Definición 6.** Sean $\mathscr{A}$ un álgebra y $\| \cdot \| : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ una función . Se dice que $\mathscr{A}$ es una **álgebra normada** si se cumplen las siguientes propiedades con respecto a $\| \cdot \|$

$A_{N1}$.) $\| a \| \geq 0, \quad \forall a \in \mathscr{A}$ no negatividad

$A_{N2}$.) $\| \alpha \cdot a \| = |\alpha| \, \| a \|$, donde $\alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall a \in \mathscr{A}$

$A_{N3}$.) $\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|$, Desigualdad triangular $\quad \forall a, b \in \mathscr{A}$

$A_{N4}$.) $\| a * b \| \leq \| a \| \| b \|$, Desigualdad multiplicativa. $\quad \forall a, b \in \mathscr{A}$

Si $e$ es identidad en $\mathscr{A}$, se pide que

$$\| e \| = 1$$

**Definición 7.** Sea $(\mathscr{A}, *, \| \cdot \|)$ un álgebra normada, se dice que $\mathscr{A}$, es un **álgebra de Banach** si se cumplen:

i. $(\mathscr{A}, \| \cdot \|)$, Es un espacio de Banach complejo.

i. $(\mathscr{A}, *)$, es un álgebra compleja

ii. $\| a * b \| \leq \| a \| \| b \|$, para cualquier a y b en $\mathscr{A}$

**Observación:** Notemos que la relaciona multiplicación y normas; hace al producto una función continua de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ en $\mathscr{A}$. Podemos ver esto así

$$\begin{aligned} \| a * b - a_0 * b_0 \| &= \| a * (b - b_0) + (a - a_0) * b \| \\ &\leq \| a * (b - b_0) \| + \| (a - a_0) * b \| \\ &\leq \| a \| \| b - b_0 \| + \| a - a_0 \| \| b \| \end{aligned}$$

**Teorema: Extensión de Álgebras** Sea $(\mathscr{A}, +, \cdot, *)$ un álgebra, no necesariamente con identidad, entonces podemos generar una nueva álgebra $(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{+}, \odot, \tilde{*}, \| \cdot \|_*)$, la cual tiene identidad, y el álgebra inicial $\mathscr{A}$ va a ser una subálgebra de $\tilde{\mathscr{A}}$.

*Demostración.* Consideremos el conjunto

$$\tilde{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \times \mathbb{C} := \{m = (a, c),\ a \in \mathscr{A}\ \wedge\ c \in \mathbb{C}\}.$$

Definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \tilde{+} : \quad & \tilde{\mathscr{A}} \times \tilde{\mathscr{A}} \to \tilde{\mathscr{A}} \\ & (m, n) \to m \tilde{+} n = [(a_1, c_1) \tilde{+} (a_2, c_2,)] = [a_1 + a_2, c_1 + c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \quad & \mathbb{C} \times \tilde{\mathscr{A}} \to \tilde{\mathscr{A}} \\ & (\alpha, m) \to \alpha \odot m = \alpha \odot (a, c) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{*} : \quad & \tilde{\mathscr{A}} \times \tilde{\mathscr{A}} \to \tilde{\mathscr{A}} \\ & (m, n) \to m \tilde{*} n = [(a_1, c_1) \tilde{*} (a_2, c_2)] = [a_1 * a_2 + c_2 \cdot a_1 + c_1 \cdot a_2,\ c_1 \cdot c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_* : \quad & \tilde{\mathscr{A}} \to \mathbb{C} \\ & m \to \| m \|_{\sim} = \| a_1, c_1 \|_{\sim} = \| a_1 \| + |c_1| \end{aligned}$$

Sean $m,n,p \in \tilde{\mathscr{A}}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, Definiendo $m=(a_1,c_1)$, $n=(a_2,c_3)$, y $p=(a_3,c_3)$. entonces.

$A_1$). $(m\tilde{*}n)\tilde{*}p = m\tilde{*}(n\tilde{*}p)$

$$(m\tilde{*}n)\tilde{*}p = \underbrace{(a_1,c_1\tilde{*}a_2,c_2)\tilde{*}a_3,c_3} = \underbrace{a_1,c_1\tilde{*}(a_2,c_2\tilde{*}a_3,c_3)} = m\tilde{*}(n\tilde{*}p)$$

*Demostración.*

$$(m\tilde{*}n)\tilde{*}p = (a_1 * a_2 + c_2\cdot a_1 + c_1\cdot a_2, c_1\cdot c_2)\tilde{*}a_3,c_3$$

$$a_3 * (a_1 * a_2 + c_2\cdot a_1 + c_1\cdot a_2) + c_3\cdot(a_1 * a_2 + c_2\cdot a_1 + c_1\cdot a_2) + c_1\cdot c_2 * a_3, c_1\cdot c_2\cdot c_3$$

$$a_1 * a_2 * a_3 + c_2\cdot a_1 * a_3 + c_1\cdot a_2 * a_3 + c_3\cdot a_1 * a_2 + c_2\cdot c_3\cdot a_1 + c_1\cdot c_3\cdot a_2 + c_1\cdot c_2\cdot a_3, c_1\cdot c_2\cdot c_3 \quad \bullet$$

$$a_1 * (a_2 * a_3 + c_3\cdot a_2 + c_2\cdot a_3) + c_2\cdot c_3\cdot a_1 + c_1(a_2 * a_3 + c_3\cdot a_2 + c_2\cdot a_3), c_1\cdot c_2\cdot c_3$$

$$a_1 * c_1\tilde{*}(a_2 * a_3 + c_3\cdot a_2 + c_2\cdot a_3, c_2\cdot c_3) = m\tilde{*}(n\tilde{*}p)$$

$A_2$). $m\tilde{*}(n\tilde{+}p) = (m\tilde{*}n)\tilde{+}(m\tilde{*}p)$

$$m\tilde{*}(n\tilde{+}p) = \underbrace{a_1,c_1\tilde{*}(a_2,c_2\tilde{+}a_3,c_3)} = \underbrace{(a_1,c_1\tilde{*}a_2,c_2)\tilde{+}(a_1,c_1\tilde{*}a_3,c_3)} = (m\tilde{*}n)\tilde{+}(m\tilde{*}p)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
m\tilde{*}(n\tilde{+}p) &= a_1,c_1\tilde{*}(a_2,c_2\tilde{+}a_3,c_3)\\
&= a_1,c_1\tilde{*}(a_2+a_3, c_2+c_3)\\
&= a_1 * (a_2+a_3) + (c_2+c_3)\cdot a_1 + c_1\cdot(a_2+a_3), c_1\cdot c_2 + c_3\\
&= a_1 * a_2 + a_1 * a_3 + c_2\cdot a_1 + c_3\cdot a_1 + c_1\cdot a_2 + c_1\cdot a_3, c_1\cdot c_2 + c_1\cdot c_3 \quad \rhd\\
&= (a_1 * a_2 + c_1\cdot a_2 + c_2\cdot a_1, c_1\cdot c_2)\tilde{+}(a_1 * a_3 + c_3\cdot a_1 + c_1\cdot a_3, c_1\cdot c_3)\\
&= (a_1,c_1\tilde{*}a_2,c_2)\tilde{+}(a_1,c_1\tilde{*}a_3,c_3)\\
&= (m\tilde{*}n)\tilde{+}(m\tilde{*}p)
\end{aligned}$$

$A_3$). $(m\tilde{+}n)\tilde{*}p = (m\tilde{*}p)\tilde{+}(n\tilde{*}p)$

$$m\tilde{+}n)\tilde{*}p = \underbrace{(a_1,c_1\tilde{+}a_2,c_2)\tilde{*}a_3,c_3} = \underbrace{(a_1,c_1\tilde{*}a_3,c_3)\tilde{+}(a_2,c_2\tilde{*}a_3,c_3)} = (m\tilde{*}p)\tilde{+}(n\tilde{*}p)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
(m\tilde{+}n)\tilde{*}p &= (a_1,c_1\tilde{+}a_2,c_2)\tilde{*}a_3,c_3\\
&= (a_1+a_2, c_1+c_2)\tilde{*}a_3,c_3\\
&= (a_1+a_2) * a_3 + (c_1+c_2)\cdot a_3 + c_3\cdot(a_1+a_2), (c_1+c_2)\cdot c_3\\
&= a_1 * a_3 + a_2 * a_3 + c_1\cdot a_3 + c_2\cdot a_3 + c_3\cdot a_1 + c_3\cdot a_2, c_1\cdot c_3 + c_2\cdot c_3 \quad \lhd\\
&= (a_1 * a_3 + c_3\cdot a_1 + c_1\cdot a_3, c_1\cdot c_3)\tilde{+}(a_2 * a_3 + c_3\cdot a_2 + c_2\cdot a_3, c_2\cdot c_3)\\
&= (a_1,c_1\tilde{*}a_3,c_3)\tilde{+}(a_2,c_2\tilde{*}a_3,c_3)\\
&= (m\tilde{*}p)\tilde{+}(n\tilde{*}p)
\end{aligned}$$

$A_4$). $\alpha \odot (m \tilde{*} n) = (\alpha \odot m) \tilde{*} n = m \tilde{*} (\alpha \odot n)$

$$\underbrace{\alpha \odot [(a_1, c_1 \tilde{*} a_2, c_2)]} = \underbrace{[\alpha \odot (a_1, c_1)] \tilde{*} (a_2, c_2)} = \underbrace{(a_1, c_1) \tilde{*} [\alpha \odot (a_2, c_2)]}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (m \tilde{*} n) &= \alpha \odot [(a_1, c_1 \tilde{*} a_2, c_2)] \\
&= \alpha [a_1 * a_2 + c_2 \cdot a_1 + c_1 \cdot a_2, c_1 \cdot c_2] \\
&= \alpha \cdot a_1 * a_2 + \alpha \cdot c_2 \cdot a_1 + \alpha \cdot c_1 \cdot a_2, \alpha \cdot c_1 \cdot c_2 \\
&= [\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c_1)] \tilde{*} (a_2, c_2) \\
&= [\alpha \odot (a_1, c_1)] \tilde{*} (a_2, c_2) \\
&= (\alpha \odot m) \tilde{*} n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \odot m) \tilde{*} n &= [\alpha \odot (a_1, c_1)] \tilde{*} (a_2, c_2) \\
&= [\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c_1)] \tilde{*} (a_2, c_2) \\
&= \alpha \cdot a_1 * a_2 + \alpha \cdot c_2 \cdot a_1 + \alpha \cdot c_1 \cdot a_2, \alpha \cdot c_1 \cdot c_2 \\
&= (a_1, c_1) \tilde{*} [(\alpha \cdot a_2, \alpha \cdot c_2)] \\
&= (a_1, c_1) \tilde{*} [\alpha \odot (a_2, c_2)] \\
&= m \tilde{*} (\alpha \odot n)
\end{aligned}$$

Además

$N_1$).

$$\begin{aligned}
\| m \|_* &= \| a_1, c_1 \|_* \\
&= \| a_1 \| + |c_1| \geq 0 \quad porque \| a_1 \| \geq 0 \ \wedge \ |c_1| \geq 0
\end{aligned}$$

$N_2$).

$$\begin{aligned}
\| \alpha \odot m \|_* &= \| \alpha \odot (a_1, c_1) \|_* = \| (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c_1) \|_* \\
&= \| \alpha \cdot a_1 \| + |\alpha \cdot c_1| \\
&\leq |\alpha| \| a_1 \| + |\alpha||c_1| \\
&= |\alpha|(\| a_1 \| + |c_1|) \\
&= |\alpha| \| m \|_*
\end{aligned}$$

$N_3$).

$$\begin{aligned}
\| m + n \|_* &= \| (a_1, c_1) \tilde{+} (a_2, c_2) \|_* \\
&= \| (a_1 + a_2, c_1 + c_2) \|_* \\
&= \| a_1 + a_2 \| + |c_1 + c_2| \\
&\leq \| a_1 \| + \| a_2 \| + |c_1| + |c_2 \\
&\leq (\| a_1 \| + |c_1|) + (\| a_2 \| + |c_2|) \\
&\leq \| m \|_* + \| n \|_*
\end{aligned}$$

$N_4$).

$$\begin{aligned}
\| m \tilde{*} n \|_* &= \| (a_1, c_1) \tilde{*} (a_2, c_2) \|_* \\
&= (\| a_1 * a_2 + c_2 \cdot a_1 + c_1 \cdot a_2, c_1 \cdot c_2) \|_* \\
&= \| a_1 * a_2 + c_2 \cdot a_1 + c_1 \cdot a_2 \| + |c_1 \cdot c_2| \\
&\leq \| a_1 * a_2 \| + \| c_2 \cdot a_1 + c_1 \cdot a_2 \| + |c_1||c_2| \\
&\leq (\| a_1 \| \| a_2 \| + |c_2| \| a_1 \|) + (|c_1| \| a_2 \| + |c_1||c_2|) \\
&\leq \| a_1 \| (\| a_2 \| + |c_2|) + |c_1| (\| a_2 \| + |c_2|) \\
&= (\| a_1 \| + |c_1|)(\| a_2 \| + |c_2|) \\
&= \| m \|_* \| n \|_*
\end{aligned}$$

Luego la cuaterna $(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{+}, \odot, \tilde{*}, \| \cdot \|_*)$, es un Álgebra de Banach.

Como inicialmente habíamos considerado un álgebra en particular sin identidad podemos encontrar esta a partir de la siguiente deducción.

$$\mathscr{A} \to \tilde{\mathscr{A}} = (\mathscr{A}, +, \cdot, *, \mathbb{C})$$

En el cual la identidad de $\tilde{\mathscr{A}}$ es $\tilde{e} = (0_A, 1)$, donde $0_A$ pertenece al álgebra y $1 \in \mathbb{C}$.

En efecto si $m = (a, c) \in \tilde{\mathscr{A}}$, entonces

$$\begin{aligned}
(a, c) \tilde{*} (0_A, 1) &= (a * 0_A + 1 \cdot c + c 0_A, c \cdot 1) \\
&= (0_A + a + 0_A, c) \\
&= (a, c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0_A, 1) \tilde{*} (a, c) &= (a * 0_A + 1 \cdot c + c 0_A, c \cdot 1) \\
&= (0_A + a + 0_A, c) \\
&= (a, c)
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$(a, c) \tilde{*} (0_A, 1) = (a, c) = (0_A, 1) \tilde{*} (a, c)$$

**Observación.** El elemento $(0_A, 0)$ es el neutro con respecto a $\tilde{+}$. En efecto si $m = (a, c) \in \mathbb{C}$, entonces
$$(a, c) \tilde{+} (0_A, 0) = (a, c) = (0_A, 0) \tilde{+} (a, c)$$

Notemos ademas que para el álgebra $\tilde{\mathscr{A}}$. Se define, el inverso aditivo con respecto a la operacione $\tilde{+}$, de la siguiente manera,

*i.)* $(a, c) \tilde{+} (-a, -c) = (a + (-a), c + (-c)) = (0_A, 0)$

**Definición 8.** Un Álgebra de Banach conmutativa y con identidad $e$ en $\mathscr{A}$, es un **Campo**, si cada elemento distinto de cero en $\mathscr{A}$ es invertible.

**Ejemplos de Álgebras de Banach**

Los siguientes ejemplos ilustran espacios importantes que son álgebras de Banach.

**Ejemplo 1.** Consideremos el conjunto de los numeros complejos $\mathbb{C}$, con las siguientes operaciones.

+). $(x+yi)+(z+wi)=(x+z)+(y+w)i$

$*$). $(x+yi)*(z+wi)=(xy-yw)+(yz+xw)i$

$\cdot$). $\alpha\cdot(x+yi)=\alpha x+\alpha yi$

$\|\cdot\|$ $\mathbb{C}\to\mathbb{K}$

$\| x+yi \|=\sqrt{x^2+y^2}$

tomemos $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R}$ y $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

Se define $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ y $z_3=x_3+y_3i$, números complejos y ademas sea la función norma definida de la siguiente manera $\|\cdot\|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$

$$z_1\to\| z_1 \|=\sqrt{x_1^2+y_2^2}$$

se verifica;

$N_1$.

$$\| z_1 \|=\sqrt{x_1^2+y_2^2}>0$$

$N_2$.

$$\| z_1 \|=0\leftrightarrow\sqrt{0^2+0^2}=0,\ luego\ x=0\ \wedge\ y=0$$

$N_3$.

$$\begin{aligned}\| \alpha\cdot z_1 \| &=\| \alpha(x_1+y_1i) \|\\ &=\| \alpha x_1+\alpha y_1 i \|\\ &=\sqrt{(\alpha x_1)^2+(\alpha y_1)^2}\\ &=\sqrt{\alpha^2x_1^2+\alpha^2y_1^2}\\ &=\sqrt{\alpha^2(x_1^2+y_1^2)}=\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}\\ &=|\alpha|\sqrt{x_1^2+y_1^2}\\ &=|\alpha|\,\| z_1 \|\end{aligned}$$

Para la siguiente prueba debemos recordar que $\| z_1 \|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$, luego debemos verificar que la desigualdad triangular se cumple.

$$
\begin{aligned}
N_4.\ \| z_1 + z_2 \|^2 &= (x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) \cdot \overline{(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i)} \\
&= (x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) \cdot \overline{(x_1 + y_1 i} + \overline{x_2 + y_2 i)} \\
&= (x_1 + y_1 i \cdot \overline{(x_1 + y_1 i} + (x_1 + y_1 i \cdot \overline{x_2 + y_2 i)} + x_2 + y_2 i \cdot \overline{(x_1 + y_1 i} + x_2 + y_2 i \cdot \overline{x_2 + y_2 i)} \\
&= \| z_1 \|^2 + \underbrace{x_1 + y_1 i \cdot \overline{x_2 + y_2 i} + x_2 + y_2 i \cdot \overline{(x_1 + y_1 i}} + \| z_2 \|^2 \\
&= \| z_1 \|^2 + \underbrace{2x_1x_2 - 2y_1y_2} + \| z_2 \|^2
\end{aligned}
$$

pero como

$$2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 2(x_1x_2 - y_1y_2) = 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 2 \| z_1 \cdot \overline{z_2} \| = 2 \| z_1 \| \cdot \| \overline{z_2} \| = 2 \| z_1 \| \cdot \| z_2 \|$$

Por lo tanto se conluye que;

$$
\begin{aligned}
\| z_1 + z_2 \|^2 &= \| z_1 \|^2 + 2 \| z_1 \| \cdot \| z_2 \| + \| z_2 \|^2 \\
&= (\| z_1 \| + \| z_2 \|)^2
\end{aligned}
$$

de donde se deduce

$$\| z_1 + z_2 \| \leq \| z_1 \| + \| z_2 \|$$

Ademas

$A_1$). $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$

*Prueba.*

$$
\begin{aligned}
(z_1 * z_2) * z_3 &= (x_1 + y_1 i * x_2 + y_2 i) * x_3 + y_3 i = (x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i) * x_3 + y_3 i \\
&= x_3(x_1x_2 - y_1y_2) + x_3(x_1y_2 i + x_2y_1 i) + y_3 i(x_1x_2 - y_1y_2) + y_3 i(x_1y_2 i + x_2y_1 i) \\
&= x_3x_1x_2 - x_3y_1y_2 + x_1x_3y_2 i + x_2x_3y_1 i + x_1x_2y_3 i - y_1y_2y_3 i - x_1y_2y_3 + x_2y_1y_3 \\
&= x_1(x_2x_3 - y_2y_3) + x_1(x_2y_3 i + x_3y_2 i) + y_1 i(x_2x_3 - y_2y_3) + y_1 i(x_2y_3 i + x_3y_2) i \\
&= x_1 + y_1 i * (x_2x_3 - y_2y_3 + (x_2y_3 + x_3y_2)i) = (x_1 + y_1 i * x_2 + y_2 i) * x_3 + y_3 i = z_1 * (z_2 * z_3)
\end{aligned}
$$

$A_2$). $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$

*Prueba.*

$$
\begin{aligned}
z_1 * (z_2 + z_3) &= x_1 + y_1 i * (x_2 + y_2 i + x_3 + y_3 i) \\
&= x_1 + y_1 i * [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) i] \\
&= x_1(x_2 + x_3) + x_1(y_2 + y_3) i + y_1 i(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + + y_3) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1y_2 i + x_1y_3 i + x_2y_1 i + x_3y_1 i - y_1y_2 - y_1y_3 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1y_2 i + y_1x_2 i) + (x_1x_3 - y_1y_3 + x_1y_3 i + y_1x_3 i) \\
&= (x_1 + y_1 i * x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i * x_3 + y_3 i) \\
&= z_1 * z_2 + z_1 * z_3
\end{aligned}
$$

$A_3$). $(z_1 + z_2) * z_3) = z_1 * z_3 + z_2 * z_3$

$A_3$, se verifica igualamente gracias a la prueba anterior, ya que los $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cumplen con la propeidad de ser asociativos, por tanto son asociativos hacia la derecha e izquierda.

$A_4$). $\alpha \cdot (z_1 * z_2) = (\alpha \cdot z_1) * z_2 = z_1 * (\alpha \cdot z_2)$

*Prueba.*

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (z_1 * z_2) &= \alpha \cdot (x_1 + y_1 i * x_2 + y_2 i) \\
&= \alpha \cdot (x_1 x_2 - y_1 y_2 + x_2 y_1 i + x_2 y_1 i) \\
&= \alpha \cdot x_1 x_2 + \alpha \cdot x_1 y_2 i + \alpha \cdot x_2 y_1 i - \alpha \cdot y_1 y_2 \\
&= (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1 i) * x_2 + y_2 i \\
&= (\alpha \cdot x_1 + y_1 i) * x_2 + y_2 i \\
&= (\alpha \cdot z_1) * z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot z_1) * z_2 &= (\alpha \cdot x_1 + y_1 i) * x_2 + y_2 i \\
&= \alpha \cdot x_1 x_2 + \alpha \cdot x_1 y_2 i + \alpha \cdot x_2 y_1 i - \alpha \cdot y_1 y_2 \\
&= x_1 + y_1 i * (\alpha \cdot x_2 + \alpha \cdot y_2 i) \\
&= x_1 + y_1 i * (\alpha \cdot x_2 + y_2 i) \\
&= z_1 * (\alpha \cdot z_2)
\end{aligned}$$

Por ultimo debemos ver $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, satisfacen la desigualdad multiplicativa.

$$\| z_1 * z_2 \| \leq \| z_1 \| \| z_2 \|$$

$$\begin{aligned}
\| z_1 * z_2 \| &= \| x_1 + y_1 i * x_2 + y_2 i \| \\
&= \| (x_1 x_2 - y_1 y_1) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \| \\
&= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2 x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 (x_2^2 + y_2^2) + y_1^2 (x_2^2 + y_2^2)} \\
&= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\
&\leq \| z_1 \| \| z_2 \|
\end{aligned}$$

Por lo tanto la terna $(\mathbb{C}, \| \cdot \|, *)$, es un Espacio de Banach. con $e = 1$, para $e \in \mathbb{C}$.

En particular como necesariamente el álgebra debe contener identidad y gracias al Teorema de extension de álgebra se deduce los siguiente,

Sea en particular $(i,2)\tilde{*}(m,k) = (0_A,1)$ en donde $k = \frac{1}{2}$ es inverso multiplicativo del elemento 2 y $m$ se define,

$$(i,2)\tilde{*}(m,\frac{1}{2}) = (\underbrace{m * i + 2\cdot m + \frac{1}{2}i}, 2\cdot\frac{1}{2}i)$$

$$\begin{aligned} m * i + 2\cdot m + \frac{1}{2}i = 0 \\ m\cdot(i+2) &= -\frac{1}{2}i = -\frac{\frac{1}{2}i}{(i+2)} = -\frac{i\cdot(4-2i)}{2i+4\cdot(4-2i)} = \frac{-2-4i}{20} \\ m &= -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

Prueba

$$\begin{aligned} (i,2)\tilde{*}\left[(-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i),\frac{1}{2}\right] &= i*(-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i)+\frac{1}{2}\cdot i + 2\cdot(-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i), 2\cdot\frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i+\frac{1}{2}i, 1\right) \\ &= (0+0i,1) \\ &= (0_A,1) \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.** Sea $X$ un álgebra de Banach, $B(X)$ el conjunto de funciones acotadas en $X$. Entonces $B(X)$ es una álgebra Banach.

*Demostración.* Notemos si $I : X \to X \backslash x \to I(x) = x,$ Operador lineal

En efecto

$$\| I(x) \| = \| x \| = 1 \| x \| \to \| I(x) \| \leq 1 \| x \|, \quad \forall x \in X$$

Por lo tanto $I$ es acotado en $X$, luego $I \in B(X)$

En efecto para cada $T,S \in B(X)$

$$\| T * S \| \leq \| T \| \| S \|$$

Así que $B(X)$ es un álgebra de Banach.

**Ejemplo 3.** El espacio vectorial $M_n(\mathbb{C})$ de todas las matrices complejas $n \times n (n > 0)$ es un álgebra no conmutativa donde la identidad es la matriz identidad $I$ de n-filas. con la norma

$$\| A \|_n = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

Obtenemos un álgebra de Banach.

**Definición 9.** Dado una transformación lineal o función lineal $f : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ se dice que $f$ es isomorfismo, si es una función biyectiva y tambien decimos que $\mathscr{A}_1$ es isomorfa a $\mathscr{A}_2$ y se denota $\mathscr{A}_1 \cong \mathscr{A}_2$.

**Nota:** En general si $f : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ es una transformación lineal o función lineal biyectiva, entonces la función $f^{-1} : \mathscr{A}_2 \to \mathscr{A}_1$ tambien es una transformacion lineal.

**Observación.** $f$ es isometrica si y solo si, $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

a. $d(a,b) = d(f(a), f(b))$

b. $f$ es sobreyectiva.

**Definición 10.** Sean $(\mathscr{A}_1, \| \cdot \|_1)$ y $(\mathscr{A}_2, \| \cdot \|_2)$, dos algebras de Banach comnutativas y con identidad, una función $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es un **Isomorfismo algebraico e isometrico si**

(i.) $f$ es uno a uno y sobre

(ii.) $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{A}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

(iii.) $f(xy) = f(x) f(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{A}_1$

(iv.) $\| f(x) \|_2 = \| x \|_1 \quad \forall x \in \mathscr{A}_1$

Se dice que $\mathscr{A}_1$ es **algebraicamente isomorfa e isometrica a** $\mathscr{A}_2$

**Definicion 11.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, $a$ un elemento del álgebra y $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda$ es llamado un **Valor regular** de $a$ si y solo si.

$$a - \lambda, \ \ es \ invertible.$$

**Ejemplo 1.** Sean $a = (4 + 2i)$ y consideremos $\lambda = (2 + 3i)$ entonces.

$$a - \lambda = 4 + 2i - (2 + 3i) = 4 + 2i - 2 - 3i$$

$$2 - i = \delta$$

Ahora si $a - \lambda = 2 - i = \delta$, entonces $\delta$ tiene inverso con respecto a la operación $*$, ya que para el conjunto de los números complejos vendria siendo la misma operación producto entre vectores.

**Ejemplo 2.** tomemos $\beta = 1 + 1i$ en $\mathbb{C}$ y $a = 1 + 1i$ en $\mathscr{A}$; $\beta$ no es valor regular de $a$ porque;

$$1 + 1i - (1 + 1i) = 0 + 0i = \mu$$

$\mu$ no es invertible.

**Definición 12.** Sea $(\mathscr{A}, \cdot, \| \cdot \|)$, $a \in \mathscr{A}$. El **conjunto resolvente** $\rho(a)$ de $a$, es el conjunto de todos los $\lambda$ en el plano complejo tales que, $\rho(a) := \{a - \lambda, \quad \text{son invertibles}\}$

**Definición 13.** Sea $(\mathscr{A}, \cdot, \| \cdot \|)$, $a \in \mathscr{A}$. Se llama **valor espectral** de a, al valor $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $a - \lambda$,
no es invertible.

**Definición 14.** Sea $(\mathscr{A}, \cdot, \| \cdot \|)$, el **espectro** $\sigma(a)$, es el complemento de $\rho(a)$ en el plano complejo.

$$\sigma(a) := \{\mathbb{C} - \rho(a)\}$$

En general el espectro de un elemento en un álgebra de Banach no posee una clasificación como en el caso del álgebra de operadores, por lo tanto se hace la siguiente aclaración el espectro de $a \in L(X)$ es el conjunto de los números $\lambda \in C$ tales que $a - \lambda I$ no es invertible. Donde $I \in L(X)$ y es la identidad. Por la comodidad se omite el $I = e($ en el caso de operadores) y se escribe $a - \lambda$ en lugar de $a - \lambda e$ ó $a - \lambda I$

**Observación.** Para $\lambda$ en el conjunto resolvente $\rho(T)$, el operador $T_\lambda^{-1}$ se llama operador resolvente de $T$ y se nota por $R_\lambda(T)$ o simplemente $R_\lambda$.

Veamos algunas propiedades del espectro de los elementos en un álgebra $\mathscr{A}$.

**Proposición 1.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra, para $a \in \mathscr{A}$. $a$ es invertible si y sólo si $a^{-1}$ es invertible y en este caso

$$\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(a)\}$$

El siguiente resultado muestra que el espectro de un producto es independiente del orden de sus factores.

**Proposición 2.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathscr{A}$. Para $\lambda, \mu \in \rho(a)$ se cumple

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

donde $R_\lambda = (a - \lambda e)^{-1}$. Esta relación se llama **ecuación resolvente**.
**Definición 12.** Sean $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, $a \in \mathscr{A}$. **El radio espectral** $r_\sigma(a)$ de $a$ en $\mathscr{A}$ es el número

$$r_\sigma(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

**Teorema 1.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Entonces para cada $a \in \mathscr{A}$, el espectro $\sigma(a)$ es compacto y el radio espectral satisface

$$r_\sigma(a) \leq \| a \|$$

Observemos que este teorema muestra que $\rho(a) \neq \phi$. Veremos también que el espectro es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Este resultado se conoce como Teorema de Gelfand, considerado uno de los teoremas cruciales en álgebras de Banach. Para ello definiremos el concepto de función analiítica de variable compleja con valores en un álgebra de Banach y probaremos algunos resultados relacionados al respecto.

**Definición 13.** Sean $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y $\mathbf{D}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f : \mathbf{D} \to \mathscr{A}$ se dice que es **analítica** si es diferenciable en cada punto $z_0 \in \mathbf{D}$, en el sentido de que el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Existe con la norma de $\mathscr{A}$. En este caso se denota el límite por $f'(z_0)$.

**Lema 1.** Sean $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathscr{A}$. Entonces la función $\tau : \mathbb{C} \backslash \sigma(a) \to a$ definida por

$$\tau(\lambda) = R_\lambda = (a - \lambda e)^{-1}$$

Es analítica.

*Demostración.* Si $\lambda \in \rho(a)$ entonces $a - \lambda_0 e$ es invertible para todo $\lambda_0$ en un disco pequeno con centro en $\lambda$. De la ecuación resolvente obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(\lambda_0) - \tau(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} &= \frac{R\lambda_0 - R\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \\
&= \frac{(\lambda_0 - \lambda) R\lambda_0 R\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \\
&= R\lambda_0 R\lambda
\end{aligned}$$

y este último converge a $R_\lambda^2$ cuando $\lambda_0 \to \lambda$. Asıtenemos que $\tau$ es analítica y $\tau'(\lambda) = R_\lambda^2$

**Lema 2.** Sea $f$ es un funcional lineal acotado en $\mathscr{A}$. Bajo las hipotesis del lema anterior, la función $h : \mathbb{C} \backslash \sigma(a) \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(\lambda) = (f \circ \tau)(\lambda) = f(R_\lambda)$$

resulta ser analítica.

*Demostración.* Usando el lema anterior tenemos que:

$$\frac{h(\lambda_0) - h(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} = f(R_{\lambda 0} R_\lambda)$$

Dado que $f$ es lineal y continuo, el cociente anterior converge a $f(R_\lambda^2)$ cuando $\lambda_0 \to \lambda$. Concluimos que $h$ es analitica y $h'(\lambda) = f(R_\lambda^2)$.

## 3.2. TEOREMA(GELFAND-MAZUR)

**Teorema.** Si un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ conmutativa y con identidad es un campo, entonces $\mathscr{A}$ es algebraicamente isomorfo y también isométrico al campo de los números complejos. En realidad $\mathscr{A} = \{\lambda_e : \lambda \in \mathbb{C}\}$ y el isomorfismo es la aplicación $\lambda_e \to \lambda$

*Demostración* Considérese cualquier elemento $x$ en el álgebra. luego si existe $\lambda_x$ en $\sigma(x)$, de esto el elemento $x - \lambda_x e$ en $\mathscr{A}$ es no invertible. Como $\mathscr{A}$ es un campo, necesariamente $x - \lambda_x e = 0$, luego

$$x = \lambda_x e$$

Si se toma otro $\lambda$ en $\sigma(x)$, entonces de igual forma $x = \lambda_e$. Pero entonces

$$\begin{aligned} \lambda_x e = \lambda_e &\Rightarrow \lambda_x e - \lambda_e = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda_x - \lambda)e = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_x = \lambda \end{aligned}$$

con lo que el valor $\lambda_x$ es único. Esto también demuestra que $\mathscr{A} = \{\lambda_e : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Como $x$ en $\mathscr{A}$ fue arbitrario, se puede considerar una función $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = f(\lambda_x e) = \lambda_x \quad \forall x \in \mathscr{A}$$

Esta función representa el isomorfismo algebraico e isométrico que buscamos. En efecto, si $\lambda$ es un elemento de $\mathbb{C}$, claramente $\lambda$ es un elemento de $\sigma(\lambda_e)$, así$f(\lambda_e) = \lambda$. AdemÃ¡s si $f(x) = 0$, entonces $\lambda_x = 0$ con lo que $x = \lambda_x e = 0$. De estos dos hechos $f$ es biyectiva.

Sean $x_1, x_2$ en $\mathscr{A}$ y $\alpha$ cualquier valor complejo, entonces $x_1 = \lambda_{x_1} e$ y $x_2 = \lambda_{x_2} e$ para algunos $\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}$ en $\mathbb{C}$, así

$$\alpha x_1 + x_2 = \alpha(\lambda_{x_1} e) + \lambda_{x_2} e = (\alpha\lambda_{x_1} + \lambda_{x_2})e$$

y

$$x_1 x_2 = (\lambda_{x_1} e)(\lambda_{x_2} e) = \lambda_{x_1} \lambda_{x_2} e$$

Por la unicidad de los $\lambda'$, se tiene

$$f(\alpha x_1 + x_2) = \alpha(\lambda_{x_1}) + \lambda_{x_2} = \alpha f(x_1) + f(x_2)$$

y

$$f(x_1 x_2) = \lambda_{x_1} \lambda_{x_2} = f(x_1) f(x_2)$$

Finalmente para ver que se preserva la norma

$$|f(x_1)| = |\lambda_{x_1}| = |\lambda_{x_1}| \parallel e \parallel = \parallel \lambda_{x_1} e \parallel = \parallel f(x_1) \parallel$$

Así, $f$ representa un isomorfismo algebraico e isométrico entre $\mathscr{A}$ y $\mathbb{C}$.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Akhiezer & I. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications. xiv, 147, iv, 1993. Citado en página(s).

[2] B. Sz.-Nagy, C. Foias. Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970.

[3] Brézis, Haim *Análisis Funcional.* Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial, París, 1983

[4] Conway, John B., A course in functional analysis, (New York : Springer,c1990)

[5] Kreyszing, Erwin, Introductory functional analysis whit applications. (Jhon wiley song, Canada 1978)

[6] Constantinescu Corneliu, C* -Algebras, (Amsterdam : Elsevier, 2001)