Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

TEOREMA DEL LEVANTAMIENTO DEL CONMUTANTE Y FORMAS SESQUILINEALES ASOCIADAS A ESPACIOS DE HILBERT

Sergio Mauricio Quintero Dussan

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

TEOREMA DEL LEVANTAMIENTO DEL CONMUTANTE Y FORMAS SESQUILINEALES ASOCIADAS A ESPACIOS DE HILBERT

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Sergio Mauricio Quintero Dussan
2008173548

Asesor:
Profesor: Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Abril de 2013

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la influencia directa o indirecta de muchas personas a las que agradezco profundamente por estar presentes en las distintas etapas de su elaboración, así como en el resto de mi vida.

Le agradezco a mi hermano Jairo Andrés Quintero Dussan, también a mi papá Jairo Quintero Gutiérrez, a mi tía Silvia Quintero y a mi abuela Adalgisa Gutiérrez Quigua, por su apoyo no solo a lo largo de mi carrera sino a lo largo de mi vida, ya que fueron quienes me formaron como la persona que soy.

Le agradezco al profesor Osmin Ferrer por manifestarme su interés en dirigir mi trabajo de grado, por su confianza, colaboración y apoyo en mi proceso de formación profesional.

Al profesor Ricardo Cedeño cuya preocupación y supervisión este proceso, hizo posible que mi trabajo se desenvolviera de manera satisfactoria, a nivel personal y académico.

A todos los docentes de la Universidad Surcolombiana que compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que mí formación profesional se resuma en satisfacciones académicas.

A mis amigos y compañeros. A quienes trabajaron conmigo hombro a hombro durante cinco cortos años poniendo lo mejor de su energía y empeño por el bien de nuestra formación profesional, a quienes compartieron su confianza, tiempo, y los mejores momentos que viví durante esta etapa como estudiante de pregrado, dentro y fuera de la universidad.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La *teoría de espacios de Hilbert* fue iniciada por David Hilbert (1862-1943) en 1912 con su trabajo *"Quadratic forms in infinitely many variables"* que aplico a la teoría de ecuaciones integrales. Después de muchos años John Von Neumann (1903-1957) formuló la primera teoría axiomática de espacios de Hilbert y desarrollo la moderna teoría de operadores en espacios de Hilbert. Su remarcada contribución a esta área proviene de los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica.

Mientras los matemáticos mostraban una tendencia a desdeñar las ecuaciones de primer grado, la resolución de ecuaciones diferenciales fue un problema muy importante. Las ecuaciones lineales se distinguieron desde el principio y su estudio contribuyó a poner de manifestó la linealidad correspondiente. Lagrange, Euler y D. Alembert estudiaron esto, pero el primero es el único que considera útil indicar que la solución general de la ecuación no homogénea es suma de una solución particular y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente; además, cuando estos autores enuncian que la solución general de la ecuación lineal homogénea de orden n es combinación lineal de n soluciones particulares, no mencionan que estas deben ser linealmente independientes. Este punto, como tantos otros, no se aclararan hasta la enseñanza de Cauchy en la Escuela Politécnica.

Lagrange introdujo (aunque solamente para el Cálculo y sin darle nombre) la ecuación adjunta $L^*(y) = 0$ de una ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$, la cual es un ejemplo típico de dualidad en virtud de la relación

$$\int zL(y) = \int L^*(z)y\,dx$$

Valida para y y z anulándose en los extremos del intervalo de integración. Con más precisión, y treinta años antes de que Gauss hubiese definido explícitamente la traspuesta de una sustitución lineal de 3 variables, vemos aquí el primer ejemplo de un operador Funcional L^* traspuesto de un operador L dado mediante una función bilineal (en este caso la integral) $\int yz\,dx$.

Posteriormente, el estudio de las **formas cuadráticas y sesquilineales**, de sus matrices y sus subespacios invariantes conduce al descubrimiento de principios generales sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; principios que Jacobi no había alcanzado por carecer de la noción de rango.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Estudiar la relación histórica entre el análisis armónico y la teoría de operadores.
- Asociar formas sesquilineales a espacios de Hilbert.
- Presentar una breve reseña histórica del desarrollo de las Formas Sesquilineales asociadas a espacios de Hilbert.
- Realizar algunas aplicaciones de las formas sesquilineales en espacios de Hilbert

Objetivos Específicos

- Construir a través de formas sesquilineales una prueba para el teorema del Levantamiento del Conmutante y mostrar algunas aplicaciones de estas.

JUSTIFICACIÓN

El análisis funcional está dividido en dos líneas: el análisis armónico y la teoría de operadores. Estas resolvían sus problemas por separado hasta 1993, cuando M. Cotlar y C. Sadosky empleando formas sesquilineales en espacios de Hilbert resolvieron indistintamente problemas de las dos líneas anteriormente mencionadas, construyendo una prueba para el teorema del levantamiento del conmutante, que es un importante resultado en el área de análisis funcional, ya que permite extender una función en su dominio a conjuntos más generales, con la particularidad de que dicha función es conmutativa con algunos tipos de operadores.

Conocer la estructura de cómo se realizó dicha construcción, nos ayudara a comprender problemas del análisis funcional, el cual nos despierta un gran interés debido a su relevancia en el mundo actual.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PREVIOS

1.1. Espacios vectoriales

Definición 1.1.1. Un conjunto no vacío $\boldsymbol{V}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, junto con dos operaciones $+, \cdot$ es un ***espacio vectorial*** (o espacio lineal), si satisface los siguientes axiomas:

1. La operación suma, asocia a cada par de vectores (x, y) de $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ un vector $x + y$ de $\boldsymbol{V}$ y además tienen las siguientes propiedades.

V_1) Conmutativa: $x + y = y + x$

V_2) Asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$

V_3) Existe un único vector 0 de $\boldsymbol{V}$, llamado vector nulo tal que $x + 0 = 0 + x = x$

V_4) Para cada vector $x \in \boldsymbol{V}$, existe un único vector $-x \in \boldsymbol{V}$ tal que $x + (-x) = 0$

2. La operación multiplicación por escalar, asocia a cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $x \in \boldsymbol{V}$ un vector $\alpha x \in \boldsymbol{V}$ y tiene las siguientes propiedades:

V_5) $1x = x$ para todo $x \in \boldsymbol{V}$

V_6) $(\alpha_1 \alpha_2)x = \alpha_1(\alpha_2 x)$

V_7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

V_8) $(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$

1.1.1. Subespacio vectorial

Definición 1.1.2. Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un ***subespacio vectorial*** de $\boldsymbol{V}$ es un subconjunto no vacío $\boldsymbol{W}$ de $\boldsymbol{V}$, que con las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar sobre $\boldsymbol{V}$, es por si mismo un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 1.1.3. *Un subconjunto $\boldsymbol{W}$ no vacío de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sobre un campo $\mathbb{K}$, se llama subespacio vectorial de $\boldsymbol{V}$ si, y solo si cumple con las siguientes condiciones:*

i) Dado $x, y \in \boldsymbol{W} \longrightarrow (x + y) \in \boldsymbol{W}$

ii) Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in \boldsymbol{W} \longrightarrow (\alpha x) \in \boldsymbol{W}$

1.1.2. Espacio métrico

Definición 1.1.4. Sea $\boldsymbol{M}$ un conjunto no vacío, una función

$$\boldsymbol{d}: \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$$

se dice que es una ***métrica*** (o *una distancia*) si para todo $x, y, z \in \boldsymbol{M}$ se satisfacen:

$M_1)$ $d(x, y) \geq 0$

$M_2)$ $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

$M_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría)

$M_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad Triangular)

Al par ***(M, d)*** se le llama ***espacio métrico***.

Definición 1.1.5. Sea **(*M, d*)** un espacio métrico, y $x_0 \in \boldsymbol{M}$, $r > 0$, entonces la ***bola abierta*** en $\boldsymbol{M}$ de centro x_0 y radio r, que es notada como $\mathbb{B}_M$, es el conjunto

$$\mathbb{B}_M(x_0, r) = \{x \in \boldsymbol{M} \colon d(x_0, x) < r\}$$

Definición 1.1.6. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, $a \in \boldsymbol{M}$, a es llamado ***punto interior*** a $\boldsymbol{S}$ en ***(M, d)*** si existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}_M(a, r) \subset \boldsymbol{S}$.

Definición 1.1.7. Si ***(M, d)*** un espacio métrico, y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, se define el ***interior de S*** como todos los $a \in \boldsymbol{S}$ tal que a es punto interior a $\boldsymbol{S}$, y se denota ***intS***.

Definición 1.1.8. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, se dice que ***S es abierto en M*** si todos sus puntos son interiores, es decir si $S \subset$ ***intS***.

Definición 1.1.9. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, se dice que ***S es cerrado en M*** si $\boldsymbol{M} \backslash \boldsymbol{S}$ (su complemeto), es abierto en $\boldsymbol{M}$.

Definición 1.1.10. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, se dice que ***S es acotado*** si existe una bola en $\boldsymbol{M}$ que contenga a $\boldsymbol{S}$.

Definición 1.1.11. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{M}$ y $x \in \boldsymbol{M}$ no necesariamente de $\boldsymbol{S}$. Entonces x se dice que es ***punto adherente*** a $\boldsymbol{S}$ si toda bola $\mathbb{B}_M(x, r)$ contiene un punto de $\boldsymbol{S}$ por lo menos.

Definición 1.1.12. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{M}$ y $x \in \boldsymbol{M}$, entonces x se llama ***punto de acumulacion*** de $\boldsymbol{S}$ si cada $\mathbb{B}_M\,(x, r)$ contiene por lo menos un punto de $\boldsymbol{S}$ distinto de x

Definición 1.1.13. Sea (***M, d***) un espacio métrico, ***la clausura*** de $\boldsymbol{M}$ es el conjunto de todos sus puntos adherentes y se nota $\overline{\boldsymbol{M}}$.

Definición 1.1.14. Sea (***M, d***) un espacio métrico, $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$ diremos que es ***denso*** en $\boldsymbol{M}$ si $\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{S}}$.

Definición 1.1.15. Sea ***(M, d)*** un espacio métrico, una ***sucesión de puntos*** en $\boldsymbol{M}$ es una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \boldsymbol{M} \\ n &\longrightarrow f(n) = x_n \end{aligned}$$

Generalmente se denota como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.1.16. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de un espacio métrico ***(M, d)***, un punto $p \in \boldsymbol{M}$ es llamado un ***límite*** de la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall\epsilon > 0\ \ \exists k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(p, p_n) < \epsilon$ siempre que $n \geqslant k$.

Si la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite diremos que la sucesión es ***convergente***.

Definición 1.1.17. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de un espacio métrico ***(M, d)***, se dice que es ***acotada*** si el conjunto de puntos $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$ es acotado.

Teorema 1.1.18. *Sea* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{d})$ *un espacio métrico y* $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$ *entonces* $\boldsymbol{S}$ *es cerrado en* $\boldsymbol{M}$ *si y solo si* $\boldsymbol{S}$ *contiene todos los limites de sucesiones de puntos de* $\boldsymbol{S}$

Demostración. $\Rightarrow$) Suponiendo que $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$ es cerrado y sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\boldsymbol{S}$ que converge a $p \in \boldsymbol{M}$. Debemos demostrar que $p \in \boldsymbol{S}$, suponiendo por absurdo que $p \notin \boldsymbol{S}$ es decir $p \in \boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$ y como $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$ es abierto, existe un $\epsilon > 0$, tal que $\mathbb{B}_M(p,\epsilon) \subset \boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$. Como $p_n \longrightarrow p$, existe un k tal que si $n \geq k$ entonces $p_n \in \mathbb{B}_M(p,\epsilon) \subset \boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$, lo cual es absurdo porque $p_n \in \boldsymbol{S}$, luego $p \in \boldsymbol{S}$.

$\Leftarrow$) Suponiendo que $\boldsymbol{S}$ contiene todos los limites de sucesiones de puntos de $\boldsymbol{S}$, si $\boldsymbol{S}$ no fuera cerrado en $\boldsymbol{M}$, entonces $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$ no podría ser abierto, es decir se suponía que $p \in \boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$, que no es punto interior de $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{S}$, es decir que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, existiría $p_n \in \boldsymbol{S}$, tal que $d(p_n, p) < \frac{1}{n}$, si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p y $p \notin \boldsymbol{S}$ lo cual es absurdo, luego $\boldsymbol{S}$ es cerrado. $\square$

Definición 1.1.19. La sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio métrico ***(M, d)***, se dice que es ***de Cauchy***, si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$ siempre que $n, m \geq k$.

1.1.3. Espacios normados

Definición 1.1.20. Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$), una ***norma en V***, es una función $\|\,.\,\|\colon\ \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual cumple:

$N_1)$ $\| x \| \geq 0;\ \forall x \in \boldsymbol{V}$

$N_2)$ $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

$N_3)$ $\| \alpha x \| = |\alpha|\, \| x \|$; donde $\alpha \in \mathbb{K},\ x \in \boldsymbol{V}$

$N_4)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|,\ \forall (x, y) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$

$(\boldsymbol{V}, \|\|)$, recibe el nombre de ***Espacio normado***

Proposición 1.1.21. *Todo espacio normado induce una métrica.*

Demostración. Consideremos la función $\boldsymbol{d}$, definida por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}\colon\ & \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \longrightarrow d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Para todo x_1, x_2, x_3 en $\boldsymbol{V}$ se cumple :

$$
\begin{aligned}
M_1)\ d(x_1,x_2) &= \|x_1-x_2\| \geq 0 \\
M_2)\ d(x_1,x_2) &= 0 \Leftrightarrow \|x_1-x_2\| = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1-x_2=0 \\
&\Leftrightarrow x_1=x_2 \\
M_3)\ d(x_1,x_2) &= \|x_1-x_2\| \\
&= \|(-1)(x_2-x_1)\| \\
&= |-1|\,\|x_2-x_1\| \\
&= \|x_2-x_1\| \\
&= d(x_2,x_1) \\
M_4)\ d(x_1,x_2) &= \|x_1-x_2\| \\
&= \|x_1-x_2+0\| \\
&= \|x_1-x_2+x_3-x_3\| \\
&= \|(x_1-x_3)+(x_3-x_2)\| \\
&\leq \|x_1-x_3\|+\|x_3-x_2\| \\
&\leq d(x_1,x_3)+d(x_3,x_2)
\end{aligned}
$$

Por M_1), M_2), M_3) y M_4) se puede concluir que toda norma induce una métrica.

$\square$

1.1.4. Espacio con producto interno.

Definición 1.1.22. Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. una función

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \boldsymbol{V}\times \boldsymbol{V}\to \mathbb{K}$$

se dice que es un ***producto interior*** en $\boldsymbol{V}$, si $\forall x,y,z\in \boldsymbol{V}$ y $\forall\alpha\in\mathbb{K}$ satisface:

P_1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

P_2) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

P_3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

P_4) $\langle x,x\rangle \geq 0\,;\qquad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

El par $(\boldsymbol{V},\langle .,.\rangle)$ recibe el nombre de espacio ***producto interno***

Proposición 1.1.23. *Un espacio producto interno $(\boldsymbol{V},\langle .,.\rangle)$ define una norma $\|.\| : \boldsymbol{V}\longrightarrow [0,\infty)$ dada por:*

$$\|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Para todo u y v en $\boldsymbol{V}$ se cumple

$$N_1)\ \|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$N_2)\ \| u \| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

$$\begin{aligned} N_3)\ \|\alpha u\| &= \langle \alpha u, \alpha u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha \langle u, \alpha u\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\overline{\alpha}\langle u,u\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\alpha\overline{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\,\|u\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4)\ \|u+v\| &= \langle u+v, u+v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\|u\|^2 + 2\|x\|\left\|y\right\| + \|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

Por N_1), N_2), N_3) y N_4) se puede concluir que todo producto interno induce una norma.

□

Definición 1.1.24. Un espacio metrico ***(M, d)*** se dice ***Completo***, si toda sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{M}$ converge a un elemento de $\boldsymbol{M}$ ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios métricos completos).

Definición 1.1.25. Un espacio producto interno $(\boldsymbol{V}, \langle .,.\rangle)$ diremos que es un espacio pre-Hilbert y lo notaremos $(\boldsymbol{H}, \langle .,.\rangle)$. Se dice que $(\boldsymbol{H}, \langle .,.\rangle)$ es un ***espacio de Hilbert***, si es completo respecto a la métrica inducida por el producto interno y lo notaremos $\mathscr{H}$.

Definición 1.1.26. Una norma en un *espacio producto interno* satisface la *ley del paralelogramo*:

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

Demostración. Por las propiedades del producto interno tenemos

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\ &= 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \end{aligned}$$

Concluimos que si una norma no satisface la ley de paralelogramo, entonces no puede obtenerse de un producto interno.

□

Proposición 1.1.27. *En un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, se verifican*

i) La desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$$

ii) La desigualdad del triángulo,

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

Demostración. (i) Sea $y \neq 0$. Para cada escalar α tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \| x-\alpha y \|^2 &= \langle x-\alpha y, x-\alpha y \rangle \\ &= \langle x,x \rangle - \overline{\alpha}\langle x,y \rangle - \alpha[\langle y,x \rangle - \overline{\alpha}\langle y,y \rangle] \end{aligned}$$

Observemos que para $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y,x \rangle}{\langle y,y \rangle}$ obtenemos de la expresión anterior

$$0 \leq \| x \|^2 - \frac{|\langle y,x \rangle|}{\| y \|^2} \left\langle x,y \right\rangle = \| x \|^2 - \frac{|\left\langle x,y \right\rangle|^2}{\| y \|^2}$$

de aquí,

$$\begin{aligned} \frac{|\left\langle x,y \right\rangle|^2}{\| y \|^2} &\leq \| x \|^2 \\ |\left\langle x,y \right\rangle|^2 &\leq \| x \|^2 \| y \|^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos $|\langle x,y \rangle| \leq \| x \| \| y \|$

(ii) Por la desigualdad de Schwarz,

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle \\ &\leq \| x \|^2 + 2|\langle x,y \rangle| + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2 \end{aligned}$$

Que es lo que queriamos probar. □

Definición 1.1.28. Sea $(\boldsymbol{H}, \langle .,. \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, los vectores u y v en $\boldsymbol{H}$ se dicen ***ortogonales*** si se cumple que:

$$\langle u,v \rangle = 0$$

Lo cual se nota $u \perp v$.

Definición 1.1.29. Sea $(\boldsymbol{H}, \langle .,. \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ subconjuntos de $\boldsymbol{H}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es ***ortogonal*** a $\boldsymbol{B}$ si $u \perp v$ para todo $u \in \boldsymbol{A}$, y $v \in \boldsymbol{B}$.

Lo anterior se nota $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$

Definición 1.1.30. Sea $(\boldsymbol{H}, \langle .,. \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, y $\boldsymbol{A}$ un subconjunto de $\boldsymbol{H}$, el ***complemento ortogonal*** de $\boldsymbol{A}$ es el conjunto de todos los $u \in \boldsymbol{H}$ tal que $u \perp \boldsymbol{A}$, y se nota como

$$\boldsymbol{A}^{\perp} = \{u \in \boldsymbol{H} / \langle u,v \rangle = 0 \ \ \forall v \in \boldsymbol{A}\}$$

Proposición 1.1.31. *En un espacio pre-Hilbert, si $u \perp v$, entonces se cumple*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos probar. □

Definición 1.1.32. Sea ***V*** un espacio vectorial, ***U*** y ***W*** subespacios de ***V***, diremos que ***V*** es la ***suma directa*** de ***U*** y ***W***, notado por ***V=U***$\bigoplus$ ***W***, si

i) $\forall v \in \boldsymbol{V},\ v = u + w$ de manera única con $u \in \boldsymbol{U}$ y $w \in \boldsymbol{W}$.

ii) $\boldsymbol{U} \bigcap \boldsymbol{W} = \{0\}$

Definición 1.1.33. Sea $(\boldsymbol{H}, \langle .,.\rangle)$ un espacio pre-Hilbert, ***U*** y ***W*** subconjuntos de ***H***, diremos que ***H*** es la ***suma directa ortogonal*** de ***U*** y ***W*** si

i) ***V=U***$\bigoplus$ ***W***

ii) $\boldsymbol{U} \perp \boldsymbol{W}$

1.2. Operadores Lineales

Definición 1.2.1. Dados ***V*** y ***W*** espacios vectoriales no vacíos sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{D(T)} \subset \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{R(T)} \subset \boldsymbol{W}$ un operador, se dice que es ***lineal*** si

L_1) El dominio ***D(T)*** es un espacio vectorial y el rango ***R(T)*** cae sobre un espacio vectorial.

L_2) $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \boldsymbol{D}$
$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in \boldsymbol{X},\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Se indica como $\mathscr{L}$ ***(V,W)*** al conjunto de todos los operadores lineales de ***V*** en ***W***. Si ***V = W***, se escribe $\mathscr{L}(\boldsymbol{V})$.

1.3. Clases de Operadores

1.3.1. Operador acotado

Definición 1.3.1. Sean ***V*** y ***W*** dos espacios vectoriales, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{V,W})$ es llamado ***operador acotado***, si existe un $c > 0$ tal que:

$$\| T(x) \|_W \quad \leq c \| x \|_V$$

Se indica como $\mathscr{B}$ ***(V,W)*** al conjunto de todos los operadores acotados de ***V*** en ***W***, esto es:

$$\mathscr{B}\boldsymbol{(V,W)} = \{\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W};\ \boldsymbol{T}\, es\ acotado\}$$

Definición 1.3.2. Sean $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ dos espacios vectoriales $\boldsymbol{T} \in \mathscr{B}\boldsymbol{(V,W)}$ puesto que existe un $c > 0$ tal que

$$\| T(x) \|_W \quad \leq c \| x \|_V$$

para todo $x \in \boldsymbol{V}$, entonces

$$\frac{\| T(x) \|_W}{\| x \|_V} \leq c, \; con, x \neq 0$$

Consideremos el conjunto

$$\boldsymbol{M} := \left\{ \frac{\| T(x) \|_W}{\| x \|_V} \leq c, \; x \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}$$

$\boldsymbol{M}$ es un subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente por c, por lo tanto existe el $\mathbf{sup}(\mathbf{M})$, el cual es llamado ***la norma de T*** y se nota $\| \boldsymbol{T} \|$, es decir

$$\| T \| = \mathbf{sup}(\mathbf{M}) = \mathbf{sup} \left\{ \frac{\| T(x) \|_W}{\| x \|_V} \leq c, \; x \neq 0 \right\}$$

Definición 1.3.3. Sea $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}\boldsymbol{(V,W)}$, el ***Kernel*** de $\boldsymbol{T}$, notado por $\boldsymbol{KerT}$, es el conjunto de $x \in \boldsymbol{V}$ tal que $T(x) = 0_W$, es decir

$$\boldsymbol{KerT} = \{ x \in \boldsymbol{V} \,/\, T(x) = 0_W \}$$

Definición 1.3.4. Un ***funcional lineal f***, es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial **V**, y rango en el campo escalar $\mathbb{C}$, esto es,

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \to \mathbb{C}$$

1.3.2. Representación de Riesz

Teorema 1.3.5. *Si* $\boldsymbol{f}$ *es un funcional lineal acotado definido en un espacio de Hilbert* $\mathscr{H}$ *, entonces existe un único* z *en* $\mathscr{H}$ *que depende de* $\boldsymbol{f}$*, tal que la norma del funcional coincide con la norma de* z*, además* $\boldsymbol{f}$ *se define de la forma*

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in \mathscr{H}$$

Demostración. Para el caso en que $\boldsymbol{f} = 0$, el elemento $z = 0$ cumple lo deseado:

$$f(x) = 0 = \langle x, 0 \rangle \quad \forall x \in \mathscr{H} \qquad y \quad \| f \| = 0 = \| z \|$$

Supóngase que $\boldsymbol{f} \neq 0$. El z que se busca debe estar en $(\boldsymbol{Ker f})^{\perp}$ pues tendría que ocurrir

$$\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in \boldsymbol{Ker f}$$

Por ser $\boldsymbol{f}$ un funcional lineal acotado, se tiene que $\boldsymbol{Ker f}$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$. También, $\mathscr{H} = \boldsymbol{Ker f} \oplus \boldsymbol{Ker f}^{\perp}$. Como $f \neq 0$, el $\boldsymbol{Ker f} \neq \mathscr{H}$, con lo que $(\boldsymbol{Ker f})^{\perp} \neq \{0\}$. Con ésto se garantiza la existencia de un elemento $z_0 \neq 0$ en $(\boldsymbol{Ker f})^{\perp}$.

Sea x cualquier elemento en $\mathscr{H}$, hágase $x_1 := f(x) z_0 - f(z_0) x$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(f(x) z_0 - f(z_0) x) \\ &= f(f(x) z_0) - f(f(z_0) x) \\ &= f(x) f(z_0) - f(z_0) f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que x_1 pertenece al $\boldsymbol{Ker f}$. Por pertenecer x_1 al $\boldsymbol{Ker f}$ y z_0 al $(\boldsymbol{Ker f})^{\perp}$ lo siguiente es válido:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_1, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0\rangle - \langle f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0\rangle - f(z_0)\langle x, z_0\rangle. \end{aligned}$$

Como $z_0 \neq 0$

$$f(x) = \frac{f(z_0)\langle x, z_0\rangle}{\| z_0 \|^2} = \frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2}\langle x, z_0\rangle = \langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\| z_0 \|^2} z_0\rangle$$

luego para $z := \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\| z_0 \|^2} z_0$

$$f(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in \mathscr{H}$$

El z que se acaba de encontrar es único. En efecto, sea z_1 en $\mathscr{H}$ tal que $f(x) = \langle x, z_1\rangle$ para todo x en $\mathscr{H}$, entonces $\langle x, z\rangle = \langle x, z_1\rangle$, de aquí $\langle x, z\rangle - \langle x, z_1\rangle = 0$, es decir, $\langle x, z - z_1\rangle = 0$, de donde $z - z_1 = 0$ por lo tanto $z = z_1$, es decir que cuando $\langle x, z\rangle = \langle x, z_1\rangle$ para todo x, no queda más que $z = z_1$.

Finalmente para la igualdad en las normas observe que

$$\| z \|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leq \| f \| \| z \|$$

Por ser z distinto de cero, $\| z \| \leq \| f \|$. Por otro lado, por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} |f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \| x \| \| z \| \qquad \forall x \in \mathscr{H} \\ \frac{|\langle x, z\rangle|}{\| x \|} \leq \| z \| \end{aligned}$$

pero $\| f \| = \dfrac{|\langle x, z\rangle|}{\| x \|}$, así que $\| f \| \leq \| z \|$, por lo que se concluye que $\| f \| = \| z \|$

□

1.3.3. Operador adjunto

Teorema 1.3.6. *Sea $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Existe un único operador lineal $\boldsymbol{T_1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que:*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T_1 y\rangle \text{ para todo } x,\ y \text{ en } \mathscr{H} \quad \mathit{1)}$$

El operador $\boldsymbol{T_1}$ es llamado el ***adjunto de T*** y se nota como $\boldsymbol{T^*}$. Así que *1)* queda de la siguiente forma $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$.

1.3.4. Operador autoadjunto

Definición 1.3.7. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es llamado ***autoadjunto*** (o ***hermítico***) si coincide con su adjunto, es decir:

$$\boldsymbol{T^* = T}$$

1.3.5. Operador isométrico

Definición 1.3.8. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es llamada ***isometría,*** si para $x, y \in \mathscr{H}$ se cumple:

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

1.3.6. Operador unitario

Definición 1.3.9. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{U} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice ***unitario,*** si es una isometría sobreyectiva.

$i)$ $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle;\ \forall x, y \in \mathscr{H}$.

$ii)$ $R(U) = \mathscr{H}$

1.3.7. Operador normal

Definición 1.3.10. Sea $(\boldsymbol{H}, \langle ., .\rangle)$ un espacio producto interno de dimensión finita, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ se dice ***normal*** si conmuta con su adjunto, es decir:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$$

1.3.8. Operador positivo

Definición 1.3.11. Un operador $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice ***positivo*** si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. El cual se denota en este caso $\boldsymbol{T} \geq 0$.

Observación 1.3.12. Si $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ son tales que $\langle (T_1 - T_2)x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathscr{H}$, lo cual se nota como $\boldsymbol{T}_1 \geq \boldsymbol{T}_2$.

Ejemplo 1. El operador identidad $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H}$ es positivo.

En efecto:

$$\langle Ix, x\rangle = \langle x, x\rangle \geq 0$$

por lo tanto $\boldsymbol{I}$ es positivo.

1.3.9. Operador simétrico

Definición 1.3.13. Sea $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice ***simétrico*** si su dominio ***D(T)*** es denso en $\mathscr{H}$ y para (x, y) en ***D(T)*** se tiene:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

CAPÍTULO 2

FORMAS SESQUILINEALES ASOCIADAS A ESPACIOS DE HILBERT

En lo que sigue $\mathscr{H}$ denotara un espacio de Hilbert, sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

2.1. Formas Sesquilineales en Espacios de Hilbert

Definición 2.1.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, una **forma sesquilineal** sobre $\mathscr{H}$ es una aplicación

$$\boldsymbol{B}: \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

La cual cumple para todo $u, v, w \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, las siguientes propiedades

Q_1) $B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$

Q_2) $B(\alpha u, w) = \alpha B(u, v)$

Q_3) $B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$

Q_4) $B(u, \alpha v) = \overline{\alpha} B(u, v)$

Observación 2.1.2. Notaremos $B(u,u)$ como $B(u)$, es decir, $B(u,u) = B(u)$.

Ejemplo 2. sea $\mathscr{H} = l^2$ y $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) = \left\{u = \left(\xi_j\right) \in H / \sum \left|\alpha_j\right| \left|\xi_j\right|^2 < \infty\right\}$ y $\boldsymbol{B}$ definida de la forma:

$$\boldsymbol{B}: l^2 \times l^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow B\left(\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \overline{\nu_n}$$

donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales. Entonces $\boldsymbol{B}$ es una forma sesquilineal.

Demostración. sea $u, v, w \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. De este modo tenemos:

$$u = \left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad v = \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad w = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned}
Q_1)\ B(u+v,w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\mu_n+\nu_n\right)\overline{\omega_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\omega_n}+\lambda_n\nu_n\overline{\omega_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\omega_n}+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\nu_n\overline{\omega_n} \\
&= B(u,w)+B(v,w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2)\ B(\alpha u,v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\alpha\mu_n\overline{\nu_n} \\
&= \alpha\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\nu_n} \\
&= \alpha B(u,v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3)\ B(u,v+w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{(\nu_n+\omega_n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\left(\overline{\nu_n}+\overline{\omega_n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\nu_n}+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\omega_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\nu_n}+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\omega_n} \\
&= B(u,w)+B(v,w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4)\ B(u,\alpha v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\alpha\nu_n} \\
&= \overline{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\mu_n\overline{\nu_n} \\
&= \overline{\alpha}B(u,v)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{B}$ es una forma sesquilineal. □

Definición 2.1.3. Dos formas sesquilineales $\boldsymbol{B}_1 : \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1) \to \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{B}_2 : \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_2) \to \mathbb{C}$ se dicen iguales ($\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$) si y solo si

i) $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_2) = \mathfrak{D}$,

ii) $B_1(u,v) = B_2(u,v)$, para todo $u, v \in \mathfrak{D}$

Definición 2.1.4. Sean $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ dos formas sesquilineales tales que $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1) \subset \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_2)$. Se dice que $\boldsymbol{B}_2$ es una extensión de $\boldsymbol{B}_1$, si para todo $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1)$ se cumple que $B_1(u,v) = B_2(u,v)$, y también $\boldsymbol{B}_1$ es una restricción de $\boldsymbol{B}_2$ (en símbolos $\boldsymbol{B}_2 \supset \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_1 \subset \boldsymbol{B}_2$).

Proposición 2.1.5. *si $\langle .,. \rangle : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un producto interno entonces $\langle .,. \rangle$ es una forma sesquilineal.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{B}$ definida por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(u,v) &\longrightarrow B(u,v) = \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

Luego para $u, v, w \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
Q_1)\ B(u+v,w) &= \langle u+v,w\rangle \\
&= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \\
&= B(u,w)+B(v,w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2)\ B(\alpha u,v) &= \langle \alpha u,v\rangle \\
&= \alpha\langle u,v\rangle \\
&= \alpha B(u,v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3)\ B(u,v+w) &= \langle u,v+w\rangle \\
&= \overline{\langle v+w,u\rangle} \\
&= \overline{\langle v,u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle} \\
&= \langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle \\
&= B(u,v)+B(u,w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_4)\ B(u,\alpha v) &= \langle u,\alpha v\rangle \\
&= \overline{\langle \alpha v,u\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\overline{\langle v,u\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\langle u,v\rangle \\
&= \overline{\alpha}B(u,v)
\end{aligned}
$$

Por Q_1),Q_2),Q_3) y Q_4) la función producto interno es una forma sesquilineal

□

Definición 2.1.6. Para cada forma sesquilineal $\boldsymbol{B}$ se le asocia una forma cuadrática $\boldsymbol{B}' : \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$B'(u) = B(u,u) \qquad \forall (u,u) \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$$

Proposición 2.1.7. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal en $\mathscr{H}$, se cumple para u y v en $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ que:*

$i)$ $B'(u+v) = B'(v+u)$

$ii)$ $B'(u-v) = B'(v-u)$

$iii)$ $-iB'(v+iu) = -iB'(u-iv)$

$iv)$ $iB'(v-iu) = iB'(u+iv)$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
i)\ B'(u+v) &= B(u+v,u+v) \\
&= B(u,u+v)+B(v,u+v) \\
&= B(u,u)+B(u,v)+B(v,u)+B(v,v) \\
&= B(v,v)+B(u,v)+B(v,u)+B(u,u) \\
&= B(v+u,v)+B(v+u,u) \\
&= B(v+u,v+u) \\
&= B'(v+u)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $B'(u+v) = B'(v+u)$

$$
\begin{aligned}
ii)\ \ B'(u-v) &= B(u-v,u-v)\\
&= B(u,u-v)-B(v,u-v)\\
&= B(u,u)-B(u,v)-[B(v,u)-B(v,v)]\\
&= B(v,v)-B(u,v)-[B(v,u)-B(u,u)]\\
&= B(v-u,v)-B(v-u,u)\\
&= B(v-u,v-u)\\
&= B'(v-u)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $B'(u-v)=B'(v-u)$

$$
\begin{aligned}
iii)\ \ -iB'(v+iu) &= -iB(iu+v,iu+v)\\
&= -iB(i(u-iv),i(u-iv))\\
&= (-i)(i)B(u-iv,i(u-iv))\\
&= B(u-iv,i(u-iv))\\
&= -iB(u-iv,u-iv)\\
&= -iB'(u-iv)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $-iB'(v+iu)=-iB'(u-iv)$

$$
\begin{aligned}
iv)\ \ iB'(v-iu) &= iB(iu-v,iu-v)\\
&= iB(i(u+iv),i(u+iv))\\
&= -B(u+iv,i(u+iv))\\
&= iB(u+iv,u+iv)\\
&= iB'(u+iv)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $iB'(v-iu)=iB'(u+iv)$ □

Definición 2.1.8. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ formas sesquilineales sobre $\mathscr{H}$, y $\alpha\in\mathbb{C}$, la suma y el producto esta definido como:

$i)$ $(B_1+B_2)(u,v) = B_1(u,v)+B_2(u,v);$

$ii)$ $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1)\cap\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_2)$

$iii)$ $(\alpha B)(u,v)=\alpha B(u,v),\quad \mathfrak{D}(\alpha\boldsymbol{B})=\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$

Además la forma unitaria $\boldsymbol{I}$ es por definición $I(u,v)=(u,v)$ con $\mathfrak{D}(\boldsymbol{I})=\mathscr{H}$ y la forma cero $0(u,v)=0$ con $\mathfrak{D}(0)=\mathscr{H}$
Notaremos $\boldsymbol{B}+\alpha\boldsymbol{I}$ como $\boldsymbol{B}+\alpha$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(B+\alpha I)(u,v) &= B(u,v)+\alpha I(u,v), \qquad \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}_1+\alpha)=\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})\\
&= B(u,v)+\alpha(u,v)
\end{aligned}
$$

Definición 2.1.9. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal sobre $\mathscr{H}$ se dice que es acotada si $\exists k > 0$ tal que $\forall u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$,:

$$|B(u,v)| \leq k \|u\| \|v\|$$

Si la forma $\boldsymbol{B}$ no satisface la ecuación anterior, se dirá que no es acotada. El conjunto de formas sesquilineales acotadas asociadas a espacios de Hilbert se notara como $\mathscr{A}(\mathscr{H})$

Definición 2.1.10. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$, entonces existe un $k > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathscr{H}$ se cumple:

$$|A(u,v)| \leq k \|u\| \|v\|$$

además si $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A}) \setminus \{0\} \subseteq \mathscr{H}$ se tiene que:

$$\frac{|A(u,v)|}{\|u\| \|v\|} \leq k$$

Ahora consideremos el conjunto

$$\boldsymbol{U} := \left\{ u, v \in \mathfrak{D}(A) \setminus \{0\} : \frac{|A(u,v)|}{\|u\| \|v\|} \leq k \right\} \subset \mathbb{R}$$

$\boldsymbol{U}$ es un subconjunto no vacío de números Reales acotado superiormente por k, por lo tanto existe el $\mathbf{sup}(\boldsymbol{U})$, el cual es llamado ***la norma de A*** y se nota $\|\boldsymbol{A}\|$, es decir

$$\|\boldsymbol{A}\| = \mathbf{sup}(\boldsymbol{U}) = \sup_{(u,v)\in\mathfrak{D}(A)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{|A(u,v)|}{\|u\| \|v\|} \leq k \right\}$$

Definición 2.1.11. (Identidad de polarización)
Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal sobre $\mathscr{H}$ y B' su forma cuadrática asociada, entonces para todo $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\ B'(u+v) = && B(u+v, u+v) \\
& && B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) + B(v,v) \\
&\mathbf{2)}\ -B'(u-v) = && -B(u-v, u-v) \\
& && -[B(u,u) - B(u,v) - (B(v,u) - B(v,v))] \\
& && -B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) - B(v,v) \\
&\mathbf{3)}\ iB'(u+iv) = && iB(u+iv, u+iv) \\
& && iB(u,u) + iB(u,iv) + iB(iv,u) + iB(iv,iv) \\
& && iB(u,u) + B(u,v) - B(v,u) + iB(v,v) \\
&\mathbf{4)}\ -iB'(u-iv) = && -iB(u-iv, u-iv) \\
& && -[iB(u,u) - iB(u,iv) - (iB(iv,u) - iB(iv,iv))] \\
& && -iB(u,u) + iB(u,iv) + iB(iv,u) - iB(iv,iv) \\
& && -iB(u,u) + B(u,v) - B(v,u) - iB(v,v)
\end{aligned}$$

de aquí se obtiene expresión

$$B(u,v) = \frac{1}{4}\left[B'(u+v) - B'(u-v) + iB'(u+iv) - iB'(u-iv)\right]$$

La cual es llamada ***identidad de polarización***.

Definición 2.1.12. Una forma sesquilineal ***S*** se dice que es ***simétrica***, si

$$S(u,v) = \overline{S(v,u)}, \quad \forall u,v \in \mathfrak{D}(S)$$

Proposición 2.1.13. *Nótese que un producto interno, es una forma sesquilineal simétrica.*

Demostración. Sea ***S*** definida

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u,v) &\longrightarrow S(u,v) = \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{S(v,u)} &= \overline{\langle v,u\rangle} \\ &= \overline{\overline{\langle u,v\rangle}} \\ &= \langle u,v\rangle \\ &= S(u,v) \end{aligned}$$

Por lo tanto ***S*** es simétrica. □

Teorema 2.1.14. ***B*** *es simétrica si y sólo si* $B(u,u) \in \mathbb{R}$*, para todo* $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$

Demostración. ⇒] Si ***B*** es simétrica, entonces tenemos para todo $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$

$$B'(u) = B(u) = B(u,u) = \overline{B(u,u)} = \overline{B'(u)} = \overline{B(u)}$$

Como $B(u) = \overline{B(u)}$, luego $B(u) \in \mathbb{R}$
⇐] usando la identidad de polarización tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{B(v,u)} &= \overline{\frac{1}{4}\left(B'(v+u) - B'(v-u) + iB'(v+iu) - iB'(v-iu)\right)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\overline{B'(v+u)} - \overline{B'(v-u)} + \overline{iB'(v+iu)} - \overline{iB'(v-iu)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(B'(v+u) - B'(v-u) - iB'(v+iu) + iB'(v-iu)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(B'(u+v) - B'(u-v) - iB'(u-iv) + iB'(u+iv)\right) \\ &= B(u,v) \end{aligned}$$

De este modo $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$. Por lo tanto ***B*** es simétrica. □

Definición 2.1.15. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B} : \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, definimos la forma adjunta de ***B*** como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^* : \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u,v) &\longrightarrow B^*(u,v) = \overline{B(v,u)} \end{aligned}$$

Proposición 2.1.16. ***B*** *es simétrica si y sólo si* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$.

Demostración. $\Rightarrow$] Si $\boldsymbol{B}$ es simétrica entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$

$$\begin{aligned} B^*(u,v) &= \overline{B(v,u)} \\ &= \overline{\overline{B(u,v)}} \\ &= B(u,v) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$.

$\Leftarrow$] Si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$ entonces $\boldsymbol{B}$ es simétrica

$$\begin{aligned} \overline{B(u,v)} &= B^*(v,u) \\ &= B(v,u) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{B}$ es simétrica. $\square$

Ejemplo 3. Dado $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, entonces se puede asociar a $\boldsymbol{T}$ una forma sesquilineal tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u,v) &\longrightarrow B(u,v) = \langle Tu, v\rangle \qquad \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{T}) \end{aligned}$$

Demostración. sea $u, v, w \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \quad \alpha \in \mathbb{C}$ Entonces:

$$\begin{aligned} Q_1)\ B(u+v,w) &= \langle T(u+v), w\rangle \\ &= \langle T(u)+T(v), w\rangle \\ &= \langle T(u), w\rangle + \langle T(v), w\rangle \\ &= \langle T(u), w\rangle + \langle T(v), w\rangle \\ &= B(u,w) + B(v,w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2)\ B(\alpha u, v) &= \langle T(\alpha u), v\rangle \\ &= \langle \alpha T(u), v\rangle \\ &= \alpha \langle T(u), v\rangle \\ &= \alpha B(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3)\ B(u, v+w) &= \langle T(u), v+w\rangle \\ &= \overline{\langle v+w, T(u)\rangle} \\ &= \overline{\langle v, T(u)\rangle + \langle w, T(u)\rangle} \\ &= \overline{\langle v, T(u)\rangle} + \overline{\langle w, T(u)\rangle} \\ &= \langle T(u), v\rangle + \langle T(u), w\rangle \\ &= B(u,v) + B(u,w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_4)\ B(u, \alpha v) &= \langle T(u), \alpha v\rangle \\ &= \overline{\langle v\alpha, T(u)\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\overline{\langle v, T(u)\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle T(u), v\rangle \\ &= \overline{\alpha} B(u,v) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{B}$ es una forma sesquilineal.

Además veamos que si $\boldsymbol{T}$ es simétrico, luego $\boldsymbol{B}$ es simétrico

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \langle T(u), v\rangle \\ &= \langle u, T(v)\rangle \\ &= \overline{\langle T(v), u\rangle} \\ &= \overline{B(v,u)} \\ &= B^*(u,v) \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.17. Para dos formas sesquilineales simétricas $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ en $\mathscr{H}$, y para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tenemos para $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S}_1) \cap \mathfrak{D}(\boldsymbol{S}_2)$,

a) $((\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2))^* = \boldsymbol{S}_1^* + \boldsymbol{S}_2^*$

Demostración.

$$\begin{aligned} ((S_1+S_2)(u,v))^* &= \overline{(S_1+S_2)(v,u)} \\ &= \overline{S_1(v,u)} + \overline{S_2(v,u)} \\ &= S_1^*(u,v) + S_2^*(u,v). \end{aligned}$$

□

b) $(\alpha \boldsymbol{S}_1)^* = \overline{\alpha} \boldsymbol{S}_1^*$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\alpha S_1(u,v))^* &= \overline{\alpha(S_1)(v,u)} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{S_1(v,u)} \\ &= \overline{\alpha} S_1^*(u,v) \end{aligned}$$

□

c) $\left(\boldsymbol{S}_1^*\right)^* = \boldsymbol{S}_1$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left(S_1^*(u,v)\right)^* &= \overline{S_1^*(v,u)} \\ &= \overline{\overline{S_1(u,v)}} \\ &= S_1(u,v) \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.18. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, y $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal sobre $\mathscr{H}$. Se define la parte real e imaginaria de $\boldsymbol{B}$ respectivamente como:

$$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^*\right)$$

$$\mathbf{Im}\ \boldsymbol{B} = \frac{1}{2i}\left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^*\right)$$

Donde $\mathfrak{D}(\mathbf{Re}\,\boldsymbol{B}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) = \mathfrak{D}(\mathbf{Im}\,\boldsymbol{B})$.

Proposición 2.1.19. *si **S** es una forma sesquilineal simétrica entonces, **ReS** y **ImS** son simétricas.*

Demostración. Tenemos que mostrar que:

a)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Re}\,\boldsymbol{S})^*(u,v) &= \left(\frac{1}{2}(S+S^*)(u,v)\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{2}S(u,v)+\frac{1}{2}S^*(u,v)\right)^* \\
&= \frac{1}{2}S^*(u,v)+\frac{1}{2}\left(S^*\right)^*(u,v) \\
&= \frac{1}{2}S^*(u,v)+\frac{1}{2}\overline{S^*(v,u)} \\
&= \frac{1}{2}S^*(u,v)+\frac{1}{2}\overline{\overline{S(u,v)}} \\
&= \frac{1}{2}\left(S+S^*\right)(u,v) \\
&= \mathbf{Re}\,\boldsymbol{S}(u,v)
\end{aligned}$$

Por lo tanto **Re*S*** es simétrica.

b)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Im}\boldsymbol{S})^*(u,v) &= \left(\frac{1}{2i}\left(S-S^*\right)(u,v)\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{2i}S(u,v)-\frac{1}{2i}S^*(u,v)\right)^* \\
&= -\frac{1}{2i}S^*(u,v)+\frac{1}{2i}\left(S^*\right)^*(u,v) \\
&= -\frac{1}{2i}S^*(u,v)+\frac{1}{2i}\overline{S^*(v,u)} \\
&= -\frac{1}{2i}S^*(u,v)+\frac{1}{2i}\overline{\overline{S(u,v)}} \\
&= \frac{1}{2i}\left(S-S^*\right)(u,v) \\
&= \mathbf{Im}\boldsymbol{S}(u,v).
\end{aligned}$$

□

*Por lo tanto **ImS** es simétrica.*

Así mismo se tiene que,

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{Re}\boldsymbol{S} + i\,\mathbf{Im}\boldsymbol{S}$$

Además para $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$

$$\mathbf{Re}\,S(u,u) = \frac{1}{2}\left(S(u,u)+\overline{S(u,u)}\right) = \mathbf{Re}\left(S'(u)\right) = \mathbf{Re}\,(S(u)) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{Im}S(u,u) = \frac{1}{2i}\left(S(u,u)-\overline{S(u,u)}\right) = \mathbf{Im}\left(S'(u)\right) = \mathbf{Im}\,(S(u)) \tag{2.2}$$

2.2. Semiacotaciones

Dada una forma sesquilineal simétrica $\boldsymbol{S}$, su forma cuadrática $\boldsymbol{S}'$ tiene sus valores en los números reales, es decir $\boldsymbol{S}'(u) \in \mathbb{R}$, esto nos motiva a hablar de formas acotadas inferiormente y superiormente. Pero sabemos que en general una forma $\boldsymbol{B}$ no es simétrica, entonces su forma cuadrática $\boldsymbol{B}'$ está en los números complejos, de esta manera tendríamos que hablar de formas acotadas a la izquierda o a la derecha. Diremos que una forma sesquilineal simétrica $\boldsymbol{S}$ es no negativa si $\boldsymbol{S}'(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$, (en símbolos $S \geq 0$) y se dice que es positiva cuando $\boldsymbol{S}'(u) > 0$ para todo $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$ con $u \neq 0$ (en símbolos $\boldsymbol{S} > 0$).

Definición 2.2.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal sobre $\mathscr{H}$. El **rango numérico**, $\mathbf{W}(\boldsymbol{B})$ de $\boldsymbol{B}$ es dado por

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{B}) = \{u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}), \|u\| = 1\} \subseteq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$$

Observemos que por el Teorema **2.1.13**, $\boldsymbol{B}$ es simétrica si y sólo si $\mathbf{W}(\boldsymbol{B}) \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 2.2.2. Una forma simétrica $\boldsymbol{S}$ en $\mathscr{H}$ es acotada inferiormente si el rango numérico $\mathbf{W}(\boldsymbol{S})$ es acotado inferiormente, esto es si $\mathbf{W}(\boldsymbol{S})$ es un intervalo finito o semi-infinito del eje real que es acotado a la izquierda.

Equivalentemente: para algún $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$(\forall u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})) \qquad \boldsymbol{S}(u) \geq \gamma$$

En este caso escribiremos $\boldsymbol{S} \geq \gamma$. El mayor número γ con esta propiedad es llamado cota inferior de $\boldsymbol{S}$, y se puede escribir $\gamma_{\boldsymbol{S}}$. Obviamente también podemos definir forma acotada superiormente y cota superior. Las nociones de acotado y semiacotado están relacionados de la siguiente manera.

Proposición 2.2.3. *Una forma simétrica* $\mathbf{S}$ *es acotada si y sólo si es acotada inferiormente y superiormente*

Demostración. $\Rightarrow$] Consideremos el rango numérico de $\boldsymbol{S}$, $\mathbf{W}(\boldsymbol{S}) = \{S(u) \,/\, u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S}), \|u\| = 1\}$, ahora por la desigualdad de la **definición 2.1.8**, tenemos que para todo $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$ con $\|u\| = 1$,

$$|S(u)| \leq \|S\|$$

entonces $\mathbf{W}(\boldsymbol{S}) \subseteq (-\|\boldsymbol{S}\|, \|\boldsymbol{S}\|)$, de este modo $\boldsymbol{S}$ es acotado inferiormente y superiomente.

$\Leftarrow$] Sea $u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$, y consideremos $|S(u,v)|$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$, tenemos que $|S(u,v)| = |S(\lambda u, v)|$, entonces podemos asumir sin perdida de generalidad que $|S(\lambda u, v)| \in \mathbb{R}$.
Como $S(u)$ es de valor real, por la identidad de polarización, tenemos

$$S(u,v) = \frac{1}{4}(S(u+v) - S(u-v))$$

Ahora como $\boldsymbol{S}$ es acotado inferiormente y superiormente, entonces para algún $M \in \mathbb{R}$ se tiene que,

$|S(u)| \leq M\|u\|^2$, para todo $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|S(u,v)| &= \frac{1}{4}|S(u+v)-S(u-v)| \\
&\leq \frac{1}{4}|S(u+v)|+|S(u-v)| \\
&\leq \frac{1}{4}M(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2) \\
&\leq \frac{2M}{4}(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2) \\
&\leq \frac{M}{2}(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}M\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right).
\end{aligned}
$$

usando la sustitución

- $u \to \sqrt{\frac{\|v\|}{\|u\|}}u$
- $v \to \sqrt{\frac{\|u\|}{\|v\|}}v$

resulta

$$
\begin{aligned}
|S(u,v)| &= S\left(\sqrt{\frac{\|v\|}{\|u\|}}u, \sqrt{\frac{\|u\|}{\|v\|}}v\right) \\
&\leq \frac{1}{2}M\left(\frac{\|v\|}{\|u\|}\|u\|^2+\frac{\|u\|}{\|v\|}\|v\|^2\right) \\
&= M\|u\|\|v\|
\end{aligned}
$$

Luego $\boldsymbol{S}$ es acotado con norma $\|\boldsymbol{S}\| \leq M$, como queríamos.

□

Observación 2.2.4. Para una forma simétrica $\boldsymbol{S}$, se puede afirmar que, si $|S(u)| \leq M\|u\|^2, \forall u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$; entonces $|S(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|\ \forall u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$.

Además tenemos la generalización de la **desigualdad de Schwartz**: Sean $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{F}$ formas simétricas, donde $\mathfrak{D}(\boldsymbol{S}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{F})$ y asumamos que $\boldsymbol{F}$ es no negativa. Luego,

si $F(u) \leq MS(u), \forall u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$ entonces $|F(u,v)| \leq M\sqrt{S(u)S(v)}\ \forall u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$

Es necesario mencionar algunas definiciones que estén relacionadas con el rango numérico, pero para formas sesquilineales no simétricas.

Definición 2.2.5. Una forma $\boldsymbol{B}$ se dice que es **acotada a la izquierda** si para algún $\gamma \in \mathbb{R}$, el rango numérico $\mathbf{W}(\boldsymbol{B})$ es un subconjunto del semiplano de la forma $\mathbf{Re}\,\zeta \geq \gamma$, es decir

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{B}) \subseteq \left\{\zeta \in \mathbb{C} / \mathbf{Re}\,\zeta \geq \gamma\right\}$$

Particularizando la definición anterior, tenemos

Definición 2.2.6. Una forma sesquilineal $\boldsymbol{B}$ se dice que es **sectorialmente acotada a la izquierda (o sectorial)** si $\mathbf{W}(\boldsymbol{B})$ está contenido en un sector, es decir para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{B}) \subseteq \left\{\zeta \in \mathbb{C} / \left|\mathbf{Arg}\left(\zeta \geq \gamma\right)\right| \leq \theta\right\}$$

γ es llamado un **vértice** de $\boldsymbol{B}$ y θ un **semiángulo** de $\boldsymbol{B}$

Proposición 2.2.7. *Sea $\boldsymbol{B}$ una forma sesquilineal sectorial con vértice γ y semiángulo θ, entonces para $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, tenemos*

1. $\mathbf{Re}B(u) \geq \gamma \|u\|^2 = \gamma I(u)$
2. $|\mathbf{Im}B(u)| \leq \left(\mathbf{Re}B(u) - \gamma \|u\|^2\right)\tan\theta = \left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u)\tan\theta$

Demostración. Se tiene que $\{B(u) / u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}), \|u\| = 1\} \subseteq \left\{\zeta \in \mathbb{C} / \left|\mathbf{Arg}\left(\zeta - \gamma\right)\right| \leq \theta\right\}$, luego se tiene $\left|\mathbf{Arg}\left(B(u) - \gamma\right)\right| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\forall u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ con $\|u\| = 1$, esto implica que $\mathbf{Re}\left(B(u) - \gamma\right) \geq 0$, es decir $\mathbf{Re}(B(u)) \geq \gamma$ y también $\mathbf{Re}(B(u)) \geq \gamma \|u\|^2$ desde que $\|u\| = 1$

Ahora de la ecuación 2.1, tenemos que $\mathbf{Re}B(u) = \mathbf{Re}(B(u)) \geq \gamma \|u\|^2$ por lo tanto $\mathbf{Re}B(u) \geq \gamma \|u\|^2 = \gamma I(u)$

De la ecuación 2.2, y teniendo en cuenta que $\gamma \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbf{Im}B(u) = \mathbf{Im}(B(u)) = \mathbf{Im}\left(B(u) - \gamma\right)$ entonces

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Im}B(u)| &= \left|\mathbf{Im}\left(B(u) - \gamma\right)\right| \\
&= \mathbf{Re}\left(B(u) - \gamma\right)\tan\left|Arg\left(B(u) - \gamma\right)\right| \\
&\leq \mathbf{Re}\left(B(u) - \gamma\right)\tan\theta \\
&= \mathbf{Re}\left(B(u) - \gamma \|u\|^2\right)\tan\theta \\
&= \left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u)\tan\theta.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.2.8. como $\mathbf{Re}B - \gamma I \geq 0$, y por la generalización de la desigualdad de Schwartz, se tiene que para $\forall u, v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$,

$$\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u, v) \leq \sqrt{\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(v)}$$

También, tenemos

$$|\mathbf{Im}\boldsymbol{B}(u, v)| \leq \tan\theta\sqrt{\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(v)}$$

entonces de las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\left(\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u, v)\right| &\leq \left|\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u, v)\right| + |\mathbf{Im}\boldsymbol{B}(u, v)| \\
&\leq (1 + \tan\theta)\sqrt{\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(v)}
\end{aligned}$$

Similarmente, se tiene otro resultado importante,

$$\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u) \leq \left|\left(\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)\right| \leq \sec\theta\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)$$

Los siguientes ejemplos muestran un importante método para construir formas sesquilineales a partir de operadores.

Ejemplo 4. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, y definamos una forma sesquilineal $\boldsymbol{B}$ en $\mathscr{H}$ por

$$B(u,v) = \langle Tu, v\rangle$$

Donde $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{T})$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\boldsymbol{B}) &= \{B(u)\,/\,u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}), \|u\| = 1\}\\ &= \{\langle Tu, u\rangle\,/\,u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{T}), \|u\| = 1\}\\ &= \mathbf{W}(\boldsymbol{T}).\end{aligned}$$

Observemos que los rangos numéricos son iguales, entonces $\boldsymbol{B}$ es simétrica si $\boldsymbol{T}$ lo es, también $\boldsymbol{B}$ es acotado inferiormente si $\boldsymbol{T}$ lo es y $\boldsymbol{B}$ es sectorial si $\boldsymbol{T}$ lo es.

Ejemplo 5. Sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ dos espacios de Hilbert $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$ una forma sesquilineal; y definamos una forma $\boldsymbol{S}$ en $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1$ por

$$S(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle$$

donde $\mathfrak{D}(\boldsymbol{T}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$. Entonces S es simétrica y no negativa.

Demostración. Primero probemos que S es simétrica

$$\begin{aligned}S(v,u) &= \langle Tv, Tu\rangle\\ &= \overline{\langle Tu, Tv\rangle}\\ &= \overline{S(u,v)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto S es simétrica.
También $S(u,u) = \langle Tu, Tu\rangle = \|u\|^2 \geq 0$, es decir S es no negativa.

□

2.3. Formas Cerradas

La noción de forma cerrada es importante en la teoría de formas sesquilineales. La cerradura de una forma permite representar formas en términos de operadores. Estudiaremos la noción de **B-convergencia**.

Definición 2.3.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma sectorial sobre $\mathscr{H}$. Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores se dice que es **B-convergente** a $u \in \mathscr{H}$, si

1. $u_n \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $u_n \to u$
3. $B(u_n - u_m) \to 0$ cuando $m, n \to \infty$

Escribiremos $u_n \underset{B}{\to} u$, para denotar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es B-convergente a u.

Proposición 2.3.2. *Sea $\boldsymbol{B}$ una forma sectorial sobre $\mathscr{H}$ y $\{u_{n\in\mathbb{N}}\}$ una sucesión en $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$
2. $u_n \underset{B\pm\alpha I}{\longrightarrow} u$
3. $u_n \underset{\mathbf{Re}B}{\longrightarrow} u$

Demostración. ($1 \Leftrightarrow 2$) Usando la definición de **B-convergencia**, y como toda sucesión convergente es de Cauchy, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(u_n \underset{B}{\longrightarrow} u\right) &\Leftrightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad u_n \to u \; y \; B(u_n - u_m) \to 0 \\
&\Leftrightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad u_n \to u \; y \; B(u_n - u_m) \pm \alpha \|u_n - u_m\| \to 0 \\
&\Leftrightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad u_n \to u \; y \; (B \pm \alpha I)(u_n - u_m) \to 0 \\
&\Leftrightarrow u_n \underset{B+\alpha I}{\longrightarrow} u.
\end{aligned}
$$

($1 \Leftrightarrow 3$) Usando el argumento anterior y como $\left(\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u) \leq \left|\left(\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}\right)(u)\right|$. donde γ es un vértice de $\boldsymbol{B}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
u_n \underset{B}{\longrightarrow} u &\Leftrightarrow u_n \underset{B-\gamma I}{\longrightarrow} u \\
&\Leftrightarrow u_n \underset{\mathbf{Re}B-\gamma I}{\longrightarrow} u \\
&\Leftrightarrow u_n \underset{\mathbf{Re}B}{\longrightarrow} u
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las afirmaciones son equivalentes.

□

Proposición 2.3.3. *si* $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$ *y* $v_n \underset{B}{\longrightarrow} v$, *entonces* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *se tiene que*

$$\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) \underset{B}{\longrightarrow} \left(\alpha u + \beta v\right)$$

Demostración. Por hipótesis se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left(u_n \underset{B}{\longrightarrow} u\right) &\Leftrightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad u_n \to u \; y \; B(u_n - u_m) \to 0 \\
\left(v_n \underset{B}{\longrightarrow} v\right) &\Leftrightarrow \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) \qquad v_n \to v \; y \; B(v_n - v_m) \to 0
\end{aligned}
$$

Probaremos que: $\alpha u_n + \beta v_n \underset{B}{\longrightarrow} \alpha u + \beta v$ esto es equivalente a probar

$$\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(B),\; \alpha u_n + \beta v_n \longrightarrow \alpha u + \beta v \quad y \quad B\left(\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) - \left(\alpha u_m + \beta v_m\right)\right) \to 0$$

Primero: $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$

Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\alpha u_n, \beta v_n \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ entonces $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ desde que $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ sea un espacio vectorial.

Segundo: $\alpha u_n + \beta v_n \longrightarrow \alpha u + \beta v$
Como $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ y $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) - \left(\alpha u + \beta v\right)\right\| &= \left\|\left(\alpha u_n - \alpha u\right) + \left(\beta v_n - \beta v\right)\right\| \\ &\leq |\alpha| \, \|u_n - u\| + |\beta| \, \|v_n - v\| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Tercero: $B\left(\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) - \left(\alpha u_m + \beta v_m\right)\right) \longrightarrow 0$, Como tenemos $B(\alpha u_n - u_m) \to 0$

$$\begin{aligned}B(\alpha u_n - u_m) &= \langle \alpha(u_n - u_m), \alpha(u_n - u_m)\rangle \, \alpha\overline{\alpha} \, \langle (u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle \\ &\left|\alpha^2\right| B(\alpha u_n - u_m) \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Análogamente como $B(v_n - v_m) \to 0$, entonces $B\left(\beta v_n - v_m\right) \to 0$. Además se cumple que $B(u+v) \leq 2B(u) + 2B(v)$, luego

$$\begin{aligned}B\left(\left(\alpha u_n + \beta v_n\right) - \left(\alpha u_m + \beta v_m\right)\right) &= B\left(\alpha(\alpha u_n - u_m) + \beta(v_n - v_m)\right) \\ &= 2B(\alpha(\alpha u_n - u_m)) + 2B\left(\beta(v_n - v_m)\right) \\ &\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.4. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{B}$ una forma acotada sobre $\mathscr{H}$. $\boldsymbol{B}$ es cerrada si y sólo si $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ es cerrado*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, convergente a $u \in \mathscr{H}$, además si $\boldsymbol{B}$ es acotado, entonces

$$\begin{aligned}|B(u_n - u_m)| &= |B(u_n - u_m, u_n - u_m)| \\ &\leq \|B\| \, \|u_n - u_m\| \, \|u_n - u_m\| \\ &= \|B\| \, \|u_n - u_m\|^2 \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

luego $u_n \xrightarrow[B]{} u$

[$\Leftarrow$ Si $\boldsymbol{B}$ es cerrada, $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, luego $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ es cerrada

$\Leftarrow$] Si $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ es cerrada, $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$. Además $|B(u_n - u_m)| \leq \|B\| \, \|u_n - u_m\|^2 \longrightarrow 0$ por lo tanto $\boldsymbol{B}$ es cerrada. □

Definición 2.3.5. Sea $\boldsymbol{S}$ una forma simétrica no negativa sobre $\mathscr{H}$. Definamos

$$\langle .,. \rangle_{\boldsymbol{S}} : \mathfrak{D}(\boldsymbol{S}) \times \mathfrak{D}(\boldsymbol{S}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\langle u, v \rangle_S = (S + I)(u, v) = S(u, v) + \langle u, v \rangle$$

$\langle .,. \rangle_S$ es entonces una forma sesquilineal simétrica positiva sobre $\mathscr{H}$, ya que está definida como la suma de una forma simétrica no negativa $\boldsymbol{S}$ y una forma simétrica positiva $\boldsymbol{I}$. También esta definida

$$\| u \|_S = \sqrt{\langle u, u \rangle_S}$$

Notemos que $\langle u, u \rangle_S$ es simétrica y estrictamente positiva

$$\| u \|_S^2 = \langle u, u \rangle_S = (S + I)(u) = S(u) + \| u \|^2 \geq \| u \|^2$$

$\mathfrak{D}(\boldsymbol{S})$ puede ser considerado como un espacio producto interno bajo $\langle .,. \rangle_S$ denotemos este espacio por $\mathscr{H}_S = (\mathfrak{D}(S), \langle .,. \rangle_S)$.

Si $\boldsymbol{B}$ es una forma sectorial con vértice γ y semiangulo θ, entonces esta definido:

$$\mathscr{H}_B = \mathscr{H}_{\mathbf{Re}\boldsymbol{B} - \gamma \boldsymbol{I}}$$

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, **B** una forma sectorial en $\mathscr{H}$. Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ es B-convergente si y sólo si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Dada una sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$ B-convergente a $u \in \mathscr{H}$, probaremos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$, es decir, $\| u_n - u_m \|_B \longrightarrow 0$

En efecto:

Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es B-convergente, entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, $u_n \longrightarrow u$ y $B(u_n - u_m) \longrightarrow 0$, además, tenemos $(\mathbf{Re}B)(u_n - u_m) = \mathbf{Re}(B(u_n - u_m))$ luego

$$\begin{aligned}
\| u_n - u_m \|_B^2 &= \| u_n - u_m \|_{\mathbf{Re}B - \gamma I}^2 \\
&= \left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u_n - u_m) + \| u_n - u_m \|^2 \\
&= (\mathbf{Re}B)(u_n - u_m) - \gamma \| u_n - u_m \|^2 + \| u_n - u_m \|^2 \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B = (\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}), \|.\|_B)$

$\Leftarrow$] si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$, probaremos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es B-convergente en $u \in \mathscr{H}$, es decir, $u_n \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, $u_n \longrightarrow u$ y $B(u_n - u_m) \longrightarrow 0$

En efecto:

1. Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$ entonces $u \in \mathfrak{D}(B)$

2. si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$, entonces $\|u_n - u_m\|_B \longrightarrow 0$, luego

$$\|u_n - u_m\|_B^2 = \left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u_n - u_m) + \|u_n - u_m\|^2 \longrightarrow 0$$

así tenemos

$$\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u_n - u_m) \longrightarrow 0 \; y \; \|u_n - u_m\|^2 \longrightarrow 0$$

Desde que $\mathscr{H}$ es completo, existe $u \in \mathscr{H}$ tal que $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$

3. Ahora probaremos que $B(u_n - u_m) \longrightarrow 0$, se tiene que

$$|\mathbf{Im}(u_n - u_m)| \leq \tan\theta \left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u_n - u_m) \longrightarrow 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} B(u_n - u_m) &= (\mathbf{Re}B + i\mathbf{Im}B)(u_n - u_m) \\ &(\mathbf{Re}B)(u_n - u_m) + i(\mathbf{Im}B)(u_n - u_m) \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto$\{u_n\} \in \mathscr{H}$ es B-convergente.

□

Proposición 2.3.7. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, **B** una forma sesquilineal sectorial con vértice γ y semiangulo θ en $\mathscr{H}$. Entonces **B** es acotado sobre $\mathscr{H}_B$*

Demostración. Usando la expresión $\|u\| \leq \|u\|_B$ y la siguiente desigualdad $\left|\left(B - \gamma I\right)(u,v)\right| \leq (1+\tan\theta)\sqrt{\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u)\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(v)}$,
Se Tiene:

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &= \left|B(u,v) - \gamma I(u,v) + \gamma I(u,v)\right| \\ &\leq \left|\left(B - \gamma I\right)(u,v)\right| + \left|\gamma I(u,v)\right| \\ &\leq (1+\tan\theta)\sqrt{\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u)\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(v)} + \left|\gamma\right| |\langle u,v\rangle| \\ &\leq (1+\tan\theta)\sqrt{\left(\mathbf{Re}B - \gamma I + I\right)(u)\left(\mathbf{Re}B - \gamma I + I\right)(v)} + \left|\gamma\right| \|u\| \|v\| \\ &= (1+\tan\theta)\sqrt{\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right)(u) + \|u\|^2}\sqrt{\left(\mathbf{Re}B - \gamma I\right) + (v)\|v\|^2} + \left|\gamma\right| \|u\| \|v\| \\ &= (1+\tan\theta)\|u\|_{\mathbf{Re}B-\gamma I}\|v\|_{\mathbf{Re}B-\gamma I} + \left|\gamma\right| \|u\| \|v\| \qquad H_B = H_{\mathbf{Re}B-\gamma I} \\ &\leq (1+\tan\theta)\|u\|_B\|v\|_B + \left|\gamma\right| \|u\|_B\|v\|_B \qquad \forall u,v \in H_B \\ &= \left(1+\tan\theta + \left|\gamma\right|\right)\|u\|_B\|v\|_B \end{aligned}$$

Por lo tanto ***B*** es una forma sesquilineal acotada sobre $\mathscr{H}_B$ □

Teorema 2.3.8. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, **B** una forma sectorial sobre $\mathscr{H}$, con vértice γ. Entonces*

$$\boldsymbol{B}\, es\, cerrado \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{H}_B\, es\, completo$$

Demostración. $\boldsymbol{B}$ es cerrado si y sólo si $\mathbf{Re}\boldsymbol{B}-\gamma\boldsymbol{I}$ es cerrado, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\boldsymbol{B}$ es simétrica y no negativa.

$\Rightarrow$] Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_B$, probaremos que esta sucesión converge en $\mathscr{H}_B$.

En efecto:

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}_B$, entonces $\|u_n-u_m\|_B \longrightarrow 0$. pero

$$\|u_n-u_m\|_B^2 = B\,(u_n-u_m)+\|u_n-u_m\|^2$$

Luego

$$B\,(u_n-u_m)\longrightarrow 0 \qquad y \qquad \|u_n-u_m\|^2 \longrightarrow 0$$

Así tenemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{H}$, y como $\mathscr{H}$ es completo, entonces $\exists u\in\mathscr{H}$ tal que $\|u_n-u\|\longrightarrow 0$, consecuentemente $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$.

Como $\boldsymbol{B}$ es cerrado, tenemos que $u\in\mathfrak{D}\,(\boldsymbol{B})=\mathscr{H}_B$ y $B\,(u_n-u_m)\longrightarrow 0$, luego se tiene

$$\|u_n-u_m\|_B^2 = B\,(u_n-u_m)+\|u_n-u_m\|^2\longrightarrow 0$$

De esto tenemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathscr{H}_B$. Por lo tanto $\mathscr{H}_B$ es completo.
$\Leftarrow$] Supongamos que $\mathscr{H}_B$ es completo y probaremos que $\boldsymbol{B}$ es cerrado, es decir $u\in\mathfrak{D}\,(\boldsymbol{B})=\mathscr{H}_B$ y $B\,(u_n-u)\longrightarrow 0$

En efecto:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{H}_B$, es B-convergente a u, $\|u_n-u_m\|\longrightarrow 0$, entonces se tiene :

$$B\,(u_n-u_m)\longrightarrow 0 \qquad y \qquad \|u_n-u_m\|\longrightarrow 0$$

como $\mathscr{H}_B$ es completo, existe un $u'\in\mathfrak{D}\,(\boldsymbol{B})=\mathscr{H}_B$ tal que $\left\|u_n-u'\right\|_B\longrightarrow 0$, luego tenemos que

$$B\left(u_n-u'\right)\longrightarrow 0 \qquad y \qquad \left\|u_n-u'\right\|\longrightarrow 0$$

De aquí existe $u=u'\in\mathfrak{D}\,(B)$ y $B\,(u_n-u)\longrightarrow 0$.

Por lo tanto $\boldsymbol{B}$ es cerrado.

$\square$

Teorema 2.3.9. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathbf{B}$ una forma sesquilineal sectorial en $\mathscr{H}$. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathfrak{D}\,(\boldsymbol{B})$ con $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$ y $v_n \underset{B}{\longrightarrow} v$, entonces* $\lim B\,(u_n,v_n)$ *existe. además si $\mathbf{B}$ es cerrado, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} B\,(u_n,v_n)=B\,(u,v)$$

Demostración. Lo haremos en dos partes:

i) Primero probaremos que $\lim B\,(u_n,v_n)$ existe, es decir que $B\,(u_n,v_n)$ sea convergente.

En efecto:

Se puede asumir que $\boldsymbol{B}$ tiene un vértice $\gamma = 0$, y se tiene que

$$|B(u,v)| \leq (1+\tan\theta)\sqrt{\mathbf{Re}B(u)\,\mathbf{Re}B(v)}$$

luego:

$$\begin{aligned}
|B(u_n,v_n) - B(u_m,v_m)| &= |B(u_n,v_n) - B(u_m,v_n) + B(u_m,v_n) - B(u_m,v_m)| \\
&= |B(u_n-u_m,v_n) + B(u_m,v_n-v_m)| \\
&\leq |B(u_n-u_m,v_n)| + |B(u_m,v_n-v_m)| \\
&\leq (1+\tan\theta)\sqrt{\mathbf{Re}B(u_n-u_m)\,\mathbf{Re}B(v_n)} + \sqrt{\mathbf{Re}B(u_m)\,\mathbf{Re}B(v_n-v_m)}
\end{aligned}$$

Ahora como $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$ y $v_n \underset{B}{\longrightarrow} v$, tenemos que $B(u_n-u_m) \longrightarrow 0$ y $B(v_n-v_m) \longrightarrow 0$

Entonces $\mathbf{Re}B(u_n-u_m) \longrightarrow 0$ y $\mathbf{Re}B(v_n-v_m) \longrightarrow 0$, además $B(u_n)$ es convergente, de aquí acotado, de la misma forma para$\{v_n\}$.

Luego $|B(u_n,v_n) - B(u_m,v_m)| \longrightarrow 0$, es decir $B(u_n,v_n)$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ por lo tanto convergente.

ii) Probaremos que si $\boldsymbol{B}$ es cerrado, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} B(u_n,v_n) = B(u,v)$

En efecto:

Sin pérdida de generalidad asumamos que $\boldsymbol{B}$ tiene un vértice $\gamma = 0$. por ser $\boldsymbol{B}$ cerrado, entonces para $u,v \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{B})$, se tiene que $B(u_n-u) \longrightarrow 0$ y $B(v_n-v) \longrightarrow 0$.

De forma similar como en ***i)*** se tiene:

$$\begin{aligned}
|B(u_n,v_n) - B(u,v)| &= |B(u_n,v_n) - B(u,v_n) + B(u,v_n) - B(u,v)| \\
&= |B(u_n-u,v_n) + B(u,v_n-v)| \\
&\leq |B(u_n-u,v_n)| + |B(u,v_n-v)| \\
&\leq (1+\tan\theta)\sqrt{\mathbf{Re}B(u_n-u)\,\mathbf{Re}B(v_n)} + \sqrt{\mathbf{Re}B(u)\,\mathbf{Re}B(v_n-v)}
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $\mathbf{Re}B(u_n-u) \longrightarrow 0$ y $\mathbf{Re}B(u_n) \longrightarrow 0$ es convergente de aquí acotado, similarmente para $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por lo tanto $B(u_n,v_n) \longrightarrow B(u,v)$ □

Ejemplo 6. Sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ dos espacios de Hilbert.$\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$ y $\boldsymbol{B}$ una forma en $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1$, tal que

$$B(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle$$

donde $\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{T})$.

Entonces $\boldsymbol{B}$ es cerrado si y sólo si $\boldsymbol{T}$ es un operador cerrado.

Demostración. Basta probar que $u_n \underset{B}{\longrightarrow} u$ sea equivalente $u_n \underset{T}{\longrightarrow} u$, y $B(u_n - u) \longrightarrow 0$ sea equivalente a $Tu_n \longrightarrow T_u$

$$
\begin{aligned}
u_n \underset{B}{\longrightarrow} u &\Leftrightarrow u_n \longrightarrow u \quad y \quad B(u_n - u_m) \longrightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow u_n \longrightarrow u \quad y \quad \|Tu_n - Tu_m\| \longrightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow u_n \underset{T}{\longrightarrow} u
\end{aligned}
$$

□

2.4. Teorema de la representación de Riesz

Antes de probar el teorema principal de esta sección, el teorema de la representación de Riesz para formas sesquilineales acotadas, está dado, otro resultado similar, debido a Riesz - Frechet, que se encuentra en este capitulo.

Lema 2.4.1. *sea $\boldsymbol{f}$: $\mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Entonces existe un único $z \in \mathscr{H}$ tal que cumple:*

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

donde $\|z\| = \|f\|$

Teorema 2.4.2. *Sea $\boldsymbol{B}$: $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal acotada. Entonces existe un único operador lineal acotado $\boldsymbol{T}$: $\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$, tal que cumple :*

$$B(u, v) = \langle Tu, v \rangle$$

con $\|T\| = \|B\|$

Demostración. Para cada $u \in \mathscr{H}$, definamos un funcional lineal, $\boldsymbol{f_u}$: $\mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$f_u(v) = \overline{B(u, v)}$$

Como $\boldsymbol{B}$ es acotado, se deduce que el funcional $\boldsymbol{f_u}$ es acotado. luego por el teorema de Riesz-Frechet, existe un único $z_u \in \mathscr{H}$ tal que:

$$f_u(v) = \langle v, z_u \rangle = \overline{B(u, v)}$$

es decir:

$$B(u, v) = \langle z_u, u \rangle$$

Sea $\boldsymbol{T}$: $\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ definido por:

$$Tu = z_u$$

Sean $u_1, u_2, v \in \mathscr{H}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle &= B(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \\
&= \alpha_1 B(u_1, v) + \alpha_2 B(u_2, v) \\
&= \alpha_1 \langle Tu_1, v\rangle + \alpha_2 \langle Tu_2, v\rangle \\
&= \langle \alpha_1 Tu_1 + \alpha_2 Tu_2, v\rangle .
\end{aligned}$$

Por consiguiente: $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Tu_1 + \alpha_2 Tu_2$. Por lo tanto $\boldsymbol{T}$ es lineal.

Si $\boldsymbol{T} = 0$, entonces $Tu = z_u = 0$, se sigue que $B(u,v) = \langle 0, v\rangle = 0$ luego $\boldsymbol{B} = 0$, de este modo $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{B}$ son acotados y se cumple que:

$$\|B\| = 0 = \|T\|$$

Si $T \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{|B(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \\
&= \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{|\langle Tu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \\
&\geq \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{|\langle Tu, Tu\rangle|}{\|u\|\,\|Tu\|} \\
&= \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

Así pues $\boldsymbol{T}$ es acotado y se cumple la siguiente desigualdad $\|\boldsymbol{B}\| \geq \|\boldsymbol{T}\|$

Por otro lado por la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{|\langle Tu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \\
&\leq \sup_{u,v\in\mathscr{H}-\{0\}} \frac{\|Tu\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

Así pues $\|\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{T}\|$ de esto se deduce que $\|\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{T}\|$.

Supongamos que existe otro operador lineal $\boldsymbol{L} : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$, tal que para todo $u, v \in \mathscr{H}$, tenemos:

$$B(u,v) = \langle Tu, v\rangle = \langle Lu, v\rangle$$

De esta manera $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{Lu}$, es decir $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}$, luego $\boldsymbol{T}$ es único.

Por lo tanto, se tiene que, existe un único operador lineal acotado $\boldsymbol{T}$ tal que $B(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ y $\|\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{T}\|$ $\square$

CAPÍTULO 3

TEOREMA DEL LEVANTAMIENTO DEL CONMUTANTE

En este capítulo estudiaremos uno de los resultados más importantes en el análisis matemático, como lo es la demostración del **Teorema del Levantamiento del Conmutante** por medio de formas sesquilineales asociadas a espacios de Hilbert, pero antes necesitaremos algunas definiciones relevantes para realizar dicha demostración.

3.1. Algunas definiciones importantes

Definición 3.1.1. Sean $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{W}$ un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$ y $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}\boldsymbol{(W)}$. Si $\boldsymbol{RanT} \subset \boldsymbol{DomT}$, entonces se dice que $\boldsymbol{W}$ es $\boldsymbol{T}$-***invariante***. El cual se nota como $\boldsymbol{T(W)} \subset \boldsymbol{W}$.

Definición 3.1.2. Sean $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{T}$ un operador unitario en $\mathscr{H}$, $\boldsymbol{W}_1$ y $\boldsymbol{W}_2$ subespacios cerrados de $\mathscr{H}$, la cuarteta $[\mathscr{H}, \boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2; \boldsymbol{T}]$, recibe el nombre de ***sistema algebraico de dispersión***, si $\boldsymbol{T(W_1)} \subset \boldsymbol{W}_1$ y $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{(W_2)} \subset \boldsymbol{W}_2$.

Definición 3.1.3. sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert, $\boldsymbol{T}_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$ y $\boldsymbol{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2)$, una forma sesquilineal $\boldsymbol{B}: \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que $\boldsymbol{B}$ es ***Toeplitz*** si se cumple que:

$$B\left(T_1 h_1, T_2 h_2\right) = B\left(h_1, h_2\right); \ \forall\left(h_1, h_2\right) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$$

Definición 3.1.4. sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert, $\boldsymbol{T}_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$ y $\boldsymbol{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2)$ unitarios, una forma sesquilineal $\boldsymbol{B}: \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que $\boldsymbol{B}$ es ***Hankel*** si se cumple que:

$$B\left(T_1 h_1, h_2\right) = B\left(h_1, T_2^{-1} h_2\right); \ \forall\left(h_1, h_2\right) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$$

3.2. Teorema de Levantamiento de formas de Hankel

Teorema 3.2.1. *Sean $[\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2; \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2]$ un sistema algebraico de dispersión.*
$\boldsymbol{B}_1 : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1 \to \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{B}_2 : \mathscr{H}_2 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ dos formas $\boldsymbol{T}_1$ -Toeplitz y $\boldsymbol{T}_2$-Toeplitz respectivamente, $\boldsymbol{B}_0 : W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ una forma Hankel tal que $\boldsymbol{B}_0 \leqslant (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)$ en $W_1 \times W_2$. Entonces existe una forma de Toeplitz $\boldsymbol{B}: \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ que extiende a $\boldsymbol{B}_0$ y tal que $\boldsymbol{B} \leqslant (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)$ en $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$.

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ son estrictamente positivas; la demostración en el caso general sólo requerirá pequeñas modificaciones obvias, al identificar con cero a los f tales que $\boldsymbol{B}_1(f,f) = \|f\|_{\boldsymbol{B}_1} = 0$ ó $\boldsymbol{B}_2(f,f) = \|f\|_{\boldsymbol{B}_2} = 0$. Es decir supondremos que $B_1(f,g) = \langle f,g\rangle_{B_1}$ y $B_2(f,g) = \langle f,g\rangle_{B_2}$ es un producto escalar que convierte a $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ en un espacio pre-Hilbert, y podemos suponer que $\mathscr{H}_1$y $\mathscr{H}_2$ son de Hilbert de modo que la hipótesis $B_1(T_1 f, T_2 g) = B_1(f,g)$ y $B_2(T_1 f, T_2 g) = B_2(f,g)$ implica que $\boldsymbol{T}_1$y $\boldsymbol{T}_2$ pueden suponerse un operadores unitarios en $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ respectivamente.

Análogamente se puede suponer que $\boldsymbol{W}_1$ y $\boldsymbol{W}_2$ son subespacios cerrados, de modo $\boldsymbol{W}_1$ es invariate-$\boldsymbol{T}_1$, invariante-$\boldsymbol{T}_2^{-1}$. Poniendo $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{W}_1 \ominus \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{W}_1$, $\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{W}_2 \ominus (\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{W}_2)$ tendremos que

$$\mathscr{H}_1 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} T_1^n N_1 \oplus \mathscr{H}_1^0 \oplus \mathscr{H}_1^0, \qquad \mathscr{H}_2 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} T_2^{-n} N_2 \oplus \mathscr{H}_2^0 \oplus \mathscr{H}_2^0$$

donde todos los sumandos son subespacios mutuamente ortogonales, y

$$T_1\mathscr{H}_1^0 = \mathscr{H}_1^0 \quad T_1\mathscr{H}_1^1 = \mathscr{H}_1^1, \qquad T_2\mathscr{H}_2^0 = \mathscr{H}_2^0 \quad T_2\mathscr{H}_2^1 = \mathscr{H}_2^1$$

Sea $\mathscr{H}$ el espacio de Hilbert cuyos elementos son los pares $(f_1, f_2) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ con la métrica

$$\langle (f_1,f_2),(g_1,g_2)\rangle = B_1(f_1,g_1) + B_0(f_1,g_2) + \overline{B_0(g_1,g_2)} + B_2(g_2,g_2)$$

que para $(f_1,f_2) = (g_1,g_2)$ se reduce a la suma $\sum B_{ij}(f_i,f_j)$ que es no negativa, lo anterior define un producto escalar en $\mathscr{H}$.

$\boldsymbol{W}_1$ puede identificarse con el subespacio de $\mathscr{H}$ formado por los elementos $\{(f_1,0) : f_1 \in \boldsymbol{W}_1\}$ y $\boldsymbol{W}_2$ con $\{(0,f_2) : f_2 \in W_2\}$. Como $\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{W}_2 \subset W_2$, podemos definir en $\mathscr{H}$, el operador $U(f_1, T_2^{-1}f_2) = (T_1 f_1, f_2)$, con dominio $\mathfrak{D} = \{(f_1, T_2^{-1}f_2) : (f_1,f_2) \in W_1 \times W_2\}$ y rango $\boldsymbol{R} = \{(T_1 f_1, f_2) : (f_1,f_2) \in W_1 \times W_2\}$

$\boldsymbol{U}$ es isométrico: para verlo basta observar que la norma en $\mathscr{H}$ se puede escribir en la forma $\left(\sum B_{ij}(f_i,f_j)\right)^{\frac{1}{2}}$ y que $B_{11}(T_1 f_1, T_1 f_1) = B_{11}(f_1,f_1)$, $B_{21}(T_2^{-1}f_2, T_2^{-1}f_2) = B_{22}(f_2 f_2)$ y $B_{12}(T_1 f_1, f_2) = B_{12}(f_1, T_2^{-1}f_2)$ luego existe un espacio $\widetilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$ y un operador unitario $\widetilde{U} \in L\left(\widetilde{\mathscr{H}}\right)$ tal que $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$ en $\mathfrak{D}$ y $\widetilde{\boldsymbol{U}}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}$ en $\boldsymbol{R}$, Hagamos corresponder a:

Todo elemento f_1 de $\mathscr{H}_1$ $f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_1^n h_n' + h_1^0 + h_1^1$ el elemento $\widetilde{f}_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}^n (h_n^1, 0) + (h_1^0, 0) + (h_1^1, 0)$ en $\widetilde{\mathscr{H}}$

Para todo elemento f_2 de $\mathscr{H}_2$ $f_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_2^{-n} h_n'' + h_2^0 + h_2^1$ de $\mathscr{H}_2$ el elemento $\widetilde{f}_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}^{-n}(0, h_n'') + (0, h_2^0) + (0, h_2^1)$ en $\widetilde{\mathscr{H}}$

Definimos entonces la forma $\boldsymbol{B} : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ mediante

$$B(f_1,f_2) = \langle \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\rangle_{\widetilde{\mathscr{H}}}$$

Usando la definición del producto escalar en $\mathscr{H}$, la definición de $\boldsymbol{U}$ y el hecho de que $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$ en $\mathfrak{D}$ y $\widetilde{U}^{-1} = U^{-1}$ en R.

B tiene las siguientes propiedades:

1)$B\left(T_1 f_1, f_2\right) = B_1\left(f_1, T_2^{-1} f_2\right) \qquad \forall\left(f_1, f_2\right) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$

2) $\left|B\left(f_1, f_2\right)\right| = \left\|f_1\right\|_{\mathscr{H}_1}\left\|f_2\right\|_{\mathscr{H}_2} \qquad \forall\left(f_1, f_2\right) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$

3) $B\left(f_1, f_2\right) = B_0\left(f_1, f_2\right) \qquad \forall\left(f_1, f_2\right) \in W_1 \times W_2$

lo que prueba la tesis. □

3.3. Teorema de Levantamiento del Conmutante

Teorema 3.3.1. *sean $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ dos espacios de Hilbert , $\boldsymbol{W}_1 \subset \mathscr{H}_1$ y $\boldsymbol{W}_2 \subset \mathscr{H}_2$ subespacios cerrados de $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ respectivamente, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{H}_1}^{W_1}$ es proyector ortogonal de $\mathscr{H}_1$ sobre $\boldsymbol{W}_1$ y $\boldsymbol{P}_{\mathscr{H}_2}^{W_2}$ es proyector ortogonal de $\mathscr{H}_2$ sobre $\boldsymbol{W}_2$ y $\boldsymbol{T}_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$, $\boldsymbol{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2)$ operadores unitarios tales*

$$\mathscr{H}_1 = W_1 \oplus W_1^+ \oplus W_1^-, \quad T_1\left(W_1^+\right) \subset W_1^+, \quad T_1^{-1}\left(W_1^-\right) \subset W_1^-$$
$$\mathscr{H}_2 = W_2 \oplus W_2^+ \oplus W_2^-, \quad T_2\left(W_2^+\right) \subset W_2^+, \quad T_2^{-1}\left(W_2^-\right) \subset W_2^-$$

si $\boldsymbol{B}_0 : \boldsymbol{W}_1 \times \boldsymbol{W}_2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal tal que para $\left(f_1, f_2\right) \in \boldsymbol{W}_1 \times \boldsymbol{W}_2$ es

$$B_0\left(P_{\mathscr{H}_1}^{W_1} T_1 f_1, f_2\right) = B_0\left(f_1, P_{\mathscr{H}_2}^{W_2} T_2^{-1} f_2\right) \quad , \quad \|\boldsymbol{B}_0\| \leqslant 1$$

entonces existe una forma sesquilineal $\boldsymbol{B} : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ tal que:

i) ***B*** *es Toeplitz* : $B\left(T_1 f_1, T_2 f_2\right) = B\left(f_1, f_2\right) \forall\left(f_1, f_2\right) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$

ii) $\|\boldsymbol{B}\| \leqslant 1$.

iii) ***B*** *extiende a* $\boldsymbol{B}_0$

iv) $B(w_1^+, w_2 + w_2^+) = 0$

Demostración. sean $W_1 \oplus W_1^+ = W_1^{'}$ y $W_2 \oplus W_2^- = W_2^{'}$ y sea $B_0^{'}$ definida

$$\begin{array}{llll} B_0^{'}: & W_1^{'} \times W_2^{'} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \left(w_2^{'}, w_2^{'}\right) & \longrightarrow & B_0^{'}\left(f_1 + f_1^+, f_2 + f_2^-\right) = B_0\left(f_1, f_2\right) \end{array}$$

para todo $f_1 \in W_1$, $f_1^+ \in W_1^+$, $f_2 \in W_2$ y $f_2^- \in W_2^-$.

Sea $w_1^{'} \in W_1^{'}$.
Si $w_1^- \in W_1^-$, entonces $\left\langle T_1 w_1^{'}, w_1^-\right\rangle = \left\langle w_1^{'}, T_1^* w_1^-\right\rangle = \left\langle w_1^{'}, T_1^{-1} w_1^-\right\rangle = \left\langle w_1^{'}, \widetilde{w}_1^-\right\rangle = 0$ por lo tanto $T_1\left(W_1^{'}\right) \perp W_1^-$. Entonces $T_1\left(W_1^{'}\right) \subset (W_1^-)^{\perp} = W_1 \oplus W_1^+ = W_1^{'}$.

Sea $w_2^{'} \in W_2^{'}$.
Si $w_2^+ \in W_2^+$, entonces $\left\langle T_2^{-1} w_2^{'}, w_1^+\right\rangle = \left\langle w_2^{'}, (T_2^{-1})^* w_2^+\right\rangle = \left\langle w_2^{'}, T_2 w_2^+\right\rangle = \left\langle w_2^{'}, \widetilde{w}_2^+\right\rangle = 0$ por lo tanto $T_2^{-1}\left(W_2^{'}\right) \perp W_2^+$. Entonces $T_2^{-1}\left(W_2^{'}\right) \subset (W_2^+)^{\perp} = W_2 \oplus W_2^- = W_2^{'}$.

De lo anterior se comprueba que $W_1^{'}$ es T_1- invariante y $W_2^{'}$ es T_2^{-1}- invariante.

i) Ahora probaremos que $B_0^{'}$ es Toeplitz,

$$\begin{aligned}
B_0^{'}\left(T_1\left(f_1+f_1^+\right), f_2+f_2^-\right) &= B_0^{'}\left(T_1 f_1 + T_1 f_1^+ , f_2 + f_2^-\right)\\
&= B_0\left(T_1 f_1 , f_2\right)\\
&= B_0\left(P_{\mathscr{H}_1}^{W_1} T_1 f_1 , f_2\right)\\
&= B_0\left(f_1 , P_{\mathscr{H}_2}^{W_2} T_2^{-1} f_2\right)\\
&= B_0\left(f_1 , T_2^{-1} f_2\right)\\
&= B_0^{'}\left(f_1 + f_1^+ , T_2^{-1} f_2 + T_2^{-1} f_2^-\right)\\
&= B_0^{'}\left(f_1 + f_1^+ , T_2^{-1}\left(f_2 + f_2^-\right)\right)
\end{aligned}$$

Asi, para $(w_1^{'}, w_2^{'}) \in W_1^{'} \times W_2^{'}$

$B_0^{'}\left(T_1 w_1^{'}, T_2 w_2^{'}\right) = B_0^{'}\left(w_1^{'}, T_2^{-1}\left(T_2 w_2^{'}\right)\right) = B_0^{'}\left(w_1^{'}, I w_2^{'}\right) = B_0^{'}\left(w_1^{'}, w_2^{'}\right)$ por lo tanto $B_0^{'}$ es Toeplitz.

ii) Ahora probaremos que $\left\|B_0^{'}\right\| \leq 1$

Puesto que por la desigualdad de Cauchy - Schwarz $\left|B_0\left(f_1, f_2\right)\right| \leq \|f_1\|_{\mathscr{H}_1} \|f_2\|_{\mathscr{H}_2}$, entonces $\left|B_0^{'}\left(f_1 + f_1^+, f_2 + f_2^-\right)\right| \leq \|f_1 + f_1^+\|_{\mathscr{H}_1} \|f_2 + f_2^-\|_{\mathscr{H}_2}$. Así que

$$\frac{\left|B_0^{'}\left(f_1 + f_1^+, f_2 + f_2^-\right)\right|}{\|f_1 + f_1^+\|_{\mathscr{H}_1} \|f_2 + f_2^-\|_{\mathscr{H}_2}} \leq 1$$

es decir, $\left\|B_0^{'}\right\| \leq 1$.

De lo anterior y de que T_1 y T_2 son unitarios, sigue que $B_1(f_1, g_1) = \langle f_1, g_1\rangle_{\mathscr{H}_1}$ y $B_2(f_2, g_2) = \langle f_2, g_2\rangle_{\mathscr{H}_2}$, entonces el sistema $[\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, W_1, W_2, T_1, T_2]$ y las formas $B_0^{'}, B_1$ y B_2 verifican la hipótesis del teorema precedente. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Akhiezer,I. Glazman. Theory of linear operator in Hilbert space. Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY:Dover Publication. xiv, 147, iv, 1993.

[2] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez, S. Mercantognini. Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de la Interpolación, Predicción y Dilatación. Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas. Mérida, Venezuela, Septiembre 1990.

[3] M. Cotlar, C. Sadosky. Transference of metrics induced by unitary couplings, a Sarason theorem for the bidimensional torus, and a Sz-Nagy-Foias theorem for two pairs of dilations. J. Funct. Anal. 111, No.2, 473-488, 1993. 23, 33.

[4] W. Rudin. Fourier analysis on groups. Interscience Tracts in Pure and Applied Math. No. 12. Wiley, New York, 1962.

[5] B-Sz-Nagy, C. Foias. Harmonic analysis of operators on Hilbert space. North Holland Publishing Co. 1970.