*Universidad Surcolombiana*

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Operadores Hipercíclicos en Espacios de Hilbert

Yeison Arley Blásquez Cuéllar

Neiva, Huila
2012

# *Universidad Surcolombiana*

## Facultad de Educación

## Programa de Licenciatura en Matemáticas

# Operadores Hipercíclicos en Espacios de Hilbert

*Trabajo presentado como requisito de grado*
*para optar al título de Licenciado en Matemáticas*

Yeison Arley Blásquez Cuéllar
*2007268383*

Asesores:
MSc. Ricardo Cedeño Tovar
MSc. Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2012

# Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo lector

Neiva, Noviembre del 2012

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Cecilia Cuéllar Durán y Leonardo Blásquez Cediel, y mis hermanos por estar siempre pendientes de mí y por el gran esfuerzo que a diario hacen por otorgarmen lo mejor.

Gracias a mis asesores MSc. Ricardo Cedeño Tovar y MSc. Osmin Ferrer Villar, porque siempre estuvieron dispuestos a aclarar dudas e inquietudes respecto al trabajo; también por sus valiosos consejos y enseñanzas que fortalecieron en mí valores como la responsabilidad, honestidad, respeto y gratitud.

A los profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas, que con todo el profesionalismo me entregaron sus enseñanzas con el rigor que exige la matemática, a ellos mis agradecimientos; así también a los compañeros que estuvieron presentes para apoyarme en este proceso de formación; y a la Universidad Surcolombiana por brindarme unas condiciones mínimas para adelantar mis estudios.

# ÍNDICE GENERAL

# INTRODUCCIÓN

*Operadores Hipercíclicos en espacios de Hilbert* es el título del presente trabajo de grado realizado por el estudiante Yeison Arley Blásquez Cuéllar con código 2007268383 del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana-Neiva-Huila-Colombia, en el cual se estudia una parte importante del conjunto de operadores y algunas aplicaciones, como son los operadores hipercíclicos y su extructura espectral. Nos interesamos en mostrar la importancia histórica de los operadores hipercíclicos, sobre todo lo correspondiente a la extructura de su órbita y resaltar lo importante que resultan a la hora de usarlos como herramienta para resolver problemas que son modelados por ecuaciones diferenciales.

Se consideró indispensable abrir un espacio para presentar conceptos y resultados previos que son fundamentales para el posterior desarrollo de algunos tipos de operadores en particular de los operadores hipercíclicos, los cuales hoy siguen siendo muy importantes en el desarrollo tecnológico del mundo.

# OBJETIVOS

## 0.1. Objetivo General

- Exponer los fundamentos teóricos e históricos sobre los cuales se sustentan los desarrollos conceptuales de los operadores hipercíclicos.

## 0.2. Objetivos Específicos

- Enunciar y estudiar definiciones y resultados básicos del análisis funcional.
- Presentar una breve reseña histórica del desarrollo de la teoría de los operadores hipercíclicos.
- Mostrar algunos de los primeros ejemplos que surgieron durante el desarrollo de la teoría de operadores hipercíclicos.
- Realizar un estudio cualitativo de los operadores hipercíclicos y su aplicación en el modelado de algunos fenómenos de la naturaleza.

# JUSTIFICACIÓN

En los sistemas dinámicos no discretos se necesita de una herramienta más que las formas de Jordan, se trata de los operadores hipercíclicos. En este trabajo de grado se estudia ciertas clases de operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En primer lugar nos dedicamos a clases de operadores definidas por medio de propiedades heredadas de la estructura del espacio de Hilbert. Por ejemplo, isometrías, operadores unitarios, isometrías parciales, como así también operadores compactos y de clase $p$-Schatten. En segundo lugar nos dedicamos al estudio de clases de operadores definidas por medio de una estructura más débil que la del espacio de Hilbert, a saber, una estructura de espacio semi-hilbertiano. Finalmente, vimos cómo se relacionan estas clases de operdores definidas bajo distintas estructuras.

# RESEÑA HISTÓRICA

En un espacio vectorial topológico, diremos que un vector del espacio es hipercíclico para un operador si la órbita del vector respecto de dicho operador es densa en el espacio. Un operador es hipercíclico si tiene un vector hipercíclico. La importancia de los operadores hipercíclicos está históricamente motivada por el estudio de los subespacios invariantes. La clausura de la envoltura lineal de la órbita de un vector es el menor subespacio cerrado invariante que contiene al vector. Por lo tanto, *un operador no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales si y sólo si cada vector no nulo es hipercíclico*.

Por otro lado, recientemente, el estudio de los operadores hipercíclicos ha aparecido en el análisis de los sistemas dinámicos discretos. Una de las definiciones más aceptadas de aplicación caótica es la propuesta por Devaney [1]: *una aplicación continua en un espacio métrico es caótica si es transitiva, el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales*. Para aplicaciones continuas en espacios métricos completos separables, la transitividad es equivalente a la hiperciclicidad y el estudio de la transitividad es el principal escalón para establecer que una aplicación es caótica. Además, en 1991 Godefroy y Shapiro [2] demuestran que, en espacios de Fréchet (espacios localmente convexos, metrizables y completos), un operador hipercíclico tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Por tanto para operadores hipercíclicos sólo resta estudiar la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos. Posteriormente, en 1992 Banks et al.[3] demuestran que en espacios métricos, una aplicación continua y transitiva con un conjunto denso de puntos periódicos tiene necesariamente dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Los vectores y operadores hipercíclicos aparecen por primera vez en los trabajos de Birkhoff, MacLane y Rolewicz.

En 1929 G. B. Birkhoff [4] estableció un interesante resultado sobre las órbitas de funciones por operadores traslación en el conjunto de las funciones enteras. Concretamente si consideramos el espacio de Fréchet $H(\mathbb{C})$ dotado de la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos del plano complejo, y el operador traslación $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ definido como

$$T_a f(z) = f(z+a) \qquad (f \in H(\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}),$$

Birkhoff demuestra que si a $a \neq 0$, entonces existe una función $\cdot f \in H(\mathbb{C})$ cuya órbita $\{T^n f\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en $H(\mathbb{C})$. Este resultado se puede interpretar de varias maneras, por un lado nos asegura la existencia de una función “universal” que, en todo conjunto compacto, sus traslaciones se aproximan a cualquier función entera tanto como se desee; por otro lado, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos obtenemos que el operador traslación es transitivo.

En 1952 G. R. MacLane [5] demuestra que el operador derivada $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ también es hipercíclico.

El estudio de los operadores hipercíclicos en espacios de Hilbert apareció por primera vez en 1969 de la mano de S. Rolewicz [6], quien prueba que si $\sigma$ es el operador "backward shift" en $l_2$ definido como

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots),$$

entonces $\lambda\sigma$ es hipercíclico para todo número complejo $\lambda$ de módulo mayor que la unidad.

En 1982 C. Kitai [7] obtiene en su tesis doctoral, una condición suficiente de hiperciclicidad, conocida como criterio de hiperciclicidad. Lamentablemente este resultado nunca fue publicado y en 1987 R. M. Gethner y J. H. Shapiro [8] demuestran el mismo criterio. Además, utilizando este criterio deducen los resultados citados de Birkhoff, Maclane y Rolewicz de forma casi automática. J. P. Bes [9] mejora el resultado de Gethner, Shapiro y Kitai al imponer unas condiciones más débiles al criterio de hiperciclicidad.

Es preciso mencionar uno de los más recientes e importantes resultados de hiperciclicidad, obtenido independientemente por L. Bernal [10] y S. I Ansari [11], el cual asegura que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita se puede definir un operador hipercíclico.

CAPÍTULO 1

# ASPECTOS INICIALES Y DEFINICIONES

## 1.1. Espacio Vectorial

**Definición 1.1.1.** *Un conjunto no vacío $X$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, junto con dos operaciones $+, \cdot$ es un espacio vectorial(o espacio lineal), si satisface los siguientes axiomas:*

1. *La operación suma, asocia a cada par de vectores $x, y$ de $X$ un vector $x + y$ de $X$ y además se tiene las siguientes propiedades:*
   - *i)* *Conmutativa:* $x + y = y + x$
   - *ii)* *Asociativa:* $x + (y + z) = (x + y) + z$
   - *iii)* *Existe un único vector* $0$ *de* $X$*, llamado vector nulo:* $x + 0 = x$
   - *iv)* *Para cada vector* $x \in X$*, existe un único vector* $-x \in X$*:* $x + (-x) = 0$
2. *La operación multiplicación por escalar, asocia a cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $x \in X$ un vector $\alpha x \in X$ y tiene las siguientes propiedades:*
   - *i)* $1x = x$ *para todo* $x \in X$
   - *ii)* $(\alpha_1 \alpha_2)x = \alpha_1(\alpha_2 x)$
   - *iii)* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   - *iv)* $(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$

**Definición 1.1.2.** *Un subconjunto no vacío $W$ de un espacio vectorial $V$ es un subespacio de $V$ si y solo si $W$, conjuntamente con las operaciones de suma y multiplicación escalar definidas en $V$, es en si mismo un espacio vectorial*

En un espacio vectorial $V$, podemos escribir el vector cero como una combinación lineal de un conjunto finito de vectores, haciendo todos los escalares iguales a cero. surge la pregunta de si dado un conjunto finito de vectores se puede escribir el vector cero como una combinación lineal de ellos siendo algunos de los escalares no nulos. La respuesta es, que depende del conjunto de vectores dado.

Consideremos los conjuntos de vectores $A = \{(1,2,0), (3,2,1), (7,6,2)\}$ y $B = \{(1,2,0), (3,2,1), (1,0,0)\}$. Para los vectores de $A$ vemos que $-1(1,2,0) + (-2)(3,2,1) + 1(7,6,2) = (0,0,0)$. Sin embargo para los vectores de $B$ se puede demostrar fácilmente que si $a(1,2,0)+b(3,2,1)+c(1,0,0) = (0,0,0)$, entonces $a = b = c = 0$.

Esta diferencia en la forma como se puede expresar el vector cero como una combinación lineal de un conjunto dado de vectores, es muy importante. El conjunto de vectores $A$ es un conjunto linealmente dependiente y el conjunto de vectores $B$ es linealmente independiente de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 1.1.3.** *Un conjunto no vacío $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de vectores (diferentes) de un espacio vectorial $V$ es linealmente dependiente si y solo si existen escalares $r_1, r_2, \dots, r_n$ no todos cero, tales que $r_1X_1 + r_2X_2 + \cdots + r_nX_n = 0$*

La negación de dependencia lineal es independencia lineal.

**Definición 1.1.4.** *Si $B$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial $V$, entonces $B$ es una base para $V$ si y solo si*

*i) El espacio $V$ es generado por $B$.*

*ii) $B$ es un conjunto linealmente independiente.*

**Definición 1.1.5.** *La dimesión de un espacio vectorial $V \neq \{0\}$ es $n$ si y solo si $V$ tiene una base que contenga $n$ vectores. En el caso trivial en que $V = \{0\}$ diremos que $V$ tiene dimensión $0$.*

**Ejemplo 1.1.6.** Demostremos que la dimensión de $R_n$ es $n$.

*Demostración.* Consideremos el conjunto $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, donde $E_i$ es el vector $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ que tiene todas las componentes iguales a 0 con excepción de la $i$-ésima que es igual a 1.

Cualquier vector $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $R_n$ se puede escribir como $A = a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n$. Por tanto, $B$ genera a $R_n$. Por otra parte, si $b_1E_1 + b_2E_2 + \cdots + b_nE_n = 0$, entonces $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (0, 0, \dots, 0)$. Por tanto $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, y $B$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces $R_n$ tiene una base que contiene $n$ elementos y la dimensión de $R_n$ es $n$. ■

**Definición 1.1.7.** *Una colección $\tau$ de subconjuntos de un conjunto $X$ se dice que es una* ***topología*** *en $X$ si posee las siguientes propiedades:*

*i. $\phi \in \tau$ y $X \in \tau$.*

*ii. Si $A_i \in \tau$ para $i = 1, \dots, n$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.*

*iii. Si $A_i$ es una colección arbitraria de elementos de $\tau$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.*

Si $\tau$ es una topología en $X$, entonces $(X, \tau)$ es un **espacio topológico**, y los elementos de $\tau$ se denominan conjuntos abiertos en $X$.

Si $X$ y $X'$ son espacios topológicos, y si $f$ es una función de $X$ y $X'$, entonces se dice que $f$ es **continua** si $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $X$ para todo conjunto abierto $A$ en $X'$.

## 1.2. Espacios Métricos

**Definición 1.2.1.** *Sea $X$ un conjunto no vacío, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se dice una métrica (o una distancia) si para todo $x, y, z \in X$ se cumple que:*

*i)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

*ii)* $d(x, y) = d(y, x); \forall x, y \in X$ *(Simetría)*

*iii)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \forall x, y, z \in X$ *(Desigualdad Triangular)*

Al par $(X, d)$ se le llama espacio métrico.

**Definición 1.2.2.** *Sea $E$ un espacio métrico, $p_0 \in E$, $r > 0$. Entonces la bola abierta en $E$ de centro $p_0$ y radio $r$ es el conjunto*

$$B(p_0; r) = \{p \in E / d(p_0, p) < r\}$$

A veces se escribe $B_E(p_0; r)$ para enfatizar el hecho de que sus puntos son de E.

La bola cerrada en $E$ de centro $p_0$ y radio $r$ es el conjunto

$$\overline{B}(p_0; r) = \{p \in E / d(p_0, p) \leq r\}$$

También se escribe $\overline{B}_E(p_0; r)$.

**Definición 1.2.3.** *Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $S \subset E$, $a \in S$, $a$ es llamado un punto interior de $S$ en $(E, d)$ si*

$$\exists r > 0 : \ B_E(a; r) \subset S$$

**Definición 1.2.4.** *Si $(E, d)$ es un espacio métrico y $S \subset E$, se define el interior de $S$, como el conjunto $\{a \in S : a$ es punto interior de $S\}$, se denota $Int(S)$.*

**Definición 1.2.5.** *Si $(E, d)$ es un espacio métrico y $S \subset E$ diremos que $S$ es abierto en $E$ si todos sus puntos son interiores, esto es si*

$$(\forall s \in S)\ (s \in Int(S))$$

De la definición es claro que para $(E, d)$ espacio métrico, $S \subset E$

$$S \text{ es abierto en } E \longleftrightarrow S = Int(S)$$

**Definición 1.2.6.** *Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $a \in E$ y $V \subset E$. Se dice que $V$ es una vecindad de $a$ si existe $r > 0$ tal que*

$$a \in B_E(a; r) \subset V$$

**Definición 1.2.7.** *Dado un espacio métrico $(E, d)$ y $S \subset E$ se dice que $S$ es cerrado en $(E, d)$ si $E \setminus S$ (el complemento de $S$ con respecto a $E$) es abierto en $(E, d)$.*

**Definición 1.2.8.** *Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $S \subset E$. Se dice que $S$ es acotado si existe una bola (abierta o cerrada) que contenga a $S$.*

**Definición 1.2.9.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Una sucesión de puntos de $X$ es una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}^+ & \longrightarrow & X \\ n & \longrightarrow & f(n) = x_n \end{array}$$

Es costumbre denotar las sucesiones así:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n), \quad \{x_n\}, \quad x_n, n = 1,2,3,...$$

**Definición 1.2.10.** *Sea $\{p_n\}$ una sucesión de puntos del espacio métrico $(E,d)$. Un punto $p \in E$ es llamado un límite de la sucesión $p_n, n = 1,2,...$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall n \geq N \quad d(p,p_n) < \epsilon$$

.

Si la sucesión $\{p_n\}$ tiene un límite diremos que la sucesión es convergente y si $p \in E$ es un límite de la sucesión $\{p_n\}$ diremos que la sucesión $\{p_n\}$ converge a $p$.

**Teorema 1.2.11.** *Sea $S$ un subconjunto del espacio métrico $E$. Entonces $S$ es cerrado en $E$ si y solo si $S$ contiene todos los límites de sucesiones de puntos de $S$.*

Nota: Este teorema es una caracterización de la noción de conjunto cerrado, en el lenguaje de sucesiones.

*Demostración.* ($\Longrightarrow$) Supongamos que $S \subset E$ es cerrado, y sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, una sucesión de puntos de $S$, que converge a $p \in E$. Debemos demostrar que $p \in S$.

Supongamos, por el absurdo que $p \notin S$, es decir $p \in E \backslash S = S^c$. Como $E \backslash S$ es abierto, existe $\epsilon > 0$, tal que $B(p;\epsilon) \subset E \backslash S$. De otra parte como $p_n \to p$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$ entonces $p_n \in B(p;\epsilon) \subset E \backslash S$ (Absurdo! porque $p_n \in S$), luego $p \in S$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $S$ contiene todos los límites de sucesiones de puntos de $S$. Si $S$ no fuera cerrado en $E$, entonces, $E \backslash S$ no sería abierto; es decir, existiría $p \in E \backslash S$, que no es punto interior de $E \backslash S$; es decir, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, existiría $p_n \in S$, tal que $d(p_n, n) < \frac{1}{n}$; esto es $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $p$ y $p \notin S$. (Absurdo!), Luego $S$ es cerrado. ■

**Definición 1.2.12.** *Sean $(E,d)$ un espacio métrico y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $E$; $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall m,n \geq N \quad d(p_m,p_n) < \epsilon$$

**Proposición 1.2.13.** *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

*Demostración.* Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $(E,d)$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p \in E$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\{p_n\} \to p$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall n \geq N \quad d(p_n,p) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, si $m,n \geq N \quad d(p_m,p_n) \leq d(p_m,p) + d(p,p_n) < \epsilon$; luego $\{p_n\}$ es de Cauchy. ■

Más generalmente, si en un espacio métrico $(X,d)$ la sucesión $x_n$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio $X \backslash \{x\}$, pero no converge en dicho subespacio.

**Proposición 1.2.14.** *Una sucesión de Cauchy en un espacio métrico es acotada.*

*Demostración.* Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico $(E,d)$. Sea $\epsilon = 1 > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $m,n \geq N$, $d(p_m,p_n) < 1$.

Sea $M = max\{d(p_1,p_N), d(p_2,p_N), ..., d(p_{N-1},p_N), 1\}, M > 0$ (el máximo de un conjunto finito y no vacío de números reales siempre existe). Entonces $\forall m \in \mathbb{Z}^+, \quad d(p_m,p_N) < M$, es decir $\forall m \in \mathbb{Z}^+, p_m \in B(p_N;M)$, y esto significa que $\{p_m\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$ es acotada. ■

**Definición 1.2.15.** *Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy converge a un punto del espacio.*

**Proposición 1.2.16.** *Un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo.*

*Demostración.* Sea $(E,d)$ un espacio métrico completo y $F \subset E$ un subconjunto cerrado de $E$. Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(F,d^*)$ donde $d^* = \frac{d}{1+d}$. Entonces, claramente $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(E,d)$. Como $E$ es completo existe $p \in E$, tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Como $F$ es cerrado y siendo $\{p_n\}$ una sucesión de puntos de $F$, podemos concluir por el teorema 1.2.11 que $p \in F$. Por lo tanto $F$ es completo. ■

**Definición 1.2.17.** *Un espacio métrico $(E,d)$ es conexo si los únicos subconjuntos de $E$ que son a la vez abiertos y cerrados en $(E,d)$ son $E$ y $\emptyset$.*

*Un subconjunto $S$ de un espacio métrico $(E,d)$ es conexo si el subespacio métrico $(S,d^*)$, $[d^* = d|_{S\times S}]$ es conexo.*

De la definición se sigue que si un espacio métrico $(E,d)$ no es conexo, existe $A \subset E,\ A \neq E,\ A \neq \emptyset$, tal que $A$ es abierto y cerrado en $(E,d)$. Por lo tanto $A^c \neq E,\ A^c \neq \emptyset$ y $A^c$ es a la vez abierto y cerrado. Haciendo $B = A^c$, $E$ puede expresarse como $E = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos. Recíprocamente si un espacio métrico $(E,d)$ puede ser escrito como $E = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos, entonces $E$ no es conexo, porque $A \neq E,\ A \neq \emptyset$ (puesto que $A$ y $B$ son disjuntos y diferente de $\emptyset$) y $A$ es abierto (dado) y cerrado (ya que su complemento $B$ es abierto).

**Definición 1.2.18.** *Si $S \subset M$, un punto $x$ de $M$ se llama punto adherente de $S$ si cada bola $B_M(x;r)$ contiene por lo menos un punto de $S$.*

**Definición 1.2.19.** *Si $x$ es adherente de $S \setminus \{x\}$, entonces se dice que $x$ es un punto de acumulación de $S$.*

**Definición 1.2.20.** *La clausura $\overline{S}$ de $S$ es el conjunto de todos los puntos adherentes de $S$, y el conjunto derivado $S'$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $S$.*

**Definición 1.2.21.** *Sea $X \subset Y$, diremos que $X$ es denso en $Y$ si $Y \subset \overline{X}$.*

**Definición 1.2.22.** *Un espacio métrico $M$ es separable si posee un subconjunto numerable $A$ que sea denso en $M$*

**Definición 1.2.23.** *Un espacio métrico $S$ se dice que es no conexo si $S = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son conjuntos abiertos disjuntos de $S$, no vacíos. Diremos que $S$ es conexo si no es no conexo.*

**Definición 1.2.24.** *Un conjunto $S$ se llama compacto si y solo si cada recubrimiento abierto de $S$ contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a $S$.*

**Definición 1.2.25.** *Un conjunto $S$ se llama convexo si, para cada par de puntos $x$ e $y$ de $S$ y cada número real $\theta$ que satisfaga $0 < \theta < 1$, se verifica que $\theta x + (1-\theta) y \in S$*

## 1.3. Aplicaciones Topológicas (Homeomorfismo)

**Definición 1.3.1.** *Sea $f : S \to T$ una función de un espacio métrico $(S, d_S)$ en otro $(T, d_T)$. Supongamos también que $f$ es uno a uno en $S$, de modo que la función inversa $f^{-1}$ existe. Si $f$ es continua sobre $S$ y $f^{-1}$ es continua sobre $f(S)$, entonces diremos que $f$ es una aplicación topológica o un homeomorfismo, y los espacios métricos $(S, d_S)$ y $(f(S), d_T)$ se llaman homeomorfos.*

Si $f$ es un homeomorfismo, entonces$f^{-1}$ también lo es. Un homeomorfismo aplica subconjuntos abiertos de $S$ en subconjuntos abiertos de $f(S)$. Aplica asimismo subconjuntos cerrados de $S$ en subconjuntos cerrados de $f(S)$.

Una propiedad de un conjunto que permanezca invariante frente a las distintas aplicaciones topológicas, se llama una propiedad topológica. Así pues, las propiedades de ser abierto, cerrado, compacto son propiedades topológicas.

Un ejemplo importante de homeomorfismo lo constituyen las isometrías. Se trata de una aplicación $f : S \to T$ que es uno a uno sobre $S$ y que conserva la métrica; es decir,

$$d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y)$$

para todos los puntos $x$ e $y$ de $S$. Si existe una isometría de $(S, d_S)$ en $(f(S), d_T)$, los dos espacios métricos se llaman isométricos.

## 1.4. Espacios Normados

Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida, como caso particular de espacios normados tenemos los espacios de Banach. Estos espacios generalizan los conceptos de $\mathbb{R}^n$, tratándose de espacios de dimensión infinita aquí es posible introducir la noción de una sucesión de vectores; teniendo la posibilidad de tener a los complejos como cuerpo de escalares.

Una sucesión será denotada por $\{u_n\}$. Si $X$ es un espacio normado y $\{u_n\}$ una sucesión en $X$, la notación $\lim\limits_{n\to\infty} \{u_n\} = u$, significa que la sucesión $\{u_n\}$ converge a $u$ cuando $n \to \infty$ y también lo escribiremos como $u_n \to u$ o equivalentemente $\|u_n - u\| \to 0$. Además la sucesión $\{u_n\}$ se dice que es de Cauchy si $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\| = 0$ o equivalentemente $\forall \epsilon > 0, \exists N_0(\epsilon)$ tal que $\|u_n - u_m\| < \epsilon$ $\forall m, n > N_0(\epsilon)$.

**Definición 1.4.1.** *Sea $X$ un espacio vectorial complejo. La aplicación $\|.\| : X \longrightarrow [0, \infty)$, es llamada una norma si satisface las condiciones:*

*(N1)* $\|u\| \geq 0$ *(No Negatividad)*

*(N2)* $\|u\| = 0$ *si y sólo si* $u = 0$ *(Definida Positiva)*

*(N3)* $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ *(Homogeneidad)*

*(N4)* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Desigualdad Triangular)*

*Para todo $u, v \in X, \alpha \in \mathbb{C}$*

El espacio vectorial $X$, junto a la norma $\|.\|$, es llamado un espacio normado y escribiremos $X = (X, \|.\|)$. En todo espacio normado $X$ es factible introducir la estructura de espacio métrico con la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

y es llamada la métrica inducida por la norma. El número $\|u-v\|$ representa la distancia entre los puntos $u$ y $v$.

**Proposición 1.4.2.** *En un espacio normado toda sucesión convergente es de Cauchy.*

*Demostración.* Sea la sucesión $\{u_n\}$ convergente a $u$, entonces $\{u_n\} \to u$ o también $\|u_n - n\| \to 0$ para todo $\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) > 0$ tal que $\|u_n - n\| < \dfrac{\epsilon}{2}$; para todo $n \geq N(\epsilon)$. Mostraremos que dicha sucesión convergente es de Cauchy. En efecto: $\|u_n - u_m\| = \|u_n - u_m + u - u\| = \|(u_n - u) + (u - u_m)\| \leq \|(u_n - u)\| + \|(u - u_m)\| < \epsilon$, para todo $n, m \geq N(\epsilon)$. Luego $\|u_n - u_m\| \to 0$.

Por lo tanto $\{u_n\}$ es de Cauchy. ■

## 1.5. Espacios de Banach

**Definición 1.5.1.** *Un espacio vectorial $X$ se dice que es completo, si toda sucesión de Cauchy $\{u_n\}$ en $X$ es una sucesión convergente a un elemento $u$ de $X$.*

**Definición 1.5.2.** *El espacio normado $X$ es llamado espacio de Banach, si $X$ es completo (completo en la métrica definida por la norma).*

**Proposición 1.5.3.** *Sea $M \subseteq X$, donde $X$ es un espacio normado, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*i) $M$ es cerrado*

*ii) Si $\{u_n\} \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $u_n \to u$, esto implica que $u \in M$*

**Ejemplo 1.5.4.** Sea $l^p$ el espacio de sucesiones, donde $p$ es fijo, además $1 \leq p < \infty$

$$l^p = \left\{ u = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots) / \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach con norma dada por

$$\|u\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Esto induce una métrica definida por:

$$d(u,v) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Demostración.* i) Primero probaremos que $l^p$ es un espacio normado, para ello mostraremos que satisface las condiciones de una norma.

En efecto:

Sean $u, v \in l^p$, y $\alpha \in \mathbb{C}$,con

$$u = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \quad v = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$$

Luego,

$$\|u\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \|v\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Veamos que $\left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ satisface las condiciones de una norma.

(N1) $\|u\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$

(N2) $\|u\| = 0$ se deduce inmediatamente si y sólo si $u = 0$

(N3) $\|\alpha u\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, luego $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

(N4) Usando la desigualdad de Minkowski, tenemos:

$$\|u+v\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego, $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$.

Por lo tanto $l^p$ es un espacio normado.

(ii) Ahora probemos que $l^p$ es un espacio completo, es decir toda sucesión de Cauchy en $l^p$ es convergente

En efecto:

Sea $\{u_m\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $l^p$, además $\{u_m\} = \{\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots\}$. Mostraremos que $\{u_m\} \to u$.

Observemos que si $\{u_m\}$ es de Cauchy, entonces para cada $\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall m, n > N(\epsilon)$, se tiene:

$$d(u_m, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^m - \xi_j^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \tag{1.5.1}$$

De aquí tenemos que para cada $j = 1, 2, ...$

$$|\xi_j^m - \xi_j^n| < \epsilon \tag{1.5.2}$$

De (1.5.2) observamos que para un $j$ fijo, $\{\xi_j^m\} = \{\xi_j^1, \xi_j^2, ...\}$ es una sucesión de Cauchy, además es convergente, ya que $\mathbb{C}$ es completo, entonces digamos que $\{\xi_j^m\} \to \xi_j$, cuando $m \to \infty$.

Para probar que $\{u_m\} \to u$, primero definamos $u = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ además se puede observar de (1.5.1) que para todo $m, n > N(\epsilon)$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^m - \xi_j^n|^p < \epsilon^p \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Sin embargo cuando $n \to \infty$, tenemos que para $m > N(\epsilon)$

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^m - \xi_j|^p < \epsilon^p \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Ahora hagamos $k \to \infty$, entonces para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^m - \xi_j|^p \leq \epsilon^p \tag{1.5.3}$$

Es decir $d(u_m, u) \leq \epsilon$, esto demuestra que $\{u_m\} \to u$.

(iii) Ahora probaremos que $u \in l^p$

En efecto:

De (1.5.3) tenemos que $u_m - u = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$, pues

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

Además por la desigualdad de Minskowsky, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \xi_j^m - \xi_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m + (\xi_j - \xi_j^m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \xi_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Entonces $u \in l^p$

Por lo tanto $l^p$ es un espacio de Banach. ■

**Teorema 1.5.5.** ***(Subespacio completo).*** *Un subespacio $M$ de un espacio normado completo $X$ es completo si y solo si $M$ es cerrado en $X$.*

## 1.6. Espacios de Hilbert

En un espacio normado podemos sumar vectores y multiplicar vectores por un escalar, además la norma en dicho espacio generaliza el concepto de longitud de un vector, sin embargo lo que se pierde todavía en un espacio nomado, y en lo que querríamos tener si es posible, es un análogo del producto punto

$$a.b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

y la fórmula notable

$$|a| = \sqrt{a.a}$$

y la condición de ortogonalidad (perpendicularidad)

$$a.b = 0$$

De allí la pregunta surge si el producto punto y la ortogonalidad se puede generalizar a espacios vectoriales arbitrarios, en efecto esto se puede hacer y llevar a espacios producto interno y espacios producto interno completos llamados espacios de Hilbert. El espacio producto interno es un caso especial de un espacio normado, su teoría es rica y se podria decir que este espacio es una generalización del espacio euclideano, pues conservan algunas características de tal espacio, uno de sus conceptos importantes es el de la ortogonalidad. Además el espacio de Hilbert $H$ se puede representar como la suma directa de un subespacio cerrado y su complemento ortogonal. Otro hecho importante es que toda funcional lineal acotada sobre $H$ puede ser representada en términos del producto interno, esto es el teorema de Riesz.

**Definición 1.6.1.** *Sea $H$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno sobre $H$ es una aplicación*

$$\langle .\,,.\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

*Que asocia a cada par de vectores $u, v$ un número complejo denotado por $\langle u, v\rangle$ satisfaciendo:*

*(H1)* $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

*(H2)* $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$

*(H3)* $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *(simetría hermitiana)*

*(H4)* $\langle u, u\rangle > 0$ *y* $\langle u, u\rangle = 0$ *si y sólo si* $u = 0$

*Para todo $u, v, w \in H, \alpha \in \mathbb{C}$.*

El producto interno es sesquilineal, es decir es lineal con respecto al primer factor y conjugado lineal con respecto al segundo factor, ya que de (H1) y (H3) resultan:

(1) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(2) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$

Las tres primeras condiciones juntas son conocidas como sesquilineales, y la cuarta es llamada positiva. De este modo un producto interno es una forma sesquilineal positiva

Un producto interno sobre $H$ define una norma $\|.\| : H \to [0,\infty)$, dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

y una métrica sobre $H$ dada por

$$d(u, v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v\,, u-v\rangle}$$

El par $(H, \langle,\rangle)$ define un espacio pre-Hilbert o espacio euclídeo.

**Definición 1.6.2.** *Un espacio pre-Hilbert $(H, \langle,\rangle)$ se dice que es un espacio de Hilbert si es completo (completo en la métrica definida por el producto interno)*

También el producto interno, definición (1.6.1) puede ser escrito en términos de la norma, va la llamada identidad de polarización

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right)$$

**Ejemplo 1.6.3.** El espacio $l^2 = \{u = (\xi_j)/\sum_1^{\infty}|\xi_j|^2 < \infty\}$ es un espacio de Hilbert, con producto interno definido por

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j}$$

## 1.7. Propiedades Geométricas de los Espacios de Hilbert

Una de las propiedades geométricas de los espacio de Hilbert es la ley del paralelogramo, otro aspecto geométrico de este espacio es la noción de ortogonalidad, así como en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es conocida esta definición que es de amplio uso en la teoría geométrica de $\mathbb{R}^n$, pues tal noción es también definida en los espacio pre-hilbertianos.

### 1.7.1. Ortogonalidad

**Definición 1.7.1.** *Dos vectores $u, v$ en un espacio pre-hilbertiano $H$ son ortogonales si*

$$\langle u, v\rangle = 0$$

*En este caso escribiremos $u \perp v$.*

**Definición 1.7.2.** *Dados $A$ y $B$ subconjuntos de un espacio pre-hilbertiano $H$, diremos que $A$ es ortogonal a $B$, si $u \perp v \ \ \forall u \in A$ y $\forall v \in B$ y escribiremos $A \perp B$*

**Definición 1.7.3.** *El complemento ortogonal de A, denotado por $A^{\perp}$, se define como:*

$$A^{\perp} = \{u \in H / u \perp A\}$$

**Teorema 1.7.4.** ***(Teorema de Pitágoras).*** *En un espacio pre-hilbertiano, si $u \perp v$, entonces se cumple:*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

### 1.7.2. Complemento ortogonal y suma directa

En un espacio métrico $X$ la distancia $\delta$ de un elemento $u \in X$ a un conjunto no vacío $M \subset H$ viene dado por:

$$\delta = \inf_{v \in M} d(u, v)$$

y en un espacio normado esta viene dada por:

$$\delta = \inf_{v \in M} \|u, v\|$$

**Teorema 1.7.5.** ***(Vector minimizante).*** *Sea $X$ un espacio pre-hilbertiano y $M \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y completo (en la métrica inducida por el producto interno). Entonces para cada $x \in X$, existe un único elemento $y \in X$ tal que,*

$$\delta = \inf_{y_0 \in M} \|x - y_0\| = \|x - y\|$$

**Lema 1.7.6.** *En el teorema anterior sea $M$ un subespacio completo de $Y$ y $u \in X$ fijo, entonces $z = x - y$ es ortogonal a $Y$.*

**Definición 1.7.7.** *Un espacio vectorial $U$ se dice que es la suma directa de dos subespacios $V$ y $W$ y escribiremos*

$$U = V \oplus W$$

*tal que $V \cap W = \{0\}$, si cada $u \in U$ tiene una única representación*

$$u = v + w \qquad v \in V, w \in W$$

Entonces $W$ es llamado el complemento algebraico de $V$ en $U$ y viceversa, así de este modo $V$ y $W$ son llamados subespacios complementarios en $U$.

Por ejemplo, si $Y = \mathbb{R}$ es un subespacio del plano euclideano $\mathbb{R}^2$, entonces $Y$ tiene infinitos complementos algebraicos en $\mathbb{R}^2$, donde cada uno de ellos es la recta real. Pero es más conveniente elegir un complemento que sea perpendicular, nosotros hacemos uso de este hecho cuando elegimos un sistema de coordenadas cartesianas. En $\mathbb{R}^3$ la situación es la misma.

Similarmente, en el caso de un espacio de Hilbert $H$, nos interesa representar $H$ como una suma directa de un subespacio cerrado $V$ y su complemento ortogonal $V^{\perp}$

$$V^{\perp} = \{u \in H / u \perp V\}$$

**Teorema 1.7.8.** ***(Teorema de Proyección).*** *Sea $V$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$. Entonces*

$$H = V \oplus W, \qquad W = V^{\perp}$$

*Probaremos que esta representación es única.*

*Demostración.* Ya que $H$ es completo y $V$ es un subespacio cerrado en $H$, entonces por el teorema 1.5.5 se tiene que $V$ es completo. Además $V$ es conexo, luego usando el teorema 1.7.5 y el lema 1.7.6, tenemos que $\forall u \in H, \exists v \in V$ tal que $u = v + w$ con $w \in W = V^{\perp}$.

Probemos que esta representación es única.

En efecto:

Asumamos que existe $u = v_1 + w_1$ con $v_1 \in V, w_1 \in W = V^{\perp}$, pero tenemos también que $u = v + w$, luego $v + w = v_1 + w_1$, de este modo $v - v_1 = w_1 - w$. Desde que $(v - v_1) \in V$ y $v - v_1 = w - w_1 \in W = V^{\perp}$, entonces $(v - v_1) \in V \bigcap V^{\perp} = \{0\}$, esto implica que $v = v_1$ y $w = w_1$, luego esta representación es única. Por tanto,

$$H = V \oplus W, \qquad W = V^{\perp}$$

■

**Definición 1.7.9.** *Una funcional lineal en un espacio de Hilbert $H$ es una función*

$$f : H \to \mathbb{C}$$

*tal que:*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $u, v \in H$

**Definición 1.7.10.** *Una funcional lineal es acotada si existe una constante $c \geq 0$ tal que*

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in H$$

A continuación veremos que toda funcional lineal acotada sobre un espacio de Hilbert $H$ puede ser representado en términos del producto interno, esto es el lema de Riesz-Frechet.

**Lema 1.7.11.** ***(Riesz - Fréchet).*** *Sea $f : H \to \mathbb{C}$ una funcional lineal acotada. Entonces existe un único $z \in H$ que se cumple*

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{1.7.1}$$

*donde* $\|z| = \|f\|$

*Demostración.* Probaremos que:

(a) $f$ tiene una representación $f(u) = \langle u, v \rangle$

(b) $v$ es único

(c) $\|v\| = \|f\|$

Si $f = 0$, luego $(a), (b)$ y $(c)$ se cumplen si tomamos $v = 0$. Supongamos entonces que $f \neq 0$.

(a) Consideremos el espacio nulo de $f$

$$\mathcal{N}(f) = \{u \in H / f(u) = 0\}$$

Probaremos que este espacio es cerrado en $H$

En efecto:

Sea $\{u_n\} \in \mathcal{N}(f)$ convergente a un elemento $u \in H$, entonces $f(u_n) = 0\ \forall n$. Como $u_n \to u$, luego por la continuidad de $f$, tenemos $f(u_n) \to f(u)$; de aquí inferimos que $f(u) = 0$, es decir $u \in \mathcal{N}(f)$.

Luego $\mathcal{N}$ es un subespacio cerrado en $H$.

Desde que $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio cerrado en $H$, por el teorema de proyección tenemos que si $f \neq 0$, entonces $\mathcal{N}(f) \neq H$, de este modo $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Como $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$, entonces existe un $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ con $v_0 \neq 0$.

Ahora sea

$$w = f(u)v_0 - f(v_0)u$$

Aplicando $f$ tenemos

$$f(w) = f(f(u)v_0 - f(v_0)u) = f(u)f(v_0) - f(v_0)f(u) = 0$$

Esto muestra que $w \in \mathcal{N}(f)$.

Desde que $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ y $w \in \mathcal{N}(f)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \langle w, v_0\rangle &= \langle f(u)v_0 - f(v_0)u, v_0\rangle \\ &= f(u)\langle v_0, v_0\rangle - f(v_0)\langle u, v_0\rangle \end{aligned}$$

Como $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, entonces $\langle v_0, v_0\rangle = \|v_0\|^2 \neq 0$, luego despejando $f(u)$ de la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}\langle u, v_0\rangle \\ &= \langle u, \overline{\frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}}\, v_0\rangle \\ &= \langle u, v\rangle, \text{ donde } \quad v = \overline{\frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}}\, v_0 \end{aligned}$$

(b) Probaremos que $v$ es único.

En efecto:

Supongamos que para todo $u \in H$ exista un $v_1$ satisfaciendo (1.7.1), luego

$$f(u) = \langle u, v\rangle = \langle u, v_1\rangle$$

Entonces

$$\langle u, v - v_1\rangle = 0 \quad \text{para todo} u$$

Eligiendo en particular $u = v - v_1$, tenemos

$$\langle u, v - v_1 \rangle = \langle v - v_1, v - v_1 \rangle = \| v - v_1 \|^2 = 0$$

De aquí $v - v_1 = 0$, lo cual implica que $v = v_1$ Luego $v$ es único.

(c) Finalmente probaremos que $\| f \| = \| v \|$

En efecto:

Si $f = 0$, entonces $v = 0$ estaria probado, asumamos entonces que $f \neq 0$

- Probaremos primero que $\| v \| \leq \| f \|$
  Haciendo $u = v$ en $f(u) = \langle u, v \rangle$, tenemos $\| v \|^2 = \langle u, v \rangle = f(u) \leq \| f \| \| v \|$, Luego $\| v \| \leq \| f \|$
- Ahora probaremos que $\| f \| \leq \| v \|$,
  Bien como $| f(u) | \leq |\langle u, v \rangle| \leq \| u \| \| v \|$. Entonces

$$\sup_{\|u\|=1} | f(u) | \leq \sup_{\|u\|=1} \| u \| \| v \|$$
$$\| f \| \leq \| v \|$$

Luego $\| f \| \leq \| v \|$
De esta forma se deduce que $\| f \| = \| v \|$

Por lo tanto de $(a), (b)$ y $(c)$ tenemos que existe un único $z \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$ y $\| z \| = \| f \|$. ■

CAPÍTULO 2

# OPERADORES LINEALES

## 2.1. Operadores Lineales

En esta sección haremos un estudio de operdares lineales no acotados sobre espacios de Hilbert, esto nos llevará a la noción de operadores simétricos y autoadjuntos.

Excepto se espacifique lo contrario $H, H_1$ y $H_2$ denotarán espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

**Definición 2.1.1.** *Sean $H_1$ y $H_2$ espacios de Hilbert. Un operador Lineal $T$ es una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ que verifica la condición:*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$$

*para todo $u, v \in \mathcal{D}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*

**Notación:** Al operador $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$, lo denotaremos como $T(H_1 \to H_2)$
El **dominio** de $T$, denotado por $\mathcal{D}(T)$, es un subespacio de $H_1$ y se define como

$$\mathcal{D} = \{u \in H_1 / \exists v \in H_2, v = Tu\}$$

El **rango** de $T$ denotado por $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio de $H_2$ y se define como

$$\mathcal{R}(T) = \{v \in H_2 / \exists u \in \mathcal{D}(T),\ Tu = v\}$$

El **espacio nulo** de $T$ es un subespacio de $H_1$ y se define como

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in \mathcal{D}(T) / Tu = 0\}$$

Definimos también el **rank**, **nulidad** y **deficiencia** de $T$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} rank(T) &= dim(R(T)) \\ nul(T) &= dim(N(T)) \\ def(T) &= codim(R(T)) \end{aligned}$$

Los operadores especiales $I$ (**identidad**) y 0 (**cero**) de $H_1$ a $H_2$ (ambos con dominio $H_1$) están dados por: $I_u = u$ y $O_u = 0$.

Si $S$ y $T$ son dos operadores de $H_1 \to H_2$ se dice que son **iguales** si $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, y para todo $u \in \mathcal{D}(S)$, $Su = Tu$; y escribiremos $S = T$.

Dos operadores que no están definidos en todo su dominio, nos lleva a definir restricción y extensión de un operador.

Si $S$ y $T$ son dos operadores de $H_1 \to H_2$ tales que $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$ y $Su = Tu \ \forall u \in \mathcal{D}(S)$, entonces $T$ es llamado una **extensión** de $S$ (en símbolos $S \subset T$), y $S$ es una **restricción** de $T$.

**Definición 2.1.2.** *La inversa $T^{-1}$ de un operador $T(H_1 \to H_2)$ es definido si y solo si la aplicación es inyectiva.*

$T$ es **inyectiva** si y solo si $Tu = 0$ implica que $u = 0$.

$T^{-1}$ es por definición el operador $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to H_1$ tal que $T^{-1}Tu = u$.
Así tenemos:

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) \ ; \ \mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$$
$$T^{-1}(Tu) = u \ ; \ u \in \mathcal{D}(T)$$
$$T(T^{-1}v) = v \ ; \ v \in \mathcal{R}(T)$$

Diremos que $T$ es invertible si $T^{-1}$ existe.

**Definición 2.1.3.** *El operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H_2$ se dice que es* ***densamente definido*** *en $H_1$, si $\mathcal{D}(T)$ es denso en $H_1$.*

**Definición 2.1.4.** *Sean $S$ y $T$ operadores de $H_1 \to H_2$. La* ***suma*** *de $S$ y $T$ es el operador $S+T$, definido por:*

$$(S+T)u = Su + Tu \quad \forall u \in \mathcal{D}(S+T)$$

*donde,*

$$\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$$

**Definición 2.1.5.** *La* ***multiplicación*** *de un operador $T$ de $H_1 \to H_2$ con un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ se define por*

$$(\alpha T)u = \alpha(Tu) \quad \forall u \in \mathcal{D}(\alpha T)$$

*donde,*

$$\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T)$$

**Definición 2.1.6.** *La* ***composición*** *de un operador lineal $T$ de $H_1 \to H_2$ con un operador $S$ de $(H_2 \to H_3)$, es el operador lineal $ST : H_1 \to H_3$ definido por*

$$(ST)u = S(Tu) \quad \forall u \in \mathcal{D}(ST)$$

*donde,*

$$\mathcal{D}(ST) = \{u \in \mathcal{D}(T) / Tu \in \mathcal{D}(S)\} = S^{-1}\mathcal{D}(T)$$

**Definición 2.1.7.** *El operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H_2$, se dice que es* ***acotado*** *si existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $u \in \mathcal{D}(T)$*

$$\|Tu\| \leq c\|u\| \tag{2.1.1}$$

Notemos que en (2.1.1) la norma de la izquierda está sobre $H_2$ y la norma de la derecha está sobre $H_1$. Por simplicidad denotaremos ambas normas con el símbolo $\|.\|$. Si en (2.1.1) elegimos $c = \|u\|$, entonces obtenemos la fórmula,

$$\|Tu\| \leq \|T\|\|u\|$$

Si el operador lineal $T$ es acotado, se define la norma de $T$ como:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{u\in\mathcal{D}(T)-\{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \qquad (2.1.2)\\ \|T\| &\geq \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \ \forall u \neq 0 \\ \|u\|\|T\| &\geq \|Tu\| \end{aligned}$$

La norma definida (2.1.2) satisface la condición de norma.

Denotaremos como $B(H_1, H_2)$ al conjunto de operadores acotados $T : H_1 \to H_2$ con $\mathcal{D}(T) = H_1$. Esto es

$$B(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2 / T \ \textit{ es operador lineal acotado}\}$$

**Definición 2.1.8.** *Sea $T : X \to Y$ lineal. Se dice continuo en $x_0 \in D(T) \subset X$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / si\ \ d_1(x, x_0) < \delta \to d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

*esto es*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \|x - x_0\|_1 < \delta \to \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \epsilon$$

**Teorema 2.1.9.** *Todo operador continuo es acotado.*

*Demostración.* Sea $T : X \to Y$ continuo, sea $x_0 \in X$, $\epsilon = 1 > 0$

Luego si $x \in X$

- $x = 0 \Rightarrow \|T(x)\| = \|T(0)\| = \|0\| = 0 \leq 1\|0\| = 1\|x\|$.
- $x \neq 0$

Sea $x_1 = x_0 + \frac{1}{\|x\|}x$, entonces

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_0\| &= \|T(x_1 - x_0)\| \\ &= \|T(x_0 + \frac{x}{\|x\|} - x_0)\| \\ &= \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \\ &= \|\frac{1}{\|x\|}T(x)\| \\ &= \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \end{aligned}$$

Luego $\|T(x)\| \leq \|x\|$. Lo cual significa que $T$ es acotado. ■

**Ejemplo 2.1.10.** *(Operador Integral)*

Sea $X = C[a, b]$ con la norma

$$\|u\| = \max_{a\leq x\leq b} |u(x)|$$

donde $-\infty < a < b < \infty$. Supongamos que es continua la función

$$K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

Definamos el operador integral $T : X \to X$ tal que

$$Tu(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)dy, \quad \forall x \in [a,b]$$

Entonces, el operador $T$ es acotado y

$$\|T\| \leq \max_{a\leq x,\ y\leq b} |k(x,y)|$$

*Demostración.* Para probar que $T$ es acotado, primero observemos que la continuidad de $k$ sobre el cuadrado cerrado $[a,b]\times[a,b]$, implica que $k$ es acotado, es decir

$$|k(x,y)| \leq k_0 \quad \forall x \in [a,b]\times[a,b]$$

Además

$$\|u\| = \max_{a\leq x\leq b} |u(x)|$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{a\leq x\leq b} \left| \int_a^b k(x,y)u(y)dy \right| \\
&\leq \max_{a\leq x,\ y\leq b} \int_a^b |k(x,y)|\,|u(y)|dy \\
&\leq k_0 \max_{a\leq x,\ y\leq b} \int_a^b |u(y)|dy \\
&\leq k_0(b-a)\|u\|
\end{aligned}$$

Esto es $\|Tu\| \leq c\|u\|$ donde $c = k_0(b-a)$, de aquí $T$ es acotado.

■

### 2.1.1. Rango numérico, resolvente y espectro de operadores

En esta sección daremos una introducción al rango numérico y al espectro de un operador $T$ que actua de $H$ en $H$.

**Definición 2.1.11.** *El **rango numérico** de un operador lineal $T : H \to H$ se define como el conjunto*

$$w(T) = \{\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{C} / u \in \mathcal{D}(T), \|u\| = 1\}$$

$w(T)$ es un subconjunto del plano complejo, donde $\langle .\ ,\ .\rangle$ denota el producto interno en $H$ y es la imagen de la esfera unidad $\{u \in H / \|u\| = 1\}$ de $H$ bajo la forma cuadrática $u \mapsto \langle Tu, u\rangle$. Este conjunto en general no es abierto ni cerrado cerrado, una propiedad importante del rango numérico es su convexidad, esto es el teorema de Toeplitz-Hausdorff [1918-1919].

**Teorema 2.1.12.** *Si $T$ es un operador lineal $T : \mathcal{D} \to H$, entonces $w(T)$ es convexo*

Para la idea de una prueba, vea Kato [pag 571]

Sea $\Gamma$ la clausura de $w$, $\Gamma(T) = \overline{w(T)}$, tomado de esta forma $\Gamma$ es un conjunto convexo cerrado. Además sea $\Delta$ el complemento de $\Gamma$ en el plano complejo, es decir $\Delta(T) = \mathbb{C} - \Gamma(T)$, $\Delta(T)$ es un dominio, excepto si $\Gamma(T)$ es una franja en $\mathbb{C}$ acotada entre dos rectas paralelas. Entonces se puede obtener $\Delta(T) = \Delta_1(T) \cup \Delta_2(T)$, donde $\Delta_1$ y $\Delta_2$ son semiplanos.

**Definición 2.1.13.** *Sea un operador $T$ de $H$ en $H$ y sea $I$ la identidad sobre $H$, el número complejo $\zeta$ es un valor regular de $T$ si $(T - \zeta I)$ es un operador invertible.*

El conjunto de los valores regulares de $T$ se denomina el **conjunto resolvente** y lo denotamos como $\rho(T)$

$$\rho(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} / (T - \zeta I) \textit{es invertible}\}$$

Los valores no regulares de $T$ se llaman valores espectrales de $T$. El conjunto de todos los valores espectrales de $T$ se denomina **espectro** de $T$ y lo denotamos por $\sigma(T)$.

El espectro de $T$ es entonces,

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$$

Un número $\zeta \in \mathbb{C}$, se dice que es un valor propio de $T$ si $N(T - \zeta I) \neq 0$. Si $\zeta$ es un valor propio y $Tu = \zeta u$ con $u \neq 0$, entonces $u$ se llama **vector propio** de $T$ correspondiente al valor propio $\zeta$. Al subespacio $N(T - \zeta I)$ se le llama **subespacio propio** correspondiente al valor propio $\zeta$.

## 2.2. Operadores no Acotados

Los operadores $T$ no acotados, aparecen en muchas aplicaciones tanto en física como en matemática, el estudio de este tipo de operadores fue estimulado en mecánica cuántica por J. von Newmann y M. H. Stone. Los operadores no acotados son más complejos que los operadores acotados, ya que un operador acotado es definido en todo su espacio, mientras que los operadores no acotados no necesariamente, esto nos lleva a considerar el problema de dominios y extensiones. También vamos a ver que es necesario la densidad del dominio $\mathcal{D}(T)$ en $H_1$ para que exista el operador adjunto $T^*$ de un operador lineal $T$, así mismo la mayoría de operadores lineales no acotados que aparecen en la práctica son cerrados o por lo menos tienen una extensión cerrada.

En esta sección consideraremos operadores lineales $T : \mathcal{D}(H) \subset H_1 \to H_2$ cuyo dominio $\mathcal{D}(T)$ está en un espacio de Hilbert complejo.

### 2.2.1. Operadores cerrados

Sea $T$ un operador de $H_1$ a $H_2$. Una sucesión $\{u_n\} \in \mathcal{D}(T)$ se dice que es **T-convergente** a $u \in H_1$, si $\{u_n\}$ y $\{Tu_n\}$ son sucesiones de Cauchy y $u_n \to u$.

**Notación:**

Escribiremos $u_n \to_T u$ para indicar que $\{u_n\}$ es $T$-convergente a $u$.

**Definición 2.2.1.** *Sea $T$ un operador de $H_1 \to H_2$, se dice que $T$ es un **operador cerrado**, si para cada sucesión $\{u_n\}$ en $\mathcal{D}(T)$, $T$-convergente a $u \in H_1$, entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y $\{Tu_n\} \to Tu$ es decir:*

$$\textit{Si } u_n \to u \textit{ y } \{Tu_n\} \to v, \textit{ entonces } u \in \mathcal{D}(T) \textit{ y } T(u) = v \tag{2.2.1}$$

**Teorema 2.2.2.** *Si $T(H_1 \to H_2)$ es acotado, entonces $T$ es cerrado si y solo si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en $H_1$.*

*Demostración.* Sea una sucesión $\{u_n\} \in \mathcal{D}(T)$, convergente a $u \in H_1$, además como $T$ es un operador acotado, entonces es continuo, es decir $\{Tu_n\} \to v, v \in H_2$.

$\Rightarrow$ Si $T$ es cerrado entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y $Tu = v$, de esto se deduce que toda sucesión en $\mathcal{D}(T)$ tiene un límite en $\mathcal{D}(T)$; luego $\mathcal{D}(T)$ es cerrado.

$\Leftarrow$ Si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado, entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y

$$\|Tu_n - Tu\| \leq \|T\| \; \|u_n - u\| \to 0$$

De aquí $Tu_n \to Tu = v$; luego $T$ es cerrado. ■

Denotaremos al conjunto de todos los operadores cerrados de $H_1$ y $H_2$ por $C(H_1, H_2)$ y escribiremos $C(H, H) = C(H)$. Observemos que por el teorema anterior tenemos que $B(H_1, H_2) \subset C(H_1, H_2)$, ya que operadores en $B(H_1, H_2)$ tiene dominio cerrado en $H_1$

**Teorema 2.2.3.** *Si $T(H_1 \to H_2)$ es cerrado y $A(H_1 \to H_2)$es acotado tal que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$, entonces $T + A$ es cerrado.*

*Demostración.* Observemos que $\mathcal{D}(T + A) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T)$. Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$, $(T + A)$ convergente a $u \in H$.

Probaremos que $\{u_n\}$ es $T$-convergente.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu_m\| &= \|Tu_n - Tu_m + Au_n - Au_n + Au_m - Au_m\| \\
&= \|(T + A)u_n - (T + A)u_m - A(u_n - u_m)\| \\
&\leq \|(T + A)u_n - (T + A)u_m\| + \|A\| \; \|u_n - u_m\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Ya que $\{u_n\}$ es $(T + A)$ convergente. Esto prueba que $\{u_n\}$ es $T$-convergente.
Ahora como $T$ es cerrado, entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y $\{Tu_n\} \to Tu$. Luego por la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
\|(T + A)(u_n - u)\| &\leq \|T(u_n - u)\| + \|A(u_n - u)\| \\
&\leq \|Tu_n - Tu\| + k\|u_n - u\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

De aquí $\{(T + A)u_n\} \to (T + A)u$, como queriamos. Por tanto $T + A$ es cerrado.

■

**Teorema 2.2.4.** *Si $S \in C(H_1, H_2)$ y $T \in C(H_2, H_3)$ con $T^{-1} \in B(H_3, H_2)$, entonces $TS \in C(H_1, H_3)$*

*Demostración.* Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(TS)$, $TS$-convergente $u \in H_1$, entonces existe un $v in H_3$ tal que $\{TSu_n\} \to v$.

Observando que $\mathcal{D}(T^{-1}) = H_3$, y que $T^{-1}$ es acotado, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\|Su_n - T^{-1}v\| &= \|T^{-1}TSu_n - T^{-1}v\| \\
&= \|T^{-1}(TSu_n - v)\|
\end{aligned}$$

$$\leq k\|(TSu_n - v)\|$$
$$\to 0$$

De modo que $Su_n \to T^{-1}v$. De aquí $\{u_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(S)$, $S$-convergente a $u$. Además como $S$ es cerrado,

$$\{Su_n\} \to Su = T^{-1}v$$

Así que $TSu = v$. Luego $TS \in C(H_1, H_3)$, como se requeria. ∎

**Teorema 2.2.5.** *Si $T(H_1 \to H_2)$ tiene rango cerrado, y*

$$(\exists m \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in \mathcal{D}(T)) \quad \|Tu\| \geq m\|u\|$$

*entonces $T$ es cerrado.*

*Demostración.* Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$, $T$-convergente a $u \in H_1$, entonces $\{Tu_n\} \to v$ para algún $v \in H_2$. Pero $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, así que para algún $w \in \mathcal{D}(T)$,

$$Tw = v$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio, para todo $n$ tenemos $(u_n - w) \in \mathcal{D}(T)$ y por hipótesis, tenemos:

$$m\|u_n - w\| \leq \|T(u_n - w)\| = \|Tu_n - Tw\| = \|Tu_n - v\| \to 0$$

Luego $\|u_n - w\| \to 0$, es decir $u_n \to w$. Además como $\{u_n\}$ es $T$-convergente a $u$, tenemos que $u = w \in \mathcal{D}(T)$ y $Tu = v$. De aquí $T$ es cerrado. ∎

**Teorema 2.2.6.** *Si $T \in C(H_1 \to H_2)$, entonces $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $H_1$.*

*Demostración.* Consideremos el espacio nulo de $T$, $\mathcal{N}(T) = \{u \in \mathcal{D}(T) / Tu = 0\}$.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{N}(T)$ convergente a $u \in H_1$, para demostrar que $\mathcal{N}(T)$ es cerrado es suficiente verificar que $u \in \mathcal{N}(T)$.

En efecto:

Como $\{u_n\} \in Tu_n = 0$. De aquí tenemos

$$Tu = \lim_{n\to\infty} \{Tu_n\} = 0$$

Luego $Tu = 0$, es decir $u \in \mathcal{N}(T)$,

Por lo tanto $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $H_1$. ∎

### 2.2.2. Operadores adjuntos

Dado un operador $T(H_1 \ a \ H_2)$, podemos asociar el operador adjunto de $(H_2 \ a \ H_1)$ que está estrechamente relacionado a $T$. Estos operadores son sumamente útiles, y nos llevan a las importantes nociones de simetría y autoadjuntos.

**Definición 2.2.7.** *Los operadores $T(H_1 \ a \ H_2)$ y $S(H_2 \ a \ H_1)$ se dicen que son adjuntos si $\forall u \in \mathcal{D}(T)$ y $v \in \mathcal{D}(S)$. Tenemos,*

$$\langle Sv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle \tag{2.2.2}$$

En general, dado un operador $T$, existirán muchos operadores adjuntos a $T$; pero si $T$ es densamente definido, existe un único operador maximal $T^*$ adjunto a $T$. Esto significa que $T^*$ es adjunto a $T$ mientras que cualquier otro operador $S$ adjunto a $T$ será una restricción de $T^*$.

$T^*$ es llamado **operador adjunto** a $T$.

**Observación 2.2.8.** Si $T(H_1\ a\ H_2)$ es densamente definido sobre $H_1$, entonces existe un operador maximal $T^*(H_2\ a\ H_1)$ adjunto a $T$ tal que

$$T^* v = w$$

con dominio

$$\mathcal{D}(T^*) = \{v \in H_2 / \exists w \in H_1;\ \forall u \in \mathcal{D}(T)\ \langle v, Tu\rangle = \langle w, u\rangle\} \tag{2.2.3}$$

Probaremos que $T^*$ está bien definido.

En efecto:

Sean $w_1$ y $w_2 \in H_1$ satisfaciendo (2.2.3), entonces tenemos:

$$\langle v, Tu\rangle = \langle w_1, u\rangle \tag{2.2.4}$$

$$\langle v, Tu\rangle = \langle w_2, u\rangle \tag{2.2.5}$$

Igualando (2.2.4) y (2.2.5) resulta

$$\langle w_1, u\rangle = \langle w_2, u\rangle, \text{ y esto equivale a}$$
$$\langle w_1 - w_2, u\rangle = 0$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es denso en $H_1$, entonces $w_1 - w_2 = 0$. Luego $w_1 = w_2$, es decir $w \in H_1$ está únicamente por $v$. De aquí $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to H_1$ dado por $T^* v = w$ está bien definido.

Además $T^*$ es un operador adjunto maximal a $T$

### 2.2.3. Operadores simétricos y autoadjuntos

Antes de presentar la noción de operador autoadjunto para operadores lineales densamente definidos en $H$, el cual es muy importante en la teoría como en las aplicaciones, introduciremos brevemente el concepto de operador simétrico.

Trabajaremos con operadores de $H$ en $H$, es decir $H_1 = H_2 = H$.

**Definición 2.2.9.** *El operador $T(HaH)$ es un **operador simétrico**, si $T$ es densamente definido en $H$, y para todo $u, v \in \mathcal{D}(T)$ se cumple*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$$

**Ejemplo 2.2.10.** (**Operador Multiplicación**)

Sea el operador multiplicación $T$

$$T : \mathcal{D}(T) \to L^2(-\infty, +\infty)$$
$$u(x) \mapsto Tu(x) = xu(x)$$

donde $\mathcal{D}(T) \subset L^2(-\infty, +\infty)$ y $x \in \mathbb{R}$. el dominio está dado por

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in L^2(-\infty, +\infty) / xu \in L^2(-\infty, +\infty)\}$$

$$= \{u \in L^2(-\infty,+\infty) / \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|u(x)|^2 dx < \infty\}$$

se probará que el operador multiplicación

(a) No es acotado

(b) Es simétrico

*Demostración.* (a) Sea la sucesión $(u_n)$ en $\mathcal{D}(T)$ tal que

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x \in [n, n+1) \\ 0 & , \quad \text{si } x \notin [n, n+1) \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Luego por (2.2.6, tenemos)

$$\|u_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 dt = \int_{n}^{n+1} dx = 1$$

Entonces

$$\|u_n\| = 1$$

Además

$$\begin{aligned} \|Tu_n\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Tu_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |xu_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|u_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{n}^{n+1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - n^3\right] \\ &= n^2 + n + \frac{1}{3} \\ &> n^2 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \|Tu_n\|^2 &> n^2 \\ \|Tu_n\| &> n \\ \frac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} &> n \quad \text{pues} \|u_n\| = 1 \\ \|T\| &> n \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador $T$ no es acotado.

(b) puesto que $x \in \mathbb{R}$, entonces $x = \overline{x}$. Luego para todo $u, v \in \mathcal{D}(T)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle Tu, v\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} Tu(x)\overline{v(x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)\overline{v(x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx \\
&= \langle u, Tv\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T$ es un operador simétrico

■

**Lema 2.2.11.** *Un operador lineal $T$ densamente definido sobre un espacio de Hilbert complejo es simétrico si y solo si $T \subset T^*$*

*Demostración.* $\Rightarrow$ Si el operador lineal $T$ es simétrico, entonces

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(T) \tag{2.2.7}$$

Puesto que $T$ es densamente definido, entonces el operador adjunto $T^*$ existe, y se tiene

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle \quad \forall u, \in \mathcal{D}(T) \tag{2.2.8}$$

Igualando las relaciones (2.2.7) y (2.2.8), tenemos

$$\begin{aligned}
\langle u, Tv\rangle &= \langle u, T^* v\rangle, \text{ de donde} \\
\langle u, Tv - T^* v\rangle &= 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(T), \text{ por lo tanto} \\
(Tv - T^* v) &\in \mathcal{D}(T)^{\perp}
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es denso en $H$, entonces $\mathcal{D}(T)^{\perp} = \{0\}$. Luego

$$\begin{aligned}
Tv - T^* v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(T), \text{ así que} \\
Tv = T^* v \quad \forall v \in \mathcal{D}(T).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \;\; \text{y} \;\; T^*|_{\mathcal{D}(T)} = T$$

Por lo tanto $T \subset T^*$.

$\Leftarrow$ Si $T \subset T^*$, entonces el operador $T$ es simétrico.
Por hipótesis $T \subset T^*$. Entonces

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \;\; \text{y} \;\; T^*|_{\mathcal{D}(T)} = T \tag{2.2.9}$$

Por definición de operador adjunto, para todo $u \in \mathcal{D}(T)$ y todo $v \in \mathcal{D}(T^*)$, tenemos

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle \tag{2.2.10}$$

Por la relación (2.2.9)

$$T^* v = T v \quad \forall v \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \tag{2.2.11}$$

Reemplazando (2.2.11) en (2.2.10), obtenemos

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(T)$$

Por lo tanto $T$ es simétrico.

■

**Definición 2.2.12.** *Sea $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operador densamente definido en $H$, se dice que $T$ es un **operador autoadjunto** si*

$$T = T^*$$

**Observación 2.2.13.** Todo operador lineal autoadjunto es simétrico, sin embargo un operador simétrico no necesariamente es autoadjunto, la razón es que $T^*$ puede ser una extensión lineal propia de $T$, es decir $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$, y obviamente, esto no puede ocurrir si $\mathcal{D}(T)$ es todo $H$.

**Ejemplo 2.2.14.** (**Operador multiplicación** )

Sea el operador multiplicación $T$

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(T) &\to L^2(-\infty, +\infty) \\ u(x) &\mapsto Tu(x) = xu(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es un operador lineal autoadjunto.

*Demostración.* Como el operador multiplicación es simétrico, entonces $T \subset T^*$ (lema 2.2.11).

Para probar que $T$ es autoadjunto faltaría probar que $T^* \subset T$, para ello es suficiente probar que $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$, es decir, debemos elegir un $v \in \mathcal{D}(T^*)$, y probar que $v \in \mathcal{D}(T)$.

Sea $v \in \mathcal{D}(T^*)$, elegido arbitrariamente. Entonces:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}(T).$$

De aquí, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Tu(x)\overline{v(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^* v(x)}dx$ y de esto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)\overline{v(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^* v(x)}dx, \text{ luego,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^* v(x)}dx, \text{ por lo tanto}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^* v(x)}dx = 0$$

Así que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)[\overline{xv(x)} - \overline{T^* v(x)}]dx = 0 \tag{2.2.12}$$

Puesto que (2.2.12) se verifica para toda $x \in \mathcal{D}(T)$, consideremos:

$$u(x) = \begin{cases} xv(x) - T^* v(x), & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Ahora reemplazando (2.2.13) en (2.2.12), tenemos:

$$\int_a^b |xv(x) - T^* v(x)|^2 dx = 0$$

De aquí, se tiene que $xv(x) - T^* v(x) = 0$ en $[a,b]$. Luego $xv(x) = T^* v(x)$ en $[a,b]$. Pero como $Tv(x) = xv(x) = T^* v(x)$, se deduce que

$$Tv(x) = T^* v(x)$$

Desde que el intervalo $[a,b]$ fue arbitrario, esto muestra que $v \in \mathcal{D}(T)$, es decir, $v(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y $Tv = T^* v \in L_2(M)$.

Con esto queda demostrado que

$$\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T) \qquad T|_{\mathcal{D}(T^*)} = T^*$$

Es decir $T^* \subset T$. Por lo tanto $T = T^*$. ■

### 2.2.4. Operador Isométrico

**Definición 2.2.15.** *Sean $X$ y $Y$ espacios producto interno sobre el mismo cuerpo y sea $T$ una transformación lineal de $X$ en $Y$. Se dice que $T$ es una isometría si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ de $X$.*

### 2.2.5. Operador Normal

**Definición 2.2.16.** *Sea $X$ un espacio producto interno de dimensión finita y $T$ un operador lineal sobre $X$. Se dice que $T$ es normal si conmuta con su adjunto; es decir*

$$TT^* = T^* T$$

### 2.2.6. Operador Positivo

**Definición 2.2.17.** *Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Denotaremos en este caso $T \geq 0$.*

*En el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de todos los espacios acotados, y $T_1, T_2$ estan en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ diremos que,*

$$T_1 \leq T_2 \text{ si } T_2 - T_1 \geq 0$$

### 2.2.7. Operador Compacto

**Definición 2.2.18.** *Dado $T \in L(H_1, H_2)$ se dice que $T$ es compacto si para toda sucesión acotada $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H_1$, $(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Denotaremos $\mathfrak{S}_\infty(H_1, H_2)$ al conjunto de los operadores compactos de $L(H_1, H_2)$.*

# CAPÍTULO 3

# OPERADORES HIPERCÍCLICOS

## 3.1. Sistemas Dinámicos Lineales

En este trabajo de grado desarrollamos el análisis de sistemas dinámicos lineales. Trabajamos sobre espacios vectoriales $X$ junto con una topología $\tau$. El objeto de estudio serán los operadores lineales y continuos sobre el espacio $(X,\tau)$. Notamos

$$\mathcal{L}(X) := \{T : X \to X, T \text{ lineal y continuo}\}.$$

Definimos ahora, los sistemas dinámicos lineales.

**Definición 3.1.1.** *Un sistema dinámico lineal es un par $(X,T)$ donde $X$ es un espacio vectorial topológico real o complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$.*

Muchas veces trabajaremos en contextos menos generales, como los espacios de *Banach* o de *Fréchet*.

**Definición 3.1.2.** *Decimos que el espacio métrico (X,d) es un F-espacio, si es un espacio vectorial real o complejo con una métrica d, que lo hace completo. Si además X es un F-espacio localmente convexo, decimos que X es un espacio de Fréchet.*

Para entender la dinámica del sistema, estudiaremos las órbitas que definen el operador T.

**Definición 3.1.3.** *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal. Para $x \in X$, definimos la órbita del elemento x por T como el conjunto*

$$Orb(x,T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

Puntualmente, nos interesa determinar la existencia de operadores lineales y continuos sobre el espacio $X$ que admiten órbitas densas.

**Definición 3.1.4.** *Sea $(X,T)$ un sistema dinámico lineal. Decimos que T es hipercíclico si existe $x \in X$ tal que $Orb(x,T)$ es denso en $X$. En este caso decimos que x es un vector hipercíclico de $T$.*

**Definición 3.1.5.** *Sea $x$ un vector hipercíclico de $T$, llamaremos $HC(T)$ al conjunto de los vectores hipercíclicos de $T$, así:*

$$HC(T) = \{x / x \text{ es vector hipercíclico de} T\}$$

**Observación 3.1.6.** Es claro que esta condición nos restringe a trabajar sobre espacios separables.

**Ejemplo 3.1.7.** El operador identidad no es hipercíclico.

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned} I : X &\to X \\ x &\to I(x) = x \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} Orb(x, I) &= \{I^n(x) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(I \circ I \circ \cdots \circ I)(x) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x\} \end{aligned}$$

Luego, $X \nsubseteq \overline{Orb(x, I)}$; por lo tanto $I$ no es hipercíclico. ■

**Proposición 3.1.8.** *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, si $T$ es hipercíclico, entonces existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T^{n_k}(x) \to \alpha x$.*

*Demostración.* Sea $T : X \to X$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned} T \text{ es hipercíclico } &\leftrightarrow \exists x \in X / \overline{Orb(x, T)} = X \\ &\leftrightarrow \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}} = X \\ &\leftrightarrow (\, x \in X \to \alpha x \in X, \alpha x \in \overline{T^n(x) : n \in \mathbb{N}}) \\ &\leftrightarrow \left(\exists \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} / \{T^{n_k}(x)\} \to \alpha x\right). \end{aligned}$$

■

## 3.2. Restricciones que trae la definición

Así como la separabilidad de $X$, otras restricciones sobre el sistema $(X, T)$ deben considerarse. Empezamos con el primer resultado de S. Rolewiez que afirma que este es un fenómeno puramente infinito-dimensinal [6].

**Teorema 3.2.1.** *No existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un espacio de dimensión finita $(N)$ y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico, luego, existe $x \in HC(T)$. Afirmamos que el conjunto $W = \{x, T(x), T^2(x), ..., T^{N-1}(x)\}$ cuyo cardinal es $(N)$, es linealmente independiente. Si no lo es, entonces existen $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \le i \le N-1$ no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i(x) = a_0 T^0(x) + a_1 T(x) + a_2 T^2(x) + ... + a_{i_0} T^{i_0}(x) + ... + a_{N-1} T^{N-1}(x) = 0$$

Sea $i_0 = max\{i; a_i \neq 0\}$, tenemos que

$$a_{i_0} T^{i_0+1}(x) = -(a_0 T(x) + a_1 T^2(x) + a_2 T^3(x) + ... + a_{i_0-1} T^{i_0}(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=0}^{i_0-1} a_i T^{i+1}(x) \in \langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{i_0}(x)\rangle_{gen} \\
T^{i_0+1}(x) &= -\sum_{i=0}^{i_0-1} \frac{a_i}{a_{i_0}} T^{i+1}(x) \\
&= -\sum_{i=0}^{i_0-1} b_i T^{i+1}(x).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
T^N(x) &= T^{N+0}(x) \\
&= T^{N+(i_0+1)-(i_0+1)}(x) \\
&= T^{(N-i_0-1)+(i_0+1)}(x) \\
&= T^{N-i_0-1}(T^{i_0+1}(x)) \\
&= T^{N-i_0-1}(-\sum_{i=0}^{i_0-1} b_i T^{i+1}(x)) \\
&= T^{N-i_0-1}(-(a_0T(x) + a_1T^2(x) + a_2T^3(x) + \dots + a_{i_0-1}T^{i_0}(x))) \\
&= -(a_0T^{N-i_0}(x) + a_1T^{N-i_0+1}(x) + \dots + a_{i_0-1}T^{N-1}(x)) \text{ y esto pertenece a} \\
&\langle T^{N-i_0-1}, \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen} \subset \langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen}.
\end{aligned}
$$

Tenemos que

$$\langle Orb(x,T)\rangle_{gen} = \langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen},$$

y por lo tanto

$$dim(\langle Orb(x,T)\rangle_{gen}) = dim(\langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen}) = N$$

Lo que implica que $Orb(x,T)$ no es denso en $X$. Luego los vectores son *l.i.* Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$; como $T$ es hipercíclico existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(x) \to \alpha x$. Al ser $T$ un operador continuo y $\{x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\}$ una base de $X$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
T^{n_k}(T^i(x)) = &T^i(T^{n_k}(x)) \to \alpha T^i(x)\ \forall i < N; \\
&\Rightarrow T^{n_k}(z) \to \alpha z \ \ \forall z \in \mathbb{K}^N; \\
&T^{n_k} \to \alpha I; \\
&det(T^{n_k}) \to \alpha^N.
\end{aligned}
$$

Si $a := |det(T)|$, obtenemos que $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, lo que es una contradicción. Por lo que se deduce que no es posible hallar $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. ■

**Teorema 3.2.2.** ***(Kitai)**: Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable y $T : X \to X$ un operador hipercíclico. Entonces el operador adjunto $T^* : X^* \to X^*$ no posee autovalores.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es sobre $\mathbb{C}$ y que $T^*$ posee un autovalor $\lambda$. Sea $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, un autovector asociado a $\lambda$; es decir $T^*(x^*) = \lambda x^*$. Fijemos ahora un vector hipercíclico para $T$, digamos $x \in X$. Entonces la órbita $x$ respecto a $T$, $Orb(x,T)$, es densa en $X$ y como $x^*$ es una aplicación continua sobreyectiva, el conjunto

$$D = \{x^*(x), x^*(Tx), x^*(T^2x), \dots\} = x^*(Orb(x,T))$$

es denso en $\mathbb{C}$ (la imagen bajo una aplicación continua y sobreyectiva de un conjunto denso es denso). Por otro lado, como $x^*(Tx) = T^*x^*(x)$ y $(T^n)^* = (T^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que

$$\{x^*(T^n x) : n = 0,1,2,...\} = \{(T^*)^n x^*(x) : n = 0,1,2,...\} = \{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,...\}$$

y, por su puesto, el último conjunto no es denso en $\mathbb{C}$. En efecto, si $|\lambda| \le 1$ o $x^*(x) = 0$, entonces el conjunto $\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,...\}$ es acotado y, por consiguiente, no puede ser denso en $\mathbb{C}$. Si $|\lambda| > 1$ y $x^*(x) \neq 0$, entonces $|\lambda^n x^*(x)| \to \infty$ y, de nuevo, $\{\lambda^n x^*(x) : n = 0,1,2,...\}$ tampoco puede, en este caso ser denso en $\mathbb{C}$. Esta contradicción establece que $T^*$ no puede poseer autovalores. ■

Cuando estudiamos operadores hipercíclicos en espacios de Banach, debemos considerar restricciones sobre la norma del operador. Por ejemplo, si $\|T\| \le 1$, la órbita de cualquier elemento $x_0$ es un conjunto acotado,

$$Orb(x_0, T) \subseteq B(0, \|x_0\|).$$

Esto dice que un operador hipercíclico no puede ser contractivo. tampoco puede ser expansivo, por que todas las órbitas se mantendrían alejadas del 0, resumiendo tenemos la siguiente observación.

**Observación 3.2.3.** Sea $X$ un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{L}(X)$,

- Si $\|T\| \le 1 \Rightarrow T$ no es hipercíclico,
- Si $\|Tx\| \ge \|x\|$, $\forall x \in X \Rightarrow T$ no es hipercíclico.

Continuamos analizando más propiedades que surgen de la definición. En este caso, una propiedad sobre el espectro de $T^*$. Notamos $\sigma_p(R)$, al espectro puntual del operador $R$, i.e., el conjunto de todos los autovalores de $R$.

**Proposición 3.2.4.** *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$*

*Demostración.* Supongamos que $\sigma_p(T^*)$ no es vacío. Sea $\alpha \in \sigma_p(T^*)$ y $x^* \in X^*$ un autovector de $T^*$ asociado a $\alpha$. Sea $x \in HC(T)$. Como toda funcional no nula es sobreyectiva, $x^*(Orb(x,T))$ es denso en $\mathbb{K}$. Pero,

$$x^*(Tx) = T^*(x^*)(x) = \alpha x^*(x),$$

entonces,

$$x^*(T^n x) = (T^*)^n(x^*)(x) = \alpha^n x^*(x)$$

Así obtenemos que $\{\alpha^n x^*(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{K}$. Lo que es una contradicción, y resulta $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ■

**Observación 3.2.5.** Si $X$ es un espacio de Banach, la propiedad $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ implica que $T - \alpha$ tiene rango denso para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, pues

$$R(T-\alpha)^{\perp} = Ker(T-\alpha)^* = Ker(T^* - \overline{\alpha}) = \{0\}.$$

Esta propiedad es cierta para operadores hipercíclicos, aunque no estemos en espacios de Banach.

Siguiendo con las restricciones que impone la definición, pasamos ahora al último de los resultados que presentaremos en esta sección. Veremos que no existen operadores compactos hipercíclicos. Lo probamos primero para espacios complejos, y luego para reales. Recordamos la definición del radio espectral de un operador.

**Definición 3.2.6.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ definimos el radio espectral de $T$ como*

$$\rho(T) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*La fórmula de Gelfand para el radio espectral es*

$$\rho(T) = \overline{lim}\|(T^n)\|^{1/n}.$$

**Proposición 3.2.7.** *Sea $X$ un espacio de Banach complejo y $T$ un operador compacto. Entonces $T$ no es hipercíclico.*

*Demostración.* Recordemos que como $T$ es compacto, $T^*$ también lo es y al ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, tenemos que $\sigma(T^*) = \{0\} \cup \sigma_p(T^*)$.Si $\sigma(T^*) \neq \{0\}$, $T$ no es hipercíclico por la proposición 3.2.4. Si $\sigma(T^*) = \{0\}$ se tiene también $\rho(T^*) = 0$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(T^*)^n\|^{1/n} \geq 1$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica que

$$\|T^n\| = \|(T^n)^*\| = \|(T^*)^n\| \leq 1, \;\; \forall n \geq n_0$$

y así,

$$\begin{aligned} Orb(x,T) &= \{x, Tx, T^2x, \dots, T^{n_0-1}x\} \cup \{T^n x \, : \, n \geq n_0\} \\ &\subseteq \{x, Tx, T^2x, \dots, T^{n_0-1}x\} \cup \overline{B(0, \|x\|)}. \end{aligned}$$

Con lo que la órbita de $x$ por $T$ es un conjunto acotado. Luego $T$ no es hipercíclico. ■

Probemos ahora el mismo resultado en el caso real. Para eso, complejificaremos el espacio y usaremos que ya hemos probado el espacio complejo.

**Proposición 3.2.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach real y $T$ un operador compacto. Entonces $T$ no es hipercíclico.*

*Demostración.* Supongamos que $T$ es hipercíclico. hacemos la siguiente construcción para complejificar el espacio y el operador. Consideremos $Y = X \oplus iX$ con la norma definida por

$$\|x \oplus ix'\| = \|x\| + \|x'\|.$$

Es fácil ver que $Y$ es un espacio de Banach complejo. Definimos $S : Y \longrightarrow Y$ como $S(x \oplus ix') = T(x) \oplus iT(x')$. Veamos que $S$ es un operador acotado y $\|S\| = \|T\|$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|S(x \oplus ix')\| &= \|T(x) \oplus iT(x')\| \\ &= \|Tx\| + \|Tx'\| \\ &\leq \|T\|(\|x\| + \|x'\|) \\ &= \|T\|\|x \oplus ix'\|, \end{aligned}$$

entonces $\|S\| \leq \|T\|$. Tomando una sucesión $x_n \in X, \|x_n\| = 1$ tales que $\|Tx_n\| \longrightarrow \|T\|$, tenemos que $S(x_n \oplus i0) = Tx_n \oplus i0$, luego $\|S\| = \|T\|$.

Veamos ahora que $S$ es compacto. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ una sucesión acotada. Podemos escribir $y_n = x_n \oplus ix_n$, con $(x_n), (x'_n) \subset X$ dos sucesiones acotadas. Por compacidad de $T$, existe $x \in X$ y $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que $Tx_{n_j} \longrightarrow Tx$. Como $(x'_{n_j}) \subset X$ es acotada, existe $x' \in X$ y $(x_{n_{j_k}})$ una subsucesión tal que $Tx_{n_{j_k}} \longrightarrow Tx'$. Por lo tanto $S(y_{n_{j_k}}) \longrightarrow Tx \oplus ix'$. Luego $S$ es compacto.

Veamos que $S^* : Y^* \longrightarrow Y^*$ no tiene autovalores. Sea $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $S^*(y^*) = \lambda y^*$. Sea $x_0 \in HC(T)$. Entonces

$$\begin{aligned}\{|y^*(T^n x - 0 \oplus i0)| \,:\, n \in \mathbb{N}\} &= \{|y^*(S^n(x_0 \oplus i0))| \,:\, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{|(S^*)^n(y^*)(x_0 \oplus i0)| \,:\, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{|\lambda^n y^*(x_0 \oplus i0)| \,:\, n \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

lo que es una contradicción, pues el primer conjunto es denso en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y el último no. Tenemos entonces que $\sigma(S^*) = \{0\}$. Como antes, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S^n\| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Pero $\|T^n\| = \|S^n\| < 1$ para todo $n \geq n_0$, argumentando como en la demostración del caso complejo, podemos ver que $T$ no es hipercíclico, en contradicción a lo que habíamos supuesto. ■

## 3.3. Propiedades de los Operadores Hipercíclicos

Presentamos en esta sección propiedades de los operadores hipercíclicos. Comenzamos con los resultados que nos permitirán demostrar cuándo un operador lineal es hipercíclico. En general, no es un trabajo sencillo mostrar que una función cualquiera admite órbitas densas, pero en el criterio lineal existe un criterio de fácil aplicación que da condiciones suficientes para que un operador sea hipercíclico. El primer resultado se debe a G.D. Birkhoff, es una aplicación de la teoría de Baire y relaciona sistemas dinámicos lineales con sistemas dinámicos topológicos.

**Definición 3.3.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$ es transitiva si para todo $U$ y $V$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$.*

**Proposición 3.3.2.** *Sea $X$ espacio métrico de Baire perfecto (i.e., sin puntos aislados) y separable y $T : X \to X$ continua. Entonces existe $z \in X$ cuya órbita respecto de $T$ es densa en $X$ si, y solo si, $T$ es transitiva.*

*Demostración.* Por hipótesis sea $z \in X$ tal que $\{T^n z : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $X$. Sean $U$ y $V$ abiertos no vacíos de $X$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k z \in U$. Como $X$ no tiene puntos aislados, $\{T^m z : m > k\}$ también es denso en $X$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k+n} z = T^n(T^k z) \in V$. Tomamos $y := T^k z \in U$ y tenemos que $T^n y \in V$, por lo tanto $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Recíprocamente, como $X$ es espacio métrico separable cumple el segundo axioma de numerabilidad, podemos por tanto tomar una base $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos para la topología de $X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$G_n := \{x \in X / \exists m \in \mathbb{N} : T^m x \in V_n\}.$$

Veamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n$ es abierto en $X$. Dado $x \in G_n$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m x \in V_n$. Por ser $T$ continua, $W := (T^m)^{-1}(V_n)$ es abierto en $X$. Tenemos que $x \in W$ y además $T^m(W) \subset V_n$; esto es, $W \subset G_n$. Veamos que , para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n$ es denso en $X$. Sea $U$ abierto en $X$. Como $T$ es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U) \cap V_n \neq \emptyset$, esto es, existe $x \in U$ tal que $T^m x \in V_n$; de donde $x \in U \cap G_n$. Por ser $X$ espacio de Baire tenemos que

$$G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en $X$.

Veamos que cada punto $z \in G$ tiene órbita, respecto de $T$, densa en $X$. Sea $z \in G$ y $U$ abierto no vacío cualquiera de $X$. Por la elección de $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset U$. Como $z \in G \subset G_{n_0}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m z \in V_{n_0} \subset U$, luego $Orb(T, z) = \{T^m z : m \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $X$.

■

**Teorema 3.3.3.** ***(Teorema de Birkhoff).*** *Sean $X$ un F-espacio separable y un operador $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, $T$ es hipercíclico si y sólo si $T$ es topológicamente transitivo. En este caso, $HC(T)$ es un conjunto $G_\delta$-denso.*

*Demostración.* Supongamos que $T$ es hipercíclico. Observemos que si $x \in HC(T)$, entonces $Orb(x,T) \subset HC(T)$, pues

$$Orb(T^k(x),T) = Orb(x,T) - \{x, Tx, \dots, T^{k-1}(x)\},$$

y como $X$ no tiene puntos aislados, al quitar finitos puntos el conjunto se mantiene denso. Así $HC(T)$ es denso. Si $U$ y $V$, son abiertos no vacíos podemos tomar $x' \in U \cap HC(T)$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x') \in V$, con lo que $T^n(U) \cap V$ es no vacío.

Recíprocamente, supongamos que $T$ es topológicamente transitivo y sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base numerables de abiertos de $X$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} x \in HC(T) &\Longleftrightarrow Orb(x,T) \cup V_j \neq \emptyset, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \forall j \in \mathbb{N},\ \exists n \geq 0 : T^n(n) \in V_j; \end{aligned}$$

es decir,

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$$

es un $G_\delta$. Sea $W_j := \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$. Entonces, $W_j$ es abierto y

$$\begin{aligned} \overline{W_j} := X &\Longleftrightarrow \forall U \subset X \text{ abierto no vacío}, \exists n \in \mathbb{N} : U \cap T^{-n}(V_j) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \forall U \subset X \text{ abierto no vacío}, \exists n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como $T$ es topolólogicamente transitivo, se cumple la última condición y por lo tanto, $W_j$ es denso $\forall j \in \mathbb{N}$. Luego $HC(T)$ es interseccción numerable de abiertos densos y por el teorema de la categoría de Baire, $HC(T) \neq \emptyset$ y $T$ resulta hipercíclico. ∎

**Corolario 3.3.4.** *Sea $X$ un $F$-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$, $T$ inversible. Entonces*

$$T \text{ hipercíclico} \Longleftrightarrow T^{-1} \text{ hipercíclico}$$

El primer ejemplo de un operador hipercíclico en un espacio de Banach, fue dado por S. Rolewicz [6]. Mostró que el shift $\lambda B : l_p \longrightarrow l_p$, $\lambda B(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$ es hipercíclico para todo $|\lambda| > 1$. Veremos la demostración en la subseccción 3.4.1. El argumento usado para demostrar este hecho, daba indicios de poder ser generalizado a un criterio para testear la hiperciclicidad de cualquier operador. Este criterio fue presentado en primera instancia por C. Kitai [7], en su tesis de doctorado; y luego redescubierto por R. Gethner y J. H. Shapiro [8]. Enunciamos ahora una versión del criterio de hiperciclicidad, que aparece en la tesis doctoral de J. Bés [12].

**Proposición 3.3.5.** *Dado $(X, \|\ \|_1)$ entonces existe una sucesión $\{\|\ \|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente de normas.*

*Demostración.* (Constructiva) Sea $\|x\|_{k+1} = k\|x\|_k$

(N1) $x = 0 \Rightarrow \|x\|_{k+1} = k\|0\|_k = 0$

(N2) $\|x\|_{k+1} = k\|x\|_k \geq 0$

(N3) $\|\alpha x\|_{k+1} = k\|\alpha x\|_k = k|\alpha|\|x\|_k = |\alpha|\|kx\|_k = |\alpha|\|x\|_{k+1}$

(N4) $\|x+y\|_{k+1} = k\|x+y\|_k \leq k(\|x\|_k + \|y\|_k)$

Ahora veamos que $\{\| \; \|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente

Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$.

$$\begin{aligned}\|x\|_{n_2} &= (n_2-1)\|x\|_{n_2-1}\\ &= (n_2-1)(n_2-2)\|x\|_{n_2-2}\\ &\vdots\\ &= (n_2-1)(n_2-2)\cdots(n_1)\|x\|_{n_1}\\ &\geq n_1\|x\|_{n_1}.\end{aligned}$$

■

**Teorema 3.3.6.** ***Criterio de hiperciclicidad.*** *Sea $E$ un espacio de Fréchet separable y $T : E \to E$ un operador lineal y continuo. Si existen subconjuntos densos $X$ e $Y$ de $E$, una sucesión creciente $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números naturales y aplicaciones $S_{m_k} : Y \to E$, $k \in \mathbb{N}$ (no necesariamente lineales ni continuas) tales que:*

*(i)* $(T^{m_k} \circ S_{m_k})y \to y, \forall y \in Y$

*(ii)* $S_{m_k}y \to 0, \forall y \in Y$

*(iii)* $T^{m_k}x \to 0, \forall x \in X,$

*entonces existe un vector $z$ tal que $\{T^{m_k}z\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en $E$.*

*Demostración.* (Vía transitividad). Veamos que el operador $T$ es transitivo. Por densidad de $X$ e $Y$ en $E$, bastará con probar que, dados $U$, $V$ dos entornos absolutamente convexos en $E$, $x \in X$, $y \in Y$, existe un natural $m$ tal que $T^m(x+U)\cap(y+V) \neq \emptyset$. Por (i), (ii) y (iii) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T^m \circ S_m)y \in y + \frac{1}{2}V, \quad S_m y \in U, \quad T^m x \in \frac{1}{2}V.$$

Entonces

$$T^m(x+S_m y) = T^m x + T^m S_m y \in \frac{1}{2}V + y + \frac{1}{2}V \subset y + V.$$

Luego $T^m(x+U)\cap(y+V) \neq \emptyset$. Como $T$ es operador transitivo, por la proposición (3.3.2) obtenemos la existencia de un vector $z$ con órbita densa. ■

*Demostración.* (Constructiva). Por ser $E$ separable e $Y$ denso en $E$, existe $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ denso en $E$. Sea $\{\|\cdot\|_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión fundamental creciente de seminormas en $E$ que generan la topología del espacio $E$. Dado $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$, $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$.

Sea $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y tomamos $n_1 \in \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 \geq k$

$$\begin{aligned}&\to n_1 > k \geq k_1, k_2\\ &\to n_1 \geq k_1 \wedge n_1 \geq k_2\\ &\to \|S_{n_1}y_1\|_1 < \frac{1}{2} \wedge \|T^{n_1}S_{n_1}y_1 - y_1\|_1 < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por otro lado $\|x_1\| < 1 \to \|T^{n_1}x_1\|_1 < \frac{1}{2}$.

definimos $z_1 := x_1 + S_{n_1} y_1$. Sea $x_2 \in X$ tal que

$$\|x_2 - z_1\|_2 < \frac{1}{2^2}, \quad \|T^{n_1}(x_2 - z_1)\|_2 < \frac{1}{2^2};$$

Tomamos $n_2 \in \{m_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_2 > n_1$, tal que

$$\|T^{n_2} x_2\|_2 < \frac{1}{2^2}, \quad \|S_{n_2} y_2\|_2 < \frac{1}{2^2},$$

$$\|T^{n_2} S_{n_2} y_2 - y_2\|_2 < \frac{1}{2^2}, \quad \|T^{n_1} S_{n_2} y_2\|_2 < \frac{1}{2^2},$$

y definimos $z_2 := x_2 + S_{n_2} y_2$. Supongamos que tenemos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$ y $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ pertenecientes a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$\|T^{n_j}\|_j < \frac{1}{2^j}, \ \|S_{n_j} y_j\|_j < \frac{1}{2^j}, \ \|T^{n_j} S_{n_j} y_j - y_j\|_j < \frac{1}{2^j}, \ \ j = 1, \ldots, k$$

$$\|T^{n_i} S_{n_j} y_j\|_j < \frac{1}{2^j}, \ \ i = 1, \ldots, j-1; j = 2, \ldots, k,$$

y además

$$\|x_j - z_{j-1}\|_j < \frac{1}{2^j}, j = 2, \ldots, k,$$
$$\|T^{n_i}(x_j - z_{j-1})\|_j < \frac{1}{2^j}, \ \ i = 1, \ldots, j-1; j = 2, \ldots, k,$$

siendo $z_j = x_j + S_{n_j} y_j, \ j = 1, \ldots, k$. Para completar inducción sea $x_{k+1} \in X$ tal que

$$\|x_{k+1} - z_k\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \|T^{n_i}(x_{k+1} - z_k)\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Tomamos $n_{k+1} \in \{m_k\}_{k=1}^{\infty}, \ n_{k+1} > n_k$, tal que

$$\|T^{n_{k+1}} x_{k+1}\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \|S_{n_{k+1}} y_{k+1}\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}},$$
$$\|T^{n_{k+1}} S_{n_{k+1}} y_{k+1} - y_{k+1}\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}},$$
$$\|T^{n_i} S_{n_{k+1}} y_{k+1}\|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

y definimos entonces $z_{k+1} := x_{k+1} + S_{n_{k+1}} y_{k+1}$.

Veamos en primer lugar que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, para ello probaremos que para cada seminorma $\|\cdot\|_k$ , $k = 1, 2, \ldots$ la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $k \in \mathbb{N}$, sean $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > q > k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|z_p - z_q\|_k &\leq \|z_p - z_{p-1}\|_k + \ldots + \|z_{q+1} - z_q\|_k \\
&= \|x_p + S_{n_p} y_p - z_{p-1}\|_k + \ldots + \|x_{q+1} + S_{n_{q+1}} y_{q+1} - z_q\|_k \\
&\leq \|x_p - z_{p-1}\|_k + \|S_{n_p} y_p\|_k + \ldots + \|x_{q+1} - z_q\|_k + \|S_{n_{q+1}} y_{q+1}\|_k \\
&\leq \|x_p - z_{p-1}\|_p + \|S_{n_p} y_p\|_p + \ldots + \|x_{q+1} - z_q\|_{q+1} + \|S_{n_{q+1}} y_{q+1}\|_{q+1} < \frac{2}{2^q}.
\end{aligned}$$

Sabiendo que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, sea

$$z := \lim_{n\to\infty} z_n = z_k + \sum_{j=k}^{\infty} (z_{j+1} - z_j).$$

Por último, veamos que $\lim_{k\to\infty} \| T^{n_k} z - y_k \|_k = 0$, lo cual implicaría que $Orb(T, z)$ es densa.

$$\begin{aligned}
\| T^{n_k} z - y_k \|_k &= \| T^{n_k} (z_k + \sum_{j=k}^{\infty} (z_{j+1} - z_j)) - y_k \|_k \\
&= \| T^{n_k} z_k + \sum_{j=k}^{\infty} T^{n_k} (z_{j+1} - z_j) - y_k \|_k \\
&\leq \| T^{n_k} z_k - y_k \|_k + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} (z_{j+1} - z_j) \|_k \\
&= \| T^{n_k} (x_k + S_{n_k} y_k) - y_k \|_k + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} (x_{j+1} + S_{n_{j+1}} y_{j+1} - z_j) \|_k \\
&\leq \| T^{n_k} x_k \|_k + \| T^{n_k} S_{n_k} y_k - y_k \|_k + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} (x_{j+1} - z_j) \|_{j+1} + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} S_{n_{j+1}} y_{j+1} \|_{j+1} \\
&< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{4}{2^k}
\end{aligned}$$

■

**Definición 3.3.7.** ***(Criterio de Hiperciclicidad-Bés)****. Sea $X$ un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, que cumplen:*

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0, \forall x \in D_1$
2. $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0, \forall y \in D_2$
3. $T^{n_k} S_{n_k}(y) \longrightarrow y, \forall y \in D_2$

Observemos que en la definición, no se supone que los conjuntos densos $D_1$ o $D_2$ sean subespacios, ni que las aplicaciones $S_{n_k}$ sean lineales o continuas.

**Definición 3.3.8.** ***(Criterio de Hiperciclicidad I).*** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad I, si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$, que cumplen:*

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0, \forall x \in D_1$
2. *Para cada $y \in D_2$ existe $(v_k) \subset X$ tal que $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k} v_k \longrightarrow y$*

Damos a continuación la versión original del criterio C. Kitai.

**Definición 3.3.9.** ***(Criterio de Hiperciclicidad II - Kitai).*** *Sea $X$ un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad II, si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y una aplicación $S : D_2 \longrightarrow D_2$, que cumplen:*

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0, \forall x \in D_1$

2. $S^{n_k}(y) \longrightarrow 0, \forall y \in D_2$

3. $T \circ S = I_{D_2}$

Es fácil ver que si $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad II - Kitai, entonces satisface la vesión del criterio de hiperciclicidad - Bés. Simplemente tomamos la misma sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$, los mismos conjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y tomamos las aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, como las sucesiones composiciones de la aplicación que da el criterio de hiperciclicidad II - Kitai, es decir, $S_{n_k} = S \circ \cdots \circ S = S^{n_k}$. A. Peris [13] mostró que todos los criterios enunciados anteriormente son equivalentes. Decimos que $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad, si $T$ satisface alguno de los criterios enunciados anteriormente. Cuando sea necesario, aclararemos qué versión estamos considerando o con respecto a qué sucesión se satisface el criterio.

**Teorema 3.3.10.** *Sea $X$ un $F$-espacio separable y sea $T \in \mathcal{L}(x)$. Si $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad 3.3.7, entonces $T$ es hiperciíclico.*

*Demostración.* Veremos que $T$ es topológicamente transitivo. Sean $U, V$ dos abiertos no vacíos de $X$ Como $D_1$ y $D_2$ son conjuntos densos de $X$, podemos tomar $x \in U \cap D_1$ e $y \in V \cap D_2$. Tenemos entonces que

$$x + S_{n^k}(y) \longrightarrow_{k\to\infty} x \in U,$$

y por lo tanto,

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(X) + T^{n_k} S_{n_k}(y) \longrightarrow_{k\to\infty} y \in V$$

Luego, tomando $k$ suficientemente grande, tenemos que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$

■

**Definición 3.3.11.** *Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones continuas $T_i : X \longrightarrow Y$, entre dos espacios topológicos $X$ e $Y$. Decimos que la familia es universal, si existe $x \in X$ tal que $\{T_i(x)\}_{i\in I}$ es denso en $Y$. Notemos que un operador $T$ es hipercíclico si y sólo si la familia $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es universal.*

**Observación 3.3.12.** En este contexto, tenemos demostrado lo siguiente: si $T \in \mathcal{L}(X)$ satisface el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $(n_k)_{k\geq 0}$, entonces para cualquier subsucesión $(n_{k_j})_{j\geq 0}$ se tiene que la familia $\{T^{n_{k_j}}\}_{j\geq 0}$ es universal. Además,

$$(T^{n_{k_j}})\text{es universal} \Longleftrightarrow \forall U, V \text{abiertos no vacíos}, \exists j \in \mathbb{N}; T^{n_{k_j}}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

y en este caso, se cumple para infinitos $j \in \mathbb{N}$.

El criterio de hiperciclicidad proveerá la principal herramienta para demostrar la hiperciclicidad de la mayoría de los ejemplos que estudiaremos.

Existe una conexión entre el espectro del operador con su hiperciclicidad, como muestra el siguiente teorema que se debe a G. Godefroy y J. H. Shapiro que afirma que si un operador tiene suficiente cantidad de autovectores, entonces este es hipercíclico [2].

**Teorema 3.3.13.** ***(Godefroy - Shapiro).*** *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ donde $X$ es un $F$-espacio separable. Supongamos que tanto $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda)$ como $\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda)$, generan subespacios densos. Entonces , $T$ es hipercíclico.*

*Demostración.* Aplicamos el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $(n_k)_{k\geq 0}, n_k = k$ para todo $k \geq 0$, los conjuntos densos

$$D_1 = \left\langle \bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda) \right\rangle_{gen} \quad y \quad D_2 = \left\langle \bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda) \right\rangle_{gen}$$

y los operadores $S_k : D_2 \longrightarrow X$ definidos de la siguiente manera: $S_k(y) := \lambda^{-k} y$ si $T(y) = \lambda y$ con $|\lambda| > 1$, y extedemos a $D_2$ usando que los subespacios $Ker(T-\lambda), |\lambda| > 1$ son linealmente independientes. Veamos que se cumplen las condiciones del criterio 3.3.7:

1. Dado $x \in D_1$, podemos escribir $x = x_1 + \ldots + x_q$ con únicos $x_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| < 1$. Tenemos que,
$$T^k(x) = \sum_{i=1}^{q} T^k(x_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i \longrightarrow 0_{k\to\infty}.$$
2. Similarmente, dado $y \in D_2$, podemos escribir $y = y_1 + \ldots + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$. Tenemos que,
$$S_k(y) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^k} y_i \longrightarrow 0_{k\to\infty}.$$
3. Dado $y \in D_2$, nuevamente podemos escribir $y = y_1 + \ldots + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$. Tenemos que,
$$T^k S_k(y) = T^k\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{-k} y_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{-k} T_k(y_i) = y.$$

Así mostramos que $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad, y por lo tanto, es hipercíclico. ■

A continuación presentamos el criterio de comparación para operadores hipercíclicos.

**Proposición 3.3.14.** ***(Criterio de Comparación).*** *Sean $X$ y $X_0$ espacios vectoriales topológicos y $T : X \longrightarrow X$, $R : X_0 \longrightarrow X_0$ funciones continuas. Supongamos que existe $J : X \longrightarrow X_0$ coninua de rango denso tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & X \arrow[d, "J"] \\ X_0 \arrow[r, "R"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

*Entonces*

*(a) $Orb(J(x), R) = J(Orb(x, T))$. Luego, si $T$ es hipercíclico entonces también lo es $R$.*

*(b) Si $J$ es lineal y $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces $R$ también lo satisface.*

*Demostración.* Observemos primero que $J$ manda conjuntos densos en conjuntos densos, si $D \subset X$ es denso, entonces $\overline{J(D)} = \overline{\overline{J(D)}} \supset \overline{J(\overline{D})} = \overline{J(X)} = X_0$.

(a) Notemos que para todo $x \in X$

$$Orb(J(x),R) = \{R^n(J(x)) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{J(T^n(x)) : n \in \mathbb{N}_0\} = J(Orb(x,T)).$$

Si $T$ es hipercíclico, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $Orb(x,T)$ es denso en $X$. Luego, $J(x) \in HC(R)$, pues $J$ manda conjuntos densos en conjuntos densos. Así $R$ es hipercíclico y $HC(R) \supset J(HC(T))$.

(b) Si $T$ satisface el criterio de hiperciclicidad I de la definición 3.3.8 con respecto a $(n_k) \subset \mathbb{N}$, y a los conjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ densos, veamos que $R$ satisface el criterio de hiperciclicidad I con respecto a la misma sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y los conjuntos densos $J(D_1), J(D_2) \subset X_0$.

1. Dado $x_0 \in J(D_1)$, existe $x \in D_1$ tal que $x_0 = J(x)$. Entonces

$$R^{n_k}(x_0) = R^{n_k}(J(x)) = J(T^{n_k}(x)) \longrightarrow_{k\to\infty} 0$$

2. Dado $y_0 \in J(D_2)$ existen $y \in D_2$ y $(v_k) \subset X$ tal que $y_0 = J(y)$, $v_k \longrightarrow 0$ y $T_{n_k}(v_k) \longrightarrow y$. Luego,

$$J(v_k) \longrightarrow 0 \text{ y } R^{n_k}(J_{(v_k)}) = J(T^{n_k}(v_k)) \longrightarrow_{k\to\infty} J(y) = y_0$$

■

Del criterio de comparación podemos destacar el siguiente resultado.

**Observación 3.3.15.** Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico y $J : X \longrightarrow X$ continua de rango denso tales que $TJ = JT$. Entonces $HC(T)$ es $J$-invariante.

En lo que resta de esta sección estudiaremos el conjunto $HC(T)$. Observemos que para un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ cualquiera, el conjunto $HC(T)$ es denso o vacío. Cuando el operador es hipercíclico, $HC(T)$ es un $G_\delta$-denso . Esto implica que el conjunto de vectores hipercíclicos es grande en un sentido algebraico.

**Proposición 3.3.16.** *Sea $X$ un $F$-espacio y $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces, todo vector $x \in X$ es suma de dos vectores hipercíclicos.*

*Demostración.* Sea $x \in X$. Consideramos los conjuntos

$$A := HC(T) \text{ y } B := x - HC(T).$$

Vimos en el Teorema 3.3.3, que $A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} W_j$, con $W_j \subset X$ abierto denso para todo $j \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $B = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} x - W_j$, con $x - W_j \subset X$ abierto denso para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el teorema de la categoría de Baire resulta $A \cap B \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in A \cap B$. es decir, $y \in HC(T)$, y existe $z \in HC(T)$ tal que $y = x - z$. ■

En lo que sigue, presentamos una serie de resultados necesarios para demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.17.** *Sea $X$ un espacio de Fréchet separble, y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es homeomorfo a $X$.*

**Lema 3.3.18.** *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador hipercíclico y $L \subset X$ es un subespacio $T$-invariante, entonces $L = X$ ó $L$ tiene codimensión infinita en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $L \neq X$ y $dim(X/L) < \infty$. Sea $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente. Tenemos que $Ker(q) \subset Ker(q \circ T)$, pues al ser $L$ un subespacio $T$-invariante:

$$x \in Ker(q) \Rightarrow x \in L \Rightarrow Tx \in L \Rightarrow q \circ Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(q \circ T).$$

Luego $q \circ T$ se factoriza por $q$, es decir, existe $A \in \mathcal{L}(X/L)$ tal que $A \circ q = q \circ T$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "q \circ T"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/L \arrow[r, "\exists A"'] & X/L \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $q$ es continua y sobreyectiva, luego por el criterio de comparación 3.3.14, resulta que $A \in \mathcal{L}(X/L)$ es hipercíclico en un espacio de dimensión finita. Lo que es un absurdo por el Teorema 3.2.1.

■

**Definición 3.3.19.** *Sea $X$ un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Decimos que el subespacio $E \subset X$ es variedad hipercíclica de $T$, si $E - \{0\} \subset HC(T)$.*

Vimos en la observación 3.2.5 que si $X$ es un espacio de Banach y $L \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces $T - \alpha$ tiene rango denso para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. El siguiente lema generaliza este hecho para cualquier polinomio.

**Lema 3.3.20.** *Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico, y $P$ un polinomio no nulo. Entonces el operador $P(T)$ tiene rango denso.*

*Demostración.* Si el polinomio $P$ es constante, entonces $P(T)$ es un múltiplo no nulo de la identidad y por lo tanto tiene rango denso. Luego podemos suponer que $gr(P) \geq 1$. Notemos que $Ran(P(T))$ es $T$-invariante, pues $T \circ P(T) = P(T) \circ T$ y, si $y \in Ran(P(T))$, existe $x \in X$ tal que $P(T)x = y$, entonces $Ty = p(T)(Tx) \in Ran(P(T))$. Luego, como $T$ es continua, $L := \overline{Ran(P(T))}$ es $T$-invariante.

Queremos ver que $P(T)$ es de rango denso, es decir, $L = X$. Por el lema previo basta ver que $L$ tiene codimensión finita en $X$. Sea $x \in HC(T)$ y $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente. Dado $Q \in \mathbb{K}[t]$, existen $r, s \in \mathbb{K}[t]$ con $gr(r) < gr(P)$ ó $r = 0$ tal que $Q = Ps + r$. Por lo tanto,

$$Q(T) = P(T)s(T) + r(T),$$

y entonces,

$$Q(T)x = P(T)(s(T)x) + r(T)x \in Ran(P(T)) + \langle T^i(x) : i < gr(P)\rangle_{gen}.$$

En consecuencia, obtenemos

$$\mathbb{K}[T]x \subset Ran(P(T)) + \langle T^i(x) : i < gr(P)\rangle_{gen}. \tag{3.3.1}$$

Resulta, por (3.3.1)

$$q(\mathbb{K}[T]x) \subset \langle q(T^i(x)) : i < gr(P)\rangle_{gen}$$

Así

$$dim\big(\langle q(T^i(x)) : i < gr(P)\rangle_{gen}\big) < \infty.$$

Como $x \in HC(T)$, $X/L = q(X)$ es de dimensión finita, y por el lema anterior,

$$\Rightarrow L = X.$$

■

**Teorema 3.3.21.** *Sea $X$ un espacio topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Si $x$ es vector hipercíclico para $T$, entonces $\mathbb{K}[T]x$ es variedad hipercíclica de $T$. En particular, $T$ admite una variedad hipercíclica densa.*

*Demostración.* Como vimos en la Observación 3.3.15, para cualquier polinomio no nulo $P$, se tiene que $HC(T)$ es $P(T)$-invariante, pues $P(T)$ conmuta con $T$ y tiene rango denso. De aquí concluimos que $P(T)x \in HC(T)$, para todo $P \in \mathbb{K}[t]$ no nulo. Resulta $\mathbb{K}[T]x$ denso pues, $Orb(x,T) \subset \mathbb{K}[T]x$. ■

**Corolario 3.3.22.** *$T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es conexo.*

*Demostración.* Sea $x \in HC(T)$ fijo. Observemos que $HC(T)$ se encuentra entre los siguientes conjuntos conexos,

$$\mathbb{K}[T]x \subset HC(T) \subset X,$$

Donde $\mathbb{K}[T]x$ es denso en $X$. Podemos desde aquí concluir que $HC(T)$ es conexo: supongamos que $HC(T) = A \cup B$ con $A, B$ abiertos disjuntos. Se tiene que $\mathbb{K}[T]x \subset A \cup B$ y al ser conexo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{K}[T]x \subset A$. Pero, $\mathbb{K}[T]x$ es denso, $B$ es abierto y $B \cap \mathbb{K}[T]x = \emptyset$, de lo que sigue que $B = \emptyset$. Luego $HC(T)$ es conexo. ■

Para la demostración del Teorema 3.3.17, necesitamos la siguiente definición.

**Definición 3.3.23.** *Sea $X$ separable de Fréchet, $A \subset X$ cerrado. Decimos que $A$ es $Z$-set si para todo $K$ métrico compacto $C(K, X - A)$ es denso en $C(K, X)$ (con respecto a la topología de convergencia uniforme en $C(K, X)$).*

Notemos que $A$ es un *$Z$-set* si es lo suficientemente pequeño como para no influir en las funciones continuas de $C(K, X)$. Para la demostración del Teorema 3.3.17 nos basaremos en el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [7].

**Lema 3.3.24.** *Sea $X$ separable de Fréchet. Si $A \subset X$ es unión numerable de $Z$-sets, entonces $X - A$ es homeomorfo a $X$.*

*Demostración del teorema 3.3.17.* Recordemos que si $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de abiertos de $X$, podemos escribir $HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$. Tomando complementos, obtenemos $X - HC(T) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V_j)$. De aquí, basta con probar que para todo $V$ abierto no vacío, el conjunto

$$\bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V)$$

es un *$Z$-set*. Queremos ver que, dados un espacio métrico compacto $K$, $f \in C(K, X)$, y un entorno abierto $O$ de 0 en $X$, existe $g \in C(K, X)$ tal que

$$g(K) \subset X - \left( \bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V) \right) = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V), \tag{3.3.2}$$

y,

$$(g - f)(K) \subset O.$$

Al ser $X$ localmente convexo, podemos asumir que $O$ es convexo. Sea $x \in HC(T)$. Para cada $T \in K$, elegimos $m_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{m_t}(x) - f(t) \in O,$$

y definimos $W_t := \{s \in K : T^{m_t}(x) - f(s) \in O\} \subset K$. de esta forma obtenemos un cubrimiento por abiertos $(W_t)_{t\in K}$ del compacto $K$. Recordemos que un espacio métrico compacto, cumple que los abiertos separan cerrados disjuntos, y que en todo espacio métrico compacto vale el teorema de particiones de la unidad finitas. Es decir si tomamos un subcubrimiento finito $(W_{t_i})_{1\leq i\leq p}$ existe $(\phi_i)_{1\leq i\leq p}$ partición de la unidad finita que cumple

- $\phi_i$ continuas,
- $0 \leq \phi_i \leq 1$,
- $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$
- $sop(\phi_i) \subset W_{t_i}$.

Notamos $m_i := m_{t_i}$ y $g := \sum_{i=1}^{p} \phi_i T^{m_i}(x)$. Veamos que se cumple lo que necesitamos:

- Tenemos que

$$g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s) T^{m_i}(x) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s)\left[T^{m_i}(x) - f(s)\right],$$

  Con lo cual, $g(s) - f(s)$ es una combinación convexa de elementos de $O$. Al ser $O$ convexo, concluimos que $(g - f)(K) \subset O$.

- Para cada $a \in K$, podemos escribir $g(a) = P_a(T)x$ con $P_a(z) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(a).z^{m_i}$ polinomio no nulo. Como vimos en la Observación 3.3.15, $P_a(T)x \in HC(T)$. Luego, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_a}(g(a)) \in V$. Por lo tanto,

$$g(K) \subset \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V).$$

  por lo tanto $g$ verifica la condición (3.3.2).

Concluimos entonces, que $X - HC(T)$ es unión numerable de $Z$-*set* y por lema 3.3.24, $HC(T)$ es homeomorfo a $X$.

## 3.4. Primeros Ejemplos de Operadores Hipercíclicos

Presentamos en esta sección dos operadores hipercíclicos. Fueron los primeros operadores hipercíclicos que se encontraron durante el desarrollo de la teoría. No presentaremos las demostraciones originales de los autores, sino que lo haremos usando el criterio de hiperciclicidad.

### 3.4.1. Operadores Shift

Un ejemplo importante para la teoría es el de los operadores Shift. esta familia de ejemplos fue presentada por S. Rolewicz [6], en el año 1961. Sea $B : l^p(\mathbb{N}) \longrightarrow l^p(\mathbb{N})$, el shift a izquierda dado por

$$B(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots), \text{ con } 1 \leq p < \infty.$$

Veamos que $\lambda B$ es hipercíclico, para todo $|\lambda| > 1$. Aplicamos nuevamente el criterio de Hiperciclicidad II de la definición 3.3.9 con la sucesión $n_k = k$; los conjuntos densos $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{N})$ formados por las sucesiones de soporte finito, y tomamos la aplicación $S/\lambda$ con $S : l^p(\mathbb{N}) \longrightarrow l^p(\mathbb{N})$, el shift a derecha dado por $S(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$,

1. Dado $x := (x_0, x_1, \ldots) \in c_{00}(\mathbb{N})$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda B)^n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Luego
$$(\lambda B)^n(x_0, x_1, \ldots) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

2. Notemos que si $\|S\| = 1$ entonces $\|S/\lambda\| = 1/|\lambda|$. Luego,
$$\|(S/\lambda)^n\| \leq 1/(|\lambda|)^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$
Por lo tanto, dado $x := (x_0, x_1, \ldots) \in c_{00}(\mathbb{N})$
$$(S/\lambda)^n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

3. Es claro que $B$ y $S$ son mutuamente inversas en $l^p(\mathbb{N})$, por lo tanto $\lambda B$ y $S/\lambda$ son mutuamente inversas con $c_{00}$.

Concluimos, por el Teorema 3.3.10, que $\lambda B$ es hipercíclico para todo $\lambda$ con $|\lambda| > 1$. Luego para cada $|\lambda| > 1$ tenemos asegurada la existencia de una sucesión universal $x \in l^p(\mathbb{N})$ tal que $\{(\lambda B)^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $l^p(\mathbb{N})$. Podemos concluir que toda sucesión de $l^p(\mathbb{N})$, se comporta de manera similar a un truncado de $X$.

**Observación 3.4.1.** Como $\|B\| = 1$, por la Observación 3.2.3, $B$ no es hipercíclico. Esto dice que el conjunto de operadores hipercíclicos no es cerrado en $\mathcal{L}(X)$, pues $\lambda B \longrightarrow B$, si $\lambda \longrightarrow 1^+, \lambda \in \mathbb{R}$.

### 3.4.2. Operador de Derivación

El siguiente ejemplo se debe a G. R. MacLane [5] y data del año 1951. Lo presentamos en el espacio
$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{holomorfa}\},$$
con la topología dada por la convergenica uniforme sobre compactos. El espacio $H(\mathbb{C})$ es un espacio métrico completo y separable con la métrica
$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f-g\|_n}{2^n\big(1+\|f-g\|_n\big)},$$
donde, $\|f-g\|_n := sup_{|z|\leq n}|f(z)-g(z)|$. Definimos, $\mathcal{D} : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C}), \mathcal{D}(f) = f'$. Claramente, $\mathcal{D}$ es lineal y continua. Aplicamos el Criterio de Hiperciclicidad II de la definición 3.3.9 con la sucesión $n_k = k$; los conjuntos densos $D_1 = D_2 = \mathbb{C}[z]$, y $S : \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$ definida por
$$S(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

1. Dado $P \in \mathbb{C}[z]$, tenemos que $\mathcal{D}^n(P) = 0$, para todo $n > gr(P)$. De aquí, es claro que $\mathcal{D}(P) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

2. Si $K \subset \mathbb{C}$ compacto, existe $R > 0$ tal que $K \subset \{z : |z| \geq R\}$. Entonces,
$$S^n(z^k) = \frac{z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)} = \frac{k! z^{n+k}}{(k+n)!},$$
y tenemos que,
$$sup_{z\in K}|S^n(z^k)| \leq \frac{k! K^{n+k}}{(k+n)!} \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$
Por lo tanto, $S^n(P) \longrightarrow 0$ uniformemente sobre compactos, para todo $P \in \mathbb{C}[z]$.

3. Es claro que para cualquir polinomio $P$ se tiene que $\mathcal{D}S(P) = P$.

Por el Teorema 3.3.10, $\mathcal{D}$ es hipercíclico. Es interesante observar que, existe $g \in H(\mathbb{C})$ tal que $Orb(g, \mathcal{D})$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Así, dada cualquier función holomorfa y cualquier $R > 0$, tenemos que en el compacto $\{|z| \leq R\}$ la función $f$ es muy similar a una derivada de $g$:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } sup_{|z|\leq R}|f(z) - \mathcal{D}^n(g)(z)| < \epsilon$$

# BIBLIOGRAFÍA


[1] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dinamycal systems*, second ed., Addison Wesley, Reading, MA, 1989.

[2] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. 98 (1991), no. 2, 229-269.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G Davis, and P. Stacey, *On Devaneys definition of chaos*, Amer. Math. Monthly 99 (1992), no. 4, 332-334.

[4] G. D. Birkhoff, *Démonstration dún théoréme elémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[5] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. 2 (1952), 72-87.

[6] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. 32 (1969), 17-22.

[7] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D. thesis, University of Toronto, 1982.

[8] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 2, 281-288.

[9] J. P. Bés, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[10] L. Bernal González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[11] ——, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. 148 (1997), no. 2, 384-390.

[12] J. Bés, *Three problem's on hypercyclic operators*. Ph.D thesis, Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio, 1998.

[13] A. Peris, *Hypercyclicity criteria and the Mittag-Leffer theorem*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 70 (2001) 365-371.