Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

El MÉTODO DE ARQUÍMEDES

Juan Carlos Claros Molina
Victor Alfonso Ramirez Perdomo

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

Juan Carlos Claros Molina
2007165758
Victor Alfonso Ramirez Perdomo
2007165634

Asesor:
Hernando Gutierrez Hoyos

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Enero de 2012

AGRADECIMIENTOS

Al culminar este nuevo proyecto en nuestras vidas, comprendemos que solo nos quedan deudas de agradecimientos, inicialmente con Dios, por regalarnos tan valiosas vidas y por brindarnos la oportunidad de ser útiles en ésta sociedad que tanto lo necesita; pero también a todas aquellas personas que de una u otra manera hicieron posible la adquisición de este sueño.

A NUESTROS PADRES

Por el gran apoyo que siempre recibimos, por los valores que desde niños nos inculcaron y por toda la confianza que depositaron en nosotros, pero lo más importante por todo el amor que nos han regalado.

AL PROFESOR HERNANDO GUTIERREZ HOYOS

Por los consejos que nos brindó, por las críticas constructivas que recibimos siempre enfocados en el progreso y mejoramiento no solo de nuestro trabajo sino también de nuestra vida profesional.

A todos nuestros **Amigos**, especialmente a los pertenecientes al Centro de Estudios **Leonhard Euler** con quienes compartimos vivencias, jugamos, pero también aprendimos que el camino se hace más fácil si se tiene un buen amigo con nosotros.

A los **Profesores** del programa licenciatura en Matemáticas por regalarnos su tesoro más codiciado "Conocimiento y Sabiduría".

Finalmente a todas aquellas personas, que sin tener un papel protagónico ayudaron o al menos confiaron en nuestra superación personal y profesional.

A todos ellos ∞ ¡GRACIAS!

ÍNDICE GENERAL

Introducción **9**

Objetivos **11**

1. El Método de Arquímedes **13**
1.1. **Reseña Histórica** 13

2. Matemáticas Infinitesimales **23**

3. Aplicación del Método de Arquímedes **29**
3.1. El área del segmento parabólico 29

4. Conclusiones **39**

5. Bibliografía **41**

INTRODUCCIÓN

Para nadie es un secreto que la mayoría de las personas desconocen casi todo sobre La Matemática y que su relación con ella se limita a las cuatro operaciones básicas. Este distanciamiento contrasta con la importancia que tiene y que ha tenido La Matemática durante toda su historia.

Desde las acciones primordiales como la producción de alimentos, hasta las más sofisticadas como los viajes a la luna o los grandes estudios financieros, todo, absolutamente todo, está de alguna forma relacionado con La Matemática, aunque conscientemente no lo pensemos.

De la misma manera, cuando calculamos el límite, la derivada o la integral de una función (que son los problemas comunes del Cálculo actual) lo hacemos de una forma mecánica, sin analizar en muchas ocasiones las ideas fundamentales como lo son el infinito, las pendientes, las áreas, los volúmenes … etc. y mucho menos de dónde vienen esas ideas, quienes las tuvieron, cómo fue su evolución o a quien o quienes atribuimos estos avances del cálculo ¿será que el crédito del desarrollo y la formalización del cálculo debemos dárselo únicamente a Newton o Leibniz?; la respuesta es un NO gigantesco, pues sin desmeritar el trabajo de estos grandes matemáticos, muchísimos otros también dieron formidables aportes (desconocidos por gran parte de las personas) que permitieron el desarrollo de esta ciencia, y que también gracias a ellos el trabajo de Newton o Leibniz fue posible; lo decía Newton, "si los hombres ven cada vez más lejos es porque pueden elevarse sobre los hombros de gigantes", es decir, la inmensa historia de la Matemática la debemos a un sin número de brillantes pensadores, hombres y mujeres que con su enorme contribución lograron aportar en el desarrollo de esta magnífica ciencia dejando con esto sus nombres grabados en la eternidad y en la historia. Dentro de éstos, "Los Griegos", nos dejaron contribuciones magnificas que aún hoy en dia son de gran utilidad para abordar problemas Matemáticos. Thales de Mileto, Pitágoras, Eudoxio, Euclides, Apolonio, Arquimedes, son algunos de los grandes maestros griegos a los cuales debemos mucho, pero es a este ultimo al que dedicaremos más tiempo en nuestro estudio.

Más allá del romanticismo del que las narraciones, más o menos fantásticas, han impregnado a la figura de Arquímedes, interesa sobremanera a la Historia de la Ciencia y en particular a la Historia de la Matemática, su enorme contribución al engrandecimiento del patrimonio matemático de su época en una triple vertiente, la de la propia ampliación considerable de los conocimientos matemáticos, la consolidación del impecable procedimiento demostrativo y lo que desde el punto de vista heurístico es todavía más importante: la aplicación de una metodología nueva en el alumbramiento del descubrimiento matemático.

De igual forma se le atribuye a Arquímedes la concepción del Cálculo infinitesimal, pues recientes investigaciones en sus trabajos muestran que ya utilizaba el Infinito Real y no únicamente el

Potencial como se creía; además empleaba en sus demostraciones nociones de Física que le daban el toque de maravillosas, inusuales, pero a la vez criticadas por muchos que se regían con los pensamientos filosóficos tradicionales.

Por tales motivos, el presente trabajo de grado pretende darle el reconocimiento que se merece Arquímedes en el desarrollo de La Matemática Moderna. En éste se encontrarán datos históricos acerca de su vida, de su trato con el infinito y los Infinitésimos y la evolución de estos conceptos hasta los Matemáticos modernos; además, tal vez sea lo más importante, el MÉTODO empleado en sus demostraciones donde se evidencia la sentencia Cantoriana: "La esencia de la Matemática es su libertad". Se hace referencia, también, a las dificultades a las que sobrevivieron sus escritos para poder difundir su legado en toda la humanidad; pasando por guerras, saqueos pero también resistiendo a la evolución de los formatos de escritura. Finalmente se presenta una demostración donde se muestra la metodología utilizada por Arquímedes en sus trabajos; el área del segmento parabólico.

De Arquímedes se conocen tres textos en donde recopiló todos sus trabajos e investigaciones, **Sobre la Esfera y el Cilindro, Sobre las Espirales, La Medida del Círculo, Sobre el equilibrio de los Planos, Sobre los Cuerpos Flotantes**, entre otros. Pero tal vez el más importante de estos libros sea el conocido como "**El Método**", pues en él Arquímedes mostraría todos los procedimientos y metodologías utilizados durante sus trabajos, además de que lo había retrasado durante mucho tiempo debido a que los métodos ahí empleados no eran reconocidos, ni legitimados por los científicos de su época, entre ellos el uso del infinito.

Este texto se conoció gracias al filólogo danés Johan Ludwig Heiberg, quien lo descubrió en el año 1906 en el convento del Santo Sepulcro de Constantinopla y a quien se le debe gran parte de las traducciones del libro, a pesar de la tecnología limitada que tenía en su época (aunque muchas partes del libro no fueron exploradas debido a su deterioro); pero luego desaparece nuevamente.

Finalmente en el año 1998 reaparece nuevamente en Christie's, casa de subastas en la ciudad de Nueva York, donde se vendió el manuscrito perdido de Arquímedes (en dos millones doscientos mil dólares), procedente probablemente de un robo. Dañados, incompletos, reescritos, los textos y dibujos de Arquímedes fueron encontrados entre las páginas de un libro de oraciones de un monje del siglo XIII. Gracias a la reconstrucción y conservación del pergamino se ha podido demostrar que el pensamiento de Arquímedes se adelantó incluso al de Isaac Newton, Galileo, Leibniz, Huygens, Fermat, Descartes.

Hemos puesto todo nuestro empeño en dejar claro que el sentido de este trabajo es mostrar claramente la manera en la que Arquímedes trabajaba, y la enorme contribución que esto significó y ha significado para los Matemáticos posteriores ya que gracias a ello se logra entender la importancia de Arquímedes en la Historia de la Matemática.

Cabe destacar que el presente trabajo tiene como eje fundamental el libro "EL CÓDIGO DE ARQUÍMEDES" de **Reviel Netz** profesor de ciencia antigua de la Universidad de Stanford y **William Noel** curador del museo de Arte Walters de Baltimore, publicado originalmente en el Reino Unido por Weidenfeld y Nicolson, en el año 2007.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Establecer los aportes de Arquímedes de Siracusa en el avance del pensamiento Matemático.
- Mostrar la historia e importancia del "MÉTODO" de Arquímedes en la evolución de la Matemática Moderna.

Objetivos Específicos

- Conocer la historia de Arquímedes y de su "MÉTODO".
- Establecer el "MÉTODO" de Arquímedes como antecesor al cálculo de Newton y Leibniz.
- Reconstruir, con base en el Método de Arquímedes, la demostración del pro- blema Sobre la Cuadratura de la Parábola.
- Motivar mediante la Historia de la Matemática, el aprendizaje y buen uso de la misma.

CAPÍTULO 1

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

Arquímedes envió el texto del documento conocido como "EL MÉTODO", en forma de papiro, a su amigo **Eratóstenes**

Arquímedes a Eratóstenes:

Saludos!

"Como se que eres una persona diligente y un excelente profesor de filosofía, y que estas muy interesado en cualquier clase de investigación matemática que pueda cruzarse en tu camino, se me ocurrió que debía ser conveniente escribirte para comentarte acerca de cierto método especial …

… Imagino que habrá algunas personas de la generación actual y de las generaciones futuras que podrán servirse de los métodos explicados aquí para descubrir otros teoremas que no hayan caído en nuestras manos."

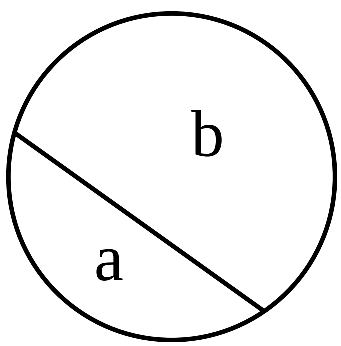
1.1. Reseña Histórica

Muchos de los maravillosos textos de Arquímedes han sobrevivido, pero solo se le conocen algunos fragmentos de su vida. Heracleides escribió su biografía, pero se ha perdido y hay que recurrir a diversas fuentes antiguas de desigual fiabilidad para particularizar.

El dramaturgo bizantino Tzetzes refiere que Arquímedes murió a la edad de setenta y cinco años; puesto que murió en la caída de Siracusa, se deduce que nació hacia 287 a. J. C. Del historiador griego Diodoro aprendemos que estudió matemáticas en Alejandría; de Pappus, que escribió un libro sobre mecánica, sobre la construcción de esferas; de Cicerón, que construyó una esfera que imitaba el movimiento del sol, de la luna y los planetas (Cicerón afirma haber visto este planetario en miniatura); de Luciano que incendió los barcos romanos mediante una disposición de espejos cóncavos o cristales para quemar; de Ptolomeo, que hizo muchas observaciones astronómicas; del filósofo romano Macrobio, que descubrió la distancia de los planetas; de la historia de la arquitectura, de Vitrubio, que en cierta ocasión corrió desnudo por las calles gritando "EUREKA". De Pappus también, procede la no menos famosa narración según la cual Arquímedes, después de haber resuelto el problema: "Mover un peso mediante una fuerza dada", declaró triunfalmente: "Dadme un punto de apoyo y podré mover la tierra".

Plutarco cuenta la dramática historia de la muerte de Arquímedes: "fue un final violento para lo que había sido, en apariencia, una vida tranquila y contemplativa". La historia aparece como un apartado en la biografía de Marcelo, un general romano que saqueó Siracusa después de un sitio de dos años (Se dice que la resistencia se prolongó mucho debido a las maquinas militares que Arquímedes diseñó para defender la ciudad). Observando las curiosas paradojas de la historia: la muerte de Arquímedes es conocida debido al interés de Plutarco por Marcelo; de Marcelo en general se recuerda tan sólo que uno de sus soldados asesinó a Arquímedes ...

Tal vez la mejor forma de presentar a este hombre sea justamente con lo que nos dice él mismo en la introducción de uno de sus tratados, sobre las espirales. La introducción se presenta en forma de una carta dirigida a uno de sus colegas, Dositeo. Arquímedes comienza esa carta haciendo referencia a las cartas que le había enviado anteriormente; "recordaras que he propuesto varios interrogantes matemáticos. Anuncie varios descubrimientos y le pedí a otros matemáticos que buscaran sus propias pruebas para esos descubrimientos. Bueno, (dice Arquímedes con tono triunfal) ¡nadie lo hizo! Una vez más. Es el momento de revelar un secreto: resulta que dos de los descubrimientos anunciados estaban manipulados". Para dar un ejemplo: Arquímedes había anunciado un "descubrimiento" de que, si se corta una esfera en dos segmentos, y si la razón de las superficies es $\frac{a}{b}$, entonces la razón de los volúmenes es $\frac{a^2}{b^2}$.(Figura de abajo).



Gráfica 1

Hay que hacer hincapié en que no hay ninguna duda, basándose en las pruebas internas presentes en sus propios escritos, de que Arquímedes estaba absolutamente al corriente, desde el comienzo, de que esas dos afirmaciones eran falsas. No es que estuviera intentando salvar su dignidad de manera retroactiva: realmente había enviado cartas "manipuladas", con la intención de tender una trampa a sus colegas matemáticos. De acuerdo con sus propios dichos, lo hizo "para que aquellos que afirman descubrirlo todo, sin presentar ninguna prueba propia, sea cuestionado por haber probado lo imposible".

Hay que aclarar que Arquímedes no tenía un carácter efusivo ni tampoco vehemente. "Inquieto" tal vez, o mejor dicho "astuto". No por nada los historiadores siguen debatiendo el significado preciso de los descubrimientos de Arquímedes: El realmente quería confundir a sus lectores. Entonces, probablemente hubiera disfrutado de la historia futura de sus escritos. **Que el esfuerzo de leerlo sea tan martirizante, tan difícil, es exactamente lo que él quería**.

La manera en que la actividad científica se estructuraba en la época de Arquímedes era radicalmente diferente de cualquier cosa que conozcamos. No había universidades, empleos ni publicaciones científicas. Es cierto que aproximadamente un siglo antes de la muerte de Arquímedes se fundaron varias "escuelas" en Atenas, pero éstas diferían también bastante de las instituciones científicas modernas. Eran más parecidas a los clubes de la actualidad, donde personas con ideas similares podían reunirse para debatir cuestiones de importancia para ellos (generalmente, más filosóficas que científicas). En Alejandría, los reyes ptolemaicos establecieron una gran biblioteca (y también otras bibliotecas), aunque esto tampoco formaba parte de una entidad de investigación, sino que era, simplemente un símbolo de prestigio y riqueza. Por aquel entonces, simple y llanamente, no existían las profesiones de ciencia. Tampoco podía obtenerse mucha gloria: después de todo, eran muy pocas las personas que podían leer (y entender) textos científicos. El verdadero camino a la gloria era la poesía (como en el resto del mundo pre moderno).

Si alguien quería hacerse un nombre, o alcanzar algún tipo de inmortalidad, escribía poemas. En definitiva, eso era lo que todos leían, comenzando en la más tierna infancia con La Ilíada y La Odisea, obras que prácticamente todos sabían de memoria.

Entonces ¿Cómo hacia alguien para convertirse en matemático? tendría que haber entrado a la materia por casualidad (por ejemplo, gracias a su padre, en el caso de que este hubiera sido astrónomo). Así quedaba atrapado. De todas maneras, se trataba de una enfermedad muy rara. Se puede calcular que en todo el periodo de la matemática antigua, aproximadamente entre 500 a. C. y el 500 d. C, hubo como mucho, mil matemáticos en actividad, es decir, uno por año.

Uno de ellos Euclides, quien se cree que escribió sus obras a comienzos del siglo III a. C, pero ni siquiera él despertaba alta autoestima por parte de Arquímedes por tratarse de matemáticas “básicas”, pues este se dedicaba al estudio de la matemática avanzada y escribía para personas con más conocimientos que los que podían encontrarse en el contenido de “los Elementos” de Euclides y de esas personas debía haber muy pocas. Los partidarios de Arquímedes estaban integrados como mucho, por algunas docenas de matemáticos desperdigados por el mediterráneo, muchos de ellos aislados en sus pequeños pueblos, esperando con impaciencia la siguiente entrega de cartas provenientes de Alejandría (que era el centro de intercambio).

Cuando en las obras de Arquímedes las introducciones comienzan con una carta escrita a un individuo, se debe tomar literalmente. Se trataba realmente de cartas privadas, enviadas a las personas de Alejandría que tenían los contactos necesarios para ampliar la difusión de sus contenidos. Todo dependía de esta red de individuos. En las introducciones, Arquímedes se lamenta por la muerte de su viejo amigo, Conón, importante astrónomo, “era el único que me entendía …”, en la mayoría de las cartas de Arquímedes puede verse un acento de furor: no había a quién escribirle, no había un lector lo suficientemente bueno. Con el tiempo, los habría: personajes de la talla de Omar Khayyam, Leibniz, Galileo y Newton leerían a Arquímedes. Ésos fueron sus verdaderos lectores y fue a través de ellos como Arquímedes impactó la Ciencia Moderna. Seguramente sabía que estaba escribiendo para la posteridad.

Pero antes de que estos grandes personajes tuvieran acceso a tales escritos, estos pasaron por muchos inconvenientes que amenazaron con destruir el legado Arquimediano y a la vez el avance de la Matemática.

En abril de 1204 los soldados cristianos asignados a la misión de liberar a Jerusalén se detuvieron antes de llegar a su destino para saquear Constantinopla una de las ciudades más ricas de Europa; se dice que esta ciudad tenía más libros que pobladores. Entre los tesoros saqueados se encontraban algunos tratados de uno de los mejores matemáticos del mundo antiguo (uno de los más grandes pensadores que hayan existido nunca). Fué precisamente él, quien determinó el valor aproximado de Pi, desarrolló la teoría de Centros de Gravedad y se anticipó en el desarrollo del Cálculo Integral mil ochocientos años antes que Newton y Leibniz. Su nombre era Arquimedes.

A diferencia de los miles de libros que fueron destruidos durante el saqueo de la ciudad, tres libros que contenían escritos de Arquímedes sobrevivieron; se les conoció como los códices[1] **A**, **B** y **C**. De los dos primeros códices se sabe que en 1881 un académico llamado Valentín Rose encontró un manuscrito en la majestuosa biblioteca del vaticano; el autor era Guillermo de Moerbeke, un fraile franciscano y muy buen traductor de textos griegos, incluso de varias obras de Aristóteles. Pero ésta era una copia, traducida del griego al latín, de las obras de Arquímedes. El traductor terminó de escribir el libro el martes 10 de diciembre de 1269. Dado que Guillermo había sido designado

[1] Códice es un documento con el formato de los libros modernos, de páginas separadas, unidas juntas por una costura y encuadernadas. Aunque técnicamente cualquier libro moderno es un códice, este término se utiliza sólo para libros escritos a mano, manufacturado en el periodo que abarca desde finales de la Antigüedad Clásica hasta los inicios de la Edad Media entre los siglos I-V d.d.C.

capellán y penitenciario del Papa Clemente IV en Viterbo, Italia, en algún momento de la década de 1260, y aún estaba allí en 1271, es probable que tradujera los tratados de Arquímedes en Viterbo.

Pero ¿qué manuscritos tradujo Guillermo y dónde los obtuvo? Eran dos, y ambos estan incluidos en el catálogo de los manuscritos que pertenecían al Papa en 1311. Estos eran los manuscritos hoy conocidos como códices A y B. El códice A era el manuscrito número 612; ni siquiera estaba en buen estado en 1269, dado que había perdido su cubierta; en el catálogo, el códice está registrado como Angevino, esto probablemente significa que quien se lo entregó al Papa fue Carlos I de Anjou después de la batalla de Benevento en el año 1266; mientras que el códice B era el número 608.

De modo que los códices A y B terminaron en Italia. Pero el códice B no duró demasiado, no se sabe nada de él desde 1311. Por otra parte, el códice A llegó a ser uno de los códices más buscados del Renacimiento Italiano. En 1450 estaba en manos del Papa Nicolás V, quien encargó una nueva traducción a Jacobo de Cremona. En 1492, Lorenzo de Médici "el magnífico" envió a Poliziano (Su secretario privado) a buscar textos que aún no estuvieran en su biblioteca; Piliziano encontró el códice A en la biblioteca de Giorgio Valla en Venecia, y encargó una copia del mismo; esta copia se encuentra hoy dentro de la obra maestra arquitectónica de Miguel Ángel, la Biblioteca Laurenciana de Florencia. Tiempo después, Alberto Pio de Capri compró la biblioteca de Valla y cuando Pio murió en 1531, el manuscrito quedó en posesión de su sobrino Rodolfo Pio, quien murió en 1564. Desde entonces, nadie volvió a ver el códice A. (En el códice C enfatizaremos más adelante).

Estos códices tienen algunos textos en común: los tres contienen **Sobre el Equilibrio de los Planos** (Donde estudia los centros de gravedad de figuras planas y condiciones de equilibrio de la palanca).

El A y el B contienen **La Cuadratura de la Parábola** (Demuestra que: "Una sección de parábola excede en un tercio al área del triángulo de igual base que la sección y cuyo vértice es el de la parábola").

El A y el C tienen: **Sobre la Esfera y el Cilindro** (El resultado principal es que dados un cilindro y una esfera inscrita en él, el volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro); **La Medida del Círculo** (Donde encuentra la fórmula para el área de un círculo y en un prodigio de cálculo e ingenio para aquellos tiempos, consigue hacer una buena aproximación del número pi inscribiendo y circunscribiendo polígonos de hasta 96 lados en una circunferencia. La acotación que encontró fue $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$, Aproximadamente $3{,}140845\ldots<\pi<3{,}142857\ldots$) y **Sobre las Espirales** (un estudio bastante complicado y original donde obtiene diversos resultados sobre las espirales. Se cree que el objetivo que se perseguía era resolver alguno de los grandes problemas de la época, como la cuadratura del círculo o la trisección de un ángulo en común).

El B y el C comparten **Sobre los Cuerpos Flotantes** (Estudio sobre hidrostática). Se cree que descubrió el principio de la hidrostática cuando estaba bañándose y pensando en el problema que le había propuesto el rey Hierón de Siracusa. Éste había encargado una corona de oro a un artesano y sospechaba que habían sustituido parte del oro por plata. Sumergiendo la corona en agua pudo determinar su volumen (el del agua desalojada) y conocido también su peso pudo demostrar que el artesano intentaba engañar al rey. Cuando a Arquímedes se le ocurrió la idea salió rápidamente de la bañera exclamando: *¡Eureka! ¡Eureka!* Que en griego significa *"Lo encontré"*)...

El códice A es el único testigo de **Sobre Conoides y Esferoides** (Estudio sobre las figuras geométricas que se obtienen al hacer girar las cónicas) y del **Arenario** (En el que distingue claramente lo infinito de lo muy grande -*contando los granos de arena que pueden caber en el universo*- y desarrolla un sistema de numeración con el que se pueden representar tales magnitudes).

Finalmente el códice C contenía dos extraordinarios escritos hechos por Arquímedes que no figuraban en los códices A o B, el revolucionario **Método**, donde da a conocer las bases en las que se apoyan sus descubrimientos, como son la teoría de las razones y las proporciones entre magnitudes geométricas y sobre todo el método de exhaución de Eudoxo; y el entretenido **Stomachión**.

Aunque maestros del renacimiento tales como da Vinci y Galileo conocieron las obras de Arquímedes a través de copias de estos libros, ni Leonardo, ni Galileo, Newton y Leibniz conocieron la existencia del tercer libro (códice C), escrito por Arquímedes en un rollo de papiro[2]. El papiro hizo su aparición en Grecia hacia el siglo VII a. d. C, época en que nació la poesía lírica. Los griegos llamaron a una hoja de papiro aún no escrita *charta*, en latín y en italiano *"carta"*; al rollo se le llamo en latín *volumen o liber*. El papiro griego más antiguo es del siglo IV a.d.C. En esta ciudad floreció un importante y bien organizado arte librario, cuyos productos también se exportaban al extranjero. El copista y el vendedor de libros al principio fueron una misma persona; solamente a partir del siglo V a.d.C, los comerciantes llamados *"bibliopoli"*, formaron un gremio independiente que realizaba su trabajo en negocios abiertos al público, el local además de ser punto de venta, fue lugar de encuentro de personas eruditas que se reunían para escuchar la lectura en voz alta, estas personas tenían la tarea de la difusión del libro.

En Roma la utilización del papiro como soporte de la escritura era bastante más cómoda y más fácil de manejar que la corteza de árbol, los rollos de plomo y de tela, materias que los romanos utilizaban desde hacía tiempo. Los volúmenes destinados al comercio estaban escritos por esclavos *literati*, llamados *scriptores, amanuenses, librarii, antiquarii. Librarius* significaba "escritor de obras literarias".

Por otro lado para conseguir copias más correctas, y también porque el comercio de libros se limitaba a las obras más buscadas, los romanos amantes del estudio tenían en sus casas esclavos literati encargados de copiar textos. En Roma eran miles los esclavos que se dedicaban a transcribir códices; El libro manuscrito se llama *"códice"*. El rollo o volumen, que fue la primera forma del libro en la civilización antigua del mundo occidental y en Oriente, entró en competencia con el códice al principio de la era cristiana y posteriormente fue sustituido por este, es decir, el conjunto de cuadernos formados al doblar una o más hojas y cosidos unos a otros. La etimología de la palabra es *caudex*, tronco de árbol o corteza.

El destino del códice fue más brillante que el del rollo. Son numerosos los interrogantes, refiriéndonos a la técnica con la que los artesanos medievales confeccionaron el libro manuscrito bajo forma de códice con soporte de pergamino[3]. Según la tradición, se atribuye a la biblioteca del rey de Pérgamo el mérito de haber convertido en uso público la utilización del pergamino como soporte de escritura. Ya desde los tiempos antiguos se había utilizado el cuero como soporte de escritura y en varios países utilizaron piel de animal, los egipcios, los judíos, los asirios y los persas. Pero solamente alrededor del siglo III a de C, se inició un nuevo tratamiento del cuero, de forma que se adoptase mejor para recibir la escritura, tal innovación sucedió en Pérgamo, por lo tanto el pergamino es un "papel" de piel animal convertida en hojas aplanadas y lisas que permitían

[2]Papiro es una planta fibrosa que crece de manera abundante en las riveras del rio Nilo y los rollos de papiro eran los artículos más utilizados en el mediterráneo antiguo por parte de los egipcios; para confeccionarlos se arrancaban tiras de la parte baja de la planta y se las ubicada de manera horizontal, en paralelo, y apenas superpuestas. Luego se colocaban otras tiras de manera perpendicular a las anteriores y se golpeaban con fuerza al conjunto de capas con una masa para que se adhieran entre sí.

[3]Pergamino es un material hecho a partir de la piel de una res u otros animales, especialmente fabricado para poder escribir sobre él. La piel sigue un proceso de eliminación del vello, adobado y estiramiento al final del cual se consiguen las láminas con las que se elabora un libro, una filacteria o los rollos que se conocían de la Antigüedad. El origen de su nombre es la ciudad de pérgamo.

su utilización óptima como material de escritura; en Egipto se empleaban pieles de antílope o de gacela para obtener pergaminos de mejor calidad.

A partir del siglo IV, al prevalecer definitivamente el pergamino sobre el papiro, el codex sustituyó así al rollo y desde entonces ha constituido la forma habitual del libro. **Los escritos que no se pasaban a estos nuevos soportes acababan deteriorándose y desapareciendo** (Las dimensiones de un códice es decir, el formato, en la edad media se llamaban forma; los códices se componían de cuadernos y estos se subdividían en folios, hojas y páginas. Por el *"cuaderno"* se entendía un fascículo de hojas cosidas en un solo manojo, por *"folio"* la hoja doblada en dos y consistente en cuatro carillas, por *"página"* la mitad de la hoja es decir dos carillas y cuaderno un pliego de cuatro folios).

El códice C de Arquímedes fue una carta privada que envió a un amigo (**Eratóstenes**) en el siglo III a.d. C; de hecho es absolutamente extraordinario que lo sepamos. Además podemos conocer también las cosas que este hombre menciono en su carta, y hasta que aspecto tenía ésta.

La carta consistía en hojas de papiro enrolladas alrededor de un centro de madera (*un rollo*). Para escribir en él, Arquímedes utilizaba una pluma de caña y escribía solo de un lado de la hoja: del lado en el que las tiras de papiro estaban colocadas de forma horizontal, es decir, a lo ancho. Escribía en columnas angostas, no dejaba espacios entre las palabras y prácticamente no habían signos de puntuación(al menos en la forma como los conocemos actualmente). Los diagramas, que en su opinión formaban parte integral del texto, se encontraban ubicados entre las columnas a continuación del texto al que hacía referencia; por tales motivos, los escritos de Arquímedes eran y son en la actualidad fácil de reconocer, por su presentación, orden, pero también por su dificultad para interpretarlo.

Una vez que terminó de escribir la carta, Arquímedes la llevó al puerto y se ocupo de que se despachara a su destino. Estaba enviando su rollo, mediante una travesía marítima arriesgada, al mismo lugar del que había salido, Alejandría. Si conservó una copia de lo que envió (cosa que era común en su época) no hay rastros de ella. Tal vez haya perecido junto con el propio Arquímedes en el sitio del año 212 a.d. C, así una vez que el navío zarpo del puerto, el destino de la carta dejó de estar en sus manos. Esta no era una carta ordinaria … era el **Método de Arquímedes**.

En la época de Eratóstenes, Alejandría era una ciudad joven. Alejandro magno la había fundado el 7 de abril del año 331 a.d. C, y no paso mucho tiempo hasta que esta ciudad reemplazó a Menfis como capital de Egipto. A partir del año 305 a.d. C. comenzó a gobernarla Ptolomeo I Sóter, de ascendencia greco-macedonia, y la dinastía a la que dio origen gobernaría Egipto hasta el suicidio de Cleopatra, en el año 300 a.d. C. Alejandría bajo esta soberanía se convirtió en un gran centro de cultura griega: para el año 280 a.d. C. ya albergaba el templo de las musas, el primer museo del mundo. Era allí donde Eratóstenes y otros eruditos pasaban sus días, especulando sobre cuestiones como la circunferencia de la tierra y, donde en ocasiones recibía cartas de su amigo Arquímedes. La biblioteca del templo constituía la mayor colección de textos del mundo antiguo, puesto que estaba registrado sistemáticamente todo el conocimiento mundial que existía hasta ese momento.

Es muy probable que Eratóstenes hiciera copiar la carta; teniendo en cuenta la esperanza de Arquímedes de que las generaciones posteriores leyeran el texto. La única razón por la que sabemos que la carta llegó a su destino, es porque alguien la leyó en esa ciudad. En el siglo I a.d. C. alguien recuperó una copia de la carta. Esta persona se llamaba Herón. Herón escribió un tratado llamado *La Métrica* en el que menciona El Método: el propio Arquímedes demuestra en su método que si en un cubo se introducen dos cilindros cuyas bases son tangentes a las caras del cubo, el segmento común de los cilindros será igual a dos tercios del cubo. Esto tiene utilidad para las bóvedas que se construyen de esta manera y aparentemente las bóvedas era una de las especialidades de Herón; aunque es digno mencionar que son tenues las pistas por las que se rastrean a Arquímedes, de hecho de La métrica de Herón, solo sobrevivió un manuscrito; se sitúa este personaje gracias a un eclipse de luna registrado en sus escritos, y que data del año 62 d.d. C, no hubo ningún eclipse similar en los siglos anteriores y posteriores a esa fecha.

Aun con Herón, Arquímedes se encuentra con una desventaja particular respecto a otros grandes pensadores de la antigüedad: las obras de Homero, Platón y Euclides, quienes gozaron de reconocimiento en su misma era por ser geniales además de imprescindibles, por lo que se recurría a ellas con frecuencia y, llegado el momento, tambien se copiaron a códices. Al contrario, "las obras de Arquímedes eran muy complicadas para ser imprescindibles". Eran muy pocas las personas que podían entenderlo. De hecho, su genialidad se volvió en su contra.

Pero la persona que hizo más que ninguna otra por asegurar la supervivencia de los tratados de Arquímedes durante este periodo decisivo se llamaba Eutocio. Eutocio nació en Ascalón, Palestina alrededor del año 480 d.d.C. No se dedico únicamente a leer los tratados, sino que los investigó en profundidad y los explicó. Eutocio realizó extensos viajes a los principales centros de conocimiento de la época, incluso a Alejandría, donde seguramente conoció a un maestro llamado Amonio. Eutocio dedicó su primera obra sobre Arquímedes, un comentario *Sobre la Esfera y el Cilindro I*, a Amonio. Luego realizo más comentarios al respecto *Sobre la Esfera y el Cilindro II, La Medida del Circulo y Sobre el Equilibrio de los Planos*. Eutocio tuvo que esforzarse mucho en la búsqueda de los escritos de Arquímedes, por que no había muchos disponibles. Los tratados de Eutocio sobreviven junto a las obras de Arquímedes que comenta, y este es un punto muy importante. Eutocio vio claramente las ventajas que los nuevos formatos traían y los explotó. Aparentemente, Eutocio preparó una edición de muchos de los tratados de Arquímedes junto con sus propios comentarios y los hizo encuadernar entre tablas de madera. Podemos imaginarnos entonces que a partir del siglo VI los tratados de Arquímedes se encontraban contenidos en un práctico códice de pergamino, a salvo entre cubiertas de madera y en compañía de otros escritos de naturaleza similar.

Puede ser que la carta de Arquímedes haya reposado en un sitio cómodo, aunque de ninguna manera era seguro. Los tiempos estaban cambiando, y esos cambios no favorecieron a Arquímedes. Una a una, las grandes ciudades del mundo antiguo en donde se encontraban las antiguas escuelas del saber y los libros de los que ellas dependían sufrieron los saqueos de los invasores. Los godos saquearon Roma en el año 410, los persas saquearon Antioquia en el año 540 y los eslavos Atenas en el 580. Puede ser que en el siglo III d.d.C existieran muchas copias de las cartas de Arquímedes fuera de Alejandría, pero para finales del siglo VI apenas quedaba alguna. En Alejandría las cosas no eran mucho mejores. Alrededor del año 270 de nuestra era, durante la guerra contra Zenobia, el emperador Aurelio dañó gran parte del complejo palaciego en el que se encontraba el museo. En el año 391, Teófilo, el arzobispo de Alejandría, saqueó el *Serapeum*, la biblioteca del museo. En el año 415 una turba de cristianos fanáticos descuartizó a la distinguida matemática Hipatia. Las cartas de Arquímedes debían abandonar Alejandría antes de sufrir un destino similar. La pregunta era ¿hacia dónde correr? La única respuesta era **Constantinopla**. . .

Hace aproximadamente 700 años, un monje necesitaba pergamino para un libro de oraciones nuevas, tomó la copia del libro de Arquímedes, cortó las páginas por la mitad, las giró 90 grados, y raspó la superficie para eliminar la tinta, creando así un palimpsesto (manuscrito que todavía conserva huellas de otra escritura anterior en la misma superficie, pero borrada expresamente para dar lugar a la que ahora existe) de escritura fresca hechas limpiando las mayores partes del texto y finalmente escribió sus oraciones en las casi páginas limpias; hoy conocido como el Palimpsesto de Arquímedes.

Trescientos años después se puede localizar nuevamente el palimpsesto en otro continente, el asiático, en la biblioteca del monasterio de *San Sabas* en Jerusalén. En 1834 había más de mil manuscritos en esta biblioteca uno de estos el palimpsesto de Arquímedes.

La única razón por la que se sabe que el palimpsesto de Arquímedes estuvo en San Sabas es que, cuando un erudito griego llamado *Papadopoulos-Kerameus* describió el manuscrito en 1899, dijo que dentro del libro había un cuaternión agregado en el siglo XVI y que en una de esas páginas, en el folio 184, había una inscripción que indicaba que el libro pertenecía al monasterio. El manuscrito ya no tiene 184 folios, y esta inscripción ya no existe. Es gracias a Papadopoulos-Kerameus que sabemos cómo el palimpsesto de Arquímedes sobrevivió a lo largo de los siglos. Ya sea por los daños que sufrió o porque sus oraciones dejaron de considerarse importantes, mientras el manuscrito estuvo en San Sabas se perdieron aproximadamente 60 folios. Casi un tercio del códice completo. La matemática no era una prioridad en San Sabas. El códice de Arquímedes estuvo en el monasterio durante al menos 300 años. A diferencia de los textos de los códices A y B, el renacimiento y la revolución científica desconocieron aquellos que solo estaban en el códice C; de alguna forma, al igual que el homónimo bíblico del hermano Lázaro, el Arquímedes de El Método y del Stomachión debía volver de la muerte. A comienzos del siglo XIX los manuscritos de San Sabas se incorporaron nuevamente a la biblioteca del patriarcado griego, posiblemente por descuido, debido a que en época de Pascuas los monjes se dirigen a Jerusalén, a la institución de la que dependían y es así como regresó a la ciudad donde hace 700 años había nacido.

En 1907, **Johan Ludwig Heiberg**, un filólogo danés, lo descubrió en una biblioteca de Constantinopla. Se debe Comprender que la precariedad de estos textos era enorme. Pero las matemáticas griegas han tenido la suerte de contar con un sabio danés, que buscó sistemáticamente en bibliotecas los restos del naufragio de las matemáticas clásicas y que encontró el palimpsesto en Estambul. Había defendido su tesis doctoral (*Quaestiones Archimedeae*) en 1872. El descubrimiento fue portada en el New York Times el 16 de julio de 1907. Estaba asombrado al ver que el libro contiene textos previamente desconocidos de Arquímedes. Estudió el libro en detalle, descifrando las letras débiles con un microscopio (aunque no totalmente), sus esfuerzos llevaron a esta obra a la atención de estudiosos de todo el mundo, pero después de haber concluido su transcripción, el libro desapareció de nuevo.

Hacia 1938, todos los libros del metochion del santo sepulcro ya se habían trasladado a la biblioteca Nacional de Grecia, en Atenas. Esto se llevó abiertamente ante los ojos de las autoridades Turcas, que habían prohibido específicamente tales exportaciones. Esto era definitivamente mas seguro para los libros que haber permanecido en el metochion, debido a que la vida allí se había vuelto difícil.

Hacia el final de la Primera Guerra Mundial, la presencia militar Inglesa y francesa en Constantinopla apoyaba al sultán de un mutilado imperio Turco: el hombre viejo de Europa. Mustafá Kemal, quien luego se convertiría en Ataturk, abandonó la capital y se unió a los nacionalistas turcos para fundar el Estado moderno en Turquía. En 1923, los aliados y el sultán fueron expulsados de Constantinopla. En el proceso, Ataturk derrotó de manera categórica a los griegos, quienes habían invadido precipitadamente Turquía en 1921. En un temprano ejemplo de limpieza étnica, cientos de miles de griegos que vivían en Turquía fueron trasladados por la fuerza a Grecia. Luego en 1925, Ataturk abolió las órdenes religiosas e hizo ahorcar al patriarca griego de Constantinopla.

Fue dentro de esta atmosfera como los libros del metochion se trasladaron precipitadamente a Atenas y seguramente este registro se hizo de una manera muy discreta. El velo de silencio que rodeo a los manuscritos del metochion en las décadas de los veinte y los treinta debió resultar demasiado tentador para alguien: el palimpsesto fue uno de los tantos manuscritos espectaculares que nunca llegaron a Atenas.

Finalmente en la década del 20 del siglo pasado Marie Louis Sirieix adquirió el libro y lo guardó en su casa en parís. Sirieix había servido como militar en Grecia y Turquía en esa época, probablemente fue en ese momento cuando el manuscrito llegó a sus manos. Había vivido en parís, había militado con honores en la Resistencia Francesa en la Segunda Guerra Mundial y había partido hacia el sur de Francia en 1947. Fue en ese momento cuando dejó el palimpsesto al cuidado de su hija Anne Guersan. Sirieix murió en 1956. Durante la década del setenta Anne comenzó a analizar el libro que había heredado. Buscó consejo en el profesor Bollack, un vecino de Paris, y en el profesor Wasserstein, de Leicester, y no fue hasta finales de 1970, cuando le dejó algunas hojas sueltas del códice al padre Joseph Paramelle en el Instituto de Investigación y de Historia de los Textos del Centro Nacional de Investigaciones Científicas de Paris, cuando supo lo que tenía. En 1971, lo llevó al Etablissement Mallet para limpiarle las manchas de hongos de algunas de sus páginas y así poder preservarlo; luego decidió venderlo. En la década del 70 se confeccionó un pequeño folleto y se intentó vender el códice de manera privada y discreta al ofrecerlo a cierto número de particulares e instituciones; pero todos rehusaron. Anne Guersan finalmente se dirigió a Felix de Marez Oyens, del departamento de manuscritos de Christies, donde el 29 de octubre de 1998 finalmente se vendió.

El comprador anónimo del libro financió un proyecto de investigación enorme. En primer lugar, la conservación y restauración intensiva por la condición del propio libro. Luego, los investigadores tomaron fotografías digitales del contenido en diferen- tes longitudes de onda de la luz, creando una imagen multi-espectral que pudo ser manipulada para revelar el texto de Arquímedes. En la mayoría de las páginas, estaban incluidos cuadros falsos sobre el texto, por lo que los investigadores utilizaron imágenes de fluorescencia X-Ray para mirar debajo de las pinturas y descifrar el texto oculto.

Dos de los textos escondidos en el libro de oraciones no han aparecido en ninguna otra copia de trabajo de Arquímedes, de modo que nadie más que Heiberg los había estudiado hasta ahora. Uno de ellos, titulado **El Método**, tiene un significado histórico especial, porque se podría considerar la primera obra conocida en el Cálculo.

En el Método, Arquímedes estaba trabajando en una forma de calcular las áreas y volúmenes de objetos con superficies curvas, que también fue uno de los problemas que más motivaron a Newton y Leibniz. Matemáticos de la antigüedad habían luchado durante mucho tiempo con el problema de “la cuadratura del círculo”. Este problema resultó ser imposible de resolver utilizando solo una regla y un compás, únicas herramientas físicas empleadas por los antiguos griegos. Sin embargo, Arquímedes elaboró maneras de calcular las áreas de muchas otras regiones curvas. Ésta y todas sus demostraciones estaban incluidas en el tan esperado Método, ya que Arquímedes lo había anunciado, pero lo había retrasado debido a que los métodos ahí empleados no eran reconocidos, ni legitimizados por los científicos de su época, entre ellos el uso del infinito.

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICAS INFINITESIMALES

Uno de los resultados más fuertes y conocidos de Arquímedes es LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA. Para su hallazgo utiliza una estrategia muy interesante, que durante mucho tiempo fue el dolor de cabeza de grandes matemáticos, **El Infinito (Real)**, a través del uso de los infinitesimales.

Vulgarmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande, ilimitado, o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo "muy grande" y de la posibilidad humana (temporal) de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia.

Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y, generalmente, los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas, como la famosa carrera donde Aquiles nunca alcanza a la tortuga (*Paradoja de Zenón*).

Para Platón y Pitágoras el infinito es caos, el infinito carecía de medida. La voz "apeirón" tal como la emplea Anaximandro, significa "sin fin" o "sin límite", y suele traducirse como "lo infinito", "lo indefinido", "lo ilimitado".

La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Uno de los típicos argumentos dados en contra del infinito era el conocido como la "aniquilación de los números", según este argumento los números finitos serían absorbidos por los números infinitos, es decir, para todo número finito a, $a+\infty=\infty$ y de esta forma los números infinitos aniquilaban a los números finitos.

Aristóteles también trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos repre- sentaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido en el propio desarrollo de la matemática. El infinito como un proceso de crecimiento sin final (infinito potencial) o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad (infinito real).

Durante la Edad Media, la mayor parte de la matemática relacionada con lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño tomó la forma de un conjunto de especulaciones en torno a las ideas de Platón y Aristóteles sobre la relación entre punto y recta, la naturaleza de lo inconmensurable, las paradojas de Zenón, la exis- tencia de lo indivisible, la potencialidad y actualidad de lo infinito. Aunque en esta época, el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios. Esta controversia sobre el infinito se prolongó durante el Renacimiento y a principios del siglo XVII llevó a la hoguera, por obra de la Inquisición y un traidor veneciano, al gran mago renacentista Giordano Bruno, quien predicó un universo constituido por infinitos mundos.

Galileo con cierta ambigüedad, rechazó la idea del infinito por ser paradójica, ya que atentaba contra la razón. Galileo llegó a esta conclusión después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente, es decir, *el infinito permitía que la parte fuera del mismo tamaño que el todo*. Otro ejemplo muy utilizado por Galileo, y popular por esa época, fue el del conjunto de los números cuadrados perfectos: el conjunto de los cuadrados perfectos es apenas una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raíz cuadrada de un único número cuadrado.

$$\begin{array}{c} 1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\ldots\ \ldots\ \ldots, n \\ 1,4,9,16,25,36\ldots\ \ldots\ \ldots, n^2 \end{array}$$

En el siglo XVII la ciencia moderna, representó un cambio paradigmático de un mundo cerrado a un universo infinito, (Koyré). A partir de este siglo se comienza a usar la curva **lemniscata** (∞) como símbolo del infinito. El matemático John Wallis (Ashford, 1616-Oxford, 1703), en su obra *Arithmetica Infinitorum*, fue el primero en usar la lemniscata para representar el infinito.

Kant, en el siglo XIX, coincidía con Aristóteles al señalar que el límite absoluto es imposible en la experiencia, es decir, nunca podemos llegar al infinito (real). Y el gran matemático Karl Friedrich Gauss, en 1831, enfatizaba su protesta contra el uso del infinito como algo consumado:

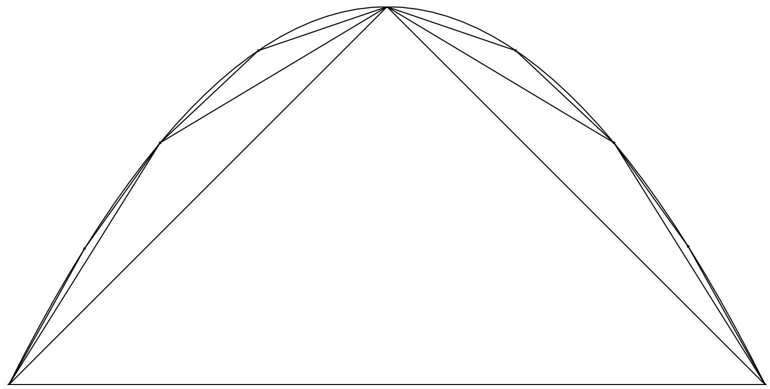
"Protesto contra el uso de una cantidad infinita como una entidad actual; ésta nunca se puede permitir en matemática. El infinito es sólo una forma de hablar, cuando en realidad deberíamos hablar de límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente".

El teólogo y matemático checo Bernhard Bolzano fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito real. En su obra póstuma, *Paradojas del infinito* (1851), defendió la existencia de un infinito real y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Bolzano aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos.

A finales del siglo XIX, George Cantor desarrolla una teoría formal sobre el infinito Real. Todos los argumentos dados, señala Cantor, en contra del infinito han sido insensatos, ya que han tratado la aritmética de los números infinitos como una extensión de la aritmética de los números finitos. Uno de los objetivos de su obra *Grundlagen* era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito real. Si los conjuntos infinitos se comportan de manera diferente a los conjuntos finitos no quiere decir que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente.

Cantor demostró, contra la famosa aniquilación de lo finito por lo infinito, que los números infinitos eran susceptibles de ser modificados por los números finitos. Así, la distinción de a, $a + \infty = \infty$ demostraba, dentro de la teoría de los números transfinitos, que los números finitos podían ser sumados a los números infinitos sin ser *aniquilados*, También rechazó la distinción aristotélica entre infinito real e infinito potencial, ya que todo infinito potencial presupone la existencia de un infinito real.

Sin todos estos avances científicos, Arquímedes en su época desarrolló métodos rigurosos de tratar con el infinito, que aún hoy en día se utilizan siguiendo el requerimiento de Aristóteles. Por ejemplo, Arquímedes demostró que el área de una sección de parábola es cuatro tercios del área del triángulo en su interior (en rojo en el diagrama siguiente). Para ello, se construyó una figura cerrada que es una aproximación de la curva. Luego se demostró que podía hacerse una aproximación al área de la curva tan cerca como se quisiera.



Gráfica 2

Críticamente, nunca Arquímedes afirmó que por medio de triángulos (añadiendo siempre en los espacios entre la curva y el triangulo), se podría hacer que la construcción de la línea recta sea exactamente igual a la sección de la parábola. Eso requeriría un infinito real de triángulos. En cambio, se acaba de decir que se puede hacer la aproximación tan buena como se guste, así que se trabaja con el infinito en potencia.

Los historiadores modernos y los matemáticos siempre han creído que Arquímedes trató los infinitos, y se atuvo estrictamente a la clase potencial. Pero los descubrimientos recientes muestran que Arquímedes de hecho usó el concepto de infinito real.

Newton y Leibniz también trabajaron con el infinito real. Leibniz fue tan lejos como para decir en una carta: "*Estoy muy a favor del infinito real que, en lugar de admitir que la naturaleza aborrece, como se suele decir, yo sostengo que la Naturaleza hace uso frecuente de todas partes, a fin de mostrar más eficazmente las perfecciones de su autor*".

Aún en la actualidad los filósofos siguen discutiendo sobre la legitimidad de la noción de infinito real, sin embargo, el método revela la originalidad y la audacia del pensamiento de Arquímedes, y muestra que se anticipó a algunas de las medidas audaces que más tarde daría lugar al pleno desarrollo del Cálculo.

Por lo tanto, se puede decir con total confianza que la tradición científica europea es casi una serie de notas a pie de página sobre la obra de Arquímedes. A modo de ejemplo, basta con echar un vistazo a uno de los libros más influyentes de la ciencia moderna, la obra de Galileo *Diálogos sobre dos nuevas Ciencias*. Este libro se publicó en 1638. Para entonces, Arquímedes ya llevaba exactamente mil ochocientos cincuenta años de muerto, aun así, todo el libro muestra la deuda que Galileo tenia con Arquímedes. Básicamente, en su obra Galileo hace evolucionar las ciencias de la estática (relacionada con cómo se comportan los objetos en reposo) y de la dinámica (sobre cómo se comportan los objetos en movimiento). En cuanto a la estática, sus principales herramientas son los *Centros de gravedad y la Ley del equilibrio*. Galileo tomó prestados ambos conceptos de Arquímedes de forma explícita sin dejar de expresar su admiración. En cuanto a la dinámica, las herramientas principales de Galileo son la *Aproximación de curvas y las Proporciones de tiempos y movimientos*. Ambos conceptos, también derivan directamente de Arquímedes. No se cita con tanta frecuencia o reverencia, a ninguna otra autoridad de la ciencia. Fundamentalmente, Galileo comenzó donde lo había dejado Arquímedes y avanzó en la misma dirección que su predecesor griego había marcado. Esto no se aplica solo a Galileo, sino también a otras grandes figuras de la comúnmente llamada "revolución científica", como Leibniz, Huygens, Fermat, Descartes y Newton, entre otros. Todos ellos fueron "hijos" de Arquímedes; con Newton, la ciencia de la revolución científica alcanzo la perfección de forma "Arquimediana". Basándose en premisas puras y elegantes, y aplicando la geometría pura, Newton dejó las leyes que gobiernan al universo. Toda esta ciencia posterior es una consecuencia del deseo de generalizar los métodos Newtonianos, es decir, Arquimedianos.

Los dos principios que los creadores de la ciencia moderna aprendieron de Arquímedes fueron:

★ Las Matemáticas Infinitesimales.

Lo infinitesimal en matemáticas está asociado con procesos infinitos en los cuales se involucran cantidades o magnitudes “infinitamente pequeñas” a las que se les ha dado, para efectos de hacer cálculos, tratamientos de entidades numéricas aún cuando su comportamiento contradice el axioma de Arquímedes (uno de los principios que legitima la operacionalidad con los números reales).

Los métodos infinitesimales fueron introducidos por los griegos del siglo IV a.d.C. como recurso auxiliar para buscar la solución de cierto tipo de problemas tales como el cálculo de áreas de regiones planas, calculo de longitudes de curvas o de “pedazos” (arcos) de ellas; volúmenes de sólidos, momentos, centros de gravedad, calculo de tangentes, etc.

Es importante tener en cuenta que los matemáticos griegos eran conscientes de la inconsistencia lógica de los infinitesimales al contradecir el comportamiento natural de los números en el aspecto que siglos más tarde fue identificado como el axioma de Arquímedes para los números reales. En tal sentido los resultados obtenidos mediante su aplicación debían ser legitimados por medio de demostraciones convincentes debido a su rigurosidad. Para tal efecto se recurría a demostraciones de carácter geo- métrico o a razonamiento de tipo “Reducción al Absurdo” cuando no se veía “fácil” un razonamiento geométrico o lógico de manera directa.

Arquímedes distinguía perfectamente entre el empleo de los métodos infinitesimales como medio de descubrimiento (en tal sentido los empleo) y su aplicación como argumento demostrativo para justificar la validez de los resultados obtenidos (lo cual descartaba por la falta de rigor lógico implícito tanto en la naturaleza de los “Infinitesimales”, pues ni lo “Infinitamente pequeño”, ni lo “Infinitamente grande” eran aceptados, en el infinito real, por Arquímedes quien estaba de acuerdo con las orientaciones de Aristóteles acerca del comportamiento contradictorio de los infinitesimales frente a las entidades numéricas usuales para la época) al punto que no hacia público los resultados así obtenidos hasta dar de ellos una rigurosa demostración ya fuera esta de tipo geométrico o de carácter lógico. Precisamente, uno de los métodos geométricos de demostración, empleados por él, consistía en un proceso finito de restas sucesivas denominado, a partir del siglo XVII, “Método de Exhaucion” del cual generalmente se hacia uso dentro de una argumentación por reducción al absurdo. Sin lugar a dudas este método contenía indicios del concepto moderno de límite.

Arquímedes queda para la historia no solo como uno de los más grandes científicos que ha producido el género humano sino como el creador del “Análisis Infinitesimal”, que así debe denominarse esta técnica que aplica los infinitesimales a la solución de problemas geométricos y físicos, y precursor de todas las teorías (los indivisibles de Cavalieri, los momentos y fluxiones de Newton, el diferencial de Leibniz, etc.) que concluyeron felizmente, en la creación del Cálculo.

★ La aplicación de los Modelos Matemáticos al mundo físico.

Gracias al palimpsesto de Arquímedes, ahora sabemos mucho más acerca de estos dos aspectos; Matemática, infinito, física: esta triple combinación está presente en todo momento a lo largo del Método.

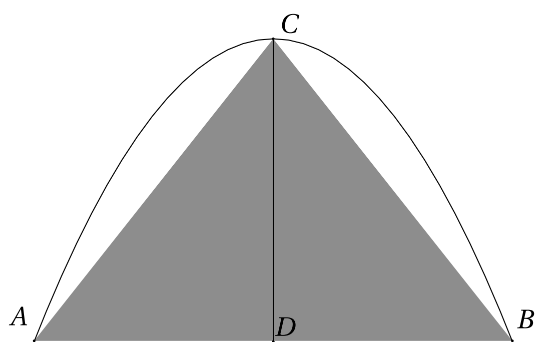
Las Matemáticas Infinitesimales y la aplicación de los modelos Matemáticos al mundo físico están íntimamente relacionadas. Esto se debe a que la realidad física consiste en pulsos infinitesimales de fuerza que actúan de manera instantánea. En consecuencia, para determinar el resultado de la interacción de tales fuerzas se deben sumar una cantidad infinita de "Pulsos", cada uno de los cuales es infinitamente pequeño. Esto es sorprendente: tal vez se piense que las Matemáticas Infinitesimales son una especie de quimera sin aplicación práctica (podemos llegar a pensar que en el mundo que conocemos no vamos a enfrentarnos con el infinito), pero en realidad, las Matemáticas Infinitesimales son la herramienta más poderosa y práctica que tiene la ciencia. Son tan importantes que a veces se les llama simplemente "Cálculo". La ciencia moderna es, en pocas palabras, la aplicación de la Matemática al mundo físico mediante el Cálculo. Principalmente fue Newton quien se valió del Cálculo, de manera implícita, para determinar cómo se comportan los planetas, lo que tuvo un bello resultado y se convirtió en una inspiración para la ciencia posterior. Esto en definitiva, partió de la aplicación de las ideas de Arquímedes. Por tales razones, Arquímedes fue quien más tuvo que ver con la conformación del Cálculo y dado que fue pionero en la aplicación de la Matemática al mundo físico, resulta, que realmente la ciencia occidental es casi una serie de notas a pie de página sobre la obra de Arquímedes.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

3.1. El área del segmento parabólico

Para los griegos, los problemas geométricos de encontrar áreas de figuras regulares tales como triángulos, polígonos y circunferencias eran problemas a los que satisfactoriamente habían dado solución, pero se encontraron ante nuevos problemas, entre ellos, como hallar las áreas de aquellas regiones que no estaban limitadas por figuras regulares; para ello Arquímedes hace uso de los métodos infinitesimales y sus geniales recursos físico-geométricos. Uno de los que más ha llamado la atención ha sido el de la cuadratura de la parábola; se trata de hallar el área de un segmento de parábola, es decir: ***Dado un segmento parabólico*** ABC***, su área equivale a los*** $\frac{4}{3}$ ***del área del triángulo inscrito en el segmento, y con vertices*** A, B ***y*** C***.***



Gráfica 3

$$\textit{Área}\ \textbf{del segmento parabólico}\ ABC = \mathbf{\frac{4}{3}} \text{Á}rea \bigtriangleup ABC$$

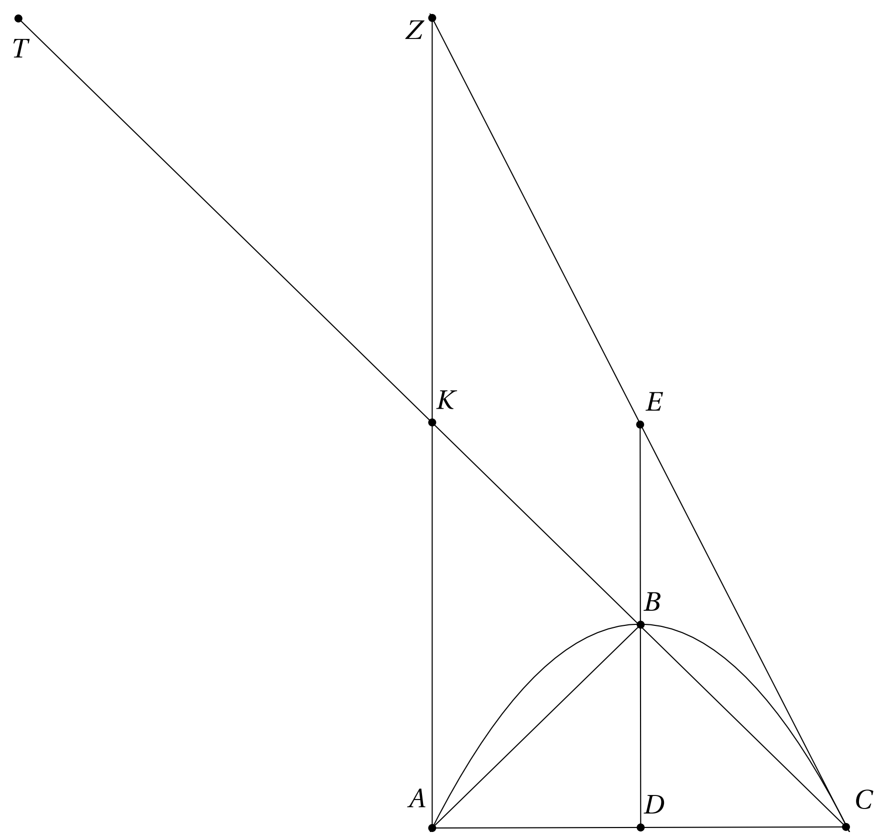
Como parte fundamental de este trabajo, pretendemos hacer una reconstrucción detallada de la demostración hecha por Arquímedes en relación con este problema, pues creemos que éste ejemplifica la importancia de aquellos aportes hechos por estos grandes maestros de la Geometría, ya que conjugando las herramientas de la época con recursos no legitimados por las comunidades académicas, asociados con su genialidad, lograron encontrar importantes resultados que hoy por hoy son de gran importancia en nuestros estudios.

Cabe destacar que algunos elementos básicos para la solución del problema que Arquímedes expresó en la terminología propia de la época, los interpretamos con recursos actuales del

Cálculo Diferencial y la Geometría Analítica para facilitar su comprensión. En relación con las partes "exóticas" de la demostración hecha por Arquímedes, hemos procurado respetarlos en lo fundamental. Pues se trata, precisamente, de recrear estos recursos metodológicos como referentes didácticos para orientar y estimular la creatividad en Matemática.

Para facilitar nuestro trabajo y presentar de manera explícita los resultados obtenidos, nos apoyaremos de la siguiente construcción grafica.

Consideremos el segmento parabólico ABC comprendido entre el segmento de recta AC y la sección parabólica ABC, divídase AC por la mitad en D y trácese la recta perpendicular al segmento AC en el punto D que corta a la sección ABC en B. trácense por los puntos A y C las rectas AZ paralela a BD y CZ tangente a la parábola en C. trácense los segmentos AB y CB y prolónguese este último hasta que corte a ZA en K, prolónguese CK hasta el punto T de tal forma que KC sea igual a KT. Prolónguese el segmento BD hasta que corte a ZC en un punto E.



Gráfica 4

En relación a la gráfica (4) debemos justificar los siguientes resultados:

(1). $\boldsymbol{EB = BD}$

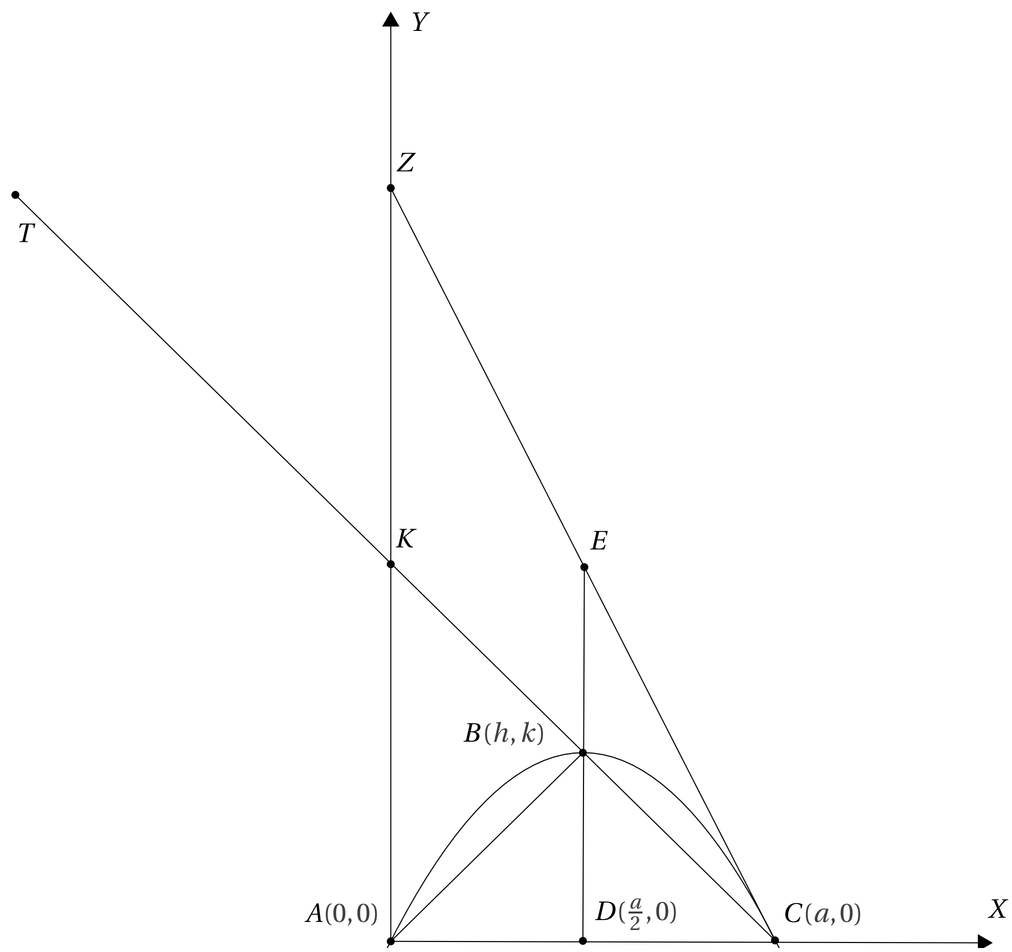
(2). $\boldsymbol{ZK = KA}$ y $\boldsymbol{KB = BC}$

Para ello emplearemos recursos modernos que comprenden desde la ubicación de la gráfica en un sistema coordenado cartesiano, para obtener su correspondiente ecuación, hasta el uso de la derivación. En tal sentido, adecuamos la gráfica (4) de tal forma que el segmento AC este contenido en el semieje positivo de las X con el punto A en el origen de coordenadas y el segmento AZ está contenido en el semieje positivo de las Y . (ver gráfica 5)

La parábola que aparece en esta gráfica, tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

donde p es la distancia focal y (h,k) las coordenadas del vertice.



Gráfica 5

Como $(0,0),(a,0)$ pertenecen a la curva entonces:

$(0-h)^2 = 4p(0-k)$, de donde $h^2 = -4pk$, así que $p = -\frac{h^2}{4k}$

Sabemos que en la ecuación de la parábola el punto (h,k) son las coordenadas del vértice, en este caso $h = \frac{a}{2}$ ya que así hemos hecho nuestra construcción.

$$p = -\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4k} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{4k}{1}} = -\frac{a^2}{16k}$$

Concluyendo de esta forma que la ecuación buscada es: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = 4\left(-\frac{a^2}{16k}\right)(y-k)$ o equivalentemente $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4k}y + \frac{a^2}{4}$ o también $y = -\frac{4k}{a^2}(x^2 - ax)$.

♦ Ahora necesitamos encontrar la **ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto** $(a,0)$, para esto usamos la interpretación geométrica de la derivada.

Si $y=-\frac{4k}{a^2}(x^2-ax)$ entonces $y'=-\frac{4k}{a^2}(2x-a)$

Luego la pendiente de la recta tangente a la Parábola en el punto $(a,0)$ será:

$y'(a)=-\frac{4k}{a^2}(2a-a)=-\frac{4k}{a^2}a)=-\frac{4k}{a}$ entonces la **Pendiente** es $m=-\frac{4k}{a}$.

Reemplazando en la Ecuación Punto Pendiente de la recta tenemos:

$(y_t-0)=-\frac{4k}{a}(x-a)=-\frac{4k}{a}x+4k=-4k\left(\frac{x}{a}-1\right)$

♦ Con estos recursos, ya estamos en condiciones de probar que ***BD*** = ***BE***. En efecto:

$BD=y\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{4k}{a^2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-a\left(\frac{a}{2}\right)\right)=-\frac{4k}{a^2}\left(-\frac{a^2}{4}\right)=k,$

$BE=DE-BD=y_t\left(\frac{a}{2}\right)-k=\left(-\frac{4k}{a}\left(\frac{a}{2}\right)+4k\right)-k=2k-k=k$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{BD=BE}$$

Para probar que:

$$\boldsymbol{ZK=KA} \text{ y } \boldsymbol{KB=BC}$$

Nos apoyaremos en la gráfica (4). En efecto:

Por el criterio (AAA) se prueba facilmente que: $\left.\begin{array}{l}\triangle ZKC\sim\triangle EBC\\ \triangle KCA\sim\triangle BCD\end{array}\right\}$ por lo tanto:

$\dfrac{ZK}{EB}=\dfrac{KC}{BC}$ y $\dfrac{KC}{BC}=\dfrac{KA}{BD}$

Y que:

$$\frac{ZK}{EB}=\frac{KA}{BD}$$

y en consecuencia,

$$\frac{ZK}{KA}=\frac{EB}{BD}=1$$

Luego:

$$\boldsymbol{ZK=KA}$$

Además por semejanza de triángulos tenemos que :

$$\frac{KB}{BC}=\frac{AD}{DC}$$

Como D es el punto medio de AC,

$$\frac{AD}{DC}=1$$

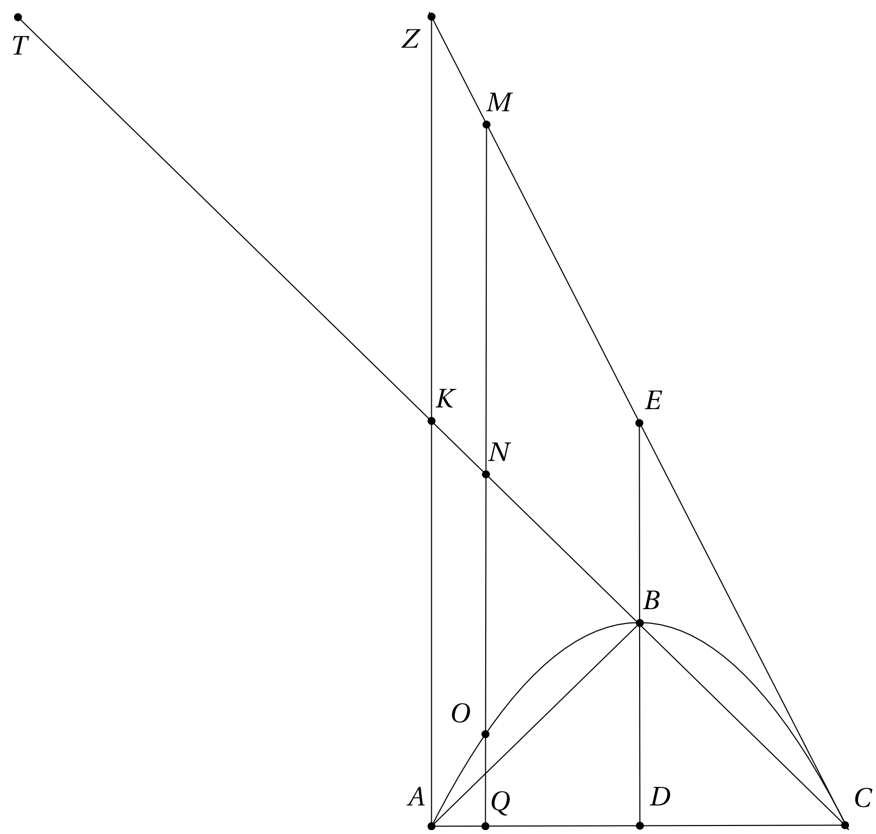
por consiguiente $\dfrac{KB}{BC}=1$ entonces ***KB = BC.***

♦ Continuando con nuestra demostración y con base en la gráfica (4), considerese MQ una recta paralela a ED que corta a ZC, KC y la parábola en los puntos M, N y O respectivamente gráfica

(6), con base en estas construcciones tenemos que:

$$\boldsymbol{MN = NQ} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\frac{AC}{AQ} = \frac{MQ}{QO}}$$

En efecto:



Gráfica 6

Como $\left.\begin{array}{l} \triangle MNC \sim \triangle EBC \\ \triangle NQC \sim \triangle BDC \end{array}\right\}$ entonces $\dfrac{MN}{EB} = \dfrac{NQ}{BD}$, luego $\dfrac{MN}{NQ} = \dfrac{EB}{BD} = 1$

y por lo tanto $\boldsymbol{MN = NQ}$**.**

Con lo que probamos la primera parte de nuestra afirmación. En cuanto la segunda:

Ya conocemos la ecuación de la parabola que es:

$$y = -\frac{4k}{a^2}(x^2 - ax)$$

y conocemos la ecuación de la recta tangente en el punto $(a,0)$

$$y_t = -\frac{4k}{a}(x-a)$$

Consideremos un valor m talque $0 < m < a$. Sabiendo esto tenemos que para nuestro grafico (6):

▷ Longitud del segmento $AC = a$

▷ Longitud del segmento $AQ = m$

▷ Longitud del segmento

$$MQ = y_t(m) = -\frac{4k}{a}(m-a)$$

▷ Longitud del segmento

$$OQ = y(m) = -\frac{4k}{a^2}(m^2 - am)$$

Luego tenemos:

$$\frac{MQ}{OQ} = \frac{-\frac{4k}{a}(m-a)}{-\frac{4k}{a^2}(m^2-am)} = \frac{-\frac{4k}{a}(m-a)}{-\frac{4km}{a^2}(m-a)} = \frac{1}{\frac{m}{a}} = \frac{a}{m} = \frac{AC}{AQ}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{\frac{MQ}{OQ} = \frac{AC}{AQ}}$$

Además teniendo en cuenta nuestra gráfica(6) de apoyo podemos afirmar lo siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{KC}{KN} = \frac{AC}{AQ}}$$

Lo cual se evidencia por la semejanza de los triangulos AKC y QNC.

Finalmente de los triángulos ABC Y AZC podemos decir que:

$$Área \triangle\ ABC = \mathbf{\frac{1}{4}} Área \triangle AZC$$

En efecto:

$$Área \triangle AKC = \frac{(AC.AK)}{2}$$

Pero se sabe que $AK = \frac{1}{2}ZA$, luego:

$$Área \triangle AKC = \frac{(AC.(\frac{1}{2}ZA))}{2}$$

$$Área \triangle AKC = \frac{1}{2}.\frac{(AC.ZA))}{2}$$

$$Área \triangle AKC = \frac{1}{2} Área \triangle AZC$$

Ahora:

$$Área \triangle ABC = \frac{(AC.BD)}{2}$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{KA}{BD} = \frac{AC}{DC}$$

Pero

$$DC = \frac{1}{2}AC$$

$$AC = 2DC$$

Entonces:

$$\frac{KA}{BD} = \frac{2DC}{DC}$$

$$BD = \frac{1}{2}KA$$

Luego:

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{(AC.(\frac{1}{2}KA))}{2}$$

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{2}.\frac{(AC.KA))}{2}$$

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{2}\text{Área} \triangle AKC$$

Finalmente tenemos lo siguiente:

$$\text{Área} \triangle AKC = \frac{1}{2}\text{Área} \triangle AZC$$

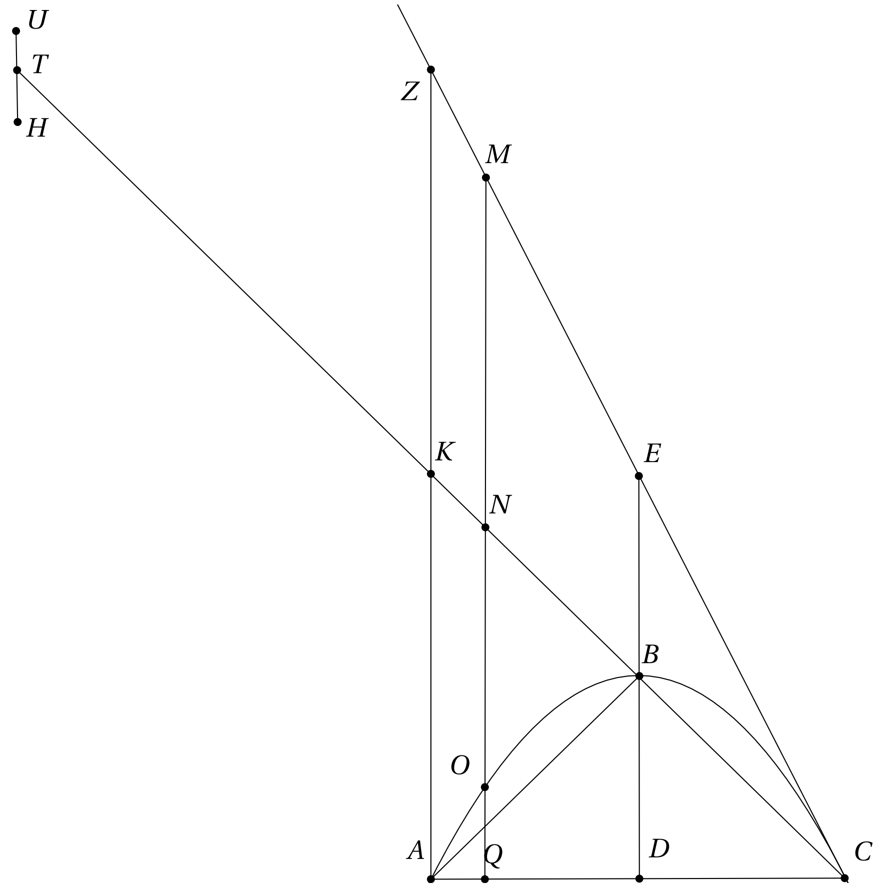
$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{2}\text{Área} \triangle AKC$$

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{Área} \triangle AZC)$$

$$\boldsymbol{\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{4}\ \text{Área} \triangle AZC}$$

Es en esta ultima parte de la demostración, donde se evidencia la genialidad de Arquímedes utilizando su MÉTODO para la solución de problemas.

Siguiendo con ésta, ahora lo que hacemos es tomar el segmento OQ y lo transportamos, de manera imaginaria, a una nueva posicion UH de modo que su punto medio es ahora T ubicado al final de la linea KC que hemos extendido (algo así como si lo colgaramos allí de su punto medio)(ver gráfica 7).



Gráfica 7

Finalmente, todo lo que valga para OQ tambien debe ser valido para UH. Estos despues de todo son iguales, entonces de la siguiente proporción ya demostrada:

$$\frac{MQ}{OQ} = \frac{TK}{KN}$$

tenemos:

$$\frac{MQ}{UH} = \frac{TK}{KN}$$

Ahora imaginemos las lineas MQ y UH apoyadas sobre un balancín (linea TN) cuyo fulcro se encuentra en el punto K, estas líneas las trataremos como si fueran objetos fisicos que tienen un peso que asociamos con su longitud. Además las dos lineas tienen centros de gravedad que, por su puesto, estaran en su centro exacto es decir en N y T respectivamente.

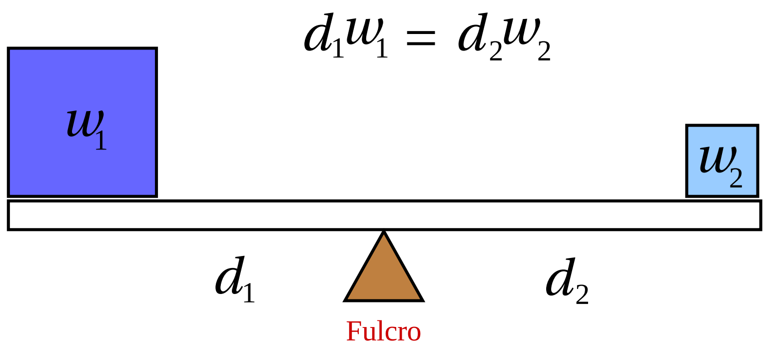
Teniendo en cuenta que:

$$\frac{MQ}{UH} = \frac{TK}{KN}$$

Apliquemos ahora la ley de la palanca y deduscamos la misma observacion magnifica que hizo Arquimedes: las dos lineas MQ y UH se equilibran tomando a K como su fulcro.

$$\boldsymbol{MQ \cdot KN = UH \cdot TK}$$

Es preciso aclarar que el principio físico de equilibrio conocido como la Ley de la Palanca de Arquímedes, consiste en considerar dos cuerpos cuyos pesos denominados w_1 y w_2 colocados a unas distancias d_1 y d_2 respectivamente, del punto de apoyo o fulcro, de tal forma que la balanza se equilibre. Esto se expresa de la siguiente forma:



Gráfica 8

Entonces no importa cual sea la linea paralela que elijamos al azar esto siempre sera asi. Las proporciones cambiaran pero seran respectivamente proporcionales, en otras palabras cada linea paralela dentro del triángulo $\triangle AZC$ se equilibra con el segmento parabólico en lineas paralelas y cada vez que realizamos un corte encontramos el mismo equilibrio en el mismo fulcro de modo que cuando tomamos el triángulo en su totalidad y el segmento parabólico entero, ambos deben obedecer a la misma ley de las palancas: todo el triángulo y todo el segmento se equilibran al igual que sus secciones en el punto denominado como fulcro.

“El triángulo como un todo se equilibra con la parábola como un todo, siendo K el fulcro”.

Ahora sabemos que el centro de gravedad del segmento parabólico esta en T pues la linea paralela tras linea paralela fue transladada haciendo a T como su centro, entonces si cada linea tiene su centro en T todas tomadas en conjunto tambien lo tendran allí.

Sabemos por geometría plana que el centro de gravedad de un triángulo esta en el punto que se encuentra a un tercio de la longitud de una de sus medianas, para nuestro caso como el centro de gravedad se encuentra a un tercio de la longitud de KC pero $\frac{1}{3}KC = \frac{1}{3}KT$ pues $KC = KT$, es decir, que la distancia del centro de gravedad del triángulo desde el fulcro K es $\frac{1}{3}$ de la distancia del centro de gravedad del segmento parabólico respecto al mismo punto K, el segmento parabólico se encuentra tres veces mas lejos del fulcro K que el triángulo, luego el triángulo debe tener 3 veces el peso del segmento parabólico por lo cual el área del segmento parabólico es:

$$\text{Área} \triangle AZC = 3\,\text{Área} \text{ del segmento parabólico } ABC$$

Pero ya habiamos demostrado antes el siguiente resultado

$$\text{Área} \triangle ABC = \frac{1}{4}\text{Área} \triangle AZC$$

$$\text{Área} \triangle AZC = 4\text{Área} \triangle ABC$$

Por transitividad

$$3\ \textbf{\textit{Área}}\ \text{del segmento parabólico}\ \boldsymbol{ABC} = 4\ \textbf{\textit{Área}} \bigtriangleup \boldsymbol{ABC}$$

$$\textbf{\textit{Área}}\ \text{del segmento parabólico}\ \boldsymbol{ABC} = \frac{4}{3}\textbf{\textit{Área}} \bigtriangleup \boldsymbol{ABC}.$$

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

- Arquímedes de Siracusa es uno de los grandes maestros de la antigüedad, ya que sus contribuciones no solo sirvieron para encontrar solución a problemas de su época, sino también, fueron la herramienta que usaron matemáticos posteriores para descubrimientos que aportaron al desarrollo de la Matemática moderna.

- En el "MÉTODO" se evidencia la genialidad de Arquímedes al unir el uso de los infinitesimales y el tratamiento de las figuras geométricas como objetos físicos para la solución de problemas.

- El estudio de la historia de la Matemática nos ayuda a comprender los elementos fundamentales sobre los cuales se han desarrollado diversas ramas de la Matemática.

- El Proyecto de Grado nos sirve para reforzar todos los conocimientos adquiridos durante la carrera y para analizar el origen de los mismos.

CAPÍTULO 5

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol Tom M. *Cálculo*, Editorial Reverte, Volumen 1, segunda edición, 1972 Barcelona.
- Boyer Carl B. *Historia de la Matemática*, alianza editorial S.A, Octava edición, Madrid 1999.
- Filloy Eugenio. *Didactica e Historia de la Geometria Euclidiana*, Iberoamericana. 1998 México.
- Gutierrez Hoyos Hernado.*Momentos cumbres en el desarrollo historico del pensamiento Matemático.* Edición USCO. 2000 Neiva.
- Netz Reviel y Noel William (2007).*El Códice de Arquímedes*, Ediciones temas de hoy, S. A. (T.H).Editorial Planeta Colombiana, S.A, Marzo de 2007.
- Newman James R. *SIGMA TOMO I, El mundo de las Matemáticas*, Ediciones Grijalbo S.A, Barcelona-Buenos Aires-Mexico D.F, 1980.