Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Secciones cónicas, un enfoque desde la derivación implícita

John William Casagua Pérez

Julio César Ayala Plazas

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Secciones cónicas, un enfoque desde la derivación implícita

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

John William Casagua Pérez
2007166940

Julio César Ayala Plazas
2005104208

Asesor:
Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2012

“Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que se le ha antecedido, es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el dia en que vive: Es ponerlo a nivel de su tiempo para que flote sobre él, y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podrá salir a flote, es preparar al hombre para la vida".

José Martí.

DEDICATORIA

A nuestras familias, a la comunidad estudiantil de la Universidad Surcolombiana y a todas aquellas personas interesadas en el estudio de la geometría analítica.

AGRADECIMIENTOS

A nuestras familias por su incansable apoyo, compromiso y solidaridad. A nuestro asesor de Proyecto de Grado, por su compromiso y dedicación en el exitoso desarrollo del proceso. A cada uno de los profesores del programa de Licenciatura en Matemáticas, por su colaboración, solidaridad y compromiso con el programa académico. A nuestras compañeras y compañeros de estudio, en los distintos programas académicos ofrecidos por la Universidad Surcolombiana, por su camaradería y fortaleza.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

¿Cuál es el motivo principal de que las secciones cónicas ocupen un lugar tan importante entre todas las posibles curvas?

La razón principal es porque el cono de doble hoja, es la figura geométrica donde las secciones cónicas son generadas, y esto se puede evidenciar en el aparato sensitivo del ser humano. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre es, ante todo, un observador, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono; según las leyes de refracción y convergencia de una lente biconvexa.

En la figura 1, el objeto está colocado a una distancia mayor que la distancia focal F'. La imagen I es real e invertida, y cada vez, más grande cuanto más cerca se encuentre el objeto del foco. Es el caso de los objetivos del microscopio.

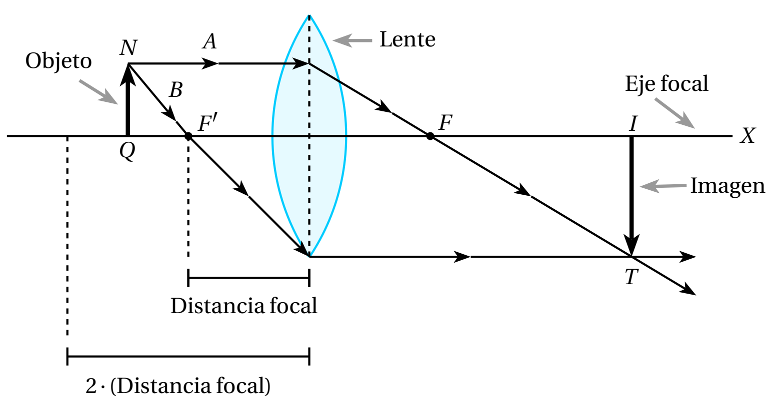


Figura 1: Lente biconvexa

Todas las imágenes de la realidad óptica, todas sus perspectivas y proyecciones, se presentan bajo la forma de una sección cónica. Por tanto, podemos pensar que nuestro mundo es un “mundo de las secciones cónicas".

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica es el estudio de conceptos geométricos, tales como curvas y superficies por medio del álgebra. Un primer trabajo sobre la materia fue presentado por René Descartes en su libro llamado ***Geometrie***, publicado en 1637. En esta obra, se establecía la relación explícita entre las curvas y las ecuaciones. Después de Descartes, los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, contribuyeron de una forma u otra al desarrollo de esta nueva teoría, que en la actualidad se estudia con el nombre de Geometría Analítica, y se fundamenta en el estudio de los sistemas de coordenadas cartesianas en honor de su fundador.

Al trabajar en la geometría analítica, es posible conocer una ecuación y enseguida deducir su representación gráfica por medio de operaciones algebraicas, o también, conocer la gráfica de una curva y determinar a partir de esta, su ecuación canónica. A estos dos problemas se les conoce como los ***Problemas fundamentales de la geometría analítica***.

Uno de los resultados más sorprendentes de la geometría analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas o una cónica degenerada. En este caso particular, el método clásico permite determinar sus elementos dada la ecuación general, transformando esta a su expresión canónica, por completación de trinomios cuadrados perfectos. No obstante, surgen dudas en la etapa de aprendizaje del método, al momento de comprender y aplicar procesos reversibles. En este sentido, nuestro proyecto de grado, aborda el estudio de las secciones cónicas y algunas de sus aplicaciones, desde la perspectiva del cálculo diferencial, mediante el método de la ***derivación implícita***. Dicho método, permite encontrar los elementos de las secciones cónicas a partir del concepto geométrico de la derivada de una curva.

CAPÍTULO 2

PRESENTACIÓN

En este proyecto de grado, titulado: ***Secciones cónicas un enfoque desde la derivación implícita***, abordaremos la geometría analítica y presentaremos algunas contribuciones sobresalientes que en ella se han logrado. Para esto, iniciaremos con un estudio detallado de los elementos, propiedades y características más sobresalientes de las secciones cónicas, a través de métodos alternativos que conduzcan a la orientación y eficaz comprensión del lector.

Para tal fín, se presentará un desarrollo minucioso de las secciones cónicas: parábola, elipse, hipérbola. La circunferencia, se considerará como una particularización de la elipse. Estas curvas se generan por la intersección de un cono de doble hoja con un plano; la orientación o inclinación del plano de corte posibilita la obtención de cada una de ellas.

Con este proyecto de grado, se pretende brindar un método alternativo a los tradicionalmente conocidos, del estudio de la geometría analítica. Por lo tanto, se procederá con el estudio de las secciones cónicas desde la perspectiva del cálculo dife-rencial. Posteriormente, se dará a conocer el desarrollo del método por derivación implícita para cada una de las secciones cónicas. También mostraremos importantes avances y aplicaciones del método propuesto. Para este propósito, es fundamental el dominio de los conceptos básicos de geometría, álgebra, trigonometría y cálculo diferencial.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los métodos clásicos empleados para la obtención de los elementos de las secciones cónicas, dada su ecuación general, consiste en transformar por medio de operaciones algebraicas la ecuación en su expresión canónica, a partir de la completación de trinomios cuadrados perfectos. Sin embargo, en el proceso de aprendizaje es evidente la dificultad que manifiestan los estudiantes en la comprensión y aplicación del método tradicional, especialmente al efectuar procesos reversibles después de aplicada una operación matemática. Como una alternativa, nuestra propuesta hace posible abordar el estudio de las secciones cónicas desde la óptica del cálculo diferencial. Lo cual se convierte en un método alterno para analizar estas curvas.

En la ecuación general de segundo grado se relacionan implícitamente las variables x e y, a través de la relación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Si aplicamos el concepto geométrico usual de la derivada, —*como una expresión general de la pendiente de todas las rectas tangentes a una curva en cualquier punto sobre ella*— para el caso de las secciones cónicas, en los vértices, tenemos que la recta tangente es horizontal en los puntos donde la derivada se hace cero y vertical en los puntos donde la pendiente es indefinida, es decir, donde su derivada no existe. Luego, para obtener las coordenadas de sus vértices es necesario determinar los puntos sobre la gráfica de las secciones cónicas donde la derivada se hace cero, o bien, no está definida. De esta manera, se procede a obtener una ecuación general para $\frac{dy}{dx}$ de cualquier sección cónica a partir de la ecuación (1), por derivación implícita, para luego, determinar las coordenadas y ecuaciones de los elementos de las secciones cónicas, utilizando sustituciones algebraicas pertinentes y las propiedades geométricas correspondientes a cada una de ellas.

Con el ánimo de fortalecer la comprensión de la geometría analítica, presentaremos variados ejercicios ilustrativos y de aplicación del método propuesto; estimulando de esta manera habilidades y destrezas en la resolución de problemas reales. Los ejemplos resueltos, ejercicios propuestos y aplicaciones del método alterno presentado, ofrecerán al lector una considerable flexibilidad metodológica, que permitirá una eficiente adaptación a condiciones óptimas de estudio.

CAPÍTULO 4

JUSTIFICACIÓN

El estudio de las ***secciones cónicas*** es fundamental para comprender la belleza del universo que nos rodea. Debido a esto, surge la necesidad de realizar un trabajo sencillo, que permita evidenciar lo dicho anteriormente.

Esta propuesta, tomará como punto de partida el concepto geométrico de la derivada de una curva, para estudiar cada una de las secciones cónicas y sus aplicaciones.

El método de la derivación implícita, enfoque fundamental del presente proyecto de grado, se compone de las siguientes partes: orientación, motivo, discusión, ejemplos ilustrativos y de aplicación, a manera de una lección de gran ayuda para el estudio y comprensión de la geometría analítica. Un adecuado enlace de los conceptos mencionados anteriormente facilitará la comprensión de los métodos analíticos, en el propósito de avanzar exitosamente con el estudio de las secciones cónicas. Con esto buscaremos que el lector adquiera un conocimiento básico pleno de los conceptos analíticos y no una simple memorización de hechos geométricos.

Finalmente, un buen fundamento en geometría analítica es de mucho valor para estudios posteriores en los dominios de las ciencias exactas. Por ejemplo, el estudio de trayectorias en Física y el estudio de las órbitas en Astronomía, entre otros.

CAPÍTULO 5

OBJETIVOS

5.1. Objetivos Generales

* Abordar el tema de las secciones cónicas desde la perspectiva del cálculo diferencial.
* Poner a disposición del lector unas notas bien elaboradas y de gran utilidad para el estudio de las secciones cónicas.

5.2. Objetivos Específicos

* Definir analíticamente cada una de las secciones cónicas, enunciando sus elementos y propiedades más relevantes, que serán deducidos de manera visual, a partir del concepto geométrico de la derivada de una curva.
* Resaltar las características especiales de las cónicas y su fundamental importancia en el estudio de las ecuaciones de segundo grado.
* Exponer ejercicios ilustrativos y ejemplos de aplicación del método propuesto para el estudio de las secciones cónicas.

CAPÍTULO 6

ELEMENTOS TEÓRICOS

6.1. Historia de las secciones cónicas

Al parecer fue Menecmo (375-325 *a*.C.) quien abordó inicialmente el estudio de las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) tratando de resolver los tres famosos problemas de la matemática griega: la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. En ese momento las secciones cónicas fueron originalmente definidas como la intersección de un cono circular recto (*Sección 6.2, Conos y secciones cónicas*) de ángulo variable y un plano perpendicular a una de las rectas generadoras del cono, que no pase por su vértice. Dependiendo de que el ángulo sea menor, igual o mayor que un ángulo recto, obtenemos la elipse, la parábola y la hipérbola, respectivamente.

Apolonio de Perga (262-190 *a*.C.), fue quien consolidó y extendió los resultados conocidos sobre cónicas en un tratado titulado "***Secciones Cónicas***", formado por 8 libros y con 487 proposiciones. Apolonio fue el primero en observar y demostrar que los tres tipos de secciones cónicas pueden obtenerse como secciones de un mismo cono circular recto (e incluso de un cono circular no recto) sin más que cambiar la posición del plano que genera la sección.

Los nombres de las secciones cónicas que hoy conocemos fueron tomados por Apolonio de la terminología pitagórica para la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de la aplicación de áreas. *Ellipsis*, que significa *"una deficiencia"*, se usaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado. *Hyperbola* que significa *"avanzar más allá"*, se tomó para el caso que el área excedía del segmento dado y por último, *Parábola* significa *"colocar al lado"* o *"comparar"*, y se utilizaba cuando no había deficiencia ni exceso.

Aunque posiblemente Apolonio y Euclides ya conocían las propiedades focales de las cónicas, es el libro "Colección Matemática"de Pappus de Alejandría (290-350 d.C.) el que recoge el primer tratamiento de las propiedades foco-directriz de las tres secciones cónicas. Finalmente, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de doble hoja. En este sentido, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente:

"*Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano del punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá* *la superficie de un cono doble*".

Después de un exhaustivo estudio geométrico de las secciones cónicas por parte de los griegos, éstas permanecieron olvidadas hasta la época del renacimiento. Entonces, los científicos del renacimiento se preocuparon no sólo de estudiar las secciones cónicas, sino de utilizarlas para resolver problemas prácticos. Galileo Galilei (1564-1642) observó que la trayectoria de un proyectil es una parábola; el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses, que tienen al sol como uno de sus focos[1]. Más tarde, el matemático y físico Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica. Estos importantes descubrimientos, junto al inicio de la geometría en coordenadas y de la geometría descriptiva, volvieron a poner a las secciones cónicas en un lugar destacado de la ciencia, y de la vida real, por sus importantes aplicaciones.

6.2. Nociones preliminares

Distancia entre dos puntos

En el sistema coordenado rectangular, la distancia entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, simbolizada $d = \left|\overline{P_1P_2}\right|$ se obtiene de la siguiente manera.

Por los puntos extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$, tracemos las perpendiculares P_1B y P_2C a ambos ejes coordenados (*Figura 6.1*), y sea E su punto de intersección. Consideremos el triángulo rectángulo P_1EP_2. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1E}^2 + \overline{EP_2}^2. \tag{$\star$}$$

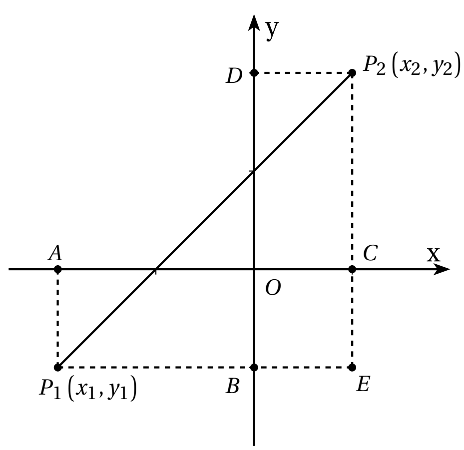


Figura 6.1: Distancia entre dos puntos.

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$, $D(0, y_2)$. Luego, obtenemos:

$$\overline{P_1E} = \overline{AC} = x_2 - x_1, \qquad \overline{EP_2} = \overline{BD} = y_2 - y_1$$

[1] Trabajo de grado de Humberto Barrios.

Sustituyendo estos valores en $(\star)$, se obtiene

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

y de esta manera,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

que es la fórmula de la distancia d entre dos puntos $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y $P_2\left(x_2, y_2\right)$.

Punto medio de un segmento dirigido

Las coordenadas del punto medio[2] de un segmento dirigido con puntos extremos $\left(x_1, y_1\right)$ y $\left(x_2, y_2\right)$ son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Conos y secciones cónicas

Un cono circular es una superficie generada por las rectas que pasan por una circunferencia dada y un punto fijo, llamado vértice, que no está en el plano de la circunferencia. Si además, el segmento de recta que une el vértice del cono con el centro de la circunferencia es perpendicular al plano de la circunferencia, se dice que el cono circular es recto.

El ángulo de un cono es el formado entre dos rectas generadoras que están en un mismo plano que pasa por el vértice y el centro de la circunferencia.

Una sección cónica es la curva que se obtiene como intersección del cono circular de doble hoja con un plano. Podemos obtener cuatro cónicas distintas, según la inclinación del plano de corte, así:

Caso I. Si el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica y no pasa por el vértice, la intersección es una curva cerrada denominada ***Circunferencia***.

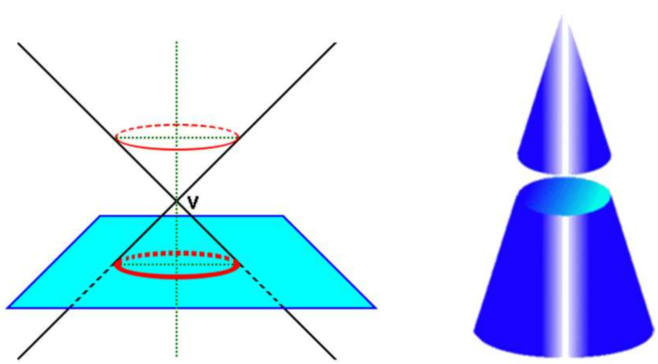


Figura 6.2: Circunferencia.

Caso II. Si el plano secante es oblicuo al eje de la superficie cónica, corta a todas sus generatrices y no pasa por el vértice, la intersección es una curva cerrada denominada ***Elipse***.

[2]Charles H. Lehmann. (1959). *Analytic geometry*. Mexico: Utea, p. 13.

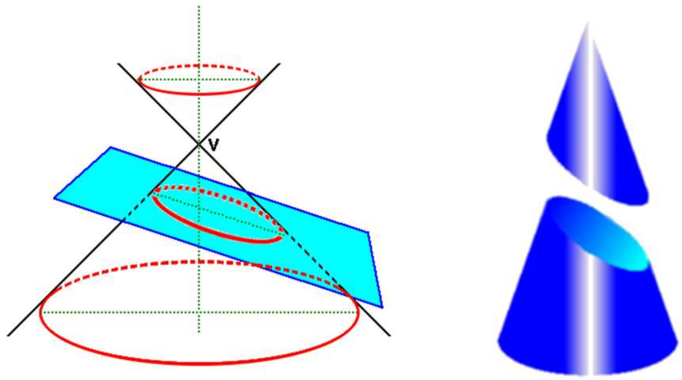


Figura 6.3: Elipse.

Caso III. Si el plano secante es paralelo al eje de la superficie cónica y no pasa por el vértice, la intersección se denomina ***Hipérbola***; y es una curva que consta de dos ramas diferentes, una en cada una de las hojas de la superficie cónica.

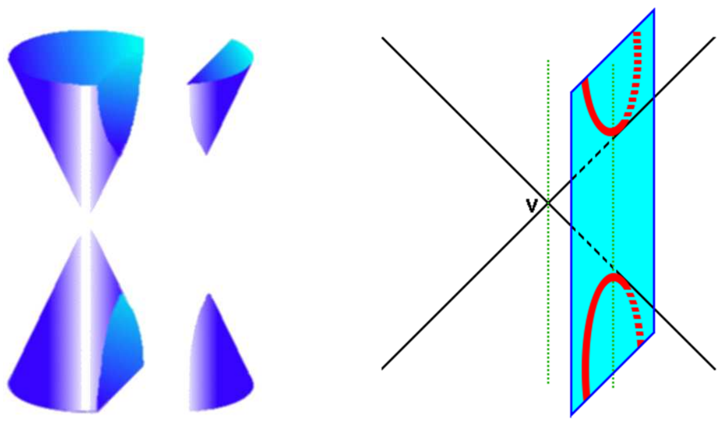


Figura 6.4: Hipérbola.

Caso IV. Si el plano secante es oblicuo al eje de la superficie cónica, paralelo a una generatriz y no pasa por el vértice, la intersección es una curva abierta denominada ***Parábola***.

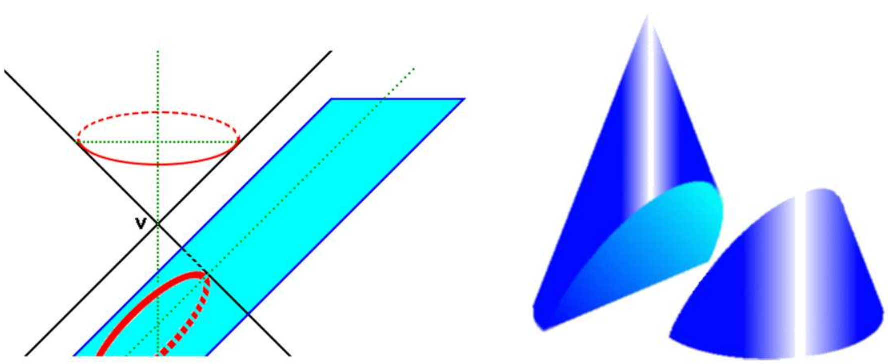


Figura 6.5: Parábola.

Caso V. Si el plano secante pasa por el vértice de la superficie cónica, la cónica se llama degenerada y puede ser un punto, una recta o un par de rectas concurrentes, según que el plano secante tenga menos, igual o más inclinación que las generatrices.

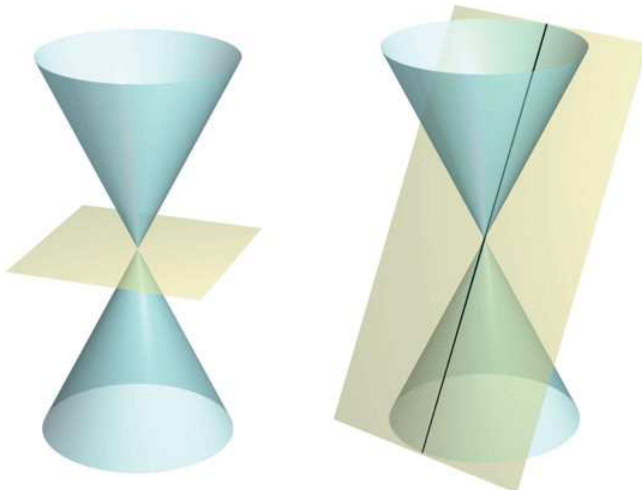


Figura 6.6: Un punto, una recta y dos rectas.

Presentamos a continuación un repaso de los conceptos más sobresalientes de cada una de las secciones cónicas.

6.2.1. La parábola

DEFINICIÓN

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, llamada directriz, situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, y que no pertenece a la recta.

Observamos en la *Figura 6.7* que los puntos P, Q, R, S, T pertenecen a la parábola, y además, se debe cumplir que la distancia de F a P, la cual se representa como $|FP|$ debe ser igual a la distancia de P a A; es decir, $|FP| = |PA|$. De igual manera, $|FQ| = |QB|$, $|FR| = |RC|$, $|FS| = |SD|$ y $|FT| = |TE|$.

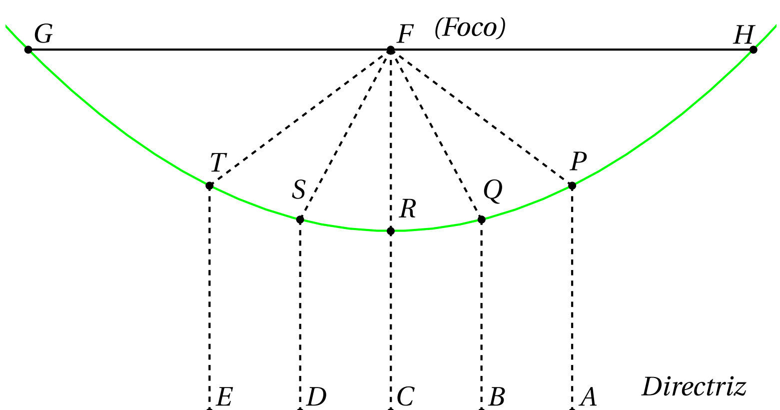


Figura 6.7: Elementos de la parábola.

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

* Foco (F): Es el punto fijo mencionado en la definición.
* Eje Focal: Es la recta que pasa por el foco y el vértice.
* Vértice (V): Es el punto donde el eje focal corta la parábola.
* Directriz : Es la recta fija indicada en la definición.
* Lado recto $(\overline{GH})$: Es el segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco F, y cuyos extremos son dos puntos de la parábola.
* Distancia focal: Es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

Deducción analítica de la ecuación de la parábola

Primera ecuación ordinaria de la parábola

Veamos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen, (*Figura 6.8*) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F, de coordenadas $(p,0)$ está sobre el eje X. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz l es $x = -p$. Sea $P(x,y)$ un punto cualesquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento $\overline{PA}$ perpendicular a l. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{FP}\right| = \left|\overline{PA}\right|. \tag{1}$$

De esto tenemos que $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \left|x+p\right|$. Esta expresión es equivalente a

$$y^2 = 4px \tag{2}$$

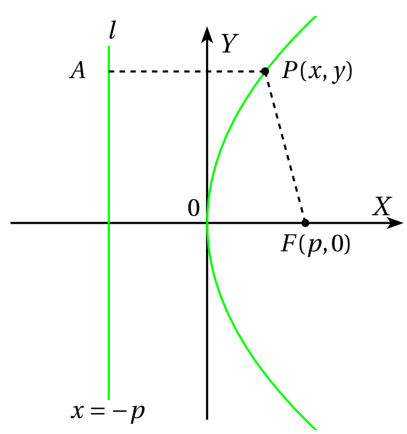


Figura 6.8: Definición de parábola.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se demuestra, análogamente, que la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3), son las ecuaciones más simples de esta curva y se denominan, primera ecuación ordinaria de la parábola.

Segunda ecuación ordinaria de la parábola

La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje paralelo al eje X, es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{4}$$

siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje focal, comprendido entre el foco y el vértice de la parábola.

Si el vértice es el punto (h,k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5), se denominan, segunda ecuación ordinaria de la parábola.

En la *Tabla 6.1*, se resumen las expresiones más importantes relacionadas con los elementos de la parábola.

Cuando la parábola es de eje vertical, es decir, el eje focal es paralelo al eje Y, tenemos que la parábola es abierta hacia arriba si $p>0$, y es abierta hacia abajo si $p<0$. Si $p=0$, entonces $x=h$, que corresponde a una recta vertical.

Cuando la parábola es de eje horizontal, es decir, con eje focal paralelo al eje X, la parábola es abierta hacia la derecha si $p>0$, y es abierta a la izquierda si $p<0$. Si $p=0$, entonces $y=k$, que corresponde a una recta horizontal.

Elementos	Parábola de eje vertical	Parábola de eje horizontal
Ecuación general	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $B=0$ (Sin rotación de ejes)	
	$Ax^2+Dx+Ey+F=0$ $C=0,\ A\neq 0$	$Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A=0,\ C\neq 0$
Ecuación canónica	$(x-h)^2=4p(y-k)$	$(y-k)^2=4p(x-h)$
Coordenadas del vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Coordenadas del foco	$F(h,k+p)$	$F(h+p,k)$
Ecuación de la directriz	$y=k-p$	$x=h-p$
Ecuación del eje focal	$x=h$	$y=k$

Tabla 6.1: Expresiones para los elementos de la parábola.

Veamos con el siguiente ejemplo ilustrativo, como hallar los elementos de una parábola conocida su ecuación general, utilizando el método clásico.

Ejemplo 1

La ecuación $3x^2+8x+15y=-1$, representa una parábola. Determinar las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz, del eje focal, y la longitud del lado recto.

Solución:

La ecuación $3x^2+8x+15y=-1$ equivale a $x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=-5y-\frac{1}{3}+\frac{16}{9}$, y este a su vez a $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2=-5\left(y-\frac{13}{45}\right)$.

De acuerdo a la *tabla 6.1*, la ecuación dada corresponde con una parábola de eje focal vertical, cuyo vértice es $V\left(-\frac{4}{3},\frac{13}{45}\right)$.

Para hallar la distancia focal p, tenemos que $4p=-5$, luego $p=-\frac{5}{4}$. Como $p<0$,

la parábola abre hacia abajo. Las coordenadas del foco son $F\left(-\frac{4}{3},-\frac{173}{180}\right)$.

La ecuación de la directríz es $y=k-p$, o bien, $y=\frac{277}{180}$.

La ecuación del eje focal es $x=h=-\frac{4}{3}$.

La longitud del lado recto es $|4p|=|-5|=5$.

Su gráfica es:

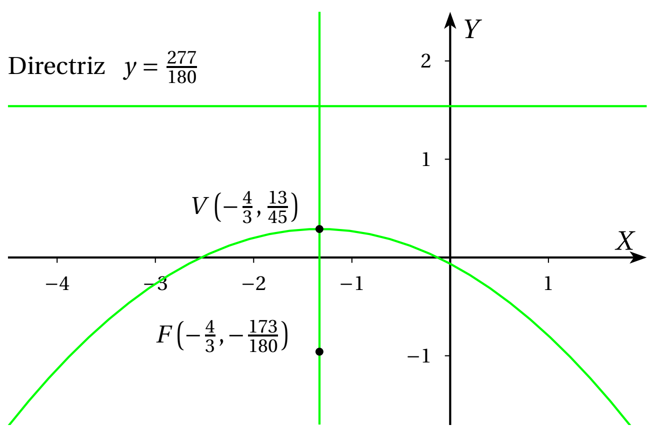


Figura 6.9: Parábola $3x^2+8x+15y+1=0$.

Ejemplo 2

La ecuación $2y^2+6x+8y-5=0$, representa una parábola. Determinar las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz, del eje focal, y la longitud del lado recto.

Solución:
La ecuación $2y^2+6x+8y=5$ equivale a $y^2+4y+4=-3x+\frac{5}{2}+\frac{8}{2}$, y este a su vez a $(y+2)^2=-3\left(x-\frac{13}{6}\right)$.

Luego, esta ecuación corresponde a una parábola de eje focal horizontal, cuyo vértice es $V\left(\frac{13}{6},-2\right)$.

Para hallar la distancia focal p, tenemos que $4p=-3$, luego $p=-\frac{3}{4}$. Como $p<0$, la parábola abre hacia la izquierda. Las coordenadas del foco son $F\left(\dfrac{17}{12}, -2\right)$.

La ecuación de la directríz es $x = h - p$, es decir, $x = \dfrac{35}{12}$.

La ecuación del eje focal es $y = k = -2$, obien, $y = -2$.

La longitud del lado recto es $|4p| = |-3| = 3$.

Su gráfica es:

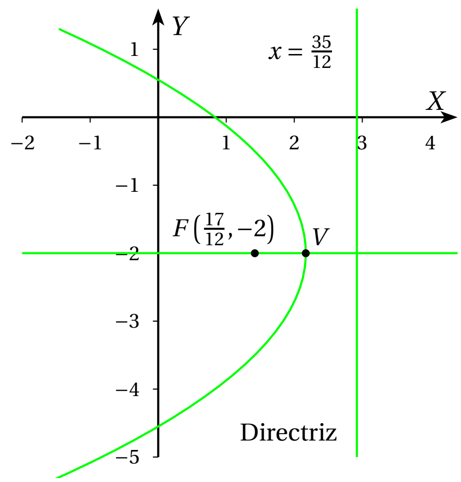


Figura 6.10: Parábola $2y^2 + 6x + 8y - 5 = 0$.

`Nota:` En los ejemplos posteriores, al hacer referencia a la unidad de longitud denominada pie la simbolizaremos ($'$).

Ejemplo 3: Propiedad de reflexión

Dado un espejo que tiene la forma de un paraboloide de revolución, que es la superficie formada al girar una parábola sobre su eje de simetría. Si una fuente de luz (o cualquier otra fuente emisora) se coloca en el foco de la parábola, todos los rayos que emanen de ella se reflejarán en el espejo siguiendo líneas paralelas al eje de simetría. Este principio se usa en el diseño de reflectores, lámparas y otros dispositivos. Ver *figura 6.11(a)*.

De manera inversa, si de una fuente lejana emanan rayos de luz (u otras señales) prácticamente paralelos al eje de simetría; cuando estos rayos tocan la superficie de un espejo parabólico, cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, se reflejaran hacia un solo punto en el foco. Este principio se usa en el diseño de dispositivos solares, antenas parabólicas y en los espejos usados en algunos tipos de telescopios. Ver *figura 6.11(b)*.

Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloide de revolución. Las señales emitidas por un satélite, llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde está localizado el receptor. Si la antena tiene ocho pies de abertura y tres pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?

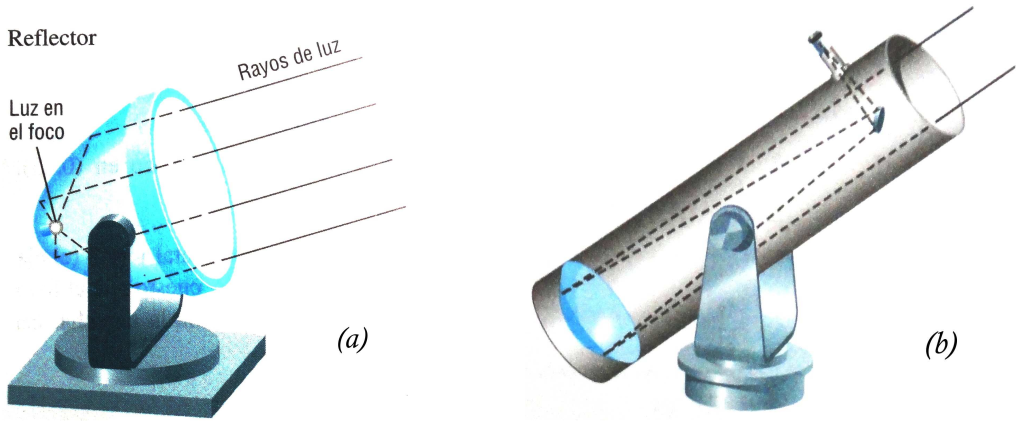


Figura 6.11: Reflector y telescopio.

Solución:
La *figura 6.12*(a) muestra la antena parabólica. Dibujamos la parábola usada para formar la antena sobre un sistema coordenado rectangular, de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su foco sobre el eje Y positivo. Ver *figura 6.12*(b). La forma de la ecuación de la parábola es $x^2 = 4ay$, y su foco está en $(0, a)$. Dado que $(4, 3)$ es un punto sobre la gráfica, puesto que el vértice de la curva está en el origen, tenemos $4^2 = 4 \cdot a \cdot 3$, de donde $a = 4/3 = 1\frac{1}{3}$.

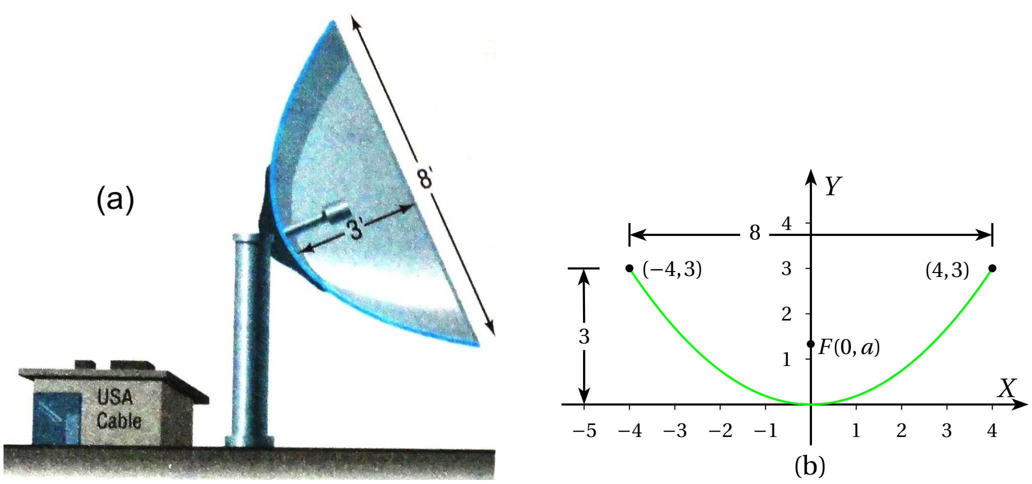


Figura 6.12: Antena parabólica.

El receptor debe colocarse a $1\frac{1}{3}$ pies de la base de la antena, a lo largo de su eje de simetría.

6.2.2. La elipse

<u>DEFINICIÓN</u>
Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos fijos. Los puntos fijos son los *focos* de la elipse. La recta que une los focos es el *eje focal*. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el *centro*. Los puntos donde la elipse interseca a su eje focal son los *vértices* de la elipse.

∗ La distancia entre los dos focos es $2c$.

* La longitud del eje mayor es $2a$.
* La longitud del eje menor es $2b$.

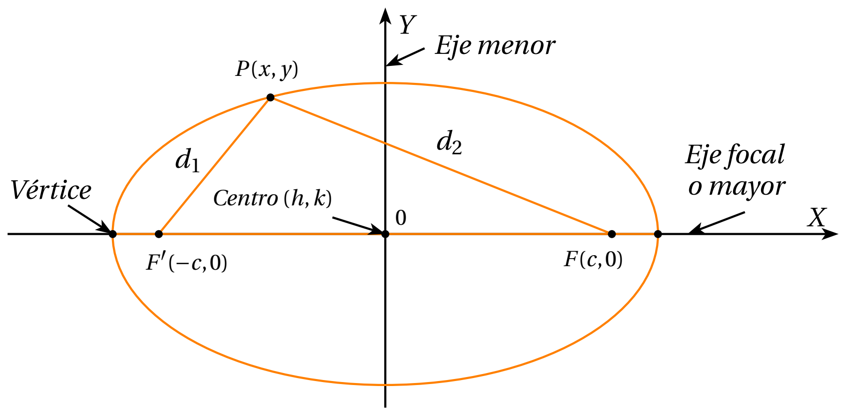


Figura 6.13: Elementos de la elipse.

Se observa que el eje mayor tiene más longitud que el eje menor, por lo tanto, $a > b$. De igual manera, como la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los focos debe ser mayor que la distancia entre ellos, se tiene que $2a > 2c$, ó, $a > c$.

Estos tres elementos se relacionan entre sí, de acuerdo con la expresión pitagórica:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

En el caso de la *figura 6.13*, el eje focal es horizontal, esto es, una elipse de eje horizontal. Si el eje focal está dispuesto verticalmente, se dice que es una elipse de eje vertical (*figura 6.14*).

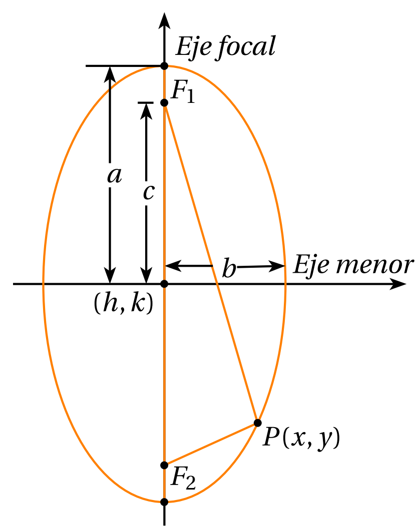


Figura 6.14: Elipse con eje focal vertical.

Deducción analítica de la ecuación de la elipse

`Primera ecuación ordinaria de la elipse`

Consideremos la elipse de centro en el origen, y cuyo eje focal coincide con el eje X (*Figura 6.13*). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro 0 es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(c,0)$ y $(-c,0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a, \tag{1}$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c.

De aquí

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \tag{2}$$

y de esto tenemos:

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

o equivalentemente

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

de donde,

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{3}$$

Como $2a > 2c$ se tiene $a^2 > c^2$, así $a^2 - c^2 > 0$.

Ahora,

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{4}$$

La ecuación (3) se transforma en:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

obteniendo finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Si el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y (*figura 6.14*), las coordenadas de los focos son entonces $(0,c)$ y $(0.-c)$. En este caso, por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor. Las ecuaciones (5) y (6), son las ecuaciones más simples de esta curva, y se denominan, primera ecuación ordinaria de la elipse.

Segunda ecuación ordinaria de la elipse

La ecuación de la elipse de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, a, b y c están ligadas por la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

En la *tabla 6.2* se resumen las expresiones más importantes para los elementos de la elipse.

Elementos	Elipse de eje horizontal	Elipse de eje vertical
Ecuación general	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ Con A y C no ambas cero, distinto valor numérico e igual signo. $B=0$ (Sin rotación de ejes)	
Ecuación canónica	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Localización de los focos	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
Localización de los vértices	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
Localización interceptos	$(h,k\pm b)$	$(h\pm b,k)$
Ecuación del eje focal	$y=k$	$x=h$
Semieje mayor	a	a
Semieje menor	b	b
Longitud focal	c	c
Relación pitagórica	$a^2=b^2+c^2$	$a^2=b^2+c^2$

Tabla 6.2: Expresiones para los elementos de la elipse.

Ejemplo 4

La ecuación general $2x^2+y^2-3x-4y-12=0$, representa una elipse. Determinar la posición del eje focal, encuentre las coordenadas del centro, los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y menor.

Solución:
Tenemos que $2x^2+y^2-3x-4y-12=0$ equivale a
$2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)+\left(y^2-4y+4\right)=12+\frac{9}{8}+4,$ y esto a

$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{137}{8},$ finalmente, $\dfrac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{137}{16}}+\dfrac{\left(y-2\right)^2}{\frac{137}{8}}=1$

De acuerdo a la *tabla 6.2*, esta expresión corresponde a una elipse con centro en $\left(\frac{3}{4},2\right)$ y de eje focal vertical, debido a que el denominador del término en y es mayor que el denominador del término en x. En este sentido, $a^2=\frac{137}{8}$ y
$b^2=\frac{137}{16}$. Luego, $a=\frac{\sqrt{274}}{4}$ y $b=\frac{\sqrt{137}}{4}$

Para elipses de eje vertical, las coordenadas de los vértices son $(h,k\pm a)$, asi:

$$V_1\left(\frac{3}{4},\frac{8+\sqrt{274}}{4}\right) \quad \text{y} \quad V_2\left(\frac{3}{4},\frac{8-\sqrt{274}}{4}\right)$$

Las coordenadas de los focos se obtienen de la relación $F(h,k\pm c)$, de donde

$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{\frac{137}{8}-\frac{137}{16}}=\pm\sqrt{\frac{137}{16}}=\pm\frac{\sqrt{137}}{4}$$

Entonces, los focos tienen como coordenadas

$$F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{8+\sqrt{137}}{4}\right) \quad \text{y} \quad F_2\left(\frac{3}{4}, \frac{8-\sqrt{137}}{4}\right)$$

Para determinar la localización de los interceptos con el eje menor de la elipse reemplazamos los valores obtenidos para h, k y b en $(h \pm b, k)$ obteniendo:

$$\left(\frac{3+\sqrt{137}}{4}, 2\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3-\sqrt{137}}{4}, 2\right)$$

Finalmente, la ecuación del eje focal es: $x = h = \dfrac{3}{4}$, y su gráfica es:

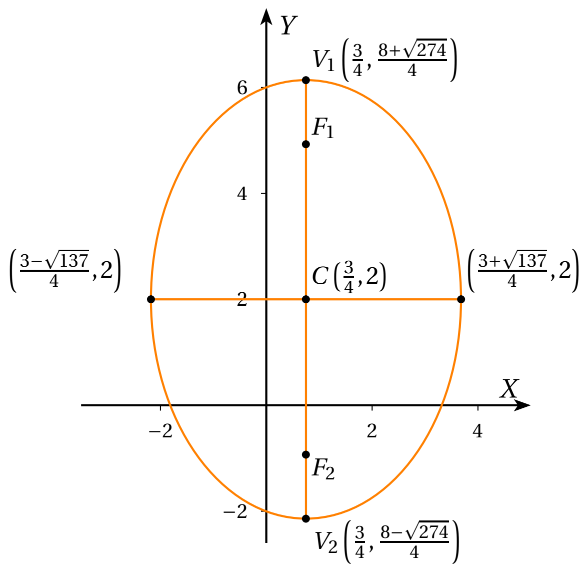


Figura 6.15: Elipse $2x^2 + y^2 - 3x - 4y - 12 = 0$

Ejemplo 5

La ecuación general $2x^2 + 3y^2 - x + 2y = \dfrac{1}{8}$, representa una elipse. Determinar la posición del eje focal, encuentre las coordenadas del centro, los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y menor.

Solución:
La ecuación $2x^2 + 3y^2 - x + 2y - \dfrac{1}{8} = 0$ se puede convertir en

$2\left(x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{16}\right) + 3\left(y^2 + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{2}{8} + \dfrac{1}{3}$, y esto a su vez en

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{12}, \quad \text{de aquí,} \quad \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{7}{24}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1$$

De acuerdo a la *tabla 6.2*, esta expresión corresponde a una elipse con centro en $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}\right)$ y de eje focal horizontal, debido a que el denominador del término en x es mayor que el denominador del término en y. En este sentido, tenemos $a^2 = \dfrac{7}{24}$ y $b^2 = \dfrac{7}{36}$. Luego, $a = \dfrac{\sqrt{42}}{12}$ y $b = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

Para elipses de eje horizontal, tenemos que las coordenadas de los vértices $(h \pm a, k)$ son:

$$V_1\left(\frac{3+\sqrt{42}}{12}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{y} \quad V_2\left(\frac{3-\sqrt{42}}{12}, -\frac{1}{3}\right)$$

Las coordenadas de los focos se obtienen de la relación

$$c = \pm\sqrt{a^2-b^2} = \pm\sqrt{\frac{7}{24}-\frac{7}{36}} = \pm\sqrt{\frac{7}{72}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{12}$$

Entonces, los focos tienen como coordenadas $(h \pm c, k)$:

$$F_1\left(\frac{3+\sqrt{14}}{12}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{y} \quad F_2\left(\frac{3-\sqrt{14}}{12}, -\frac{1}{3}\right)$$

Para determinar la localización de los interceptos con el eje menor de la elipse reemplazamos los valores obtenidos para h, k y b en $(h, k \pm b)$ así:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{-2+\sqrt{7}}{6}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{-2-\sqrt{7}}{6}\right)$$

Finalmente, la ecuación del eje focal es: $y = k = -\dfrac{1}{3}$. Su gráfica està representada por la *Figura 6.16*.

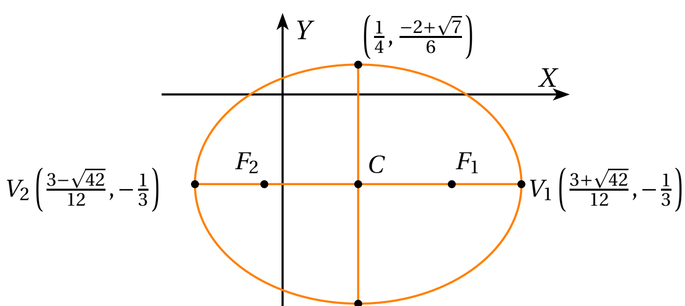


Figura 6.16: Elipse $2x^2+3y^2-x+2y-\dfrac{1}{8}=0$.

Ejemplo 6: Propiedad de reflexión

Las elipses tienen una interesante propiedad de reflexión. Si una fuente de luz (o sonido) se coloca en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejaran en la elipse y se concentraran en el otro foco. En este principio se basan las *galerías murmurantes*, que son salones diseñados con techos elípticos. Una persona en uno de los focos puede murmurar algo que escucha otra persona en el otro foco, pues todas las ondas de sonido que llegan al techo se reflejan hacia ese punto.
La *Figura 6.17*, muestra las especificaciones para un techo elíptico en un salón diseñado como galería murmurante; la unidad de longitud utilizada en este ejemplo es el Pie, simbolizado: $(')$. En una galería murmurante, una persona situada en un foco de la elipse puede murmurar y ser oida por otra persona situada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo desde un foco se reflejan hacia el otro foco. ¿Dónde están localizados los focos en la galería?

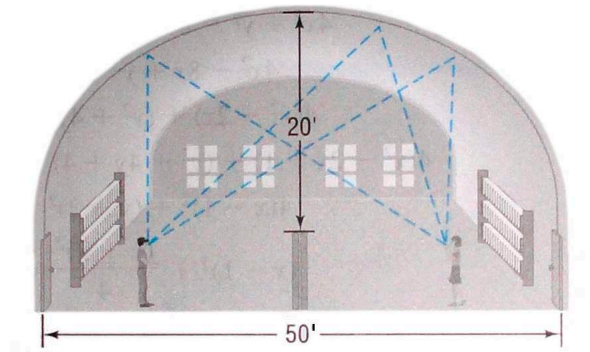


Figura 6.17: Galería murmurante.

Solución:
Establecemos un sistema coordenado rectangular de manera que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor a lo largo del eje X. Ver *figura 6.18*. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 25$ y $b = 20$. Puesto que

$$c^2 = a^2 - b^2 = (25)^2 - (20)^2 = 225$$

tenemos que $c = \pm 15$. Así, los focos están localizados a 15 pies del centro de la elipse a lo largo del eje mayor.

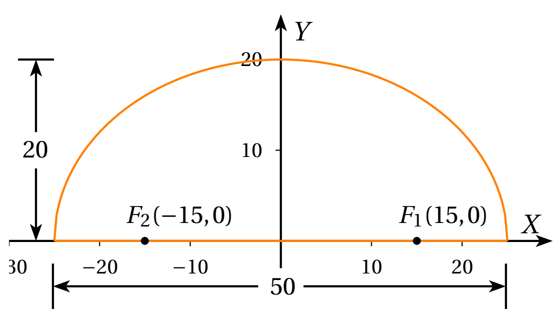


Figura 6.18: Elipse $16x^2 + 25y^2 = 10000$.

6.2.3. La hipérbola

DEFINICIÓN
La hipérbola es el conjunto de puntos con coordenadas (x, y) en un plano cartesiano, cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos colineales en el plano es constante. Estos puntos fijos reciben el nombre de ***focos*** de la hipérbola, y la linea recta sobre la cual están localizados los focos recibe el nombre de ***eje focal*** o ***eje mayor***. El punto medio entre los focos, de coordenadas (h, k) recibe el nombre de *centro* y a los puntos donde la hipérbola interseca el eje focal se le denomina ***vértice***. A la recta que pasa por el centro, y que es perpendicular al eje focal, recibe el nombre de ***eje conjugado***. A las dos curvas que forman la hipérbola se les llama ***ramas*** de la hipérbola.

La hipérbola tiene dos rectas inclinadas denominadas ***asíntotas***, a las cuales las dos ramas de la hipérbola se acercan sin interceptarlas y facilitan su representación gráfica.

La cuerda sobre el eje focal que une los vértices pasando por el centro recibe el nombre de ***eje transversal***. La medida de este eje es $2a$, donde a es la distancia entre el centro y cada vértice. La medida de la cuerda comprendida entre los focos está dada por $2c$, donde c es la distancia comprendida entre el centro y cada foco. El eje conjugado tiene una longitud de $2b$, donde b es la distancia entre el centro de la hipérbola y un extremo del eje conjugado.

Las distancias a, b y c están asociadas por la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$. Si el eje focal es horizontal, se dice que es una hipérbola de *eje horizontal*. Si el eje focal es vertical, se dice que es una hipérbola de *eje vertical*.

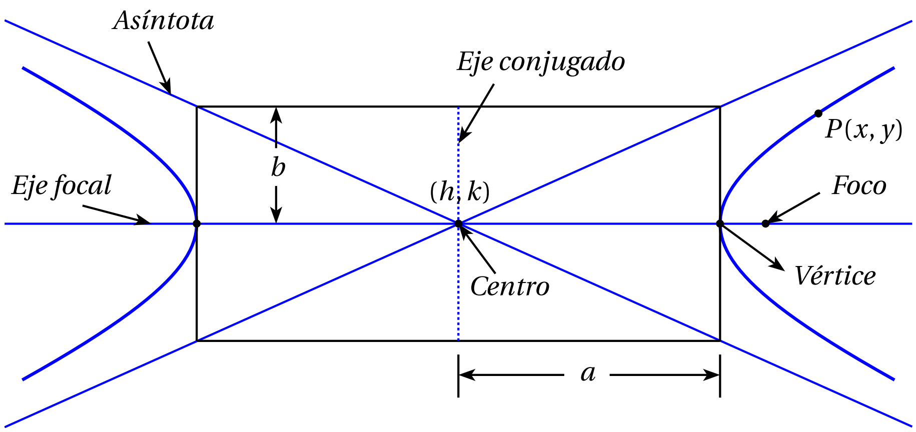


Figura 6.19: Elementos de la hipérbola.

Deducción analítica de la ecuación de la hipérbola

Primera ecuación ordinaria de la hipérbola

Consideremos la hipérbola de centro en el origen, cuyo eje coincide con el eje X (*figura 6.20*). Los focos F y F' están sobre el eje X. Veamos que el centro O es el punto medio del segmento $\overline{F'F}$, las coordenadas de estos focos serán $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola; por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica,

$$\left|\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right|\right| = 2a \tag{1}$$

que expresa, que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante, donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. De esta manera, la condición geométrica (1) es equivalente a las relaciones,

$$\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right| = 2a \tag{2}$$

$$\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right| = -2a \tag{3}$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; mientras que la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha.

Tenemos respectivamente que

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \tag{4}$$

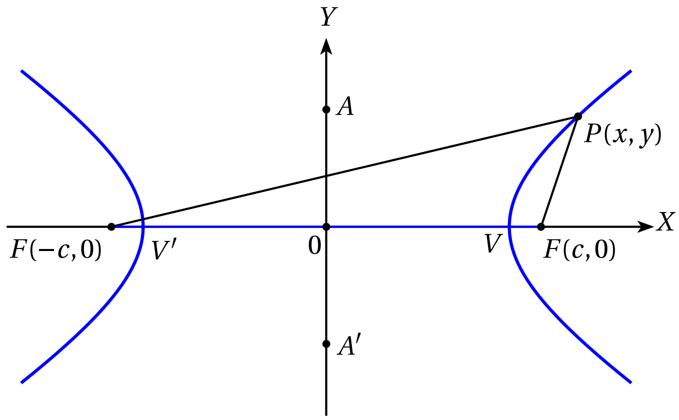


Figura 6.20: Definición de la hipérbola.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \tag{5}$$

luego,

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \tag{6}$$

Por ser $c>a$, c^2-a^2 es un número positivo que podemos designar por b^2, es decir $b^2=c^2-a^2$, y de aquí obtenemos

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

Si $P_1\left(x_1,y_1\right)$ es un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (7), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y por lo tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (7) es la ecuación de la hipérbola.

Observemos que las intersecciones con el eje X son a y $-a$. Por lo tanto las coordenadas de los vértices V y V' son $(a,0)$ y $(-a,0)$ respectivamente, y la longitud del eje transverso es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.

La ecuación (7) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Despejando y de la ecuación (7), obtenemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{8}$$

Por lo tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x\geq a$ y $x\leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x=a$ y $x=-a$.

Despejando x de la ecuación (7) se obtiene

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \tag{9}$$

Con esto, vemos que x es real para todos los valores reales de y. Según esto, las ecuaciones (8) y (9), con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda, arriba y abajo del eje X.

De la ecuación (8), hallamos que la longitud de cada lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

Para la hipérbola la excentricidad e está dada por la razón $\dfrac{c}{a}$. Por tanto tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

Se hace evidente, que al ser $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad.

Si el centro de la hipérbola está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y, análogamente se tiene que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

Las ecuaciones (7) y (10) son las más simples de esta curva y se denominan primeras ecuaciones ordinarias de la hipérbola.

Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola de centro (h,k) y eje paralelo al eje X, es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada uno de los focos, y a, b y c están ligadas por la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$. En la *tabla 6.3* se exponen las expresiones más importantes para los elementos de la hipérbola.

Ejemplo 7

La ecuación $x^2 - 5y^2 + 8x - 20y = 16$, representa una hipérbola. Determinar la posición del semieje focal y encuentre las coordenadas del centro, los vértices, los focos y la ecuación de las asíntotas.

Solución:
Esta ecuación $x^2 - 5y^2 + 8x - 20y = 16$ equivale a
$\left(x^2 + 8x + 16\right) - 5\left(y^2 + 4y + 4\right) = 16 + 16 - 20$, de aquí, $(x+4)^2 - 5(y+2)^2 = 12$, luego,

$$\frac{(x+4)^2}{12} - \frac{\left(y+2\right)^2}{\dfrac{12}{5}} = 1$$

De acuerdo a la *tabla 6.3*, la anterior expresión representa una hipérbola, a partir de la cual se puede identificar los valores de h, k, a y b, para determinar las coordenadas del centro, los vértices

Elementos	Eje focal horizontal	Eje focal vertical
Ecuación general	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ Con A y C no ambas cero, distinto valor numérico y signos contrarios. $B=0$ (Sin rotación de ejes)	
Ecuación canónica	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Localización de los focos	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
Localización de los vértices	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
Ecuación del eje focal	$y=k$	$x=h$
Semieje focal	a	a
Semieje conjugado	b	b
Longitud focal	c	c
Relación pitagórica	$c^2=a^2+b^2$	
Ecuación de las asíntotas	$y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$	$y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$

Tabla 6.3: Expresiones para los elementos de la hipérbola.

y los focos, así como las ecuaciones de las asíntotas y la posición del semieje focal. El centro es $C(-4,-2)$ y de eje focal horizontal, debido a que el paréntesis del término en x es positivo y el paréntesis del término en y está precedido por el signo negativo. En este sentido, tenemos: $a^2=12$ y
$b^2=\frac{12}{5}$, por tanto, $a=\sqrt{12}$ y $b=\sqrt{\frac{12}{5}}$.

Para hiperbolas de eje horizontal, tenemos que las coordenadas $(h\pm a,k)$ de los vértices son $V_1\left(-4+\sqrt{12},-2\right)$ y $V_2\left(-4-\sqrt{12},-2\right)$.

Las coordenadas de los focos se obtienen de la relación

$$c=\pm\sqrt{12+\frac{12}{5}}=\pm\sqrt{\frac{72}{5}}=\pm\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

Entonces, los focos tienen como coordenadas $(h\pm c,k)$:

$$F_1\left(-4+\frac{6\sqrt{10}}{5},-2\right)\quad \text{y}\quad F_2\left(-4-\frac{6\sqrt{10}}{5},-2\right)$$

Para determinar las ecuaciones de las asíntotas reemplazamos los valores obtenidos para h,k,a y b en $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$, así:

$$y=\pm\frac{\sqrt{\frac{12}{5}}}{\sqrt{12}}(x-(-4))+(-2)\quad \text{equivale a}\quad y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}(x+4)-2$$

Simplificando, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas:

$$y=\frac{\sqrt{5}x+4\sqrt{5}-10}{5}\qquad \text{y}\qquad y=-\frac{\sqrt{5}x-4\sqrt{5}-10}{5}$$

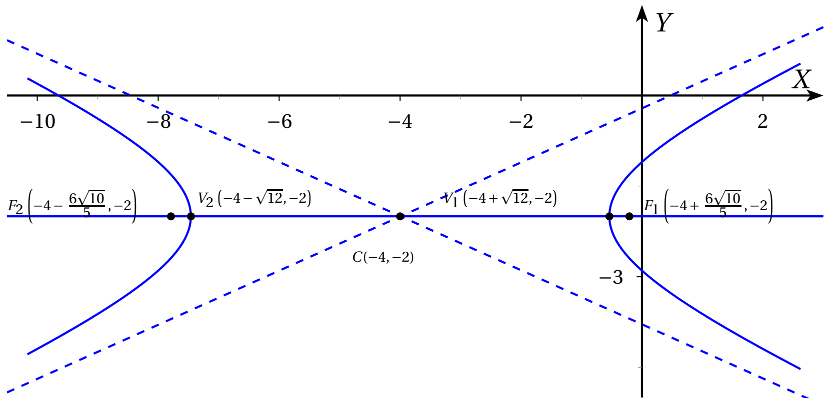


Figura 6.21: Hipérbola $x^2-5y^2+8x-20y=16$

Su gráfica es:
Ejemplo 8

La ecuación $x^2-7y^2-10x-42y+11=0$, representa una hipérbola. Determinar la posición del semieje focal y encuentre las coordenadas del centro, los vértices, los focos y la ecuación de las asíntotas.

Solución:
De la ecuación $x^2-7y^2-10x-42y=-11$ obtenemos que,
$7\left(y^2+6y+9\right)-\left(x^2-10x+25\right)=63-25+11$, luego $7(y+3)^2-(x-5)^2=49$, de aquí,

$$\frac{\left(y+3\right)^2}{7}-\frac{(x-5)^2}{49}=1$$

De acuerdo a la *tabla 6.3*, la anterior expresión representa una hipérbola, a partir de la cual se puede identificar los valores de h, k, a y b, para determinar las coordenadas del centro, los vértices y los focos, así como las ecuaciones de las asíntotas y la posición del semieje focal. El centro es $C(5,-3)$ y de eje focal vertical, debido a que el paréntesis del término en y es positivo y el paréntesis del término en x está precedido por el signo negativo. Así, tenemos: $a^2=7$ y $b^2=49$, por tanto, $a=\sqrt{7}$ y $b=7$.

Para hipérbolas de eje vertical, tenemos que las coordenadas $(h, k\pm a)$ de los vértices son $V_1\left(5,-3+\sqrt{7}\right)$ y $V_2\left(5,-3-\sqrt{7}\right)$.

Las coordenadas de los focos, se obtienen de la relación

$$c=\pm\sqrt{7+49}=\pm\sqrt{56}=\pm 2\sqrt{14}$$

Entonces, los focos tienen como coordenadas $(h, k\pm c)$:

$$F_1\left(5,-3+2\sqrt{14}\right) \quad \text{y} \quad F_2\left(5,-3-2\sqrt{14}\right)$$

Para determinar las ecuaciones de las asíntotas reemplazamos los valores obtenidos para h, k, a y b en $y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$, así:

$$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}(x-5)+(-3)$$

Simplificando, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas:

$$\sqrt{7}x - 7y - 5\sqrt{7} - 21 = 0 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{7}x + 7y - 5\sqrt{7} + 21 = 0$$

Su gráfica es:

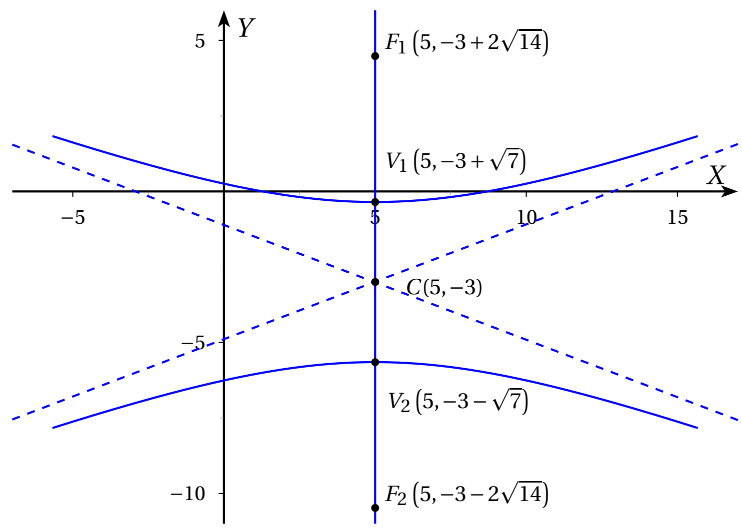


Figura 6.22: Hipérbola $x^2 - 7y^2 - 10x - 42y + 11 = 0$.

Ejemplo 9: Propiedad fundamental plana

En el sistema LOng RAnge Navigation (LORAN), una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Ver *figura 6.23*.

Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales. En tanto que la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante. Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija en el tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Así, para cada diferencia de tiempo, se tendrá una hipérbola diferente, cada una de las cuales guia al barco a una posición diferente en la costa. Las cartas de navegación muestran las distintas trayectorias hiperbólicas correspondientes a las diversas diferencias de tiempo.

Dos estaciones LORAN están a una distancia de 250 millas entre sí a lo largo de un litoral recto.

(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las dos señales LORAN. Fije un sistema apropiado de coordenadas rectangulares para determinar dónde tocaría tierra el barco si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b) Si el barco quiere entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas de la estación maestra, ¿qué diferencia de tiempo deberá buscar?

(c) Si el barco está a 80 millas de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su posición exacta?, si conocemos que la velocidad de cada señal de radio es de 186000 millas por segundo.

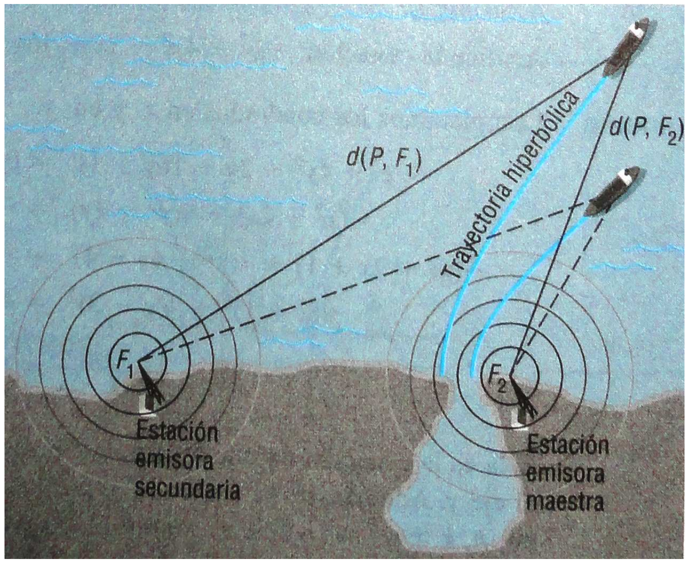


Figura 6.23: Sistema LORAN.

Solución:
`Parte (a)`: Fijamos un sistema coordenado rectangular de manera que las dos estaciones se encuentren sobre el eje X y el origen a la mitad de la distancia entre ellas. Ver *figura 6.24(a)*.

El barco se encuentra sobre una hipérbola cuyos focos están en la posición de las dos estaciones. La razón de esto es que la diferencia constante de tiempo entre las señales emitidas desde cada estación corresponde a una diferencia constante entre las distancias del barco a cada estación. Puesto que la diferencia de tiempo es de 0.00086 segundos y la velocidad de la señal es de 186000 millas por segundo, la diferencia entre las distancias del barco a cada estación (*focos*) es

$$\text{Distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo} = 186000 \cdot 0{,}00086 = 160 \text{ millas}$$

La diferencia entre las distancias del barco a cada estación, 160 millas, es igual a $2a$, de manera que $a = 80$ y el vértice de la hipérbola correspondiente está en $(80, 0)$. Puesto que el foco está en $(125, 0)$, si el barco sigue esta hipérbola tocará tierra a 45 millas de la estación maestra.

`Parte (b)`: Para tocar tierra a 25 millas de la estación maestra, el barco deberá seguir una hipérbola con vértice en $(100, 0)$. Para esta hipérbola $a = 100$, por lo que la difeerencia constante entre las distancias del barco a cada estación es de 200. La diferencia de tiempo que el barco debe buscar es

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{200}{186000} = 0{,}001075 \text{ segundos}$$

`Parte (c)`: Para obtener la localización exacta del barco, necesitamos encontrar la ecuación de la hipérbola con vértice en $(100, 0)$ y un foco en $(125, 0)$. La forma de la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 100$. Puesto que $c = 125$, tenemos que

$$b^2 = c^2 - a^2 = (125)^2 - (100)^2 = 5625$$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{(100)^2} - \frac{y^2}{(75)^2} = 1$$

Dado que el barco está a 80 millas de la costa, usamos $y = 80$ en la ecuación de la hipérbola, así:

$$\frac{x^2}{(100)^2} - \frac{(80)^2}{(75)^2} = 1$$

al despejar x, se obtiene $x = 146$. Luego, el barco está en la posición $(146, 80)$. *Figura 6.24(b)*.

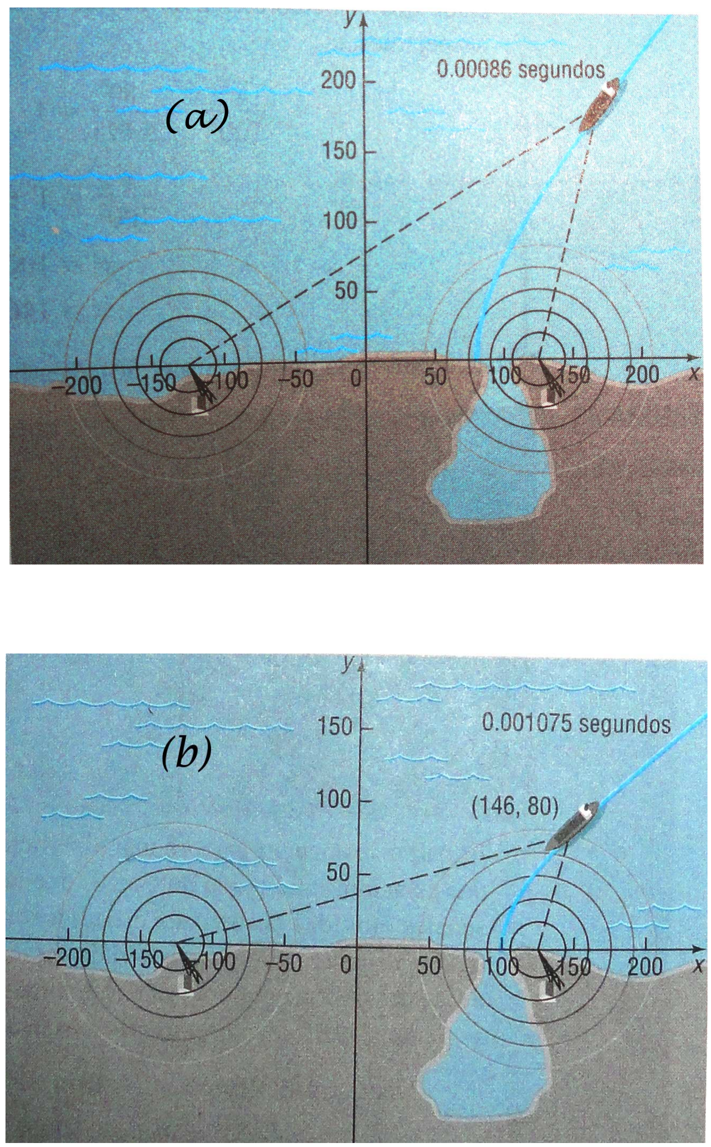


Figura 6.24: Sistema LOng RAnge Navigation.

CAPÍTULO 7

OBTENCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS A TRAVÉS DE LA DERIVADA IMPLÍCITA

7.1. Definición geométrica de la derivada:

El concepto de la derivada surgió a partir de la necesidad de resolver el problema geométrico de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de ella.

El matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), observó que las líneas tangentes a una curva en los puntos máximos o mínimos relativos eran horizontales. Cuando la pendiente de la curva es positiva, la función es creciente en ese punto; cuando la pendiente de la curva es negativa, la función es decreciente en dicho punto. Un punto es máximo relativo si a la izquierda de el la función es creciente y a la derecha de este punto la función es decreciente, es decir que en este caso particular, en un punto de máximo relativo la pendiente es positiva a la izquierda del punto, y a la derecha de dicho punto la pendiente es negativa.

La derivada de una función también ha sido interpretada como la tasa de variación relativa entre dos cantidades, y su importancia se destaca en muchos campos. Por ejemplo, en la física, la velocidad de una partícula en movimiento se define en forma de una derivada, ya que se trata de la medida de la variación de un desplazamiento con respecto al tiempo. La rapidez en la reproducción de bacterias proporciona una de las aplicaciones de la derivada en biología. Los economistas se interesan en conceptos como ingreso marginal, costo marginal y utilidad marginal, que son todos tasas de variación.

Sea f una función continua en x_1. Deseamos definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $P(x_1, f(x_1))$. Sea I el intervalo abierto que contiene a x_1 y en el cual está definida f. Sea $Q(x_2, f(x_2))$ otro punto sobre la gráfica de f, tal que x_2 también está en I. Tracemos una recta a través de P y Q. Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama recta secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. La *figura 7.1*, muestra una recta secante particular; en esta figura, el punto Q se halla a la derecha del punto P. Sin embargo, Q puede estar ya sea a la izquierda o a la derecha de P. Ahora, representemos la diferencia de las abscisas de Q y

de P por Δx, de manera que

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Veamos que Δx denota una variación en el valor de x cuando x cambia de x_1 a x_2, y puede ser positiva o negativa. A esta variación se le denomina incremento de x.

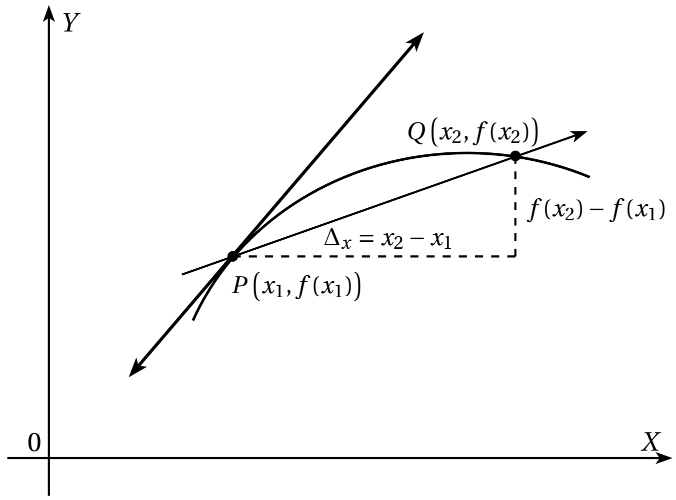


Figura 7.1: Recta secante PQ.

La pendiente de la recta secante $\overrightarrow{PQ}$ está dada por:

$$m_{\overrightarrow{PQ}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Siempre que $\Delta x \neq 0$. Ya que $x_2 = x_1 + \Delta x$, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$m_{\overrightarrow{PQ}} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora, imaginemos el punto P como un punto fijo, y desplacemos el punto Q a lo largo de la curva en dirección hacia P; es decir, Q se aproxima a P. Esto equivale a decir que Δx tiende a cero. A medida que esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si esta recta secante tiene una posición límite, esta posición límite será la tangente a la gráfica en el punto P. Es decir, que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P es el límite de $m_{\overrightarrow{PQ}}$ cuando Δx tiende a cero, si éste límite existe.

Si:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_{\overrightarrow{PQ}} = +\infty$$

ó

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_{\overrightarrow{PQ}} = -\infty$$

entonces, cuando Δx tiende a cero, la recta $\overrightarrow{PQ}$ se aproxima a la recta que pasa por P, la cual es paralela al eje Y. En este caso decimos que la recta tangente a la gráfica en P es la recta $x = x_1$. Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 1. *Supongamos que la función f es contínua en x_1; entonces, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es:*

i) La recta a través de P, cuya pendiente m_{x_1} se define como

$$m_{x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

si el límite existe.

ii) La recta $x = x_1$ si

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad es \ +\infty \ ó \ -\infty$$

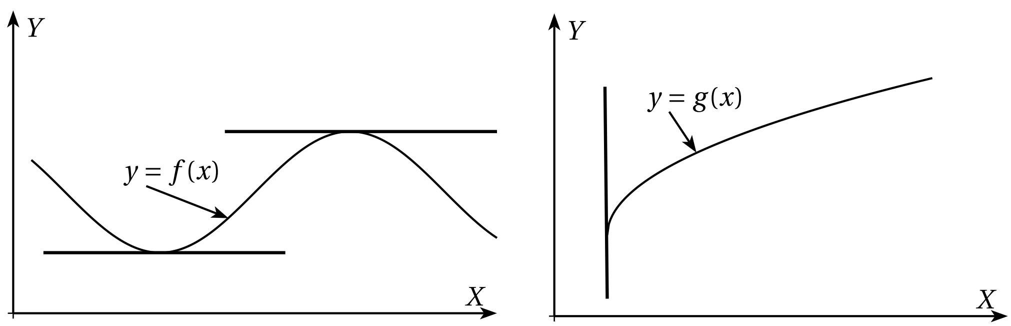
y

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad es \ +\infty \ ó \ -\infty$$

Si no se cumplen (i) ni (ii) de la definición anterior, entonces no existe una tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$.

Dada una curva, representada por una función $y = f(x)$, entonces la derivada de esa función nos define una expresión para determinar la pendiente de cualquier recta que es tangente a esa curva.

En este caso, la recta tangente a la curva dada es horizontal en aquellos puntos donde la pendiente es cero, es decir, donde la derivada se hace cero. La recta tangente es vertical en los puntos donde la pendiente es indefinida, es decir, donde su derivada no existe ó no está definida (ND). Gráficamente esto es:



$m_{tang} = \dfrac{dy}{dx} = 0$ $\qquad$ $m_{tang} = \dfrac{dy}{dx} = ND$, (*no está definida*).

Figura 7.2: Rectas tangentes a los vértices de $f(x)$ y $g(x)$.

7.1.1. Derivada implícita:

En las funciones en general, una variable está expresada explícitamente en términos de otra de la cual depende, es decir, y se presenta como una función de x. En algunos casos, existen funciones definidas de forma implícita como una relación entre dos variables, donde una de ellas puede expresarse como dos o más funciones explícitas de la otra. Ejemplo de ello, es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r (*figura 7.3*),

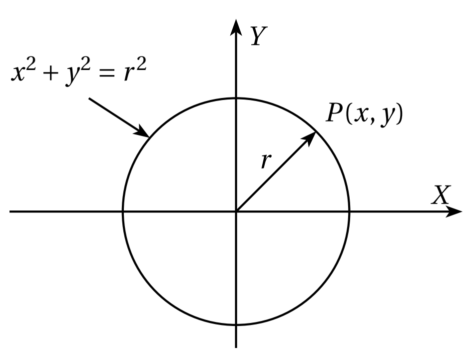


Figura 7.3: Circunferencia con centro en el origen y radio r.

cuya ecuación está dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde x e y están relacionadas implícitamente entre sí. Al expresar x en términos de y, obtenemos dos ecuaciones explícitas para x:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

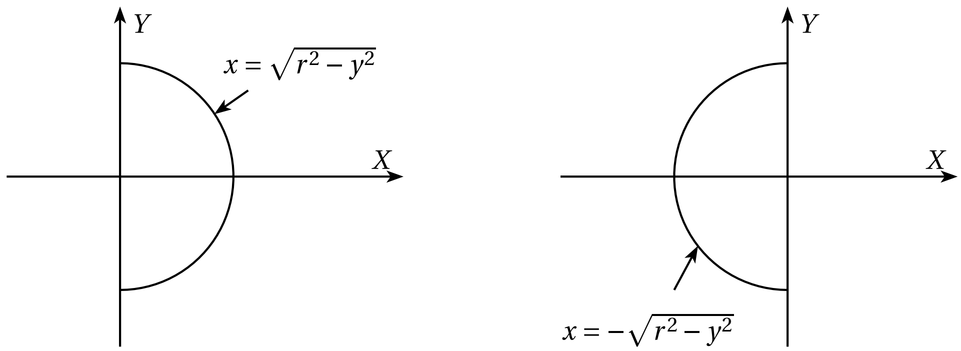


Figura 7.4: Ecuaciones explícitas para x.

Análogamente, si expresamos y en términos de x, obtenemos dos ecuaciones explícitas para y, esto es:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

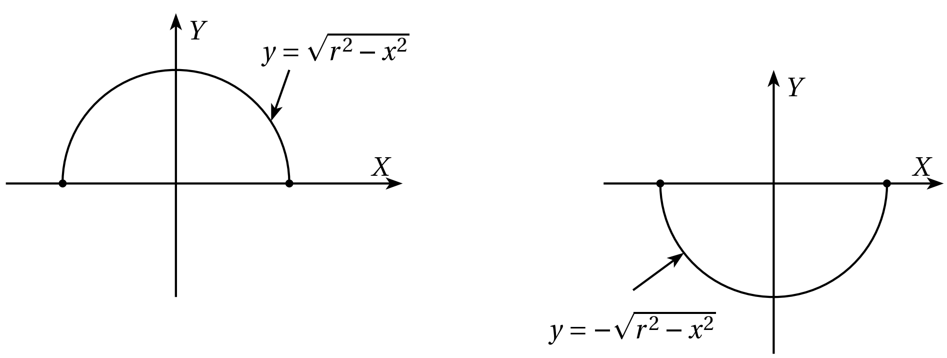


Figura 7.5: Ecuaciones explícitas para y.

Después de expresadas de este modo, es posible obtener la derivada para cada una de las ecuaciones que definen la circunferencia.

No obstante, hay curvas que no permiten expresar una variable en términos de la otra, dificultando obtener su derivada. En este caso, podemos aplicar el método de la ***derivación implícita***, derivando ambos miembros de la ecuación, ya sea con respecto a x, $\dfrac{dy}{dx}$ ó con respecto a y, $\dfrac{dx}{dy}$.

Con ello, se busca obtener $\dfrac{dy}{dx}$ como una expesión general para la pendiente de todas las rectas que son tangentes a la curva dada, en cualquier punto de coordenadas (x, y) sobre la curva. En el caso de la circunferencia tenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Derivamos implícitamente y en términos de la variable x:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Observemos que las variables x y y se relacionan de forma implícita en la ecuación general de las secciones cónicas, así:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Derivando implícitamente la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2Ax + By + D)}{Bx + 2Cy + E} \tag{2}$$

Lo cual significa que, las gráficas de las secciones cónicas tienen sus vértices en los puntos donde se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad 2Ax + By + D = 0 \tag{3}$$

o

$$\frac{dy}{dx} = ND \qquad \text{si y sólo si} \qquad Bx + 2Cy + E = 0 \tag{4}$$

7.2. El caso de la parábola

7.2.1. Parábolas de eje focal horizontal

Como se estudió en el *capítulo 6, sección 6.2.1*. En parábolas de eje focal horizontal $A = 0$ y $B = 0$, por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-D}{2Cy + E}$$

El valor de la derivada nunca es cero, pero $\frac{dy}{dx}$ si puede ser indefinida cuando

$$y = -\frac{E}{2C} \tag{5}$$

lo cual significa que la recta tangente a la curva es vertical en ese punto (*figura 7.6*).

Tomando en la ecuación (1), $A = 0$, $B = 0$ y $y = -\frac{E}{2C}$, tenemos:

$$C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + E\left(-\frac{E}{2C}\right) + F = 0 \text{ equivalente a } Dx - \frac{E^2}{4C} + F = 0$$

de donde,

$$Dx = \frac{E^2}{2C} - \frac{E^2}{4C} - F = \frac{E^2}{4C} - F$$

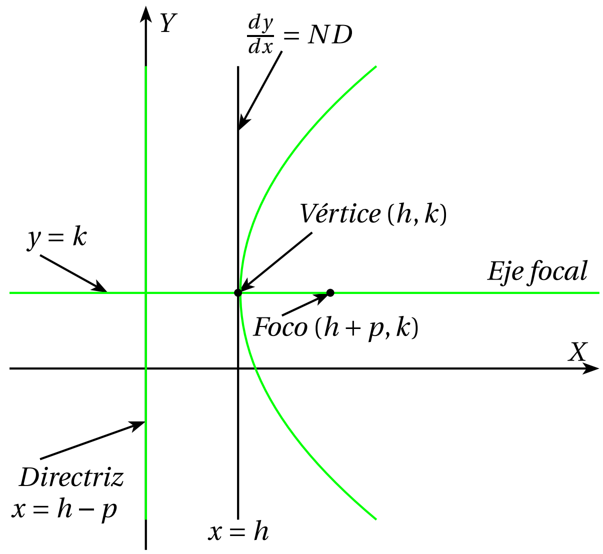


Figura 7.6: Parábola de eje focal horizontal.

así que

$$x = \frac{E^2 - 4CF}{4CD}$$

que corresponde al valor de la abscisa del vértice, y así, el vértice tiene coordenadas:

$$(h,k) = \left(\frac{E^2 - 4CF}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right) \tag{6}$$

Como el foco no es un punto sobre la parábola, no es posible determinar sus coordenadas por medio de la derivación, en ese caso se hará de forma geométrica al igual que para la ecuación de la directriz (*figura 7.6*). Para esto se requiere conocer el valor de la longitud focal, la cual está definida geométricamente como:

$$p = -\frac{D}{4C} \tag{7}$$

Asi que, las coordenadas del foco, las ecuaciones de la directriz, del eje, y el lado recto están definidas por:

Foco: $(h+p,k) = \left(\frac{E^2 - 4CF - D^2}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$

Directriz: $x = h - p = \frac{E^2 - 4CF + D^2}{4CD}$

Eje: $y = k = -\frac{E}{2C}$

Lado recto: $|4p| = \left|-\frac{D}{C}\right|$

7.2.2. Parábolas de eje focal vertical

En parábolas de eje focal vertical tenemos que $B = 0$ y $C = 0$, así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Ax - D}{E}$$

Se puede observar como el valor de la derivada nunca es indefinido, pero $\dfrac{dy}{dx}$ si puede ser cero cuando

$$x = -\frac{D}{2A} \tag{8}$$

Esto significa que la recta tangente a la curva es horizontal en ese punto (*figura 7.7*).

Tomando en la ecuación (1), $B = 0$, $C = 0$ y $x = -\dfrac{D}{2A}$, obtenemos:

$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0 \text{ equivalente a } -\frac{D^2}{4A} + Ey + F = 0$$

de donde,

$$Ey = -\frac{D^2}{4A} + \frac{D^2}{2A} - F = \frac{D^2}{4A} - F$$

así que

$$y = \frac{D^2 - 4AF}{4AE} \tag{9}$$

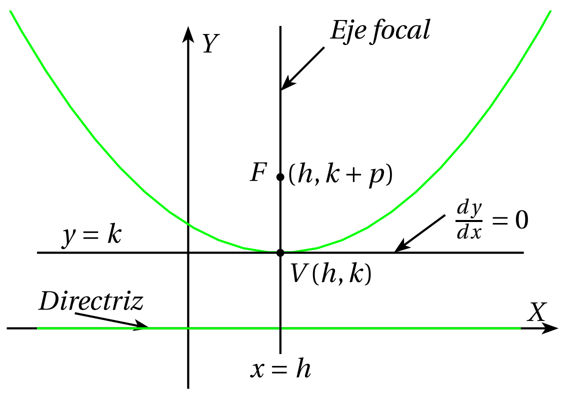


Figura 7.7: Parábola de eje focal vertical.

que corresponde a la ordenada del vértice, y así, el vértice tiene coordenadas:

$$(h, k) = \left(\frac{-D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

Al igual que en la parábola de eje focal horizontal, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz se obtienen de forma geométrica (*figura 7.7*). Para esto se requiere conocer el valor de la longitud focal, la cual está definida geométricamente como:

$$p = -\frac{E}{4A} \tag{10}$$

Por lo tanto, las coordenadas del foco, las ecuaciones de la directriz, del eje y el ancho focal están definidas respectivamente por:

Foco: $\quad (h, k+p) = \left(\dfrac{-D}{2A}, \dfrac{D^2 - 4AF - E^2}{4AE}\right)$

Directriz: $\quad y = k - p = \dfrac{D^2 - 4AF + E^2}{4AE}$

Eje: $\quad x = h = \dfrac{-D}{2A}$

Lado recto $\quad |4p| = \left|-\dfrac{E}{A}\right|$

Ejemplo 10

La ecuación general $3x^2 + 8x + 15y + 1 = 0$, representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice, el foco, la ecuación de la directriz y del eje focal.
Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A = 3$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 8$, $E = 15$, $F = 1$.

Observando estos valores, se concluye que la ecuación dada representa una parábola con eje focal vertical y con traslación de ejes, puesto que $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D \neq 0$ y $E \neq 0$.

Para las coordenadas del vértice utilizamos las expresiones:

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right) = \left(-\frac{8}{2(3)}, \frac{(8)^2 - 4(3)(1)}{4(3)(15)}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{13}{45}\right)$$

Para las coordenadas del foco utilizamos la expresión

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF - E^2}{4AE}\right) = \left(-\frac{8}{2(3)}, \frac{(8)^2 - 4(3)(1) - (15)^2}{4(3)(15)}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{-173}{180}\right)$$

La ecuación de la directriz se obtiene a partir de la expresión

$$y = \frac{D^2 - 4AF + E^2}{4AE} = \frac{(8)^2 - 4(3)(1) + (15)^2}{4(3)(15)} = \frac{277}{180}$$

Finalmente, la ecuación del eje focal es

$$x = -\frac{D}{2A} = -\frac{8}{2(3)} = -\frac{4}{3}$$

Ver *figura 6.9*, de la sección 6.2.1.

Ejemplo 11

La ecuación general $2y^2 + 6x + 8y - 5 = 0$, representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice, el foco, la ecuación de la directriz y del eje focal.

Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$, $D = 6$, $E = 8$, $F = -5$.

Observando estos valores, concluimos que la ecuación dada representa una parábola con eje focal horizontal y con traslación de ejes, puesto que $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ y $E \neq 0$.

Para las coordenadas del vértice utilizamos las expresiones:

$$\left(\frac{E^2 - 4CF}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right) = \left(\frac{(8)^2 - 4(2)(-5)}{4(2)(6)}, -\frac{8}{2(2)}\right) = \left(\frac{13}{6}, -2\right)$$

Para las coordenadas del foco utilizamos la expresión

$$\left(\frac{E^2 - 4CF - D^2}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right) = \left(\frac{(8)^2 - 4(2)(-5) - (6)^2}{4(2)(6)}, -\frac{8}{2(2)}\right) = \left(\frac{17}{12}, -2\right)$$

La ecuación de la directriz se obtiene a partir de la expresión

$$x = \frac{E^2 - 4CF + D^2}{4CD} = \frac{(8)^2 - 4(2)(-5) + (6)^2}{4(2)(6)} = \frac{35}{12}$$

Finalmente, la ecuación del eje focal es

$$y = -\frac{E}{2C} = -\frac{8}{4} = -2$$

Ver *figura 6.10*, de la sección 6.2.1.

7.3. El caso de la Elipse

Para la elipse, en la ecuación general de las secciones cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

los valores de A y C son diferentes de cero, de igual signo, y $B = 0$. Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2Ax + By + D)}{Bx + 2Cy + E}$$

Se observa en este caso, cómo el valor de la derivada puede ser cero o no estar definida, es decir, la recta tangente a la curva puede ser horizontal o vertical (*Figura 7.8*). Por lo tanto, se cumplen las condiciones expresadas en las ecuaciones (3) y (4).

A diferencia de las parábolas, en la elipse no es fácil determinar, a partir de la ecuación general, la orientación del eje focal, esto es, si tiene eje focal horizontal o vertical. En este caso, para determinar la orientación del eje focal, se recurrirá a las propiedades geométricas de la elipse, donde el eje de mayor longitud corresponde al eje focal. De acuerdo con esto, se procederá primero a encontrar las coordenadas de los puntos M, N, O, P; luego a determinar las distancias d_{MO} y d_{NP} (*Figura 7.8*), para establecer cuál de los dos corresponde al eje focal y continuar con el desarrollo del método.

En la *figura 7.8*, se puede observar que los puntos M y O en los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$, la abscisa correspondiente a estos puntos es igual a la abscisa h del centro de la elipse y en los puntos N y P en los cuales $\frac{dy}{dx} = ND$, la ordenada correspondiente es igual a la ordenada k del centro.

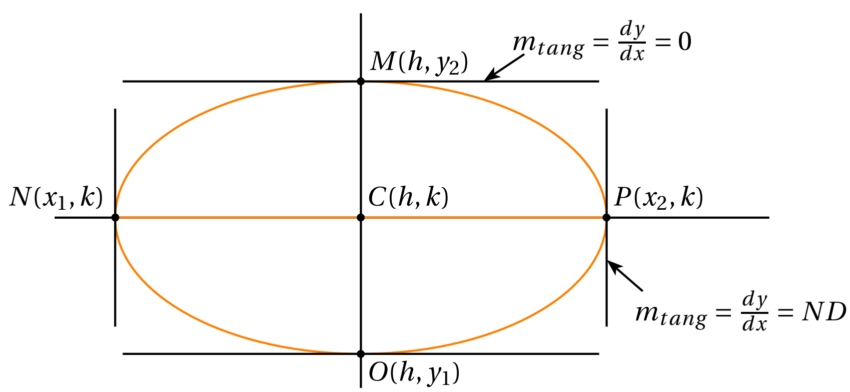


Figura 7.8: Valor de la pendiente en la elipse.

De $2Ax + D = 0$, obtenemos:

$$x = h = -\frac{D}{2A} \tag{11}$$

De $2Cy + E = 0$, obtenemos:

$$y = k = -\frac{E}{2C} \tag{12}$$

Luego, las coordenadas del centro son:

$$(h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Para hallar las coordenadas de los vértices se parte de la hipótesis de que los puntos M, N, O, P pertenecen a la elipse. Así tenemos:

$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + Cy^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0$$

o bien,

$$Cy^2 + Ey + \frac{4AF - D^2}{4A} = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para y, encontramos los dos valores

$$y_1 = \frac{-E + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \tag{13}$$

$$y_2 = \frac{-E - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \tag{14}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos M y O están definidas por:

$$M = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$$

$$O = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$$

Para $y = k = -\dfrac{E}{2C}$ se tiene:

$$Ax^2 + C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + E\left(-\frac{E}{2C}\right) + F = 0$$

lo cual conduce a:

$$Ax^2 + Dx + \frac{4CF - E^2}{4C} = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para x se encuentran los dos valores

$$x_1 = \frac{-D + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \tag{15}$$

$$x_2 = \frac{-D - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \tag{16}$$

Luego, las coordenadas de los puntos N y P están definidas por:

$$N = \left(\frac{-D - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$P = \left(\frac{-D + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Como se mencionó anteriormente, con las coordenadas de estos puntos, se buscará establecer si la elipse tiene eje focal horizontal o vertical, determinando cuál de los dos segmentos $\overline{OM}$ o $\overline{NP}$ es el eje mayor.

Utilizando la fórmula de la distancia para calcular la longitud de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{NP}$, tenemos:

$$d_{OM} = \sqrt{\left[\left(-\frac{D}{2A}\right) - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{-E+\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right) - \left(\frac{-E-\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right)\right]^2}$$

y simplificando, se obtiene:

$$d_{\overline{OM}} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{C}$$

Siguiendo un procedimiento similar, se verifica que la longitud del segmento $\overline{NP}$ está dada por:

$$d_{\overline{NP}} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{A}$$

Al hacer las sustituciones correspondientes para calcular la longitud de dichos segmentos, se puede presentar una de las siguientes propiedades:

Caso No. 1: $d_{\overline{OM}} < d_{\overline{NP}}$ La elipse es de eje focal horizontal.
Caso No. 2: $d_{\overline{OM}} > d_{\overline{NP}}$ La elipse es de eje focal vertical.
Caso No. 3: $d_{\overline{OM}} = d_{\overline{NP}}$ Caso particular de la elipse: La circunferencia.

Según el caso, a continuación se procederá a determinar los demás elementos de la elipse (*Figura 7.9*).

7.3.1. Elipse de eje focal horizontal

Caso No. 1: $d_{\overline{OM}} < d_{\overline{NP}}$ La elipse es de eje focal horizontal.

La longitud de los semiejes está dada por:

Semieje Mayor

$$a = \frac{d_{\overline{NP}}}{2}$$

Semieje Menor

$$b = \frac{d_{\overline{OM}}}{2}$$

Al reemplazar a, b y después de efectuar operaciones algebraicas en la relación pitagórica para las elipses (ver *sección 6.2.2 del capítulo 6*), se obtiene la expresión de la longitud focal, así:

$$c = \sqrt{\left(\frac{d_{\overline{NP}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{\overline{OM}}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{[d_{\overline{NP}}]^2 - [d_{\overline{OM}}]^2}{4}}$$

Reemplazando las expresiones obtenidas anteriormente para $d_{\overline{OM}}$ y $d_{\overline{NP}}$, tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{A}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{C}\right)^2}{4}}$$

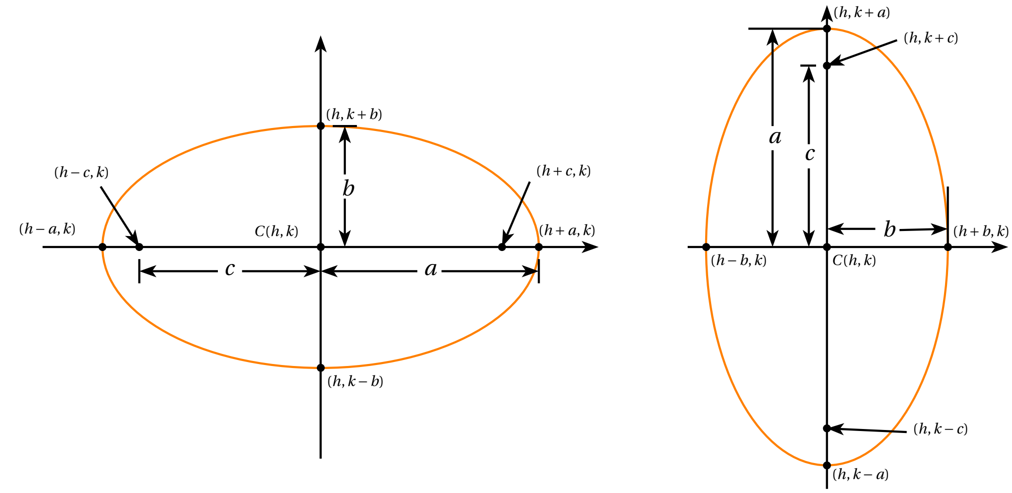


Figura 7.9: Coordenadas de la elipse.

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión:

$$c = \frac{\sqrt{(C-A)\left(AE^2 - 4ACF + CD^2\right)}}{2AC}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos y la ecuación del eje focal para elipses de eje horizontal están definidas respectivamente por:

$$(h+c,k) = \left(\frac{\sqrt{(C-A)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$(h-c,k) = \left(\frac{-\sqrt{(C-A)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$$

donde,

$$y = k = -\frac{E}{2C}$$

7.3.2. Elipse de eje focal vertical

Caso No. 2: $d_{\overline{OM}} > d_{\overline{NP}}$ La elipse es de eje focal vertical.

La longitud de los semiejes está dada por:

Semieje Mayor

$$a = \frac{d_{\overline{OM}}}{2}$$

Semieje Menor

$$b = \frac{d_{\overline{NP}}}{2}$$

Al reemplazar a y b, y después de efectuar operaciones algebraicas similares al caso No. 1, en la relación pitagórica para las elipses

$$a^2 = b^2 + c^2$$

se obtiene la expresión de la longitud focal:

$$c = \frac{\sqrt{(A-C)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}}{2AC}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos y la ecuación del eje focal para elipses de eje vertical están definidas respectivamente por:

$$(h, k+c) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{\sqrt{(A-C)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-AE}{2AC}\right)$$

$$(h, k-c) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-\sqrt{(A-C)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-AE}{2AC}\right)$$

donde,

$$x = h = -\frac{D}{2A}$$

Caso No. 3: $d_{\overline{OM}} = d_{\overline{NP}}$ representa una circunferencia.

En este caso, se puede utilizar cualquiera de los procedimientos descritos anteriormente, teniendo en cuenta que A y C toman valores iguales y diferentes de cero.

Ejemplo 12

La ecuación general $2x^2 + y^2 - 3x - 4y - 12 = 0$, representa una elipse. Determinar las coordenadas del centro, los focos, ecuación del eje focal, los vértices, interceptos con el eje menor y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A = 2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -3$, $E = -4$, $F = -12$. A continuación reemplazamos dichos valores en las expresiones obtenidas para las elipses.

Iniciamos hallando las coordenadas del centro:

$$(h,k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right) = (h,k) = \left(-\frac{(-3)}{2(2)}, -\frac{(-4)}{2(1)}\right) = (h,k) = \left(\frac{3}{4}, 2\right)$$

Para el cálculo de los vértices, debemos determinar las coordenadas con todos los intersectos con los ejes, luego calcular la longitud de los segmentos respectivos y, finalmente, determinar cuál de ellos es el eje focal.

Las coordenadas de los puntos de intersección M y O estan dadas por:

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{4 \pm \sqrt{\frac{32+96+9}{2}}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}, \frac{8 \pm \sqrt{274}}{4}\right) = \begin{cases} M\left(\frac{3}{4}, \frac{8+\sqrt{274}}{4}\right) \\ O\left(\frac{3}{4}, \frac{8-\sqrt{274}}{4}\right) \end{cases}$$

Los puntos N y P están dados por:

$$\left(\frac{-D\pm\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)=\left(\frac{3\pm\sqrt{\frac{32+96+9}{1}}}{4}, \frac{4}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3\pm\sqrt{137}}{4}, 2\right)=\begin{cases} P\left(\frac{3+\sqrt{137}}{4}, 2\right) \\ N\left(\frac{3-\sqrt{137}}{4}, 2\right)\end{cases}$$

Las longitudes de los ejes mayor y menor son

$$d_{\overline{OM}}=\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{C}=\frac{\sqrt{\frac{32+96+9}{2}}}{1}=\frac{\sqrt{137}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{274}}{2}$$

$$d_{\overline{NP}}=\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{A}=\frac{\sqrt{\frac{137}{1}}}{2}=\frac{\sqrt{137}}{2}$$

$$d_{\overline{NP}}=\frac{\sqrt{\frac{(2)(-4)^2-4(2)(1)(-12)+(1)(-3)^2}{1}}}{2}=\frac{\sqrt{137}}{2}$$

Como $d_{\overline{OM}}>d_{\overline{NP}}$, la elipse es de eje focal vertical.

De acuerdo con este resultado, los vértices de la elipse son

$$M\left(\frac{3}{4}, \frac{8+\sqrt{247}}{4}\right) \quad \text{y} \quad O\left(\frac{3}{4}, \frac{8-\sqrt{247}}{4}\right)$$

y los intersectos con el eje menor son

$$P\left(\frac{3+\sqrt{137}}{4}, 2\right) \quad \text{y} \quad N\left(\frac{3-\sqrt{137}}{4}, 2\right)$$

Las coordenadas de los focos están dadas por

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{\pm\sqrt{(A-C)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-AE}{2AC}\right)=\left(\frac{3}{4}, \frac{\pm\sqrt{137}+8}{4}\right)$$

es decir,

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{+\sqrt{137}+8}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{-\sqrt{137}+8}{4}\right)$$

Finalmente, la ecuación del eje focal está dada por:

$$x=-\frac{D}{2A}=\frac{3}{4}$$

Ver *figura 6.15*, sección 6.2.2.

Ejemplo 13

La ecuación general $2x^2+3y^2-x+2y=\dfrac{1}{8}$, representa una elipse. Determinar las coordenadas del centro, los focos, ecuación del eje focal, los vértices, interceptos con el eje menor y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A=2$, $B=0$, $C=3$, $D=-1$, $E=2$, $F=-\frac{1}{8}$.

Iniciamos hallando las coordenadas del centro:

$$(h,k)=\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)=\left(-\frac{(-1)}{2(2)},-\frac{(2)}{2(3)}\right)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right)$$

Para el cálculo de los vértices, debemos determinar las coordenadas con todos los intersectos con los ejes, luego calcular la longitud de los segmentos respectivos y, finalmente, determinar cuál de ellos es el eje focal.

Las coordenadas de los puntos de intersección M y O están dadas por:

$$\left(-\frac{D}{2A},\frac{-E\pm\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{-2\pm\sqrt{\frac{8+3+3}{2}}}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4},\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}\right)=\begin{cases} M\left(\frac{1}{4},\frac{-2+\sqrt{7}}{6}\right) \\ O\left(\frac{1}{4},\frac{-2-\sqrt{7}}{6}\right)\end{cases}$$

Los puntos N y P están dados por:

$$\left(\frac{-D\pm\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A},-\frac{E}{2C}\right)=\left(\frac{1\pm\sqrt{\frac{14}{3}}}{4},-\frac{2}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{3\pm\sqrt{42}}{12},-\frac{1}{3}\right)=\begin{cases} P\left(\frac{3+\sqrt{42}}{12},-\frac{1}{3}\right) \\ N\left(\frac{3-\sqrt{42}}{12},-\frac{1}{3}\right)\end{cases}$$

$$d_{\overline{OM}}=\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{C}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$d_{\overline{NP}}=\frac{\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{A}=\frac{\sqrt{\frac{14}{3}}}{2}=\frac{\sqrt{42}}{6}$$

Como $d_{\overline{NP}}>d_{\overline{OM}}$, la elipse es de eje focal horizontal.

De acuerdo con este resultado, los vértices de la elipse son

$$P\left(\frac{3+\sqrt{42}}{12},-\frac{1}{3}\right)\quad \text{y} \quad N\left(\frac{3-\sqrt{42}}{12},-\frac{1}{3}\right)$$

y los intersectos con el eje menor son

$$M\left(\frac{1}{4},\frac{-2+\sqrt{7}}{6}\right)\quad \text{y} \quad O\left(\frac{1}{4},\frac{-2-\sqrt{7}}{6}\right)$$

Las coordenadas de los focos están dadas por

$$\left(\frac{\pm\sqrt{(C-A)\left(AE^2-4ACF+CD^2\right)}-CD}{2AC},-\frac{E}{2C}\right)=\left(\frac{\pm\sqrt{14}+3}{12},-\frac{2}{6}\right)$$

es decir,

$$\left(\frac{\sqrt{14}+3}{12},-\frac{1}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{-\sqrt{14}+3}{12},-\frac{1}{3}\right)$$

Finalmente, la ecuación del eje focal está dada por:

$$y=-\frac{E}{2C}=-\frac{1}{3}$$

Ver *figura 6.16*, sección 6.2.2.

7.4. El caso de la hipérbola

Al igual que en la elipse, en la hipérbola no es fácil determinar, a partir de la ecuación general, la orientación del eje focal, esto es, si tiene eje focal horizontal o vertical. En este caso, para determinar la orientación del eje focal se recurre al análisis de las pendientes de las rectas tangentes (*figura 7.10*) para los casos de hipérbolas con eje focal horizontal y vertical.

En la *figura 7.10a*, se puede observar una hipérbola de eje focal horizontal, donde en los vertices N y P, $\frac{dy}{dx}$ no existe. En este caso, de la ecuación (2), con $B=0$, se obtiene

$$y=-\frac{E}{2C} \tag{17}$$

y la ordenada correspondiente a estos puntos es igual a la ordenada k del centro.

Para hallar las abscisas x_1 y x_2 de los vértices N y P se parte de la hipótesis de que estos pertenecen a la hipérbola y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación (1), con $B=0$. Reemplazando la ecuación (17) en la ecuación general de las secciones cónicas, se pueden obtener las coordenadas de dichos puntos, así:

$$Ax^2+C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2+Dx+E\left(-\frac{E}{2C}\right)+F=0$$

o bien,

$$Ax^2+Dx-\left(\frac{E^2-4CF}{4C}\right)=0 \tag{18}$$

donde el valor de x está definido por:

$$x=\frac{-D\pm\sqrt{\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A} \tag{19}$$

Si el discriminante de la ecuación (19) es positivo, es decir:

$$\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}>0$$

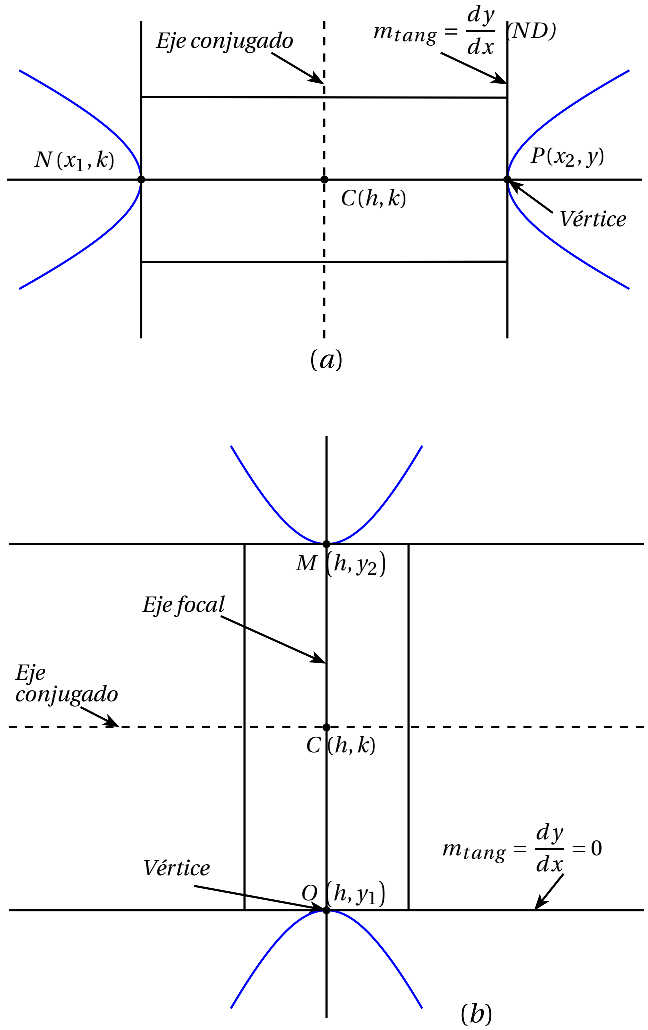


Figura 7.10: Pendiente y coordenadas de los vértices en la hipérbola.

entonces, la hipérbola corta la recta $y = -\dfrac{E}{2C}$ en los puntos N y P (*Figura 7.10a*) luego, se trata de una hipérbola de eje focal horizontal.

De igual forma, en la *figura 7.10b* se puede observar una hipérbola de eje focal vertical, donde en los vértices M y O, $\dfrac{dy}{dx} = 0$, y la abscisa correspondiente a estos puntos es igual a la abscisa h del centro de la hipérbola.

En el segundo caso, donde $\dfrac{dy}{dx} = 0$ al despejar x en la ecuación (3) se tiene:

$$x = -\frac{D}{2A} \tag{20}$$

Para hallar las ordenadas y_1 y y_2 de los vértices O y M se parte nuevamente, de la hipótesis de que estos pertenecen a la hipérbola y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación (1), con $B = 0$. Reemplazando la ecuación (20) en la ecuación (1) se pueden obtener las coordenadas de dichos puntos, de la siguiente manera:

$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + Cy^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0$$

o bien,

$$Cy^2 + Ey - \left(\frac{D^2 - 4AF}{4A}\right) = 0 \tag{21}$$

donde se define el valor de y así:

$$y = \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \tag{22}$$

Si el discriminante de la ecuación (22) es positivo, es decir:

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A} > 0$$

entonces, la hipérbola corta la recta $x = -\dfrac{D}{2A}$ en los puntos O y M (*figura 7.10b*) luego, se trata de una hipérbola de eje focal vertical. Se concluye, que dependiendo del valor que tome el discriminante en las ecuaciones (19) y (22), puede identificarse si la curva es una hipérbola de eje focal horizontal o vertical.

7.4.1. Hipérbolas de eje focal horizontal

Si se cumple que

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C} > 0$$

entonces, tenemos una hipérbola de eje focal horizontal (*figura 7.11*).

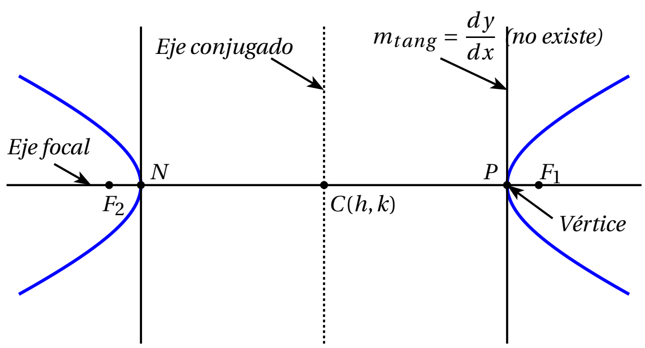


Figura 7.11: Hipérbola de eje focal horizontal.

Con la expresión (17) podemos obtener la ordenada de los vértices. Puesto que estos están localizados sobre el eje focal, entonces la expresión (17) también representa la ecuación de este eje y la ordenada de los otros elementos de la hipérbola que se encuentran sobre el eje focal. Al estar los vértices sobre la curva, las abscisas de estos puntos están dadas por la solución de la ecuación (18):

$$x = \frac{-D \pm \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \tag{23}$$

Por lo tanto, los vértices N y P de la hipérbola de eje focal horizontal tiene como coordenadas:

$$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Al ser la curva simétrica con respecto al eje focal y al eje conjugado, entonces el centro de la hipérbola se encuentra localizado en el punto de intersección de estos dos ejes. Como se mencionó anteriormente, la ordenada del centro y_c es la misma de los vértices, por encontrarse estos puntos sobre el eje focal; y la abscisa, por las condiciones de simetría, está determinada por el punto medio del segmento formado por los dos vértices. Es decir, la expresión:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{25}$$

representa la ecuación para la abscisa del punto medio de un segmento, donde x_1 y x_2 son las abscisas de los vértices.

Al sustituir las ecuaciones (23) y (24) en la ecuación (25) se obtiene:

$$x_c = \frac{\dfrac{-D+\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A} + \dfrac{-D-\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}}{2} = -\frac{D}{2A}$$

asi que, las coordenadas del centro de la hipérbola son:

$$\left(x_c, y_c\right) = (h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Ahora, es necesario conocer la longitud $2a$ entre los vértices, el intercepto b de la curva con el eje conjugado y la longitud $2c$ entre los focos para determinar las coordenadas de estos últimos y las ecuaciones de las asíntotas, puesto que están definidas respectivamente como:

$$\left(h \pm c, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$$

la longitud $2a$ puede obtenerse como la diferencia entre las abscisas de los vértices, así:

$$|x_2 - x_1| = 2a \tag{26}$$

Se emplea el valor absoluto, puesto que se están calculando distancias. Al sustituir las ecuaciones (23) y (24) en la ecuación (26) se tiene:

$$\left|\frac{-D-\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A} - \frac{-D+\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}\right| = 2a$$

o bien,

$$a = \left| \frac{\sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \right| \tag{27}$$

Como la intersección b de la curva con el eje conjugado es imaginaria, se recurre al siguiente análisis para determinar su valor:

En la *figura 7.12*, el punto Q con coordenadas $(h+a, k+b)$ sobre la asíntota no pertenece a la curva, por tanto, para determinar el valor de b se considerará un punto $P\left(x_3, y_3\right)$ sobre la curva, con $y_3 = k + b$, y se procederá a partir de la ecuación canónica para hipérbolas de eje focal horizontal, esto es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{\left(y-k\right)^2}{b^2} = 1 \tag{28}$$

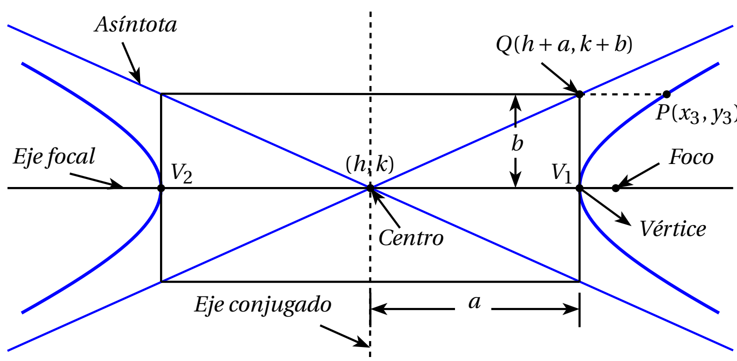


Figura 7.12: Construcción para determinar b en hipérbola con eje focal horizontal.

Reemplazando las coordenadas de P en la ecuación (28) se obtiene:

$$\frac{(x_3-h)^2}{a^2} - \frac{(k+b-k)^2}{b^2} = 1$$

de donde,

$$x_3^2 - 2hx_3 + \left(h^2 - 2a^2\right) = 0$$

y resolviendo para x_3 se llega a

$$x_3 = h \pm a\sqrt{2} \tag{29}$$

Como $y = k + b$ se tiene que:

$$b = \left|y - k\right| \tag{30}$$

Luego, para obtener el valor de b se hace necesario, hallar el valor de y_3, reeplazando la ecuación (29) en la ecuación (1), con $B = 0$.

$$A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + Cy_3^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + Ey_3 + F = 0$$

Resolviendo para y_3 en la fórmula general, tenemos:

$$y_3 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C} \tag{31}$$

Después de obtenida y_3, ya es posible hallar el valor de b a partir de la ecuación (30).

$$b = \left| \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C} - \left(-\frac{E}{2C}\right) \right|$$

asi que,

$$b = \left| \frac{\sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C} \right| \tag{32}$$

Con los valores de a y b se determinan las coordenadas de los focos $(h \pm c, k)$. Debido a que los focos no son puntos sobre la hipérbola, entonces se procede a obtenerlos geométricamente utilizando la relación pitagórica:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

7.4.2. Hipérbolas de eje focal vertical

Si se cumple

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A} > 0$$

Entonces, tenemos una hipérbola de eje focal vertical (Figura 7.13).

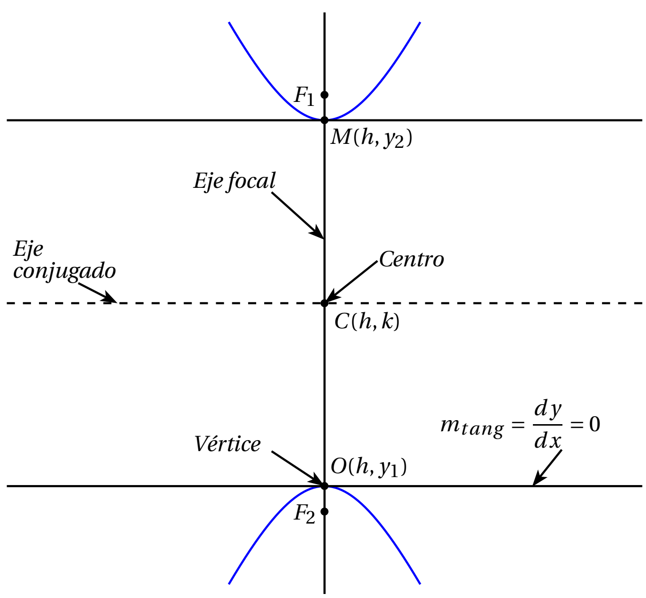


Figura 7.13: Hipérbola de eje focal vertical.

Con la expresión (20), podemos obtener las abscisas de los vértices. Puesto que ellos están localizados sobre el eje focal, entonces dicha expresión también representa la ecuación de este eje y la abscisa de los otros elementos de la hipérbola que se encuentran en el eje focal. Al estar los vértices sobre la curva, las ordenadas de estos puntos están dadas por la solución de la ecuación

(21):

$$y_1 = \frac{-E + \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \tag{33}$$

$$y_2 = \frac{-E - \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \tag{34}$$

De esta manera, los vértices tienen como coordenadas

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$$

Al igual que la hipérbola de eje horizontal, esta curva es simétrica con respecto al eje focal y al eje conjugado, entonces el centro de la hipérbola se encuentra localizado en el punto de intersección de estos dos ejes. La abscisa del centro x_c es la misma de los vértices, por encontrarse estos puntos sobre el eje focal, y la ordenada, por las condiciones de simetría, está determinada por el punto medio del segmento formado por los dos vértices. Es decir, la expresión:

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{35}$$

representa la ecuación para la ordenada del punto medio de un segmento, donde y_1 y y_2 son las ordenadas de los vértices. Al sustituir las ecuaciones (33) y (34) en la ecuación (35) obtenemos:

$$y_c = \frac{\dfrac{-E + \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} + \dfrac{-E - \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}}{2} = \frac{-E}{2C}$$

Así que, las coordenadas del centro de la hipérbola están definidas como:

$$\left(x_c, y_c\right) = (h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Ahora se quiere conocer la longitud $2a$ entre los vértices, el intercepto b de la curva con el eje conjugado y la longitud $2c$ entre los focos para determinar las coordenadas de estos últimos y las ecuaciones de las asíntotas, puesto que están definidas respectivamente como:

$$\left(-\frac{D}{2A}, k \pm c\right)$$

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$$

La longitud $2a$ se puede obtener como la diferencia entre las ordenadas de los vértices, así:

$$\left|y_2 - y_1\right| = 2a \tag{36}$$

Al sustituir las ecuaciones (33) y (34) en (36) se obtiene:

$$\left|\frac{-E - \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} - \frac{-E + \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right| = 2a$$

de donde:

$$a = \left| \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \right| \tag{37}$$

Como la intersección b de la curva con el eje conjugado es imaginaria, para determinar este valor se recurrirá a un análisis similar al desarrollado para la hipérbola de eje focal horizontal.

En la *figura 7.14*, el punto Q con coordenadas $(h+b, k+a)$ sobre la asíntota no pertenece a la curva, por tanto, para determinar el valor de b se considerará un punto $P\left(x_3, y_3\right)$ sobre la curva, con $x_3 = h+b$, y se procederá a partir de la ecuación canónica para hipérbolas de eje focal vertical:

$$\frac{\left(y-k\right)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{38}$$

Reemplazando las coordenadas de P en la ecuación (38) se tiene:

$$\frac{\left(y_3-k\right)^2}{a^2} - \frac{(h+b-h)^2}{b^2} = 1$$

o bien,

$$\frac{y_3^2 - 2ky_3 + k^2}{a^2} - \frac{b^2}{b^2} = 1$$

asi que,

$$y_3^2 - 2ky_3 + \left(k^2 - 2a^2\right) = 0$$

y resolviendo para y_3 encontramos,

$$y_3 = \frac{-(-2k) \pm \sqrt{4k^2 - 4\left(k^2 - 2a^2\right)}}{2}$$

asi que,

$$y_3 = k \pm a\sqrt{2} \tag{39}$$

Como $x_3 = h+b$, entonces:

$$b = |x_3 - h| \tag{40}$$

De esta forma , para obtener el valor de y se hace necesario hallar el valor de x_3, reemplazando la ecuación (39) en la ecuación (1), con $B = 0$, así:

$$Ax_3^2 + C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + Dx_3 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F = 0$$

Resolviendo para x_3 por la fórmula general se obtiene:

$$x_3 = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A} \tag{41}$$

Obtenida x_3, ya es posible obtener el valor de b a partir de la ecuación (40),

$$b = \left| \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A} - \left(-\frac{D}{2A}\right) \right|$$

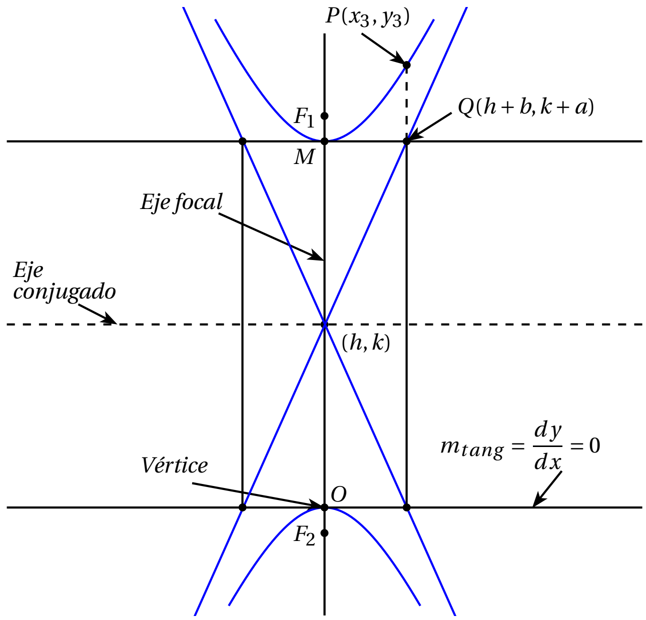


Figura 7.14: Ecuaciones de la hipérbola.

$$b = \left| \frac{\sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A} \right| \tag{42}$$

Con los valores de a y b se determinan las coordenadas de los focos $(h, k \pm c)$. Debido a que los focos no son puntos sobre la hipérbola entonces se procede a obtenerlos geométricamente utilizando la relación pitagórica:

$$c = a^2 + b^2$$

Ejemplo 14

La ecuación general $x^2 - 5y^2 + 8x - 20y = 16$, representa una hipérbola. Determinar las coordenadas del centro, los focos, ecuación del eje focal, los vértices y la ecuación de las asíntotas.

Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A = 1$, $B = 0$, $C = -5$, $D = 8$, $E = -20$, $F = -16$. De acuerdo con esto, se concluye que la ecuación dada representa una hipérbola con traslación de ejes.

Si la hipérbola es de eje focal horizontal, se debe cumplir:

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C} > 0$$

Reemplazando los valores de los coeficientes en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{1(-20)^2 - 4(1)(-5)(-16) + (-5)(8)^2}{-5} = 48$$

Como el discriminante es mayor que cero, se confirma que el eje focal de la hipérbola es horizontal, y por ello utilizaremos las expresiones presentadas en la *tabla 7.1*, para hipérbolas de eje focal horizontal.

Iniciamos hallando las coordenadas del centro:

$$(h,k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right) = \left(-\frac{8}{2}, \frac{20}{-10}\right) = (-4, -2)$$

Las coordenadas de los vértices se obtienen reemplazando los coeficientes en la siguiente ecuación

$$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right) =$$

$$= \left(\frac{-8 \pm \sqrt{\dfrac{(1)(-20)^2-4(1)(-5)(-16)+(-5)(8)^2}{-5}}}{2(1)}, -\frac{-20}{2(-5)}\right) = \left(-4 \pm \sqrt{12}, -2\right)$$

y se tiene,

$$\left(-4+\sqrt{12}, -2\right) \quad \text{y} \quad \left(-4-\sqrt{12}, -2\right)$$

A continuación, hallamos el valor de a y b con las expresiones correspondientes, para luego determinar el valor de c.

El valor de a está dado por:

$$a = \left|\frac{\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}\right| = \left|\frac{\sqrt{\dfrac{400-320-320}{-5}}}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{48} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

El valor de b está dado por:

$$b = \left|\frac{\sqrt{E^2-4C\left[A\left(h\pm a\sqrt{2}\right)^2+D\left(h\pm a\sqrt{2}\right)+F\right]}}{2C}\right|$$

Reemplazando coeficientes se tiene,

$$b = \left|\frac{\sqrt{(-20)^2-4(-5)\left[(1)\left((-4)\pm 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^2+8\left((-4)\pm 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)+(-16)\right]}}{2(-5)}\right|$$

$$b = \left|\frac{\sqrt{400+20(-8)}}{-10}\right| = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

El valor de c está dado por la relación pitagórica $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$$c = \sqrt{12+\frac{12}{5}} = \sqrt{\frac{6(12)}{5}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

Así pues, los focos tienen como coordenadas

$$\left(h \pm c, -\frac{E}{2C}\right) = \left(-4 \pm \frac{6\sqrt{10}}{5}, -\frac{-20}{2(-5)}\right)$$

$$\left(-4+\frac{6\sqrt{10}}{5},-2\right) \quad \text{y} \quad \left(-4-\frac{6\sqrt{10}}{5},-2\right)$$

Finalmente, las ecuaciones de las asíntotas se obtienen reemplazando los valores de h, k, a y b en $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$,

$$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}(x+4)-2$$

obteniendo las ecuaciones de las asíntotas:

$$y=\frac{\sqrt{5}x+4\sqrt{5}-10}{5} \quad \text{y} \quad y=-\frac{\sqrt{5}x-4\sqrt{5}-10}{5}$$

Ver figura 6.21, sección 6.2.3.

Ejemplo 15

La ecuación general $x^2-7y^2-10x-42y+11=0$, representa una hipérbola. Determinar las coordenadas del centro, los focos, ecuación del eje focal, los vértices y la ecuación de las asíntotas.

Solución: Comparando con la ecuación general de las secciones cónicas, se tiene que $A=1$, $B=0$, $C=-7$, $D=-10$, $E=-42$, $F=11$. De acuerdo con esto, se concluye que la ecuación dada representa una hipérbola con traslación de ejes.

Si la hipérbola es de eje focal vertical, se debe cumplir:

$$\frac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}>0$$

Reemplazando los valores de los coeficientes en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{1(-42)^2-4(1)(-7)(11)+(-7)(-10)^2}{1}=1372$$

Como el discriminante es mayor que cero, se confirma que el eje focal de la hipérbola es vertical, y por ello utilizaremos las expresiones presentadas en la *tabla 7.1*, para hipérbolas de eje focal vertical.

Iniciamos hallando las coordenadas del centro:

$$(h,k)=\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)=\left(\frac{10}{2},\frac{42}{-14}\right)=(5,-3)$$

Las coordenadas de los vértices se obtienen reemplazando los coeficientes en la siguiente ecuación

$$\left(-\frac{D}{2A},\frac{-E\pm\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right)=$$

$$=\left(-\frac{-10}{2},\frac{42\pm\sqrt{\dfrac{(-42)^2-4(-7)(11)+(-7)(-10)^2}{1}}}{2(-7)}\right)$$

y se tiene,

$$\left(5,-3-\sqrt{7}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(5,-3+\sqrt{7}\right)$$

A continuación, hallamos el valor de a y b con las expresiones correspondientes, para luego determinar el valor de c.

El valor de a está dado por:

$$a = \left|\frac{\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right| = \left|\frac{\sqrt{1372}}{-14}\right| = \left|\frac{14\sqrt{7}}{-14}\right| = \sqrt{7}$$

El valor de b está dado por:

$$b = \left|\frac{\sqrt{D^2-4A\left[C\left(k\pm a\sqrt{2}\right)^2+E\left(k\pm a\sqrt{2}\right)+F\right]}}{2A}\right|$$

Reemplazando coeficientes se tiene,

$$b = \left|\frac{\sqrt{(-10)^2-4\left[(-7)\left((-3)\pm\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\right)^2+(-42)\left((-3)\pm\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\right)+11\right]}}{2}\right|$$

$$b = \left|\frac{\sqrt{196}}{2}\right| = \left|\frac{14}{2}\right| = 7$$

El valor de c está dado por la relación pitagórica $c=\sqrt{a^2+b^2}$

$$c = \sqrt{7+49} = 2\sqrt{14}$$

Así pues, los focos tienen como coordenadas

$$\left(-\frac{D}{2A}, k\pm c\right) = \left(-\frac{-10}{2}, (-3)\pm 2\sqrt{14}\right)$$

$$\left(5,-3+2\sqrt{14}\right) \quad \text{y} \quad \left(5,-3-2\sqrt{14}\right)$$

Finalmente, las ecuaciones de las asíntotas se obtienen reemplazando los valores de h, k, a y b en $y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$,

$$y = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}(x-5)-3$$

obteniendo las ecuaciones de las asíntotas:

$$\sqrt{7}x-7y-5\sqrt{7}-21=0 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{7}x+7y-5\sqrt{7}+21=0$$

Ver figura 6.22, sección 6.2.3.

En la *tabla 7.1* y la *tabla 7.2* se resumen los resultados obtenidos para cada una de las secciones cónicas analizadas.

ELEMENTO	EXPRESIONES GENERALES	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
Ecuación general	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	
	PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN (h,k)	
Orientación del eje focal	$Si: \quad A = 0 \quad \text{y} \quad C \neq 0$	$Si: \quad C = 0 \quad \text{y} \quad A \neq 0$
Coordenadas de los vértices	$\left(\frac{E^2 - 4CF}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$
Coordenadas del foco	$\left(\frac{E^2 - 4CF - D^2}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF - E^2}{4AE}\right)$
Ecuación de la directriz	$x = \frac{E^2 - 4CF + D^2}{4CD}$	$y = \frac{D^2 - 4AF + E^2}{4AE}$
Ecuación del eje	$y = -\frac{E}{2C}$	$x = -\frac{D}{2A}$
	ELIPSES CON CENTRO EN (h,k)	
Coordenadas del centro	$(h,k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	
Coordenadas de los vértices	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$	$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$
Distancia entre vértices	$d_{OM} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{C}$	$d_{NP} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{A}$
Orientación del eje focal	$Si: \quad d_{OM} < d_{NP}$	$Si: \quad d_{OM} > d_{NP}$
Coordenadas de los focos	$\left(\frac{\pm\sqrt{(C-A)(AE^2-4ACF+CD^2)} - CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{\pm\sqrt{(A-C)(AE^2-4ACF+CD^2)} - AE}{2AC}\right)$
Ecuación del eje	$y = -\frac{E}{2C}$	$x = -\frac{D}{2A}$

Tabla 7.1: Coordenadas y ecuaciones para los elementos de la parábola y la elipse.

ELEMENTO	EXPRESIONES GENERALES	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
HIPÉRBOLAS CON CENTRO EN (h,k)		
Orientación del eje focal	$Si: \dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}>0$	$Si: \dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}>0$
Coordenadas del centro	$(h,k)=\left(-\dfrac{D}{2A},-\dfrac{E}{2C}\right)$	
Coordenadas de los vértices	$\left(\dfrac{-D\pm\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A},-\dfrac{E}{2C}\right)$	$\left(-\dfrac{D}{2A},\dfrac{-E\pm\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right)$
a	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{C}}}{2A}\right\rvert$	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{\dfrac{AE^2-4ACF+CD^2}{A}}}{2C}\right\rvert$
b	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{E^2-4C\left[A(h\pm a\sqrt{2})^2+D(h\pm a\sqrt{2})+F\right]}}{2C}\right\rvert$	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{D^2-4A\left[C(k\pm a\sqrt{2})^2+E(k\pm a\sqrt{2})+F\right]}}{2A}\right\rvert$
c	$\sqrt{a^2+b^2}$	
Coordenadas de los focos	$\left(h\pm c,-\dfrac{E}{2C}\right)$	$\left(-\dfrac{D}{2A},k\pm c\right)$
Asíntotas	$y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$	$y-k=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

Tabla 7.2: Coordenadas y ecuaciones para los elementos de la hipérbola.

CAPÍTULO 8

EXCENTRICIDAD DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Otra propiedad característica de las secciones cónicas se refiere a un concepto llamado *excentricidad*. Una sección cónica puede definirse como una curva descrita por un punto que se mueve en un plano, de manera que la razón de sus distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante. Esta razón constante se llama *excentricidad* de la curva y se designa por e. La curva es una *elipse* si $0 < e < 1$, una *parábola* si $e = 1$, y una *hipérbola* si $e > 1$. El punto fijo se llama *foco* y la recta fija se llama *directriz*.

Adoptaremos esta definición, como base de nuestro estudio de las cónicas, ya que permite tratar simultáneamente los tres tipos de cónicas. En esta discusión se sobreentiende que todos los puntos y rectas están en el mismo plano, (*Figura 8.1*).

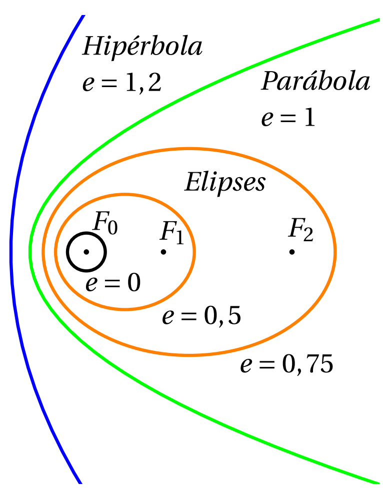


Figura 8.1: Excentricidad de las secciones cónicas.

De acuerdo con lo anterior, presentamos la siguiente definición general de cónica.

Definición. Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama ***cónica*** al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el mismo plano de l y F, de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva. La recta fija l se llama ***directriz***, el punto fijo F es el ***foco***, y la constante positiva, a la que designaremos por e, ***excentricidad***. Cuando $e = 1$, la definición anterior es de la parábola. Sin ninguna pérdida de generalidad, podemos tomar el eje Y como directriz del punto $F(p,0)$, con $p \neq 0$. Ver *Figura 8.2*.

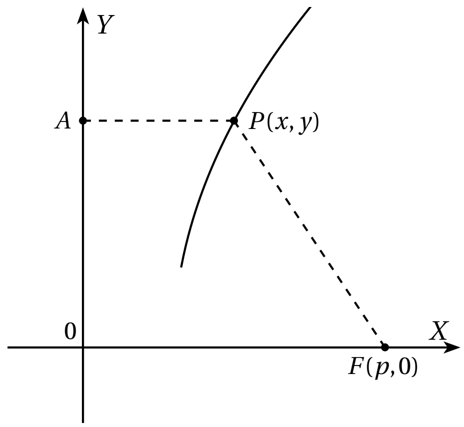


Figura 8.2: Definición general de cónica.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Desde P tracemos el segmento $\overline{PA}$ perpendicular al eje Y. Entonces, por la definición anterior, el punto P debe satisfacer la condición geométrica,

$$\frac{\left|\overline{PF}\right|}{\left|\overline{PA}\right|} = e, \tag{1}$$

lo cual puede expresarse analiticamente por la ecuación

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|\,x\,|} = e$$

esto equivale a

$$(1-e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \tag{2}$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) es un punto que satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre el lugar geométrico. De acuerdo con esto, la ecuación (2) es la ecuación buscada. Por lo anteriormente estudiado, reconocemos a primera vista que el lugar geométrico de la ecuación (2) es una cónica, pero su naturaleza depende, evidentemente, del valor de la excentricidad e. Y se presentan dos casos generales por considerar: I. $e = 1$; II. $e \neq 1$.

I. $e = 1$. En este caso, la ecuación (2) toma la forma

$$-2px + y^2 + p^2 = 0$$

esta ecuación puede escribirse

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

que representa una parábola cuyo vértice es el punto $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y cuyo eje coincide con el eje X.

II. $e \neq 1$. En este caso, $1 - e^2 \neq 0$. Dividiendo la ecuación (2) por $1 - e^2$, obtenemos

$$x^2 - \frac{2px}{1-e^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{p^2}{1-e^2}$$

Completando el cuadrado en x podemos, reducir esta ecuación a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una cónica centrada en el origen,

$$\frac{(x-\frac{p}{1-e^2})^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}}=1 \tag{3}$$

El hecho de que la ecuación (3) represente una elipse o una hipérbola depende del valor de e. Tenemos entonces dos casos particulares:

$$i)\ e<1 \qquad \text{y} \qquad ii)\ e>1$$

$i)$ $e<1$: En este caso, $1-e^2>0$, y ambos denominadores en el primer miembro de (3) son positivos. Por tanto, El lugar geométrico de la ecuación (3) es una elipse.

Vamos ahora a demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico al valor previamentre definido de $\frac{c}{a}$.

En efecto,

$$a^2=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \quad \text{y} \quad b^2=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} c^2=a^2-b^2&=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}-\frac{p^2e^2}{1-e^2}\\ &=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}-\frac{p^2e^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2}=\frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}\end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}\cdot\frac{(1-e^2)^2}{p^2e^2}=e^2,$$

de donde,

$$\frac{c}{a}=e$$

$ii)$ $e>1$: En este caso, $1-e^2<0$. Por tanto, con el fin de tener ambos denominadores positivos, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{(x-\frac{p}{1-e^2})^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}-\frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}}=1 \tag{4}$$

Evidentemente, el lugar geométrico de la ecuación (4) es una hipérbola. Análogamente a como hicimos para la elipse, podemos demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico con su valor previamente definido de $\frac{c}{a}$. Con lo cual podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 1. Una cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que su excentricidad sea igual, menor, o mayor que la unidad.

	Parábola	Elipse	Hipérbola
Indicador $I = B^2 - 4AC$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
Excentricidad e	$e = 1$	$e < 1$	$e > 1$

Tabla 8.1: Indicador de excentricidad.

Observación: Se debe tener en cuenta el paralelismo entre los valores del indicador $I = B^2 - 4AC$ y de la excentricidad e de las diversas cónicas, (*Tabla 8.1*).

Teorema 2. Para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cada una de excentricidad e, los focos $(ae, 0)$ y $(-ae, 0)$ tienen como directrices correspondientes las rectas cuyas ecuaciones son $x = \frac{a}{e}$ y $x = -\frac{a}{e}$ respectivamente.

Demostración: Determinaremos las ecuaciones de las directrices de las cónicas centrales. Estas cónicas tienen cada una dos focos y, por tanto, dos directrices, correspondiendo una a cada foco.

Por la simetría de las cónicas, siguiendo la ecuación (2), diremos que el eje focal es perpendicular a la directriz. Por tanto, si tomamos la ecuación de la elipse en su forma canónica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

las ecuaciones de sus directrices son de la forma $x = k$ y $x = l$, correspondiendo a los focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Ver *Figura 8.3*. Para el foco $(c, 0)$ y su directriz correspondiente $x = k$, tenemos, de la definición general de cónicas,

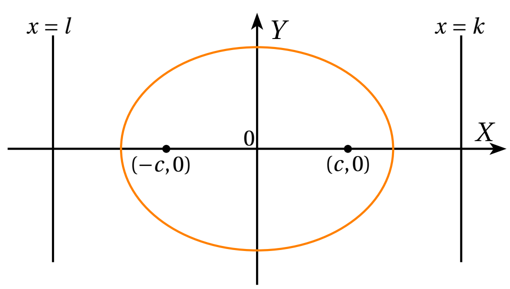


Figura 8.3: Directrices de una elipse.

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-k|} = e \tag{6}$$

Simplificación y trasponiendo términos, la ecuación (6) se reduce a la forma ordinaria

$$\frac{\left(x + \frac{e^2k - c}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2(x-c)^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2(x-c)^2}{1-e^2}} \tag{7}$$

Como las ecuaciones (5) y (7) representan un mismo lugar geométrico, una elipse cuyo centro está en el origen, de la ecuación (7) se sigue que $e^2k - c = 0$ de donde,

$$k = \frac{c}{e^2} = \frac{ae}{2} = \frac{a}{e}$$

Por tanto, para el foco $(c,0)$ de la elipse (5) la ecuación de la directriz es $x=\dfrac{a}{e}$. Análogamente, para el foco $(-c,0)$ y la directriz correspondiente $x=l$ hallamos $x=-\dfrac{a}{e}$.

Exactamente por el mismo procedimiento, hallamos, que los focos $(c,0)$ y $(-c,0)$ de la hipérbola, $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, tienen por directrices correspondientes a las rectas cuyas ecuaciones son, respectivamente: $x=\dfrac{a}{e}$ y $x=-\dfrac{a}{e}$.

Ejemplo 16

Hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes a la cónica cuya ecuacion es $5x^2+9y^2=45$.

Solución. Escribiendo la ecuación en la forma ordinaria,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,$$

veamos que $a^2=9$ y $b^2=5$. Por la relación pitagórica $a^2=b^2+c^2$ tenemos $c^2=4$, y la excentricidad $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$. Entonces, por el **teorema 2**, la ecuación de la directriz correspondiente al foco $(2,0)$ es $x=\dfrac{a}{e}$, es decir, $2x-9=0$. Y la ecuación de la directriz correspondiente al otro foco $(-2,0)$, es $x=-\dfrac{c}{a}$, es decir, $2x+9=0$. Ver *Figura 8.4*.

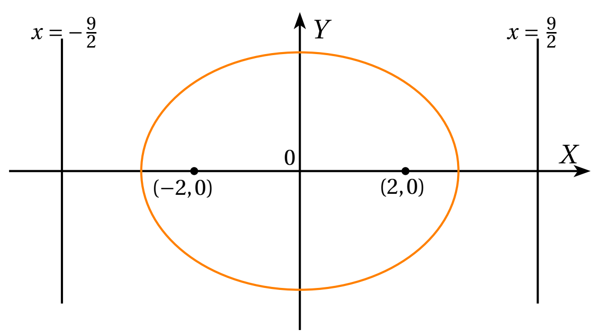


Figura 8.4: Excentricidad y directrices de una elipse.

Ejemplo 17

Hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes a la cónica cuya ecuacion es $16x^2-9y^2=144$.
Solución. Escribiendo la ecuación en la forma ordinaria,

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,$$

veamos que $a^2=9$ y $b^2=16$. Por la relación pitagórica $c^2=a^2+b^2$ tenemos $c^2=25$, y la excentricidad $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$. Entonces, por el **teorema 2**, la ecuación de la directriz correspondiente al foco $(5,0)$ es $x=\dfrac{a}{e}$, es decir, $5x-9=0$. Y la ecuación de la directriz correspondiente al otro foco $(-5,0)$, es $x=-\dfrac{c}{a}$, es decir, $5x+9=0$. Ver *Figura 8.5*.

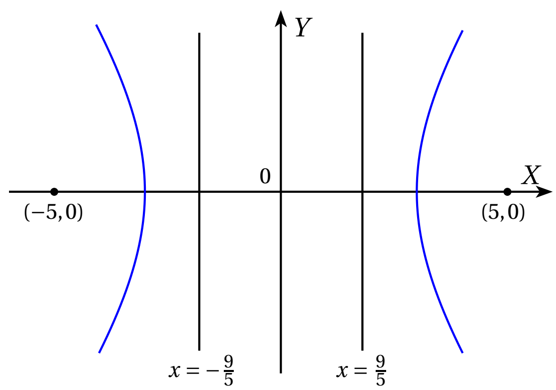


Figura 8.5: Excentricidad y directrices de una hipérbola.

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS PROPUESTOS

Distancia entre dos puntos

1) Hállese la distancia entre el punto $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y la recta $Ax + By = C$.

2) En el triángulo cuyos vértices son $\left(x_1, y_1\right)$, $\left(x_2, y_2\right)$, $\left(x_3, y_3\right)$, demostrar que las coordenadas del baricentro son
$$\left[\frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right), \frac{1}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right].$$

Secciones cónicas

3) Sea P un punto exterior al círculo formado por la circunferencia C. Sea PT la tangente a C en T, y PN la recta que partiendo de P pasa por el centro de C y corta a C en M y N. Pruébese que $PM \cdot PN = (PT)^2$.

4) Como se sabe, todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. Pruébese el recíproco, es decir, que si para todo punto $P(x, y)$ de una curva C que une O y A el ángulo OPA es recto, entonces la curva es un círculo o un semicírculo de diámetro $\overline{OA}$.

5) Escribir la ecuación del arco parabólico de base b y altura h. Dibujar su gráfica y probar que el área de este arco parabólico de altura h y base b es
$$\frac{2}{3} b \cdot h.$$

6) *Propiedad reflectora de las parábolas*. Sabemos por las leyes de la óptica que cuando un rayo de luz se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Si se considera el espejo obtenido al girar una parábola alrededor de su eje y planteando la superficie resultante, pruébese que un rayo de luz procedente del foco de la parábola se refleja paralelamente al eje.

7) *Espejo de un telescopio*. El espejo de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide (finito) con un diámetro de 18 pulgadas y profundidad de 3 pulgadas. ¿A qué distancia del centro del espejo se concentra la luz?

8) *Disco receptor*. Un disco receptor de sonido usado en eventos deportivos al aire libre, se construye en forma de paraboloide, con su foco a 5 pulgadas del vértice. Determinar el ancho del disco si tiene 2 pies de profundidad.

9) Determinar los valores de las constantes D, E y F para que la elipse

$$4x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sea tangente al eje x en el origen y pase por el punto $(-1,2)$.

10) *Propiedad reflectora de las elipses.* Un elipsoide es engentrado por la rotación de una elipse alrededor de su eje mayor. Su superficie interior se recubre de plata para obtener un espejo. Pruébese que un rayo de luz procedente de uno de los focos se refleja en el otro foco.

11) *Dimensiones de un arco.* El arco de un puente es semielíptico con el eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies de longitud y su parte más alta 10 pies por arriba del camino horizontal. Encuentra la altura del arco a 6 pies por arriba del centro de la base.

12) Pruébese que la ecuación

$$\frac{x^2}{9-C} + \frac{y^2}{5-C} = 1$$

representa *a*) una elipse, si C es una constante cualquiera menor que 5, *b*) una hipérbola si C es una constante comprendida entre 5 y 9, y *c*) no tiene gráfica cuando C es mayor que 9. Muestre además, que cada elipse de *a*) y cada hipérbola de *b*) tienen como focos los dos puntos $(\pm 2,0)$, independientemente del valor de C.

13) Se envía simultámente una señal de radio desde las torres A y B, situadas a varios cientos de millas una de otra en la costa de Santa Martha. Un barco en altamar recibe la señal de A 1400 microsegundos (μs) antes que la de B. Si las señales de radio viajan a 980 pies por microsegundo. ¿Qué puede decirse acerca de la localización aproximada del barco respecto a las dos torres?

14) Aplique el método de la derivada de una curva para clasificar las siguientes ecuaciones cuadráticas y obtener los elementos de cada una de ellas.

a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y = 41$ *b*) $3x - 2y^2 - 4y = -7$

c) $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$ *d*) $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$

e) $4y^2 - 8y + 3x = 2$ *f*) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

15) *Espejo de una linterna.* El espejo de una linterna tiene la forma de un paraboloide de diámetro de 4 pulgadas y de profundidad $\frac{3}{4}$ de pulgada. ¿Donde debe colocarse la bombilla de modo que los rayos de luz emitida sean paralelos al eje del paraboloide?

16) Escribir la ecuación de la elipse de excentricidad $x = \frac{2}{3}$, si la recta $x = 9$ es una directriz y el foco correspondiente está en $(4,0)$.

17) *Órbita elíptica.*

a) Escribase la ecuación de la órbita del cometa Halley en un sistema coordenado en el cual el Sol se halla en el origen y el otro foco está en el eje X positivo, cuya escala se da en unidades astronómicas ($U.A.$).

b) ¿Cuánto se aproxima al Sol el cometa en unidades astronómicas? ¿y en millas?

c) ¿Cuánto se aleja del Sol, en unidades astronómicas? ¿y en millas?

18) Un foco de una hipérbola está localizado en el punto $(1,-3)$, y la directriz correspondiente es la recta $y=2$. Escribir la ecuación de la hipérbola si su excentricidad es $\frac{3}{2}$.

19) *La órbita de la luna.* La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los focos. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768800 kilómetros y 767640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

20) *Un sistema hiperbólico de detección.* Dos micrófonos, a una milla de distancia entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde fue la explosión? si el sonido viaja a 1100 pies por segundo.

21) *Localización de un barco.* La estación guardacostas A está a 200 millas directamente al este de otra estación B. Un barco navega a 50 millas al norte de la línea que une A y B, en forma paralela a ésta. Desde A y B se envían señales de radio a una velocidad de 980 $pies/\mu s$. Si, a la 1:00 p.m., la señal desde B llega al barco 400 microsegundos (μs) después que la señal desde A, localiza la posición del barco en ese instante.

CAPÍTULO 10

CONCLUSIONES

- Al realizar este trabajo podemos resaltar la importancia del cálculo diferencial como una alternativa para deducir analíticamente las ecuaciones de las secciones cónicas.

- Las secciones cónicas son de gran aplicación en situaciones prácticas de nuestra vida y en general de las ciencias. Tal es el caso del estudio de las órbitas elípticas para explicar el movimiento planetario; del diseño de engranes elípticos cuando se requiere de una razón de movimiento variable; del diseño de bóvedas susurrantes a partir de la propiedad de reflexión de las elipses; del sistema de navegación *LORAN* que permite a un avión o a un barco determinar su posición mediante señales de radio a partir de la propiedad fundamental de las hipérbolas; finalmente, es de resaltar la propiedad reflactante de las parábolas en el diseño de dispositivos solares, fanales de automóviles, antenas parabólicas, lentes telescópicas, entre otros. Todo esto, es de gran utilidad en Física, Astronomía, Arquitectura, Óptica y Geografía, entre otras disciplinas del conocimiento.

- Durante el desarrollo del presente trabajo de grado, logramos adquirir destrezas en el manejo del procesador de textos científicos LaTeX, y en la elaboración de gráficas para representar las funciones analizadas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] APOLLONIUS OF PERGA. *A Treatise on Conic Sections*. Cambridge Univ. Press, 1896. Reedición Barnes and Noble, 1961.

[2] GEORGE B. THOMAS. *Cálculo varias variables Vol. I, II*. Editorial Pearson Educación. México 2006.

[3] CHARLES H. LEHMANN. *Geometría analítica*. Editorial Limusa S.A. 1989.

[4] LOUIS LEITHOLD. *El cálculo*. Editorial Oxford University Press. 1988.

[5] ROLAND E. LARSON, ROBERT P. HOSTETLER. *Trigonometría y geometría analítica*. Editorial MacGraw Hill. 1989.

[6] GONZÁLEZ, PANIAGUA, PATIÑO. *Secciones cónicas una mirada desde la derivación implícita*. Editorial I.T.M. Téxtos Académicos. Medellín, Colombia 2008.

[7] H. B. PHILLIPS. *Diferential equations*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México 1960.

[8] EARL W. SWOKOWSKY, JEFFERY A. COLE. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Editorial Thomson. México, D.F. 2006.

[9] MICHAEL SULLIVAN. *Geometría analítica*. Editorial Pearson, Prentice Hall. Cuarta edición.