



Universidad Surcolombiana

---

---

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

*Facultad de Educación*

Aplicaciones de las ecuaciones  
diferenciales y del análisis de  
Fourier para resolver la ecuación  
del calor

ELKIN BARREIRO ROCHA  
GUSTAVO ADOLFO CASTILLO VARGAS



Universidad Surcolombiana

---

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

*Facultad de Educación*

Aplicaciones de las ecuaciones  
diferenciales y del análisis de  
Fourier para resolver la ecuación  
del calor

Trabajo de grado

*para optar por el título de:*

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

*Por:*

ELKIN BARREIRO ROCHA

*Código 2006134739*

GUSTAVO ADOLFO CASTILLO VARGAS

*Código 2004100666*

*Asesor:*

DOCTOR MAURO MONTEALEGRE CARDENAS

Neiva (Huila)

Julio del 2011

*Nota de aceptación*

---

---

---

---

---

*Firma Asesor del Trabajo de Grado*

---

*Firma Segundo Lector*

---

*Firma Jefe de Programa*

*Neiva, 26 de Julio de 2011*

**APLICACIONES DE LAS ECUACIONES  
DIFERENCIALES Y DEL ANALISIS DE  
FOURIER PARA RESOLVER LA ECUACION  
DEL CALOR**

**Por:**

ELKIN BARREIRO ROCHA

*Código 2006134739*

GUSTAVO ADOLFO CASTILLO VARGAS

*Código 2004100666*

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
NEIVA (HUILA)  
2011

**APLICACIONES DE LAS ECUACIONES  
DIFERENCIALES Y DEL ANALISIS DE  
FOURIER PARA RESOLVER LA ECUACION  
DEL CALOR**

*Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de  
Licenciado en Matemáticas*

**Por:**

ELKIN BARREIRO ROCHA

*Código 2006134739*

GUSTAVO ADOLFO CASTILLO VARGAS

*Código 2004100666*

***Asesor:***

DOCTOR MAURO MONTEALEGRE CARDENAS

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
NEIVA (HUILA)  
2011

*“Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione.”* **John Von Neumann**

# Índice general

<b>1. Agradecimientos</b>	<b>8</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>3. Formulación y Descripción del Problema</b>	<b>10</b>
<b>4. Justificación</b>	<b>12</b>
<b>5. Objetivos</b>	<b>13</b>
5.1. Objetivo General . . . . .	13
5.2. Objetivos Específicos . . . . .	13
<b>6. Elementos Teóricos</b>	<b>14</b>
6.1. Introducción Histórica . . . . .	14
6.1.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier . . . . .	14
6.1.2. El Teorema de Fourier . . . . .	16
6.1.3. Aplicaciones del Teorema de Fourier . . . . .	18
6.2. Series de Fourier . . . . .	19
6.2.1. Ortogonalidad de las Funciones Seno y Coseno . . . . .	20
6.2.2. Evaluación de los Coeficientes de Fourier . . . . .	22
6.2.3. La Transformadas de Fourier . . . . .	25
6.2.4. Interpretación de la Transformada de Fourier . . . . .	26
6.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	28
6.3.1. Ecuación Auxiliar . . . . .	28
6.4. Teorema de la Divergencia de Gauss . . . . .	31

6.5. Teorema de Stokes . . . . .	33
<b>7. Solución de la Ecuación del Calor</b>	<b>35</b>
7.1. La Ecuación Lineal de la Conducción de Calor . . . . .	35
7.2. Conducción de Calor . . . . .	38
7.2.1. Conducción del calor en una barra infinita: . . . . .	42
7.2.2. Caso 3D de la ecuación del calor: . . . . .	48
<b>8. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>9. Bibliografía</b>	<b>54</b>
<b>10. Anexos</b>	<b>55</b>
10.1. Método de Diferencias Finitas . . . . .	55



# Dedicatoria

A nuestras respectivas familias; ya que sin su incondicional apoyo, no hubiese sido posible este importante logro en nuestras vidas.

# Capítulo 1

## Agradecimientos

Iniciamos esta carrera de pregrado con la seguridad de que algún día llegabamos a culminarla, y este momento que estamos cerca de lograr nuestro objetivo damos gracias a Dios y a nuestras familias por su apoyo durante nuestra estancia en la Universidad. También agradecemos la continua asesoría del profesor Mauro Montealegre Cárdenas, lo mismo que nuestro segundo lector profesor Mauricio Penagos, quien de manera desinteresada contribuyó de forma muy atenta a que este trabajo de grado tuviese la estructura que hoy presentamos.

Igualmente a los demás docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas que a lo largo de nuestra carrera hicieron su aporte para lograr esta meta: Ricardo Cedeño Tovar, Hernando Gutierrez Hoyos, Augusto Silva Silva, Martha Cecilia Mosquera Urrutia, quienes aportaron además de su valiosa experiencia, su grandioso conocimiento en esta hermosa profesión para enriquecer nuestras vidas, así como nuestro perfil profesional.

## Capítulo 2

# Introducción

Encontrarnos de frente con la historia del hombre, requiere tener en cuenta la evolución del conocimiento científico hasta el presente. Es decir, tomar las herramientas de dicho proceso es investigar sus pasos y sus pensamientos para tener en cuenta el por qué de sus quehaceres o sus proyecciones. Si definimos su primer paso en la tierra, además del lenguaje primitivo tendríamos en manos la matemática. El desarrollo de nuevas áreas de la matemática ha permitido que el mundo adquiriera una visión distinta de lo que solía ser hace unos cuantas décadas. De otro lado, el desarrollo tecnológico y la globalización han generado el nacimiento de nuevos conocimientos que están contribuyendo a entender los diarios acontecimientos en todos los campos cognitivos en los que el hombre se prepara para su formación académica y laboral, como la economía, la medicina, la administración, la biología, etc.

Indagar, sobre los distintos procesos presentes en el medio en que vivimos, y más aún sobre las distintas asignaturas vistas en el programa de Licenciatura en Matemáticas, es encontrarnos con la vocación que nos motivó a lograr este sueño de culminar esta carrera, encontrando empatía sobre temas afines en diferentes campos de las matemáticas en particular las ecuaciones diferenciales.

## Capítulo 3

# Formulación y Descripción del Problema

En el presente trabajo de grado nos proponemos reconocer las aplicaciones de la matemáticas en la vida real. Por esta razón, queremos analizar y mostrar una solución al problema del flujo de calor a partir de las ecuaciones diferenciales dejadas como legado por Jean Baptiste Joseph Fourier, proceso que llevaremos a cabo de la siguiente manera:

1. **Elementos Teóricos:** Historia de la ecuación reacción–difusión, y una breve biografía de Joseph Fourier, además de los fundamentos para desarrollar métodos que permitan inferir la solución de la ecuación del calor.
2. **Solución de la ecuación de calor:** Elementos de las ecuaciones diferenciales para resolver la ecuación reacción-difusión de forma estructurada.
3. **Otros métodos:** Se muestra como anexo, el método de diferencias finitas la solución de la ecuación de calor.

Las ecuaciones diferenciales desde su introducción en las matemáticas en 1.882 por Newton y Laplace, han sido aplicadas a distintos problemas. Como por ejemplo, la solución del ecuación del calor en una y dos dimensiones,

el problema de la cuerda y las membranas vibrantes, etc.

Por consiguiente, la idea central de este proyecto de grado, estará en reconocer los fundamentos valiosos de Fourier, además de otros aportes otorgados por grandes matemáticos como Gauss y Stokes, para aplicar métodos que permitan inferir la solución del flujo de la ecuación de calor.

## Capítulo 4

# Justificación

La razón principal de realizar este trabajo es aplicar nuestros conocimientos en Matemáticas, a la vez que mejorar nuestra dimensión humana, pues a partir de este trabajo de grado ponemos en evidencia lo aprendido en la Licenciatura a la vez que nos proyectamos para seguir con estudios posteriores. De otro lado para llevar a cabo este trabajo, ha sido definitivo el apoyo y acompañamiento incondicional de nuestro asesor, lo mismo que de nuestro segundo lector, que fue de forma muy constante y desinteresada, nos compartieron sus conocimientos y experiencia, para registrarla en este trabajo.

Aproximarnos de manera teórica a la deducción y al significado de la Ecuación Reacción–Difusión, es la premisa que nos ha exigido retomar los conceptos vistos en algunos cursos de la licenciatura en Matemáticas, y llevarlos a un nivel que sea consecuente con el objetivo de nuestro estudio. Es por ello, que hemos dedicado nuestra labor, a investigar diferentes métodos de solución, y favorecer a la elaboración de este trabajo de manera sistémica.

No obstante, el desarrollo de este trabajo, tiene como prioridad ser un acercamiento estructurado a nivel de pregrado, para que el lector interesado logre una aproximación que le permita distinguir los conceptos fundamentales referentes a la ecuación del calor.

## Capítulo 5

# Objetivos

### 5.1. Objetivo General

Resolver analíticamente la ecuación del calor utilizando las ecuaciones diferenciales y las series de Fourier e interpretar las soluciones obtenidas.

### 5.2. Objetivos Específicos

1. Describir y reconocer las características y variables fundamentales que están relacionadas con la ecuación Reacción–Difusión.
2. Poner en evidencia el uso de las ecuaciones diferenciales, al momento de modelar problemas reales, y resolverlas según el contexto al que se está teniendo en cuenta.
3. Reconocer y aplicar diferentes métodos para resolver la ecuación del calor, y analizar el significado de las soluciones.

## Capítulo 6

# Elementos Teóricos

### 6.1. Introducción Histórica

#### 6.1.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier

Fourier nació el 21 de marzo de 1768 en la ciudad de Auxerre en Borgoña, Francia, y falleció en París el 16 de Mayo de 1830. Hijo de un sastre, fue el noveno de doce hermanos y quedó huérfano a los 10 años. Empezó sus estudios en la escuela de Pallais, donde estudio latín y francés. Continúo en la *Ecole Royale Militaire de Auxerre*, allí mostro interés por la literatura y, en contra de su voluntad fue preparado para sacerdote. A los trece años no podía seguir ocultando su interés por las matemáticas, así, a los catorce años había completado el estudio de los seis volúmenes del Cours de Mathématique de Benzout y a los quince años recibía el primer premio por su estudio de Bossut's *Mechanique Général*. Aún así Fourier se encontraba desquiciado porque alcanzada la edad de 21 años aun no era famoso, pues pensaba que a esa edad Newton y Pascal ya habían adquirido títulos e inmortalidad.

En 1787 entró en la Abadía de St Benoit - Sur - Loire con la idea de hacerse sacerdote, aunque se debatía entre su amor por las matemáticas y sus ideas religiosas. Finalmente no tomó los votos y en 1789 dejó St Benoit. Al año siguiente entró como profesor en la *Ecole Royale Militaire de Auxerre*, donde había estudiado.



En 1793, al comienzo de la Revolución francesa, se involucró en la política, uniéndose al Comité Revolucionario local, entusiasmado con las ideas de libertad. En 1794 fue arrestado y llevado a prisión como consecuencia de sus acciones políticas. Afortunadamente, hubo cambios políticos que le dieron la libertad. Al final de este año se vinculó a la Escuela Normal Superior de París, en donde tuvo entre sus profesores a Joseph - Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre simon Laplace (1737-1813), a los que tenía en gran estima y admiración. Comenzó su investigación matemática y volvió a enseñar en la Escuela Politécnica, donde posteriormente, en 1797, ocuparía la cátedra de Análisis y Mecánica dejada por Lagrange.

Fourier quería ir al ejército pero, como sólo era hijo de un sastre, le previnieron de que no podía servir más que de cargador de cañones. Sin embargo los cambios originados por la Revolución Francesa le permitieron ser oficial de artillería. De esta manera aplicaría las matemáticas que era lo que realmente le interesaba. Su carrera estuvo muy ligada a la de Napoleón y llegó a ser su Oficial de Artillería (calculaba las trayectorias de los proyectiles). Le acompañó a Egipto en 1798 como consejero científico y fue gobernador de una parte de ese país (Bajo Egipto). Allí, también, fue secretario del instituto de Matemáticas de El Cairo, fundado por Napoleón, hasta su regreso a Francia en 1801.

Tras las victorias británicas y la capitulación de los franceses a mando del General Menou, en 1801, Fourier volvió a Francia, donde fue nombrado por Napoleón Prefecto del departamento de Isère entre 1802 y 1815 y empezó a ocuparse de lleno a la ciencia, en concreto con sus experimentos sobre la propagación del calor.

En 1808, y después de haber hecho importantes descubrimientos matemáticos, Napoleón le dio el título de Barón. Fourier sobrevivió a la caída del imperio francés y recibió nuevos honores, de los restaurados Borbones. En 1822 fue secretario adjunto de la Academia de Ciencias, donde conoció al naturalista

Cuvier (1769 - 1832) con quién compartió una gran amistad.

### 6.1.2. El Teorema de Fourier

Fourier se trasladó a París en 1816 y, en 1.882, publicó la “Teoría analítica del calor”, basándose, en parte, en La ley del enfriamiento de Newton. A partir de esta teoría desarrolló las “Series de Fourier” de notable importancia en el posterior avance del análisis matemático y con interesantes aplicaciones para la resolución de muchos problemas de física e ingeniería. El problema que más le interesaba era el del modo en que el calor fluía de un punto a otro a través de un objeto, por ende su descubrimiento, y formulación matemática de esas leyes.

En sus experimentos, Fourier producía un gradiente lineal de temperatura en un objeto y observaba lo que sucedía. Observó que la parte a menor temperatura se calentaba, mientras que la de mayor temperatura se enfriaba, y se preguntó . . . ¿Sí a partir del gradiente de que se obtiene esa distribución “suavizada” de la temperatura, de igual modo, partiendo de esa distribución “suavizada” se podrá obtener la original. . .

Recordando la aproximación de una función periódica mediante la suma de armónicos en una cuerda de Bernoulli (1700-1782), que decía: “cualquier movimiento, correspondiente a una curva inicial, no es más que una suma de armónicos periódicos sinusoidales, y la combinación tiene la frecuencia del armónico fundamental”, Fourier sugirió que el problema se podía resolver mediante un simple patrón sinusoidal que debería atenuarse gradualmente hasta que la temperatura fuera uniforme en todo el objeto. Fue así como formuló el llamado “Teorema de Fourier”. Según éste, cualquier oscilación periódica, esto es, cualquier variación que tarde o temprano se repite exactamente una y otra vez, por complicada que sea, se puede descomponer en series de movimientos ondulatorios simples y regulares (con diferentes amplitudes y frecuencias), la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se puede expresar como una serie matemática en la cual los términos en funciones trigonométricas, que pueden escribirse de la

forma:

$$x(t) = a_0 + 2(a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots)$$

O bien:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se obtienen mediante el siguiente cálculo de la integral:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_t x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_t x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Esta recreación de la señal constituye justamente las llamadas “Series de Fourier”.

En 1809 apareció en el Bulletin des Sciences una actualización sobre el tema de propagación del calor. Su autor era Poisson (1781-1840), amigo de Biot (1774-1862) y editor de la publicación. El artículo cita generosamente a Biot y crítica los hallazgos de Fourier, y cita lo siguiente: “El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos. Esto excluye cuestiones vagas y cálculos sin sentido: los elementos fundamentales son aquellos que se reproducen en todos los fenómenos naturales. El análisis matemático se halla tan extendido como la naturaleza misma”.

En 1810 el Instituto de Francia anunció el Grand Prix de Mathematiques, el tema: “La propagación del calor en cuerpos sólidos”. El jurado estaba constituido por Monge (1746-1818), Laplace y Lagrange, dos de sus principales detractores. Aunque Fourier ganó el premio y le reconocieron el trabajo analítico por las ecuaciones, le criticaron la utilización del método experimental, ya que, Fourier basó parte de su trabajo en estudios de

fenómenos físicos como el análisis vibratorio, etc, promulgados por científicos de poco agrado para ellos. Años más tarde, en 1829, el matemático alemán Dirichlet (1805-1859), estudiando las series trigonométricas, consiguió una demostración rigurosa de diversos teoremas de Fourier, demostrando de esta forma que sus ecuaciones eran acertadas y válidas.

Hacia el año de 1822, ampliando su teorema, completó su estudio sobre la teoría de matemática de la conducción de calor y lo publicó en su libro llamado “Teoría analítica del calor” (Theorie analytique de la chaleur). Estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor, resolviéndola mediante el uso de series infinitas de funciones trigonométricas. En esto introdujo la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocida como “Series de Fourier”. Esta teoría analítica del calor inspiró a Ohm (1787-1854) razonamientos análogos sobre el flujo eléctrico. En su libro, Fourier, dejó sentada la necesidad de utilizar un sistema de unidades prefijado para el uso de ecuaciones científicas, y el texto original fue incorporado a la biblioteca de las Memoires de l’Academie des Sciences hasta 1826, año en que Fourier fue electo secretario permanente.

### **6.1.3. Aplicaciones del Teorema de Fourier**

El teorema de Fourier tiene una multitud de aplicaciones en muchas áreas de la ciencia e ingeniería. Por ejemplo, en la física en el estudio del sonido, procesamientos de señales, óptica, propagación de las ondas, quantum físico, datos astronómicos, en matemáticas en la teoría de los números, la combinatoria, la teoría de la probabilidad, la estadística. El estudio matemático de tales fenómenos se denomina análisis armónico, otro tipo de aplicaciones más curiosos: cálculo de mareas, detección de fluctuaciones en los precios, análisis sismográfico, el análisis de sistemas lineales.

En medicina se aplica al estudio de la actividad bioeléctrica del sistema nervioso central, obtenida mediante el electroencefalograma, así como en la actividad eléctrica muscular o electromiograma.

Jean Baptiste Joseph Fourier es uno de los científicos conmemorados en la Torre Eiffel y un cráter de la Luna lleva su nombre. ¿Cómo murió? Sus desarrollos de funciones como series vienen de su principal obra, “Teoría Analítica del Calor” y fue, precisamente el calor, que lo mató. Según cuentan los historiadores, Fourier, era muy friolento, y murió asfixiado por una mala combustión de su calefacción en París, en 1830, por ponerla demasiado fuerte.

## 6.2. Series de Fourier

Sea  $f(t)$  una función periódica de periodo  $T$ , la cual se puede representar por la serie trigonométrica

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t + \dots + b_1 \sen \omega_0 t + b_2 \sen \omega_0 t + \dots \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Una serie como la representada por (6.1) se llama serie trigonométrica de Fourier de la función  $f(t)$ . También puede escribirse:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (6.2)$$

Donde  $c_n$  y  $\theta_n$  están dados en términos de  $a_n$  y  $b_n$ , de la siguiente manera:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sen n\omega_0 t \right)$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t &= C_n (\cos \theta_n \cos n\omega_0 t + \sen \theta_n \sen n\omega_0 t) \\ &= C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Donde,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (6.4)$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \text{sen } \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= \frac{b_n}{a_n} \\ \theta_n &= \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

También si se hace

$$C_o = \frac{1}{2} a_o, \quad (6.6)$$

Se obtiene las ecuaciones presentes en (6.2):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \text{sen } n\omega_o) \\ &= C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_o t - \theta_n) \end{aligned}$$

La última ecuación nos muestra que una función periódica puede representarse mediante una suma de componentes senusoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia  $\omega_n = n\omega_o$  se denomina la  $n$ -ésima armónica de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental porque tiene el mismo periodo de la función y  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$  se conoce como la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes  $C_n$  y los ángulos  $\theta_n$  se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase, respectivamente.

### 6.2.1. Ortogonalidad de las Funciones Seno y Coseno

Un conjunto de funciones  $\phi_k(t)$  es ortogonal en un intervalo  $a < t < b$  si para dos funciones cualesquiera  $\phi_m(t)$  y  $\phi_n(t)$  pertenecientes al conjunto  $\phi_k(t)$ , se cumple:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases} \quad (6.7)$$

En particular puede probarse  $\phi_m(t) = \cos(m\omega_0 t)$  y  $\phi_n(t) = \text{sen}(m\omega_0 t)$

Estas funciones son ortogonales en  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ .

En otras palabras,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para } m \neq 0 \quad (6.8)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \quad (6.9)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \text{ y } n. \quad (6.12)$$

Donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Estas relaciones demuestran que las funciones:

$$\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \text{sen } \omega_0 t, \text{sen } 2\omega_0 t, \dots, \text{sen } n\omega_0 t, \dots$$

forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ .

A manera de ejemplo vamos a probar a (6.12):

Dado que:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)],$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\cos[(m+n)\omega_o t] + \cos[(m-n)\omega_o t]\} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \operatorname{sen}[(m+n)\omega_o t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \operatorname{sen}[(m-n)\omega_o t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \{\operatorname{sen}[(m+n)\pi] + \operatorname{sen}[(m+n)\pi]\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \{\operatorname{sen}[(m-n)\pi] + \operatorname{sen}[(m-n)\pi]\} \\ &= 0 \quad \text{si } m \neq n \end{aligned}$$

Puesto que  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  y haciendo  $m = n \neq 0$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(m\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos 2m\omega_o t] dt \\ &= \frac{1}{2} \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4m\omega_o} \operatorname{sen} 2m\omega_o t \Big|_{-T/2}^{T/2} \end{aligned}$$

### 6.2.2. Evaluación de los Coeficientes de Fourier

Utilizando las relaciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno se pueden evaluar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie de Fourier. La siguiente ecuación corresponde a la planteada en (6.1):

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen} n\omega_o t$$



Multiplicando ambos lados por  $\cos m\omega_o t$  e integrando entre  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_o t) dt &= \frac{1}{2} a_o \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) \right] \cos(m\omega_o t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right] \cos(m\omega_o t) dt \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de los signos de integración y sumatoria se obtiene.

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_o t) dt &= \frac{1}{2} a_o \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_o t) \cos(m\omega_o t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_o t) \cos(m\omega_o t) dt \end{aligned}$$

Si se aplican las relaciones de ortogonalidad, encontramos que

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_o t) dt = \frac{T}{2} a_m \quad (6.13)$$

y así,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_o t) dt \quad (6.14)$$

Si se integra (6.15) entre  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  y se usa (6.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_o \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \operatorname{sen} n\omega_o t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} a_o T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_o t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{2} a_o T \quad (6.15) \end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{1}{2}a_o = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (6.16)$$

O bien,

$$a_o = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (6.17)$$

Se debe notar que  $\frac{a_o}{2}$  es el valor promedio de  $f(t)$  durante un periodo. La ecuación (6.18) indica que (6.15), la cual evalúa los coeficientes de la serie coseno, también da el coeficiente  $a_o$ , correctamente puesto que:

$$\cos m\omega_o t \Big|_{m=0} = 1$$

Análogamente, si la ecuación (6.18) se multiplica por  $\text{sen } m\omega_o t$  y se integra término por término entre los límites  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_o t) dt &= \frac{1}{2}a_o \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_o t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_o t) \text{sen}(m\omega_o t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_o t) \text{sen}(m\omega_o t) dt \end{aligned}$$

El uso de las relaciones de ortogonalidad conduce a:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(m\omega_o t) dt = \frac{T}{2}b_m \quad (6.18)$$

De donde,

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(m\omega_o t) dt \quad (6.19)$$

Sustituyendo  $m$  por  $n$  se puede expresar (6.15) y (6.20) como

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.20)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.21)$$

En general, no es necesario que el intervalo de integración de (6.22) y (6.17) sea simétrico alrededor del origen. Si se aplica (6.15), el único requisito es que la integral se tome sobre un período completo.

### 6.2.3. La Transformadas de Fourier

La función  $F(w)$  definida por

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt} dt$$

Se conoce como la integral de Fourier o transformada de Fourier de  $f(t)$ , y la operación de integración se simboliza frecuentemente por  $\mathfrak{F}$ ; esto es,

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt} dt \quad (6.22)$$

Análogamente  $\mathfrak{F}^{-1}$  es el símbolo que se utiliza para indicar en la posición inversa o sea, obtener  $f(t)$  cuando  $F(w)$  está dado; esto es,

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jwt} dt \quad (6.23)$$

Y  $f(t)$  se denomina transformada inversa de Fourier de  $F(w)$ . Las ecuaciones (6.23) y (6.24) se conocen a menudo como par de transformadas de Fourier.

La condición para que exista  $F(w)$  generalmente está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (6.24)$$

En otros términos, la integral del valor absoluto de  $f(t)$  debe ser finita.

A manera de ejemplo: Vamos a verificar que (6.25) es una condición suficiente para que exista la transformada de Fourier de  $f(t)$ .

En efecto, como

$$e^{-wjt} = \cos wt - j \operatorname{sen} wt$$

entonces,

$$|e^{-wjt}| = \sqrt{\cos^2 wt + \text{sen}^2 wt} = 1$$

O bien

$$|f(t)e^{-wjt}| = |f(t)|$$

Se sigue que si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-wjt}| dt$$

Es finita, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Es finita, es decir,  $\mathfrak{F}[f(t)]$  existe.

Se debe observar que (6.25) es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de  $\mathfrak{F}[f(t)]$ ; en otras palabras las funciones que no satisfacen (6.25) pueden tener transformadas de Fourier.

La función  $F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$  es, en general, compleja y se tiene

$$F(w) = R(w) + jX(w) = |F(w)|e^{j\phi(w)} \quad (6.25)$$

Donde  $|F(w)|$  se denomina espectro de magnitud de  $f(t)$ , y  $\phi(w)$ , espectro de fase.

#### 6.2.4. Interpretación de la Transformada de Fourier

Si  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ , entonces  $f(t)$  se puede expresar como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (6.26)$$

Donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (6.27)$$

Si ahora se considera que a medida que  $T \rightarrow \infty$ ,  $w_o \rightarrow \Delta w = 2\pi \Delta f$ ,  $\Delta f = 1/T$ , entonces (6.27) y (6.28) se convierten, respectivamente, en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\Delta w)t} \quad (6.28)$$

$$c_n = \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j(n\Delta w)t} dt \quad (6.29)$$

Siguiendo un argumento similar en la derivación de (6.27), se observa que si  $\Delta w \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  tal que  $n \Delta w \rightarrow w$ . En otros términos, en el límite, en lugar de tener armónicos discretos correspondientes a  $nw_o$ , todo valor de  $w$  es permitido. De esta manera, en lugar de  $C_n$  se tiene que  $C(w)$ , y por (6.28) se tiene que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(w)}{\Delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt = F(w) \quad (6.30)$$

Según (6.31) vemos que

$$F(w) df = c(w) \quad (6.31)$$

y como,  $w = 2\pi f$ , se tiene

$$\frac{1}{2\pi} F(w) dw = c(w) \quad (6.32)$$

Entonces (6.28) se convierte en

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(w) e^{jw t} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jw t} dw \end{aligned} \quad (6.33)$$

Esta ecuación muestra que  $\frac{1}{2}\pi |F(w)| dw$  representa la magnitud infinitesimal de armónico a la frecuencia angular  $w$ . Estos armónicos tienen frecuencia fundamental cero ( $w_o \rightarrow dw$ ) y están separados por infinitésimos. Aunque  $|F(w)| dw$  contra  $w$  se le denomina espectro continuo, y a  $|F(w)|$  se denomina generalmente, espectro de magnitud de  $f(t)$ .

La representación anterior de una función no periódica como suma de exponenciales con la frecuencia fundamental tendiendo a cero, no es un concepto fácil de aceptar. A veces la interpretación que sigue al par de transformadas de Fourier sería:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{j\omega t} dw \quad (2)$$

Es decir se supone que cualquier función dada tiene dos modos equivalentes de representación: uno en el dominio del tiempo,  $f(t)$ , y el otro en el dominio de la frecuencia,  $F(w)$ . La ecuación (1), transforma la función  $f(t)$  en el dominio del tiempo, a su función equivalente  $F(w)$ , en el dominio de la frecuencia, y la ecuación (2) invierte el proceso. La ecuación (1) analiza la función del tiempo en un espectro de frecuencia para obtener nuevamente la función en términos del tiempo.

### 6.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

La ecuación lineal de primer orden  $y' + ay = 0$ , donde  $a$  es una constante, tiene la solución exponencial  $y = c_1 e^{-ax}$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ ; por consiguiente, lo más natural es determinar si existen soluciones exponenciales  $(-\infty, \infty)$  de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (6.34)$$

En donde los coeficientes  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes reales y  $a_n \neq 0$ . Para sorpresa todas las soluciones de la ecuación (6.34) son funciones exponenciales.

#### 6.3.1. Ecuación Auxiliar

Vamos a considerar el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (6.35)$$

Si probamos con una solución de la forma  $y = e^{mx}$ , entonces, después de sustituir  $y' = me^{mx}$  y  $y'' = m^2e^{mx}$  la ecuación (6.36) se transforma

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{es decir,} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Como  $e^{mx}$  nunca es cero cuando  $x$  tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es cuando se elige una  $m$  como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{6.36}$$

Esta ecuación se llama *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* de la ecuación diferencial (6.36).

Como las dos raíces de la ecuación (6.36) son:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

existen tres formas de la solución general de la ecuación (6.36), que corresponden a los tres casos siguientes:

- $m_1$  y  $m_2$  reales distintos ( $b^2 - 4ac > 0$ ).
- $m_1$  y  $m_2$  reales e iguales ( $b^2 - 4ac = 0$ ).
- $m_1$  y  $m_2$  números complejos conjugados ( $b^2 - 4ac < 0$ ).

Cada uno de estos casos se discuten a continuación.

### ***Caso I: Raíces reales distintas***

Si la ecuación (6.36) tiene dos raíces reales distintas,  $m_1$  y  $m_2$ , llegamos a dos soluciones,  $y_1 = e^{m_1x}$  y  $y_2 = e^{m_2x}$ . Estas funciones son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$  y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Entonces la solución general de la ecuación (6.35) en ese intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \tag{6.37}$$

### ***Caso II: Raíces reales repetidas***

Cuando  $m_1 = m_2$  llegamos, necesariamente, solo a una solución exponencial,  $y_1 = e^{m_1 x}$ . Según la fórmula cuadrática,  $m_1 = -\frac{b}{2a}$  porque la única forma de que  $m_1 = m_2$  es que  $b^2 - 4ac = 0$ . Así, una segunda solución es:

$$y_2 = e^{m_1 x} = \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x} \quad (6.38)$$

En esta ecuación aprovechamos que  $-\frac{b}{a} = 2m_1$ . La solución general es, en consecuencia,

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} \quad (6.39)$$

### ***Caso III: Raíces complejas conjugadas***

Si  $m_1$  y  $m_2$  son complejas, podremos escribir  $m_1 = \alpha + i\beta$  y  $m_2 = \alpha - i\beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta > 0$  son reales; e  $i^2 = -1$ . No hay diferencia formal entre este caso y el caso I; por ello,

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 x e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este objeto se usa la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

En que  $\theta$  es un número real. La consecuencia de esta fórmula es que

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x, \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x \quad (6.40)$$

En donde hemos empleado  $\cos(-\beta x) = \cos \beta x$  y  $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen} \beta x$

Observe que si primero sumamos y después restamos las dos ecuaciones de (6.41). Obtenemos, respectivamente.

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cos \beta x \quad \text{y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen} \beta x$$

Como  $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 x e^{(\alpha-i\beta)x}$  es una solución de la ecuación (6.37) para cualquier elección de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , si  $C_1 = C_2 = 1$  y  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -1$  obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - x e^{(\alpha-i\beta)x}$$



Pero,

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \cos \beta x$$

y

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Los dos últimos resultados demuestran que las funciones reales  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  y  $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ . Son soluciones de la ecuación (6.39). Además, esas soluciones forman un conjunto fundamental en  $(-\infty, \infty)$ ; por lo tanto, la solución general es:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x). \quad (6.41)$$

## 6.4. Teorema de la Divergencia de Gauss

Sea  $V = V(x^j)$  un campo vectorial definido sobre un volumen  $V$  cuya frontera es la superficie  $\Sigma$  y  $\hat{n}$  en el vector normal unitario externo a  $\Sigma$ , entonces, la siguiente figura es la representación del teorema de divergencia o de Gauss para una superficie esférica:

$$\int_V \nabla V(x^j) dV = \int_{\Sigma} V(x^j) ds \quad (6.42)$$

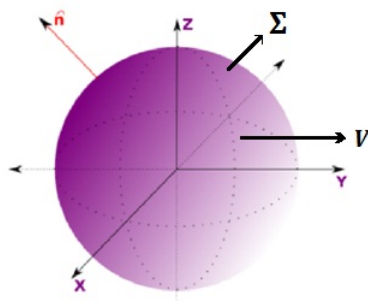


Figura 6.1: Teorema de Divergencia o de Gauss

El teorema de la divergencia establece la relación entre la integral de volumen de  $V(x^j)$  y la integral de superficie del campo sobre la frontera que encierra el volumen  $V$ .

Una expresión para la divergencia de un campo vectorial  $V(x^j)$  en la que no intervienen las componentes del campo, es

$$\nabla V(x^j) = \lim_{\int dV \rightarrow 0} \frac{\int_{\Sigma} V(x^j) ds}{\int dV} \quad (6.43)$$

Donde  $V = \int dV$  es el volumen centrado en  $r$ .

La integral

$$\int_{\Sigma} V(x^j) ds$$

representa el flujo del campo vectorial  $V(x^j)$  a través de la superficie  $\Sigma$ .

Del teorema de divergencia se obtienen dos relaciones importantes conocidas como las identidades de Green. Sí  $\phi(x^j)$  y  $\varphi(x^j)$  dos campos escalares, entonces

$$\nabla(\phi \nabla \varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \phi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \phi \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} = \nabla \phi \nabla \varphi + \phi \nabla^2 \varphi \quad (6.44)$$

aplicando el teorema de la divergencia, encontramos que:

$$\int_V \nabla(\phi \nabla \psi) dV = \int_{\Sigma} \phi \nabla \psi ds \quad (6.45)$$

y por lo tanto

$$\int_{\Sigma} \phi \nabla \psi ds = \int_V \nabla \phi \nabla \psi dV + \int_V \phi \nabla^2 \psi dV \quad (6.46)$$

Si se intercambian  $\phi \leftrightarrow \varphi$  en la ecuación (6.46) y al resultado le restamos (6.47) se obtiene

$$\nabla(\phi \nabla \varphi - \varphi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi$$

Y nuevamente por el Teorema de Divergencia:

$$\int_V \nabla(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) dV = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_\Sigma (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) ds$$

Por lo tanto

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_\Sigma (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) ds$$

## 6.5. Teorema de Stokes

Recibe este nombre en honor a George Gabriel Stokes (1819-1903), se puede enunciar como sigue: la integral de línea de la componente tangencial de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$  recorrida una vez en la orientación positiva es igual a la integral de superficie sobre  $S$  de la componente normal de  $\nabla \times \vec{F}$ . Si  $F$  es un campo de fuerza, el teorema afirma que el trabajo realizado por  $F$  a lo largo de  $C$  es igual al flujo de  $\nabla \times \vec{F}$  a través de  $S$ . La integral de línea en también se puede expresar como  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Donde  $|\vec{r}| = |r| = r$  es el vector de posición del punto  $(x, y, z)$  de  $C$ .

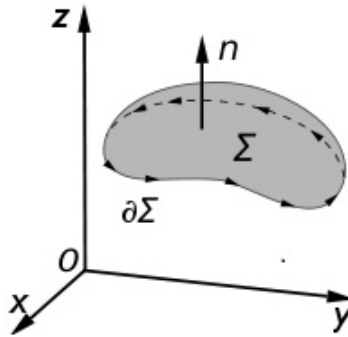


Figura 6.2: Teorema de Stokes

El teorema de Stokes nos dice que se puede expresar una integral sobre una superficie abierta del rotacional de un vector escalar el diferencial de super-

ficie es igual a la integral cerrada de línea sobre el vector  $A$  que limita a esa superficie.

Una identidad importante que puede utilizarse es la siguiente:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S \nabla \times (\vec{F} \bullet d\vec{s})$$

en que  $S$  es una superficie abierta, y  $C$  es la curva cerrada que limita a dicha superficie. La dirección de recorrido de la curva  $C$  determina la orientación del vector  $d\vec{S}$ , normal a la superficie.

$$\int_a^b \vec{\nabla} \bullet \Phi(\vec{r}) = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Consideramos que los elementos teóricos abordados hasta este punto, son suficientes para dar paso a la deducción y posterior solución de la ecuación del calor.

## Capítulo 7

# Solución de la Ecuación del Calor

### 7.1. La Ecuación Lineal de la Conducción de Calor

Es posible cuantificar los procesos de transferencia de calor en términos de ecuaciones o modelos apropiados que a su vez sirven para calcular la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo. La ecuación de calor se conoce también como Ley de Fourier, y vale la pena tener en cuenta que no es realmente una ley, sino que es un resultado básicamente empírico.

La ecuación del calor de Fourier indica que en condiciones de estado estable, el calor transferido por conducción por unidad de tiempo  $q(W)$  está dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que representa la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección  $x$ , que es proporcional al gradiente de temperaturas, y al área perpendicular a la dirección de transferencia.

La constante de proporcionalidad  $K$ , es una propiedad de transporte conocida como conductividad térmica, cuyas unidades son  $\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$  y es una característica del material sólido.

Consideraremos una barra circular de sección transversal uniforme y material homogéneo, orientada de modo que el eje  $x$  quede a lo largo de la línea axial del cilindro. Designamos los extremos de la barra  $x = 0$  y  $x = L$ .

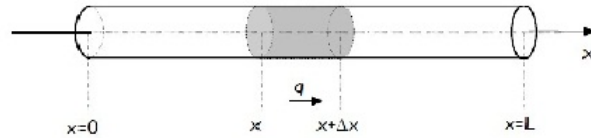


Figura 7.1: Figura de Conducción Lineal de Calor

Supongamos que los lados de la barra están perfectamente aislados de modo que no entra calor a través de ellos y que la temperatura  $T$  depende sólo de la posición axial y del tiempo  $t$ , y no de las coordenadas laterales  $y$  y  $z$ . Donde  $T = u(x, t)$ .

Consideremos además que el calor transferido en una porción de la barra (calor neto de entrada) es igual al calor absorbido en esa porción de la barra (calor acumulado). Los términos en la ecuación son llamados términos de flujo y de acumulación respectivamente, de manera similar el calor por unidad de tiempo que pasa desde la izquierda a la derecha a través de una sección transversal en  $x = x + \Delta x$  está dada por

$$q(x + \Delta x, t) = -KA \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

Luego, el calor neto por unidad de tiempo que fluye a través del segmento de la barra entre  $x$  y  $x + \Delta x$ . Será

$$q = q(x, t) - q(x + \Delta x, t) = KA \left[ \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right]$$

y la cantidad de calor neto que entra a este elemento de la barra en el tiempo

$\Delta t$  es

$$q\Delta t = KA \left[ \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] \Delta t$$

Ahora calcularemos el término absorción. El cambio promedio en temperatura ( $\Delta T$ ), que se produce en el trozo de la barra ( $\Delta x$ ) en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , es proporcional a la cantidad de calor ( $q\Delta t$ ) introducido en esa porción de la barra y es inversamente proporcional a la masa  $\Delta m$  del elemento. Luego:

$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \frac{q\Delta t}{\Delta m} = \frac{q\Delta t}{C_p \rho A \Delta x}$$

Donde la constante de proporcionalidad  $C_p$  se conoce como calor específico del material de la barra, y  $\rho$  es su densidad. El cambio de temperatura promedio  $\Delta T$  en el elemento de la barra en consideración, es el cambio de temperatura real o verdadero en alguna vecindad del punto  $x + \theta\Delta x$ , donde  $0 < \theta < 1$ . Luego la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$T(x + \theta\Delta x, t + \Delta t) - T(x + \theta\Delta x, t) = \frac{q\Delta t}{C_p \rho A \Delta x}$$

O como

$$q\Delta t = [T(x + \theta\Delta x, t + \Delta t) - T(x + \theta\Delta x, t)] C_p \rho A \Delta x$$

Para balancear los términos absorción y de flujo, igualamos las dos expresiones para  $q\Delta t$ :

$$KA \left[ \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] \Delta t = [T(x + \theta\Delta x, t + \Delta t) - T(x + \theta\Delta x, t)] C_p \rho A \Delta x$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $\Delta x \Delta t$  y luego haciendo  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} KA \left[ \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] \Delta t \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta t} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} [T(x + \theta \Delta x, t + \Delta t) - T(x + \theta \Delta x, t)] C_p \rho A \frac{\Delta x}{\Delta x \Delta t}$$

Obtenemos la ecuación de conducción de calor o difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## 7.2. Conducción de Calor

El flujo de calor en un cuerpo de material homogéneo que está determinado por la ecuación del calor:

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial t} = 0 \quad (7.1)$$

donde,  $u(x, y, z, t)$  es la temperatura del cuerpo punto  $p(x, y, z)$ ,  $c^2 = K/(\rho\sigma)$  siendo  $K$  la conductividad térmica,  $\sigma$  el calor específico, y  $\rho$  la densidad del material del cuerpo, el laplaciano de  $u$  es  $\nabla^2 u$ , y en coordenadas rectangulares se puede expresar como

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (7.2)$$

A continuación vamos a resolver un ejemplo sobre la conducción unidimensional del calor, lo mismo que la conducción del calor en una barra en una dimensión de longitud  $L$ .

Considérese la temperatura de una barra uniforme de longitud  $l$ , que está orientada a lo largo del eje  $x$ . Ambos extremos de la barra se mantienen a una temperatura de cero grados. Si la temperatura inicial de la barra es:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{para } \frac{1}{2}l < x < l \end{cases}$$

Donde  $x$  es la distancia medida desde unos de los extremos, hallar la distribución de la temperatura después de un tiempo  $t$ .



Puesto que la temperatura  $u(x, t)$  depende solo de  $x$  y  $t$ , la ecuación de calor (7.2) se convierte en la determinada ecuación de calor en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (7.3)$$

Las condiciones de frontera son:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (7.4)$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{para } \frac{1}{2}l < x < l \end{cases} \quad (7.5)$$

Ahora, suponiendo que la solución sea de la forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (7.6)$$

reemplazando en la ecuación (7.4). De donde

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2}X(x)T'(t) \quad (7.7)$$

Dividiendo por  $X(x) T(t)$  y separando variables, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (7.8)$$

La expresión del primer miembro depende solamente de  $x$ , mientras que la expresión del segundo solo depende de  $t$ ; por consiguiente, se concluye que ambas expresiones deben ser igual a una constante.

Esta constante, por ejemplo  $K$ , debe ser negativa pues si  $K > 0$ , la única solución  $u(x, t) = X(x)T(t)$  que satisface (7.5) es decir  $u(x, t) = 0$ .

De hecho, si:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K = k^2$$

Entonces la solución general será:

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Aplicando la condición de frontera (7.5), se obtiene

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad Ae^{kl} + Be^{-kl} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que  $A = -B = 0$ . De esta manera  $X(x) = 0$ , y en consecuencia,  $u(x, t) = 0$ , lo cual da una solución trivial. Por tanto, haciendo  $K = -k^2$ , se tiene:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2 \quad (7.9)$$

Y de aquí se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0 \quad (7.10)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0 \quad (7.11)$$

Cuyas soluciones generales son:

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx \quad (7.12)$$

$$T(t) = Ce^{-c^2 k^2 t} \quad (7.13)$$

Nuevamente por la condición de frontera (7.5), se tiene:

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(l) = B \operatorname{sen} kl = 0$$

De esta manera,

$$kl = n\pi \quad \text{ó} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

Se obtienen así las soluciones de (7.14), que satisfacen la condición (7.13)

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.15)$$

Las soluciones correspondientes de (7.11) son:

$$T_n(t) = C_n e^{-c^2 n^2 \pi^2 t / l^2} = C_n e^{-\lambda^2 n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.16)$$

Donde,

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

Por lo tanto, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(t)T_n(t) = b_n e^{-\lambda^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.17)$$

Donde  $b_n = B_n C_n$ , son las soluciones de la ecuación del calor (7.16) que satisfacen la condición (7.17).

Para hallar una solución que también satisfaga la condición inicial, dada por (7.17), se considera la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (7.18)$$

Por (7.7) y (7.18), se obtiene

$$u(x, t) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (7.19)$$

Por tanto, para que (7.18) satisfaga la condición (7.8), los coeficientes  $b_n$  deben ser escogidos de tal manera que (7.15) sea la expansión de las series de Fourier en términos del seno de  $f(x)$ ; es decir,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left[ \int_0^{l/2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l (l-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

(7.20)

Por consiguiente, la solución es

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \left[ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} e^{-(c\pi/l)^2 t} - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} e^{-(3c\pi/l)^2 t} + \dots \right] \quad (7.21)$$

Se observa que la solución  $u(x, t)$ , dada por (7.21), se hace pequeña después de un largo periodo de tiempo, es decir, tiende a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

### 7.2.1. Conducción del calor en una barra infinita:

Vamos hallar la distribución de temperatura  $u(x, t)$  en el caso de una barra infinita. La distribución inicial de temperatura está dada por  $f(x)$  para  $-\infty < x < \infty$ .

La función  $u(x, t)$  satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (7.22)$$

Y la condición inicial es:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (7.23)$$

Procediendo como el primer problema, se reemplaza

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

en la ecuación (7.23), lo cual conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (7.24)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0 \quad (7.25)$$

Sus soluciones son:

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx,$$

$$T(t) = Ce^{-c^2k^2t}$$

De donde,

$$u(x, t; k) = X(x)T(t) = (D \cos kx + E \operatorname{sen} kx)e^{-c^2k^2t} \quad (7.26)$$

Es una solución de la ecuación (7.26), donde  $D$  y  $E$  son constantes arbitrarias. Puesto que  $f(x)$ , en general, es no periódica, se puede considerar  $D$  y  $E$  como funciones de  $k$ . Entonces la función

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty u(x, t; k) dk \\ &= \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \operatorname{sen} kx]e^{-c^2k^2t} dk \end{aligned} \quad (7.27)$$

También es la solución de (7.17).

Por (7.30), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \operatorname{sen} kx] dk \quad (7.28)$$

Ahora bien, si

$$D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos ky dy$$

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \operatorname{sen} ky dy$$

Entonces, con el teorema de la integral de Fourier, se puede expresar la relación (7.28) como

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x - y) dy \right] dk \quad (7.29)$$

De esta manera, por (7.29), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x - y)e^{-c^2k^2t} dy \right] dk \quad (7.30)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[ \int_0^{\infty} e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk \right] dy \quad (7.31)$$

Para evaluar la integral interior se produce como sigue:

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} \cos 2bs ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad (7.32)$$

Introduciendo una nueva variable de integración  $k$ , si se hace  $s = ck\sqrt{t}$ , y se relaciona

$$b = \frac{x-y}{2c\sqrt{t}}$$

La fórmula (7.32) se vuelve

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \quad (7.33)$$

Reemplazando (7.32) en (7.30), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} dy \quad (7.34)$$

Introduciendo la nueva variable de integración,  $-q = (x-y)/(2c\sqrt{t})$ , la ecuación (7.34) se puede expresar como:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2cq\sqrt{t}) e^{-q^2} dq \quad (7.35)$$

Podemos utilizar *la transformada de Fourier*, y resolver nuevamente el problema 2.

Sea la transformada de Fourier, de la solución  $u(x, t)$ , con respecto a  $x$ , la dada por

$$U(s, t) = F[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-isx} dx \quad (7.36)$$

Entonces,

$$u(x, t) = F^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, t) e^{-isx} ds \quad (7.37)$$

Se supondrá que las soluciones  $u(x, t)$  y  $\partial u(x, t)/\partial x$  son pequeñas para valores grandes de  $|x|$  y se acercan a cero a medida que  $x \rightarrow \pm\infty$ .

La transformada de Fourier respecto a  $u_{xx}(x, t)$  es:

$$F[u_{xx}(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-jsx} dx = -s^2 U(s, t) \quad (7.38)$$

La transformada de Fourier de  $U_t(x, t)$  es

$$F[u_t(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-jsx} dx = \frac{\partial}{\partial t} U(s, t) = U_t(s, t) \quad (7.39)$$

Aplicando ahora la transformada  $U_t$  de Fourier a la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (7.40)$$

Se obtiene:

$$-s^2 U(s, t) - \frac{1}{c^2} U_t(s, t) = 0$$

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} + c^2 s^2 U(s, t) = 0 \quad (7.41)$$

Su solución es:

$$U(s, t) = U(s, 0) e^{-c^2 s^2 t} \quad (7.42)$$

Pero aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial (7.35), se obtiene:

$$\begin{aligned} U(s, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-jsx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jsx} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-j sy} dy \quad (7.43)$$

Reemplazando (7.43) en (7.42), se tiene

$$U(s, t) = e^{-c^2 s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-j sy} dy \quad (7.44)$$

Ahora se puede obtener la solución  $u(x, t)$  tomando la transformada de Fourier de (7.42); esto es,

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, t)e^{j sx} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(j sx - c^2 s^2 t)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-j sy} dy \right] ds \end{aligned} \quad (7.45)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds \right\} dy \quad (7.46)$$

Para evaluar la integral anterior se procede como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \quad (7.47)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 - \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds \\ &= e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 - \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds \end{aligned}$$

Introduciendo una variable de integración  $w$ , mediante

$$\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} = jw$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds &= \frac{1}{c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \end{aligned} \quad (7.48)$$



En razón de (7.47).

Sustituyendo (7.46) y (7.47), se obtiene finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2t)} dy \quad (7.49)$$

Que es exactamente el resultado (7.48).

Ahora (7.49) y (7.45) se pueden expresar como:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G(x - y, t) dy \quad (7.50)$$

Donde,

$$G(x - y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[je(x-y) - c^2s^2t]} ds = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-(x-y)^2}}{4c^2t} \quad (7.51)$$

Se denomina función de Green, de la ecuación del calor (7.50) para el intervalo infinito.

### 7.2.2. Caso 3D de la ecuación del calor:

Vamos a resolver el problema de la distribución de temperatura en estado estacionario, en una placa semicircular de radio  $a$ , en la que las dos caras están aisladas, la parte circular se mantiene a temperatura constante  $U_0$  y su diámetro se conserva a una temperatura de cero grados.

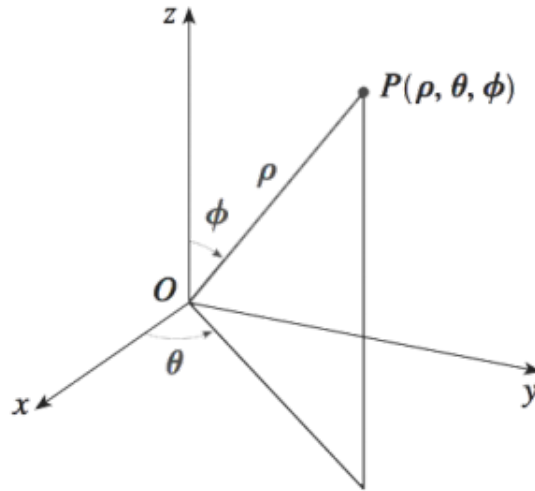


Figura 7.2: Figura de Coordenadas Esfericas

Dada la simetría del problema es necesario introducir coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . El operador Laplaciano:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Como se ha dicho la ecuación del flujo de calor se expresó como:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

En estado estacionario, la temperatura  $u$  es independiente del tiempo, por tanto,  $\partial u / \partial t = 0$  y  $u$  satisface la ecuación de Laplace, es decir,

$$\nabla^2 = 0$$

Como en este problema el flujo de calor es en dos dimensiones y las fronteras son cilíndricas, se utilizará el laplaciano de  $u$  en dos dimensiones y en coordenadas cilíndricas. En consecuencia, por la ecuación expuesta al principio del problema, se tiene:

$$\nabla^2 u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad (7.52)$$

La temperatura  $u(r, \phi)$ , considerada como función de  $r$  y  $\phi$ , satisface (7.52) y las condiciones de frontera

$$u(a, \phi) = U_0 \quad (7.53)$$

$$u(r, 0) = 0 \quad (7.54)$$

$$u(r, \pi) = 0 \quad (7.55)$$

El método de separación de variables, sugiere el suponer una solución a (7.52) de la forma

$$u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (7.56)$$

Reemplazando (7.56) en (7.52), se obtiene

$$R''(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r}R(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\phi) = 0$$

o

$$r^2 R''(r)\Phi(\phi) + rR(r)\Phi(\phi) + R(r)\Phi''(\phi) = 0 \quad (7.57)$$

Dividiendo (7.57) por  $R(r)\Phi(\phi)$ , y separando las variables, se obtiene:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = k^2 \quad (7.58)$$

Donde  $k^2$  es la constante de separación. En este caso la separación resulta del hecho de que el primer miembro es independiente de  $\phi$  y el segundo es independiente de  $r$ .

El signo de la constante de separación, se escogió de tal manera que la función  $\Phi(\phi)$  estuviera expresada en términos del seno y del coseno en vez de funciones exponenciales. Luego tenemos:

$$r^2 R''(r) + rR(r) - k^2 R(r) = 0 \quad (7.59)$$

$$\Phi''(\phi) + k^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (7.60)$$

La solución general de (7.60) es,

$$\Phi(\phi) = A \cos k\phi + b \operatorname{sen} k\phi \quad (7.61)$$

Para resolver la ecuación (7.61) se hace la transformación

$$r = e^s$$

Entonces,

$$R'(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} = \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{ds},$$

$$R''(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R}{ds^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dR}{ds},$$

Y (7.61) se reduce a

$$\frac{d^2 R}{ds^2} - k^2 R = 0$$

La solución general de esta ecuación es:

$$R = C e^{ks} + D e^{-ks}$$

Como  $e^s = r$ , entonces,

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k} \quad (7.62)$$

Según las condiciones de frontera (7.62) y (7.61), se tiene por tanto,

$$\Phi(0) = A = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(\pi) = B \operatorname{sen} k\pi = 0$$

Puesto que resulta una solución trivial, si  $B = 0$ , se debe tener  $\operatorname{sen} k\pi = 0$ , por lo cual

$$k\pi = n\pi \quad \text{o} \quad k = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De donde se hallan las soluciones:

$$\Phi(0) = \Phi_n(\phi) = B_n \operatorname{sen} n\phi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.63)$$

En (7.62) se observa que cuando  $r \rightarrow 0$ , el término  $r^{-k} \rightarrow \infty$ , dado que  $k = n > 0$ . Puesto que en  $r = 0$ ,  $R(0) = 0$ ,  $D$  debe ser igual a cero. De esta manera, se tiene

$$R(r) = R_n(r) = C_n r^n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.64)$$

Entonces, se sigue que las funciones

$$u_n(r, \phi) = R_n(r)\Phi_n(\phi) = b_n r^n \operatorname{sen} n\phi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.65)$$

Donde  $b_n = B_n C_n$  satisfacen la ecuación (7.63), así como en las condiciones de frontera (7.62) y (7.61).

Para satisfacer la condición de frontera (7.65), se supone la solución deseada en la forma

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen} n\phi \quad (7.66)$$

Por (7.64), se tiene

$$u(a, \phi) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^n \operatorname{sen} n\phi \quad (7.67)$$

De esta manera, los términos  $b_n a^n$  son los coeficientes de Fourier en senos, de la función  $U_0$ , y

$$b_n a^n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U_0 \operatorname{sen} n\phi \, d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi} & \text{para } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

De donde  $b_n = \frac{4U_0}{\pi n a^n}$ ,  $n = 1, 3, \dots$

Con estos valores de  $b_n$ , la solución (7.68) se convierte en

$$u(r, \phi) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{a}\right)^n \operatorname{sen} n\phi \quad (7.68)$$

Luego del análisis y deducción analítica del surgimiento de la Ecuación del calor, para calcular la cantidad de energía por unidad de tiempo, ya sea en forma unidimensional tal como el caso de una barra, en forma bidimensional en una lámina o en tres dimensiones aplicada a un sólido, se tiene que este tipo de ecuación se puede desarrollar a través de diferentes métodos alternos dadas unas condiciones iniciales y condiciones de frontera.

## Capítulo 8

# Conclusiones

1. Hemos reconocido de forma aplicada la aparición de las ecuaciones diferenciales, después de entender los elementos teóricos de Fourier, analizamos los distintos métodos de solución de la ecuación del calor .
2. La ecuación reacción–difusión posee características y variables fundamentales basadas en las ecuaciones diferenciales, ya sean ordinarias o parciales, que le otorgan de manera analítica condiciones iniciales y finales, facilitando su estudio.
3. Comprendimos que en la actualidad, después de tantos avances históricos en Matemáticas, las ecuaciones diferenciales, son fuente de modelación para las ciencias exactas y naturales que intentan darle solución a problemas relacionados a nivel científico y con la vida diaria.
4. Las soluciones que ofrecen los distintos métodos de solución en el presente trabajo sobre la ecuación reacción–difusión, manifiestan la estructura sobre el cual fue elaborado y deducido, además de seguir la secuencia lógica que indican los procedimientos efectuados.

## Capítulo 9

# Bibliografía

- ✓ Blanchard, Paul; Robert L. Devaney, y otros; Ecuaciones Diferenciales. México D.F. Editorial Internacional Thomson, 1999; 732 páginas.
- ✓ Campbell, Stephen L. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera. México D.F. Editorial McGraw Hill Interamericana, 1998; 738 páginas.
- ✓ Edwards, C. Henry, y otros. Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera. México D.F. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997; 774 páginas.
- ✓ Spiegel, Murray R. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. México D.F. Editorial Prentice-Hall Hispanoamerica, 1994; 865 páginas.
- ✓ Zill, Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. México D.F. Editorial Internacional Thomson, 1993; 942 páginas.



# Capítulo 10

## Anexos

### 10.1. Método de Diferencias Finitas

Si  $u$  es una función de  $x$  con derivadas finitas y continuas, entonces por el teorema de Taylor se tiene que:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (10.1)$$

y

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (10.2)$$

Al sumar estas expansiones se obtiene:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + 0(h)^4 \quad (10.3)$$

Donde  $0(h)^4$  denota los términos que contienen potencias de  $h$  de orden 4 o mayor. Asumiendo que estos términos son pequeños en relación con las potencias menores de  $h$ , se sigue que:

$$u''(x) \approx \frac{1}{h^2} \{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\} \quad (10.4)$$

Con un error de orden  $h^2$ . Al restar la ecuación (10.1) de la ecuación (10.2), y despreciar los términos de  $h^3$  se obtiene:

$$u'(x) \approx \frac{1}{2h} \{u(x+h) - u(x-h)\} \quad (10.5)$$

De un error de orden  $h^2$ .

La ecuación (10.4) se aproxima la pendiente de la tangente en el punto  $(x, u(x))$  mediante la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(x-h, u(x-h))$  y  $(x+h, u(x+h))$ . Esta aproximación se conoce como aproximación por diferencia central. También se puede aproximar la pendiente de la tangente en  $(x, u(x))$  por la pendiente de las rectas que pasa por los puntos  $(x, u(x))$  y  $(x+h, u(x+h))$ , obteniendo la aproximación de diferencias regresivas:

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{u(x) - u(x-h)\} \quad (10.6)$$

O por la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(x-h, u(x-h))$  y  $(x, u(x))$ , obteniendo la aproximación por diferencias progresivas:

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{u(x) - u(x+h) - u(x)\} \quad (10.7)$$

Ahora tenemos una función  $u$  de las variables  $x$  y  $t$ . Subdividamos el plano  $x-t$  en un conjunto de rectángulos iguales de lados  $\delta x = h$  y  $\delta t = k$  mediante líneas igualmente espaciadas y paralelas al eje  $t$ , definidas por  $x_i = ih, i = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$  y líneas igualmente espaciadas y paralelas al eje  $x$  definidas por  $y_j = jk, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , denotemos el valor de  $u$  en un punto  $p(ih, jk)$  de la malla como:

$$u_p = u_{ih, jk} = u_{i, j}$$

entonces para la ecuación (10.7)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} \approx \frac{u\{(i+j)h, jk\} - 2u\{ih, jk\} + u\{(i-1)h, jk\}}{h^2}$$

Que equivale a

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} \approx \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2} \quad (10.8)$$

De manera similar,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} \approx \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{k^2} \quad (10.9)$$

De las ecuaciones (10.8) y (10.9) se sigue que dos aproximaciones en diferencias progresivas para  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en  $P$  son

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k^2} \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k^2} \quad (10.11)$$

La solución propuesta al problema se plantean tres variantes del método de diferencias finitas: Diferencias progresivas, Diferencias regresivas y Método de Crank-Nicolson. Diferencias finitas para la ecuación del calor:

De las ecuaciones (10.10) y (10.11) se sigue una aproximación por diferencias finitas a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

es

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (10.12)$$

Donde  $u$  es la solución exacta de las ecuaciones aproximadas,  $x_i = ih$ , ( $i = 0, 1, 2, m-1, \dots$ ),  $t_j = jk$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) y  $m = \frac{l}{h}$ . La ecuación (10.12) puede escribirse como

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} \quad (10.13)$$

Donde  $\gamma = a^2 \left(\frac{k}{h^2}\right)$ . Dado que la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , para todo  $0 \leq x \leq l$ , implica que  $u_{i,0} = f(x_i)$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , podemos usar estos valores en la ecuación (10.13) para calcular los valores de  $u_{i,1}$  para toda  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Las condiciones iniciales  $u(0, t) = 0$  y  $u(l, t) = 0$  implican que  $u_{0,1} = u_{m,1} = 0$  y, por tanto, podemos determinar todos los elementos de la forma  $u_{i,1}$ . Ya conocidas todas las aproximaciones  $u_{i,1}$  se pueden obtener, siguiendo un procedimiento semejante, los valores son  $u_{i,2}, u_{i,3}, \dots$

Si hacemos  $u^0 = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{m-1}))^t$ , y  $u(f) = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{m-1,j})^t$  y para todo  $j = 1, 2, \dots$ , se puede

plantear matricialmente este método de solución como:  $w^j = Aw^{j-1}$ , para todo  $j = 1, 2, \dots$

Donde  $a$  es la siguiente matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

$w^f$  Se obtiene para  $x^{(f-1)}$  por una multiplicación simple de matrices. A esto se le conoce con el nombre de **Método de Diferencias Progressivas**. A pesar de la simplicidad para obtener soluciones, el método es inestable para  $\lambda > \frac{1}{2}$ .

Por tanto se propone un segundo método. Si en la ecuación (10.13) reemplazamos al lado izquierdo por (10.11) se obtiene la siguiente aproximación en diferencias finitas a la ecuación de calor

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (10.14)$$

Que se puede reescribir como

$$(1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1} \quad (10.15)$$

Aplicando el hecho de que  $w_{i,0} = f(x_i)$  para toda  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  y  $w_{m,j} = w_{0,j} = 0$  para toda  $j = 1, 2, \dots$ , este método de diferencias tiene la representación matricial.

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

$Aw^{(j)} = w^{(j+1)}$  Para toda  $j = 1, 2, \dots$

Así debemos resolver ahora un sistema lineal para  $w^{(j)}$  a partir de  $w^{(j+1)}$ . Este método se reconoce como el **Método de Diferencias Regresivas**, y es estable para cualquier  $\lambda$ .

Dado que  $\lambda > 0$ , la matriz  $A$  es definida positivamente y es estrictamente de forma diagonal, además de ser tridiagonal. Para resolver este sistema, podemos emplear la factorización  $LU$  de Crout para sistemas lineales tridiagonales. En este algoritmo suponemos, para propósitos de detención o paro que se da para una cota  $t$ .

Con el método de diferencias regresivas se solucionó el problema de estabilidad. Sin embargo, para evitar la falta de precisión, generada por el error de truncamiento se requiere que los intervalos de tiempo sean muchos más pequeños que los del espacio ( $h > k$ ), y esto reduce su eficiencia. Por tanto se hace necesario un método que permitir tomar valores similares para  $h$  y  $k$ , y que además sea estable para todo  $\lambda$ . Este método se puede obtener al promediar el método de diferencias progresivas en el  $j$ -ésimo paso en  $t$ ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Y el método de diferencias regresivas en el  $(j + 1)$ -ésimo paso en  $t$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

Entonces se tiene que una aproximación por diferencias para la ecuación de calor es

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right]$$

Que puede ser reescrito como

$$-\frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1} + (1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j} + (1 - \lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j}$$

Al método generado por esta aproximación se le llama **Método de Crank-Nicolson** y está representado de forma matricial como

$$Aw^{(f+1)} = Bw^{(f)} \quad (10.17)$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

Para obtener  $w^{j+1}$  a partir de  $w^j$ , se debe resolver el sistema planteado en (10.17). La matriz  $A$  es definida positiva, estrictamente dominante de forma diagonal y tridiagonal. Para resolver este sistema, se puede usar factorización  $LU$  de Crout para sistemas lineales tridiagonales. Al igual que en el método de diferencias regresivas, en este algoritmo se supone, para propósitos de detención o paro, que se da una cota para  $t$ .