Nota de aceptación

Firma Asesor del Trabajo de Grado

Firma Segundo Lector

Firma Jefe de Programa

Neiva, 31 de Enero de 2011

ELABORACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

JHON FREDY RUIZ PALENCIA
JAVIER MAURICIO RUIZ PALENCIA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA-HUILA
2011

ELABORACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

JHON FREDY RUIZ PALENCIA
COD:2004101928
JAVIER MAURICIO RUIZ PALENCIA
COD:2002103434

ASESOR
Mg. AUGUSTO SILVA SILVA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA-HUILA
2011

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos primero a Dios, por la presencia del Espíritu Santo en nuestras vidas, iluminadonos para elaborar este trabajo de grado, con los dones de la inteligencia y la perseverancia.

Además, a mis padres ya que nos comprendieron y apoyaron en cada situación de nuestras vidas; como esa mano derecha, que con el sudor de su frente, la dedicación en sus trabajos, y su preocupación constante, de que no nos faltara nada para nuestra carrera y especialmente su comprensión hicieron posible que termináramos con nuestra carrera, gracias a que Dios los mantuvo unidos y llenos del amor de Cristo.

Por último agradecer al profesor Augusto Silva Silva, quien fue el motor de esta tesis, desde un principio inspirando el trabajo; ya que fue él quien puso en nuestras mentes y corazones el deseo de crear una estrategia de graficación para cada uno de nuestros docentes que necesitan esta ayuda. A todos los docentes de la Universidad Surcolombiana que dieron lo mejor de su conocimiento y sabiduría para que nosotros pudiéramos ser parte de la creación de una Colombia llena de educación y especialmente inundada de valores. Principalmente el valor de amar.

Gracias a Dios, padres y docentes porque ellos son nuestros maestros.

INTRODUCCIÓN

En nuestra corta experiencia como docentes, hemos notado dificultades en los estudiantes al graficar funciones en coordenadas cartesianas, esta preocupación nos llevo a elaborar este texto, que sirve de guía para la enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los educandos en coordenadas cartesianas agregando unas coordenadas poco vistas pero muy útiles en la aviación y navegación como lo son las coordenadas polares.

Este libro contiene una serie de técnicas de graficación que permitirán al docente enseñar de una manera didáctica y efectiva, como graficar funciones lineales, cuadráticas, etc. donde el estudiante obtendrá un aprendizaje significativo para toda su vida. El maestro podrá educar a partir de las diferentes características que posee una función determinada. Esta función determinada nos puede llevar a construir otras realizando operaciones como lo son la adición, sustracción, multiplicación y división con un número o una variable.

El educando a través de este libro podrá aprender a graficar de una manera rápida y eficaz, a través de las diferentes técnicas que posee, además, podrá escudriñar cada función y observar que diferentes funciones son producidas a partir de una función básica, también conocerá y aplicará un sistema de coordenadas que es utilizado en diferentes circunstancias, especialmente en la navegación y en la aviación conocido como las coordenadas polares.

Por último este compendio de técnicas nos servirá para aprender a comprender y solucionar diferentes problemas de nuestra vida donde implique la utilización o construcción de una gráfica para guiarnos y encontrar respuestas en estas dificultades.

JUSTIFICACIÓN

Este presente trabajo tiene como fin, dar a los estudiantes de básica secundaria y educación media, una orientación clara para graficar las distintas ecuaciones y/o funciones matemáticas, además, de brindar al docente una metodología distinta para enseñar a los educandos a representar una función. Como docentes del área de matemáticas hemos percibido en los distintos jóvenes a los cuales educamos en el pensamiento matemático la dificultad para comprender este tema tan dispendioso, útil e importante para nuestras vidas y carreras.

Por este motivo creemos pertinente dedicarnos a estudiar las distintas metodologías para enseñar a realizar representaciones gráficas de funciones, para construir una metodología adecuada y fácil de poner en práctica, especialmente a los estudiantes que presentan dificultades en este aspecto y de esta manera, adquieran un aprendizaje significativo.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Construir una metodología útil y fácil para elaborar gráficas de funciones y/o ecuaciones matemáticas, de esta manera crear herramientas eficientes y eficaces a nuestros docentes, permitiendo que nuestros jóvenes adquieran una estrategia de aprendizaje significativo en el momento de representar funciones y ecuaciones.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- **Crear una estrategia adecuada para representar las distintas funciones y ecuaciones de una manera dinámica y sencilla.**
- **Ofrecer herramientas útiles a nuestros educandos para graficar.**
- **Construir técnicas básicas para extraer ecuaciones, partiendo de una representación gráfica dada.**
- **Mostrar a los estudiantes que aprendiendo las funciones básicas se pueden elaborar otros tipos de gráficas.**
- **Proporcionar pautas para representar por medio de fuciones gráficas una situción real.**

Índice general

Capítulo 1

GRÁFICA DE FUNCIONES LINEALES

En este capítulo trataremos los siguientes temas:

1.1. Introducción a las funciones: Gráficas básicas.

1.2. Sistema de coordenadas cartesianas: Trazo de líneas rectas.

1.3. Pendiente.

1.4. Ecuación de una recta.

1.5. Introducción al trazo de curvas: Simetría.

1.1. INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES: GRÁFICAS BÁSICAS

Para poder hablar de gráficas de funciones debemos primero conocer el concepto. Ya definido el concepto de función podemos realizar las distintas gráficas de funciones básicas. También debemos hablar del dominio y el rango de una función.

DEFINICIÓN **1.** *Una función es una relación entre dos variables, comúnmente designadas por x, e, y, que asigna a cada valor de x (variable independiente) un único valor de y (variable dependiente).*

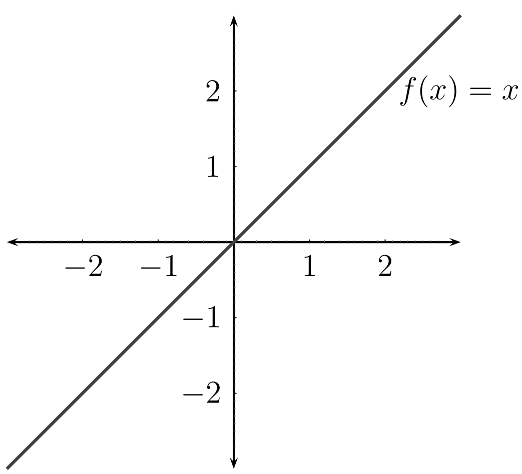
DEFINICIÓN **2.** *El dominio de una función es el conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente. Será un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$ *o todo el conjunto* $\mathbb{R}$*, es decir,*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/f(x)existe\}$$

El rango de una función f es el conjunto de todas las imágenes del dominio, es decir,

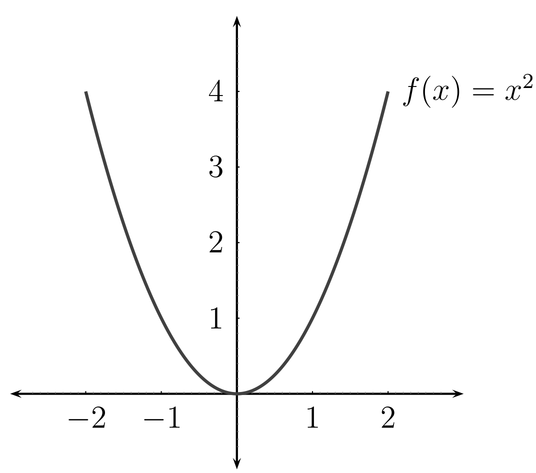
$$Rang(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}/x \in Dom(f)\}$$

Ejemplo **1.** *Para algunas de las siguientes gráficas básicas determinemos su dominio y su rango.*



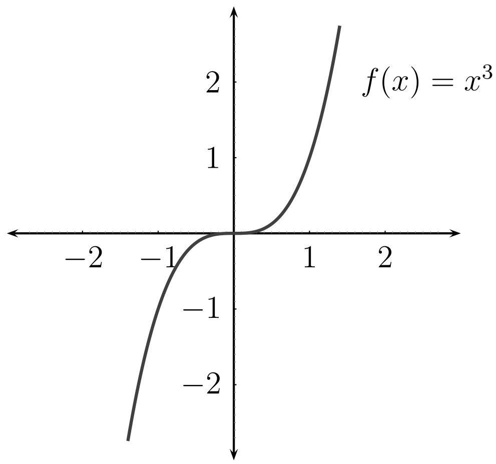
FUNCIÓN LINEAL $f(x) = x$

$Dom(f) = \mathbb{R}$**, puesto que para todos los valores de** x **existe un valor en** y**.**
$Rang(f) = \mathbb{R}$**, puesto que para cada valor de** x **existe un único valor de** y**.**



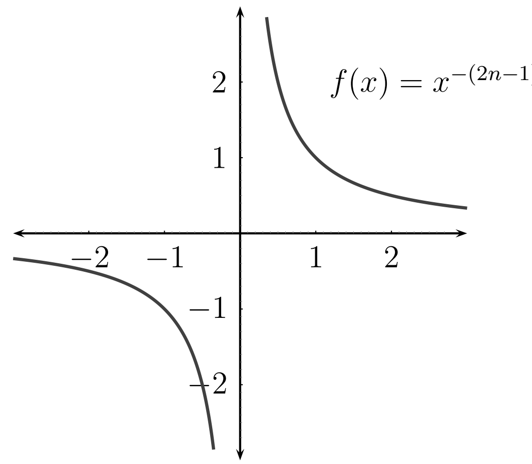
FUNCIÓN CUADRÁTICA $f(x) = x^2$

$Dom(f) = \mathbb{R}$**, puesto que para todos los valores de** x **existe un valor en** y**.**
$Rang(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$**, porque** $x^2 \geq 0$



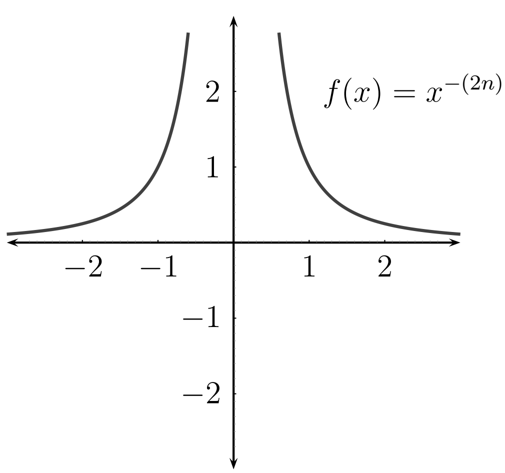
FUNCIÓN CÚBICA $f(x) = x^3$

$Dom(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para todos los valores de** x **existe un valor en** y.
$Rang(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para cada valor** x **de existe un único valor de** y.



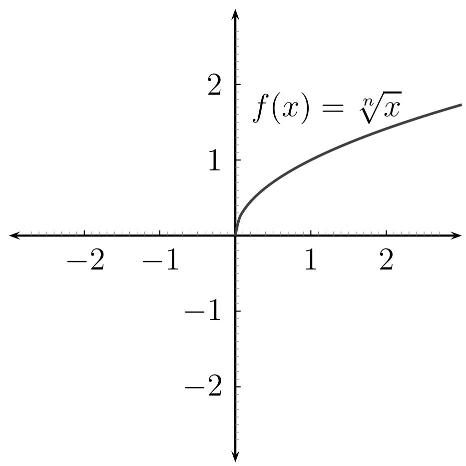
FUNCIÓN $y = x^{-n}$ **cuando** n **es impar**

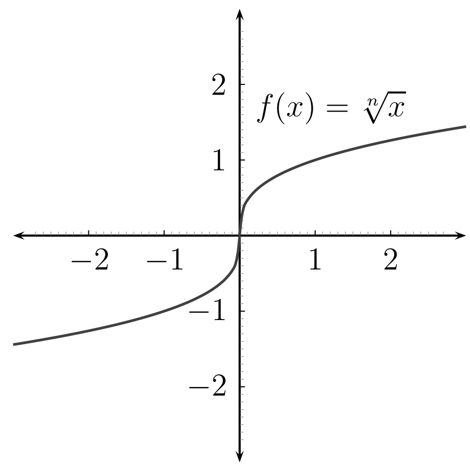
$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, **puesto que para todos los valores de** x **existe un valor en** y, **exceptuando el** 0 **ya que cuando es** 0 **el punto no existe, porque al elevar** 0 **a una potencia negativa es como tener al** 0 **como divisor y a** 1 **como dividendo, lo cual es una indeterminación, por esta razón el punto no existe.**
$Rang(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, **puesto que para cada valor de** x **existe un único valor de** y, **pero cuando se quiere calcular el valor de** $y = 0$, **no existe un valor en** x **el cuál pueda determinar este valor para** y.



FUNCIÓN $y = x^{-n}$ **cuando** n **es par**

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, **puesto que para todos los valores de** x **existe un valor en** y, **exceptuando el** 0, **ya que cuando es** 0 **se produce una indeterminación por lo tanto, el punto no existe.**
$Rang(f) = \mathbb{R}^+ - \{0\}$, **puesto que entre más grandes o pequeños se toman los valores de** x **se aproxima a cero en el eje** y.



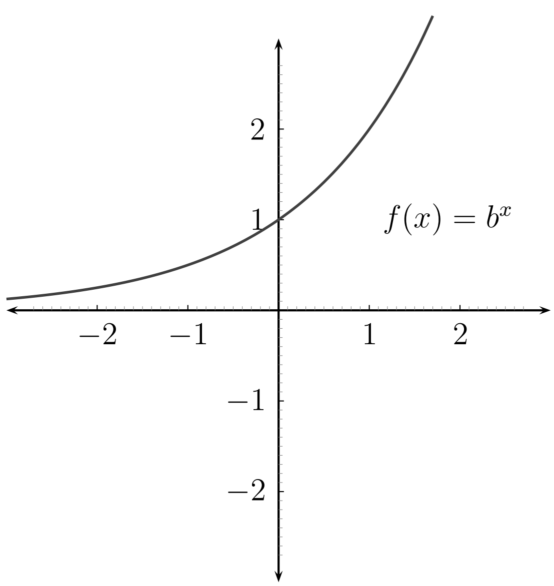


FUNCIÓN $\sqrt[n]{x}$ cuando n es par

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, **puesto que para todos los valores de x positivos incluyendo el 0 existe un valor en y.**
$Rang(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, **puesto que para cada valor de x positivo, existe un único valor de y positivo incluyendo el 0.**

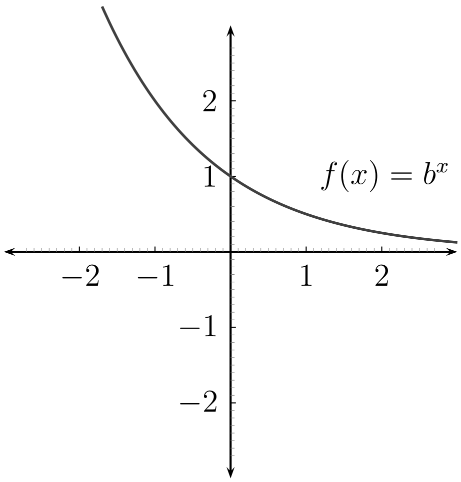
FUNCIÓN $\sqrt[n]{x}$ cuando n es impar

$Dom(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para todos los valores de x existe un valor en y.**
$Rang(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para cada valor de x existe un único valor de y.**



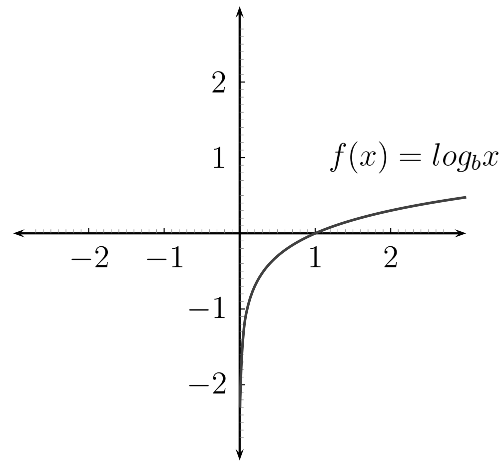
FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = b^x$ con $b \neq 0$, cuando $b > 1$

$Dom(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para todos los valores de x existe un valor en y.**
$Rang(f) = \mathbb{R}^+$, **puesto que para cada valor de x existe un único valor de y, además si observamos la gráfica cuando x se esta haciendo más grande y está aumentando.**
Por el contrario si x se está volviendo más pequeña y va disminuyendo.



FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = b^x$ con $b \neq 0$, cuando $0 < b < 1$

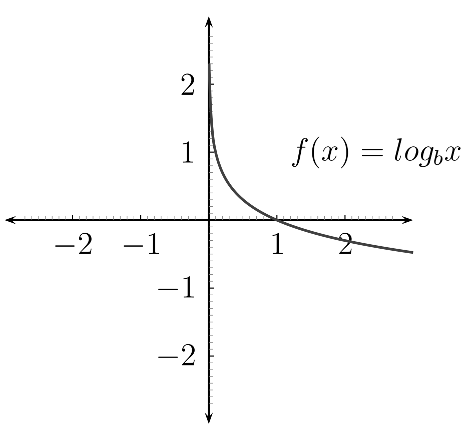
$Dom(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para todos los valores de x existe un valor en y.**
$Rang(f) = \mathbb{R}^+$, **puesto que para cada valor de x existe un único valor de y, además si observamos la gráfica cuando x se está haciendo más grande y está disminuyendo.**
Por el contrario si x se está volviendo más pequeña y va aumentando.



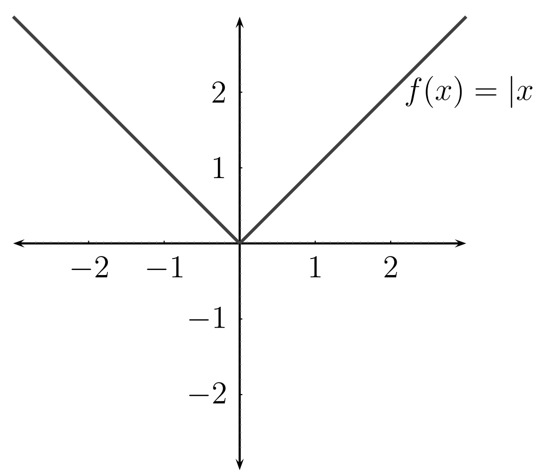
FUNCIÓN LOGARÍTMICA
$f(x) = log_b x$ con $b \neq 1$, cuando la base es mayor que 1

$Dom(f) = \mathbb{R}^+$, **puesto que para todos los valores positivos de x existe un valor en y.**

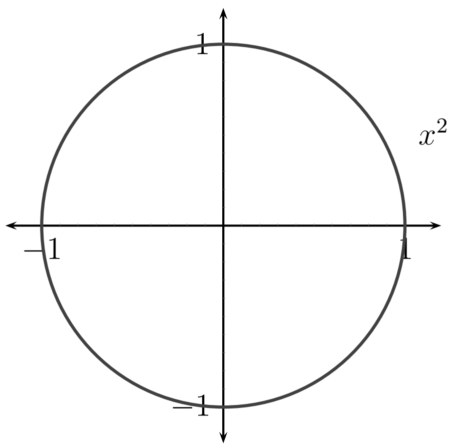
$Rang(f) = \mathbb{R}$, **puesto que para cada valor positivo de x existe un único valor de y, además si observamos la gráfica cuando x se está haciendo más grande y está aumentando.**



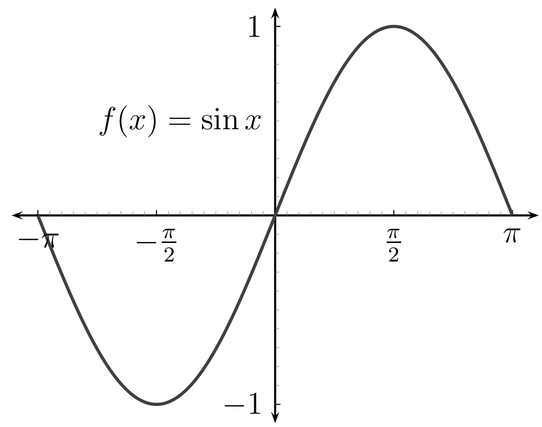
FUNCIÓN LOGARÍTMICA
$f(x) = log_b x$ con $b \neq 1$, cuando b está entre 0 y 1



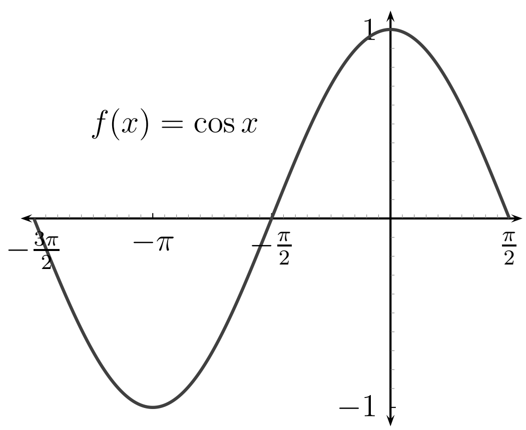
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO



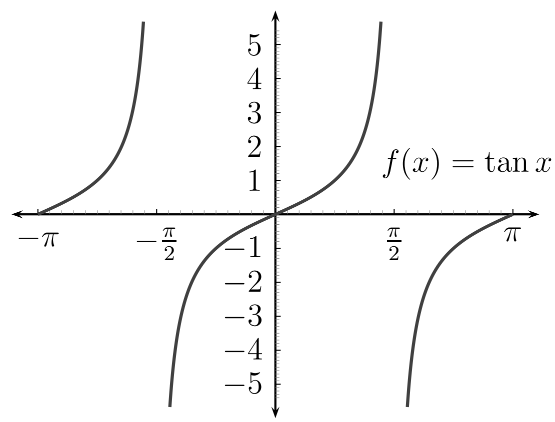
GRÁFICA DE LA CIRCUNFERENCIA



FUNCIÓN SENO



FUNCIÓN COSENO



FUNCIÓN TANGENTE

Las gráficas anteriormente hechas, son las gráficas principales de las cuales se derivan las demás gráficas conocidas en las matemáticas, por ende, en nuestro trabajo nos vamos a referir a las gráficas más trabajadas en las matemáticas, como lo son las gráficas de la función lineal, cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, seno, coseno y tangente.

1.2. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS: TRAZO DE LÍNEAS RECTAS

Cuando hablamos de sistema de coordenadas cartesianas, nos estamos refiriendo a una representación del espacio en dos dimensiones, este sistema a su vez nos permite dar solución a un sistema de ecuaciones con dos variables por medio de sus gráficas. Una de estas variables se denomina independiente, con independiente se refiere a que es una variable a la cual se le puede asignar el valor que se desee, la otra variable se denomina dependiente, esto quiere decir, que el valor que se le otorgue a la variable independiente afecta a la variable dependiente, pues como su nombre lo indica depende del valor que se le dé a la otra. Por ejemplo, cuando resolvemos una ecuación de la forma $y = 2x + 6$ estamos buscando todas las parejas de números x y y que satisfacen la condición "el valor de y es 6 unidades mayor que el doble del valor de x", en donde denominamos a y como la variable dependiente y a x como la variable independiente. La siguiente tabla muestra algunas de las soluciones de la ecuación anteriormente nombrada, puesto que la ecuación tiene una infinidad de parejas de números x y y que satisfacen la condición dada:

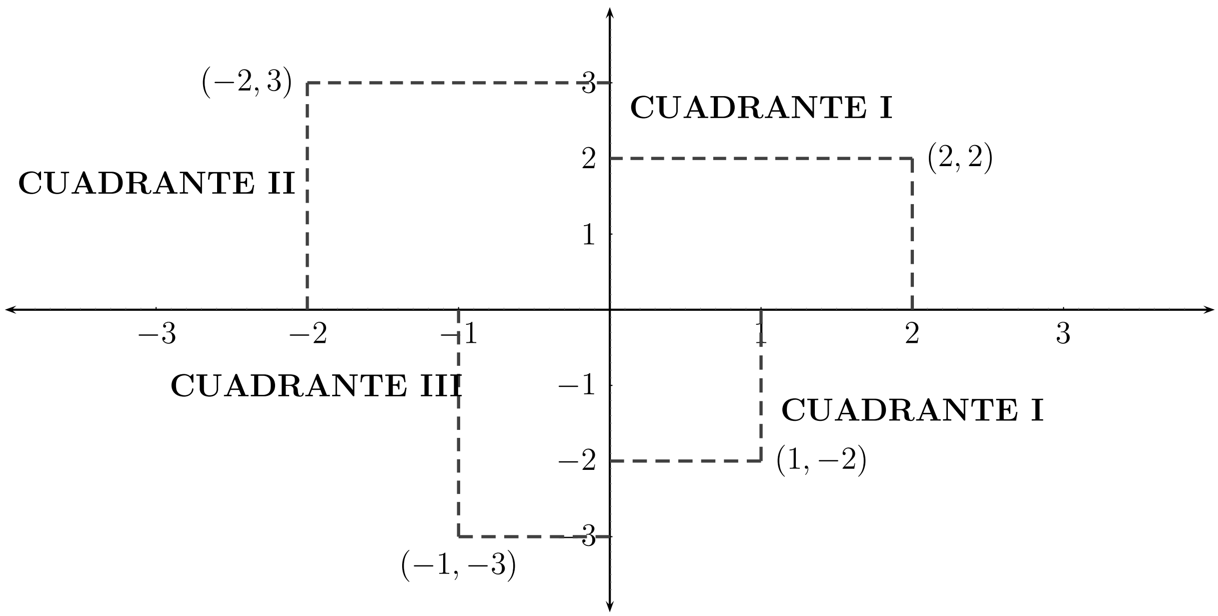
x	$y = 2x + 6$	y
-2	$y = 2(-2) + 6$	2
-1	$y = 2(-1) + 6$	4
0	$y = 2(0) + 6$	6
1	$y = 2(1) + 6$	8
2	$y = 2(2) + 6$	10
3	$y = 2(3) + 6$	12

Además x es denominada la ordenada del punto y y es denominada la abscisa del punto, estas coordenadas se representan de la forma (x, y).

Estas parejas se pueden representar en el plano cartesiano ideado por René Descartes, el cual se forma mediante dos rectas numéricas reales, perpendiculares en donde el punto de intersección de las dos rectas se denomina origen, el cual se representa como el punto $(0, 0)$. La recta numérica horizontal se llama eje x, es aquel donde nosotros colocamos todos los valores independientes; la recta numérica vertical se llama eje y, es aquel en el cual colocamos todos los valores de la variable dependiente, estos ejes los denominamos ejes de coordenadas. Este plano de coordenadas cartesianas también se denomina plano bidimensional.

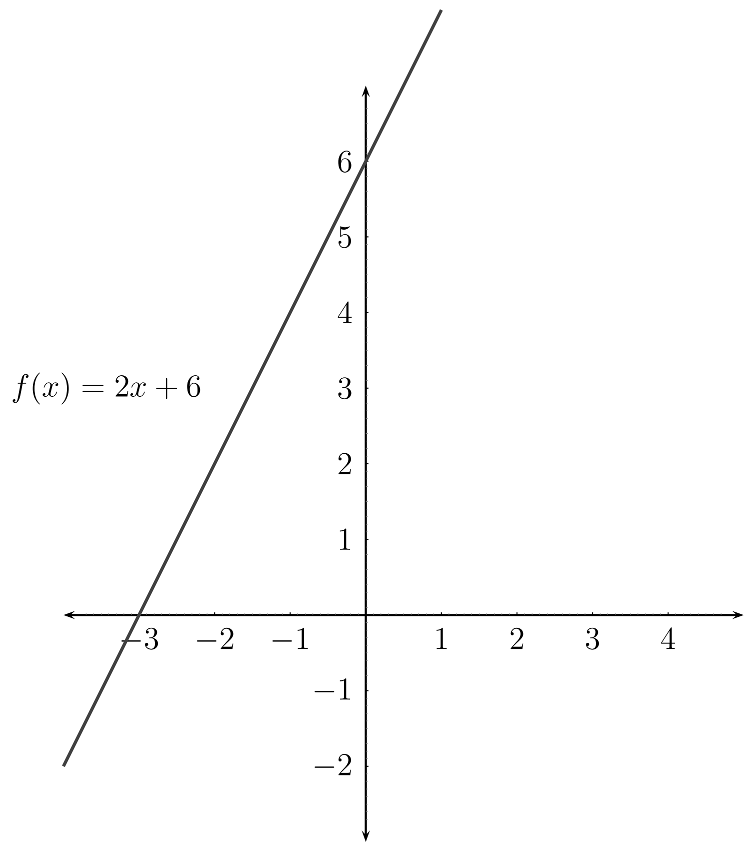
Los ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en cuatro partes llamadas cuadrantes, los cuales se enumeran de I a IV en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En el cuadrante I encontraremos todos los valores para los cuales x y y

son positivos (x, y), en el segundo cuadrante están todos los valores de x negativos y todos los valores y positivos $(-x, y)$, en el tercer cuadrante hallaremos todos los valores para los cuales x y y son negativos $(-x, -y)$ y en el cuarto cuadrante localizaremos todos los valores para los cuales x es positivo y todos los valores y negativos $(x, -y)$. Esto se muestra muy claramente en la siguiente figura:



La coordenada x se determina al proyectar el punto en forma vertical hasta el eje x y la coordenada y se determina mediante la proyección del punto en forma horizontal hasta el eje y. Así, tenemos una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos en el plano y el conjunto de parejas ordenadas de números reales; es decir, cada punto del plano le corresponde una única pareja de números reales y a cada pareja de números reales le corresponde un único punto en el plano.

Ya conociendo el funcionamiento del plano cartesiano podemos exhibir el conjunto de puntos que dan solución a la ecuación $y = 2x + 6$. Si colocamos todos los puntos que dan solución a la ecuación en un plano cartesiano podremos observar que estos puntos van formando una línea recta. Al trazar una línea por todos los puntos, podremos observar dos cosas: primero, que cada pareja que satisfaga la ecuación es un punto sobre la recta; segundo, cada punto de la recta corresponde a una pareja ordenada que satisface la ecuación. Esto se muestra muy claramente en la gráfica que se encuentra en la siguiente página.



Con todo lo anteriormente dicho podemos definir la gráfica de una ecuación como el conjunto de puntos cuyas parejas ordenadas satisfacen la ecuación. Así, la línea recta es la gráfica de la ecuación $y = 2x + 6$. De hecho la gráfica de una ecuación de primer grado con dos variables siempre es una línea recta, con esto se puede concluir el siguiente teorema:

TEOREMA **1.** ***La gráfica de una ecuación de la forma*** $Ax + By = C$ ***donde*** A, B, C ***son números reales con*** B ***diferente de cero es una línea recta.***

Por este motivo una ecuación de la forma $Ax+By = C$ recibe el nombre de ecuación lineal.
Para poder graficar una ecuación lineal basta encontrar dos puntos de la función para después trazar la recta que pasa por estos dos puntos. Las gráficas de ecuaciones lineales siempre se van a intersecar con los ejes de coordenadas, de aquí, podemos escribir esta definición:

DEFINICIÓN **3.** *La* ***intersección de una gráfica con el eje*** x ***(abscisa al origen)*** *son los valores de los puntos donde la gráfica corta el eje* x.
La ***intersección de una gráfica con el eje*** y ***(ordenada al origen)*** *son los valores de los puntos donde la gráfica corta el eje* y.

Observando la gráfica de $y = 2x + 6$, corta al eje x en el punto $(-3, 0)$, además, interseca al eje y en el punto $(0, 6)$. De esto podemos concluir que todos los puntos

que intersecan al eje x son de la forma $(x, 0)$ y todos los puntos que intersectan al eje y son de la forma $(0, y)$. Estas intersecciones con los ejes se pueden determinar al sustituir $y = 0$ en la ecuación y despejamos la variable x, de manera análoga se hacen las intersecciones con el eje y, hacemos $x = 0$ y despejamos y.

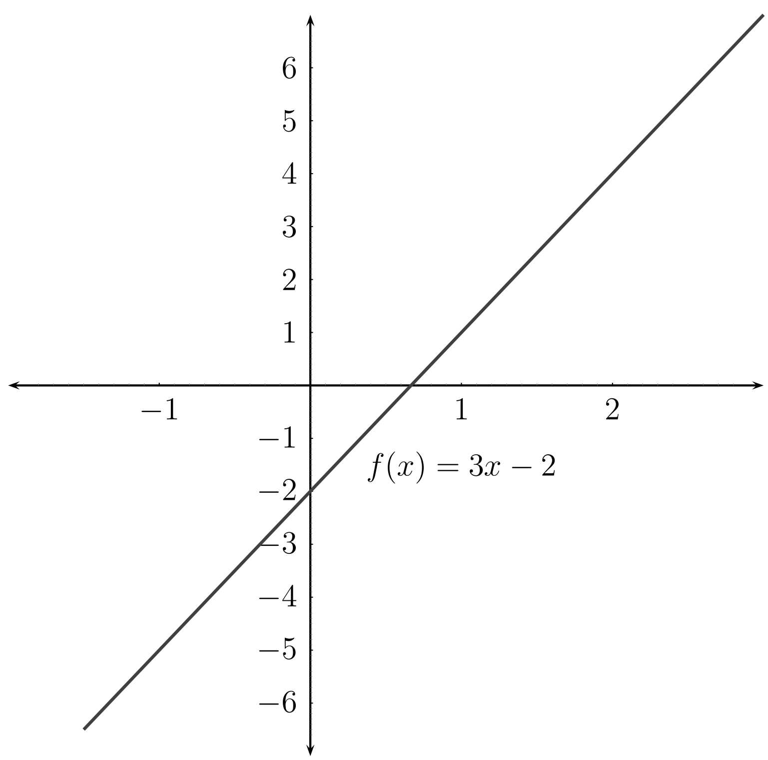
Mostraremos todo lo visto hasta ahora mediante el siguiente ejemplo:

■ Ejemplo **2.** *Graficar la ecuación de la recta $12x - 4y = 8$, encontrar el intercepto con los ejes de coordenadas, realizar la tabla de valores.*

SOLUCIÓN:
Para poder empezar a graficar la ecuación, debemos despejar la variable y de tal forma que obtengamos una ecuación de la forma $y = Ax + C$.
Partimos de la ecuación $12x-4y = 8$, de aquí, $12x-8 = 4y$, de esta manera obtenemos $3x - 2 = y$. Ahora construyamos nuestra tabla de valores:

x	$y = 3x - 2$	y
-2	$y = 3(-2) - 2$	-8
2	$y = 3(2) - 2$	4

Recordemos que con solo tener dos puntos de la ecuación podemos trazar la línea recta que une a los puntos y además son unas de las soluciones de la ecuación inicial.

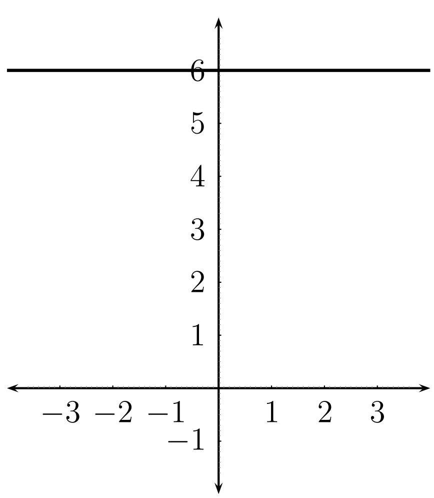


Podemos observar que la gráfica se parece mucho a la gráfica básica de la función lineal vista al inicio del capítulo en la sección de introducción a las funciones, pero tiene una pequeña diferencia, la cual consiste en que no pasa por el origen, sino que tiene un movimiento hacia abajo dos unidades, además, está más inclinada, es decir, se acerca más hacia el eje y. Esto sucede porque la ecuación de la función lineal básica ha cambiado de $y = x$ a $y = Ax + C$. El número real C determina el movimiento de la gráfica básica lineal hacia arriba o hacia abajo, como en este caso C es negativa, entonces, la gráfica se desplaza hacia abajo dos unidades. Además A es mayor que uno, entonces, la gráfica se acerca hacia el eje y. Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho podemos estimar las gráficas de las funciones lineales.
Vamos ahora a encontrar los intersectos con los ejes de coordenadas, lo cual haremos haciendo a $x = 0$ y a $y = 0$, de la siguiente manera:
Como ya tenemos $y = 3x - 2$, hagamos $x = 0$, para obtener $y = 3(0) - 2 = -2$, así obtenemos el punto $(0, -2)$.
Haciendo $y = 0$ tenemos $0 = 3x - 2$, es decir, $2 = 3x$, luego, $\frac{2}{3} = x$, en conclusión obtenemos el punto $(\frac{2}{3}, 0)$.
El punto de intersección con el eje x es $(\frac{2}{3}, 0)$ y el punto de intersección con el eje y es $(0, -2)$.

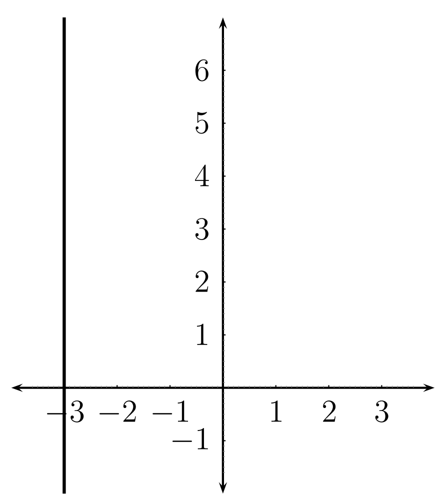
Las ecuaciones de la forma $y = k$ y $x = k$, donde k es un número real, son ecuaciones lineales, en donde la primera es una línea recta paralela al eje x, que intersecta al eje y en el punto $(0, k)$, la segunda es una línea recta que es paralela al eje y, que intersecta al eje x en el punto $(k, 0)$.

Por ejemplo las gráficas de las ecuaciones:

a. $y = 6$, lo cual indica que $A = 0$



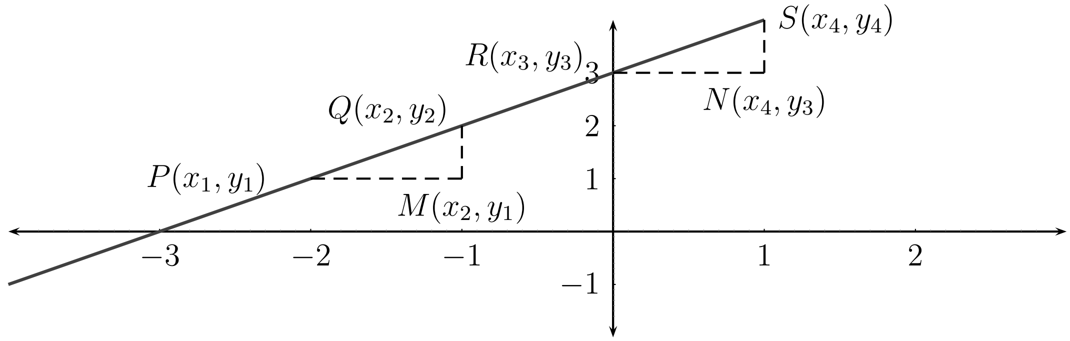
b. $x = -3$, lo cual indica que $B = 0$



1.3. PENDIENTE

En la sección anterior trabajamos la construcción de una gráfica a partir de una ecuación, en esta sección y en la siguiente aprenderemos a determinar la ecuación de una gráfica.
Recuerde que una ecuación es una condición que deben satisfacer todos los puntos sobre la gráfica.

Supongamos que tenemos cualquier recta no vertical L. Elegimos cuatro puntos distintos en L que indicamos por $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, y $S(x_4, y_4)$. También formamos los triángulos rectángulos PQM y RSN. Como se muestra en la siguiente gráfica:



Puesto que los segmentos PM y RN son paralelos, al igual que los segmentos QM y SN tenemos que el $\angle PQM \cong \angle SRN$ (son ángulos correspondientes formados por rectas paralelas) y el $\angle M$ y el $\angle N$ son ángulos rectos. En consecuencia los triángulos son semejantes, por lo tanto, sus lados correspondientes son proporcionales, es decir:

$$\frac{|QM|}{|PM|} = \frac{|SN|}{|RN|}, \text{ así que, } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Nota:$|QM|$ indica la longitud del segmento de recta QM.

De lo anterior podemos concluir que siempre que nos movamos de un punto en una recta vertical a otro punto sobre la recta, la razón del cambio en las coordenadas y con el cambio en las coordenadas x permanece constante para cada recta, esto lo podemos realizar ya que los triángulos son semejantes. A continuación daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4. ***Sea $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera dos puntos distintos en una recta L no vertical. La pendiente de la recta L, que se denota con m, está dada por la siguiente fórmula:***

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como lo dijimos anteriormente no importa los puntos que se escojan de la recta, la razón de cambio no variará, esto lo podemos llevar a nuestra nueva fórmula, cualquier punto que se escoja en la recta la pendiente no cambiará, puesto que la razón de cambio será constante.

Ejemplo **3.** *Determinar la pendiente del segmento de recta que une los dos puntos dados:*

a. $P(2, 5)$ *y* $Q(4, 9)$

b. $R(1, 3)$ *y* $S(3, 2)$

c. $T(-1, 2)$ *y* $U(1, 2)$

d. $V(3, 1)$ *y* $M(3, 5)$

SOLUCIÓN:

a. Utilizamos la fórmula de la pendiente con los dos puntos dados, para calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos P **y** Q**:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

b. Utilizamos la fórmula de la pendiente con los dos puntos dados, para calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos R **y** S**:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 3}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

c. Utilizamos la fórmula de la pendiente con los dos puntos dados, para calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos T **y** U**:**

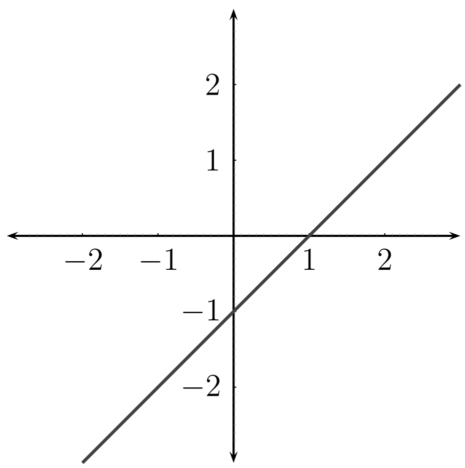
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

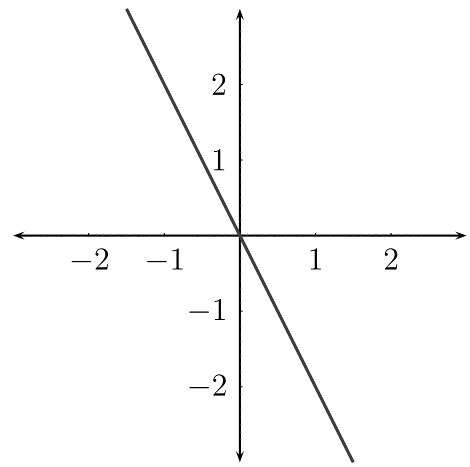
d. Utilizamos la fórmula de la pendiente con los dos puntos dados, para calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos V **y** M**:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{3 - 3} = \frac{4}{0} = indefinido$$

Siempre que describimos una gráfica, la describimos moviéndonos de izquierda a derecha, es decir, la describimos para los valores crecientes de x**.**

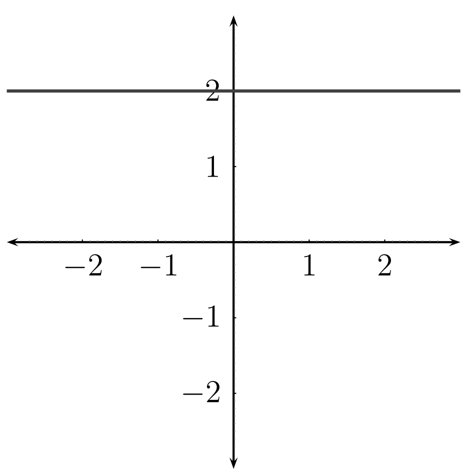
Miremos en la siguiente página la inclinación de la recta y el comportamiento de ella cada vez que la variable x **crece.**

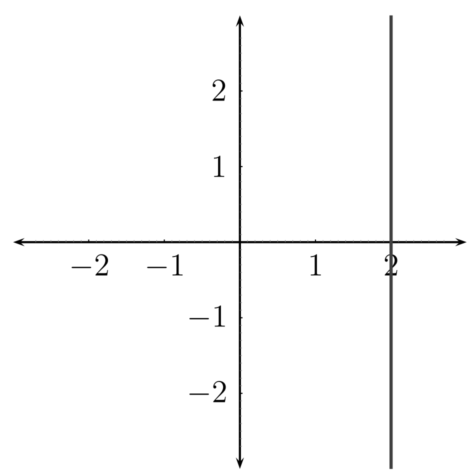




a. **Esta línea es ascendente, esto significa que los valores de y crecen cuando nos movemos de izquierda a derecha.**

b. **Esta línea es descendente, esto significa que los valores de y disminuyen cuando nos movemos de izquierda a derecha.**





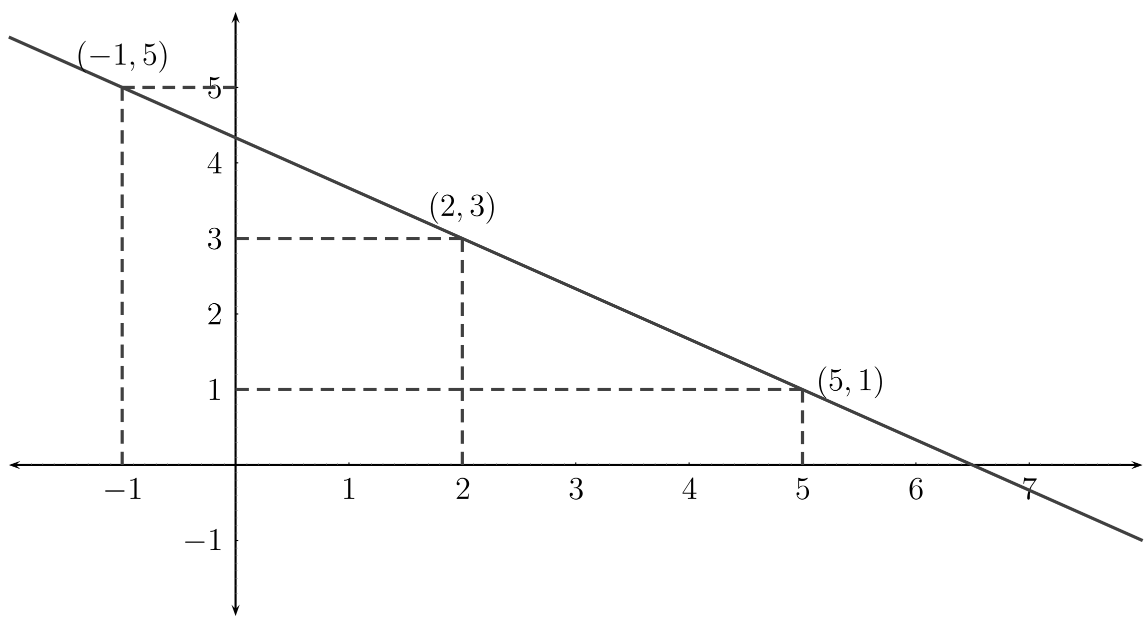
c. **Esta línea no es ascendente ni descendente. Esto significa que los valores de y son constantes cuando nos movemos de izquierda a derecha.**

d. **Como la pendiente es indefinida, esto quiere decir que no hay movimiento de izquierda a derecha, puesto que es una linea vertical.**

Cuando estamos hablando de la pendiente nos referimos al comportamiento de los puntos con respecto a la línea recta. El numerador de la pendiente nos indica el cambio de las unidades en y, y el denominador nos indica el cambio de las unidades de x. Lo anterior lo veremos por medio del siguiente ejemplo:

■ Ejemplo **4.** *Trazar la recta que pasa por el punto* $(2,3)$ *con pendiente* $-\frac{2}{3}$

SOLUCIÓN:
Para poder construir la gráfica debemos tener por lo menos dos puntos. Como ya nos están dando un punto, entonces, debemos averiguar el segundo punto para así poder construirla. Para conseguir el otro punto necesitamos mirar el comportamiento de la pendiente, en otras palabras, debemos determinar la pendiente como $\frac{-2}{3}$**, o,** $\frac{2}{-3}$**. Si la tomamos como la primera razón, entonces, estamos hablando de un cambio de** 3 **unidades hacia la derecha con un cambio de** 2 **unidades hacia abajo. Si la miramos de la segunda manera, nos estamos refiriendo a un cambio de** 3 **unidades a la izquierda con un cambio de** 2 **unidades hacia arriba. En conclusión, el otro punto de la pendiente podría ser** $(5,1)$**, o,** $(-1,5)$**. De cualquier forma terminamos con dos puntos que están contenidos en la misma recta. La siguiente gráfica nos muestra la solución:**

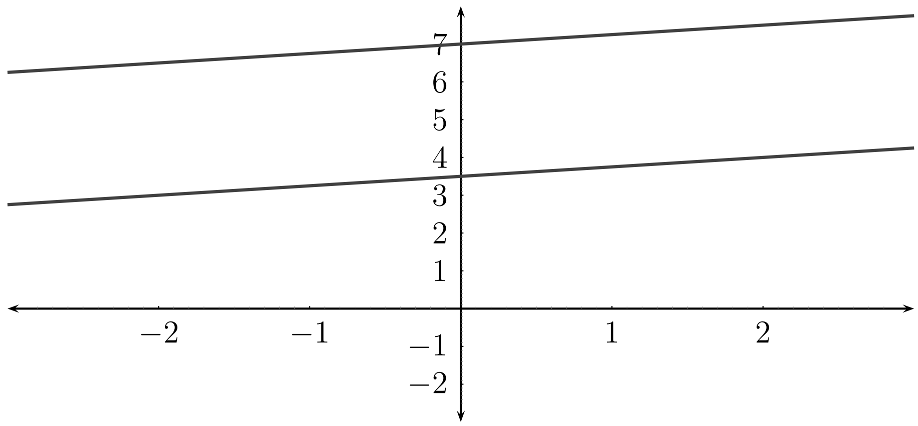


Del anterior ejemplo se puede concluir que con un punto y la pendiente se puede graficar la recta.

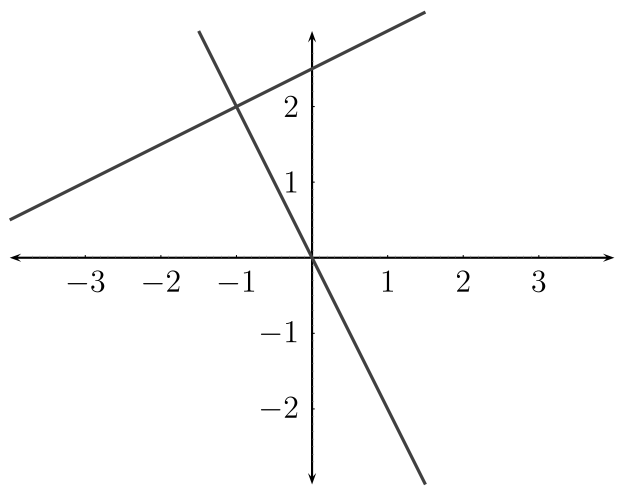
■ Ejemplo **5.** *Construir en un mismo plano cartesiano las rectas que pasan por los siguientes puntos:*

a. $R_1 = (2,4)$ **y** $R_2 = (6,5)$**;** $R_1 = (4,8)$ **y** $R_2 = (12,10)$

b. $R_1 = (-1,2)$ **y** $R_2 = (3,4)$**;** $R_1 = (-2,4)$ **y** $R_2 = (-3,6)$



Podemos observar que las gráficas no se intersectan, esto quiere decir que son paralelas.



Podemos observar que las gráficas se intersectan formando ángulos de 90°, esto quiere decir que las dos rectas son perpendiculares.

Sin graficar también podemos determinar si las rectas son paralelas, perpendiculares, o ninguna de estas, por medio de las pendientes. Esto lo podemos ver más claramente mediante el siguiente teorema:

TEOREMA **2.** *Sean L_1 y L_2 rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces:*

1. *L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.*

2. *L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son reciprocas negativas, es decir, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, o, $m_1 \cdot m_2 = -1$*

Para el ejemplo anterior, hallaremos las pendientes de cada recta, para poder determinar si son paralelas o perpendiculares:

SOLUCIÓN:

a. $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-4}{6-2} = \dfrac{1}{4}$; $m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{10-8}{12-4} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Como m_1 y m_2 son iguales, entonces, las rectas son paralelas.

b. $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-2}{3-(-1)} = \dfrac{2}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;

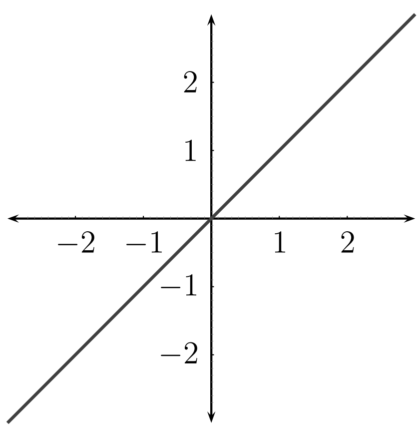
$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-4}{-3-(-2)} = \dfrac{2}{-3+2} = \dfrac{2}{-1} = -2$

Como $m_1 \cdot m_2 = (\frac{1}{2}) \cdot (-2) = -\frac{2}{2} = -1$, entonces, podemos concluir que las rectas son perpendiculares.

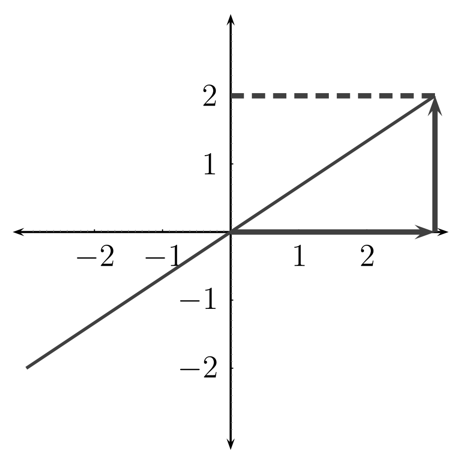
Observemos la graficación de una recta sin tener que realizar tablas de valores, sino, unos principios básicos de graficación:

Ejemplo **6.** *Graficar la función $y = -\frac{2}{3}x + 2$ sin utilizar tabla de valores:*

SOLUCIÓN:
Partiremos de la función básica $y = x$. Como en la ecuación que vamos a analizar, la variable x está acompañada del número $-\frac{2}{3}$, esto quiere decir que la función tiene pendiente $-\frac{2}{3}$, vamos a suponer que la pendiente es positiva $\frac{2}{3}$, luego analicemos está pendiente, por cada tres movimientos hacia la derecha en x tendremos un desplazamiento de dos unidades hacia arriba en y. En conclusión, tendremos una línea con menos inclinación que se acerca más al eje x que la función lineal básica.

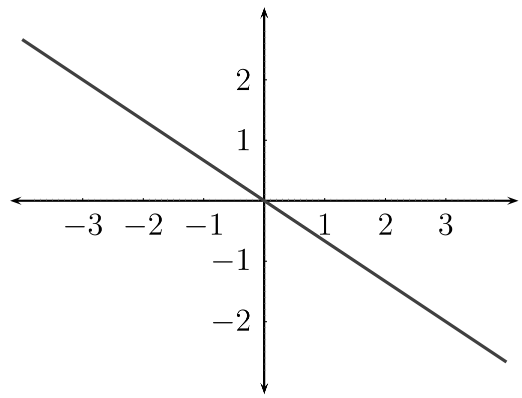


FUNCIÓN $y = x$



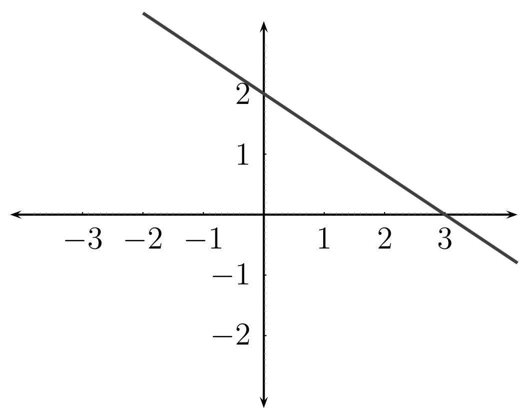
FUNCIÓN $y = \frac{2}{3}x$

Como la pendiente es negativa, esto quiere decir, que la función es decreciente, entonces, todos los valores de y positivos en la gráfica de $y = \frac{2}{3}x$ se tornaran negativos. Por lo tanto, la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x$ se obtendrá al "voltear" la gráfica de $y = \frac{2}{3}x$ "de arriba hacia abajo". Esto se conoce como el principio de graficación $y = -f(x)$. La gráfica será la siguiente:



FUNCIÓN $y = -\frac{2}{3}x$

Ya obtenida la función $y = \frac{2}{3}x$ debemos analizar $y = \frac{2}{3}x + 2$, luego, como a la función $y = \frac{2}{3}x$ se le aumenta dos unidades, esto quiere decir que debemos desplazarla dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica que queríamos.



FUNCIÓN $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Como pudimos ver, con los ejemplos anteriores, para poder graficar una función lineal sin tener que realizar la tabla de valores, debemos aplicar lo que hemos aprendido sobre la pendiente y como es el movimiento de los puntos de la gráfica, además, debemos tener en cuenta algunos principios básicos de graficación que se aplican a todas las funciones, los cuales veremos más adelante con mayor detenimiento en el segundo capítulo de este trabajo.

1.4. ECUACIÓN DE UNA RECTA

En la sección anterior trabajamos la pendiente de una ecuación lineal, la fórmula para poder encontrar la pendiente de determinada gráfica conociendo dos puntos de ella. En esta sección determinaremos la ecuación de la gráfica, como se dijo en la sección anterior, se necesita conocer la pendiente y por lo menos un punto de la gráfica para poder determinar su ecuación, o dos de sus puntos.

Para poder encontrar la ecuación de la recta de una gráfica debemos trabajar con las siguientes fórmulas:

1. **Ecuación de la recta en la forma pendiente−punto:**
   Una recta no vertical con pendiente m **que pasa por el punto** (x_1, y_1)**, se puede expresar mediante la siguiente ecuación:**

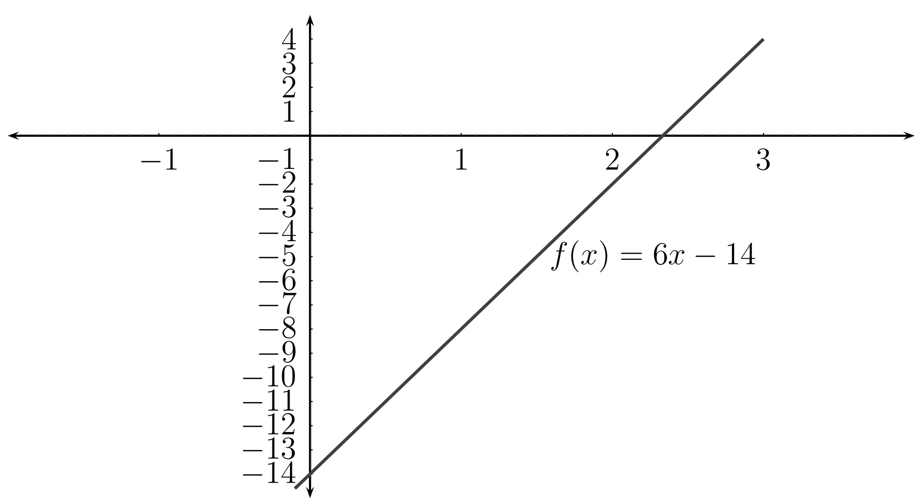
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

■ Ejemplo **7.** *Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(3, 4)$ *con pendiente* $m = 6$

SOLUCIÓN:
Como se tiene un punto y la pendiente podemos trabajar con la formula anterior, de la siguiente manera:

- **Conocemos el punto** (x_1, y_1) **que es** $(3, 4)$
- **Conocemos la pendiente** $m = 6$
- **Podemos trabajar con la fórmula** $y - y_1 = m(x - x_1)$ **de la siguiente manera:** $y - 4 = 6(x - 3) = 6x - 18$**, luego,** $y = 6x - 18 + 4 = 6x - 14$

La siguiente gráfica muestra la función y los puntos anteriormente mencionados:



2. **Ecuación de la recta en la forma Pendiente−ordenada:**
   Una recta no vertical con pendiente m e intersecto $y = b$ tiene por ecuación:

$$y = mx + b$$

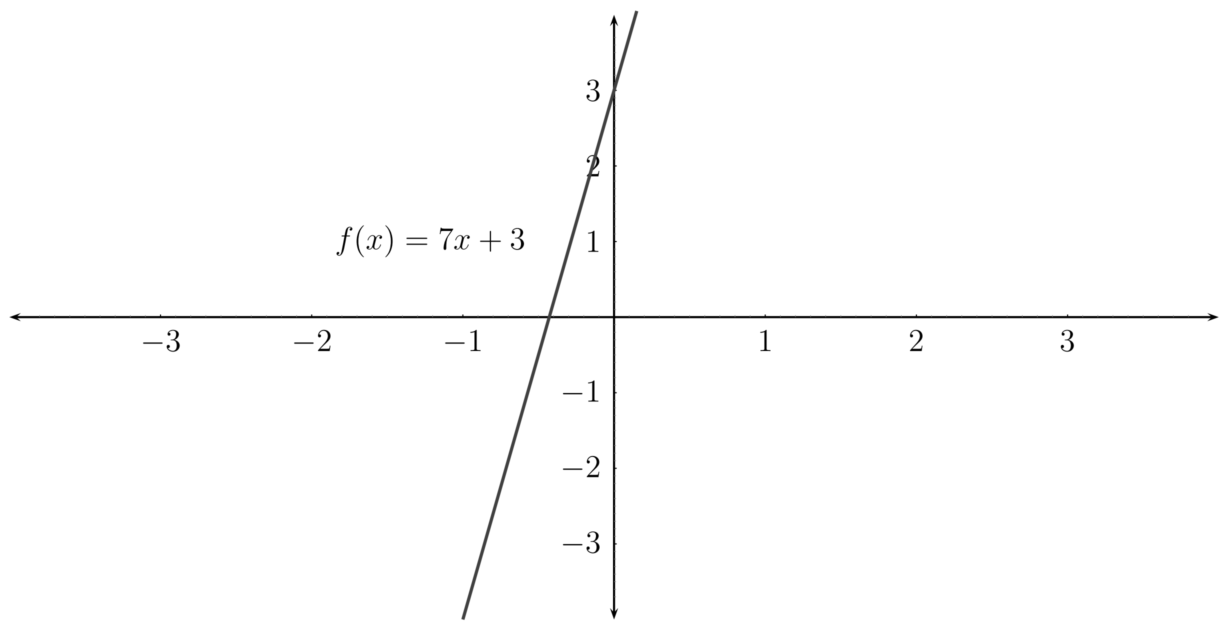
■ Ejemplo **8.** *Escribir la ecuación de la recta que tiene como pendiente $m = 7$ que pasa por el punto $(0, 3)$.*

SOLUCIÓN:

- **Conocemos la pendiente $m = 7$.**
- **Conocemos el punto $(0, 3)$, por tanto, $b = 3$.**
- **Podemos trabajar con la formula $y = mx + b$ de la siguiente manera:**

$$y = 7x + 3$$

Miremos la gráfica de la función obtenida:



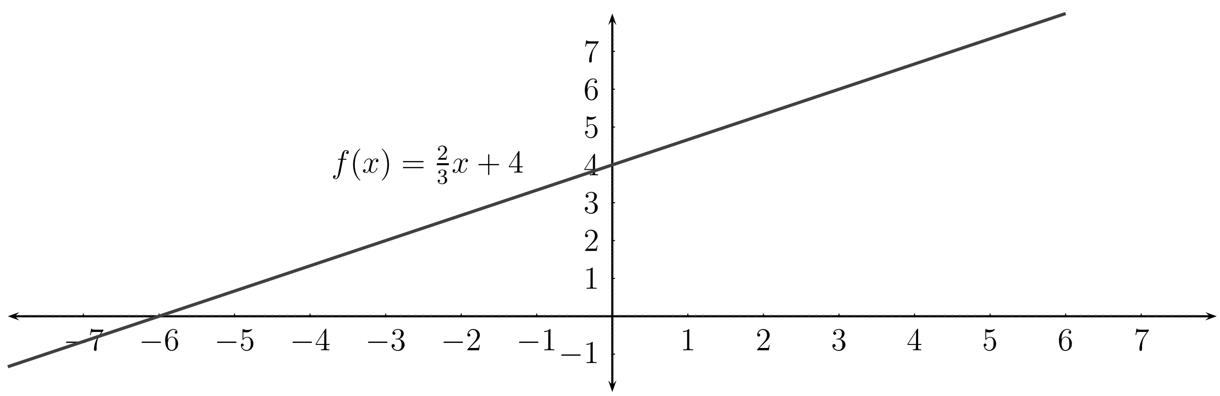
Esta ecuación también la podemos aplicar para encontrar el punto de intersección de la gráfica con el eje y, es decir, podemos determinar b, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

■ Ejemplo **9.** *Escribir la ecuación de la recta que tiene como pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por el punto $(3, 6)$.*

SOLUCIÓN:

- **Conocemos la pendiente** $m = \frac{2}{3}$
- **Conocemos el punto** $(3, 6)$**.**
- **Podemos trabajar con la fórmula** $y = mx + b$**, para encontrar el valor de** b **de la siguiente manera:**
  $6 = \frac{2}{3}(3) + b = 2 + b$**, asi,** $b = 4$
- **Por lo tanto** $y = \frac{2}{3}x + 4$

Observemos la gráfica de la función resultante:



El siguiente ejemplo determina la ecuación de la recta en la cual se conocen dos puntos de ella. La trabajaremos de las dos formas que observamos anteriormente.

■ Ejemplo **10.** *: Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(2, 6)$ *y* $(3, 2)$*.*

SOLUCIÓN:
Para determinar la ecuación de la recta lo primero que debemos obtener es la pendiente:

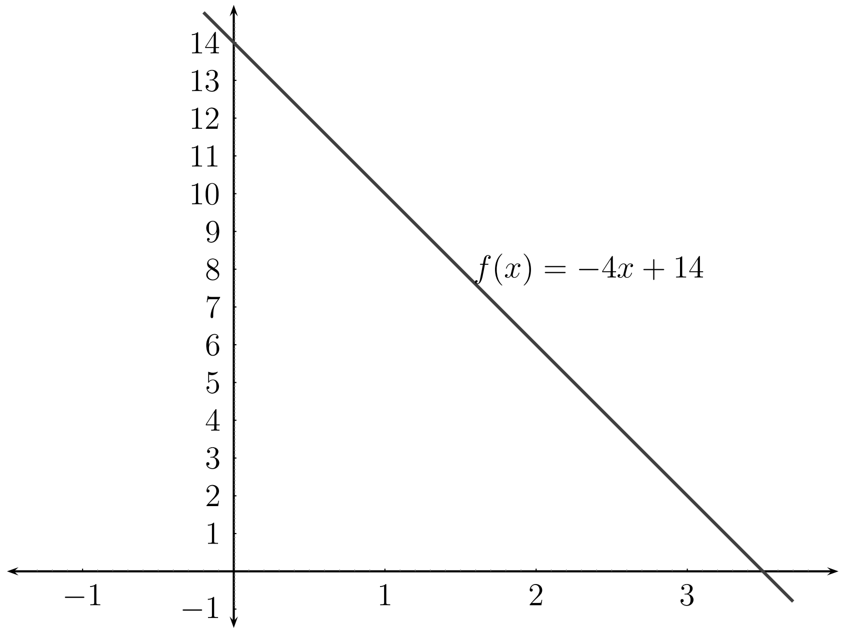
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{3-2} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Si optamos por utilizar la forma punto - pendiente, podemos utilizar cualquiera de los dos puntos dados.

Si utilizamos el punto $(2, 6)$**, obtenemos:**
$y - 6 = -4(x - 2) = -4x + 8$**, así,** $y = -4x + 8 + 6 = -4x + 14$**.**
Si utilizamos el punto $(3, 2)$**, obtenemos:**
$y - 2 = -4(x - 3) = -4x + 12$**, así,** $y = -4x + 12 + 2 = -4x + 14$**.**

Si optamos por utilizar la forma pendiente-ordenada, procedemos como sigue:
Si tomamos el punto $(2, 6)$**, obtenemos:**
$6 = -4(2) + b = -8 + b$**, así,** $6 + 8 = b = 14$**.**
Por lo tanto $y = -4x + 14$**.**

Observemos la gráfica de la ecuación de la recta:



Del anterior ejemplo podemos concluir que no importa la forma que escojamos para encontrar la función, de todas maneras llegamos a la misma ecuación de la recta.

Ejemplo **11.** *Determina la pendiente de la recta cuya ecuación es:*

a. $y = -2x + 8$

b. $3x - 2y = 5$

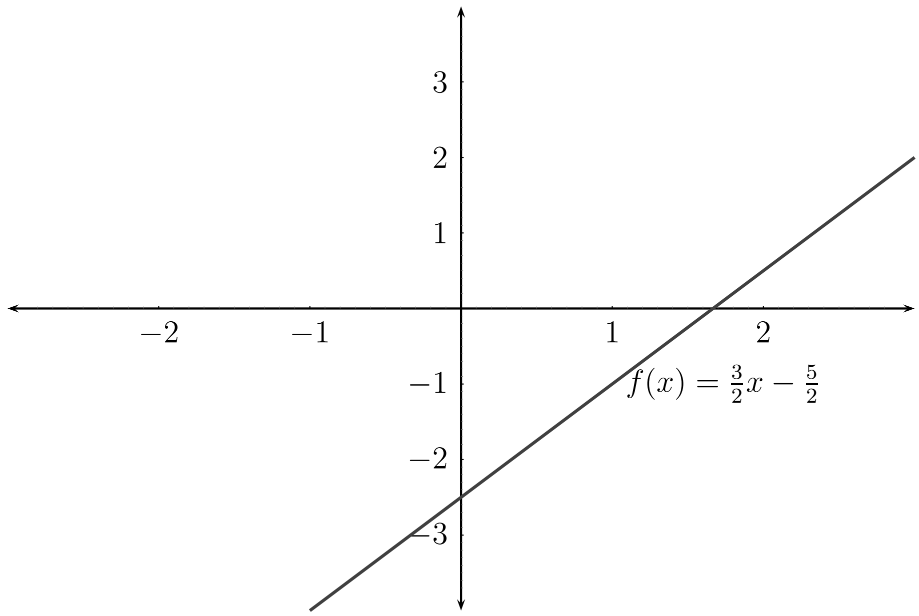
SOLUCIÓN:

a. **Al comparar la ecuación de la recta con la forma pendiente-ordenada, obtenemos lo siguiente:**
$y = -2x + 8$**, donde,** $m = -2$ **y** $b = 8$**, la pendiente de la ecuación es** -2**.**

b. **Para poder encontrar la pendiente en este ejemplo debemos expresar la ecuación de la recta en función de** y**, para esto necesitamos despejar** y **en la ecuación de la siguiente manera:**

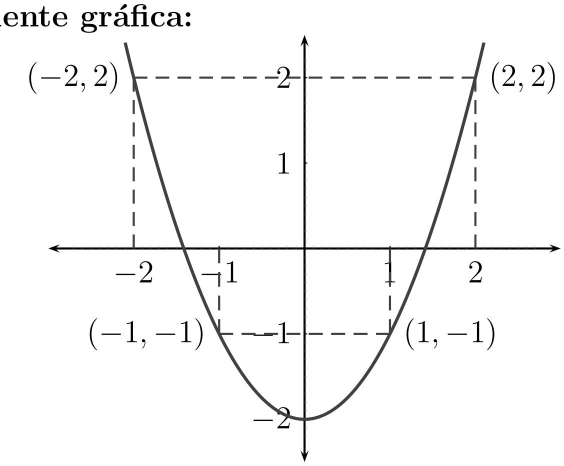
De $3x - 2y = 5$ obtenemos $3x - 5 = 2y$ y de aquí $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = y$.
Utilizando la forma pendiente - ordenada en la ecuación resultante podemos observar que $m = \frac{3}{2}$, es decir, la pendiente es $\frac{3}{2}$.

La gráfica de la ecuación va a ser la siguiente:



1.5. INTRODUCCIÓN AL TRAZO DE CURVAS: SIMETRÍA

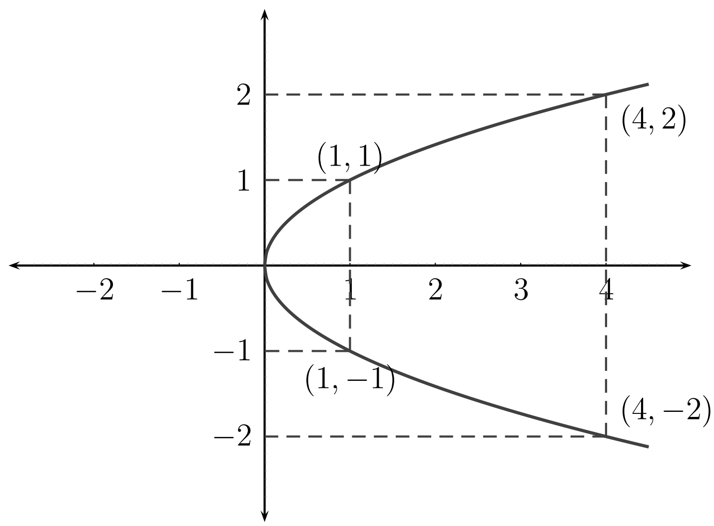
El objetivo principal en esta sección y durante todo el siguiente capítulo será desarrollar la idea de que ciertas características geométricas de una gráfica se pueden determinar examinando las características algebraicas de su ecuación y viceversa.
Consideremos la siguiente gráfica:



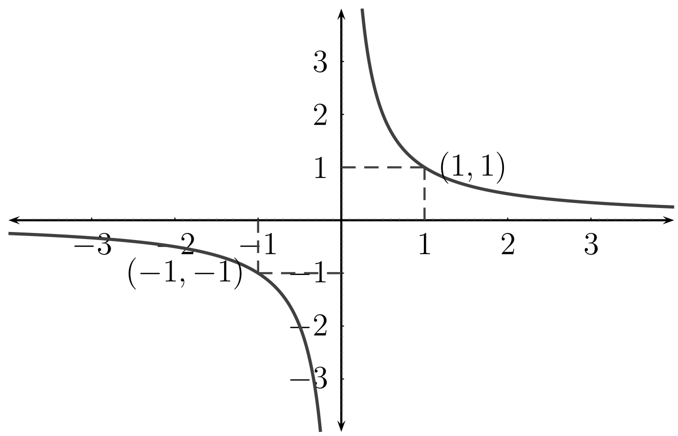
Observemos que si imaginamos un espejo sobre el eje y, entonces, la parte de la gráfica a la izquierda del eje y es la reflexión de la parte de la gráfica a la derecha del eje y (y viceversa). Se dice que dicha gráfica es simétrica con respecto del eje y.
¿Cómo describir esta simetría de forma algebraica?
Si observamos la gráfica vemos que los puntos $(2, 2)$ y $(-2, 2)$ están sobre la gráfica. De manera análoga, también tenemos la siguiente pareja de puntos sobre la gráfica $(-1, -1)$ y $(1, -1)$.

Podemos establecer esto de manera concisa: en general, si una gráfica exhibe simetría con respecto del eje y, entonces, siempre que un punto (x, y) esté sobre la gráfica, también estará $(-x, y)$, esta es una descripción algebraica de la simetría con respecto al eje y. De hecho, por ser tan concisa, por lo general utilizamos esta descripción algebraica para definir este tipo de simetría.

La figura siguiente ilustra otro tipo de simetría. La gráfica de la figura es simétrica con respecto al eje x, puesto que a cada punto (x, y) le corresponde otro punto de la forma $(x, -y)$. De nuevo, podemos establecer esto de manera concisa: siempre que un punto (x, y) este en la gráfica, también lo estará $(x, -y)$.



Aunque podemos describir con facilidad la simetría con respecto de una recta como el eje x o el eje y, la simetría con respecto de un punto es más fácil de describir. En la siguiente gráfica analizaremos la simetría con respecto al origen. Este tipo de simetría se llama simetría con respecto al origen, pues el origen es el punto medio del segmento de recta que une los dos puntos (x, y) y $(-x, -y)$. Observe que siempre que un punto (x, y) esté en la gráfica, tambien estará el punto $(-x, -y)$. La gráfica de la siguiente página muestra muy claramente la simetría respecto al origen.



Así, daremos las siguientes definiciones:

Definición **5.** *Una gráfica es* ***simétrica con respecto del eje*** y *si siempre que* (x, y) *esté en la gráfica,* $(-x, y)$ *también está en la gráfica.*

Definición **6.** *Una gráfica es* ***simétrica con respecto del eje*** x *si siempre que* (x, y) *esté en la gráfica,* $(x, -y)$ *también está en la gráfica.*

Definición **7.** *Una gráfica es* ***simétrica con respecto al origen*** *si siempre que* (x, y) *esté en la gráfica,* $(-x, -y)$ *también está en la gráfica.*

CRITERIOS DE SIMETRÍA

1. **La gráfica de una ecuación exhibe simetría con respecto al eje** y **si al reemplazar** x **por** $-x$ **se obtiene una ecuación equivalente.**

2. **La gráfica de una ecuación exhibe simetría con respecto al eje** x **si al reemplazar** y **por** $-y$ **se obtiene una ecuación equivalente.**

3. **La gráfica de una ecuación exhibe simetría con respecto al origen si al reemplazar** x **por** $-x$ **y a** y **por** $-y$ **se obtiene una ecuación equivalente.**

Ejemplo **12.** *Determinar los tipos de simetría (si los tiene) que exhiben las gráficas de las siguientes ecuaciones:*

a. $y = x^3$

b. $y = x^2 - 4$

c. $y = x^3 - x^2 - 2x$

d. $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN:
Podemos verificar la simetría de cada una de estas situaciones aplicando los criterios de simetría recien descritos. Hacemos esto reemplazando primero x por $-x$ en la ecuación original y viendo si obtenemos una ecuación equivalente; después, hacemos lo mismo reemplazando y por $-y$; por último, reemplazamos x por $-x$ y y por $-y$ y vemos si obtenemos una ecuación equivalente.
Recordemos que una gráfica puede exhibir más de un tipo de simetría, de modo que necesitamos aplicar los criterios de manera individual.

a. **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE y.**

$y = x^3$	**Para verificar la simetría con respecto del eje y reemplazamos x por $-x$.**
$y = (-x)^3 = -x^3$	**Esto no es equivalente a $y = x^3$.** **Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3$ no exhibe simetría con respecto del eje y.**

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE x.**

$y = x^3$	**Para verificar la simetría con respecto del eje x reemplazamos y por $-y$.**
$-y = (x)^3$	**Esto no es equivalente a $y = x^3$.** **Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3$ no exhibe simetría con respecto del eje x.**

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL ORIGEN.**

$y = x^3$	**Para verificar la simetría con respecto del origen reemplazamos x por $-x$, y y por $-y$.**
$-y = (-x)^3$ $-y = -x^3$	**Esto es equivalente a $y = x^3$.** **Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3$ exhibe simetría con respecto del origen.**

b. **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE y.**

$y = x^2 - 4$	**Para verificar la simetría con respecto del eje y reemplazamos x por $-x$.**
$y = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$	**Esta es la ecuación original.** **Por lo tanto, la gráfica de $y = x^2 - 4$ exhibe simetría con respecto del eje y.**

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE x.**

$y = x^2 - 4$ — **Para verificar la simetría con respecto del eje x reemplazamos y por $-y$.**

$-y = x^2 - 4$ — **Esto no es equivalente a $y = x^2 - 4$.**
Por lo tanto, la gráfica de $y = x^2 - 4$ no exhibe simetría con respecto del eje x.

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL ORIGEN.**

$y = x^2 - 4$ — **Para verificar la simetría con respecto del origen reemplazamos x por $-x$, y y por $-y$.**

$-y = (-x)^2 - 4$
$-y = x^2 - 4$ — **Esto no es equivalente a $y = x^2 - 4$.**
Por lo tanto, la gráfica de $y = x^2 - 4$ no exhibe simetría con respecto del origen.

c. VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE y.

$y = x^3 - x^2 - 2x$ — **Para verificar la simetría con respecto del eje y reemplazamos x por $-x$.**

$y = (-x)^3 - (x)^2 - 2x$ — **Esto no es equivalente a $y = x^3 - x^2 - 2x$.**
$y = -x^3 - x^2 + 2x$ — **Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3 - x^2 - 2x$ no exhibe simetría con respecto del eje y.**

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE x.**

$y = x^3 - x^2 - 2x$ — **Para verificar la simetría con respecto del eje x reemplazamos y por $-y$.**

$-y = x^3 - x^2 - 2x$ — **Esto no es equivalente a $y = x^3 - x^2 - 2x$.**
Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3 - x^2 - 2x$ no exhibe simetría con respecto del eje x.

- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL ORIGEN.**

$y = x^3 - x^2 - 2x$ — **Para verificar la simetría con respecto del origen reemplazamos x por $-x$, y y por $-y$.**

$-y = (-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x)$
$-y = -x^3 - x^2 + 2x$ — **Esto no es equivalente a $y = x^3 - x^2 - 2x$.**
Por lo tanto, la gráfica de $y = x^3 - x^2 - 2x$ no exhibe simetría con respecto del origen.

d. **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE y.**

$x^2 + y^2 = 4$	**Para verificar la simetría con respecto del eje y reemplazamos x por $-x$.**
$(-x)^2 + y^2 = 4$	**Esta es la ecuación original.**
$x^2 + y^2 = 4$	**Por lo tanto, la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ exhibe simetría con respecto del eje y.**

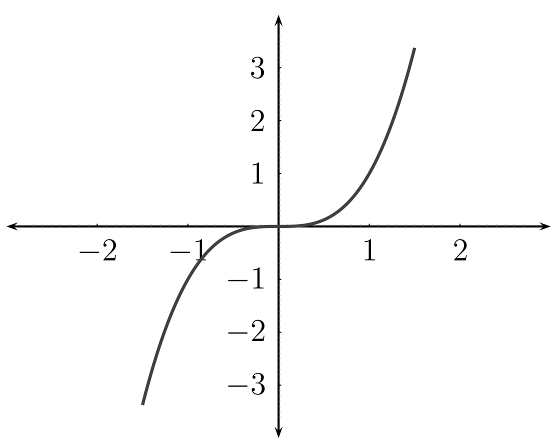
- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL EJE x.**

$x^2 + y^2 = 4$	**Para verificar la simetría con respecto del eje x reemplazamos y por $-y$.**
$x^2 + (-y)^2 = 4$	**Esta es la ecuación original.**
$x^2 + y^2 = 4$	**Por lo tanto, la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ exhibe simetría con respecto del eje x.**

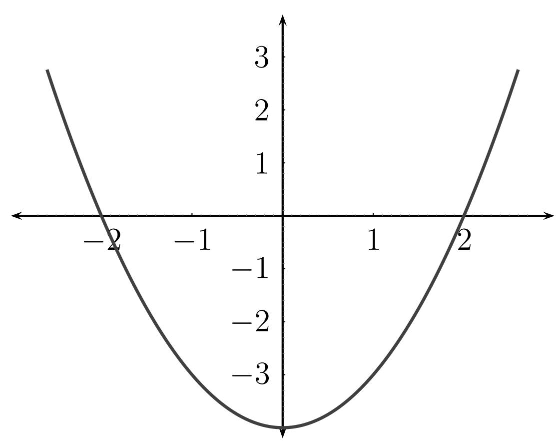
- **VERIFICACIÓN DE SIMETRÍA CON RESPECTO DEL ORIGEN.**

$x^2 + y^2 = 4$	**Para verificar la simetría con respecto del origen reemplazamos x por $-x$, y y por $-y$.**
$(-x)^2 + (-y)^2 = 4$	**Esta es la ecuación original.**
$x^2 + y^2 = 4$	**Por lo tanto, la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ exhibe simetría con respecto del origen.**

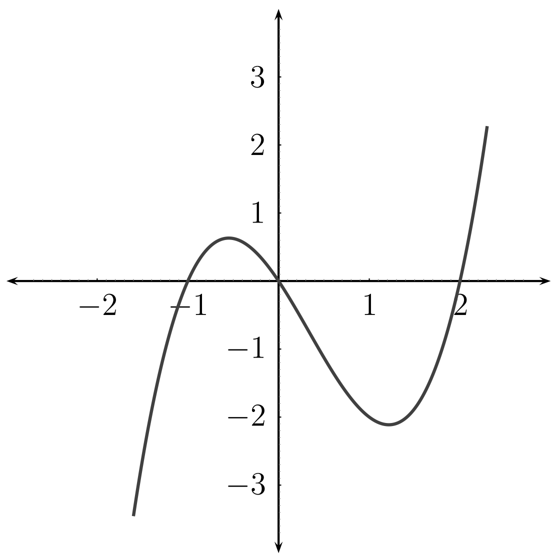
Acontinuación observaremos las gráficas de los ejercicios anteriores:



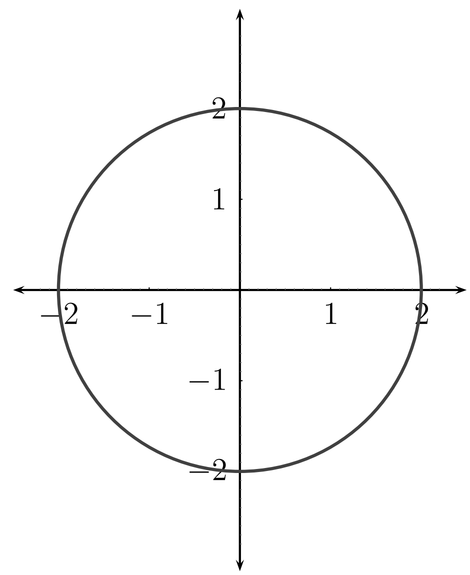
$y = x^3$



$y = x^2 - 4$



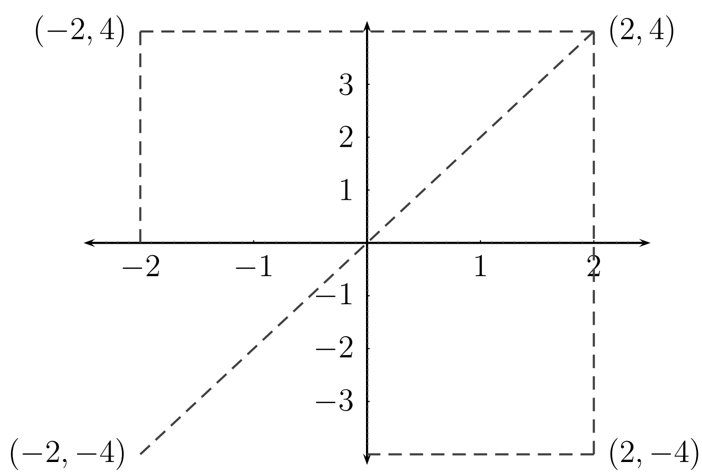
$y = x^3 - x^2 - 2x$



$y = x^2 - y^2 = 4$

Ejemplo **13.** *Determinar el punto simétrico al punto* $(2, 4)$ *con respecto del eje* x*, del eje* y *y del origen:*

SOLUCIÓN:
El punto simétrico al punto $(2, 4)$ con respecto del eje y es el punto con la misma "altura"que $(2, 4)$; por lo tanto, su coordenada y es 4. Está a la misma distancia del eje x, solo que al lado opuesto de este eje; por lo tanto, su coordenada es -2. El punto es $(-2, 4)$.
El punto simétrico al punto $(2, 4)$ con respecto del eje x es el punto con la misma coordenada en x que $(2, 4)$, que es 2. Está a la misma distancia del eje y, solo que al lado opuesto de este eje; por lo tanto, su coordenada en y es -4. El punto es $(2, -4)$. El punto simétrico al punto $(2, 4)$ con respecto del origen es el punto de coordenadas (x, y) opuestas, que es $(-2, -4)$.



A continuación utilizaremos la notación funcional para reescribir las definiciones de simetría dadas anteriormente:

DEFINICIÓN **8.** *La gráfica de una función $y = f(x)$ tiene simetría con respecto del eje y si $f(-x) = f(x)$.*
La gráfica de una función $y = f(x)$ tiene simetría con respecto del origen si $f(-x) = -f(x)$.

Así, para verificar la simetría con respecto del eje y o del origen para una función, examinamos $f(-x)$. Si $f(-x) = f(x)$, entonces, la gráfica de $y = f(x)$ tiene simetría con respecto del eje y; si $f(-x) = -f(x)$, entonces, la gráfica de $y = f(x)$ tiene simetría con respecto del origen.

Ejemplo **14.** *Analice la simetría de las siguientes funciones:*

a. $y = f(x) = 2x^3 - 3x$

b. $y = f(x) = 3x^2 - 6x$

c. $y = f(x) = -x^4 + 5x^2 - 6$

SOLUCIÓN:
Para determinar si las funciones tienen simetría con el eje y o con el origen, debemos analizarlas de acuerdo a las definiciones anteriormente nombradas.

a. Para $y = f(x) = 2x^3 - 3x$
$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x) = -f(x)$.
Por lo tanto, la gráfica tiene simetría con respecto del origen.

b. Para $y = f(x) = 3x^2 - 6x$
$f(-x) = 3(-x)^2 - 6(-x) = 3x^2 + 6x$.
Como no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$, entonces, la gráfica no tiene simetría respecto al eje y ni al origen.

c. Para $y = f(x) = -x^4 + 5x^2 - 6$
$f(-x) = -(-x)^4 + 5(-x)^2 - 6 - x^4 + 5x^2 - 6 = f(x)$.
Por lo tanto la gráfica tiene simetría con respecto al eje y.

Capítulo 2

OTROS TIPOS DE FUNCIONES

En este capítulo trataremos los siguientes temas:

2.1. Funciones cuadráticas.

2.2. Forma canónica de la función cuadrática.

2.3. Funciones exponencial y logarítmica.

2.4. Principios básicos de graficación.

2.5. Funciones polinómicas.

2.1. FUNCIÓN CUADRÁTICA

El modelo de funciones cuadráticas aparece con mucha frecuencia en aplicaciones de la matemática. Por ejemplo, una función que proporciona la altura de un objeto que cae en función del tiempo se llama función de posición. Si no se considera la resistencia del aire, la posición de un objeto que cae admite el modelo cuadrático $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$, donde g representa la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y h_0 la altura inicial.

Como vemos en el modelo cuadrático anterior una de las variables tiene como exponente dos, luego el modelo es un polinomio de grado dos, puesto que dos es el exponente más grande que tiene el polinomio, por lo tanto, a estos modelos de función se les denomina función cuadrática.

DEFINICIÓN **9.** *Una función cuadrática de x es una función cuya ecuación es de la forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ con $A \neq 0$.*

Ejemplo **15.** *Tracemos las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas:*

a. $y = x^2$

b. $y = x^2 + 2$

c. $y = x^2 - 3$

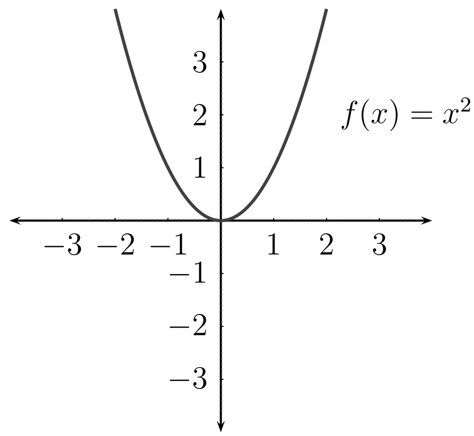
SOLUCIÓN:
Para poder graficar las funciones, lo primero que debemos realizar es la tabla de valores para cada una de las funciones.

a.

x	$y = x^2$	y
-3	$y = (-3)^2$	9
-2	$y = (-2)^2$	4
-1	$y = (-1)^2$	1
0	$y = 0^2$	0
1	$y = (1)^2$	1
2	$y = (2)^2$	4
3	$y = (3)^2$	9

Por medio de la tabla de valores podemos inferir los puntos $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, lo cual nos indica que para (x,y) existe $(-x,y)$, por lo tanto la gráfica es simétrica con respecto del eje y.

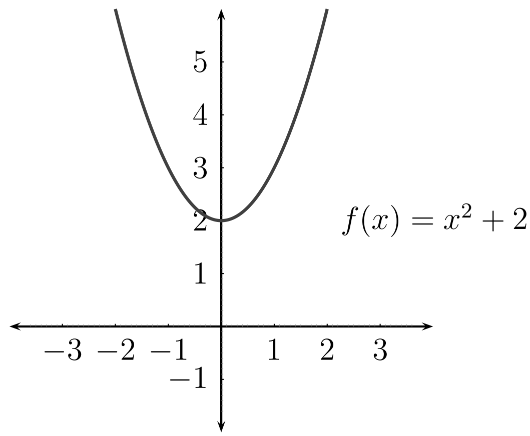
Observemos la gráfica de la función $y = f(x) = x^2$:



b.

x	$y = x^2 + 2$	y
-3	$y = (-3)^2 + 2$	11
-2	$y = (-2)^2 + 2$	6
-1	$y = (-1)^2 + 2$	3
0	$y = 0^2 + 2$	2
1	$y = (1)^2 + 2$	3
2	$y = (2)^2 + 2$	6
3	$y = (3)^2 + 2$	11

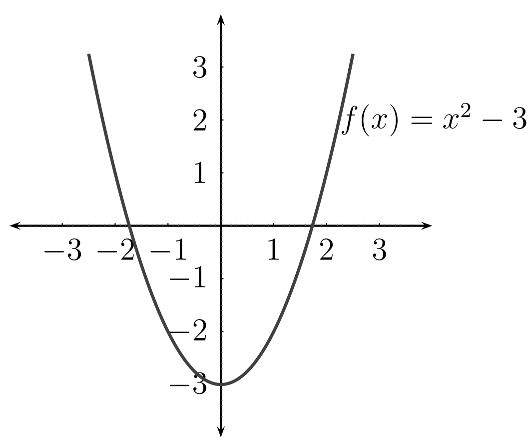
Por medio de la tabla de valores podemos inferir los puntos $(-3,11)$, $(-2,6)$, $(-1,3)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,6)$, $(3,11)$, lo cual nos indica que para (x,y) existe $(-x,y)$, por lo tanto la gráfica es simétrica con respecto del eje y.
Observemos la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 + 2$ que se encuentra en la siguiente página.



c.

x	$y = x^2 - 3$	y
-3	$y = (-3)^2 - 3$	6
-2	$y = (-2)^2 - 3$	3
-1	$y = (-1)^2 - 3$	-2
0	$y = 0^2 - 3$	-3
1	$y = (1)^2 - 3$	-2
2	$y = (2)^2 - 3$	3
3	$y = (3)^2 - 3$	6

Esta gráfica tiene simetría respecto con el eje y.
Observemos la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 - 3$:



De las anteriores gráficas podemos observar que la segunda gráfica tiene la misma forma que la primera, lo que varia es su posición ya que está desplazada dos unidades hacia arriba con respecto a esta.
La tercera gráfica tiene la misma forma que la primera, se diferencian la una a la otra en su posición, puesto que la tercera tiene un desplazamiento de tres unidades hacia abajo con respecto a aquella.
Podemos concluir que la gráfica básica de las funciones cuadráticas es $y = x^2$, la cual observamos su forma en este capítulo y también la trabajamos en la primera sección del primer capítulo. Como lo estudiamos en el capítulo anterior las gráficas lineales tienen algunos principios o técnicas de graficación. En la sección 2.4 estudiaremos los principios o técnicas de graficación de las funciones.

2.2. FORMA CANÓNICA, VÉRTICE Y EJE DE SIMETRÍA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Toda función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$y = f(x) = a(x-h)^2 + k$$

A esta forma de expresión se la llama forma canónica de la función cuadrática. Siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (h, k) son las coordenadas del vértice de la parábola y el eje de simetría será la ordenada $x = h$. Para llegar a esta expresión se parte de la forma polinómica y se realiza el siguiente procedimiento:

Dado:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se extrae a como factor común en el término cuadrático y en el lineal.

$$y = f(x) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x) + c$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto, sumando y restando para no alterar la igualdad.

$$y = f(x) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}) + c - \tfrac{b^2}{4a^2}$$

Se factoriza formando el cuadrado de un binomio.

$$y = f(x) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + c - \tfrac{b^2}{4a^2}$$

sustituyendo:

$$h = -\frac{b}{2a}, k = c - \frac{b^2}{4a^2}$$

la expresión queda:

$$y = a(x-h)^2 + k$$

■ Ejemplo **16.** *Convertir la función cuadrática $y = f(x) = x^2 + 4x + 5$ en su forma canónica, además determinar su vértice y eje de simetría.*

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 5 \\ &= (x^2 + 4x) + 5 \\ &= (x^2 + 4x + 4) + 1 \\ &= (x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Ésta es la forma canónica de la parábola. Donde $a = 1$, $h = -2$ y $k = 1$.
El vértice de la función cuadrática es el punto de coordenada $(-2, 1)$ y eje de simetría $x = -2$.

■ Ejemplo **17.** *Escribir en forma canónica las siguientes funciones y determinar el vértice y eje de simetría.*

a. $y = 3x^2 - 15x + 12$

b. $y = -2x^2 + 8x - 5$

SOLUCIÓN:

a. Primero debemos convertir esta función cuadrática a su forma canónica.

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 15x + 12 \\ &= 3(x^2 - 5x) + 12 \\ &= 3(x^2 - 5x + \tfrac{25}{4}) - \tfrac{27}{4} \\ &= 3(x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{27}{4} \end{aligned}$$

Ésta es la forma canónica, con $a = 3$, $h = \frac{5}{2}$ y $k = -\frac{27}{4}$
El vértice de la función es el punto $(\frac{5}{2}, -\frac{27}{4})$ y el eje de simetría es la ordenada en $x = \frac{5}{2}$.

b. **Debemos trabajar de forma similar a la anterior, primero convertiremos esta función cuadrática a su forma canónica.**

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x - 5 \\ &= -2(x^2 - 4x) - 5 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) + 3 \\ &= -2(x - 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Ésta es la forma canónica, con $a = -2$, $h = 2$ y $k = 3$
El vértice de la función es el punto $(2, 3)$ y el eje de simetría es en $x = 2$.

2.3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las funciones exponenciales son de la forma $y = f(x) = b^x$, donde b es un número real positivo diferente de 1 $(b \neq 1)$ siendo $b > 0$, además, es la base de la función y x es una variable. Se denomina de esta forma ya que la variable se encuentra en el exponente.
Las funciones exponenciales se aplican a fenómenos de la naturaleza como el número de bacterias en un cultivo después de cierto tiempo, la presión atmosférica en función de la altura, planes de ahorro, proyecciones de cualquier población en cierto tiempo, entre otros. Para poder graficar una función exponencial debemos realizar una tabla de valores, ya que no podemos partir de una función principal porque la base de esta función varía de acuerdo al número que deseamos colocar. Las funciones exponenciales se caracterizan por ser una curva que tiene una asíntota en algún punto del eje y.

Ejemplo **18.** *Graficar las siguientes funciones:*

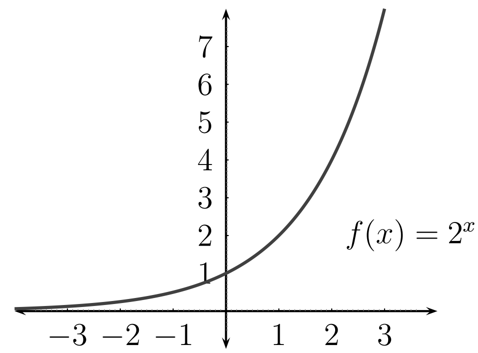
a. $y = 2^x$

b. $y = (\frac{1}{2})^x$

SOLUCIÓN:

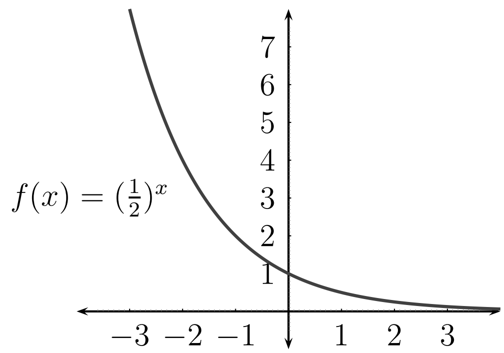
a. **Como hemos dicho anteriormente, para poder graficar las funciones exponenciales debemos realizar una tabla de valores como las realizadas en el primer capítulo, además, en la parte derecha de ella aparece la gráfica correspondiente.**

x	$y = 2^x$	y
-2	$y = 2^{-2}$	$\frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1}$	$\frac{1}{2}$
0	$y = 2^0$	1
1	$y = 2^1$	2
2	$y = 2^2$	4
3	$y = 2^3$	8



b. Vamos a realizar lo mismo con la función $y = (\frac{1}{2})^x$

x	$y = (\frac{1}{2})^x$	y
-2	$y = (\frac{1}{2})^{-2}$	4
-1	$y = (\frac{1}{2})^{-1}$	2
0	$y = (\frac{1}{2})^0$	1
1	$y = (\frac{1}{2})^1$	$\frac{1}{2}$
2	$y = (\frac{1}{2})^2$	$\frac{1}{4}$
3	$y = (\frac{1}{2})^3$	$\frac{1}{8}$



Analicemos la primera gráfica:

1. **Cuando los valores de** x **se van haciendo más grandes** $(x \to +\infty)$**, los valores de** y **aumentan con rapidez.**

2. **Cuando los valores de** x **se van haciendo más pequeños** $(x \to -\infty)$**, los valores de** y **se van acercando cada vez más a cero** (0)**. Así, el eje** x **es una asíntota horizontal, esto quiere decir, que nunca va a tocar el eje horizontal del plano cartesiano.**

3. **Una gráfica de la función exponencial de la forma** $y = b^x$ **nunca tendrá intersecciones con el eje** x**, ya que** $b^x \neq 0$ **para cualquier valor de** x**.**

4. **La gráfica de la función exponencial de la forma** $y = b^x$ **su intersección con el eje** y **es en** 1**, ya que** $b^0 = 1$**.**

Analicemos la segunda gráfica:

1. **Cuando los valores de x se van haciendo más grandes $(x \to +\infty)$, los valores de y se van acercando cada vez más a cero (0). Así, el eje x es una asíntota horizontal, esto quiere decir, que nunca va a tocar el eje horizontal del plano cartesiano.**

2. **Cuando los valores de x se van haciendo más pequeños $(x \to -\infty)$, los valores de y aumentan con rapidez.**

Además, esta gráfica tiene en común con la primera que su punto de intersección con el eje y también es 1 y que sus valores nunca tendrán intersecciones con el eje x.

ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = b^x$ con $b \neq 0$

1. **El dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales.**

2. **El rango de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos.**

3. **La gráfica de $y = b^x$ exhibe un crecimiento exponencial si $b > 1$ o un decrecimiento exponencial si $0 < b < 1$.**

4. **La intersección con el eje y es 1. No existen intersecciones con el eje x.**

5. **El eje x es una asíntota horizontal.**

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Definición **10.** *Una función $f(x) = y = log_b x$ con $b > 0$ y $b \neq 1$, recibe el nombre de función logarítmica.*

Para trazar la gráfica de $y = log_b x$ se procede así:

1. **Se traza la gráfica de $y = b^x$.**

2. **Se traza la recta $y = x$.**

3. **Asumiendo que $y = x$ es un espejo, la gráfica reflejada respecto a $y = x$ es la de $y = log_b x$.**

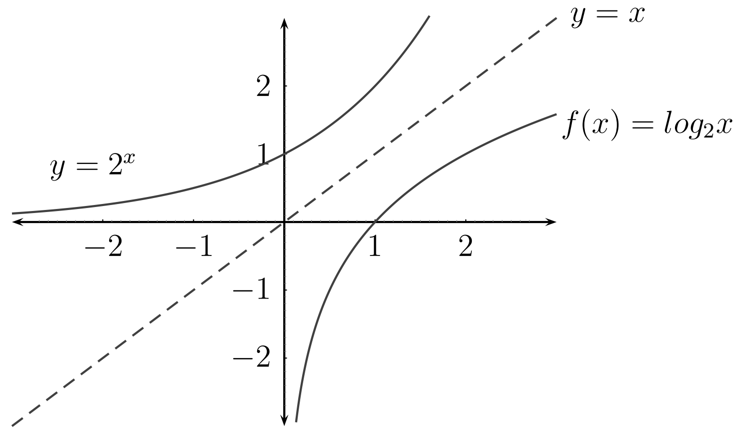
■ Ejemplo **19.** *Graficar las siguientes funciones:*

a. $y = log_2 x$ *b.* $y = log_{\frac{1}{2}} x$

SOLUCIÓN:

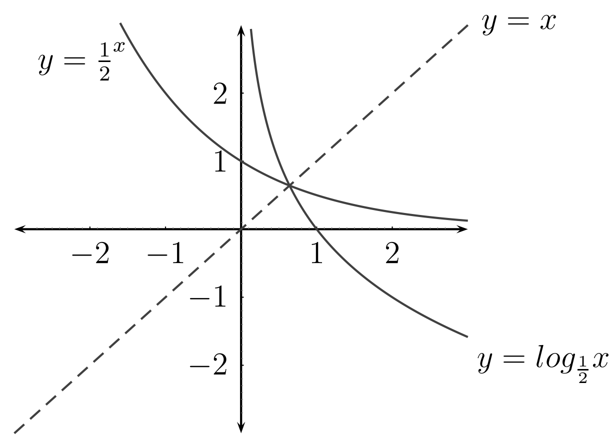
a. Procedamos como se dijo anteriormente:

1. **Se traza la gráfica de $y = 2^x$.**
2. **Se traza la recta $y = x$.**
3. **Asumiendo que $y = x$ es un espejo, la gráfica reflejada respecto a $y = x$ es la de $y = log_2 x$.**



b. Procedamos de la misma manera:

1. **Se traza la gráfica de $y = (\frac{1}{2})^x$.**
2. **Se traza la recta $y = x$.**
3. **Asumiendo que $y = x$ es un espejo, la gráfica reflejada respecto a $y = x$ es la de $y = log_{\frac{1}{2}} x$.**



Analicemos la primera gráfica:

1. **A partir de la gráfica se observa que la curva se encuentra ubicada al lado derecho del eje y, por lo tanto, su dominio es el conjunto de los reales positivos ($\mathbb{R}^+$).**

2. **Cuando los valores de x se van haciendo más grandes ($x \to +\infty$), los valores de y aumentan.**

3. **Cuando los valores de x van tendiendo a cero ($x \to 0$), los valores de y van disminuyendo y se van acercando cada vez más al eje vertical y sin intersecarlo. De esta manera, el eje y es una asíntota vertical, esto quiere decir, que nunca va a tocar el eje vertical del plano cartesiano.**

4. **Una gráfica de la función logarítmica de la forma $y = log_b x$ nunca tendrá intersecciones con el eje y, ya que $x \neq 0$.**

5. **La gráfica de la función logarítmica de la forma $y = log_b x$ su intersección con el eje x es en 1, ya que $log_b 1 = 0$.**

Analicemos la segunda gráfica:

1. **A partir de la gráfica se observa que la curva se encuentra ubicada al lado derecho del eje y, por lo tanto, su dominio es el conjunto de los reales positivos ($\mathbb{R}^+$).**

2. **Cuando los valores de x se van haciendo más grandes ($x \to +\infty$), los valores de y van disminuyendo.**

3. **Cuando los valores de x van tendiendo a cero ($x \to 0$), los valores de y van aumentando y se van acercando cada vez más al eje vertical y sin intersecarlo. De esta manera el eje y es una asíntota vertical, esto quiere decir, que nunca va a tocar el eje vertical del plano cartesiano.**

Además, esta gráfica tiene en común con la primera que su punto de intersección con el eje x también es 1 y que sus valores nunca tendrán intersecciones con el eje y.

ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA $y = log_b x$ con $b \neq 1$

1. **El dominio de la función logarítmica es el conjunto de todos los números reales positivos.**

2. **El rango de la función logarítmica es el conjunto de todos los números reales.**

3. **La gráfica de $y = log_b x$ exhibe un crecimiento logarítmico si $b > 1$ o un decaimiento logarítmico si $0 < b < 1$.**

4. **La intersección con el eje x es 1. No existen intersecciones con el eje y.**

5. **El eje y es una asíntota vertical.**

2.4. PRINCIPIOS BÁSICOS DE GRAFICACIÓN

Uno de los objetivos de nuestro trabajo es familiarizarnos rápidamente con una gran cantidad de gráficas que con frecuencia aparecen en el cálculo. Para ello debemos partir de unas gráficas básicas que son las que se encuentran en el primer capítulo de nuestro libro y con ellas realizar otras gráficas que se reconocerán con mayor facilidad.

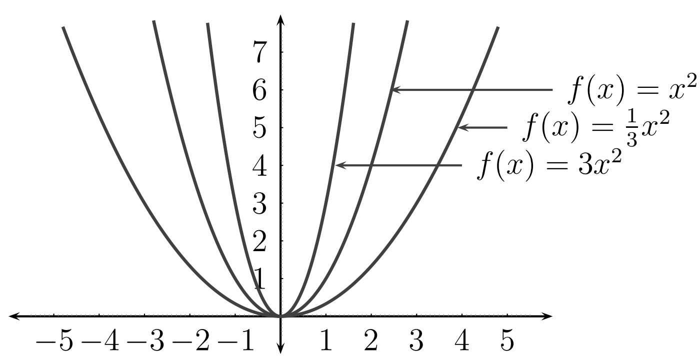
Ejemplo **20.** *Trazar la gráfica $y = x^2$, $y = 3x^2$, e, $y = \frac{1}{3}x^2$.*

SOLUCIÓN:
Observemos los comportamientos de los valores de las tres gráficas y analicémoslas:

x	$y = x^2$	y
-3	$y = (-3)^2$	9
-2	$y = (-2)^2$	4
-1	$y = (-1)^2$	1
0	$y = 0^2$	0
1	$y = (1)^2$	1
2	$y = (2)^2$	4
3	$y = (3)^2$	9

x	$y = f(x) = 3x^2$	y
-3	$f(x) = 3(-3)^2$	27
-2	$f(x) = 3(-2)^2$	12
-1	$f(x) = 3(-1)^2$	3
0	$f(x) = 3(0)^2$	0
1	$f(x) = 3(1)^2$	3
2	$f(x) = 3(2)^2$	12
3	$f(x) = 3(3)^2$	27

x	$y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$	y
-3	$f(x) = \frac{1}{3}(-3)^2$	3
-2	$f(x) = \frac{1}{3}(-2)^2$	$\frac{4}{3}$
-1	$f(x) = \frac{1}{3}(-1)^2$	$\frac{1}{3}$
0	$f(x) = \frac{1}{3}(0)^2$	0
1	$f(x) = \frac{1}{3}(1)^2$	$\frac{1}{3}$
2	$f(x) = \frac{1}{3}(2)^2$	$\frac{4}{3}$
3	$f(x) = \frac{1}{3}(3)^2$	3



Lo anteriormente descrito se conoce como el principio de alargamiento.

PRINCIPIO DE ALARGAMIENTO
(para $a > 0$, $a \neq 0$)

La gráfica de $y = af(x)$ se puede obtener alargando la gráfica de $y = f(x)$. En otras palabras, la gráfica de $y = af(x)$ tendrá la misma forma básica de la gráfica de $y = f(x)$. Si $a > 1$, la gráfica de $y = af(x)$ se obtiene al alargar la gráfica $y = f(x)$ lejos del eje x. Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = af(x)$ se obtiene al "empujar"la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje x.

Utilicemos nuestro conocimiento de la gráfica $y = x^2$ para graficar otras funciones.

■ Ejemplo **21.** *Graficar las siguientes funciones:*

a. $y = f(x) = x^2 + 3$

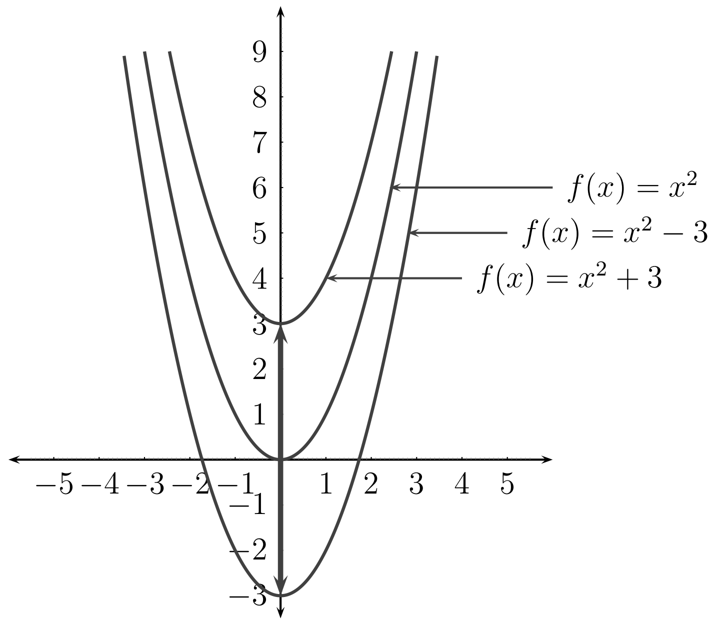
b. $y = f(x) = x^2 - 3$

SOLUCIÓN:
Para construir la gráfica de las funciones las trabajaremos de forma similar como lo hicimos en la función lineal.

a. **Aunque se podría construir una tabla de valores para $y = x^2 + 3$, existe una forma más eficiente de determinar su gráfica. Comparemos los valores de y obtenidos de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$. Para cada valor de x, el valor de y asociado en $y = x^2 + 3$ es tres unidades mayor que el valor de y en la función $y = x^2$. En otras palabras, para un valor de x particular, el punto sobre la gráfica de $y = x^2 + 3$ esta tres unidades más arriba del punto sobre la gráfica de $y = x^2$. Para obtener la gráfica de $y = x^2 + 3$ debemos recorrer la gráfica de $y = x^2$ hacia arriba tres unidades.**

b. **Podemos trabajar la función $y = x^2 - 3$ en forma similar, lo cual indica que para cada valor de x, el valor de y en $y = x^2 - 3$ es tres unidades menor que el valor de y en $y = x^2$, al disminuir el valor de y en la gráfica de $y = x^2$ en tres unidades, se mueve ese punto tres unidades hacia abajo. Por lo tanto, la gráfica de $y = x^2 - 3$ se puede obtener recorriendo la gráfica de $y = x^2$ tres unidades hacia abajo.**

Lo anteriormente descrito lo observaremos de forma más clara por medio de la gráfica que aparece en la siguiente página.



El anterior proceso es conocido como el siguiente principio:

PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTO VERTICAL
(para $c > 0$)

Para obtener la gráfica de	**Se recorre la gráfica de** $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	c **unidades hacia arriba.**
$y = f(x) - c$	c **unidades hacia abajo.**

Ejemplo **22.** *Utilizar la gráfica* $y = x^2$ *para trazar las gráficas de:*

a. $y = f(x) = (x + 2)^2$

b. $y = f(x) = (x - 3)^2$

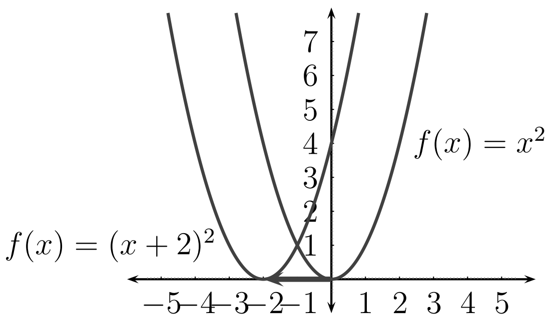
SOLUCIÓN:

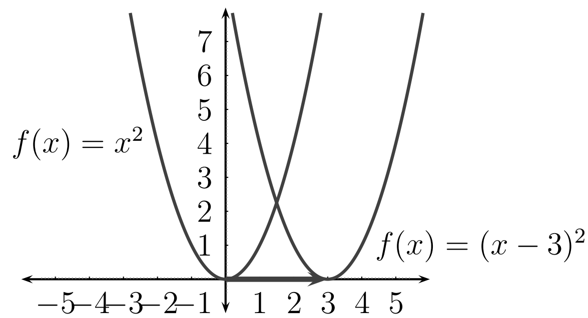
a. Si observamos la función $y = x^2$**, reconocemos que** y **no puede asumir valores negativos. De hecho el valor mínimo de** y **es cero, que ocurre cuando la entrada** x **se anula. Esto se refleja en la gráfica mediante el hecho de que el punto más bajo de la gráfica** $y = x^2$ **es el origen, es decir,** $y = 0$**, cuando** $x = 0$**.**
Si ahora observamos la función $y = f(x) = (x + 2)^2$**, de nuevo reconocemos que** y **no puede ser negativa. El valor mínimo posible para** y **es cero, y esto ocurre**

cuando $x + 2 = 0$, o cuando $x = -2$. Así, el punto más bajo sobre la gráfica $y = f(x) = (x + 2)^2$ es $(-2, 0)$. Así, la gráfica de $y = f(x) = (x + 2)^2$ se puede obtener corriendo la gráfica $y = x^2$ dos unidades hacia la izquierda.

b. **Se puede realizar un análisis similar para $y = f(x) = (x - 3)^2$ nos dice que el punto más bajo sobre la gráfica aparecerá cuando $x - 3 = 0$; es decir, cuando la entrada sea $x = 3$. Esto sugiere que la gráfica $y = f(x) = (x - 3)^2$ se puede obtener corriendo la gráfica $y = x^2$ tres unidades hacia la derecha.**

Observemos lo anteriormente analizado por medio de las gráficas:





Podemos generalizar el resultado de los dos anteriores ejercicios en el siguiente principio de graficación:

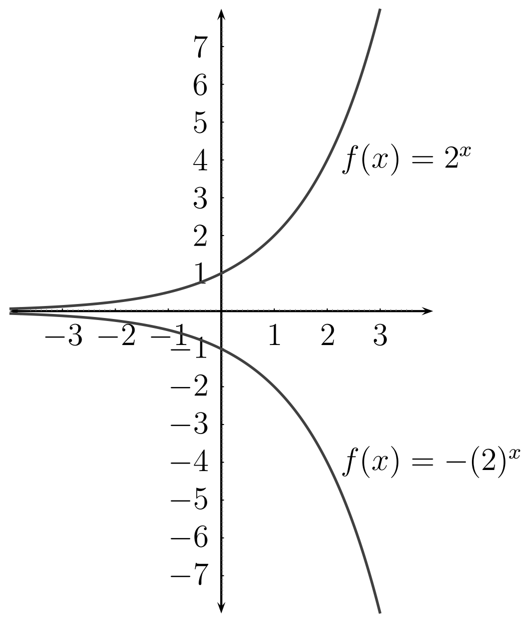
PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL
(para $c > 0$)

Para obtener la gráfica de	**Se recorre la gráfica de $y = f(x)$**
$y = f(x + c)$	c **unidades hacia la izquierda.**
$y = f(x - c)$	c **unidades hacia la derecha.**

Utilicemos el conocimiento de la función exponencial $y = 2^x$ para observar otras funciones.

Ejemplo **23.** *Graficar la función* $y = f(x) = -(2)^x$

SOLUCIÓN:
Para obtener la gráfica $y = -(2)^x$, comencemos con la gráfica $y = 2^x$, que es la gráfica básica de crecimiento exponencial, como hay un signo negativo que antecede a la función exponencial básica ya conocida, lo cual nos indica que son los opuestos de los valores de y de la función básica. Entonces decimos que la gráfica $y = -(2)^x$ se obtiene reflejando la gráfica $y = 2^x$ con respecto del eje x.



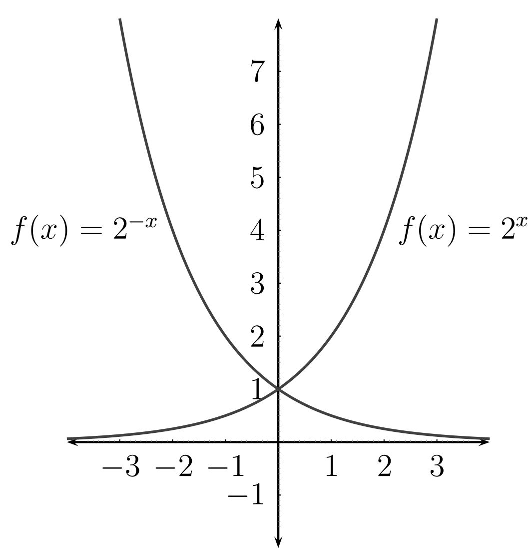
Este principio de graficación es conocido como:

PRINCIPIO DE GRAFICACIÓN
PARA $y = -f(x)$

Para obtener la gráfica de $y = -f(x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x.

Ejemplo **24.** *Graficar la función $y = f(x) = 2^{-x}$*

SOLUCIÓN:
Para obtener la gráfica $y = 2^{-x}$, comencemos con la gráfica $y = 2^x$, que es la gráfica básica de crecimiento exponencial, como hay un signo negativo que antecede a la variable de la función exponencial básica ya conocida, lo cual nos indica que son los opuestos de los valores de x de la función básica. Entonces decimos que la gráfica $y = 2^{-x}$ se obtiene reflejando la gráfica $y = 2^x$ con respecto del eje y.



Este principio de graficación es conocido como:

PRINCIPIO DE GRAFICACIÓN
PARA $y = f(-x)$

Para obtener la gráfica de $y = f(-x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y.

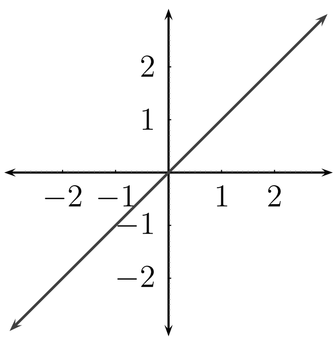
Ahora añadiremos otra gráfica a nuestro catalogo de gráficas básicas y al hacerlo, estableceremos otro principio de graficación:

Ejemplo **25.** *Trazar la gráfica* $y = f(x) = |x|$.

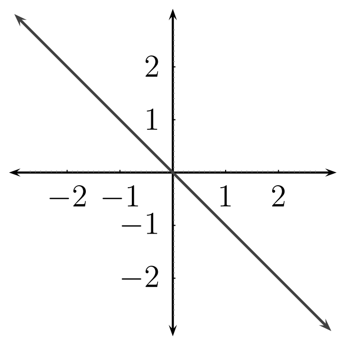
SOLUCIÓN:
A continuación se darán dos métodos. El primero consiste en recordar la definición de valor absoluto, que es:

$$y = \begin{cases} x \textbf{ si } x \geq 0 \\ -x \textbf{ si } x < 0 \end{cases}$$

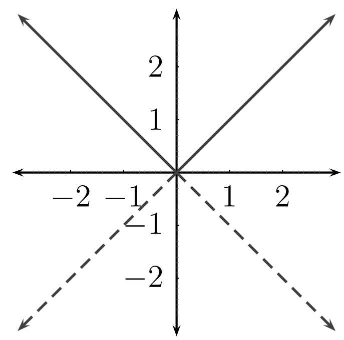
De hecho buscamos la gráfica de una función definida por partes. La gráfica de $y = |x|$ **se verá como la gráfica de** $y = x$**, para** $x \geq 0$ **y como la gráfica de** $y = -x$**, para** $x < 0$**.**
Las gráficas aparecen a continuación en las figuras (a) y (b). La gráfica de $y = f(x) = |x|$ **aparece en la figura (c).**



(a) $y = x$

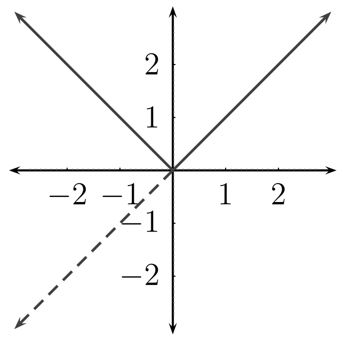


(b) $y = -x$



(c) $y = |x|$

En el segundo método obtenemos la grafica de $y = f(x) = |x|$ **observando la gráfica "inicial"; es decir, la gráfica de la función sin el valor absoluto. Analizamos después el efecto que el valor absoluto tiene sobre la gráfica inicial. Si eliminamos el valor absoluto, obtenemos la ecuación** $y = x$**, cuya gráfica aparece en la figura anterior. ¿Cómo se comparan los valores de** y **en la gráfica de** $y = |x|$ **con los de la gráfica inicial** $y = x$**?**
Para los valores de x **tales que** x **es positivo o cero en la gráfica inicial, el valor absoluto no tiene efecto alguno. Para los valores de** x **tales que** x **es negativo en la gráfica inicial, el valor absoluto lo hace positivo.**
Así, reconocemos que el valor absoluto tiene el siguiente efecto sobre la gráfica inicial: la parte de la gráfica inicial en o sobre el eje x **no es afectada por el valor absoluto, mientras que la parte de la gráfica inicial por debajo del eje** x **se refleja sobre el eje** x**.**
Este método de graficación de $y = f(x) = |x|$ **aparece en la siguiente figura. Observe que la gráfica inicial** $y = x$ **se muestra como una línea punteada.**



El segundo método utilizado en el último ejemplo se puede utilizar para responder en forma más general la siguiente pregunta. Supongamos que se conoce la gráfica de $y = f(x)$ (que llamaremos gráfica inicial). ¿Cómo podemos obtener la gráfica de $y = |f(x)|$?
Siempre que $f(x)$ sea no negativo el valor absoluto no le afectará, mientras que siempre que $f(x)$ sea negativo, el valor absoluto lo hará positivo.
El valor absoluto de una función se puede expresar mediante el siguiente principio:

PRINCIPIO DE GRAFICACIÓN DE $y = |f(x)|$

Para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$, comenzamos con la gráfica de la función inicial $y = f(x)$.

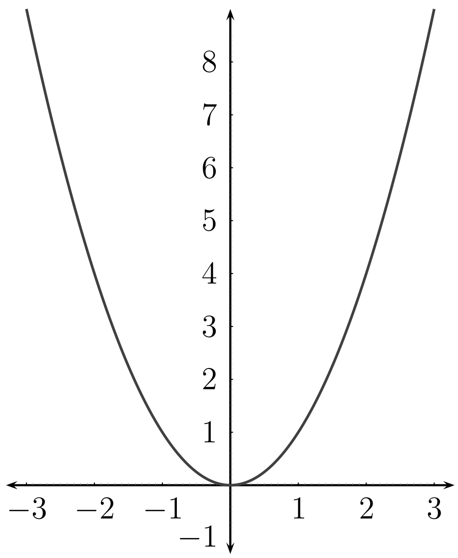
1. **Dejamos sin cambio la parte de la gráfica inicial en o sobre el eje x.**

2. **Consideramos la parte de la gráfica sin el valor absoluto que se encuentra por debajo del eje x y la reflejamos con respecto del eje x.**

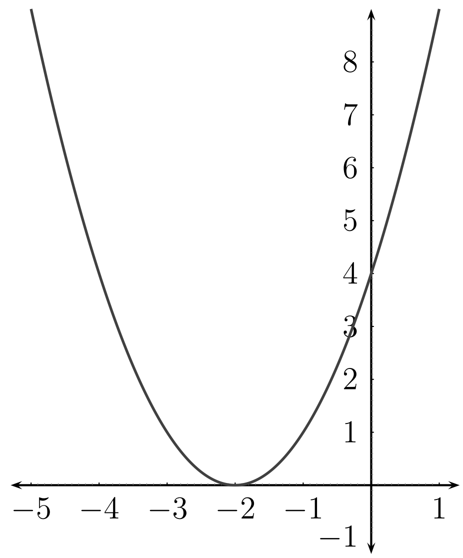
A continuación mostraremos por medio de ejemplos los diferentes principios de graficación en forma combinada:

Ejemplo **26.** *Graficar la función:* $y = |(x+2)^2 - 1|$

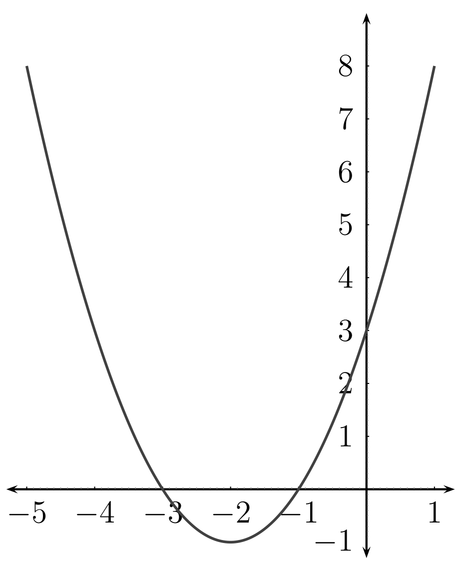
SOLUCIÓN:
Para poder graficar la función debemos tener en cuenta que es una función cuadrática que se va a desplazar dos unidades hacia la izquierda respecto a la función básica $y = x^2$, de esta manera graficamos $y = (x+2)^2$, luego esta función debemos desplazarla una unidad hacia abajo para obtener $y = (x+2)^2 - 1$. Como la gráfica en el intervalo de $(-3, -1)$ va a quedar debajo del eje x, entonces por el valor absoluto esta parte la reflejaremos con respecto al eje x, para asi conseguir finalmente la función $y = |(x+2)^2 - 1|$. Observemos a continuación las gráficas del procedimiento anteriormente decrito:



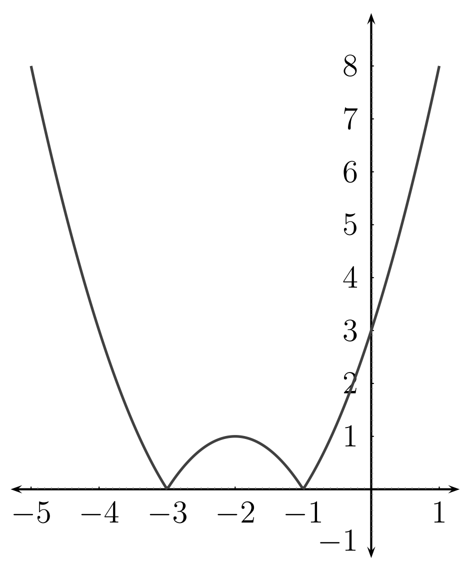
$y = x^2$



$y = (x+2)^2$



$y = (x+2)^2 - 1$



$y = |(x+2)^2 - 1|$

2.5. FUNCIONES POLINÓMICAS

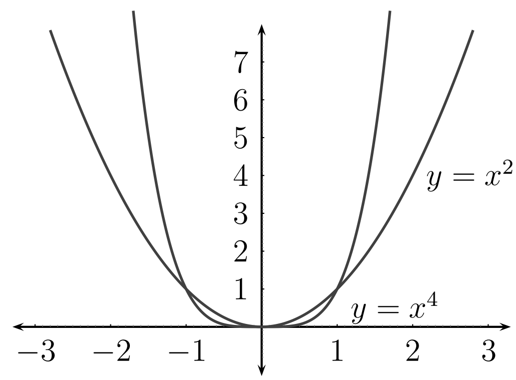
Una función polinómica es una expresión de la forma:

$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Cada a_i es un número real, y n es un número entero no negativo. a_n se llama el coeficiente dominante (principal). Se dice que una función de este tipo es de grado n. De la definición podemos ver que el dominio de una función polinómica es el conjunto de todos los números reales. Recuerde que un polinomio de grado 1 es una función líneal y un polinomio de grado 2 es una función cuadrática.

Consideremos primero los enteros positivos pares n. Si $n = 2$, entonces, tratamos con una función cuadrática cuya gráfica es una parábola. Para tener una idea del comportamiento de estas funciones, consideramos los valores de $y = x^2$ y $y = x^4$ y las gráficas que obtenemos de esta tabla.

x	$y = x^2$	$y = x^4$
-3	$y = (-3)^2 = 9$	$y = (-3)^4 = 81$
-2	$y = (-2)^2 = 4$	$y = (-2)^4 = 16$
-1	$y = (-1)^2 = 1$	$y = (-1)^4 = 1$
0	$y = 0^2 = 0$	$y = 0^4 = 0$
1	$y = 1^2 = 1$	$y = 1^4 = 1$
2	$y = 2^2 = 4$	$y = 2^4 = 16$
3	$y = 3^2 = 9$	$y = 3^4 = 81$

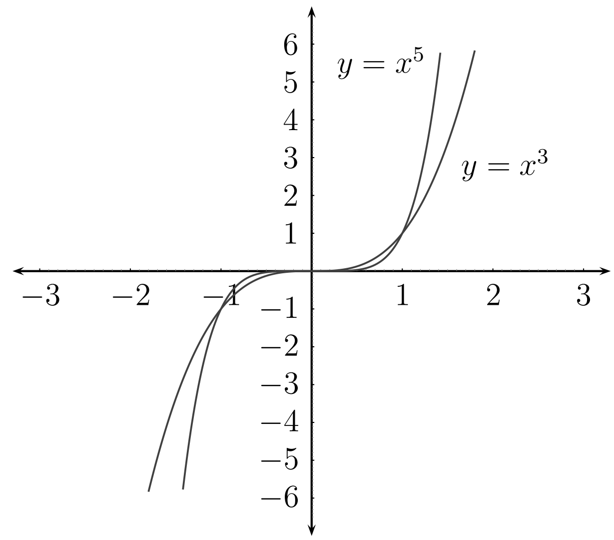


Al observar las gráficas podemos ver que en el intervalo $(-1, 1)$, la gráfica $y = x^4$ es más plana que la gráfica $y = x^2$, mientras que fuera de este intervalo (es decir, para $x < -1$ o $x > 1$), la gráfica de $y = x^4$ es más vertical que la gráfica de $y = x^2$. En otras palabras, para $-1 < x < 1$, la gráfica de $y = x^4$ está por debajo de la gráfica $y = x^2$, pero cuando $x < -1$ o $x > 1$, las posiciones de las gráficas se invierten.

Es importante reconocer que las gráficas de $y = x^n$, cuando n es par, son similares, pero no idénticas. Cuando n crece (pero sigue siendo par), las gráficas de $y = x^n$ se aplanan más en el intervalo $(-1, 1)$ y fuera de este intervalo tienen una pendiente más pronunciada (como miramos en la gráfica anterior).

Examinemos ahora las gráficas de $y = x^n$ para enteros impares $n > 1$. Comencemos con la función $y = x^3$. Calculemos una tabla de valores para $y = x^3$ y $y = x^5$ y tracemos la gráfica sugerida.

x	$y = x^3$	$y = x^5$
-3	$y = (-3)^3 = -27$	$y = (-3)^5 = -243$
-2	$y = (-2)3 = -8$	$y = (-2)^5 = -32$
-1	$y = (-1)^3 = -1$	$y = (-1)^5 = -1$
0	$y = 0^3 = 0$	$y = 0^5 = 0$
1	$y = 1^3 = 1$	$y = 1^5 = 1$
2	$y = 2^3 = 8$	$y = 2^5 = 32$
3	$y = 3^3 = 27$	$y = 3^5 = 243$



Es importante reconocer que las gráficas $y = x^3$ y $y = x^5$ son similares pero no idénticas. Cuando n crece (pero sigue siendo n impar), las gráficas de $y = x^n$ tienen forma similar pero son mas planas en el intervalo $(-1, 1)$ y fuera de este intervalo tienen una pendiente mas pronunciada como se observó en la figura.

Ejemplo **27.** *Trazar las gráficas de:*

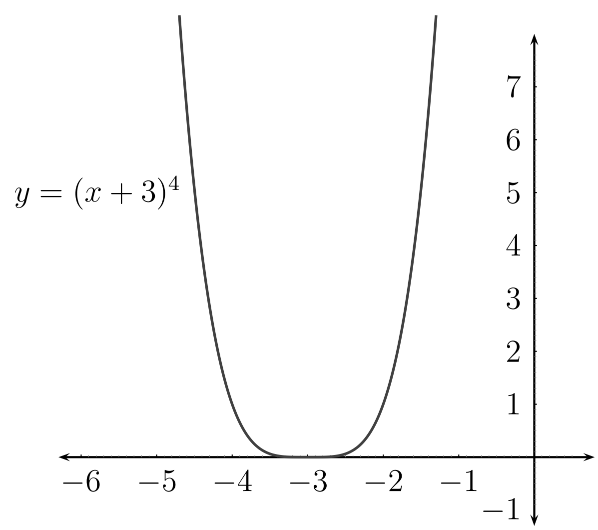
a. $y = (x+3)^4$

b. $y = |2 - x^5|$

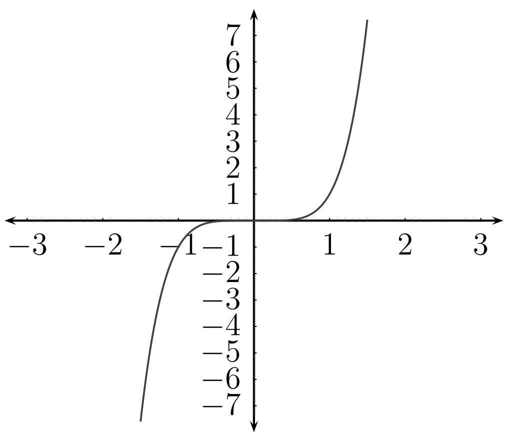
c. $y = x^3 + x^2 - 2x$

SOLUCIÓN:

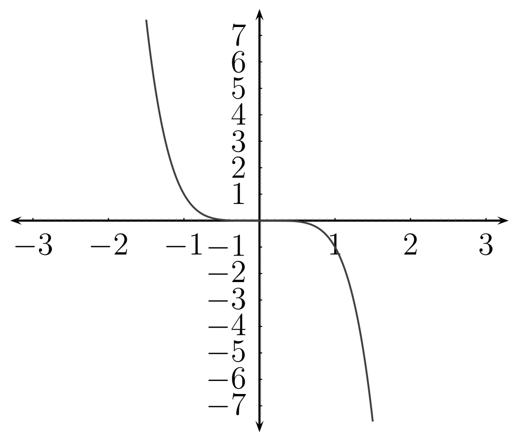
a. **Aplicando el principio de desplazamiento horizontal la gráfica de $y = x^4$ se desplaza 3 unidades hacia la izquierda.**



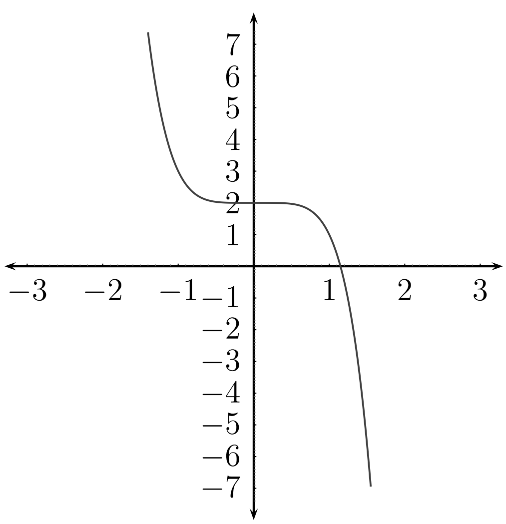
b. **Para obtener la gráfica de $y = |2 - x^5|$ debemos ver la gráfica $y = 2 - x^5$, para luego conseguir la que deseamos. Para obtener la gráfica de $y = 2 - x^5$, es útil ver la ecuación como $y = -x^5 + 2$. Podemos obtener la gráfica de $y = -x^5 + 2$ a partir de la gráfica de $y = x^5$, aplicamos el criterio de $y = -f(x)$ y la reflejamos respecto al eje y para obtener $y = -x^5$, luego aplicamos el principio de graficación del desplazamiento vertical y movemos la gráfica dos unidades hacia arriba. Por último, aplicamos el principio de graficación del valor absoluto y toda la parte de la gráfica que se encuentra por debajo del eje horizontal x la reflejamos respecto al eje x para asi obtener la gráfica que deseamos.**



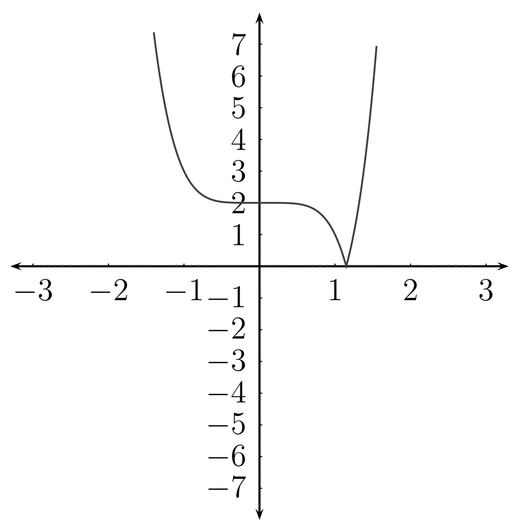
$y = x^5$



$y = -x^5$



$y = -x^5 + 2$



$y = | - x^5 + 2|$

Para poder comenzar la gráfica de la siguiente función debemos tener en cuenta las siguientes propiedades de los polinomios:

1. La gráfica es una curva suave y continua. La palabra suave significa que no tiene esquinas como puntos de retorno.
2. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces, la ecuación polinómica $p(x) = 0$ tiene a los más n soluciones distintas; es decir, $p(x)$ se intersecta con el eje x a lo más n veces.
3. La gráfica del polinomio de grado n tiene a lo más $n - 1$ puntos de retorno.
4. La gráfica de un polinomio siempre exhibe la característica de cuando $|x|$ es muy "grande", $|y|$ es muy "grande".

c. Para poder graficar la ecuación debemos tener presentes las intersecciones con el eje x y los intervalos donde $f(x)$ es positiva y negativa como ayuda para trazar la gráfica. Hacemos esto mediante el análisis del signo de $f(x)$. Primero determinaremos los ceros de $f(x)$.

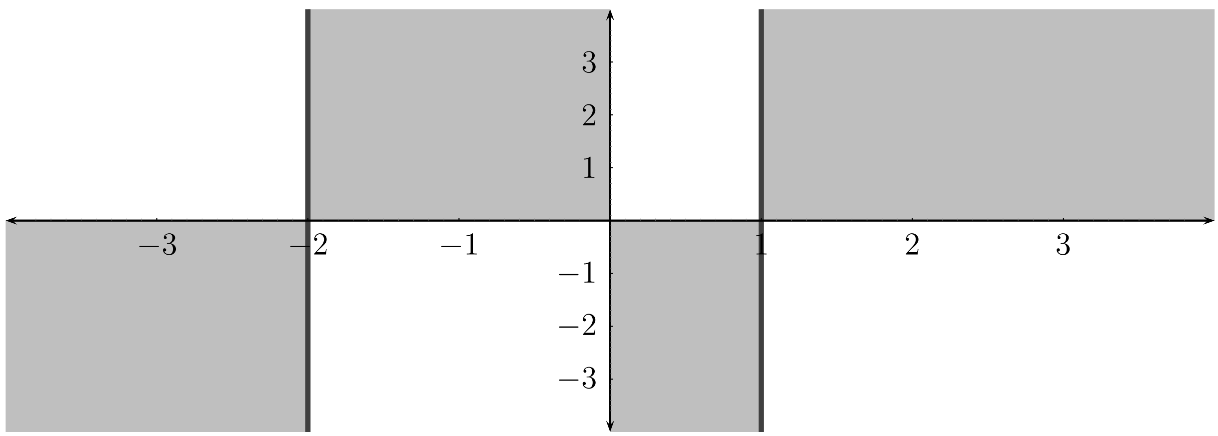
$$\begin{gathered} y = x^3 + x^2 - 2x = 0 \\ x(x^2 + x - 2) = 0 \\ x(x+2)(x-1) = 0 \end{gathered}$$

Por lo tanto los puntos de corte son $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$.
Tracemos una recta numérica y completamos el análisis del signo eligiendo un punto de prueba en cada intervalo. Hemos elegido $x = -8$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$ como puntos de prueba. Verifiquemos los puntos:

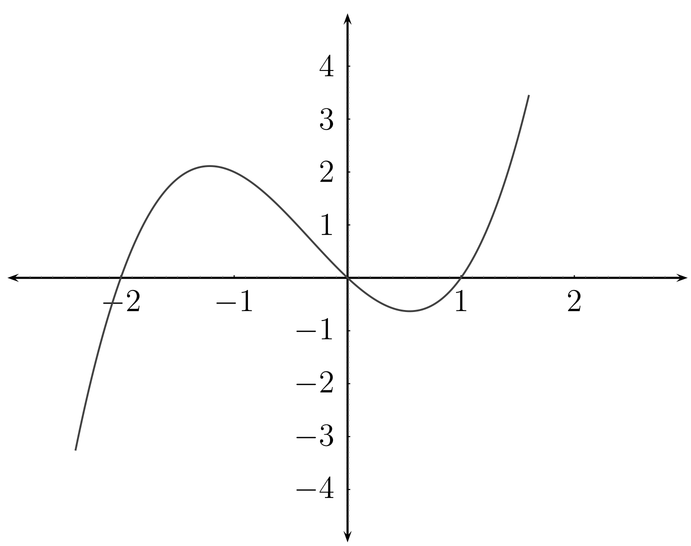
- Si $x = -8$, entonces, $-8(-8+2)(-8-1) = -8(-6)(-9)$ va a ser negativo, es decir, en el intervalo $(-\infty, -2)$ la gráfica va a estar por debajo del eje x.
- Si $x = -1$, entonces, $-1(-1+2)(-1-1) = -1(1)(-2)$ va a ser positivo, es decir, en el intervalo $(-2, 0)$ la gráfica va estar por encima del eje x.
- Si $x = \frac{1}{2}$, entonces, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}-1) = \frac{1}{2}(\frac{5}{2})(-\frac{1}{2})$ va a ser negativo, es decir, en el intervalo $(0, 1)$ la gráfica va a estar por debajo del eje x.
- Si $x = 4$, entonces, $4(4+2)(4-1) = 4(6)(3)$ va a ser positivo, es decir, en el intervalo $(1, \infty)$ la gráfica va a estar por encima del eje x.

$- - - - - - - - - \quad + + + + + + + + + \quad - - - - \quad + + + + + + + + + + + + +$

En otras palabras la gráfica estará en las regiones sombreadas de la siguiente figura:



Entonces, es claro que la gráfica debe de tener un punto de retorno en el intervalo $(-2, 0)$ y otro en el intervalo $(0, 1)$. Como $f(x)$ es un polinomio de grado 3, entonces, tiene a lo más 2 puntos de retorno.
Observemos la gráfica de la función deseada:



$y = x^3 + x^2 - 2x$

El objetivo de este capítulo era crear una idea en el estudiante de los principios de graficación, para que en el momento de graficar una función tenga la percepción de la gráfica y no necesite utilizar la tabla de valores en el momento de trazar la figura.

EJERCICIOS

1. **Trace la gráfica de la ecuación dada. Indique los ejes de simetría, el vértice, las intersecciones con los ejes donde sea adecuado:**

   a. $y = 4x^2$

   b. $y = (x+5)^2$

   c. $y = x^2 - 4$

   d. $y = 10 - 2x^2$

   e. $y = 25x^2 - 1$

   f. $y = 2x^3$

   g. $y = |x^4 - 5|$

   h. $y = x^2 - 4x - 12$

   i. $y = 2x^2 + 12x + 16$

   j. $y = |x^2 + 4x + 3|$

   k. $y = x^3 - x^2 - 2x$

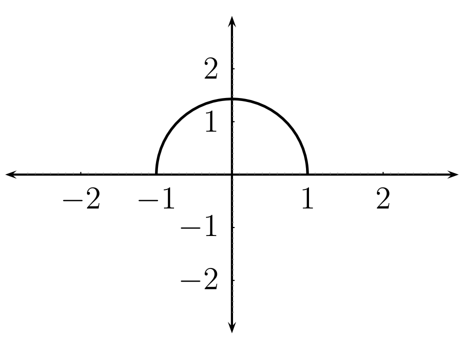
   l. $y = x^4 + x^2$

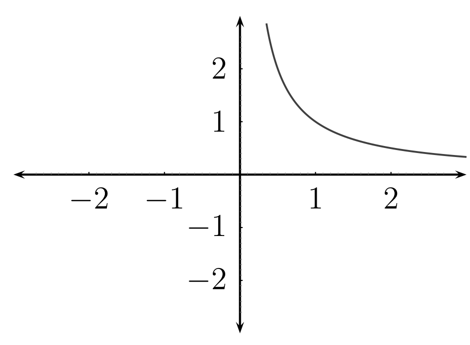
   m. $y = x^3 + 6x^2 + 8x$

   n. $y = x^3 + x^2 - 2x - 2$

   o. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

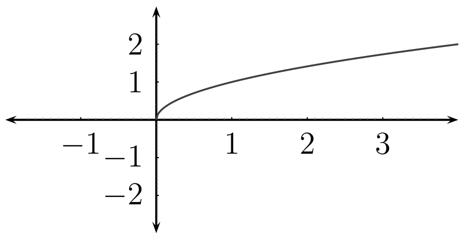
2. **Dadas las siguientes gráficas, en el mismo sistema de coordenadas trace las gráficas que se les pidan:**



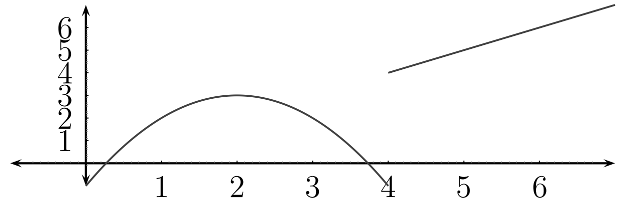


   a. Trace $y = f(x) - 1$**, y,** $y = f(x-1)$

   b. Trace la gráfica $f(-x) + 2$**, y,** $y = -f(x-2)$



c. Trace la gráfica $y = |-f(x)|$



d. Trace la gráfica $y = -f(x)$**, y,** $y = f(-x)$

Capítulo 3

TRIGONOMETRIA Y GRAFICAS EN COORDENADAS POLARES

En este capítulo trataremos los siguientes temas:

3.1. INTRODUCCIÓN

¿QUE ES TRIGONOMETRÍA?

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

La trigonometría se remonta a la matemática conocida, en Egipto y Babilonia. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica, empezó a haber trigonometría en las matemáticas. Luego HIPARCO DE NICEA, compilo una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Esta tabla está compuesta por ángulos de $3,5$ grados, yendo hasta 180 grados con incrementos de $3,5$ grados, esta tabla es similar a la tabla del seno en la actualidad.

Luego los astrónomos como TOLOMEO utilizaron y perfeccionaron está, tomando intervalos de $0,5$ grados de incremento desde 0 grados hasta 180 grados. En la actualidad los astrónomos utilizan la tabla del seno para realizar sus trabajos.

Los astrónomos árabes, que habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India en el siglo VIII, prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones, descubrieron y demostraron varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Los árabes calcularon tablas precisas en división sexagesimal; entre ellos destacó en particular Abu al-Wafa al - Buzadjami $(940-997)$ por las divisiones en cuarto de grado, con cuatro posiciones sexagesimales. Por otra parte, este matemático, introdujo, con otro nombre, la tangente y la secante al lado del seno.

En la actualidad la trigonometría es utilizada para dar solución a todo tipo de triángulos, a través de este estudio surgieron las funciones trigonométricas teniendo en cuenta los triángulos, especialmente los rectángulos. Ellas nacen a partir de su ángulo central y la razón (cociente) entre sus lados.

3.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una función trigonométrica, es aquella encargada del estudio de los triángulos rectángulos aplicando razones entre sus lados, como se pudo apreciar en la introducción, en ellos encontramos las funciones básicas de la trigonometría como son las funciones seno, coseno y tangente que trabajaremos.

Estas funciones trigonométricas tiene los siguientes elementos: Periodo, Amplitud y Traslación.

Periodo: es el menor intervalo, en el cual la gráfica vuelve a repetirse.

Amplitud: es la variación en los valores máximos y mínimos (del rango) de una función trigonométrica.

Traslación: son los desplazamientos que tiene la función en el eje horizontal o eje vertical de derecha a izquierda.

A continuación realizaremos un estudio profundo a la función seno que nos producirá algunas de las funciones que ya conocemos.

FUNCION SENO

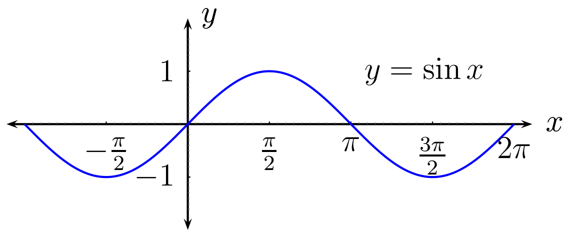
Es una función de la forma $f(x) = \sin x$, su forma general es $f(x) = A\sin(Bx + C)$, su gráfica es una onda que se esparce indefinidamente por un eje horizontal (eje x).

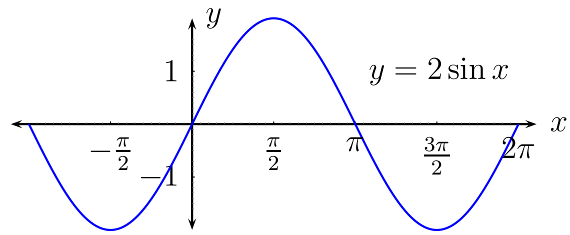
■ Ejemplo **28.** *Graficar las siguientes funciones y encontrar sus diferencias.*

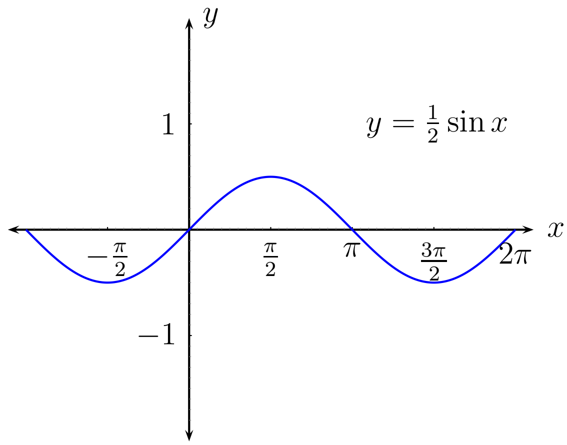
a. $y = \sin x$

b. $y = 2\sin x$

c. $y = \frac{1}{2}\sin x$







Como se puede apreciar las tres funciones tienen los mismos puntos de corte, esto nos dice que las funciones tienen el mismo periodo, su diferencia radica en su rango, en la primera función $y = \sin x$ es de $[-1, 1]$, en la segunda $y = 2\sin x$ es de $[-2, 2]$, en la tercera $y = (\frac{1}{2})\sin x$ es de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, entonces podemos concluir que el rango está determinado por la constante que antecede a $\sin x$.

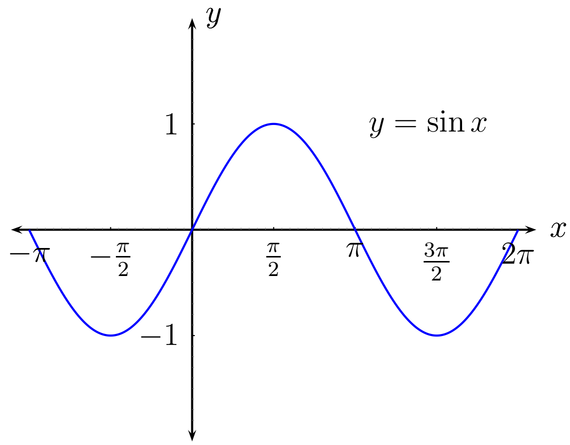
También podemos ver que el principio de alargamiento explicado en las funciones polinómicas, igualmente se puede aplicar a las funciones trigonométricas.

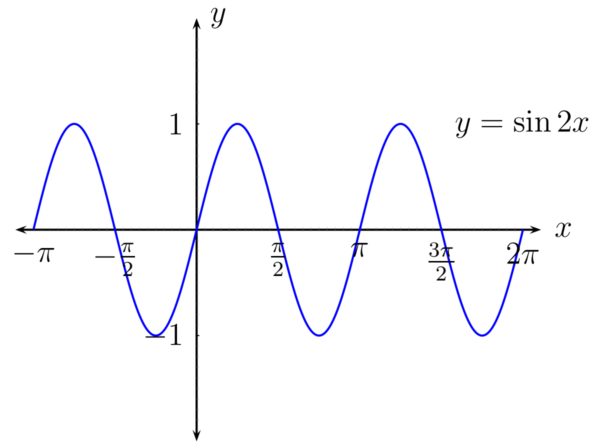
Ejemplo **29.** *Graficar las siguientes funciones y encontrar sus diferencias.*

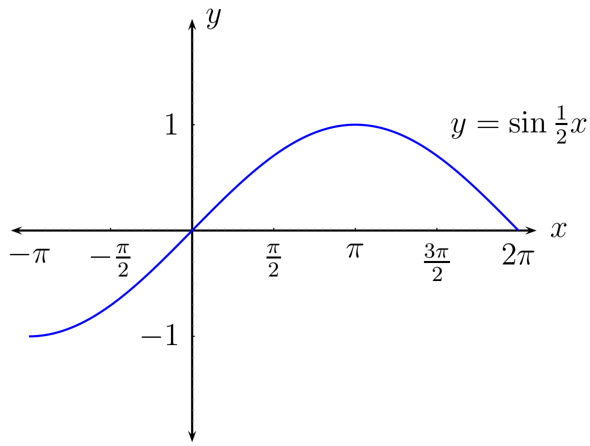
a. $y = \sin x$

b. $y = \sin 2x$

c. $y = \sin(\frac{1}{2}x)$







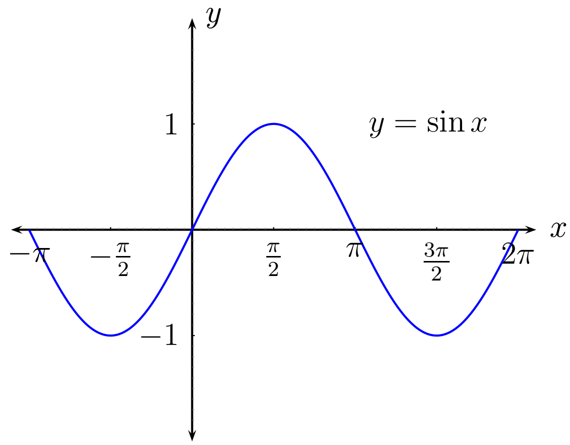
En este caso observamos un cambio en las curvas, el período en la primera función $y = \sin x$ **es** 2π**, en la segunda** $y = \sin 2x$ **es** π**, en la tercera** $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ **es** 4π**, podemos concluir que entre más grandes sea el número que antecede a la** x **el periodo va ser menor y viceversa entre más pequeño sea el número, mayor es el periodo.**

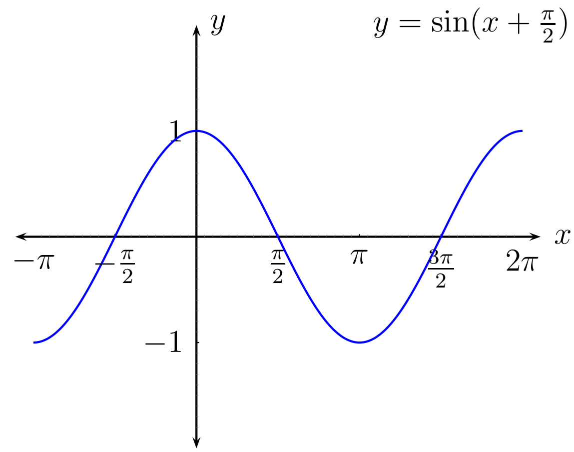
Ejemplo **30.** *Graficar las siguientes funciones y encontrar sus diferencias.*

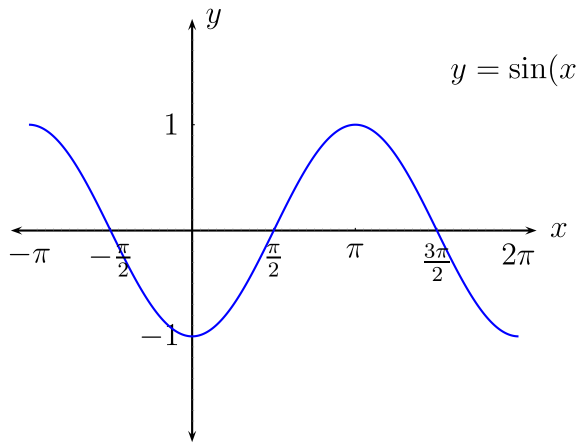
a. $y = \sin x$

b. $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

c. $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$







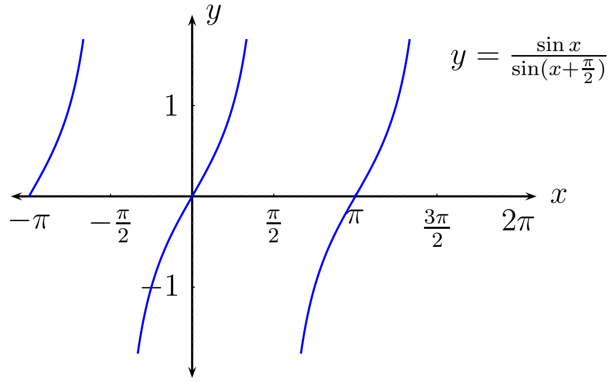
En la gráfica observamos una traslación o desplazamientos en las funciones, la primera es la función de referencia $y = \sin x$ esta no se ha trasladado, en la segunda $y = \sin(x+(\frac{\pi}{2}))$ se ha trasladado π distancia hacia la izquierda en el eje horizontal, en la tercera $y = \sin(x-(\frac{\pi}{2}))$ se ha trasladado π distancia hacia la derecha, en este caso utilizamos el principio de desplazamiento horizontal $y = f(x+c)$, entonces como vimos anteriormente para funciones polinómicas el principio de desplazamiento también es aplicable en las funciones trigonométricas.

Además podemos ver que la función $y = \sin(x + (\frac{\pi}{2}))$ es la misma función coseno, de esta manera podemos decir que a partir de la función seno se pueden producir la función coseno y que la función seno es el origen de las funciones trigonométricas. Vamos ahora a observar como también se puede producir una función coseno a partir de una función seno.

Partiendo del hecho que $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}$ y $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, donde α es un ángulo, $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$, tenemos que, $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ y como habíamos observado

en la gráfica anterior que $\cos x = \sin(x + (\frac{\pi}{2}))$**, entonces,** $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+(\frac{\pi}{2}))}$ **en función del seno.**

■ Ejemplo **31.** *Gráfica de la función tangente partiendo de la función seno.*



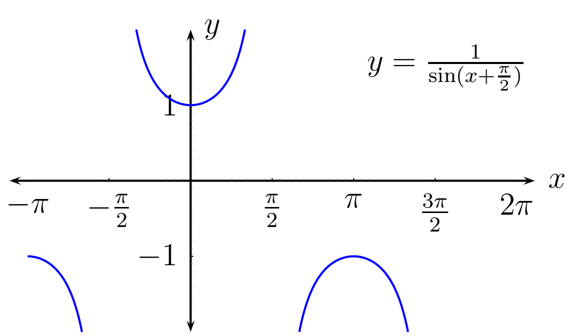
De la misma forma como elaboramos la gráfica a partir de la función seno, también se pueden hacer para cualquier función trigonométrica, teniendo en cuenta las razones trigonométricas. Vamos ahora a graficar todas las funciones trigonométricas restantes en función del seno.

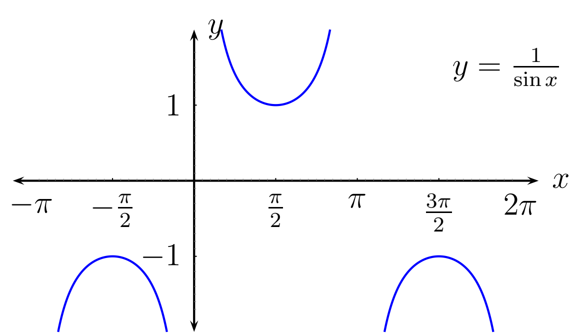
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES COSECANTE, SECANTE Y COTANGENTE

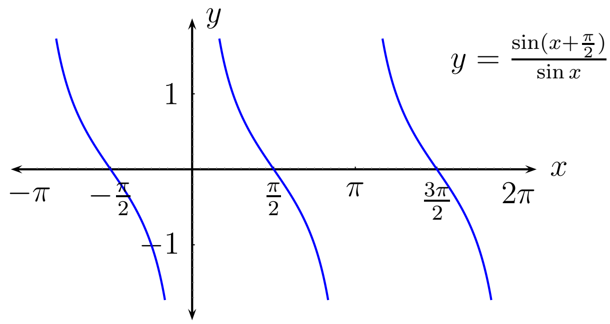
a. $f(x) = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$**, secante.**

b. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$**, cosecante.**

c. $f(x) = \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\sin x}$**, cotangente.**







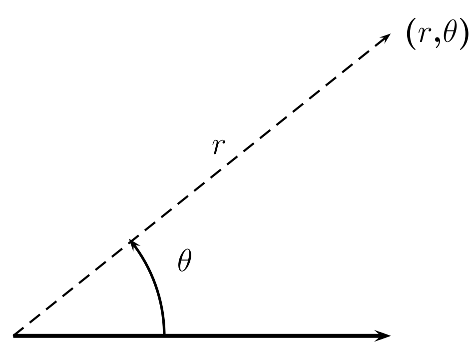
3.3. GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES

Durante nuestra vida de estudiante, siempre hemos trabajado las funciones en coordenadas cartesianas, desconociendo otros sistemas para graficar, entre los cuales se encuentra el sistema de coordenadas polares. En este capítulo estudiaremos un poco de este sistema y analizaremos algunas ecuaciones que hemos realizado en el sistema de coordenadas cartesianas, para después observar su comportamiento en el sistema de coordenadas polares.

Este sistema fue creado por Isaac Newton para resolver problemas relativos a tangentes y curvas, además es utilizado en la aviación y en la marina.

En un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano se puede localizar un punto con una sola pareja de puntos (x, y) estos valores son las distancias dirigidas, partiendo del origen, desde los ejes x e y respectivamente. El origen es el punto donde se interceptan los dos ejes coordenados.

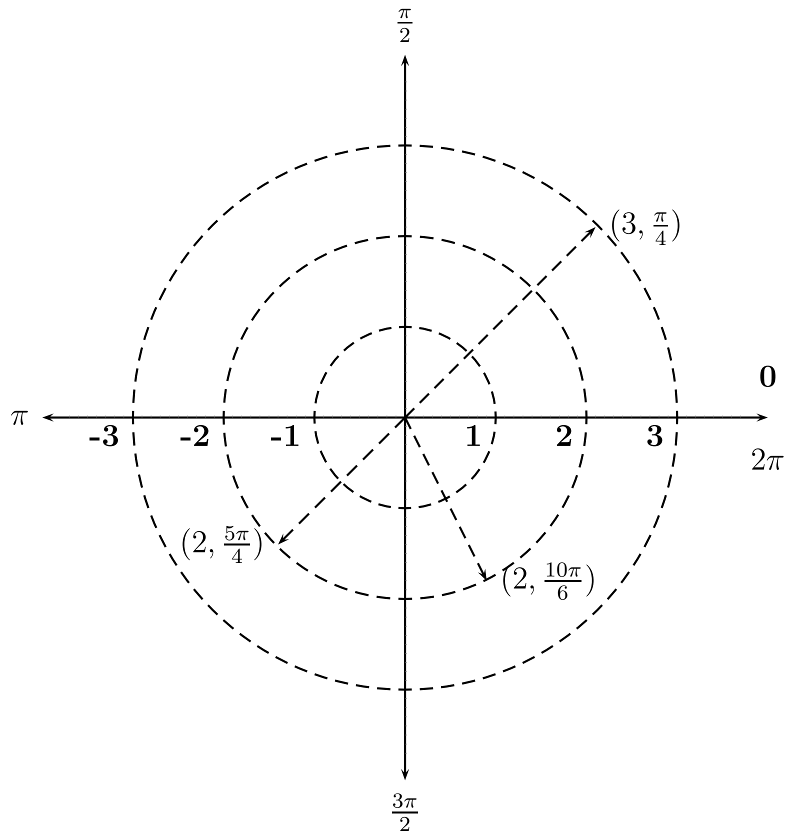
Otra forma de representar puntos en el plano es empleando coordenadas polares, en este sistema se necesitan un ángulo (θ) y una distancia (r). Para medir θ, en radianes, necesitamos una semirrecta dirigida, llamada eje polar y para medir r, un punto fijo llamado polo.



Si queremos localizar un punto (r, q) en este sistema de coordenadas, lo primero que tenemos que hacer es trazar una circunferencia de radio r, después trazar una

línea con un ángulo de inclinación q y, por último, localizamos el punto de intersección entre la circunferencia y la recta; este punto será el que queríamos localizar.

A continuación localizamos varios puntos en el plano polar.



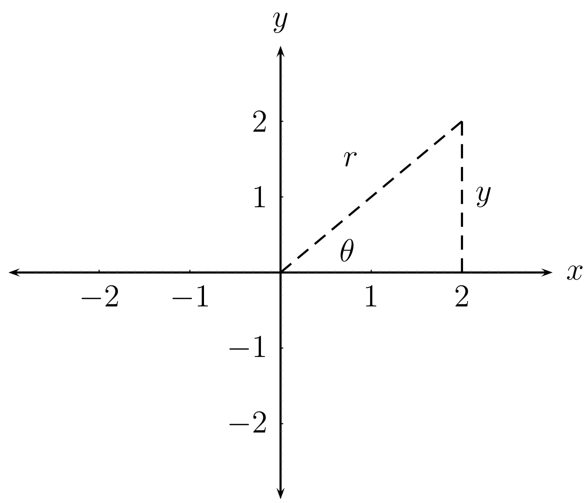
3.4. CONVERSIONES DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES

Para realizar una conversión de coordenadas rectangulares a polares y viceversa, debemos seguir las siguientes fórmulas:
Dado un punto (x, y) en forma rectangular entonces:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Para convertir de polares a rectangulares utilizamos la siguiente fórmula:
Dado un punto (r, θ) en forma polar, entonces:

$$x = r\cos\theta, \textbf{ y, } y = r\sin\theta$$



$$\sin\theta = \tfrac{y}{r}, \textbf{ de donde } y = r\sin\theta$$
$$\cos\theta = \tfrac{x}{r}, \textbf{ de donde } x = r\cos\theta$$

■ Ejemplo **32.** *Realizar*

a. Convertir de forma polar a rectangular el punto $(3, \frac{\pi}{2})$.

b. Convertir de forma rectangular a forma polar $(1, -1)$.

SOLUCIÓN:

a. Convertir de forma polar a rectangular el punto $(3, \frac{\pi}{2})$**.**
Puesto que $x = r\cos\theta$**, y,** $y = r\sin\theta$**, además, dado el punto** $(3, \frac{\pi}{2})$**, tenemos:**

$$x = 3\cos\tfrac{\pi}{2} = 3(0) = 0$$
$$y = 3\sin\tfrac{\pi}{2} = 3(1) = 3$$

Entonces, el punto en coordenadas rectangulares es $(0, 3)$**.**

b. Convertir de forma rectangular a forma polar $(1, -1)$**.**
Puesto que $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$ **y dado el punto** $(1, -1)$**, tenemos:**

$$r^2 = 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$
$$r = \sqrt{2}$$
$$\tan\theta = \tfrac{y}{x}, \textbf{ entonces, } \theta = \arctan(\tfrac{-1}{1})$$
$$\theta = \tfrac{7\pi}{4}$$

Entonces, el punto en coordenadas polares es $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$**.**

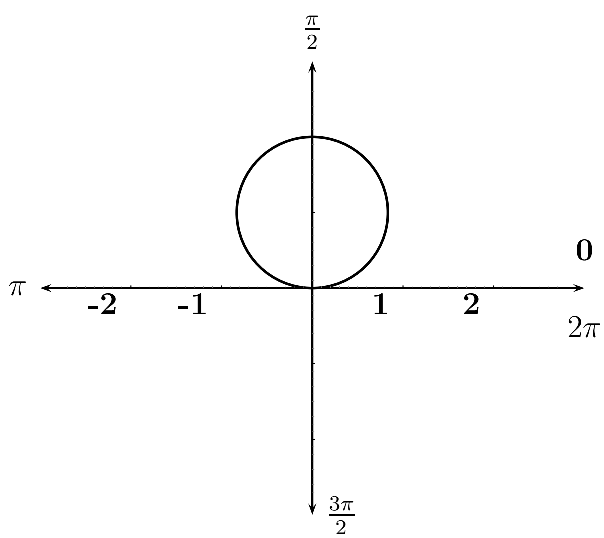
Ahora observemos las diferencias que podemos encontrar al graficar en la forma polar de la forma rectangular.
Por gráfica de la ecuación polar entendemos, por supuesto, el conjunto de los puntos (r, θ) que satisfacen la ecuación.

Ejemplo **33.** *Identificar y trazar la gráfica de $r = 2\sin\theta$.*

SOLUCIÓN:
La gráfica no es evidente en coordenadas polares, pero se puede convertir a coordenadas cartesianas y de esta manera si se puede obtener una grafica adecuada para analizar. A continuación haremos la conversión y su gráfica en coordenadas cartesianas.

$$r = 2\sin\theta \; r^2 = 2r\sin\theta \; x^2 + y^2 = 2y \; x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \; x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

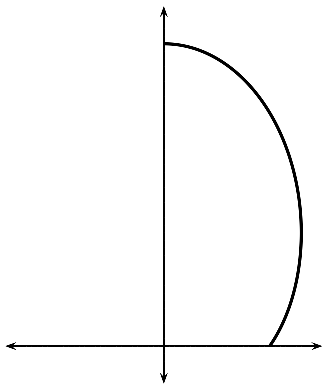
Por la técnica de graficación vista anteriormente la función sube un espacio en el eje y, respecto a la ecuación de la circunferencia de radio 1.



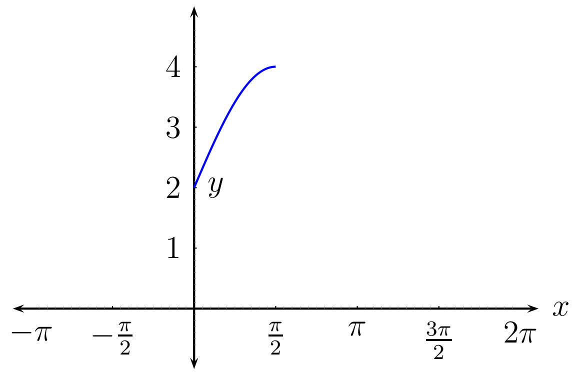
A través del siguiente ejemplo vamos a analizar que sucede con mayor detenimiento y cuál es la diferencia de graficar en coordenadas cartesianas y polares.

Ejemplo **34.** *Graficar la siguiente función trigonométrica en coordenadas cartesianas y polares:*

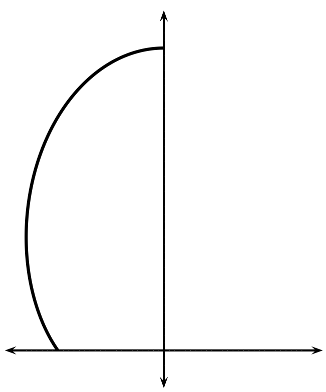
$$r = 2 + 2\sin\theta, \; y, \; y = 2 + 2\sin x$$



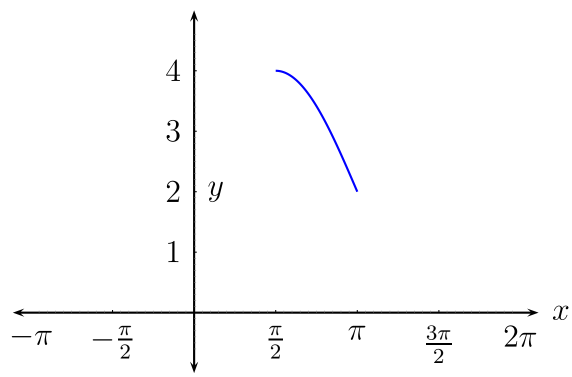
$r = 2 + 2\sin\theta; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



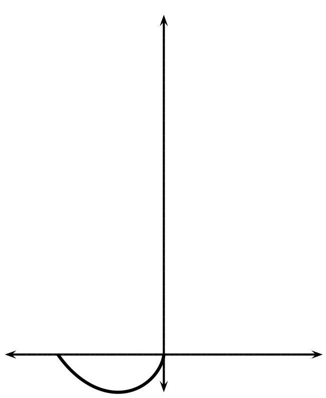
$y = 2 + 2\sin x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



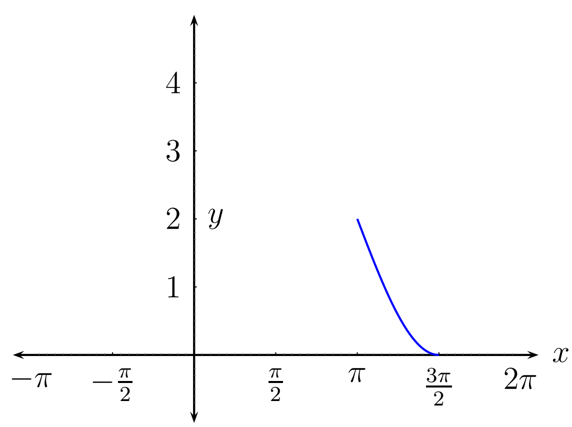
$r = 2 + 2\sin\theta; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$



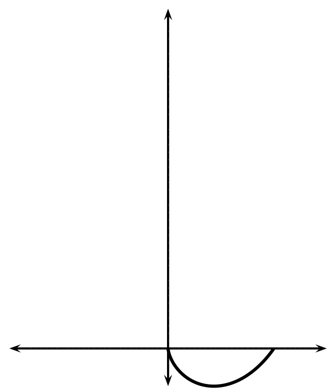
$y = 2 + 2\sin x; \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$



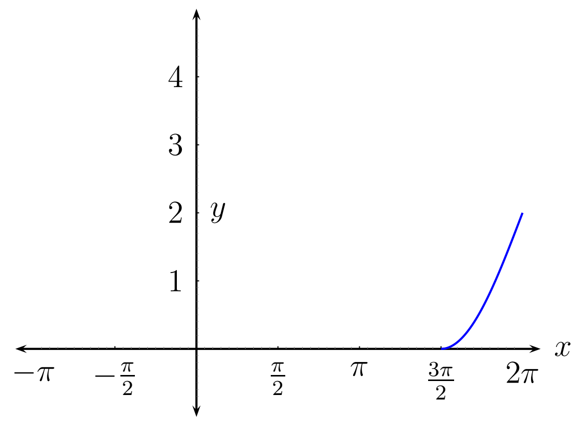
$r = 2 + 2\sin\theta; \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$



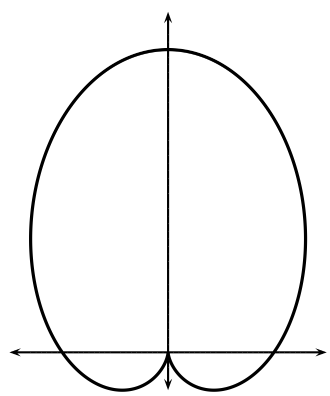
$y = 2 + 2\sin x; \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



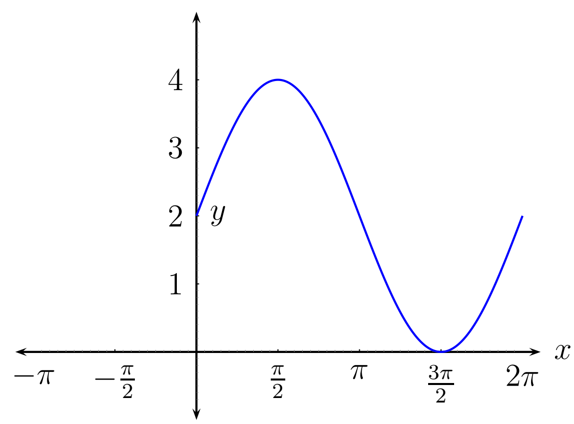
$r = 2 + 2\sin\theta; \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$



$y = 2 + 2\sin x; \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$



$r = 2 + 2\sin\theta$



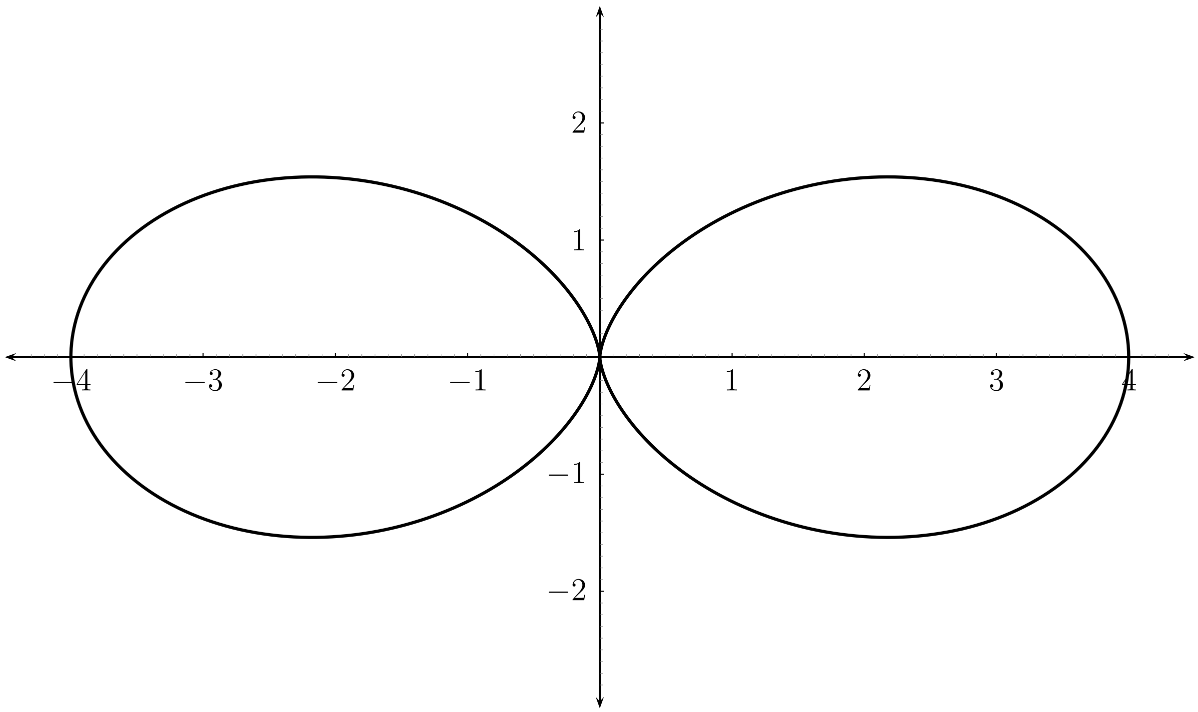
$y = 2 + 2\sin x$

Como podemos ver se han realizado un paralelo entre gráficas con el fin de observar las diferencias que existen entre los dos sistemas de graficación, el de coordenadas cartesianas y polares; en cada uno de los intervalos podemos ver el movimiento de la misma función, en diferentes sistemas de graficación, por ejemplo en el intervalo $r = 2 + 2\sin\theta; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ **en coordenadas polares en el eje** x **la función disminuye porque va de** 2 **a** 0 **y en el eje** y **se desplaza de** 0 **a** 4**, en coordenadas cartesianas en el intervalo** $y = 2 + 2\sin x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ **ocurre que la función crece tanto en** x **como en** y**.**

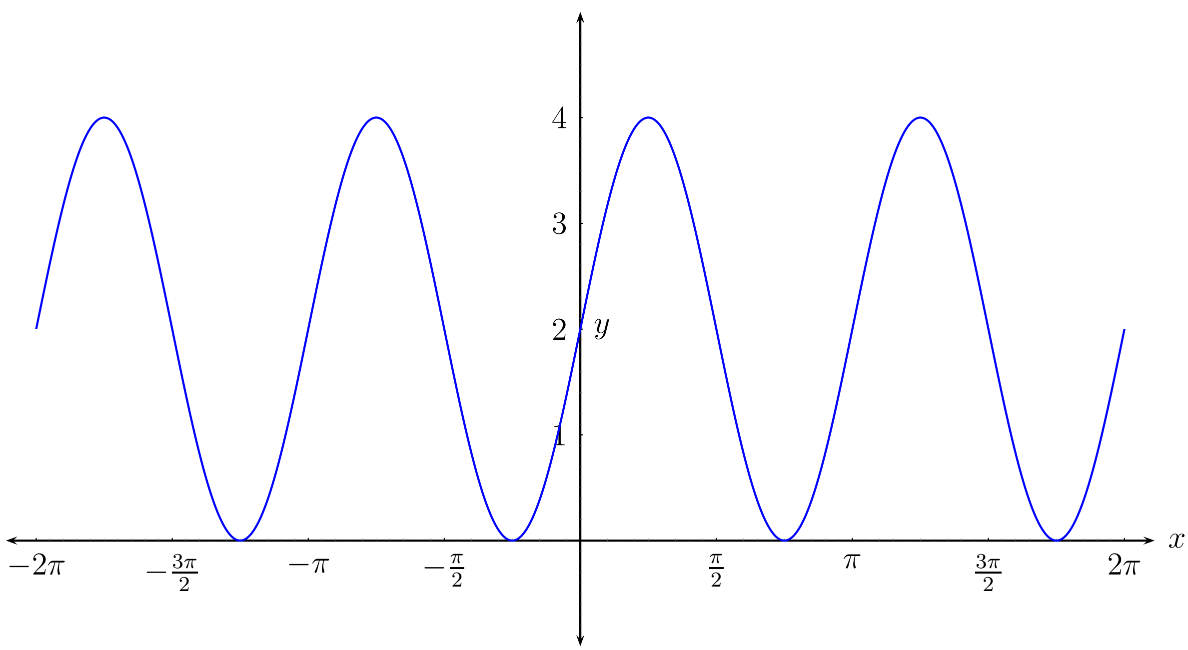
La diferencia entre los dos sistemas de graficación radica en que en polares se debe tener en cuenta el ángulo y la distancia de la función; y en cartesianas se debe construir a partir de la distancia de una función.

OTRAS GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN COORDENADAS POLARES

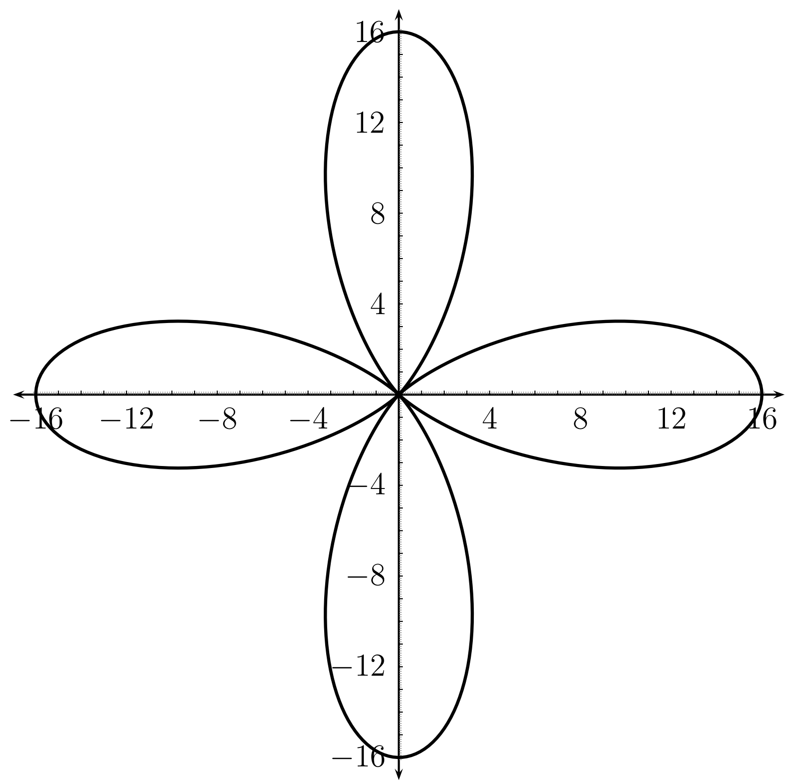
$r = 2 + 2\cos(2\theta)$



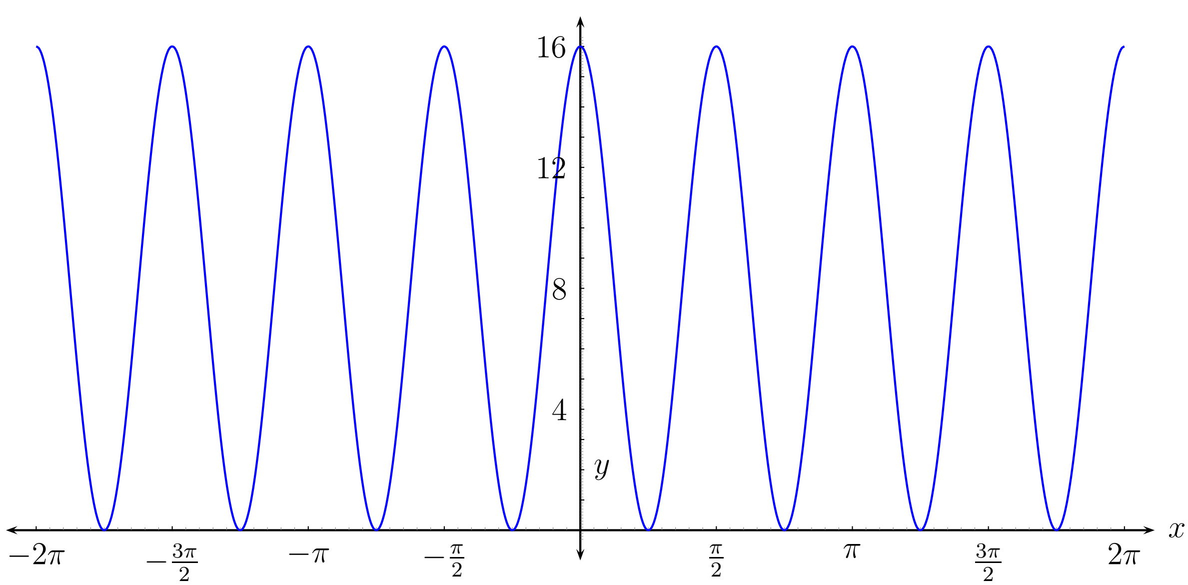
$y = 2 + 2\cos(2x)$



$$r = (4\cos(2\theta))^2 = 16\cos^2(2\theta)$$



$$y = (4\cos(2x))$$



3.5. EJERCICIOS

1. **Grafique las siguientes funciones trigonométricas. Luego encuentra su amplitud, su periodo y su traslación.**

   i. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

   ii. $y = -2\sin(x + \frac{\pi}{6})$

   iii. $y = -\cos(x + \pi)$

   iv. $y = 4\sin(3x + \pi)$

   v. $y = |\cos(x + \pi)|$

   vi. $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

   vii. $y = 2\tan x$

   viii. $y = -\sec x$

   ix. $y = 1 - \sec x$

   x. $y = \csc(x + \pi)$

2. **Grafica las parejas de funciones trigonométricas; encuentra su amplitud, periodo y sus diferencias.**

   a. $y = 5\sin x; y = \frac{1}{5}\sin x$

   b. $y = \sin(2x); y = \sin(\frac{1}{2}x)$

   c. $y = \sin(x + 1); y = \sin(x - 1)$

   d. $y = 4\cos(x + 1); y = \frac{1}{4}\cos(x - 1)$

   e. $y = \tan(2x + 1); y = \tan(\frac{1}{2}x + 1)$

   f. $y = 3\cot x; y = \frac{1}{3}\cot x$

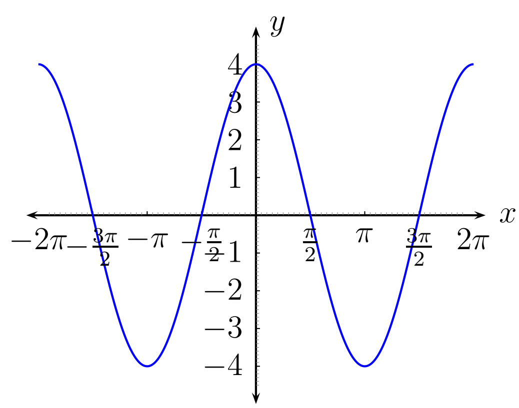
   g. $y = -\frac{1}{3}\sec(2x/5); y = \frac{1}{3}\sec(2x/5)$

   h. $y = -\frac{1}{4}\csc(3x - 1); y = \frac{1}{4}\csc(3x - 1)$

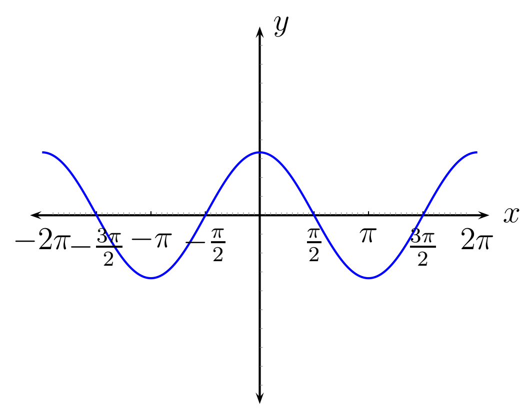
   i. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}); y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

3. **A partir de las siguientes graficas identifique la función, el periodo y la amplitud.**

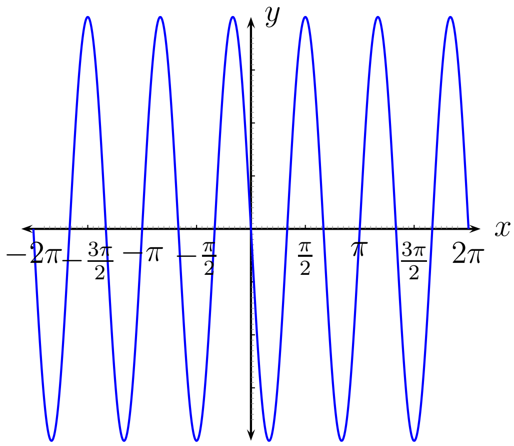
   a.



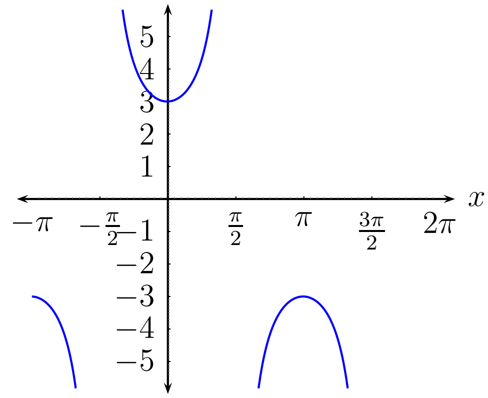
   b.



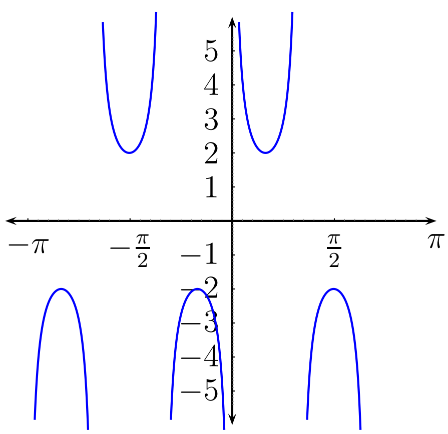
c.



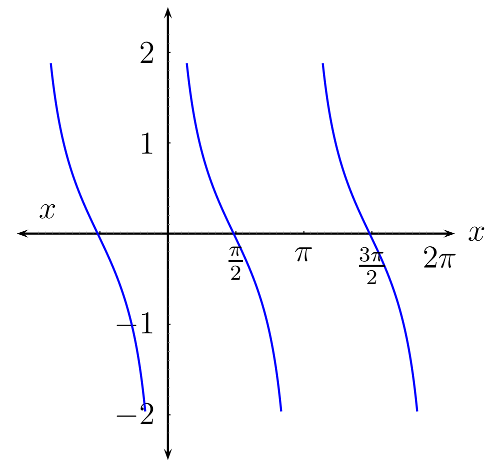
d.



e.



f.



4. Convierte los siguientes puntos en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

i. $(2, -\frac{2\pi}{3})$

ii. $(0, \frac{5\pi}{6})$

iii. $(-2, -\frac{3\pi}{2})$

iv. $(-3, -\frac{3\pi}{4})$

5. Convierte los siguientes puntos en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

i. (-1,5)

ii. (5,-1)

iii. (-5,4)

iv. (-3,-6)

6. **Trace la gráfica de las siguientes funciones trigonométricas en coordenadas polares.**

i. $r\sin\theta = -2$

ii. $r = 3\cos\theta$

iii. $r = 1 + \cos\theta$

iv. $r = 3\sin 2\theta$

v. $r^2 = 9\cos 2\theta$

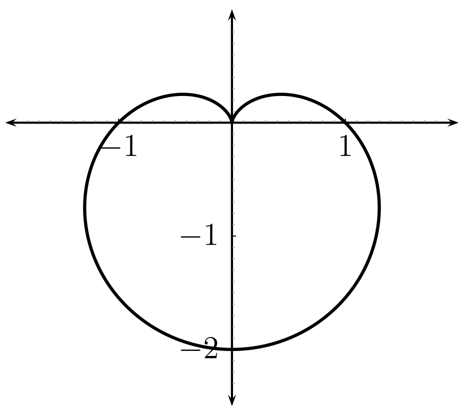
vi. $r = |2\cos 3\theta|$

vii. $r = 4 + 3\sin\theta$

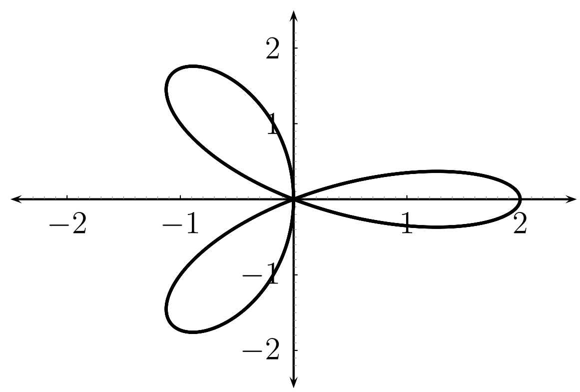
viii. $r = 1 - 2\sin\theta$

7. **A partir de las siguientes graficas identifica dos puntos de esa función en coordenadas polares y conviértalas a coordenadas cartesianas.**

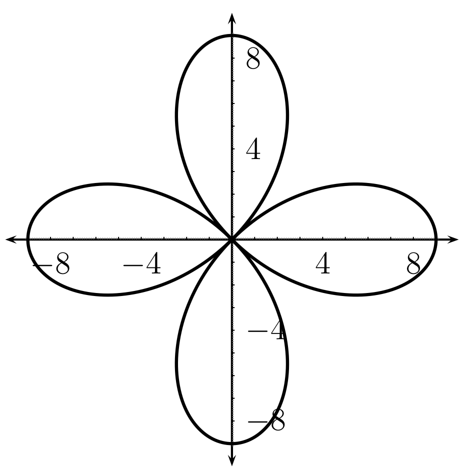
a.



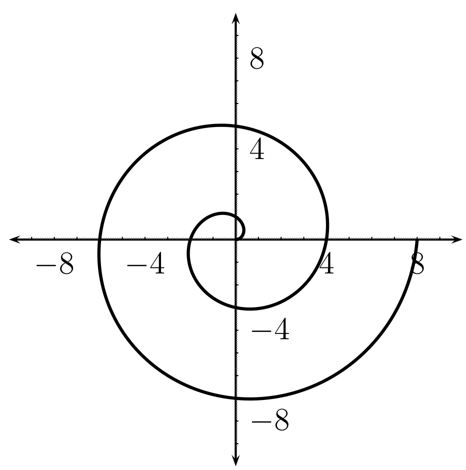
b.



c.



d.



Bibliografía

[1] Arturd Goodman & Lewis Hisch, *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Primera Edición, Mexico, 1980.

[2] G. E. Shilov & I. P. Natanson, *Como Construir Gráficas*, Primera Edición, Mexico, 1973.

[3] Louis Leithold, *El Cáculo*, Septima Edición, Mexico, 1994.

[4] Frank Ayres JR, *Cálculo Diferencial e Integral*, Segunda Edición, España, 1989.

[5] www.dinámica1.fciencias.unan.mx.

[6] www.graph.uptodown.com.

[7] www.derive.uptodown.com.