

Nota de aceptación

Firma Asesor del Trabajo de Grado

Firma Segundo Lector

Firma Jefe de Programa

Neiva, 06 de Diciembre de 2010

**APLICACIONES DEL ANÁLISIS VECTORIAL
AL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS**

Por:

HUMBERTO BARRIOS PEÑA

Código 2006262817

ALEXANDER PAREDES MARTÍNEZ

Código 2006262480

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA (HUILA)
2010

APLICACIONES DEL ANÁLISIS VECTORIAL AL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

*Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas*

Por:

HUMBERTO BARRIOS PEÑA

Código 2006262817

ALEXANDER PAREDES MARTÍNEZ

Código 2006262480

Asesor:

MAGISTER MAURICIO PENAGOS

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA (HUILA)
2010

“Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples. ”

Bertrand Arthur William Russell

ÍNDICE GENERAL

1. Agradecimientos	7
2. Introducción	8
3. Formulación y descripción del problema	9
4. Justificación	11
5. Objetivos	12
5.1. Objetivos Generales	12
5.2. Objetivos Específicos	12
6. Elementos Teóricos	13
6.1. Teorías Clásicas del Sistema Planetario	13
6.2. La Elipse	15
6.2.1. Ejemplos varios referentes a la Elipse	18
6.3. Funciones Vectoriales	24
6.3.1. Operaciones algebraicas	24
6.3.2. Límites, derivadas e integrales	25
6.3.3. Movimiento Curvilíneo. Vector velocidad, velocidad y aceleración	27
6.3.4. Movimiento en el plano con aceleración radial	31
6.3.5. Ejemplos referentes a Funciones Vectoriales	32

7. Deducción Matemática de las Leyes de Kepler	35
8. Anexos	46
8.1. Deducción de las Leyes de Kepler utilizando Ecuaciones Diferenciales	46
8.2. Deducción de las Leyes de Kepler utilizando la Mecánica Newtoniana	50
8.2.1. Segunda ley de Kepler	50
8.2.2. Tercera ley de Kepler	52
8.2.3. Primera ley de Kepler	55
9. Conclusiones	58
10. Bibliografía	59

CAPÍTULO 1

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de Grado si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por parte de los autores y su asesor, no hubiera sido posible finalizarlo sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaremos y muchas de las cuales han sido un soporte fuerte en momentos de angustia y desesperación.

Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, por fortalecer nuestro corazón e iluminar nuestra mente y por haber puesto en nuestro camino a aquellas personas que han sido nuestro soporte y compañía durante toda nuestra estadía en la Universidad.

A nuestras familias, que sin su apoyo, nuestros estudios no hubiesen sido posible. A nuestros padres por el ánimo, apoyo y alegría que nos brindaron al igual que la fortaleza necesaria para seguir adelante.

De igual manera, queremos manifestar nuestros sinceros agradecimientos a nuestros maestros, de manera especial a Mauricio Penagos y Ricardo Cedeño Tovar quienes con su experiencia nos apoyaron y nos brindaron todo sus conocimientos.

A todas aquellas personas que de alguna manera nos acompañaron en aquellos momentos difíciles que vivimos y que siempre nos dieron ese impulso necesario para no desfallecer.

Por lo que somos y por todo el tiempo que pensaron en nosotros.

Gracias...

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

Las leyes de Kepler consideradas en principio empíricas, forman parte de las contribuciones que cambiaron la forma de interpretar el mundo.

En el presente trabajo de grado queremos deducir aspectos importantes del movimiento planetario utilizando como herramienta el análisis vectorial.

Específicamente vamos a demostrar las leyes de Kepler, esto incluye deducir las ecuaciones de las trayectorias, los periodos de los planetas y probar que el movimiento se realiza en un plano, entre otros. Además, se busca probar que las leyes de Kepler pueden deducirse de un conjunto de leyes universales del movimiento y la gravitación que gobierna el movimiento de todos los cuerpos celestes, incluyendo cometas y satélites.

A fin de lograr esto partiremos de elementos básicos de la geometría analítica, como las secciones cónicas, sistemas de coordenadas, parametrización de ecuaciones; de la misma manera utilizaremos las funciones vectoriales, vectores tangente, normal, binormal, trayectorias, etc. Además, tendremos en cuenta algunos conceptos de la física como velocidad, aceleración y momento angular, entre otros.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Vamos a explicar matemáticamente las leyes de Kepler las cuales describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol y se enuncian de la siguiente manera:

- *Primera ley de Kepler:* Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.
- *Segunda ley de Kepler:* Las áreas barridas por el radio vector desde el Sol a un planeta son proporcionales al tiempo.
- *Tercera ley de Kepler:* El cuadrado del período de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Estas leyes han tenido un significado especial en el estudio de los astros, ya que permitieron describir su movimiento; fueron deducidas empíricamente por Johannes Kepler (1571-1630) a partir del estudio del movimiento de los planetas, para lo cual se sirvió de las observaciones realizadas por Tycho Brahe (1546-1601). Sólo tiempo después, ya con el aporte de Isaac Newton (1642-1727), fue posible advertir que estas leyes son una consecuencia de la llamada Ley de Gravitación Universal.

Estos problemas del mundo real, se modelan utilizando herramientas matemáticas, por lo cual algunos de los elementos teóricos necesarios para poder

llegar a la deducción formal de las mencionadas leyes son: conceptos básicos de la elipse, sistemas de coordenadas (cartesianas y polares), ecuaciones paramétricas y algunos conceptos del cálculo vectorial.

Por consiguiente la idea central será probar las leyes de Kepler utilizando los elementos teóricos anteriormente mencionados mostrando así que es posible desarrollar e interpretar fenómenos naturales a partir de procedimientos matemáticos tomando como punto de partida resultados sencillos.

CAPÍTULO 4

JUSTIFICACIÓN

Uno de los enigmas que aquejan a los observadores del sistema solar desde los albores de la humanidad ha sido la manera en la que se trasladan los cuerpos celestes a través del espacio (cometas, satélites naturales y planetas vecinos, entre otros); que observados desde la tierra, aparentemente retroceden en su órbita (retrogradación).

Por esta razón resulta interesante indagar sobre las trayectorias que siguen en su silencioso movimiento. Debido a esto surge la inquietud de crear un ambiente de interacción del tema que permita estudiarlo y relacionarlo de manera directa con la matemática.

Así mismo, los conceptos con que trataremos pretenden guiar y capacitar al lector a una de las muchas aplicaciones del análisis vectorial, desde un punto de vista matemático sencillo.

CAPÍTULO 5

OBJETIVOS

5.1. Objetivos Generales

- Probar resultados relevantes de la mecánica celeste (teorías de Nicolás Copérnico, Tycho Brahe, Galileo Galilei y finalmente Johannes Kepler) para acercar al lector al conocimiento de la temática en discusión.
- Aproximarnos a la justificación de las tres leyes de Kepler del movimiento planetario.

5.2. Objetivos Específicos

- Verificar las leyes de Kepler del movimiento planetario utilizando como base conceptos de la mecánica de Newton, tales como posición, velocidad y aceleración.
- Probar que el movimiento de los planetas se realiza en un plano.
- Encontrar una relación matemática entre el periodo de rotación y la distancia promedio al sol.
- Deducir que las trayectorias de los planetas son elípticas.

CAPÍTULO 6

ELEMENTOS TEÓRICOS

El cielo ha sido objeto de investigación desde que apareció el hombre sobre la tierra, y por ello se plantearon desde tiempos remotos muchas conjeturas y se realizaron muchos intentos para explicar el movimiento de los astros. Las diferentes posiciones que ocupan en el cielo y su movimiento fueron quizá, un gran motivo de estudio para los antiguos.

6.1. Teorías Clásicas del Sistema Planetario

Los egipcios y los babilonios trataron de darle explicación al movimiento planetario, sin embargo sus especulaciones sólo trascendieron al nivel de mitos y leyendas.

Los griegos que consideraban al hombre como el centro del Universo, suponían que la tierra era el centro geométrico del Universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de la tierra. Los cuerpos celestes conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia promedio a la Tierra.

Los filósofos de esa época suponían que los planetas, el Sol, la Luna y las estrellas, estaban incrustadas en esferas que giraban en torno a la Tierra. Pero la necesidad de ajustarlo del modo conveniente a los hechos, obligó a los griegos a usar a veces un gran número de esferas para explicar el movimiento de un único planeta, con lo cual el “Universo Griego” resultó muy complicado.

En el siglo II de la Era Cristiana, el astrónomo Claudio Ptolomeo de Alejandría, estructuró un modelo planetario que tendría gran aceptación y que prevalecería durante la Edad Media. Él suponía que todos los planetas se movían en círculos, cuyos centros giraban en torno a la tierra.

Esta teoría llegó a parecer lógica, puesto que con esto se explicaba el movimiento retrógrado de algunos planetas (o sea que vistos desde la tierra aparentemente retroceden en su órbita).

Con el fin de mejorar esta teoría se le introdujeron ciertas modificaciones, hasta que terminó por ser una teoría muy confusa. Sin embargo, las ideas de Ptolomeo guardaban gran concordancia con la Iglesia Católica, ya que la “Suprema Creación” tenía que ser el hombre y como habitaba en la Tierra, pues, la Tierra tendría que ser el centro del Universo.¹

Esta descripción llegó a ser aceptada como correcta hasta que en el siglo XVI el monje y astrónomo polaco Nicolás Copérnico, quien en busca de una solución más simple propuso describir el movimiento de todos los planetas en órbitas circulares; incluyendo la tierra con respecto al sol, el cual estaría en el centro, la idea no era nueva, había sido propuesta por primera vez por el astrónomo griego Aristarco alrededor del siglo III a.C.

De acuerdo a Copérnico, el orden de las órbitas de los planetas, con respecto al sol, era: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno; la Luna girando en torno a la Tierra.

Sin embargo, un sistema en que el Sol se consideraba inmóvil y la Tierra pasaba a ser un planeta en movimiento, como cualquiera de los otros era totalmente contrario a la Filosofía de la Iglesia. Copérnico fue tachado de loco y hereje; sus ideas fueron consideradas falsas y opuestas a las Sagradas Escrituras.

A esta teoría heliocéntrica no se le llegó a prestar mucha atención hasta que Galileo, gran admirador secreto, vio su oportunidad de probar la teoría copernicana sobre el movimiento de la tierra cuando se inventó un pequeño telescopio de refracción y lo dirigió hacia el cielo logrando descubrir las fases de Venus, lo que indicaba que este planeta gira alrededor del Sol. Luego de que algunas de sus afirmaciones no fueran válidas, la controversia desatada por su teoría heliocéntrica motivó a que los astrónomos buscaran un modelo

¹<http://raulcaroy.iespana.es/F...20movimiento%20planetario>

matemático para explicar los movimientos del Sol y de los planetas que podían observar.

Pero Tycho Brahe con el fin de demostrar que la Teoría de Copérnico era falsa, realizó mediciones de las posiciones de los cuerpos celestes durante 20 años. Lo realizó con tanta precisión, que esas medidas fueron aprovechadas por su alumno, el alemán Johannes Kepler.

Brahe estaba convencido que la Tierra permanecía estática en relación al Universo porque, si así no fuera, debería poder apreciarse los movimientos aparentes de las estrellas. Sin embargo, aunque tal efecto existe realmente y se denomina paralaje, la razón por la cual no lo comprobó es que no puede ser detectado con observaciones visuales directas. Las estrellas están mucho más lejos de lo que se pensaba razonable en la época de Tycho Brahe. Kepler descubre finalmente que los planetas se mueven alrededor del Sol, en órbitas elípticas, teniendo al Sol no como centro, sino como uno de los puntos focales de la órbita. Hasta entonces se conocían tan sólo seis planetas y con ello Kepler intenta demostrar que los radios de estas esferas estaban relacionados con los cinco poliedros regulares de la Geometría.

La órbita de la Tierra estaba en la esfera circunscrita al icosaedro e inscrita al dodecaedro, y así sucesivamente; la esfera más externa, conteniendo la órbita de Júpiter, estaría circunscrita al cubo. Luego de interpretar los datos observados Kepler logra comprender que las órbitas correspondían más a trayectorias elípticas que a las trayectorias circulares.

Tras esfuerzos incesantes llega a formular tres leyes empíricas que explicaban todos los fenómenos astronómicos conocidos hasta entonces.

El hecho de que Kepler estableciera en su primera ley: *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol*, hacía que las teorías establecidas anteriormente tomaran otro rumbo, es por eso que en la sección siguiente haremos una breve descripción de los elementos básicos de la Elipse a partir principalmente de sus coordenadas cartesianas y más adelante con respecto a sus ecuaciones paramétricas.

6.2. La Elipse

Una elipse se define como una curva plana, tal que la suma de las distancias de cualquier punto en ella a dos puntos fijos llamados focos siempre es la misma.

La elipse en la *Figura 1* es simétrica con respecto a cada eje, y al origen 0. Es decir que:

$$d((x, y), (0, 0)) = d((x, -y), (0, 0));$$

$$d((x, y), (0, 0)) = d((-x, y), (0, 0));$$

$$d((x, y), (0, 0)) = d((-x, -y), (0, 0)),$$

Lo cual significa que hay eje de simetría en x , y y 0 respectivamente.

El segmento de la línea ST se llama el eje mayor y su longitud es $2a$; OS y OT , se llaman semieje mayor.

El segmento de la línea RQ se llama el eje menor y su longitud es $2b$; OR y OQ , se llaman semieje menor.

Los dos focos son los puntos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, y $P(x, y)$ es cualquier punto en la curva; entonces por definición la suma de las distancias F_1P y F_2P siempre será la misma, lo que significa,

$$F_1P + F_2P = 2a$$

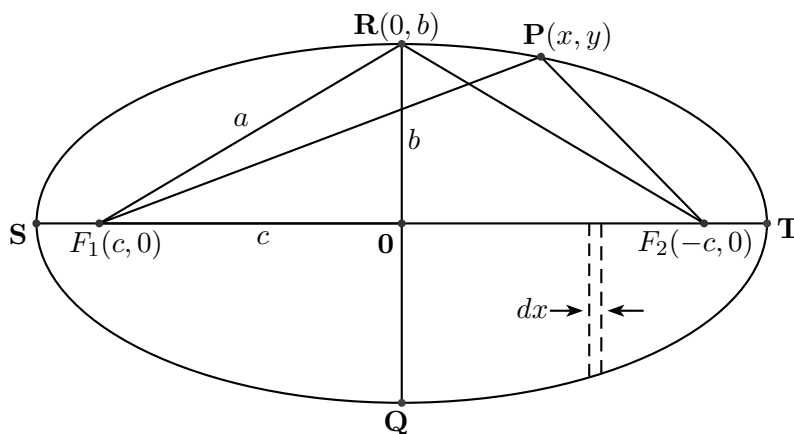


Figura 1: Elipse cuyos focos son $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$

La excentricidad de una elipse se define:

$$e = \frac{c}{a}$$

donde, c es la distancia del centro de la elipse a uno de los focos, con $c < a$.

Para la elipse mostrada, los focos se localizan en $(\pm ae, 0)$. La ecuación normal de una elipse cuyo eje mayor esta sobre el eje x es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo F_1OR , obtenemos:

$$a^2 - c^2 = b^2 = a^2 - e^2 a^2 = a^2(1 - e^2)$$

Cuando F_1 y F_2 coinciden, b^2 se acerca a a^2 como e se acerca a cero.

Quedando:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio a .

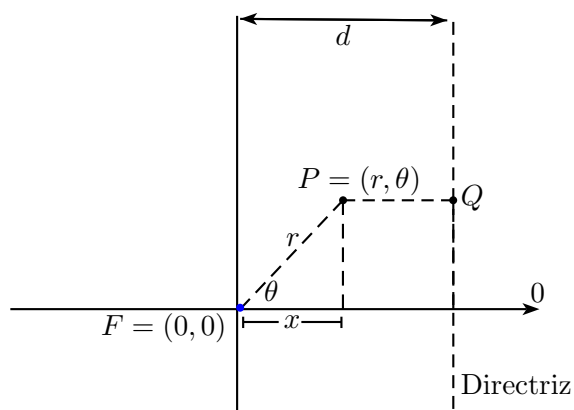
La ecuación de la elipse en coordenadas polares puede escribirse como:

$$r = \frac{ed}{e \cos \theta + 1}$$

donde, $e > 0$ es la excentricidad y $|d|$ es la distancia entre el foco y la directriz correspondiente.

En efecto, veamos para el caso $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ con $d > 0$

En la siguiente figura, consideremos una directriz vertical que se encuentra d unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$



Si $P = (r, \theta)$ es un punto en la gráfica de $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$, la distancia entre P y la directriz es:

$$\overline{PQ} = |d - x| = |d - r \cos \theta| = \left| \frac{r(1 + e \cos \theta)}{e} - r \cos \theta \right| = \left| \frac{r}{e} \right|$$

Como la distancia entre P y el origen es $\overline{PF} = |r|$, el cociente de \overline{PF} entre \overline{PQ} es:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = \frac{|r|}{|r/e|} = |e|$$

Por lo tanto, la gráfica de la ecuación es una cónica. Y además como, $0 < e < 1$, la cónica es una elipse.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta, \quad \text{con: } 0 \leq \theta < 2\pi$$

6.2.1. Ejemplos varios referentes a la Elipse

Ejemplo 1: El área de la región limitada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

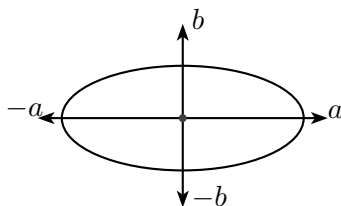
es igual a $ab\pi$.

En efecto, como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces:

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

de donde

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Así que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Hacemos la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces $dx = a \cos \theta d\theta$

Si $x = a$, entonces $a = a \operatorname{sen} \theta$ de donde $\theta = \pi/2$ y si $x = 0$, entonces $0 = a \operatorname{sen} \theta$ nos lleva a que $\theta = 0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta = 4b \int_0^{\pi/2} a \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 4ab \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \pi}{2} \right) = ab\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 2: El volúmen del sólido de revolución generado al girar la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alrededor de su eje mayor, es igual a ab^2 multiplicado por el volúmen de una esfera unidad, es decir, $\frac{4}{3}\pi ab^2$

En efecto,

El volúmen obtenido al hacer girar la curva $y = F(x)$ alrededor del eje x donde $a \leq x \leq b$, es:

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 dx$$

Así que:

$$V = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2(2a) - \frac{2a^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(\frac{2(2a^3)}{3} \right)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

Ejemplo 3: Hallar todos los números positivos B y C , $B > C$, tales que el área de la region limitada por la elipse $Bx^2 + Cy^2 = 3$ es igual a la de la region limitada por la elipse $(B + C)x^2 + (B - C)y^2 = 3$

$$Bx^2 + Cy^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{3/B} + \frac{y^2}{3/C} = 1$$

$$A_1 = \pi \sqrt{\frac{3}{B}} \sqrt{\frac{3}{C}} = \frac{3\pi}{\sqrt{BC}}$$

Ahora:

$$(B + C)x^2 + (B - C)y^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{3/(B + C)} + \frac{y^2}{3/(B - C)} = 1$$

$$A_2 = \pi \sqrt{\frac{3}{B + C}} \sqrt{\frac{3}{B - C}} = \frac{3\pi}{\sqrt{(B + C)(B - C)}}$$

Por consiguiente necesitamos que:

$$(B + C)(B - C) = BC$$

Así que: $B^2 - C^2 = BC$; de donde, $B^2 - BC - C^2 = 0$

por lo tanto,

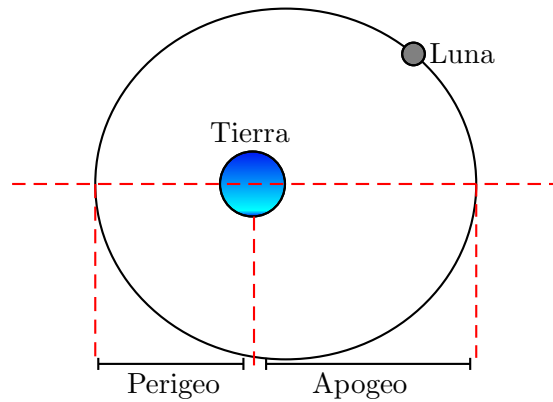
$$B = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4(-C^2)}}{2} = \frac{C \pm \sqrt{5}C}{2} = \frac{C(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

puesto que $1 - \sqrt{5} < 0$, la solución es:

$$B = \frac{C(1 + \sqrt{5})}{2}$$

Ejemplo 4: Órbita de la Luna:

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los dos focos, como se ilustra en la figura. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo respectivamente) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.



Si consideramos la longitud del eje mayor:

$$2a = 768.800 \text{ km}, \text{ de aquí } a = 384.400 \text{ km}$$

La longitud del eje menor:

$$2b = 767.640 \text{ km}, \text{ de aquí } b = 383.820 \text{ km}$$

Ahora,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(384.400)^2 - (383.820)^2} \text{ km} \approx 21.108 \text{ km}$$

Luego,

$$a + c \approx 405.508 \text{ km}$$

$$a - c \approx 363.292 \text{ km}$$

La distancia mayor entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna (*apogeo*) es 405.508 kilómetros y la distancia menor (*perigeo*) es 363.292 kilómetros.

Ejemplo 5: Probar que un punto (x_o, y_o) , está dentro, sobre o fuera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dependiendo de que $\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2}$ sea menor, igual o mayor que 1.

En efecto, dado que la ecuación cartesiana de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

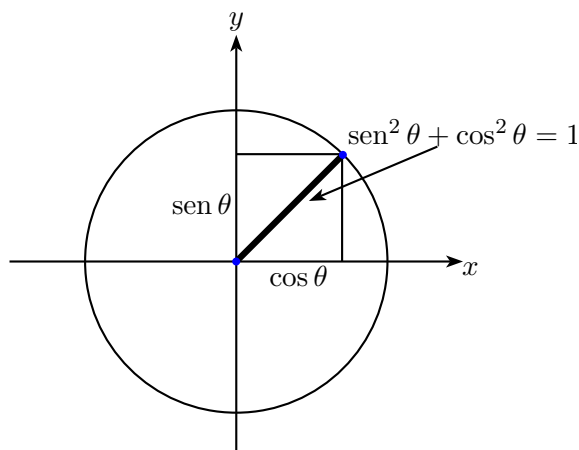
y además en coordenadas polares es:

$$x = a \cos \theta \quad , \quad y = b \operatorname{sen} \theta \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Note que:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$

Puede ser representado por un círculo trigonométrico unitario, como sigue:



esto significa que el gráfico $\operatorname{sen} \theta$ vs $\cos \theta$ representa una circunferencia unitaria y los puntos son allí precisamente los puntos sobre la elipse en el plano xy , entonces:

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1$$

están sobre la elipse.

2. Si $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta > 1$, estos puntos están sobre una circunferencia con $r > 1$, ya que:

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} > 1$$

Algunos valores $|x_o|$ y/o $|y_o|$ tienen incrementos, generando como resultados puntos fuera de la curva elíptica.

3. Si $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta < 1$, estos puntos están sobre una circunferencia con $r < 1$, ya que:

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} < 1$$

Algunos valores $|x_o|$ y/o $|y_o|$ tienen incrementos, generando como resultado puntos dentro de la curva elíptica.

Por consiguiente:

Puntos sobre, fuera o dentro de la circunferencia de radio unidad en el plano $\sin \theta$ vs $\cos \theta$ son respectivamente puntos ubicados sobre, fuera o dentro de la elipse en el plano xy .

Ejemplo 6: Si se trazan dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$, paralelas a la recta $x + 2y = 7$. Encontrar sus puntos de contacto.

Como, $x^2 + 4y^2 = 8$ entonces, $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ representa una elipse con centro en $(0, 0)$ y eje mayor sobre x , donde $a^2 = 8$ y $b^2 = 2$

Sean L_1 y L_2 las rectas buscadas, entonces sus pendientes son iguales, esto es,

$$\text{Si } L_1 \text{ es paralela a } L_2 \text{ entonces, } m_{L_1} = m_{L_2}$$

La recta L_1 tiene la forma:

$$x + 2y = 7 \text{ o equivalentemente } y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$L_3 \parallel L_2 \parallel L_1 \text{ entonces, } m_{L_3} = m_{L_2} = m_{L_1} = -\frac{1}{2}$$

Para la elipse: $y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = -\frac{2}{8} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$ resulta: $x = 2y$

Ahora, reemplazando tenemos: $(2y)^2 + 4y^2 = 8 = 8y^2$, así $y = \pm 1$, por lo tanto, $x^2 + 4 = 8$ de donde,

$$x = \pm 2$$

Por consiguiente, los puntos de contacto buscados son:

$$(-2, -1) \quad y \quad (2, 1)$$

6.3. Funciones Vectoriales

Una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo recorrido es un subconjunto del espacio n -dimensional \mathbb{R}^n se denomina función vectorial de una variable real.

6.3.1. Operaciones algebraicas

Las operaciones usuales del Álgebra Vectorial pueden aplicarse para combinar dos funciones vectoriales o una función vectorial con una función real.

Si F y G son funciones vectoriales, y si u es una función real, teniendo todas un dominio común, definimos nuevas funciones $F + G$, uF , y $F \cdot G$ mediante:

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t). \quad (uF)(t) = u(t)F(t). \quad F \cdot G = F(t) \cdot G(t)$$

La suma $F + G$ y el producto uF son funciones vectoriales, mientras que el producto escalar $F \cdot G$ es una función real. Si $F(t)$ y $G(t)$ están en el espacio de 3 dimensiones, también podemos definir el producto vectorial $F \times G$ con la fórmula:

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$$

La operación de composición puede aplicarse para combinar funciones vectoriales con funciones reales. Por ejemplo, si F es una función vectorial cuyo dominio contiene el recorrido de una función real u , la función compuesta $G = F \circ u$ es una nueva función vectorial definida por:

$$G(t) = F[u(t)]$$

para cada t en el dominio de u .

Si una función F tiene sus valores en \mathbb{R}^n , cada vector $F(t)$ tiene n componentes y podemos escribir:

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Así pues, cada función vectorial F origina n funciones reales f_1, f_2, \dots, f_n cuyos valores en t son todas las componentes de $F(t)$. Indicamos esta relación escribiendo $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y llamamos a f_k el k -ésimo componente de F .

6.3.2. Límites, derivadas e integrales

Los conceptos fundamentales del cálculo, tales como límite, derivada e integral, también pueden extenderse a las funciones vectoriales. Para eso, expresamos la función vectorial en términos de sus componentes y realizamos las operaciones del cálculo sobre éstos.

Definición: Si $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es una función vectorial, definimos el límite, la derivada y la integral por:

$$\lim_{t \rightarrow p} F(t) = \left(\lim_{t \rightarrow p} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow p} f_n(t) \right),$$

$$F'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)),$$

$$\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right),$$

siempre que las componentes de los segundos miembros tengan sentido.

Según lo visto en las definiciones anteriores se hace evidente que muchos de los teoremas sobre límites, continuidad, derivación e integración de funciones reales también son válidos para funciones vectoriales.

Teorema 1: Si F, G y u son derivables en un intervalo, lo mismo ocurre con $F + G$, uF , y $F \cdot G$, por tanto existen $(F + G)'$, $(uF)'$ y $(F \cdot G)'$ y se tiene que:

$$(F + G)' = F' + G', \quad (uF)' = u'F + uF', \quad (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'.$$

Si F y G tienen valores en \mathbb{R}^3 , también tenemos que $(F \times G)'$ existe y

$$(F \times G)' = F' \times G + F \times G'.$$

Teorema 2: Si una función vectorial es derivable y es de longitud constante en un intervalo abierto I , entonces $F \cdot F' = 0$ en I . Dicho de otro modo, $F'(t)$ es perpendicular a $F(t)$ para cada $t \in I$

Teorema 3: (Linealidad y Aditividad de la integral). Si las funciones vectoriales F y G son integrables en $[a, b]$, también lo es $c_1F + c_2G$ para cualquier c_1 y c_2 , y tenemos

$$\int_a^b (c_1F(t) + c_2G(t)) dt = c_1 \int_a^b F(t) dt + c_2 \int_a^b G(t) dt.$$

Teorema 4: (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Supongamos que F es una función vectorial continua en $[a, b]$. Si $c \in [a, b]$, definamos la integral indefinida A como la función vectorial dada por:

$$A(x) = \int_c^x F(t) dt \quad \text{si } a \leq x \leq b$$

Entonces $A'(x)$ existe, y se tiene $A'(x) = F(x)$ para cada x de (a, b) .

Teorema 5: (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). Supongamos que la función vectorial F tiene derivada continua F' en un intervalo abierto I . Entonces, para cada elección de c y x en I , tenemos:

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt.$$

Teorema 6: Si $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es integrable en $[a, b]$ para todo vector $C = (c_1, \dots, c_n)$ el producto escalar $C \cdot F$ es integrable en $[a, b]$ y tenemos:

$$C \cdot \int_a^b F(t) dt = \int_a^b C \cdot F(t) dt.$$

6.3.3. Movimiento Curvilíneo. Vector velocidad, velocidad y aceleración

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio de 2 o 3 dimensiones de modo que su posición en el instante t referida a un cierto sistema coordenado venga dado por un vector $X(t)$. Cuando t varia en un intervalo de tiempo, el camino recorrido por la partícula es sencillamente la gráfica de X . Así pues la función vectorial X nos sirve como modelo matemático para describir el movimiento. A la función vectorial X la llamamos función posición del movimiento.

Los conceptos físicos tales como vector velocidad, velocidad y vector aceleración pueden definirse en función de las derivadas de la función posición.

Definición: Consideremos un movimiento descrito por una función vectorial X . La derivada $X'(t)$ se llama vector velocidad en el instante t . La longitud del vector velocidad, $\|X'(t)\|$, se llama velocidad. La segunda derivada $X''(t)$ del vector posición se llama vector aceleración. En ocasiones la función posición X se representa por $\vec{r}(t)$, el vector velocidad por $\vec{v}(t)$, la velocidad por $v(t)$ y la aceleración por $\vec{a}(t)$.

Así que:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t), \quad v(t) = \|\vec{v}(t)\|, \quad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$$

Ejemplo 1: *Movimiento sobre una elipse.* Consideremos la elipse con ecuación cartesiana $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ mostrada en la figura 2, y dos circunferencias concéntricas de radios a y b . El ángulo θ indicado en la figura se llama *anomalía excéntrica* o *ángulo excéntrico*. Está relacionado con las coordenadas (x, y) de un punto de la elipse por las ecuaciones:

$$x = a \cos \theta \quad y = b \operatorname{sen} \theta.$$

Cuando $0 \leq \theta < 2\pi$, es decir, θ varia en un intervalo de longitud 2π , el correspondiente punto (x, y) describe la elipse. Si consideramos θ como función del tiempo t , por ejemplo $\theta = f(t)$, tenemos un movimiento dado por la función posición:

$$\vec{r}(t) = a \cos f(t) \hat{i} + b \operatorname{sen} f(t) \hat{j}.$$

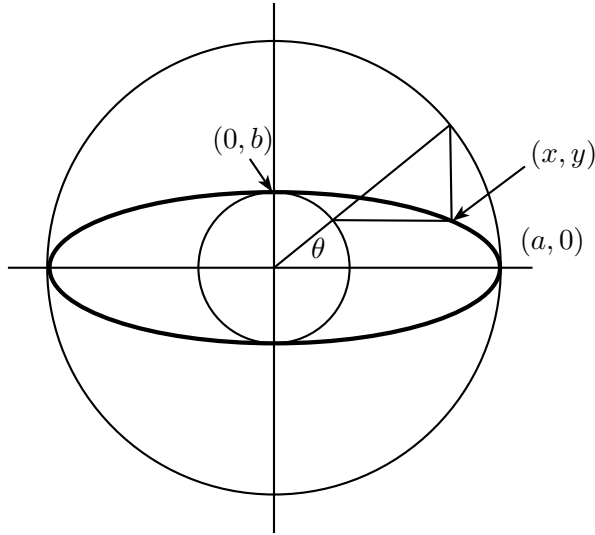


Figura 2: Movimiento sobre una Elipse.

Si $\theta = \omega t$ donde ω es una constante positiva, el vector velocidad, la velocidad y el vector aceleración son

$$\vec{v}(t) = \omega(-a \operatorname{sen} \omega t \hat{i} + b \cos \omega t \hat{j}),$$

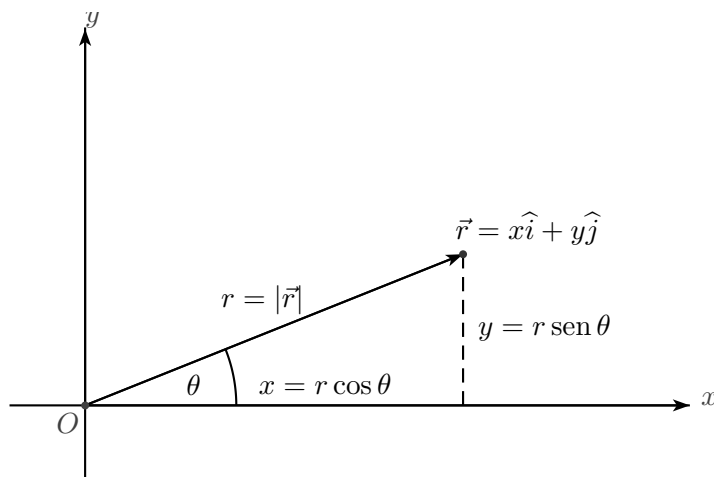
$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \omega(a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2},$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2(a \cos \omega t \hat{i} + b \operatorname{sen} \omega t \hat{j}) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Esto significa que cuando una partícula se mueve a lo largo de una elipse de modo que su ángulo excéntrico varíe proporcionalmente al tiempo, la aceleración es centrípeta.

En ocasiones resulta más natural describir los puntos de una curva plana en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Puesto que las coordenadas rectangulares (x, y) están ligadas a las polares r y θ por las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$



el vector posición $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ que une el origen con (x, y) viene dado por

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} = r(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

donde, $r = \|\vec{r}\|$

Si definimos $\hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$, note que $|\hat{u}_r| = 1$

Luego,

$$\vec{r} = r\hat{u}_r,$$

conviene también introducir un vector unitario \hat{u}_θ , perpendicular a \hat{u}_r , definido como sigue:

$$\hat{u}_\theta = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}.$$

Note que,

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j} = -\hat{u}_r.$$

En el estudio de las curvas planas, los dos vectores unitarios \hat{u}_r y \hat{u}_θ desempeñan el mismo papel en coordenadas polares que los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} en coordenadas rectangulares.

Supongamos ahora que las coordenadas polares r y θ son funciones de t , por ejemplo:

$$r = f(t), \quad \theta = g(t)$$

Deduciremos fórmulas para expresar los vectores velocidad y aceleración en función de \hat{u}_r y \hat{u}_θ .

Para el vector posición, tenemos:

$$\vec{r} = r\hat{u}_r = f(t)\hat{u}_r.$$

Como θ depende del parámetro t , lo mismo le ocurre al vector unitario \hat{u}_r .

Tenemos:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

Además, podemos expresar $\frac{d\hat{u}_r}{dt}$ en función de \hat{u}_θ :

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$$

De esta manera el vector velocidad es:

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta \quad (6.1)$$

Mientras que el vector aceleración se deduce partiendo de que \hat{u}_r y \hat{u}_θ son vectores unitarios ortogonales, encontramos que::

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

de donde:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

Si derivamos el vector velocidad encontramos:

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right) + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}\right)$$

Pero sabemos que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$

Y además, la derivada de \hat{u}_θ se puede expresar como:

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r$$

Obteniendo,

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{u}_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_\theta$$

donde, \hat{u}_r es la componente transversal.

Ahora, cuando $\theta = t$ la curva puede describirse mediante la ecuación polar $r = f(\theta)$

Así la velocidad y los vectores velocidad y aceleración se reducen a:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2},$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{d\theta} \hat{u}_r + r \hat{u}_\theta,$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r \right) \hat{u}_r + 2 \frac{dr}{d\theta} \hat{u}_\theta.$$

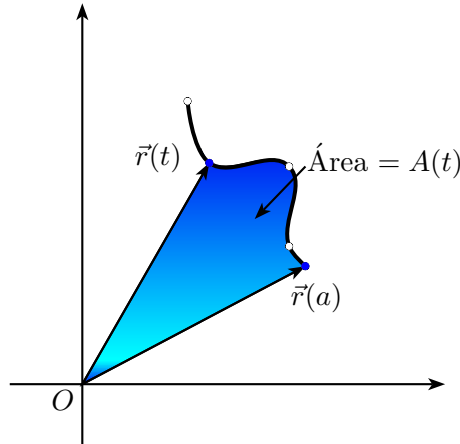
6.3.4. Movimiento en el plano con aceleración radial

El vector aceleración se llama radial si el componente transversal es siempre cero. Este componente es igual a:

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right).$$

El movimiento plano con aceleración radial tiene una interpretación geométrica interesante en función del área, como se muestra a continuación:

Si $A(t)$ es el área de la región barrida por el vector posición entre un instante $t = a$ y un instante posterior t , entonces:



El vector de posición barre el área con el coeficiente de variación:

$$A'(t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6.2)$$

Para demostrar esto, suponemos que es posible eliminar t entre las dos ecuaciones $r = f(t)$, $\theta = g(t)$, y en consecuencia expresar r como función de θ ,

$$r = R(\theta)$$

Esto significa que existe una función real R tal que:

$$R[g(t)] = f(t)$$

Entonces, la región sombreada de la gráfica anterior es el conjunto radial de R en el intervalo:

$$[g(a), g(t)]$$

Siendo $0 \leq g(t) - g(a) \leq 2\pi$, y suponiendo que R es integrable. Si $[f(t)]^2$ es integrable en $[g(a), g(t)]$ el área de R viene dada por la integral:

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{g(a)}^{g(t)} R^2(\theta) d\theta$$

Derivando esta integral, según el primer teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, encontramos que:

$$A'(t) = \frac{1}{2} R^2[g(t)] g'(t) = \frac{1}{2} f^2(t) g'(t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

6.3.5. Ejemplos referentes a Funciones Vectoriales

Ejemplo 1: Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, probar que los vectores T y N dados por:

$$T = -\frac{y}{b^2} \hat{i} + \frac{x}{a^2} \hat{j}, \quad N = \frac{x}{a^2} \hat{i} + \frac{y}{b^2} \hat{j}$$

son, respectivamente, *tangente* y *normal* a la elipse cuando se aplican en el punto (x, y) . Si el ángulo excéntrico de (x_0, y_0) es θ_0 , probar que la tangente en (x_0, y_0) tiene la ecuación cartesiana:

$$\frac{x}{a} \cos \theta_0 + \frac{y}{b} \sin \theta_0 = 1$$

En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parametrizando tenemos:

$$x = a \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} \theta$$

Dado, $\overline{F} = (x, y) = (a \cos \theta, b \operatorname{sen} \theta)$, entonces, $\frac{d\overline{F}}{d\theta} = (-a \operatorname{sen} \theta, b \cos \theta)$

$$\frac{d\overline{F}}{d\theta} = \left(-a\frac{y}{b}, b\frac{x}{a}\right); \quad \frac{1}{ab} \frac{d\overline{F}}{d\theta} = \left(-\frac{y}{b^2}, \frac{x}{a^2}\right) = -\frac{y}{b^2} \hat{i} + \frac{x}{a^2} \hat{j}$$

Además, como: $\overline{T} \parallel \frac{d\overline{F}}{dT}$ y $\frac{d\overline{F}}{dT}$ es tangente a \overline{F} , entonces,

\overline{T} es tangente a \overline{F}

También,

$$\overline{N} \perp \overline{T} \implies \overline{N} \cdot \overline{T} = 0 = \left(-\frac{y}{b^2}, \frac{x}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right) = \left(-\frac{yx}{a^2b^2} + \frac{yx}{a^2b^2}\right) \neq \phi$$

Encontrando $\frac{dy}{dx} = y'$:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \implies y' = -\frac{b^2}{a^2}$$

También,

$$y - y_o = m(x - x_o) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_o}{y_o} (x - x_o)$$

$$a^2 y_o y - a^2 y_o^2 = -b^2 x_o x + b^2 x_o^2$$

$$y a^2 b \operatorname{sen} \theta_o - a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \theta_o - a^2 b^2 \cos^2 \theta_o + x a b^2 \cos \theta_o = 0$$

$$\frac{-y a^2 b \operatorname{sen} \theta_o + x a b^2 \cos \theta_o - a^2 b^2}{a^2 b^2} = \frac{0}{a^2 b^2}$$

$$\frac{y}{b} \operatorname{sen} \theta_o + \frac{x}{a} \cos \theta_o = 1$$

Ejemplo 2: Demostrar que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_o, y_o) tiene por ecuación $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$.

Del último resultado del punto anterior:

$$\frac{y}{b} \operatorname{sen} \theta_o + \frac{x}{a} \operatorname{cos} \theta_o = 1$$

Tenemos:

$$y_o = b \operatorname{sen} \theta_o \qquad x_o = a \operatorname{cos} \theta_o$$

Por consiguiente,

$$\frac{y}{b} (y_o/b) + \frac{x}{a} (x_o/a) = 1$$

$$\frac{y_o y}{b^2} + \frac{x_o x}{a^2} = 1$$

A continuación haciendo uso de los elementos teóricos pasaremos a deducir las leyes de Kepler.

CAPÍTULO 7

DEDUCCIÓN MATEMÁTICA DE LAS LEYES DE KEPLER

El mérito que recibió Newton se debió en buena medida a la notable deducción que hizo de las tres leyes del movimiento planetario, que habían sido enunciadas unos setenta y cinco años antes por Johannes Kepler, como se mencionó en la sección anterior.

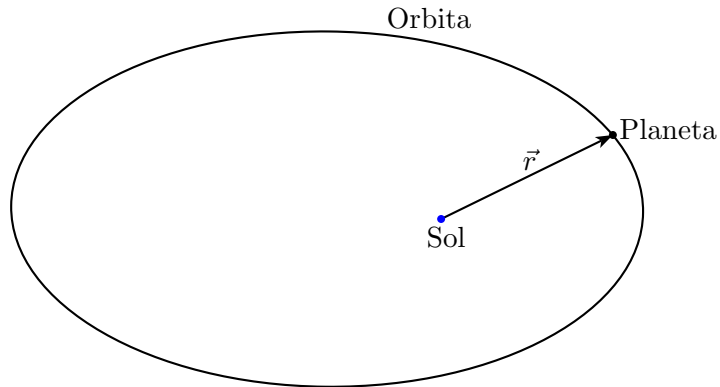
La formulación de estas tres leyes a partir del estudio de tablas astronómicas fué un hecho muy notable. Cerca de unos cincuenta años más tarde, Newton prueba que las tres leyes de Kepler eran consecuencia de su segunda ley del movimiento y de la célebre ley de gravitacional universal, con lo cual además de explicar las mencionadas leyes, lo que sí es indiscutible es que consiguió enmarcarlas dentro de un esquema mucho más rico en posibilidades.

En este capítulo se verá como se pueden deducir las leyes de Kepler de las de Newton, haciendo uso del método vectorial.

La segunda Ley de Newton enuncia lo siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

donde, F es la fuerza, \vec{a} es la aceleración, v la velocidad, \vec{r} la posición y m la masa de la partícula.

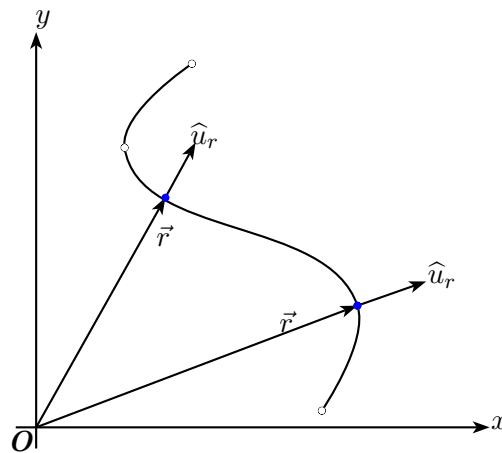


Supongamos que se tiene el sol fijo de masa M y un planeta móvil de masa m atraído por el sol con una fuerza \vec{F} , la segunda ley de Newton establece que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (7.1)$$

donde, \vec{a} es el vector aceleración del movimiento del planeta, y designaremos \vec{r} como el vector posición del planeta relativo al sol, sean $r = \|\vec{r}\|$ y \hat{u}_r un vector unitario con la misma dirección que \vec{r} , así que $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

Gráficamente,



Vector unitario \hat{u}_r .

La ley de gravitación universal establece que:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r \quad (7.2)$$

donde, G es una constante.

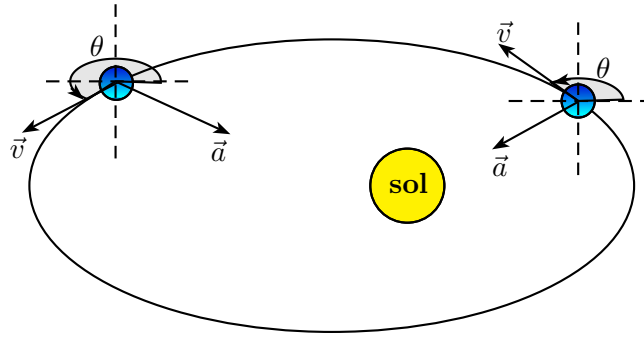
Con esta convención e igualando las ecuaciones (7.1) y (7.2) obtenemos que:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{u}_r$$

Lo que nos dice que la aceleración es radial.

Veamos ahora que las órbitas de los planetas son sobre un plano.

En efecto: como \vec{r} y \vec{a} son paralelos, pues \vec{a} es una *aceleración normal* y ésta se da en la dirección de la normal principal a la trayectoria (*aceleración centrípeta*) debido a que siempre está dirigida hacia el centro de curvatura).



Entonces,

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \times \vec{v} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$$

Y puesto que $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0}$ (ya que son paralelos), entonces $\vec{r} \times \vec{v}$ es un vector constante. Sea $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$. Si $\vec{c} = \vec{0}$, el vector posición \vec{r} es paralelo a \vec{v} , porque $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c} = \vec{0}$ y el movimiento es rectilíneo. Como la trayectoria de un planeta no es rectilínea, se tiene que $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Veamos ahora que si $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$, entonces $\vec{r} \cdot \vec{c} = 0$. En Efecto,

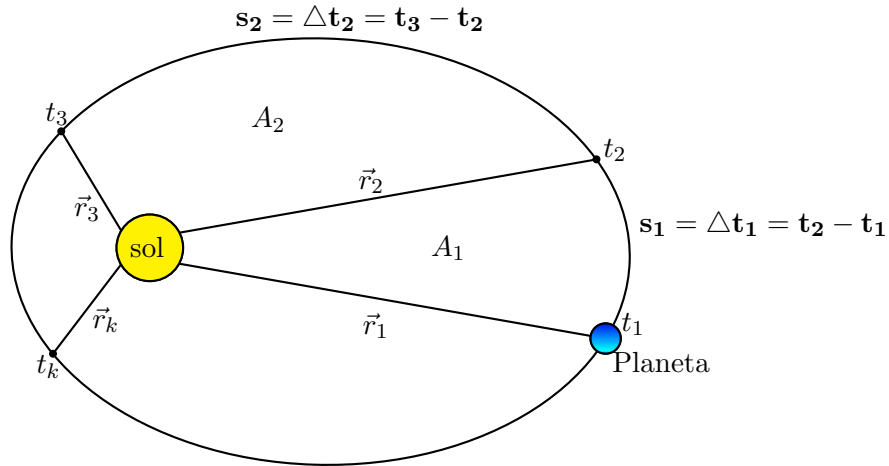
$$\vec{r} \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{r} \cdot \vec{c} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{r} \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$$

Este resultado demuestra que el vector posición está en un plano perpendicular a \vec{c} .

Por otro lado, dado que la aceleración es radial, el vector posición \vec{r} barre el área en una razón constante (*velocidad areolar*)¹, es decir, proporcional al

¹APOSTOL, Tom. Cálculus. Vol. I, Segunda Edición. Editorial Reverté. Pág. 669

tiempo. Lo cual lleva a pensar que el vector posición desde el Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.



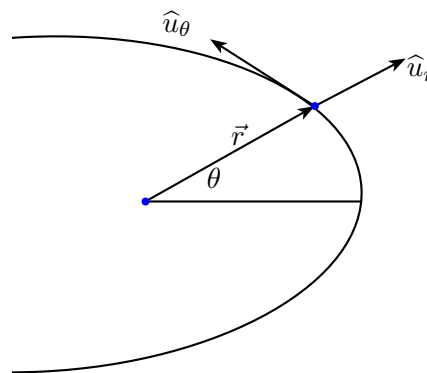
donde, $S_2 > S_1$; además, $A_1 = A_2 = \dots = A_k$ y $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_k$

Veamos que dicha constante de proporcionalidad es exactamente la mitad del vector \vec{r} :

$$\frac{\vec{r}_1}{t_1} = \frac{\vec{r}_2}{t_2} = \frac{\vec{r}_3}{t_3} = \dots = \frac{\vec{r}_k}{t_k} = \vec{C}_p$$

Usando coordenadas polares y expresando la velocidad en función \hat{u}_r y \hat{u}_θ :

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{u}_\theta = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{cases}$$



En la capítulo anterior mostramos que,

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Así que:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} &= (r \hat{u}_r) \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right) \\ &= \left[(r \hat{u}_r) \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r \right) \right] + \left[(r \hat{u}_r) \times \left(r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right) \right] \\ &= r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \end{aligned} \quad (7.3)$$

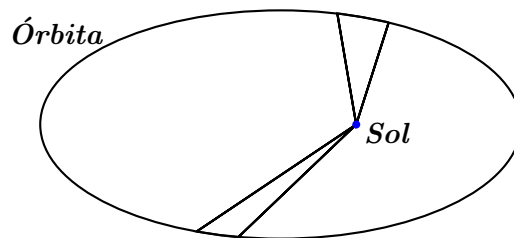
Y por tanto $\|\vec{c}\| = \left| r^2 \frac{d\theta}{dt} \right|$, puesto que \hat{u}_r y \hat{u}_θ son vectores unitarios.

Según (6.3), $A'(t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

Tenemos:

$$\|\vec{c}\| = \left| r^2 \frac{d\theta}{dt} \right| = 2 |A'(t)|$$

donde, $A'(t)$ es la velocidad con la que el radio vector barre el área o *velocidad areolar*.



Ahora pasaremos a demostrar que las órbitas celestes son elípticas:

En primer lugar formemos el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{c}$, utilizando:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \hat{u}_r \quad y \quad \vec{c} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{c} &= \left(-\frac{GM}{r^2} \cdot \hat{u}_r \right) \times \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \right) \\ &= \frac{r^2}{r^2} \left[-GM \cdot \hat{u}_r \times \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \right] \times \hat{u}_\theta \\ &= -GM \cdot \frac{d\theta}{dt} \left[\hat{u}_r \times \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \right] \\ &= -GM \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \\ &= -GM \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times (\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta) \end{aligned}$$

como,

$$\hat{u}_r \times (\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta) = -\hat{u}_\theta$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} \times \vec{c} = GM \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Ahora, como $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, y, $\hat{u}_\theta = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta}$, tenemos que:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{c}) = \frac{d}{dt}(GM\hat{u}_r)$$

$$\text{pues, } \hat{u}_r = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{c}) &= \int \frac{d}{dt}(GM\hat{u}_r) \\ \vec{v} \times \vec{c} &= GM\hat{u}_r + \vec{b} \end{aligned}$$

donde, \vec{b} es la constante de integración que corresponde a un vector constante.

Ahora, siendo $GM\hat{e} = \vec{b}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{c} &= GM\hat{u}_r + GM\hat{e} \\ &= GM(\hat{u}_r + \hat{e}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

A continuación combinaremos (7.3) y (7.4) para eliminar \vec{v} y obtener una expresión para r .

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{v} &= r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \\ (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{c} &= \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \right) \cdot \vec{c}\end{aligned}\quad (7.5)$$

y,

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{c} &= GM(\hat{u}_r + \vec{e}) \\ \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) &= \vec{r} \cdot [GM(\hat{u}_r + \vec{e})]\end{aligned}\quad (7.6)$$

Pero $(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{c} = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{c})$, entonces (7.5) = (7.6)

Igualando las dos expresiones del producto mixto $\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{c}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{c} &= r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \cdot \vec{c} \\ &= GM(\hat{u}_r + \vec{e}) \cdot \vec{r} \\ &= GMr(1 + e \cos \phi) = c^2\end{aligned}$$

donde, $e = \|\vec{e}\|$, $c = \|\vec{c}\|$, y ϕ representa el ángulo formado por el vector constante \vec{e} y el radio vector \vec{r} .

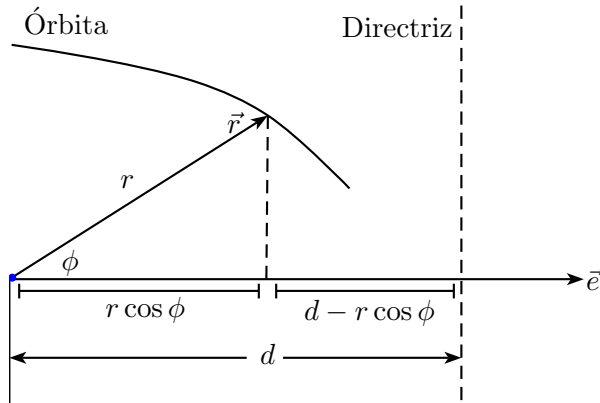


Figura 3: La razón $r/(d - r \cos \phi)$ es la excentricidad de $e = \|\vec{e}\|$.

Si ponemos $d = \frac{c^2}{GM_e}$, la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} r &= \frac{c^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \\ r &= \frac{ed}{e \cos \phi + 1} \\ r &= e(d - r \cos \phi) \end{aligned}$$

que es la ecuación polar de una cónica con excentricidad e y un foco en el Sol.

En la *Figura 3* se muestra la directriz trazada perpendicularmente a \vec{e} a una distancia d del Sol. La distancia desde el planeta a la directriz es: $d - r \cos \phi$ y la razón: $\frac{r}{(d - r \cos \phi)}$ es la excentricidad e (demostrando así la primera ley de Kepler).

Finalmente, probaremos la tercera ley de Kepler ²

Supongamos que la elipse tiene el eje mayor de longitud $2a$ y el eje menor de longitud $2b$, el área de la elipse será pues πab . Sea además, T el tiempo empleado por el planeta en dar una vuelta a su órbita elíptica.

Como el vector posición barre el área con la velocidad areolar:

$$c = r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2|\vec{A}'(t)|$$

Entonces,

$$A'(t) = \frac{1}{2}c$$

Y según (6.3) entonces,

$$\frac{1}{2}cT = \pi ab.$$

²El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al sol.

O bien,

$$T = \frac{2\pi ab}{c}$$

Veamos que $T^2 \propto a^3$. Como

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad y \quad ed = a(1 - e^2)$$

Entonces:

$$c^2 = GMed = GMa(1 - e^2)$$

Por lo tanto:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{GMa(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^2 [a^2(1 - e^2)]}{GMa(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^4(1 - e^2)}{GMa(1 - e^2)}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (7.7)$$

Es decir,

$$T^2 = ka^3$$

donde, $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ y $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Y además, $k = 2,97 \times 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$, válido para todos los planetas del Sistema Solar.

El resultado anterior nos permite encontrar el periodo orbital, la distancia media al sol y la Masa del planeta de nuestro Sistema Solar.

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (\text{Periodo Orbital de los planetas})$$

Note además que,

$$M = \frac{4\pi^2}{Gk} \quad (\text{Masa del cuerpo})$$

Ejemplo 1:

Encontrar el periodo orbital de la Tierra:

Solución: En nuestro caso,

$$M \approx 2 \times 10^{30} kg$$

$$a \approx 149,6 \times 10^9 m$$

Entonces,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(149,6 \times 10^9 m)^3}{\left(6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot sg^2}\right) (2 \times 10^{30} kg)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3,348 \times 10^{33} m^3}{1,334 \times 10^{20} \frac{m^3}{sg^2}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{2,509745 \times 10^{13} sg^2}$$

$$T = 2\pi \cdot (5009735,522 sg)$$

$$T = 31477096,62 sg$$

$$T = 3,15 \times 10^7 s \approx 365 \text{ días.}$$

Ejemplo 2: El planeta Júpiter es el más grande en el Sistema Solar tanto en volumen como en Masa. Júpiter tiene 62 lunas conocidas, la más grande de las cuales fué descubierta por Galileo en 1610. Una de ellas Io, se encuentra a una distancia promedio de $4,22 \times 10^5 km$ de Júpiter y tiene un periodo orbital de 1,77 días, calculemos la Masa de Júpiter.

Solución:

$$a = 4,22 \times 10^5 km = 4,22 \times 10^8 m$$

$$T = 1,77 \text{ días} (8,64 \times 10^4 \frac{s}{\text{días}}) = 1,53 \times 10^5 s$$

Calculamos k :

$$k = \frac{T^2}{a^3} = \frac{(1,53 \times 10^5 s)^2}{(4,22 \times 10^8 m)^3} = 3,11 \times 10^{-16} \frac{s^2}{m^3}$$

Reemplazando en:

$$M = \frac{4\pi^2}{Gk}$$

Tenemos:

$$M = \frac{4\pi^2}{(6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2)(3,11 \times 10^{-16} sg^2/m^3)} = 1,90 \times 10^{27} kg$$

Por tanto, la Masa de Júpiter es: $1,90 \times 10^{27} kg$

CAPÍTULO 8

ANEXOS

8.1. Deducción de las Leyes de Kepler utilizando Ecuaciones Diferenciales

En el sistema de coordenadas cartesianas la posición de una partícula está dada por $(x(t), y(t))$. La velocidad será $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. En coordenadas polares, la posición de una partícula es $(r(t), \theta(t))$, donde r es la distancia radial desde un punto fijo (llamado foco) y θ es el ángulo azimutal medido desde una línea fija.

Si \hat{r} y $\hat{\theta}$ denotan los vectores unitarios en dirección radial y la dirección tangencial, entonces:

$$r = r\hat{r}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\theta}} = -r\dot{\theta}\hat{r}$$

La velocidad de la partícula estará dada por:

$$\dot{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

y la aceleración es:

$$\ddot{r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}.$$

Para distancia constante r , $r\dot{\theta}^2$ es la aceleración centrípeta, y para velocidad angular constante $\dot{\theta}$, $2\dot{r}\dot{\theta}$ es la aceleración angular.

La ley de gravitación de Newton dice que la fuerza de atracción del Sol a un planeta es GMm/r^2 , donde M es la masa del Sol, m es la masa del planeta, G es la constante de gravitación y r es la distancia entre los centros, del Sol y del planeta.

Entonces de la segunda ley de Newton se tendrá que:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Lo cual conduce a las ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (8.1)$$

y

$$(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = 0 \quad (8.2)$$

Multiplicando (8.2) por \dot{r} e integrando, se transforma:

$$\frac{d}{dr}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

por lo tanto $r^2\dot{\theta}$, una constante. Pongamos $r^2\dot{\theta} = l$

Sustituyendo por $\dot{\theta}$ en la ecuación (8.1), tenemos

$$\ddot{r} - r\frac{l^2}{r^4} = -\frac{GM}{r^2}$$

despejando \ddot{r} :

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\frac{l^2}{r^4}$$

Cambiando la variable independiente de t a θ , tenemos:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{l}{r^2} = -l\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -l\frac{du}{d\theta}$$

donde:

$$u = \frac{1}{r}.$$

Ahora cambiando la variable dependiente de r a u :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -l \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -l \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= -l \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \frac{l}{r^2} = -l^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (8.3)$$

sustituyendo en (8.3)

$$\begin{aligned} -l^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= -GMu^2 + l^2 u^3 \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{GM}{l^2} \end{aligned}$$

Si $u = \left(\frac{GM}{l^2} \right) v$ entonces tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = 1 \quad (8.4)$$

cuya solución es:

$$v = 1 + A \cos(\theta - \theta_0)$$

Despejando:

$$r(A \cos(\theta - \theta_0)) = \frac{l^2}{GM} = p \quad (8.5)$$

Y así al comparar la ecuación (8.5) con la ecuación en coordenadas polares de una elipse, con el origen en un foco, se tiene:

$$r(1 + e \cos \theta) = p = a(1 - e^2),$$

Donde e es la excentricidad, a es el semieje mayor y p es el semilado recto de la elipse.

Midiendo θ desde el semieje mayor de la elipse y r del punto sobre la elipse cercano al foco, tenemos:

$$\theta_0 = 0 \quad y \quad A = e$$

Lo cual prueba la *primera ley de Kepler*. Según (8.5).

De otro lado, como $r^2\dot{\theta} = l$ es una constante. La razón en que un radio vector barre un área A en un tiempo t está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r \cdot r\dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2},$$

Y el área barrida desde un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2}l(t_2 - t_1).$$

El radio vector une el planeta y el Sol, barriendo áreas iguales en intervalos iguales de tiempo, y esta es la *segunda ley de Kepler*.

Para una elipse, el área cubierta en una órbita es $A = \pi ab$

donde a es el semieje mayor y b el semieje menor. En términos de la excentricidad e :

$$b = \sqrt{1 - e^2}$$

Y la razón con la que el radio vector barre el área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2}$$

Así el periodo de una órbita es:

$$P = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = (2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} / l)$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^4(1 - e^2)}{l^2} = \frac{a^4(1 - e^2)}{pGM} = \frac{a^4(1 - e^2)}{GM \cdot a(1 - e^2)} = \frac{a^3}{GM}.$$

En conclusión, P^2 es proporcional a a^3 ; Lo cual prueba la *tercera ley de Kepler*.

8.2. Deducción de las Leyes de Kepler utilizando la Mecánica Newtoniana

8.2.1. Segunda ley de Kepler

En la *Figura 4* un satélite está en el punto P sujeto a la fuerza gravitacional. Ya que no existen alteraciones a la fuerza central (fuerza gravitacional), la velocidad angular adquirida del satélite permanece constante. En la *Figura 5* se muestra, un punto en el espacio adquiriendo cierta velocidad, además una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} , a una posición perpendicular.

El vector velocidad se muestra en la siguiente figura:

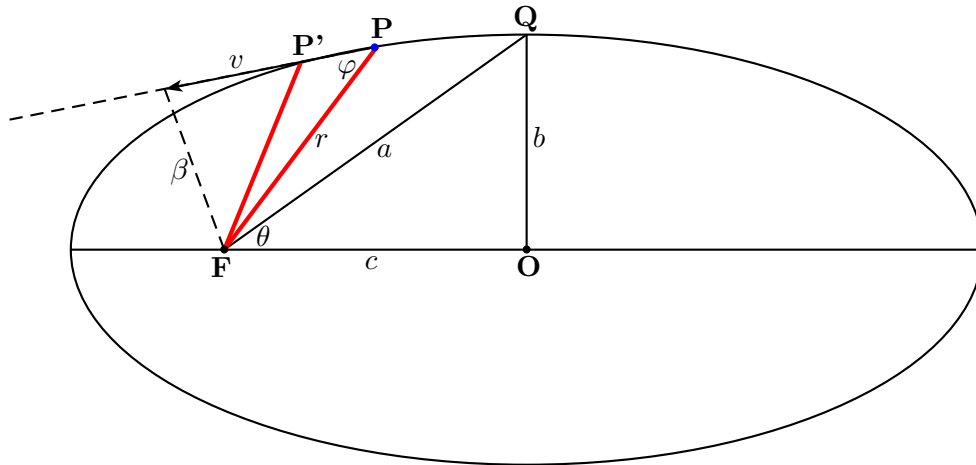


Figura 4: Órbita Elíptica de un satélite alrededor de su foco F , donde β , representa una perpendicular del foco a la línea tangente de la velocidad, v .

Ahora como:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (8.6)$$

Entonces la velocidad angular adquirida (o también llamado momento angular) del satélite al punto P en la *Figura 4* será:

$$m\beta\vec{v} = C_1 = \text{Constante} \quad (8.7)$$

Donde β es la perpendicular al centro de fuerza, tomando como el origen a la línea de la velocidad

La ecuación (8.7) establece la segunda ley de áreas iguales que se barren en tiempos iguales por el vector posición.

Sea t_1 el tiempo con el que el satélite viaja de P a P' . Entonces la proporción de tiempo en el que se barre el área A en el triángulo FPP' es constante.

Por lo tanto:

$$\frac{A}{t} = \frac{\beta PP'}{2t_1} = \frac{1}{2}\beta\vec{v} = \frac{C_1}{2m} = \text{constante} \quad (8.8)$$

Donde β es la altura del triángulo FPP' y PP' es la longitud de la base del triángulo.

También sabemos que el área de una elipse es πab , entonces

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{C_1}{2m} \quad (8.9)$$

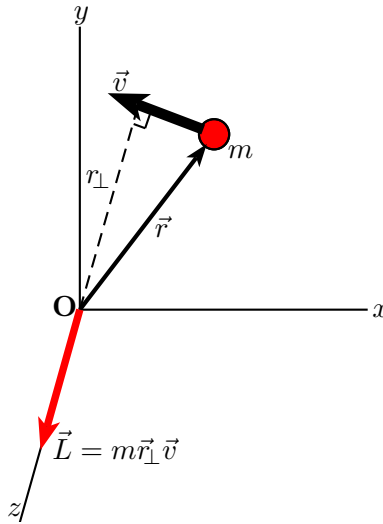


Figura 5: La Velocidad angular, L , siempre es perpendicular a \vec{r} y a \vec{v} . Esta velocidad se encuentra sobre eje z y su magnitud es $\vec{L} = m\vec{r}_\perp\vec{v}$.

Donde T es el periodo del satélite, comparando las ecuaciones (8.8) y (8.9), obtenemos

$$\vec{v} = \frac{2\pi ab/T}{\beta} \quad (8.10)$$

Note que $2\pi ab/T$ es también constante. Cuando el satélite alcanza su perigeo o apogeo, β en la ecuación (8.10) corresponde a la distancia R_P (*perigeo*) o R_A (*apogeo*), las distancias que se dirigen a R_P y R_A son perpendiculares a la línea de velocidad, como se muestra en la *Figura 6*.

La distancia R_P es la distancia en la que el satélite tiene mayor acercamiento a la tierra, y R_A , es la distancia mas grande entre el satélite y la tierra. La ecuación (8.10) establece que la velocidad del satélite es mayor en el perigeo que en el apogeo. También puede determinarse de la ecuación (8.10) que la velocidad del perigeo es proporcional a la del apogeo como lo son inversamente las distancias del apogeo a la del perigeo:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{R_A}{R_P} \quad (8.11)$$

8.2.2. Tercera ley de Kepler

El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. La energía total del satélite que es C_2 puede determinarse del principio de conservación de energía, tomando como cero el valor de la energía potencial gravitacional (ya que el satélite se encuentra sobre el plano de referencia), entonces,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = C_2 = \text{Constante}. \quad (8.12)$$

Si en la ecuación (8.10) reemplazamos β por R_P y R_A , e igualamos, obtenemos:

$$\frac{1}{2}m \frac{(2\pi ab/T)^2}{R_P^2} - \frac{GMm}{R_P} = \frac{1}{2}m \frac{(2\pi ab/T)^2}{R_A^2} - \frac{GMm}{R_A} \quad (8.13)$$

Si ordenamos la ecuación (8.13), obtenemos:

$$(2\pi ab/T)^2 \left(\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_P^2} \right) = 2GM \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P} \right). \quad (8.14)$$

Así que:

$$(2\pi ab/T)^2 \left(\frac{R_A + R_P}{R_A R_P} \right) = 2GM \quad (8.15)$$

De acuerdo a la *Figura 6*, la suma de R_A y R_P resulta la longitud del eje mayor, esto es:

$$R_A + R_P = 2a \quad (8.16)$$

y el producto entre R_A y R_P :

$$R_A R_P = (a + c)(a - c) = b^2 \quad (8.17)$$

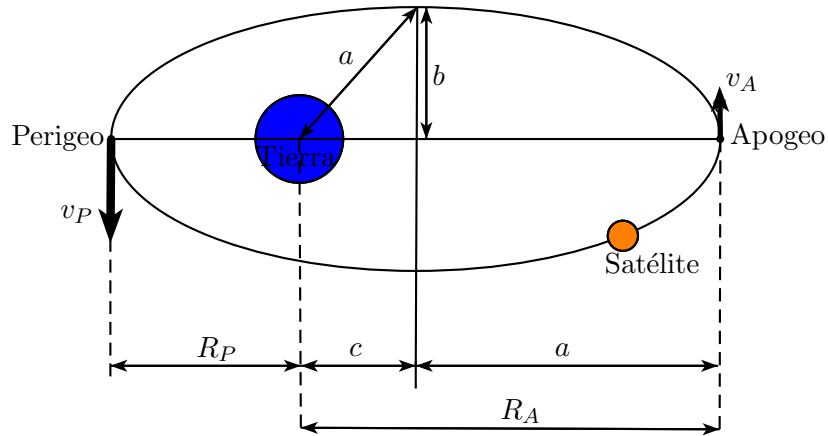


Figura 6: Perigeo ($R_P = a - c = a(1 - e)$). Apogeo ($R_A = a + c = a(1 + e)$).

La velocidad del satélite es mayor en el perigeo y menor en el apogeo.

Sustituyendo las ecuaciones (8.16) y (8.17) en la ecuación (8.15), tenemos:

$$\left(\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \right) \left(\frac{2a}{b^2} \right) = 2GM \quad (8.18)$$

Así que,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (8.19)$$

Ésta última ecuación es la tercera ley de Kepler para las órbitas elípticas. En el caso especial de una órbita circular, el semieje mayor de la elipse, a , se reemplaza por el radio de la circunferencia.

Imaginemos el satélite localizado en el punto Q de la *Figura 4*, entonces,

$$r = a \quad \beta = b$$

Multiplicando el primer término de la ecuación (8.12) por $\frac{a}{a}$ obtendremos,

$$\frac{1}{2}ma \frac{\left(\frac{2\pi ab}{T}\right)^2}{ab^2} - \frac{GMm}{a} = C_2 \quad (8.20)$$

Que es equivalente a:

$$\frac{1}{2}m \frac{\left(\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\right)}{a} - \frac{GMm}{a} = C_2 \quad (8.21)$$

Si hacemos $GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ de la ecuación (8.19) y reemplazamos en la ecuación (8.21) se obtiene:

$$\frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{a} = C_2 \quad (8.22)$$

Así que:

$$C_2 = -\frac{GMm}{2a} \quad (8.23)$$

donde, C_2 representa la energía total del satélite. Al comparar las ecuaciones (8.12) y (8.23) llegamos a:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \quad (8.24)$$

8.2.3. Primera ley de Kepler

Veamos ahora que todos los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

Si multiplicamos la ecuación (8.24) por el semieje mayor de la elipse, a , y comparamos su primer término con la ecuación (8.10):

$$\frac{1}{2}m \frac{\left(\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\right)b^2}{\beta^2} - \frac{GMma}{r} = -\frac{GMm}{2} \quad (8.25)$$

Ahora, sustituimos $GM = 4\pi^2 a^3/T^2$ en el primer término de la ecuación (8.25) y al simplificar se obtiene:

$$\frac{b^2}{\beta^2} - \frac{2a}{r} = -1 \quad (8.26)$$

La ecuación (8.26) es la ecuación de una elipse que tiene el semieje mayor a , el semieje menor b , con distancia radial al foco, r .

De la *Figura 4*, φ es el ángulo entre v y r , donde

Así,

$$\beta = r \operatorname{sen} \varphi \quad (8.27)$$

Y al reemplazar esta expresión para β en (8.26) obtenemos:

$$\frac{b^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{2a}{r} = -1 \quad (8.28)$$

Si multiplicamos ésta ecuación por r^2 , se obtiene la ecuación cuadrática:

$$r^2 - 2ar + \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = 0 \quad (8.29)$$

Al comparar esta ecuación canónica con la ecuación de la elipse podemos considerar dos casos especiales:

- *Caso I:* Si $\varphi = 90^\circ$, en la ecuación cuadrática resultante, $r = a \pm c$. Resultado esperado para una órbita elíptica con distancia al apogeo de $(r = a + c)$ y al perigeo $(r = a - c)$.
- *Caso II:* Consideremos un satélite localizado en el punto Q en la *Figura 4*, donde $\varphi = \theta$ y $\text{sen } \theta = \frac{b}{r}$.
Sustituyendo $\text{sen } \theta = \frac{b}{r}$ en la ecuación cuadrática resultante da $r = a$, un resultado esperado para el punto Q localizado en un órbita elíptica

Entonces, si comparamos las ecuaciones:

$$r^2 - 2ar + \frac{b^2}{\text{sen}^2 \varphi} = 0 \quad ,y, \quad b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Obtendremos:

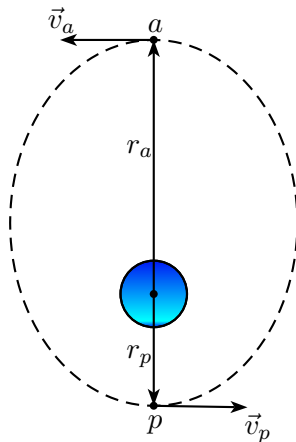
$$r^2 - 2ar + \frac{a^2(1 - e^2)}{\text{sen}^2 \varphi} = 0$$

Para el caso especial de una órbita circular, $\text{sen } \varphi = 1$ y $a = r$.

Al sustituir estas cantidades en la última ecuación, notamos que la excentricidad, e , para una circunferencia es cero.

Ejemplo de Aplicación:

Un satélite se mueve describiendo una órbita elíptica alrededor de la Tierra, como se muestra en la Figura. Las distancias mínima y máxima a la superficie de la Tierra son 400 km y 3000 km, respectivamente. Demostrar que la rapidez del satélite en el *apogeo* es menor que en el *perigeo*.



En Efecto:

Como la masa del satélite es despreciable frente a la Masa de la Tierra, consideramos que el centro de masa de la Tierra está en reposo. La Gravedad es una Fuerza central, y por eso el momento angular del satélite respecto al centro de masa de la Tierra permanece constante a lo largo del tiempo. Utilizando los índices a y p para denotar las posiciones de Apogeo y Perigeo, la conservación del momento angular para el satélite nos dice que: $L_p = L_a$, o:

$$mv_p r_p = mv_a r_a$$

$$v_p r_p = v_a r_a$$

Sustituyendo el valor del radio de la Tierra, $6,37 \times 10^6 m$, y los datos del enunciado, obtenemos que:

$$r_a = 9,37 \times 10^6 m$$

$$r_p = 6,77 \times 10^6 m$$

Así que:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{9,37 \times 10^6 m}{6,77 \times 10^6 m} = 1,38 \quad (8.30)$$

Como el satélite y la Tierra forman un sistema aislado, podemos aplicar el Teorema de conservación de la Energía y obtenemos que $E_p = E_a$, o:

$$\begin{aligned} U_p + K_p &= U_a + K_a \\ -G \frac{M_T m}{r_p} + \frac{1}{2} m v_p^2 &= -G \frac{M_T m}{r_a} + \frac{1}{2} m v_a^2 \\ 2GM_T \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) &= (v_a^2 - v_p^2) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Como conocemos los valores de G , M_T , r_p y r_a , podemos utilizar las ecuaciones (8.30) y (8.31) para determinar las dos incógnitas v_p y v_a .

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones, tenemos que:

$$v_p = 8,27 \frac{km}{s}$$

$$v_a = 5,98 \frac{km}{s}$$

Mostrando así que la velocidad en el *perigeo* es mayor que en el *apogeo*.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

1. Las leyes del movimiento planetario formuladas empíricamente por el científico Alemán Johanes Kepler en el siglo XVI, han sido verificadas analíticamente utilizando el análisis vectorial.
2. Hemos mostrado también que las mencionadas leyes pueden deducirse y justificarse utilizando las ecuaciones diferenciales y también la mecánica clásica de Newton.
3. Los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, permiten evidenciar interesantes aplicaciones que a partir de nuestra formación como licenciados en matemáticas, también, podemos incursionar en otras ciencias como la Física que nos permiten ampliar nuestro campo de acción profesional.

CAPÍTULO 10

BIBLIOGRAFÍA

- APOSTOL, Tom. Calculus. Vol. I, Segunda edición. Editorial Reverté, 1973.
- LEHMANN, Charles H. Geometría Analítica. Editorial Limusa, México D.F. 1989.
- LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. Séptima edición. Oxford University Press México, 1998.
- SEARS, Francis W. y Otros. Física Universitaria. Volumen I. Editorial Pearson educación. 1999 Addison Wesley Longman de México.
- SEGURA, R. Dino y Otros. Fundamentos de Física I. Editorial McGraw Hill. 1984.
- SERWAY, Raymond A. y JEWETT, John W. Física I. Tercera edición. Editorial Thompson. México, 2005.
- SPIVAK, Michael. Elementary Mechanics From A Mathematician's Viewpoint. Copyright © Michael Spivak 2004.
- STEWART, James. Cálculo Multivariable. Quinta edición. Editorial Thompson. México, 2001.

- WEBER, Hans J. and ARFKEN, George B. Essential Mathematical Methods for Physicists. Academic press. A Harcourt science and technology company. Copyright 2003.
- WILSON, D. Jerry y Otros. Física. Sexta edición. Editorial Pearson Education Inc. México, 2003.

Bibliografía Virtual (Internet)

- www.iop.org/journals/physed
-