Universidad Surcolombiana

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Educación

Historia de las Matemáticas desde sus Inicios hasta Hilbert

Trabajo de grado

para optar por el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Por:

DOLLY ADRIANA GUTIÉRREZ GUZMÁN

Asesor:

MAGISTER RICARDO CEDEÑO TOVAR

Neiva (Huila) Febrero de 2011

Universidad Surcolombiana

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Educación

Historia de las Matemáticas desde sus Inicios hasta Hilbert

DOLLY ADRIANA GUTIÉRREZ GUZMÁN

Neiva (Huila) Febrero de 2011

Historia de las Matemáticas desde sus Inicios hasta Hilbert

Dolly Adriana Gutiérrez Guzmán

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)
Enero de 2011

Índice general

Introducción

Este trabajo de Historia de las Matemáticas, desde sus inicios hasta Hilbert, pretende ser útil e interesante para cualquier persona que desee profundizar en el conocimiento de esta ciencia y algunos de sus protagonistas más importantes.

Desde el principio ha existido la matemática, pero no siempre ha sido tal y como la conocemos hoy, sino que ha ido evolucionando a lo largo de la historia. Dicho progreso ha sido posible gracias a muchas personas que en distintas épocas dedicaron su vida a esta ciencia. Las antiguas culturas se aproximaron a la Matemática por la necesidad de contar. Pronto surgieron los primeros sistemas de numeración, cada uno con sus propias características y, al mismo tiempo, diferentes personajes fueron avanzando en la construcción de conocimiento matemático, gracias a lo cuál se produjeron a lo largo de la historia gran parte de los avances de la humanidad. No sólo los avances matemáticos son interesantes, sino también las vidas de quienes más han influido en su desarrollo. Por eso, en este trabajo, se pretende mostrar el desarrollo histórico de las Matemáticas desde sus inicios hasta Hilbert, las vidas y aportes más significativos por los personajes más destacados en esta ciencia.

Este trabajo es la recopilación de fragmentos tomados de algunos textos de historia de las matemáticas. Está dividido en 12 capítulos en orden cronológico donde se exponen las vidas y los principales descubrimientos de los grandes Matemáticos a traves de la historia.

En el capítulo 1, se hace referencia al inicio de las Matemáticas (Las Matemáticas empezaron con los números), las primeras marcas, cómo surgió esta industria verdaderamente enorme, los sistemas de numeración de los Babilonios, de los matemáticos Indios y los distintos aportes a las matemáticas de Brahmagupta, Mahavira y Bhaskara.
En el capitulo dos Thales de Mileto y Pitagoras de Samos: se enuncian algunos teoremas y descubrimientos.
En el capítulo tres Alejandría: Euclides: se señalan algunos escritos sobre matemáticas

y una breve reseña del contenido de estos, Arquímedes, Apolonio de Perga.
En el capitulo cuarto hace referencia a Eudoxo y la escuela de Atenas: Hipócrates, Arquitas. Demócrito, Platón, Eudoxo de cnido.
En el quinto capítulo la segunda escuela Alejandrina: Menelao, Ptolomeo, Pappus y Diofanto. En capitulo sexto se refiere al renacimiento: Napier y Kepler. Luego, en el capítulo séptimo los primeros geómetras franceses: Descartes, Desargues, Pascal, Fermat,Gregory, Mercator y Wallis. En octavo Isaac Newton y Leibniz, en el noveno Los Bernoulli, L'Hopital, Moivre, Taylor y Euler.
En el décimo capítulo Maclaurin, Lagrange, Laplace, Fourier y Monje. En el capítulo 11 Gauss y Hamilton. y, para finalizar el capítulo 12 con los progresos recientes: Bolzano, Cauchy, Bolyai, Sylvester, Boole, Weierstrass, Cayley, Riemann, George Cantor y Hilbert.

Espero que el contenido de este trabajo, sea una fuente de motivación al lector para seguir profundizando en la vida, las obras, anécdotas y retos que se plantearon en épocas en que estos grandes personajes contaban con muy pocos medios.

Capítulo 1

Las Matemáticas Empezaron con los Números

Durante muchos miles de años, matemáticos de muchas y diferentes culturas han creado una enorme superestructura cimentada en los números: Geometría, Cálculo infinitesimal, dinámica, probabilidad, topología, caos, complejidad,etc.
Hay mas de 50,000 Matemáticos investigadores en el mundo, que publican más de un millon de páginas de matemáticas nuevas cada año. Matemáticas genuinamente nuevas, no solo sobre variaciones ya existentes.
Los matemáticos también han investigado en los fundamentos lógicos de su disciplina, y han descubierto conceptos aún más fundamentales que los números: Lógica matemática, teoría de conjuntos. Pero una vez más, la motivación principal, el punto de partida del que fluye todo lo demás, es el concepto de número.

1.1. Las primeras Marcas

La historia de las matemáticas empieza con la invención de los símbolos escritos para denotar Números. Nuestro familiar sistema de dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 para representar todos los números imaginables, por grandes que sean es una invención relativamente reciente; nació hace unos 1500 años, su extensión a los decimales, que nos permite representar números con alta precisión, no tiene más de 450 años.

¿Cómo surgió esta industria numérica verdaderamente enorme?

Todo empezó con pequeñas fichas de arcilla, hace 10.000 años en el proximo oriente. Incluso entonces, los contables ya estaban registrando, quien era, el propietario de qué, y de cuánto; incluso no se había inventado la escritura y no habían símbolos para los números. En lugar de símbolos numerables, aquellos contables antiguos utilizaban pequeñas fichas de arcilla. Unas eran conos, otras eran esferas y otras tenían forma de huevos.Habían discos, cilindros,piramides.

La arqueóloga *Denise schmandt-Besserat* dedujo que estas fichas representaban productos Básicos de la época. Las esferas de arcilla representaban fanegas de grano, los cilindros representaban animales, los huevos jarras de aceite. Las fichas mas antiguas datan del 8.000 a.c y fueron de uso común durante 5.000 años.

Con el paso del tiempo las fichas se hicieron más elaboradas y más especializadas, habían conos decorados para representar barras de pan, y tabletas en forma de diamante para representar cerveza.

Denise schmandt-Besserat se dió cuenta que estas fichas eran mucho más que un artificio de contabilidad. Era un primer paso vital en el camino hacia los símbolos numerales, la aritmética y las matemáticas.

1.2. Las Marcas se Convierten en Numerales

El camino histórico desde las fichas de los contables a los numerales modernos es largo e indirecto. Con el paso de los milenios, los pueblos de mesopotamia desarrollaron la agricultura y su forma de vida nómada dió paso a un asentamento permanente en una serie de ciudades-estado: Babilonia, Erido, Lagash, Sumer,Ur. Los primitivos símbolos escritos en tablillas de arcilla humeda se transformaron en pictogramas, se simplificaron y quedaron reducidos a un pequeño número de marcas con forma de cuña, que se imprimian en la arcilla utilizando un estilete seco con un extremo plano y afilado. Podian hacerse diferentes tipos de cuñas manejando el estilete de diferentes maneras.

Hacia el 3000 a.c los Sumerios habían desarrollado una elaborada forma de escritura, ahora llamada cuneiforme: en forma de cuña.

La historia de este periodo es complicada; diferentes ciudades se hicieron dominantes en tiempos diferentes. La ciudad de Babilonia, en particular, alcanzó gran importancia, y aproximadamente un millón de tablillas de arcilla Babilónicas han sido extraidas de las arenas mesopotámicas. Unos pocos cientos de ellos tratan de matemáticas y astronomía, y muestran que los Babilonios tenían un amplio conocimientos de ambas disciplinas. En particular eran astronómos expertos y desarrollaron un simbolismo sistemático y sofisticado para los números con el que podían representar datos astronómicos con alta precisión.

Los símbolos numerales Babilónicos van mucho más allá de un simple sistema de recuento, y son los más antiguos símbolos conocidos en hacerlo. Se utilizan dos tipos diferentes de cuña: Una cuña delgada y vertical para representar el número 1, y una cuña gruesa horizontal para el número 10, éstas cuñas se disponían en grupos para indicar los números 2-9 y 20- 50.
Sin embargo, ésta pauta se detiene en 59, y la cuña delgada toma entonces un segundo significado, el número 60.
Se dice por ello que el sistema de numeración babilónico es de base 60 o sexagesimal.

1.3. Los Babilonios

Los babilonios vivieron en Mesopotamia, en unos claros de tierras fértiles entre los ríos Tigris y Éufrates, hacia finales del milenio IV antes de Cristo.

Desarrollaron una forma abstracta de escritura basada en símbolos cuneiformes. Sus símbolos fueron escritos en tablas de arcilla mojada cocidas al sol. Miles de estas tablillas han sobrevivido hasta nuestros días. Gracias a ello, se ha podido conocer, entre otras cosas, gran parte de las matemáticas babilónicas. El uso de una arcilla blanda condujo a la utilización de símbolos cuneiformes sin líneas curvas porque no podían ser dibujadas. El aspecto más asombroso de las habilidades de los cálculos de los babilonios fue su construcción de tablas para ayudar a calcular.
De las tablillas babilónicas, unas 300 se relacionan con las matemáticas, unas 200 son tablas de varios tipos: de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc.
Los problemas que se planteaban eran sobre cuentas diarias, contratos, préstamos de interés simple y compuesto.
Los Babilonios usaban fórmulas para hacer la multiplicación más fácil, puesto que no tenían tablas de multiplicar. Pero tenían una tabla en la que se hallaban escritos todos los cuadrados necesarios para multiplicar.
La división fue para los Babilonios un proceso más difícil. No tuvieron un algoritmo para la división larga, de modo que fue necesaria una tabla de números recíprocos.
Fueron los pioneros en el sistema de medición del tiempo; introdujeron el sistema sexagesimal y lo hicieron dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Esta forma de contar ha sobrevivido hasta nuestros días.

Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado. Fueron incluso capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolvieron problemas más complicados utilizando el teorema de Pitágoras. Los babilonios compilaron una gran cantidad de tablas, incluyendo las de multiplicar y dividir, tablas de cuadrados y de interés compuesto. Además, calcularon no sólo la suma de progresiones aritméticas y de algunas geométricas, sino también de sucesiones de cuadrados.

1.4. Matemáticos Indios

Los 10 símbolos que se utilizan hoy para denotar dígitos decimales suelen conocerse como númerales indoarábigos. Porque tuvieron su origen en la India y fueron asumidos y desarrollados por los árabes.

Los más antiguos numerales indios eran más parecidos al sistema egipcio. Por ejemplo, los numerales kharosthi utilizados del 400 a.c al 100 d.c representaban los números del 1 al 8 como:

$$I \quad II \quad III \quad X \quad IX \quad IIX \quad IIIX \quad XX$$

Con un símbolo especial para 10. Las primeras huellas de lo que con el tiempo llegaría a ser el moderno sistema simbólico aparecieron alrededor del 300 a.c , en los numerales Brahmi. Inscripciones Budistas de la época incluyen precursores de los posteriores símbolos indúes para 1,4 y 6. Sin embargo,el sistema Brahmi utilizaba símbolos diferentes para múltiplos de 10 o múltiplos de 100, de modo que era similar el simbolismo de los números griegos, exepto que utilizaban símbolos especiales en lugar de letras del alfabeto.

El sistema Brahmi no era un sistema posicional. Ya en el año 100 hay registros del sistema Brahmi completo inscripciones en cuevas y en monedas monedas muestran que siguó en uso hasta el siglo IV.

Entre los siglos IV y VI el imperio Gupta alcanzó el control de una gran parte de la India, y los numerales Brahmi se transformaron en los numerales Gupta. De estos se tranformaron en los numerales Nagari. La idea era la misma pero los símbolos diferentes.

Es probable que los hindúes desarrollaran la notación posicional hacia el siglo I, pero las más antiguas pruebas documentales datables de la notación posicional la situan en el año 594 .

Hay un problema, al utilizar unicamente los simbolos de 1-9 la notación es ambigua por ejemplo, ,¿qué significa 25? podría significar 25 o 205 o 2005 o 250 etc. En notación pocisional donde el significado de un símbolo depende de su posición, es importante especificar dicha posición sin ambigüedad. Hoy lo hacemos utilizando un décimo signo el 0 (cero). Pero las primeras civilizaciones necesitaron un tiempo sorprendentemente largo para reconocer el problema y resolverlo de esa manera, una razón era filosófica, ¿cómo podría ser cero un número; ¿cuando un número es una cantidad de cosas? ¿ es nada una cantidad? Otra razón era práctica: habitualmente quedaba claro por el contexto si 25 significaba 250 o 205 o lo que fuera.

1.4.1. Brahmagupta, Mahavira y Bhaskara

Los matemáticos indios más importantes fueron Aryabhata(nacido en 476), Brahmagupta (nacido en el 598), Mahavira (siglo IX) y Bhaskara (nacido en el 114). Realmente deberían ser descritos como astrónomos, porque las mátematicas eran entonces consideradas una técnica astronómica. Las matemáticas existentes estaban escritas como capitulos en textos de astronomía; no se veían como una disciplina independiente.

Aryabhata escribió su libro Aryabahiya cuando tenía 23 años. Aunque la sección matemática de su libro es breve, contiene un material muy rico: un sistema alfabético de numerales, reglas aritméticas, métodos de solución para ecuaciones lineales y cuadráticas, trigonometría (incluyendo la función seno y el seno verso 1-cos θ) hay una aproximación excelente 3,1416 a π.

Brahmagupta fue el autor de los libros Brahmasphutasiddhanta y Klanda Khadyaka el primero es el más importante; es un texto de astronomía con varias secciones sobre matemáticas con aritmética y un equivalente verbal de álgebra simple. El segundo libro incluye un método notable para interpolar tablas de senos; es decir, encontrar el seno de un ángulo a partir de los senos de un ángulo más grande y otro más pequeño.

Mahavira era un Jaino e incluyó muchas matemáticas jainas en su ganita Sangraha. Este libro incluía la mayoria de los contenidos de los libros de Aryabhata y Brahmagupta, pero iba mucho más allá y era en general más sofisticado. Incluía fracciones, permutaciones y combinaciones, la solución de ecuaciones cuadráticas, triángulos pitagóricos y un intento de encontrar el área y el perímetro de una elipse.

Capítulo 2
Thales, Pitágoras

2.1. Thales de Mileto (624-546 a.C)

Thales de Mileto Nació y murió en Mileto (Turquía), pero no se tiene seguridad en estas fechas. Aunque principalmente era ingeniero, se le considera el primer filósofo, matemático y científico griego conocido. Fue maestro de grandes matemáticos como Pitágoras y Anaxímedes, y posiblemente también de Anaximandro.

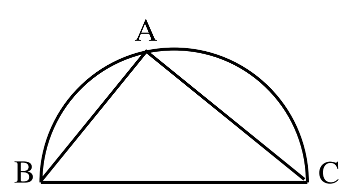
Thales fué el primer filósofo natural en la escuela de Mileto, y una fígura de gran prestigio, al ser el único filósofo anterior a Sócrates que perteneció a los siete sabios griegos. Siempre ha sido reconocido como un hombre de inteligencia exepcional.

El hecho concreto que reforzó su reputación fué la predicción de un eclipse de sol que tuvo lugar el 28 de mayo de 585 a.C. Igualmente fue el primero en sostener que la luna brillaba por el reflejo del sol, mantenía que el año constaba de 365 días. También se cree que descubrió la constelación de la Osa Menor.

Otro de sus méritos es la invención de la Matemática Deductiva, ya que empleando la geometría egipcia fue el primero en realizar demostraciones matemáticas mediante series regulares de argumentos.

Se le asignan entre otros los siguientes teoremas:

1. Teorema de Thales: Un ángulo inscrito en una semicircuferencia es un ángulo recto.



2. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
3. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.
4. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
5. Si dos triángulos son tales que dos ángulos, y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Se ha señalado que también encontramos el origen del álgebra en esta geometría de Thales. Así, el teorema de que el diámetro bisecta al círculo constituye, en realidad, una verdadera ecuación, y en su experimento para determinar la altura de la gran pirámide comparando su sombra con la de una vara vertical-realizado como dice Plutarco, “tan sencillamente, sin ningún alboroto ni instrumento”, tenemos la noción de razones iguales o proporción.

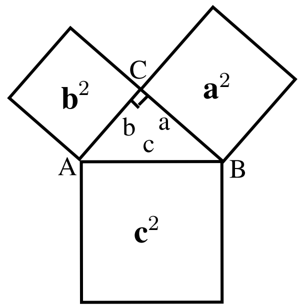
La misma idea de abstraer todo volúmen y área de su fígura material, tal como un cuadrado o un triángulo, y considerarla como función de línea, parece deberse definitivamente a Tales. Éste también parece haber sido el primero en indicar la importancia del *lugar geométrico*, o curva trazada por un punto que se mueve según una ley definida.
Thales sustentó la existencia de lo abstracto y más general; esto, decía él, era más valioso para un estudio profundo que lo intuitivo o sensible.

2.2. Pitágoras de Samos

Pitágoras de Samos, era nativo de la isla de Samos, pero pasó su mayor parte de su vida en Crotona, Italia. De jovén viajó mucho, y se dice que visitó Egipto, donde los sacerdotes le enseñaron todos sus conocimientos, y luego viajó hacia el este, visitando a los magos Persas y caldeos, y a los brahamanes indios.

Fue Pitágoras quién llevó la geometría a su perfección, después de haber descubierto Moeris los inicios de los elementos de ésta ciencia, tal cómo dice Anticleidas en el segundo libro de la Historia de Alejandro, afirma que Pitágoras se dedicó particularmente al aspecto aritmético de la geometría, descubrió las leyes matemáticas de los intervalos musicales valiendose de un aparato llamado monocordio; no descuidó la medicina, Apolodino el aritmético, hizo un comentario en sus libros acerca de Pitágoras, la cuál decía que “ Pitágoras sacrificó cien reses en agradecimiento a los

Dioses por haberlo iluminado para descubrir su teorema": el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.



Pitágoras pensaba que todo el universo se apoyaba en los números y sus relaciones procediendo a revestir a los números de ciertas propiedades mágicas. Los pitagóricos estudiaron propiedades de los números que nos son familiares actualmente, como los números pares e impares, números perfectos, números amigos, números primos y números figurados; triángulares, cuadrados y pentagonales. Por medio de fíguras se podían hallar, de una manera casi experimental, las sumas de las series

$$\sum_{v=1}^{n} v = \frac{1}{2}(n+1)n, \qquad \sum_{v=1}^{n}(2v-1) = n^2,$$

$$\sum_{v=1}^{n} 2v = n(n+1), \qquad \sum_{v=1}^{n}(3v-2) = \frac{1}{2}(3n-1)n$$

La perfección numérica para los pitagóricos dependía de las divisiones del número. Según ellos los números tenían otras características que no se aceptan en la actualidad, sostenían que cada número tenía su propia personalidad,masculina o femenina, perfecto o incompleto, hermoso o feo. El diez era el mejor número porque contiene en sí mismo los 4 primeros dígitos 1+2+3+4=10, y éstos escritos en forma triángular forman un triángulo perfecto.

Pitágoras descubrió el famoso número de oro. De hecho el símbolo de la escuela pitagórica, por medio del cual se reconocian entre sí, era la estrella de cinco puntas inscrita en un pentágono que ellos llamaban pentalfa (cinco alfas). Calcularon la relación que existía entre una diagonal y un lado del pentágono y encontraron siempre la misma. Lo llamaron razón Aurea.

Capítulo 3
Alejandría

3.1. Euclides

El geómetra griego más conocido, aunque probablemente no el matemático más original, es Euclides de Alejandría.

Euclides fue un compilador; su texto de geometría *Los Elementos* se convirtió en un exito de ventas perenne. Euclides escribió al menos 10 textos sobre matemáticas, pero sólo cinco de ellos sobreviven; todos a través de copias posteriores, los cinco supervivientes euclidianos son; Los Elementos, La División de Fíguras, Los Datos, Los Fenómenos y La Óptica.

Los Elementos se componen de trece libros, a los que se añadieron, en una época posterior dos más: el libro XIV de Hypsicles (siglo II d.n.e) y el libro XV, presumiblemente de Damasquios (siglo V d.n.e). La siguiente tabla muestra de forma resumida el contenido y el origen de cada uno de los libros de los Elementos.

Libro		Contenido	Procedencia
I	Libros de planimetría	Del punto hasta el teorema de Pitágoras	Periodo jónico, principalmente pitagórica
II		Álgebra geométrica	
III		Teoría del círculo	
IV		Polígonos Regulares inscritos y circunscritos	
V		Extensión de la teoría de las magnitudes a los irracionales	Eudoxo
VI		Proporciones, aplicación a la planimetría	?
VII	Libros de Teoría de números	Teoría de la divisibilidad, números primos	Pitagóricos
VIII		Números cuadrados y cúbicos, series geométricas	
IX		Teoría de lo par y lo impar	
X	Irracionales	Clases de irracionales cuadráticos, Anexión de áreas	Teeteto
XI	Libros estereo-métricos	Estereometría elemental	Periodo jónico
XII		Método de exhasión: pirámide, cono, esfera	Eudoxo
XIII		Poliedros regulares	Teeteto

La división de fíguras y los datos contienen complementos y comentarios sobre geometría. Los fenomenos están dirigidos a los astrónomos, y tratan de la geometría esférica.

La óptica es también geométrica, y podría considerarse mejor como una incipiente investigación de la geometría de la perspectiva: Cómo transforma el ojo humano una escena tridimensional en una imágen bidimensional. Quiza la mejor manera de pensar en la obra de Euclides es como un examen de la lógica de las relaciones espaciales. si una forma tiene ciertas propiedades, estas pueden implicar lógicamente otras propiedades. Por ejemplo, si un triángulo tiene los tres lados iguales “triángulo equilatero”, entonces los tres ángulos deben ser iguales. Este tipo de enunciado, que lista algunas hipótesis, y luego afirma sus consecuencias lógicas se denomina un “teorema”.

Este teorema concreto, relaciona una propiedad de sus ángulos. Un ejemplo menos intuitivo y más famoso el teorema de pitágoras.

En los *Elementos*, Euclides comenzó a escribir una descripción exhaustiva de las matemáticas, tarea colosal aún en su tiempo. La obra estaba formada por trece libros, cuyos temas son sumamente conocidos. Los libros I, II, IV, VI, sobre líneas, áreas y fíguras regulares simples, son en su mayor parte pitagóricos, mientras que en el libro III, sobre círculos, sigue a Hipócrates. El libro V, menos conocido, elabora el trabajo de Eudoxo sobre proporciones, que era necesario para justificar las propiedades de las fíguras semejantes de que se habla en el libro VI.

Los libros VII, VIII y IX son aritméticos y dan una descripción interesante de la teoría de números; y aquí, de nuevo, probablemente mucho de pitagórico. Se introducen los números primos y compuestos, distinción relativamente tardía; también por primera vez el m.c.d. y el m.c.m. de los números, la teoría de las progresiones geométricas y el teorema $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, junto con el método de sumar la progresión mediante una hermosa utilización de las razones iguales. Euclides utilizó este método incidentalmente para presentar sus números *perfectos* tales como 6, 28, 496, cada uno de los cuales es igual a la suma de sus factores. La serie de números perfectos aún interesa a los curiosos; son muchos más difíciles de encontrar que los sellos de correos más raros; el noveno modelo ya tiene treinta y siete dígitos, en tanto que $2^{126}(2^{127} - 1)$ es aún mayor.

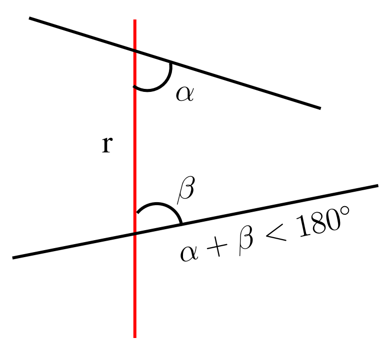
El libro X de Eclides sitúa al escritor en primera línea entre los analistas. Se halla ampliamente relacionado con la doctrina de los números irracionales, particularmente de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

donde a y b son enteros positivos. Euclides elabora aquí el aspecto aritmético de la obra de Eudoxo; habiendo establecido ya el aspecto geométrico en los libros V y VI, encontramos aquí puntualmente el método exhaustivo tratado cuidadosamente. Después del libro XI sobre geometría elemental del espacio viene el gran libro XII, que ilustra el mismo método exhaustivo, donde se demuestra formalmente el teorema de Hipócrates que da πr^2 para el área de un círculo. Finalmente, encontramos la cima de toda ésta imponente comitiva en el libro XIII. Este libro muy admirable proporciona y demuestra las construcciones de los cinco cuerpos geométricos regulares de Pitágoras, alabados por Platón; y acaba con el dodecaedro, el símbolo del propio universo.

Euclides se ha ganado la admiración y ha ayudado a formar las mentes de todos sus sucesores con su gran obra. En sus páginas seguramente se encuentran algunos fallos lógicos, los resabios de siglos de incesante crítica; pero lo sorprendente es que tanto haya permanecido invariado. En cuanto a la forma, no dejaba nada que desear, pues primero establecía cuidadosamente definiciones, luego supuestos y axiomas generales y finalmente postulados, antes de proceder con el orden regular de sus consecuencias. No obstante, había algunas lagunas y tautologías entre estos preliminares a su obra; éstas no aparecen en las partes eudoxianas de sus libros, sino en las geométricas. Uno de los objetivos de la crítica posterior ha sido suplir lo que Euclides no dijo.

Pero Euclides triunfó en un punto: en su forma de trabajar con líneas paralelas. Pues no intentó encubrir por medio de un axioma plausible su incapacidad para demostrar cietra propiedad de las líneas coplanarias. Muchos de sus otros supuestos, o bases necesarias para sus argumentos, eran tales que dispondrían razonablemente del asentimiento general. Pero en el caso de las líneas paralelas comenzó con el siguiente supuesto elaborado, denominado el *postulado de las paralelas*:



Si una línea recta corta a dos líneas rectas, de manera tal que los dos ángulos interiores que se formen en el mismo lado no sumen más de dos ángulos rectos, estas líneas rectas prolongadas continuamente se cortarán en el lado en el cual la suma de los ángulos es menor que dos ángulos rectos.

Dejando esto sin demostrar, y probando en realidad su recíproco, Euclides se expuso al ridículo y a los ataques. Seguramente, decían los críticos, éste no es un supuesto adecuado; debe ser suceptible de demostración. Se hicieron cientos de vanos intentos para eliminar este postulado demostrando su equivalente; pero cada una de las supuestas demostraciones llevaba consigo una apariencia engañosa. La venganza llegó con el descubrimiento de la geometría no euclídea en el siglo XI, cuando se hallaron los motivos fundamentales de dicho postulado. Existe dignidad en la forma en que Euclides dejó esta curiosa aspereza como una cresta natural de roca en el terreno que de otra forma habría sido tan hermosamente liso.

Para los matemáticos modernos lo más interesante en la geometría de Euclides no es su contenido, si no una estructura lógica, a diferencia de sus predecesores, Euclides no se límita a afirmar que un teorema es verdadero.
Él ofrece una demostración.

¿Qué es una demostración?

Es una especie de historia matemática es la que en cada paso hay una consecuencia lógica de algunos de los pasos previos. Cada enunciado que se afirma tiene que justificarse haciendo referencia a enunciados previos y demostrando que es una consecuencia lógica de ellos.
Euclides comprendió que éste proceso no puede llevarse hacia atrás indefinidamente; tiene que empezar en alguna parte, y estos enunciados iniciales no pueden ser demostrados, o de lo contrario el proceso de demostración empieza realmente en algún lugar diferente.
Para empezar a rodar, Euclides hizo una lista de varias definiciones: enunciados claros y precisos de lo que significan ciertos términos técnicos, tales como "línea", o "círculo". Una definición típica es la de un ángulo obtuso, es un ángulo mayor que un ángulo recto.
La definición le proporcionabala terminología que necesitaba para enunciar sus hipótesis indemostradas, que clasificaban en 2 tipos: nociones comunes y postulados. Una típica noción común es "cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí". Un postulado típico es "todos los ángulos rectos son iguales entre sí".
Hoy en día agrupamos varios tipos y los llamamos axiomas. Los axiomas de un sistema matemático son las hipótesis subyacentes que se hacen sobre el mismo. Los axiomas se consideran como las reglas del juego.

En los días de euclides y durante los casi 2000 años siguientes, los matemáticos no pensaban así ni mucho menos. En general veian los axiomas como "verdades autoevidentes", tan obvias que nadie podia cuestionarlas seriamente. Por eso Euclides hizo todo lo que pudo para hacer sus axiomas obvios.

3.2. Arquímedes

El más grande de los matemáticos fue Arquímedes. Fue el hombre práctico de sentido común, el Newton de su época, que poseía la habilidad imaginativa y la perspicacia para tratar la geometría métrica y la mecánica y que incluso inventó el cálculo integral.

Arquímedes hizo contribuciones importantes a la geometría, estuvo en la vanguardia en las aplicaciones de las matematicas al mundo natural y fue un ingeniero consumado. Pero para los matemáticos, Arquímedes será siempre recordado por su obra sobre círculos,esferas y cilindros, que ahora asociamos con el número π (pi), cuyo valor es aproximadamente $3,14159$.
Por supuesto los griegos no trabajaban directamente con π; ellos lo veían directamente como la razón entre la circuferencia de un círculo y su diámetro. Culturas anteriores habian advertido que la circunferencia de un círculo es siempre el mismo múltiplo de su diámetro, y sabian que éste múltiplo era aproximadamente $3\frac{1}{7}$, quizá un poco mayor. Los Babilonios utilizaban $3\frac{1}{8}$. Pero Arquímedes fue mucho más lejos, sus resultados iban acompañados de demostraciones rigurosas, en el espiritú de Eudoxo, hasta donde sabian los griegos, la razón entre la circuferencia de un círculo y su diámetro podría ser irracional. Ahora se sabe que realmente es así, Pero la demostración tuvo que esperar hasta 1770, cuando Johann Heinrich ideó una. Sea como fuere, Arquímedes no pudo demostrar que π es racional, tuvo que suponer que podría serlo.

La geometría griega trabajaba mejor con polígonos: Formas hechas de líneas rectas. Pero un círculo es curvo, de modo que Arquímedes se acercó al mismo aproximandolo por polígonos. Para estimar π él comparó la circuferencia de un círculo con los perímetros de dos series de polígonos; Una serie situada en el interior del círculo, y la otra a su alrededor.
Los perímetros de los polígonos deben ser más cortos que el círculo. Para hacer el cálulo más fácil, Arquímedes construía sus polígonos bisecando repetidamente los lados de un hexagono regular para obtener polígonos regulares con 12 lados, 24, 48 y así susecivamente. Se detuvo en 96. Sus cálculos demostraban que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; es decir, que π está en algún lugar entre 3,1408 y 3,1429 en notación decimal actual.
La obra de Arquímedes sobre la esfera es de especial interés, porque no solo conocemos su demostración rigurosa si no la forma en que la encontró.
Él demuestra que el volumen de una esfera es $\frac{2}{3}$ del de un cilindro circunscrito, y que las áreas de aquellas partes de la esfera y del cilindro que yacen entre dos planos paralelos cualesquiera son iguales. Es decir, demostró que el volumen de una esfera

es $\frac{4}{3}$ π r^3, donde r es el radio, y el área de su superficie es $4\pi r^2$.
La demostración hace un uso consumado de la exhausión. Éste método tiene una limitación importante: hay que saber cuál es la respuesta antes de tener muchas posibilidades de demostrarla. Durante siglos los estudiosos no tenían ninguna idea de cómo Arquímedes conjeturó la respuesta.

Pero en 1906 el estudioso Danés Heiberg estaba estudiando un pergamino del siglo XIII en el que habia escritas unas oraciones. Descubrió que el documento original era una copia de varias obras de Arquímedes, algunas de ellas previamente desconocidas.

Aún se conservan muchos, aunque no todos, de los maravillosos escritos de Arquímedes. Cubren un notable campo matemático y llevan consigo la aguda marca del genio. Ya se ha dicho que inventó el cálculo integral. Esto quiere decir que dio demostraciones estrictas para encontrar las áreas, volúmenes y centros de gravedad de curvas y superficies, círculos,esferas, cónicas y espirales. Con su método para hallar una tangente a una espiral incluso se aventuró en lo que actualmente se denomina geometría diferencial. En esta obra tuvo que invocar fórmulas algebraicas y trigonométricas; he aquí, por ejemplo, unas deducciones típicas:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + ... + \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2n} = \cot\frac{\pi}{4n}$$

Esta última es la concisa formulación actual del teorema geométrico, que aparece en su investigación del valor de π. En otro lugar establece casualmente aproximaciones de $\sqrt{3}$ en la forma

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

un ejemplo de la escala aritmética de los pitagóricos. Ya que estas dos fracciones son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{3}\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10}}\right) \text{ y } \frac{1}{3}\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5}}}\right)$$

es natural que Arquímedes se hallaba familiarizado con las fracciones continuas, o bien con algún recurso virtualmente equivalente; especialmente en cuanto $\sqrt{3}$ se obtiene por una continuación ulterior de esta última fracción con denominadores 10, 5 en sucesión infinita. El mismo tipo de aritmética aparece escrita en otro lugar de sus escritos, así como en los de su contemporaneo Aristarco de Samos, un gran astrónomo que supuso que la tierra giraba alrededor del sol.

3.3. Apolonio de Perga

Teoría de las Secciones Cónicas

Apolonio de Perga algo, más joven que Arquímedes, estudió al igual que éste en Alejandría y permaneció después de un a larga temporada en Pérgamo. En Asia Menor. No alcanzó ni su profundidad ni su originalidad de pensamiento; sin embargo, pertenece también al grupo de matemáticos distinguidos. A él se deben, entre otras cosas, las lecciones de ocho tomos sobre las secciones del cono, a las que puso el título de *Cónicas* (del griego *Konos*, piña, cono). Los primeros cuatro tomos se han conservado en griego, los tres siguientes en traducción árabe, mientras el octavo se ha perdido.

Las secciones habían sido estudiadas ya antes de Apolonio. Por ejemplo, Menecmo había utilizado hipérbolas y parábolas en resolución del problema délico, Y Aristeo había estudiado secciones cónicas como curvas obtenidas al intersecar conos y planos. Sin embargo, sólo Apolonio desarrollo una generación uniforme de todas las secciones cónicas: elipse, parábola, hipérbola- mediante intersecciones planas de un único cono.

La teoría de las cónicas de Apolonio, que alcanzó un nivel asombroso, fue desarrollada sin ayuda de coordenadas y sin una escritura formalizada, lo que hace definitivamente pesada y díficilmente comprensible. En los libros 6, 7 y 8, Apolonio expone algunos resultados propios, lo que aumenta su mérito, siguiendo la terminología actual, Apolonio trata los siguientes temas:

- Libro 1: Construcción de las cónicas al seccionar un cono circular. Centro, diámetro y diámetros conjugados de las cónicas.
- Libro 2: Ejes y asíntotas de la hipérbola.
- Libro 3: Focos, polos y polares. Construcción proyectiva de las cónicas.
- Libro 4: Números de puntos de intersección de las cónicas (demostracción de que a lo sumo hay 4).
- Libro 5: Normales y subnormales. Centro de curvatura.
- Libro 6: Cónicas afines.
- Libro 7: Propiedades especiales de los diámetros conjugados.
- Libro 8: (Reconstrucción) Resolución de problemas de construcciones especiales.

Todo lo que hizo Euclides por la geometría elemental, lo hizo Apolonio por las secciones cónicas. Definió estas curvas como secciones de un cono construido sobre una base circular; aunque el cono podía ser *oblicuo*. Observó que no sólo había secciones circulares paralelas a la base, si no que también existía un segundo grupo de secciones circulares.

Si bien es más fácil estudiar el círculo que la elipse, toda propiedad del círculo da lugar, no obstante, un círculo y su tangente, lo que vemos es una elipse y su tangente. Esta cuestión de perspectiva nos introduce en la geometría proyectiva, y Apolonio simplificó los problemas de esta forma. Obtuvo, mediante la geometría pura, las propiedades de las cónicas que expresamos actualmente por ecuaciones tales como

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{y,} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

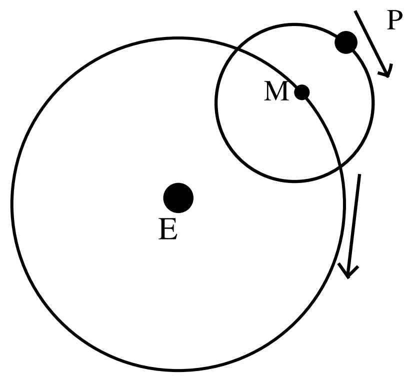
$$\text{e incluso} \qquad \sqrt{ax} + \sqrt{by} = 1.$$

En la segunda ecuación a, b, c denotan múltiplos dados de ciertos cuadrados y un rectángulo, cuya área total es constante. Evidentemente tenía poco que aprender de nuestra geometría analítica de cónicas, exeptuando la notación que se perfecciona por sí misma.
Resolvió el díficil problema de encontrar las distancias más cortas y más largas de un punto dado P a una cónica. Dichas líneas cortan a la curva en ángulo recto y se las denomina *normales*.
Descubrió que desde posiciones adecuadas de P podían encontrarse cuatro normales, y menos desde otras posiciones. Esto le llevo a considerar una curva un poco más complicada, denominada *evoluta*, que investigó completamente. Trabajó con lo que virtualmente es una ecuación de sexto grado en x e y, o su equivalencia geométrica ¡una hazaña maravillosa de su época!.

Otra obra de Apolonio fue su resolución completa de un problema referente a un círculo que satisfacía tres condiciones. Cuando un círculo pasa por un punto dado, o corta a una línea dada o corta a un círulo dado, se dice que satisface una condición. Así el problema de Apolonio implicaba, en realidad, nueve casos que se extendían desde la descripción de un círculo que pasaba por tres puntos dados a un círculo que cortaba a tres círculos dados. los más simples de estos casos probablemente fueron muy conocidos; de hecho, uno de ellos aparece en los *Elementos* de Euclides.

Apolonio fue también un aritmético y astrónomo competente. Se cuenta que escribió sobre *irracionales no ordenados* e inventó un método de "obtención rápida", para aproximar el número π. Aquí, a juzgar por su título, parece que había iniciado la teoría de la convergencia uniforme.

La reconstrucción de Apolonio fue también importante en otra rama de la ciencia, la astronomía teórica, de acuerdo con las ideas de platón, los movimientos de los planetas había de seguir recorridos curvilíneos perfectos, es decir, circulares. Este punto de vista se convirtió en un prejuicio de caracter idealista sobre el que hubo de ser construida la antigua astronomía. por medio de ingeniosas combinaciones de excéntricas y epiciclos.



Apolonio consiguió aproximarse a los complicados movimientos de los planetas utilizando tan sólo movimientos circulares y salvando de éste modo el dogma Platónico.

Capítulo 4

Eudoxo y La Escuela de Atenas

Un segundo estadio en la historia de las matemáticas tuvo lugar durante los siglos IV Y V a.c., y está relacionado con Atenas. Pues Atenas ascendió a una posición de preeminencia, después de las maravillosas victorias de Maratón y Salamina a principios del siglo V, cuando los griegos vencieron a los persas. La ciudad se convirtió no sólo en el centro político y comercial, sino también en el centro intelectual del mundo griego. Sus filósofos afluyeron del Este y del Oeste; muchos de ellos eran notables matemáticos y astrónomos. Tal vez los más importantes fueron Hipócrates, Platón, Eudoxo y Menecmo; contemporaneo de los tres últimos fue Arquitas el pitágorico, que vivió en Tarento.
Thales y Pitágoras Habían puesto los fundamentos de la geometría y la aritmética. La escuela de Atenas se concentró en aspectos especiales de la superestructura; y, bien por accidente o por predestinación, se encontraron envueltos en tres grandes problemas:

1. *La duplicación del cubo* o el intento de encontrar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del de un cubo dado;

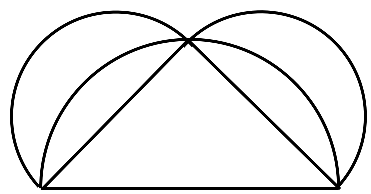
2. *La trisección de un ángulo dado*; y

3. *La cuadratura del círculo* o intento de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.

Estos problemas se presentaron naturalmente en el estudio sistemático de la geometría; pero, a medida que pasaban los años y se encontraban soluciones atrajeron una atención creciente. Su contumacia es tal que hasta el siglo XIX no se habían encontrado respuestas satisfactorias para estos problemas. Sus ingenuos anunciados son una invitación y una paradoja a la vez. Los primeros intentos para resolverlos condujeron indirectamente a resultados que, a primera vista, parecían implicar dificultades mayores que los mismos problemas.

4.1. Hipócrates

Descubrió , al intentar cuadrar el círculo, que podían dibujarse dos fíguras en forma de luna, la suma de cuyas áreas fuera igual a la de un triángulo rectángulo.



Este diseño con sus tres semicírculos descritos sobre los respectivos lados de un triángulo ilustra su teorema. Hipócrates dió, con este subproducto del problema principal, el primer ejemplo de una solución de *cuadraturas*. Así se denomina el problema de construir un área rectilínea igual a un área limitada por una o más curvas.
Hipócrates hizo progresos notables. Fue el primer autor conocido que haya escrito un tratado de matemáticas elementales; dedicó especialmente su atención a las propiedades del círculo. Actualmente, su trabajo práctico permanece entre los teoremas de Euclides, si bien se ha perdido su libro original. Su éxito principal es la demostración de la hipótesis de que los círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Esto equivale al descubrimiento de la formula πr^2, del área del cículo en función de su radio, lo cual significa que existe determinado número π y que es el mismo para todos los círculos, si bien su método no da el valor numérico real de π. Se cree que llegó a estas conclusiones considerando el círculo como el límite de un polígono regular, ya sea inscrito o circunscrito. Este fue el primer ejemplo del *método exhaustivo*, una utilización particular de la aproximación por encima y por debajo del límite deseado.
La introducción del método exhaustivo fue un importante eslabón en la cadena de pensamiento que culmina en la obra de Eudoxo y Arquímedes. Éste aproximó un grado más la probabilidad de descifrar el misterio de los números irracionales que había confundido penosamente a los primeros pitágoricos.

Una segunda obra, importante pero tal vez más simple, de Hipócrates fue un ejemplo del práctico recurso de reducir un teorema a otro. Los pitagóricos ya habían mostrado como se podía encontrar la medida geométrica entre dos magnitudes mediante una construcción geométrica. Simplemente dibujaron un cuadrado de área igual a un rectángulo dado. Hipócrates demostró que duplicar un cubo equivalía a encontrar dos medias geométricas como ésa. En un lenguaje algebraico más familiar:

$$\text{Si} \qquad a : x = x : b \qquad \text{entonces} \qquad x^2 = ab$$

$$\text{y si} \qquad a : x = x : y = y : 2a \qquad \text{entonces} \qquad x^3 = 2a^3$$

En consecuencia si a es la longitud de la arista del cubo dado, x sería la del cubo cuyo volumen fuera el doble. Pero la explicación también demuestra que x es la primera de dos medias geométricas entre a y $2a$.
No debemos olvidar, desde luego, que los griegos no tenía una notación algebraica adecuada como la mencionada. Sin embargo, hicieron el mismo razonamiento y llegaron a las mismas conclusiones a que podíamos llegar nosotros, pero sus explicaciones eran prolijas y no proporcionaban la ayuda que encontramos en estos concisos símbolos de álgebra.
Se supone que el estudio de las propiedades de dos medias geométricas, x e y, como éstas, entre longitudes dadas a y b, condujo al descubrimiento de la parábola y la hipérbola. Las proporciones continuas dan lugar a las ecuaciones $x^2 = ay$, y, $xy = 2a^2$. Estas ecuaciones representan una parábola y una hipérbola, consideradas en conjunto determinan un punto de intersección que es la clave del problema. Éste es un ejemplo de la solución espacial de la duplicación del cubo.

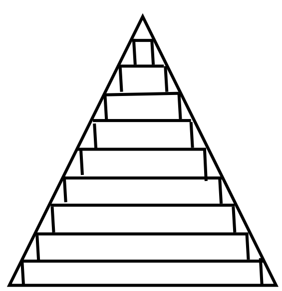
4.2. Arquitas

El lugar donde se cortan dos líneas, rectas o curvas, es un punto. Allí donde confluyen tres superficies también encontramos un punto. Las dos paredes y el techo que se juntan en una esquina de una habitación proporcionan un ejemplo adecuado. Pero dos paredes curvas que se juntaran con un techo curvo también formarían una esquina, y, de hecho, ilustrarían un método realmente ingenioso para resolver este mismo problema del cubo. El autor de esta innovacion geométrica fue Arquitas (?400 a.c), un contemporaneo de Menecmo. Esta vez el problema se reducía a encontrar la posición de cierto punto en el espacio, y el punto se localizaba como lugar de confluencia de tres superficies. Arquitas supuso que una superficie fuera la generada por un círculo en revolución en torno a una tangente fija como eje. Podemos imaginarnos una superficie tal como un anillo, si bien de modo que el orificio se hallase totalmente ocupado por el mismo anillo. Sus otras superficies eran más corrientes, un cilindro y un cono. Con esta elección desaconstumbrada de superficie logró resolver el problema.

Arquitas, diferenciandose de la mayoría de matemáticos que vivieron en esta era Ateniense, vivió en Tarento en el sur de Italia. Tenía tiempo para tomar una parte considerable en la vida pública de su ciudad y se le conoce por su ilustrada actitud en su tratamiento de los esclavos y en la educación de los niños. Fue un pitagórico y también estuvo en contacto con los filósofos de Atenas; Platon se contaba entre sus amigos. Se dice que en una ocasión Arquitas influyó para salvarle la vida.

4.3. Demócrito

El gran filósofo de Tracia, contemporaneo de Arquitas y Platón, Demócrito ha sido famoso durante mucho tiempo como el creador de la teoría atómica, especulación desarrollada inmediatamente por Epicuro. No obstante, la obra matemática de Demócrito sólo ha visto la luz muy recientemente. Esto sucedió en 1906, cuando Heiberg descubrió un libro perdido de Arquímedes titulado *Método*. Allí vemos que Arquímedes consideraba a Demócrito como el primer matemático que estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide. Cada uno de estos volúmenes era la tercera parte de un cilindro o un prisma circunscritos con la misma base. Para alcanzar estas conclusiones, Demócrito consideró estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas. En el caso del cilindro no habría ninguna dificultad, pues todas las capas serían iguales. Pero en el cono o en la pirámide el tamaño iría disminuyendo gradualmente de capa en capa hasta llegar a un punto.



La anterior figura ilustra esta disminución gradual de las capas mostrando la elevación de un cono o una pirámide, si bien el dibujo imaginado por Demócrito consistía en capas mucho más delgadas. Los tamaños menguantes le confundían. “¿son iguales o desiguales?”, Preguntaba, “pues si son desiguales, el cono será irregular como si tuviera muchas incisiones, como escalones, y asperezas; pero, si son iguales, las secciones seran iguales y el cono tendrá la propiedad del cilindro y estará formado por círculos iguales, y no desiguales, lo cual es totalmente absurdo".

Esta observación es sorprendente, pues prefigura la gran labor constructiva de Arquímedes y, siglos más tarde, la de Cavalieri y Newton. Muestra la infancia del cálculo infinitesimal. La noción de estratificación de que un cuerpo geométrico podía ser considerado como formado por una capa sobre otra, se le parecía con tanta naturalidad a Demócrito, porque éste era un físico; no se le habría ocurrido a Pitágoras o a Platón con su modo de pensamiento más algebraico que les atraía hacia las normas u orden de las cosas. Pero aquí el agudo pensamiento griego se muestra impaciente una vez más. Ninguna aproximación tosca e inmediata satisfará a Demócrito; existe una discrepancia entre la pirámide estratificada y el acabado liso del todo. La profunda cuestión de la teoría de límites se halla en sus inicios; pero no sabemos hasta que punto él intuyó alguna solución.

4.4. Platón (429-348 a.c)

Entre los filósofos de Atenas sólo dos eran naturales del lugar, Sócrates y Platón, maestro y discípulo, ambos matemáticos instruidos. Platón tal vez fuera un investigador original, pero aunque no lo hubiera sido, ejerció una enorme influencia en el curso que tomaría las matemáticas, al fundar y dirigir en Atenas su famosa *Academia* sobre la puerta de entrada de su cátedra los estudiantes leían la sorprendente inscripción: "Que nadie que no sepa geometría traspase mis puertas", su deseo más sincero era dar a sus discípulos la mejor educación posible. Un hombre, decía, no deberia adquirir simplemente un fardo de conocimientos, sino estar entrenado para ver debajo de la superficie de las cosas buscando primero la realidad eterna y el Bien que hay detrás de todo ello. El estudio de las matemáticas es esencial para este elevado propósito; y los números, en particular, deben ser estudiados simplemente como números y no como entes incorporados a algo. Estos prestan un carácter a la naturaleza; por ejemplo, los períodos de los cuerpos celestes sólo pueden caracterizarse mediante el uso de irracionales.

La palabra "aritmética", originariamente significaba los números naturales, si bien al comienzo se preguntaba si la unidad era un número; pues, "¿cómo la unidad, la medida, puede ser un número, la cosa medida?". Pero Platón, al incluir a los irracionales entre los números, hizo un gran progreso: de hecho estaba trabajando con lo que actualmente denominamos números reales positivos. El cero y los números negativos se presentaron en fecha más tardía.

La importancia que atribuye Platón a la aritmética en la formación del intelecto tiene una grandeza que se equipara a sus opiniones sobre geometría. "el tema que ha sido denominado, muy sarcásticamente, medición". (medición de terrenos), pero que en realidad es un arte, algo más que un milagro humano a los ojos de aquellos que pueden apreciarlo. En su libro, el *Timeo* , en el cual expone drámaticamente las ideas de su heroe Timeo, el pitagórico, se hace referencia a los cinco cuerpos geométricos regulares y a su supuesta significación en la naturaleza. El narrador relata cómo los cuatro elementos, tierra, agua, aire y fuego tienen formas características: el cubo se adecua a la tierra, el octaedro al aire, la pirámidfe aguda o tetraedro al fuego y el icosaedro obtuso al agua, en tanto que el Creador, empleó el quinto, el dodecaedro, para el propio universo. ¿Esto es un sofisma, o bien una anticipación brillante de la teoría molecular de nuestros propios días? Según Proclo,el tardío autor griego del comentario "Platón produjo un gran progreso en las matemáticas en general y en la geometría en particular, a causa de su entusiasmo por ella, el cual es evidente en la forma en que llenaba sus libros de ilustraciones matemáticas, e intentaba, en todas partes, encender la admiración por estos temas en aquellos que hacían de la filosofía una ocupación". Se cuenta que Platón, ante la pregunta ¿qué hace Dios?, replicó, "Dios siempre hace geometría".

4.5. Eudoxo de Cnido (408-355 a.c)

Llegó a Atenas siendo muy pobre y tuvo que luchar, como muchos otros estudiantes pobres, para mantenerse. Para aliviar su bolsillo se hospedaba en el Pireo junto al mar y cada día solía recorrer a pie el polvoroso camino de Atenas. Eudoxo fue, sin lugar a dudas, el matemático más importante de su época. Sobresalió también como astrónomo, maestro en retórica, médico y geógrafo. Viajó y estudió en Egipto, Italia y Silicia, Lugares donde conoció a Arquitas, el geómetra, y otros hombres de renombre. Hacia el 368 a.c., Eduxo regresó a Atenas, a la edad de 40 años, en compañia de un séquito considerable de discípulos, en la época en que Aristóteles, muchacho de 17 años, atravesaba por primera vez el mar para estudiar en la academia.

La gran obra de Eudoxo en astronomía fue su teoría de las esferas concéntricas, que explicaba los extraños recorridos de los planeta; admirable conjetura que se ajustaba bastante a los hechos observados. Al igual que su sucesor Ptolomeo, que vivió muchos siglos más tarde, y todos los demás astrónomos hasta Kepler, encontró en el movimiento circular una base satisfactoria para una teoría planetaria completa. Esta fue una gran obra, superada, sin embargo, por sus matemáticas puras, que alcanzaron el cenit esplendor griego. Eudoxo situó , en efecto, la teoría de los irracionales sobre una base completamente sólida y su obra estaba tan bien hecha que aún permanece, fresca como siempre, después de las grandes reconstrucciones aritméticas realizadas por Dedekind y Weierstrass durante el siglo XIX. Una consecuencia inmediata de la obra fue reestablecer la confianza en los métodos geométricos de la proporción y completar las demostraciones de varios teoremas importantes. El *método exhaustivo* servía vagamente de base a las conclusiones de Demócrito, sobre el volumen de un cono, y las de Hipócrates referentes al área de un círculo. Este método fue totalmente explicado gracias a Eudoxo.

¿Cómo se alcanzó este gran objetivo?

El Pitagórico Teodoro de Cirene, que se dice fue maestro de Platón, estimuló este estudio de la aritmética superior en Atenas. Pues Teodoro descubrió muchos irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8},\ \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$, “ punto el en cual”, dice Platón, “se detuvo por alguna razón”. Las omisiones de su lista son evidentes: la $\sqrt{2}$, había sido descubierta por Pitágoras a través de la razón de la diagonal al lado del cuadrado, en tanto que $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}$ son,por supuesto,sin importancia. Ahora bien, una cosa es descubrir la existencia de un irracional como $\sqrt{2}$, y una cuestión totalmente distinta es encontrar una forma para aproximarse al numero. Este segundo problema, que pasó al primer plano, proporcionó el aspecto aritmético del método exhaustivo que ya se había aplicado al círculo y descubrió un maravilloso ejemplo de aritmética antigua. Sabemos los detalles por un comentarista posterior, Teón de Esmirna.

Los griegos, libres de una notación decimal (que aquí es un obstáculo, aunque es práctica en innumerables ejemplos), emprendieron su tarea de la forma siguiente. Para aproximarse a $\sqrt{2}$ construyeron una escala de números enteros.

1	1
2	3
5	7
12	17
29	41

Una breve observación de la escala muestra cómo están divididas las líneas 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 2+5=7, 5+7=12, y así sucesivamente. Cada línea de la escala está formada por dos números, x e y, cuya razón se aproxima cada vez más a la razón 1:2, cuanto más abajo se hallen situados. Estos números x e y satisfacen además, en todas la filas, la ecuación

$$y^2 - 2x^2 = \pm 1$$

Se toman los signos positivos o negativos en líneas alternas, empezando por uno negativo. Por ejemplo, en la tercera línea
$7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1.$

Como las razones sucesivas son alternativamente menores y mayores que todas las siguientes, incluyen entre sí a la evasiva razón límite $1 : \sqrt{2}$, como si fueran las puntas de un par de pinzas. Se aproximan por ambos lados al irracional deseado. Así, por ejemplo, 5/7 es un poco demasiado grande, pero 12/17 es un poco demasiado pequeño. Las diferencias disminuyen como las oscilaciones del péndulo de un reloj gastado, pero nunca llega a detenerse realmente. Aquí encontramos nuevamente la noción Pitagórica de *hipérbola* y *elipse*; se la consideró como muy significativa y los griegos la denominaron la "pareja", de lo "grande y pequeño".

Para cualquier irracional podría construirse una escala como ésta; y otro ejemplo muy hermoso, que se ha sido señalado por el profesor D´Arcy Thompsom, se hallan estrechamente relacionado con el problema del segmento áureo.

Aquí el miembro derecho de cada fila precedente, de manera que la escala puede estenderse con la mayor facilidad.

1	1
1	2
2	3
3	5
5	8

En este caso las razones se aproximan, nuevamente, por un poco más y un poco menos al límite $(\sqrt{5}+1):2$. Se ha descubierto que proporcionan la aproximación aritmética al segmento áureo de una línea AB de manera tal que $CB : AC = AC : AB$. De hechoAC es aproximadamente 3/5 de la longitud AB, pero se halla más próximo a 5/8 de AB, y así sucesivamente. Es justo decir, no obstante, que esta escala, la más simple de todas, no se ha encontrado en la literatura antigua, pero debido a su íntima conexión con el pentágono, es díficil resistir a la conclusión de que los últimos pitagóricos estaban familiarizados con ella. La serie 1, 2, 3, 5, 8... la conoció Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci, que le dió nombre ya en los tiempos medievales.

Eudoxo creó una teoría de las magnitudes que incluía las magnitudes irracionales, pero sin llegar a avanzar explicitamente en el concepto de número irracional. El concepto de irracionalidad estaba hasta entonces ligado a la suposición, de que los números que se hallan en proporción poseen una medida común.
Eudoxo, dando un decisivo paso hacia adelante, se liberó de esta restricción e introdujo la siguiente definición:

Se dice que ciertas magnitudes están en la misma relación, la primera a la segunda como la tercera a la cuarta, si en la multiplicación arbitraria los múltiplos correspondientes de la primera y la tercera son al mismo tiempo o mayores o iguales o menores que los múltiplos correspondientes de la segunda y la cuarta, tomados respectivamente de dos en dos. De las magnitudes que están en la misma relación se dice que son proporcionales.
Es decir, si $a{:}b=c{:}d$, entonces para números naturales cualesquiera $m,n \geq 1$ se tiene que: de $na>mb$ se sigue siempre $nc>md$. De $na=mb$ se sigue siempre $nc=md$, y de $na<mb$ se sigue siempre $nc<md$.

Esta definición de la proporción no necesita suposiciones sobre la conmensurabilidad de las cantidades. Al mismo tiempo, es apropiada para demostrar todas las proposiciones conocidas sobre proporciones, lo cual permite en otros teoremas establecer en una forma matemáticamente correcta, la relación entre el álgebra geométrica, la teoría de las proporciones y la teoría de las equivalencias por una parte y, por otra, una teoría de las magnitudes, incluyendo la inconmensurabilidad y la irracionalidad.

Capítulo 5
La Segunda Escuela Alejandrina: Pappus y Diofanto

5.1. Menelao

Menelao vivió hacia el año 100 d.c, interesa más especialmente a los geómetras, porque hizo una contribución considerable a la trigonometría esférica. En sus escritos aparecen muchos teoremas nuevos; nuevos en el sentido en el que no se conocen documentos anteriores. Pero generalmente se supone que la mayor parte de los resultados se iniciaron con Hiparco, Apolonio y Euclides. Un teorema que trata de los puntos en los cuales una línea trazada a través de un triángulo se cruza con los lados, aún lleva su nombre. Por alguna razón, difícil de profundizar, a menudo se le clasifica actualmente como *"geometría moderna"*, descripción que difícilmente hace justicia a su canosa antigüedad. El motivo de su aparición en la obra de *Menelao* es más significativo porque lo utilizó para demostrar el teorema semejante para un triángulo trazado sobre una esfera. Menelao formuló varios teoremas que eran igualmente válidos para triángulos y otras fíguras, tanto si se los trazaba sobre una esfera como sobre una superficie plana. Incluían un teorema muy fundamental conocido como la propiedad *razón en cruz* de una transversal trazada a través de un haz de líneas. También esto es "geometría moderna". Formuló tambien el famoso teorema de que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos.

5.2. Ptolomeo (?100-168 d.c.)

Fue un buen geómetra, siempre será recordado por su trabajo en astronomía. Trató este con una perfección comparable a la alcanzada por Euclides en geometría. Su compilación se conoce como *Almagesto*, nombre que se cree es una abreviación árabe del título original griego. Su obra atrajo notablemente a los árabes, que se interesaron por las ramas menos abstractas de las matemáticas; y a través de los árabes encontró, finalmente, una base en la Europa Medieval. De esta forma cierta teoría planetaria denominada sistema "ptolemaico", fue comúnmente aceptada, manteniendo el predominio durante muchos siglos hasta que fue reemplazada por el sistema copernicano. Ptolomeo, siguiendo el camino de Hiparco, escogió una o varias explicaciones concurrentes de movimiento planetario e interpretó los hechos mediante una ingeniosa combinación de órbitas circulares o epiciclos. El supuesto de que la tierra se halla fija en el espacio era fundamental para su teoría; y si se conviene en esto, su argumento resulta muy adecuado. Pero había otras explicaciones tales como la de Aristarco, el amigo de Arquímedes, que suponía que la tierra giraba alradedor del sol. Por ello, cuando Copérnico sustituyó la teoría ptolemaica por su propio y conocido sistema centrado en el sol, estaba restituyendo una teoría muy antigua al lugar que le correspondía.

Cabe añadir que el Almagesto contiene también una trigonometría plana y esférica correctamente desarrollada, que hace uso de trabajos previos, en particular de Menelao de Alejandría, hay que tener en cuenta que la trigonometría helenística se basaba en el cálculo de cuerdas, es decir, en lugar de las funciones trigonométricas usuales, se utilizaba la función que, en términos actuales, se definiría como:

$$ch(2\alpha) = 2sen\alpha$$

donde *ch* es la expresión abreviada de chorda, cuerda.

En otros trabajos Ptolomeo utilizó la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano, intentó obtener una demostración del postulado Euclideo de las paralelas y se ocupó, además de óptica, mecánica y temas de armonía.

Ptolomeo se destacó como geógrafo y como autor de una obra de astrología que llego a ser muy famosa.

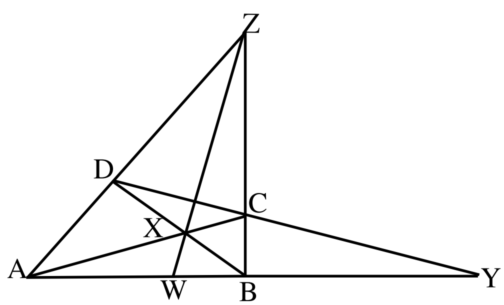
5.3. Pappus

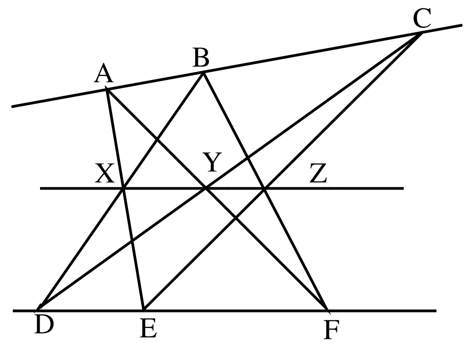
Escribió un gran comentario titulado *colección*, y felízmente se han conservado muchos de sus libros. Estos forman un enlace valioso con fuentes aún más antiguas y particularmente con la obra de Euclides y Apolonio. como expositor, Pappus rivaliza con el propio Euclides, tanto en perfección de pensamiento como en riqueza de perspectiva. Descubrir, a partir de la lectura de la *colección*, lo que se proponían Euclides y sus seguidores, era lo mismo que intentar seguir una partida de ajedrez magistral escuchando los comentarios de un observador inteligente, que tenga una visión completa del tablero.

Las fígura que llenan el espacio de la geometría pitagórica le hicieron cavilar sobre las maravillas de la geometría de las abejas; pues Dios a dotado a estas astutas pequeñas criaturas con la capacidad de construir su celdillas con la mínima superficie límite. El matemático no debe ocuparse de cuánto sabe la abeja pero el hecho es perfectamente cierto. Se podían haber agrupado celdillas triangulares o cuadradas, conteniendo cada una la misma cantidad de miel que la celdilla hexagonal, pero las celdillas hexagonales requieren menos cera. Como los espejos de Heron, esto indica nuevamente el *mínimo esfuerzo* en la naturaleza; y Pappus estaba descubriendo otra importante línea de investigación. Formuló la cuestión, ¿cuál es el volúmen máximo contenido en un área superficial dada?. Esta fue, tal vez, la primera insinuación de una rama de las matemáticas, denominada *Cálculo de las variaciones.*

Más asombroso, y en auténtico estilo arquimediano, en su famoso teorema que determina el volumen de una superficie de revolución; su idea motriz puede aprehenderse observando primero que se sabe el volúmen de un tubo recto si se dan su sección recta A y su longitud L, pues el volúmen es producto de $A \cdot L$. Pappus generalizó este resultado elemental, considerando que un tubo como este ya no fuera recto, sino circular. Se suponía que la sección recta A era la misma en todas partes; pero la longitud del tubo requería una definición ulterior. Por ejemplo, la longitud de una llanta de bicicleta hinchada es menor si se mide en torno al círculo interior, en contacto con el aro, y es mayor en torno al círculo exterior.
Esta ilustración sugiere que se puede existir una longitud L promedio o principal, para la cual la fórmula $A \cdot L$ dé aún el volúmen. Papppus descubrió que, para un tubo circular como ése, ocurría así, y fijó su longitud media con la del círculo que pasaba a través del centroide de cada sección recta A. Por centroide se entiende aquel punto particular de un área plana denominado, a menudo, centro de gravedad. Dado que el contorno de la sección A es indiferente respecto al resultado, el teorema es una de las conclusiones más generales de la matemática antigua. P. Guldin(1577-1643) se apropió tranquilamente, muchos años después, de este teorema, sin nisiquiera la excusa de un descubrimiento inconciente, y este se ha visto injustamente asociado a su nombre.

Las propiedades de los dos dibujos siguientes se pueden dar como dos ejemplos adicionales de la importante obra geométrica de Pappus. No existe sutilezas secretas en el trazado de la fígura alguna. En la primera fígura, A, B, C, D son cuatro puntos por los cuales se han trazado varias líneas rectas y estas se cortan, como se ven, en X, Y, Z. La línea que une ZX se prolonga, y corta a AB en W. El interés de ésta construcción el hecho de que, independientemente de la fórmula del cuadrilátero $ABCD$, los segmentos AW, AB, AY están en progresión armónica.





En la segunda fígura ABC y DEF son dos líneas rectas cualesquiera. Estas ternas de puntos se unen en cruz mediante los tres pares de líneas que se cortan en X y, Z. De donde se sigue que X, Y, Z están alineados. Aquí el interés radica en la *simetría* del resultado. contienen nuevas líneas que se cortan, en grupos de tres, en nueve puntos; pero también contiene nueve puntos que se encuentran, en grupos de tres, sobre las nueve líneas, tal como se en la fígura. Este sutil equilibrio entre punto y línea de una fígura es un primer ejemplo de reciprocidad, o del principio de *dualidad*, en geometría.

Pappus sobresalió en aquellas partes de la geometría que trabaja con tales figuras de puntos y líneas. Dió una enumeración sorprendente completa de las propiedades connotadas, relacionadas con el cuadrilátero, y, particularmente, con agrupación de seis puntos sobre una línea en tres pares. La así llamada *involución* de seis puntos, se efectuaría suprimiendo la línea ZXW en la primera de las fíguras, y volviendo a trazar de manera que cortara al azar a las otras seis líneas en seis puntos distintos.

En un significativo pasaje del comentario sobre Apolonio, Pappus aclara lo que, evidente, fue un problema muy famoso: el *locus ad tres et quattuor lineas*. Este resume también lo mejor del pensamiento griego sobre cónicas, e inicia con tanta aproximación la geometría analítica, que merece una mención especial. Apolonio, dice Pappus, consideraba el lugar geométrico o trazado de un punto móvil P en relación con tres o cuatro líneas fijas. Supongamos que P se hallara en una distancia x de la primera línea, y de la segunda, z de la tercera y t de la cuarta. Supongamos, además, que estas diferencias se miden en direcciones específicas, pero no necesariamente formando ángulos rectos con sus diversas líneas. Entonces, al moverse P, los valores de x, y, z, t varía; sin embargo, siempre será posible construir un rectángulo de área xy, o un cuerpo rectángular de volúmen de x, y, z. Pero, como el espacio es tridimensional, aparentemente no hay nada en geometría que corresponda al producto $xyzt$ derivado de las cuatro líneas. Por otra parte, la razones como queramos. Así, a partir de las cuatro líneas x, y, z, t, podemos formar dos razones $x{:}y$ y z: t, y multiplicarlas luego entre sí. Esto da $xz : yt$. Si la razón resultante se toma como constante, igual a c, podemos escribir

$$\frac{xz}{yt} = c, \quad \text{o} \quad xz = cyt$$

Esta es una forma de enunciar el problema Apolonio sobre cuatro líneas. Indica que el rectángulo de las distancias x, z, de P a dos de las líneas, es proporcional al de las distancias y, t, a las otras dos. Cuando ocurre esto, P describe una cónica como demostró Apolonio. El mismo análisis puede aplicarse con una leve modificación, al problema, si se dan tres y no cuatro líneas. Pappus continúa su comentario, generalizando el resultado para cualquier número de líneas; pero en este quedara más claro si no limitamos a seis líneas.

Si las distancias del punto P a seis líneas dadas son x, y, z, u, v, w entonces podemos agruparlas en tres razones x: $y, z : u, v : w$. sí, además, se supone que el producto de estas tres razones es constante, podemos escribir:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} \cdot \frac{v}{w} = c$$

Pappus llega a la conclusión correcta de que, cuando ocurre esto el punto P debe encontrarse sobre cierto lugar geométrico o curva. pero, después de algunas observaciones más, se desvía, como si estuviera avergonzado de haber dicho algo evidente. No obstante, había realizado nuevamente una de las explicaciones más generales de toda la geometría antigua. Había iniciado la teoría de curvas planas de orden superior. Pues el número de razones implicado en tal producto constante define el llamado *orden* o *grado* del lugar geométrico. Así, una cónica es una curva de grado dos, porque implica dos razones, como se ve en caso apoloniano anterior. En el caso más sencillo, cuando sólo se emplea una razón $x : y$, el lugar geométrico es una línea recta. Por este motivo, a veces se denomina curva de primer grado a la línea recta. Pero Pappus a indicado curvas de grado más elevado que el segundo. Actualmente, se las denomina cúbicas, cuárticas, quintícas, etc. Seguramente, se habian descubierto ya casos particulares de cúbicas y otras curvas. Los antiguos los habían inventado para finalidades *ad hoc*, de trisecar un ángulo, y otras parecidas; pero los matemáticos tuvieron que esperar a Descartes para confirmar la cuestión.

5.4. Diofanto

Fue el otro gran matemático que dió fama a Alejandría. Es famoso por sus escritos sobre álgebra, y vivió en la época de Pappus, o tal vez un poco antes.
Diofanto se dedicó al álgebra, como indican los términos de un epigrama griego, que nos relata la corta historia de su vida. Su infancia duró $\frac{1}{6}$ de su vida; su barba creció después de $\frac{1}{12}$ más; se casó después de $\frac{1}{7}$ más, y su hijo nació cinco años mas tarde; el hijo vivió hasta la mitad de la edad de su padre, y el padre murió cuatro años más tarde que su hijo.
Si x es la edad a la cual murió entonces:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x;$$

y Diofanto debe haber vivido hasta los ochenta y cuatro años de edad.

Los principales escritos de Diofanto que se conservan son seis de los trece libros que formaban la *Arithmetica*, y fragmentos de sus *Números Poligonales y Porismas.* Estos libros comenzaron a atraer la atención de los doctos de Europa mil doscientos años después de haber sido escritos. Como observó Regiomontano en 1463: "en estos libros antiguos se halla oculta la flor y nata del conjunto de la aritmética,el *ars rei et census* que actualmente conocemos por el nombre de árabe de álgebra". Esta obra de Diofanto tiene una doble importancia: realizó un perfeccionamiento esencial de la notación matemática, en tanto que añadía, al mismo tiempo, amplias perspectivas al objetivo del álgebra tal y como existían en aquel entonces. El significado pleno de sus aportaciones a la matemática sólo llegó a ser evidente con la creación de la primera escuela francesa, en los siglos XV y XVI.

El estudio de la notación es interesante, y cubre una esfera más amplia de lo que podría suponerse a primera vista. Pues el estudio de los símbolos y, puesto que las palabras son símbolos de pensamiento, abarca la propia literatura. Ahora podemos concentrar nuestra atención en el símbolo literario, tal como aparece a la vista en una fórmula matemática y frase impresa; o bien sobre la cosa representada, sobre el sentido del párrafo y sobre el pensamiento que yace detrás del símbolo. Una buene notación es un instrumento valioso; lleva su propia adecuación y sugestión, es fácil reconocer y comoda de usar. Dado este instrumento y el material sobre el cual trabajar, puede esperarse un progreso. Los griego se hallaban bien dotados en su propio lenguaje y en su notación geométrica,y se siguió la debida sucesión de triunfo. Pero su aritmética y su álgebra sólo avanzaron a pesar de una notación poco afortunada. Pues los griegos se vieron entorpecidos por su uso de las letras a, b y en lugar de los números $1, 2, 3$ y esto les ocultó la flexibilidad de los cálculos aritméticos ordinarios. Por otra parte, la misma perfección de nuestra *notación decimal* a hecho estas operaciones poco menos que triviales. Antes de que la notación fuera ampliamente conocida, incluso la simple adición era una tarea que requería cierta habilidad, sino se contaba con la ayuda de un ábaco. Los méritos principales de esta notación son el signo O para el cero, y el uso de un mismo símbolo, cuyo significado viene determinado por su contexto, para designar varias cosas distintas, como, por ejemplo, la notación once para significar *diez* y *uno*. Se ha reconstruido la historia de esta utilización hasta una fuente, en el sur de la India, que data de poco después de la época de Diofanto. De allí se extendió el mundo musulman y, de este modo, en la Europa medieval.

En los capitulos precedentes han aparecido muchas formulas algebraicas.
Desde luego, no son una transcripción literal de las griegas, pero son explicaciones simbólicas concisas de teoremas griegos, presentados originariamente en frases verbales, o en forma geométrica. Por ejemplo, a^2 a sido empleado en vez de " el cuadrado sobre AB". Los primeros ejemplos de esta álgebra simbólica aparecen en la obra de Vieta, que vivió en el siglo XVI, pese a que sólo pasaron a ser de uso general hacia el año 1650. Hasta aquella época la notación de Diofanto había sido universalmente adoptada.

Una antigua clasificación habla de

Álgebra Retórica,

Álgebra Sincopada,

Álgebra Simbólica,

y estos nombres sirven para indicar líneas de desarrollo aproximadas. Por álgebra retórica se entiende la expresada en lenguaje ordinario. Luego, entre los antiguos, fueron corrientes síncopas, o abreviaciones, semejantes al empleo en ingles de H.M.S. por His Majesty´s Ship, y otras parecidas. Este perfeccionamiento esencial se lo debemos a Diofanto más que a cualquier otro. La tercera, el álgebra simbólica, se instituyó finalmente, una vez Vieta la hubo inventado, a través de la influencia de Napier, Descartes y Wallis.

Una expresión típica de álgebra simbólica es

$$(250x^2 + 2520) \div (x^4 + 900 - 60x^2)$$

y ésta sirve para indicar el tipo de complicación al que Diofanto se enfrentó con éxito. Sus síncopas le permitieron escribir, y trabajar, con ecuaciones que implicaban éstas u otras expresiones parecidas: "el cuadrado de la mitad del coeficiente de x ". Es una cita de Diofanto, que trabajo con tales ecuaciones con mucha perfección. Incluso se aventuró en los casos más sencillos de ecuaciones cúbicas. No obstante, habla de "la imposible solución de la absurda ecuación $4 = 4x + 20$". Una ecuación como esta requiere una solución negativa, y hasta mucho después no se consideran los números negativos como entes en sí. Pero las fracciones y las raíces alternas de las ecuaciones cuadráticas no presentaban ninguna dificultad para él.

No es necesario que nos introduzcamos mucho en rompecabezas de "problemas que conducen a ecuaciones simples", para convencernos del valor en la utilización de diversas letras, x, y, z, para las cantidades desconocidas cada símbolo distinto acude, como una mano amiga, para ayudar a desenredar la maleza. Diofanto, al abordar tales problemas, estaba, por decirlo así, atandose una mano a la espalda, y trabajando con exito con una sola mano. Esta fue claramente la remora principal de su notación. Sin embargo, resolvió habilmente ecuaciones simultaneas, tales como:

$$yz = m(y + z),$$

$$zx = n(z + x),$$

$$xy = p(x + y);$$

y, por este ejemplo, es evidente que se dió cuenta del valor de la *simetría* en álgebra. Todo esto es valioso por su influencia general sobre la manipulación matemática; y aunque el genio de Diofanto no le hubiera llevado más lejos, ya sería respetado como un algebrista competente. Pero alcanzó alturas mucho mayores, y su obra perenne se halla en la teoría de números y de ecuaciones indeterminadas. Ejemplos de esta última aparecen en el *problema del ganado*, de Arquímedes y en la relación $2x^2 - y^2 = 1$. su nombre aún se asigna a ecuaciones sencillas, como las que forman parte del problema del ganado, aunque nunca parece haberse interesado por ellas. Se interesó por el contrario, por las cuadráticas y otros tipos más elevados, más difíciles, como, por ejemplo, la ecuación:

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2$$

Halló cuatro números enteros x, y, z, u, para los cuales ésta afirmación era cierta. Siglos más tarde, sus páginas fueron hábidamente leídas por Fermat, que demostró ser un discípulo tardío, pero brillante, "¿por qué- dice Fermat- Diofanto no buscó *dos* cuartas potencias tales que su suma fuese un cuadrado? De hecho, este problema es imposible, como puede demostrar con todo rigor mediante mí método". Sin duda, Diofanto había experimentado lo suficiente con la ecuación, aparentemente más sencilla, $x^4 + y^4 = u^2$, para demostrar que no había solución.

Capítulo 6

El renacimiento:Napier y Kepler

6.1. Napier

John Napier , nació en 1550 y murió en 1617; perteneció a la noble familia escocesa, notable por muchos guerreros famosos. Escocia era un país donde la hospitalidad bárbara, la caza, el arte militar y la aguda controversia religiosa ocupaba el tiempo y la atención de los contemporaneos de Napier; un país de dirigentes barones, cuyo conocimiento de la aritmética iba poco más allá de contar con los dedos de sus manos, cubiertas por la cota de malla. Napier barón de Merchiston, que descubrió los logaritmos, fue, tal vez, el más notable de todos estos matemáticos eminentes. Su relación abrió un terreno no completamente nuevo y tuvo grandes consecuencias, tanto prácticas como teóricas. No sólo proporcionó un maravilloso recurso para ahorrar trabajo en el cálculo aritmético, sino que sugirió varios principios importantes de análisis superior. Napier perdió a su madre a los trece años y en ese mismo año se le envió a la universidad de St. Andrews, donde se matriculó en el"triunfante colegio de St. Salvator. Durante el año de St. Andrews, se despertó su interés, tanto por la aritmética como por la teología.

Napier adquirío gran reputación como inventor, pues unía sus dotes intelectuales una fecunda destreza para hacer máquinas. Sus constantes efuerzos para elaborar formas más sencillas del cálculo aritmético le condujeron a crear una diversidad de artificios. Uno era una especie de ajedrez aritmético, donde los dígitos se movían como torres y alfiles sobre el tablero; otro sobrevive bajo el nombre de esqueleto de Napier. Pero lo que impresionó a sus amigos fue una pieza de artillería, de una eficacia tan espantosa que podría matar todo el ganado en el radio de una milla. Napier horrorizado, se negó a desarrollar este invento terrorífico que fue olvidado.

Durante su estancia en el extranjero, estudió ávidamente la historia de la notación árabe, que reconstruyó su fuente india. Meditó a cerca de los misterios de la aritmética y, en particular, sobre el principio subyacente a la notación numérica.

Se interesó, no sólo en el cálculo tal como habitual, en *decenas*, sino también en base *dos*. Si el número 11 se escribe 11, La notación idica en letra un diez y uno. En la escala corriente de diez, cada número se designa por tantos unos, tantos diez, tantos cientos y así sucesivamente. Pero Napier también comprendió el valor de una escala binaria, el cual un número se divide en las partes 1, 2, 4, 8, etc.

Así habla con interés del hecho de que cualquier número de libras puede pesarse poniendo uno o más de los pesos 1 Lb., 2 Lb., 4 Lb., 8 Lb., y así sucesivamente, en el otro platillo de la balanza.

Cuando Napier volvió a Escocia, escribió sus pensamientos sobre aritmética y álgebra, y se conservan muchos de sus escritos. Estos son muy sistemáticos, mostrando una curiosa mezcla de teoría y práctica ; la ocupación principal es la teoría, pero aquí y allí, aparece una ilustración que "agradaría más a los mecánicos que a los matemáticos". En algún lugar de sus páginas aparecen la siguiente tabla:

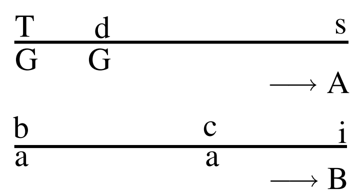
	I	II	III	IIII	V	VI	VII...
1	2	4	8	16	32	64	128...

Tal vez el lector piense que esto es sencillo y evidente; no obstante, es sumamente significativo a la luz de las consecuencias. Los hombres aún buscaban una notación exponencial y las implicaciones totales de la notación decimal árabe apenas, habían sido comprendidas. Napier contemplaba, con los ojos de un matemático con preparación griega, esta notación como si se tratara de un nuevo juguete. Vió en las series paralelas de números citadas el apareamiento de una progresión aritmética con una geométrica. Una feliz inspiración le hizo pensar que estas dos progresiones aumentaban continuamente de término a término. La tabla citada se convirtió, para él, en una especie de registro cinematográfico lento, implicando que las cosas tiene lugar entre los términos registrado.

Hacia los años 1590, o tal vez antes, descubrió los logarítmos –el artificio que reemplaza la multiplicacíon por la adición, en aritmética– y su modo de considerar el tema muestra un conocimiento íntimo de la correspondencia entre progresiones aritméticas y geométricas. Previó tan claramente la utilidad práctica de los logaritmos en astronomía y trigonometría. Estas fueron publicadas 25 años más tarde.

Y, ¿qué era un logaritmo? En lenguaje no oficial, puede explicarse, más o menos, como sigue. Puede concebirse como un punto G que describa una línea recta TS con velocidad decreciente, retardandose a su destino S, de manera tal que la velocidad

siempre sea proporcional a la distancia que tiene que recorrer. Cuando el punto G se halla en el lugar e, su velocidad es proporcional a la velocidad dS.
¡Qué problema de dinámica dar principio al mundo, antes de que la dinámica hubiera sido inventada tan siquiera!, A este movimiento, Napier lo denominó *geométricamente decreciente*. Junto a este, y sobre una línea paralela bi, un punto a se mueve uniformemente desde su posición de partida b. A esta Napier la denominó *aritméticamente creciente*. El recorrido entre los puntos móviles G y a se supone que comienza en T y b, partiendo ambos a la misma velocidad; y, luego, se registran los lugares alcanzados por G y a en cualquier instante siguiente. Cuando G a alcanzado a d, supongamos que a a alcanzado a c. Entonces, Napier llama, al número que mide la longitud bc, logaritmo del número que mide dC. En resumen, la distancia que ha recorrido a es el logaritmo de la distancia que le falta por recorrer a G.



Napier, partiendo de esto como definición, no sólo halló las propiedades teóricas de los logaritmos, sino que también construyó sus tablas, con siete cifras.
En efecto, la definición es el planteamiento de una ecuación diferencial, y su superestructura proporcional la solución completa. Incluso sugiere una teoría de funciones, sobre una base genuinamente aritmética. Esta fue una hazaña maravillosa, ya que se realizó antes de que se hubiera inventado la teoría de exponentes (índices) y el cálculo diferencial.

Napier fue también un geómetra con bastante imaginación. inventó nuevos métodos de trigonometría esférica. Es particularmente hermosa su forma de considerar un triángulo esférico rectángulo como parte de una fígura quíntuple y reminiscencia del simbolismo pitagórico.

La historia de Napier muestra cómo la época estaba madura para la invención de los logaritmos, y casi no nos sorprenderá que otro pudiera haberlos descubiertos.
La rapidamente expansión de los logritmos de Napier en el continente se debió al entusiasmo de Kepler.

6.2. Kepler

Un astrónomo nacido en 1571, de padres humildes cerca de Stuttgart, en Würtemberg, y que murió en Ratisbona, en 1630. Era un hombre de caracter afable, gran energía y hábitos metódicos, con intuición de un verdadero genio y gran facilidad para buscar nuevas relaciones entre cosas habituales. Combinó su amor por los principios generales con el hábito de observar los detalles. Unía su conocimiento de la ciencia antigua y medieval, que incluía, en una amplia comprensión, la geometría griega más pura y las extravagancias de la astrología, el nuevo saber de Copérnico y Napier.
Kepler rebosaba ideas nuevas. Gozando de gran sensibilidad para los números y la música, e inspirado cada vez más por las nociones de Pitágoras, buscaba la armonía subyacente del cosmo. Temperamentalmente se hallaba tan dispuesto a oir como a mirar una clave para estos secretos. Además, no había ninguna razón científica general para suponer que la luz proporcionaria resultados más significativos que el sonido. Así, empleó todo su genio para referirse al problema del universo estelar; y soñó una armonía en aritmética, geometría y música, que se resolviera sus misterios más profundos. Con el tiempo, pudo exponer sus grandes leyes del movimiento planetario; dos en 1609, y la tercera, más admirable, en el *armonice mundi* de 1619.
Estas leyes, que marcan una época en la historia de la ciencia matemática, son las siguientes:

1. La órbita de todo planeta es una elipse, con el Sol en un foco.

2. La línea que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. El cuadrado del período del planeta es proporcionalal cubo de su distancia máxima al Sol.

En caso de la tierra, el período es, desde luego, un año. así, esta tercera ley indica que un planeta situado a doble distancia del Sol tardaría casi tres años en describir su órbita, puesto que el cubo de dos es sólo un poco menor que el cuadrado de tres. Esta primera ley produjo, por sí misma, un profundo cambio en la perspectiva científica acerca de la naturaleza. El movimiento circular había reinado como soberano, desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brahe. Pero ahora el círculo era reemplazado por la elipse, y, con el descubrimiento de que la elipse era, realmente, un camino trazado en los cielos, y por la tierra misma, un hermoso de la geometría antigua había pasado, inexplicablemente, al centro de una filosofía práctica natural. Kepler, al obtener este resultado espectacular, señaló, inevitablemente, detalles de la teoria abstracta, que Aplonio había pasado por alto de alguna manera, tales como la importancia del foco en una cónica, e incluso la existencia de un foco para la parábola. Luego, mediante una sútil combinación de sus nuevas ideas con las propiedades cónicas originarias, Kepler comenzó a ver en las elipses, parábolas, hipérbolas, círculos y pares de líneas, otras tantas fases de un tipo de curva. La luz de las estrellas, radiadada desde puntos a una infinidad de leguas de distancia, sugirió a Kepler que, en geometría, las líneas paralelas tienen un punto en común en el infinito. Por tanto, Kepler no sólo descubrió algo interesante para el astrónomo, sino que también hizo progresos esenciales en geometría. Un geómetra entusiasta lamentaba que ¡aquí había un genio, perdido para las matemáticas por su interés por la astronomía!

La segunda ley de Kepler es notable como ejemplo temprano de cálculo infinitesimal. Pertenece al mismo orden de las matemáticas que la definición dada por Napier de un logaritmo. Nuevamente, debemos recordar que éste cálculo, como rama formal de las matemáticas, aún se hallaba oculto en el futuro. No obstante, Kepler hizo importantes contribuciones ulteriores, mediante sus métodos precisos para calcular el tamaño de áreas comprendidas dentro de límites curvos, su interés por estas materias surgió, parcialmente, a través de un deseo de mejorar el método corriente de medir cubas de vino. Kepler registró sus resultados en un curioso documento que contiene, incidentalmente, una ingeniosa notación numérica, basada en el sistema romano, donde se halla implicada la sustracción, y también la adicción. Kepler empleó símbolos análogos a I, V, X y L. Pero, en vez de los números uno, cinco, diez y cincuenta, eligió uno, tres, nueve, veintisiete y así sucesivamente. De esta forma, expresaba cualquier número entero en forma muy económica; por ejemplo,

$$20 = 27 - 9 + 3 - 1$$

como algebrista, también manejó la teoría de series recurrentes y relaciones de diferencia. Realizó prodigios de cálculo, por puro amor a los números que manipulaba. La tercera de su leyes planetarias, que apareció diez años después que las otras dos, no era un fácil arrebato de genio, presentaba un trabajo duro y prolongado.

Puede citarse algo del contenido del *armonise mundi*, que conserva como una reliquia esta gran ley planetaria. Este típico de la obra de este hombre extraordinario. En él hace una investigación sistemática de la teoría de los intervalos musicales y de sus relaciones con las distancias entre los planetas y el sol; estudia la significación de los cinco cuerpos geométricos regulares de Platón en el espacio interplanetario; elabora las propiedades de los trece cuerpos geométricos semi-regulares de Arquímedes, filosofa sobre el papel de las progresiones armónicas y otras progresiones algebraicas en la vida civil, sacando sus ejemplos del atavio de Ciro cuando era pequeño y de la imparcialidad de las leyes matrimoniales romanas. En realidad, son pocos los grandes descubrimientos científicos que puedan rivalizar con Kepler en cuanto a riqueza de imaginación. Para Kepler, cada planeta cantaba su tono: Venus uno monótono, la tierra (en la notación del Sol-fa) las notas m, f, m, que significan que en este mundo el hombre no puede esperar sino miseria y hambre. Esto dió a Kepler la oportunidad de hacer un juego de palabras en latín: “ In Hoc nostro domicilio miseriam et famen obtinere”. Las cursivas son suyas y, de hecho, todo el libro esta escrito en un solenme latín medieval. El canto de Mercurio en su órbita, semejante a un arpegio, es

d r m f s l t d’ r’ m’ d’ s m d

expresado originalmente, desde luego, en la notación del pentagrama. En cuanto a las cometas, ¡debe haber con seguridad cosas vivas que se arrojen con la voluntad y determinación “como los peces en el mar”.! Este alegre sonido de gaita de Mercurio, rodeado por los graves zumbidos de los demás planetas no es una vana fantasia; expresa correctamente un hecho curioso, que la órbita de Mercurio es una elipse más excéntrica- menos parecida a un círculo- que la de cualquier otro planeta. Esta misma peculiaridad de Mercurio ha sido la que ha proporcionado a este una de las claves que le condujeron a la hipótesis de la relatividad.

Capítulo 7
Primeros Geómetras Franceses: Descartes y Pascal

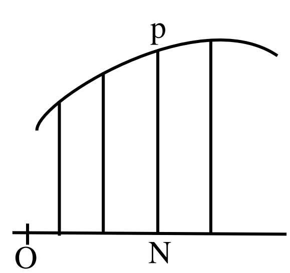
7.1. Descartes

Descartes nació de padres bretones, cerca de Tours, en 1596, y murió en Estocolmo, en 1650. En su juventud estuvo delicado de salud, y, hasta los veinte años de edad, sus amigos tenían pocas esperanzas sobre su vida. Después de haber recibido la tradicional educación escolástica de: matemáticas, física, lógica, retórica y lenguas antiguas, en las cuales fue un alumno competente, declaró que no había obtenido otro beneficio de sus estudios que la convicción de su ignorancia total y un profundo desprecio por los sistemas de filosofía entonces en boga.
A los veintitres años de edad, cuando residía en sus cuarteles de invierno en Neuberg, a orillas del Danubio, concibió la idea de una reforma de la filosofía. Después de lo cual comenzó sus viajes, retirándose diez años más tarde a Holanda, para ordenar sus pensamientos en un conjunto ponderado, es decir . En 1638 publicó su *Discurso sobre el Método* y sus *Meditaciones.* El *Discurso*, que contenía una importante labor matemática, produjo enorme sensación. El nombre de Descartes llegó a ser conocido en toda Europa; los prícipes le buscaban; y sólo el estallido de la guerra civil en Inglaterra le impidió aceptar una generosa renta de Carlos I. Como contrapartida, fue a Suecia, respondiendo la invitación de la reina Cristina, llegando en 1649 a Estocolmo, donde se esperaba que fundara una Academia de Ciencias. Una réplica de este tipo a la Escuela Platónica de Atenas ya exisía en París. Pero su salud cedió bajo la severidad del clima, y murió poco después de su llegada.

La obra de Descartes cambió la faz de las matemáticas; dio a la geometría una universalidad no alcanzada hasta entonces y consolidó una posición, que hizo del cálculo diferencial el descubrimiento inevitable de Newton y Leibniz. Pues Descartes fundó la *geometría analítica*, y proporcionó así una ocupación a los matemáticos que duró doscientos años.

Descartes se vio conducido a su geometría analítica al adaptar sistemáticamente los símbolos algebraicos a la geometría retórica aún de moda. Su paso siguiente se refirió al famoso problema apoloniano *locus ad tres et quattuor lineas*, expuesto por Pappus. Un punto se movía de manera tal que el producto de sus distancias oblicuas a ciertas líneas dadas era proporcional al de sus distancias a otras líneas. Descartes dio un paso que, desde cierto punto de vista, era la simplicidad misma: sentó el hecho de que la geometría plana es *bidimensional.* así, expresó todo lo pertinente a la fígura en términos de dos longitudes variables, x e y, junto con cantidades fijas. Esto dio, al mismo tiempo, una explicación algebraica a los resultados de Pappus; los expreso en forma actualmente tipificada como $f(x, y) = 0$, una ecuación donde sólo x e y son variables. La importancia fundamental de este resultado radica en la consecuencia ulterior de que una ecuación de este tipo puede ser considerada como la definición de y en términos de x.
Definía y como una función de x; hizo geométricamente mucho más de lo que la definición de Napier de un logaritmo había hecho dinámicamente.

También dió una nueva significación al método de Arquímedes al cálculo del área de una curva utilizando una abscisa ON y una ordenada NP; en la notación de Descartes, ON pasó a ser x, y NP, y. Pero fuera de esto, enlazó la riqueza de la geometría apoloniana que Arquímedes había descubierto; Descartes, al forjar este eslabón, rindió su servicio más valioso a las matemáticas.

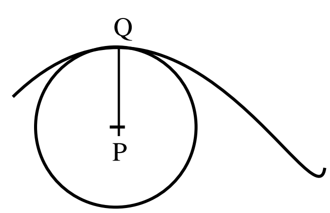


Si bien Descartes merece toda la fama por esto, porque tuvo considerables dificultades para indicar su significación, no fue el único en el descubrimiento. Entre otros que llegaron a la misma conclusión se encontraba Fermat, otro de los grandes matemáticos franceses, un hombre con una imaginación matemática más profunda que Descartes. Pero Fermat tenía una manera de ocultar sus descubrimientos.

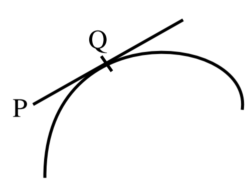
Antes de algunas de las principales consecuencias de este nuevo método en geometría, deberían mencionarse otros aspectos de la notación. La letra x se ha

hecho mundialmente famosa; y fue el metódico Descartes quien primero implantó la moda de designar a las variables por x, y, z, y a las constantes a, b, c. También introdujo los exponentes para designar productos reiterados del mismo factor, un paso que completó los perfeccionamientos en la notación que se originaron con Diofanto. Poco después siguió la fructífera indicación de exponentes negativos y fraccionarios: se debió a Wallis, uno de los primeros grandes matemáticos ingleses.
También se dió un paso profundo en la clasificación cuando Descartes distinguió entre dos clases de curvas, *geométricas y mecánicas*, o, como Lebniz prefería denominarlas *algebraicas y trascendentes*. La última designa una curva, tal como la espiral de Arquímedes, cuya ecuación cartesiana no tiene grado finito.

Apolonio había resuelto el problema de hallar la distancia más corta desde un punto dado a una elipse dada, o a otra cónica. Descartes, siguiendo este camino, llegó al mismo problema general; ideó un método para determinar la línea más corta, PQ, desde un punto dado P a una curva también dada. Una línea así corta a la curva en el ángulo recto en el punto Q, y a menudo se le denomina la *normal* en Q a la curva. Descartes tomo un círculo como centro P y convino en que el radio debía ser justo lo suficiente largo para que el círculo tocara la curva. El punto donde tocaba la curva le daba Q, el pie de la normal buscada. Su forma de obtener el radio adecuado era interesante, dependía de la resolución de cierta ecuación, dos de cuyas raíces eran iguales.



Descartes también podría haber utilizado éste método para hallar una tangente a una curva, por ejemplo, una línea PQ que toca a la siguiente curva dada en el punto Q .



Este es uno de los primeros problemas del cálculo diferencial; y una de las primeras soluciones fue hallada por Fermat, y no por Descartes.

Fermat había descubierto como trazar la tangente a ciertos puntos de la curva, particularmente a puntos Q que se hallaran, por decirlo así, en la cresta o en el seno de una ola de la curva. Eran puntos a una distancia máxima o mínima de cierta línea base fija, denominada el eje de las x. Haciendo esto, Fermat había seguido una sugerencia, indicada por Kepler, relativa al comportamiento de una cantidad variable cerca de sus valores máximos o mínimos.

Descartes descubrió una curva interesante denominada aún *óvalo cartesiano*, que ha conducido a investigaciones de largo alcance, en geometría y en análisis.
Fue hallada en una tentativa para mejorar la forma de una lente, de manera tal que condensara un haz de luz en un foco preciso. Si bien una lente de esta forma enfocaría adecuadamente un haz de luz con un ángulo abierto, si éste partiera de cierta posición particular, la lente no tendría ninguna utilidad de los demás casos.
Pero esto tiene un interés físico, además del matemático; pues el principio fundamental de su construcción es idéntico al que observó Herón de Alejandria en el caso de los espejos planos. Es el principio del mínimo esfuerzo, que ultimamente ha sido expuesto en forma general por Hamilton.

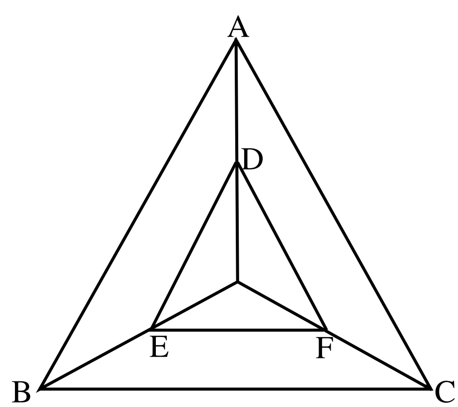
Toda esta obra matemática no era sino parte de un amplio programa filosófico, que culminaba en una teoría de vorticidades, con la cual Descartes intentaba explicar los movimientos planetarios. Así como Kepler había pensado en los cometas como peces vivos precipitándose a través de un mar celestial, Descartes imaginó a los planetas como objetos que se arremolinaban en amplios remansos. A Newton no sólo le restó señalar que esta teoría era incompatible con las leyes planetarias de Kepler, sino también proponer una solución más adecuada.

En filosofía, Descartes hizo un esfuerzo serio para erigir un sistema, de la única manera que atraería a un matemático: construyendo primero sus axiomas y postulados. El hacer esto era un símbolo efectivo de una época llena de seguridad en sí misma, después de los triunfos de Copérnico, Napier y Kepler. No podemos por menos de admirar la fuerza intelectual de un hombre que emprendió una revisión de la filosofía y logró tanto. No obstante, le faltaron ciertas dotes, que podríamos creer esenciales para tener éxito en la empresa. Era frio, prudente y egoísta, y presentaba un gran contraste con su contemporaneo, más joven, el matemático y filósofo Blaise Pascal.

La geometría analítica de Descartes es una especie de máquina; y, como ha señalado Study, " el martilleo de un molino sincronizado", puede ser demasiado insistente. El exito fenomenal de esta máquina en manos de Newton, Euler y Lagrange, apartó casi completamente al pensamiento de la geometría pura. La gran obra geométrica de la Francia, contemporanea de la de Descartes, se hundió realmente en el olvido durante unos siglos, Hasta que adquirió nuevamente importancia, hace unos cien años.

7.2. Desargues

Desargues, era un ingeniero y arquitecto residente en Lyon, dio a la antigua geometría de Apolonio su marco geométrico adecuado. Mostró, por ejemplo, con gran consición, cómo obtener cónicas de distinta forma a partir de un solo cono, siendo este un cono circular. Ganó la admiración de Chasles, el gran geómetra frances del siglo XIX, que habla de Desargues como de un artista, pero continúa diciendo que su obra lleva el sello de la universalidad, insólito en la de un artista.
Desargues tuvo la preeminencia de descubrir uno de los más importantes teoremas de la geometría, que se sitúa, junto al teorema de Pappus ya citado, como elemento fundamental en la materia.
Se expresa como sigue: si dos triángulos ABC y DEF son tales que AD, BE, CF se cortan en un punto, entonces BC, EF, CA, FD, AB, DE, tomados por parejas, se cortan en tres puntos, que se hallan alíneados.



El teorema es notable, porque es más fácil de demostrar si los triángulos no se hallan en el mismo plano. Como regla, es más díficil trabajar con la geometría del espacio que con la geometría plana, pero no siempre. El contorno de un cubo trazado sobre una hoja de papel es una fígura más complicada que el contorno real del cubo sólido. Desargues inició el método de desenredar fíguras planas, alzándolas del plano a tres dimensiones. Este es un método alternativo que sólo tardíamente ha producido su fruto más delicado en la geometría *pluridimensional* de Segre y de la escuela italiana. La obra de Desargues se halla íntimamente ligada a la de Pascal.

7.3. Pascal

Blaise Pascal, el cuarto gran matemático francés, destaca por la brillantés de su genio y por sus dotes sorprendentes, incluso en el gran siglo que produjo a Descartes, Fermat y Desargues. Nació en Clermont-Ferrand, en Auvernia, el 19 de junio de 1623, y fue educado con la mayor dedicación de su padre, que era abogado y presidente del Tribunal de Apelación. Como se le consideraba poco inteligente para comenzar el estudio de las matemáticas demasiado pronto, el niño fue dedicado al estudio de las lenguas. Pero su curiosidad matemática se despertó a los doce años, cuando, en respuesta a una pregunta sobre la naturaleza de la geometría, se le dijo que consistía en construir fíguras exactas y en estudiar las relaciones entre sus partes. Pascal se sintió, sin duda, estimulado por la prohibición de leerla, pues dedicó al nuevo estudio su tiempo destinado a jugar, y en un corto intervalo había deducido realmente varias propiedades esenciales del triángulo. Descubrió por sí mismo el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Cuando su padre lo supo se sentió tan sobrecogido de admiración que lloró de alegria, arrepentido, y le dió una copia de Euclides. Ésta rapidamente fue leída y pronto nominada, fue seguida por las cónicas de Apolonio, y, al cabo de cuatro años, Pascal había escrito y publicado un ensayo original sobre secciones cónicas, que asombró a Descartes. Todo giraba en torno al milagro de un teorema, que Pascal denominaba “1´hexagramme mystique,çomúnmente reconocido como el más importamte teorema de la geometría medieval, el cual establece que si se inscribe un hexágono en una cónica, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos siempre estarán sobre una línea recta; y se dice que de esta proposición dedujo cientos de corolarios, todo esto penetrado por el método de proyección. El teorema ha tenido una historia notablemente rica, después de un eclipse de doscientos años, culminando en los encantamientos de Segre, cuando lo presenta como un lugar geométrico cúbico en un espacio de cuatro dimensiones, transfigurado, no obstante, en su forma más sencilla e inevitable.

Durante estos años, Pascal tuvo la suerte de disfrutar, en París, de la compañia de Roberval, Mersenne y otros matemáticos de renombre, cuyas reuniones semanales regulares se convirtieron, finalmente, en la Academia francesa. Una atmósfera estimulante como esta, produjo frutos después de que la familia se trasladase a Rouen, donde Pascal, a los dieciocho años de edad, se entretenía haciendo su primera máquina de calcular, y seis años más tarde publicó sus *Nouvelles expériences sur le vide,* que contenían importantes resultados experimentales, que comprobaban el trabajo de Torriceli sobre el barómetro.

Pascal fue, de hecho, tan dotado y original en las ciencias prácticas y experimentales como en la geometría pura. En Rouen, su padre estuvo muy influido por los jansenistas, una secta religiosa recientemente formada, que negaba ciertos dogmas de la doctrina católica, y en esta atmósfera tuvo lugar la primera conversión de su hijo. una segunda conversión se realizó siete años más tarde, al escapar por poco de un accidente de coche. Desde entonces, Pascal llevó en adelante una vida de abnegación y caridad, raramente igualada, y aún más raramente superada. Cuando uno de sus amigos fue condenado por herejía, Pascal emprendió una vigorosa defensa en una carta escrita a un provincial llena de persuasiva ironía con los jesuitas. Entonces se le ocurrió la idea de escribir una apología de la fé cristiana, pero su salud, siempre debíl, cedió en 1658; y después de algunos años de sufrimiento, soportados con noble paciencia, murió a los treinta y nueve años de edad. Las notas en las que apuntaba sus pensamientos, en preparación de su gran proyecto, han sido recopiladas y públicadas en Pensées, una obra clásica de la literatura.

En Pascal, la fe más sencilla agraciaba al portador de las mayores dotes intelectuales, y para él las matamáticas eran algo que debía ser aceptado o dejado a un lado, según la voluntad de Dios. Así, durante los años de su retiro, cuando se hallaba despierto sufriendo y le venían ciertos pensamientos matemáticos y el dolor desaparecía, lo consideraba todo como una señal divina para que continuara. El problema que se le presentó se refería a una curva llamada cicloide, y en ocho días descubrió sus propiedades principales, por medio de una brillante argumentación geométrica. Esta curva puede ser descrita por la rotación de una rueda: si el eje se halla fijo, como en el volante de una máquina, un punto de la llanta describe un círculo; pero si la rueda gira a lo largo de una línea, el punto de la llanta describe una cicloide. Galileo, Descartes y otros se interesaron por la cicloide, pero Pascal los superó a todos. Para ello hizo uso de un nuevo instrumento, el *método de los indivisibles*, recientemente inventado por el italiano *Cavalieri*. Aunque Pascal lanzó un desafío, nadie pudo competir con él; y su obra puede ser considerada como el segundo capítulo del cálculo integral, al cual Arquímedes había sido el primero en contribuir.

Una reseña de Pascal, el matemático, sería incompleta sin hacer referencia a su álgebra que, en el sentido actual de la palabra, prácticamente fundó. Surgió de un juego de azar, que había constituido un tópico de discusión entre Pascal y Fermat. Del debate surgió la noción de *probabilidad matemática*; Pascal la consideró como un problema de disposiciones o combinaciones de cosas dadas y de contar estas combinaciones. Con una perspicacia característica, halló el mecanismo adecuado para estudiar el tema. Éste fue el *triángulo aritmético*, un artificio que ya había sido utilizado por Napier para otro fin, y que databa de tiempos aún más tempranos.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

En una tabla triángular se escriben ciertos números, como se ve en la fígura. La tabla puede ser aumentada en cualquier grado, añadiendo más números, cada uno en los extremos derechos de las filas, añadiéndose un solo 1 al final de la primera columna para comenzar una nueva fila. Por ejemplo, debajo del 5 de la segunda fila, y junto al diez de la tercera fila, se puede colocar un nuevo número. Este número es 15, la suma de 5 y 10. Cada nuevo número se introduce en la tabla siguiendo esta regla de simple adición. El diagrama muestra a un 1 del ángulo izquierdo superior, seguido de cinco diagonales paralelas, siendo la quinta y última (1, 5, 10, 10, 5, 1). Una sexta diagonal, que no se ha incluido, estaría formada por 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, de acuerdo con la regla de la adición. En vez de localizar una entrada, 10 por ejemplo, en la cuarta fila y la tercera columna, es más importante localizarla por la *quinta diagonal* y la *tercera* columna. Pascal descubrió que esta daba el número de combinaciones de cinco elementos tomados de dos en dos; y halló una formula para el caso general, cuando el número se encontraba en la n-ésima diagonal y en la $(n+1)$-ésima columna. Expresó esto correctamente como:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)...(m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(m-n)}$$

También utilizó las diagonales para desarrollar la expresión binómica de $(a+b)^m$ por ejemplo:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Los números y las cantidades no siempre son tan importantes por su tamaño o magnitud como por su forma y disposición. Lo que hizo Pascal fue que esta noción de forma, bastante corriente en geometría, se apoyara en los números mismos, un paso altamente significativo en la historia de las matemáticas. Con esto creó el álgebra superior y preparó el camino para Bernoulli, Euler y Cayley.

7.4. Pierre de Fermat

Pierre Fermat (1601-1665) nació en 1601 en Beaumont-de-Lomagne, cerca de Montauban. Su padre, comerciante de cueros , después de haberle dado una instrucción sólida en su familia, le envió a estudiar derecho a Tolouse. Allí pasó toda su vida, estudiando Derecho; después, a partir de 1631, fue consejero en el Parlamento, y murió en Castres en 1665. Fermat tuvo una carrera apacible, caracterizada por un cuidado ejemplar de hacer bien su tarea y, en sus momentos de ocio, supo crearse ocupaciones literarias y apasionarse por las matemáticas.

Fermat publicó raramente sus descubrimientos; apenas algunas notas como apéndices a tratados escritos por otros. Como trabajaba para entretenerse, sus resultados más bellos aparecen en los márgenes de estos tratados, y un gran número de sus trabajos se han perdido. Mantuvo correspondencia con todos los científicos de su época; su reputación de matemático competente fue inmensa, y la estima en la que se le tuvo fue general. Pascal confesó que era "aquel a quien tengo como el gran geométra de toda Europa", y este personaje tan atrayente, de un caracter constante, afable, poco suceptible, sin orgullo, contribuyó ampliamente a la evolución de las matemáticas en campos tan variados como la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, la teoría de los números y la teoría de las probabilidades. Los principales escritos de Fermat fueron publicados, después de su muerte, por su hijo Samuel en 1679, bajo el título de *Varia opera mathematica*. Aunque esta publicación no encierra más que una parte de su producción, basta por sí sola para clasificar el célebre habitante de Tolouse como el más importante matemático francés del siglo XVII.

Fermat, que compartió con Pascal, es más famoso por su teoría de números. Tenía la constumbre de garrapatear notas en el margen de una copia de Diofanto sobre ideas que le venían al pensamiento mientras leía. Estas notas son únicas, por su interés y profundidad; parecía aprehender las propiedades de los números enteros más bien por la intuición que por la razón. La nota más célebre, que a menudo se denomina *último* *teorema de Fermat,* afirmaba que, era imposible encontrar números enteros x, y, z que satifagan la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

cuando n es un entero mayor que 2. Añade: "He hallado una demostración verdaderamente maravillosa para esto, pero el márgen es demasiado pequeño para contenerla".

Este último teorema de Fermat, desafió la inventiva de sus sucesores analíticos; pues, la demostración resultó ser sorprendentemente difícil. Tan difícil, de hecho, que se necesitaron casi 350 años de esfuerzo, por parte de muchos de los mejores matemáticos del mundo, para conseguirlo. Y para hacerlo, ellos tuvieron que inventar teorías matemáticas completamente nuevas, y demostrar cosas que parecía mucho más difíciles. Hasta que, en 1993 *Andrew Wiles,* de Princeton, anunció una demostración de la conjetura de Taniyama–Weil para una clase especial de curvas elípticas, suficientemente general para demostrar el último teorema de Fermat. Pero, cuando el artículo fue enviado para publicación, apareció una seria laguna. Wiles estaba a punto de abandonar cuando "de repente, de forma totalmente inesperada, tuve esta increible revelación... era indescriptiblemente bella, era tan simple y elegante que no podía creerlo ". Con la ayuda de Richard Taylor, el revisó la demostración y cubrió la laguna. Su artículo fue publicado en 1995.

Probablemente, había en el mundo unos 100 matemáticos calificados para entender la demostración de Wiles. Muchos de ellos la examinaron y la aprobaron. Algunas partes se simplificaron y se mejoraron. Finalmente, Ahora la comunidad matemática considera oficialmente demostrado el Último Teorema de Fermat.

Sobre geometría analítica Fermat, nos dejó un pequeño tratado, *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos). El título resulta confuso para la terminología actual. En efecto, la expresión lugares sólidos no se refiere a la geometría analítica del espacio, ya que Fermat adopta la división existente en la Antigüedad de los lugares geométricos planos en lugares planos (recta y círculo), lugares sólidos (parábola, hipérbola, elipse) y lugares lineales (todas las demás curvas). Los lugares lineales no fueron tratados por Fermat, que subestimó las dificultades con que se enfrenta el estudio de curvas superiores, pues pensaba que su estudio se podía reducir al de las cónicas; es decir, que las curvas de cualquier orden se podían reducir a curvas de segundo orden (mucho más tarde en 1643 y 1650, Fermat corrigió su opinión y avanzó unos principios de una geometría analítica del espacio).

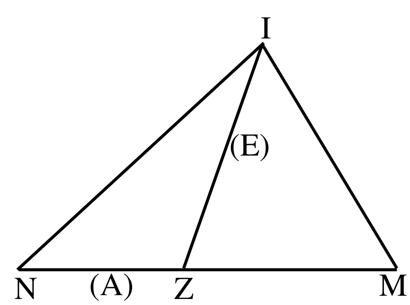
La *Isagoge* comienza con las siguientes palabras:

> No hay ninguna duda de que los antiguos escribieron mucho sobre lugares. Testigo de ello es Pappus, quien al principio de libro VII asegura que Apolonio escribió sobre lugares planos y Aristeo sobre lugares sólidos. Pero no nos engañemos, el estudio de lugares no les parecía a ellos precisamente fácil, lo que deducimos del hecho de que no nos expresaron con generalidad muchos lugares, como se verá más adelante.
> Por ello sometemos esta rama del saber a un análisis particular, especialmente adecuado a ella, para que en el futuro se halle abierto un tratamiento general de los lugares.

A continuación, el parrafo decisivo en el que estableció por primera vez el principio fundamental de la geometría analítica:

> Tan pronto como aparecen dos magnitudes desconocidas en una ecuación se tiene un lugar geométrico y el extremo de una de las magnitudes desconocidas describe una línea recta o curva. Las ecuaciones se pueden representar cómodamente, si se colocan ambas magnitudes desconocidas una junto a la otra en un ángulo dado (que se suele tomar igual a un recto) y se da la situación y el punto extremo de una de ellas.

La ecuación de la recta, por ejemplo, es tratada por Fermat de la siguiente manera:



Sea MZN una recta (dada por su posición), N un punto fijo de ella. Sea NZ la magnitud desconocida A, y sea el segmento ZI, colocado sobre la recta según un ángulo dado NZI, igual a la otra magnitud desconocida E. Si $DA = BD$, entonces el punto I describe una recta dada según la posición.

Demostración

Se tiene que $B : D = A : E$. de ahí que la proporción de A con E es constante y puesto que además el ángulo está dado en Z, se conoce la forma del triángulo NIZ

y por tanto el ángulo INZ. Pero el punto N es conocido y de la recta NZ se sabe su posición. Por tanto se sabe también la posición NI.

De forma parecida demostró Fermat que una ecuación del tipo $AE = Z$ (¡ problema de la dimensionalidad!) representa una hipérbola; $AZ = DE$, una parábola; $E^2 = DA$, una parábola; $B^2 - A^2 = E^2$, un círculo; $A^2 + B^2 = e^2$, una hipérbola. En resumen, Fermat aportó una demostración esencialmente completa del siguiente teorema:

Si ninguna de las magnitudes desconocidas supera la segunda potencia, se tendrá un lugar plano o sólido.

Expresado modernamente: las curvas de segundo orden son todas cónicas; si bien Fermat no conocía todavía los casos degenerados.
El objetivo de Fermat consistía en demostrar la identidad de un lugar geométrico definido por una ecuación algebraica con curvas ya conocidas. Su método no pretendía, sin embargo, derivar de la ecuación de la curva sus propiedades.

7.5. Gregory

James Gregory (1638-1675), matemático y óptico escocés, nació el mes de noviembre de 1638, en Drumoak, cerca de Aberdeen, en una familia en la que se cultivaban la filosofía, y las matemáticas. Su tio abuelo, Alexandre Anderson, había editado los trabajos de Vieta. Recibió una sólida formación de matemáticas en la escuela de Aberdeen, y después con su hermano David. Su encuentro con John Collins (1625-1683), bibliotecario del Royal Society, el Mersenne Británico, le permitió entrar en contacto con el mundo de los científicos. A los 26 años fue a Italia, donde conoció los sucesores de Torricelli y en particular a Stefano degli Angeli (1623-1697). Los trabajos de Angeli se referían a los métodos infinitésimales y, más específicamente, a la cuadratura de las espirales generalizadas, parábolas e hipérbolas. Durante cuatro años, Gregory estudió con éste maestro italiano y con el alumno de Cavaliery, Mengoli. Durante su estancia en Italia, Gregory publicó dos obras, *la Vera quadratura* (1667) y la *Geometraie Pars Universalis* (1668).

A su vuelta a Inglaterra, Gregory escribió sus *Exercitationes geometricae* para responder a ciertas críticas dirigidas contra su primera obra y también para desarrollar geométricamente una cuadratura de la hipérbola rectángular mediante un desarrollo en serie. Volvió a Escocia y fue nombrado profesor de matemáticas en St.Andrews y después en Edimburgo, en 1674. Desgraciadamente, perdió la vista en el mismo año y murió en Edimburgo en octubre de 1675. Había manifestado un talento notable para la geometría y el análisis infinitésimal, pero sus trabajos no ejercieron una influencia proporcional a su inmenso talento.

El objetivo principal de su obra, publicada en Padua bajo el título de *Vera circuli et hyperbolae quadratura,* era utilizar la idea de una sucesión doble convergente para definir y determinar, de la manera más precisa posible, magnitudes que no pudieran ser expresadas mediante una relación racional. Sean A_0, B_0, el área de la fígura poligonal inscrita y circunscrita, respectivamente. Duplicando sucesivamente los lados de esa fíguras, Gregory forma la sucesión $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ y muetra que $A_n = \sqrt{A_{n-1}B_{n-1}}$ (media geométrica), y $B_n = \dfrac{2A_nB_{n-1}}{A_n + B_{n-1}}$, (media armónica), donde A_n y B_n son las áreas de $(n+1)$-ésima fígura inscrita y circunscrita, respectivamente. Estas dos sucesiones convergen evidentemente hacia el área del sector de una elipse, circunferencia o hipérbola. En esta ocasión Gregory intentó elaborar una teoría de la convergencia para tales sucesiones dobles; aunque esta tentativa fracasara, hay que reconocerle el mérito de haber sido el primero en formular una proposición de esta especie.

En la segunda obra, publicada en Padua en 1668 y titulada *Geometriae pars universalis,* se encuentra una compilación sistemática de todos los procedimientos para la determinación de arcos, tangentes, áreas, volúmenes y superficies en forma de tratado general. Parece evidente que Gregory se inspiró ampliamente en los trabajos de Gregoire de Saint-Vicent en las escuelas italiana y holandesa y en los científicos franceses e italianos. La exposición es verbal y geométrica y las demostraciones se basan en un método de exhaustión modificado.

Las contribuciones matemáticas de Gregory abarcan una variedad de temas: Descubrió la serie binómica y numerosas series para las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. Probablemente comprendió la relación de reciprocidad entre la rectificación, la cuadratura y el problema de las tangentes.

7.6. Mercator

Mientras que gregory efectuaba descubrimientos originales con respecto a las series infinitas, un matemático alemán, *Nicolaus Mercator* (1620-1687), se interesaba también por éstas series. Su verdadero nombre era Kaufmann, y nació en Holstein, Alemania, pero vivió varios años en Londres y fue uno de los primeros miembros de la Royal Society.

En 1683 fue a París para hacer los planos de las fuentes de Versalles, y murió en París en 1687, a los 67 años.

En 1668 publicó su *Logarithmotechnia,* que comprende tres partes muy desiguales. Las dos primeras estan consagradas enteramente al cálculo de un sistema de Logaritmos vulgares, mientras que la tercera contiene diferentes fórmulas de aproximación para los logaritmos.

En particular, se encuentra allí la ordenada

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

de una hipérbola equilátera expresada mediante una serie de potencias.
La superficie del segmento hiperbólico es obtenida por el método de Cavaliery, está expresada verbalmente y corresponde a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

que recibe el nombre de *Serie de Mercator.*

7.7. Wallis

John Wallis nació en 1616 en Ashford y murió en 1703 en Oxford. Este inglés fue uno de los matemáticos más influyentes hasta la llegada de Newton.

Wallis cursó sus estudios elementales en la escuela de Ashford, en la que, ya a muy temprana edad, destacó como un alumno especialmente aventajado. A los 14 años había alcanzado el grado de proficiente en latín, griego y hebreo. De aquí pasó directamente a la Emmanual College Cambridge, en donde empezó a interesarse por las matemáticas y también estudió filosofia. Wallis formó parte de un grupo de intelectuales que se reunían periódicamente en Londres para tratar temas sobre ciencias experimentales que, con el tiempo, acabaría por convertirse en la famosa Royal Society, de la que Wallis consta como miembro fundador.

Su mérito más trascendental reside en haber establecido claramente la *noción de límite* en la forma rigurosa hoy vigente. Gran parte de la obra de Wallis en cálculo precedió a Newton y Leibniz, sobre quienes ejerció una notable influencia.

Entre sus obras más importantes destacan la *Arithmetica infinitorum* (1656), y el *Tratado de secciones Cónicas* (1656).

La primera lo llevó a la fama. A lo largo de sus páginas abordaba cuestiones tales como las series, la teoría de los números, las cónicas, los infinitos... En la resolución de este tipo de integrales descubrió métodos de cálculo que más tarde serían utilizados por Newton en su teorema del binomio. A Wallis se le atribuye la introducción del símbolo (∞), utilizado habitualmente para denotar el infinito.

En cuanto a las secciones cónicas, Wallis las plantea con independencia de la figura tridimensional que las genera y, haciendo una importante aritmetización de la geometría, las considera de forma «absoluta», por medio de ecuaciones que se aproximan mucho a la idea actual que tenemos de estas curvas como lugares geométricos del plano sujetos a ciertas condiciones.

A mediados del siglo XVII el matemático inglés, John Wallis dio interpretaciones claves a estos nuevos números: carácter vectorial a los números con signo y diferenciación entre números reales como números sobre una recta y números complejos como números en un plano.

Capítulo 8
Isaac Newton y Leibniz

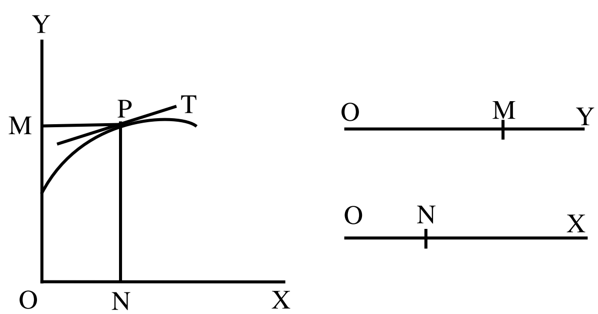
8.1. Isaac Newton

Newton, hizo tres famosos descubrimientos: uno sobre la luz, uno en matemáticas y uno en astronomía. En sus inicios de su carrera descubrió , al descomponer un rayo de sol y hacer que los rayos separados llegaran a una pantalla formando una cinta de arco iris, que la luz blanca estaba compuesta de luces de colores. Este descubrimiento se produjo a causa de la imperfección de las lentes de los telescopios que se fabricaban entonces. Newton, intentó subsanar el defecto inventando un telescopio reflector, con un espejo que ocupara el lugar de la lente principal, porque creían que los espejos no producían esta aberración de las lentes. Uno de sus distintivos, compartido con Arquímedes y algunos otros gigantes intelectuales, es la excelencia de su propio trabajo manual.
En la capilla de su colegio existe una estatua que sostiene un prisma:

Newton, con su prisma y su rostro impasible;
la señal en mármol de una mente que viaja sola
y para siempre, a través de extraños mares de pensamiento.

En matemáticas, su descubrimiento más famoso fue el cálculo diferencial e integral, que él denominaba el método de *fluxiones*; y en astronomía, la concepción y elaboración de la gravitación universal. Sería un error suponer que trabajó en estos temas uno a uno; estuvieron más bien encadenados, y cada uno reforzaba a los demás. A los veintitrés años de edad Newton ya había discurrido los principios de la gravitación en su tranquilo hogar campesino y, para manipular mejor las intensas dificultades matemáticas que implicaban los principios, trabajó en el cálculo diferencial. En el transcurso de tres años después de su primera lectura de geometría, dominaba tan completamente el campo de las matemáticas, desde Arquímedes a Barrow, que había transformado su maravillosa geometría infinitesimal en una disciplina sistemática. Newton dio al análisis la misma universalidad que ya había dado Descartes a la geometría.

Puede decirse que Newton fundió en un solo conjunto los puntos de vista adoptados por Napier y Descartes. Napier consideró puntos M y N, móviles a lo largo de dos paralelas OX y OY, moviéndose N con velocidad constante y M con velocidad variable. Las coordenadas de Descartes proporcionan un plano del recorrido de la siguiente forma: las líneas OX y OY pueden situarse, no ya paralelamente, sino formando un ángulo recto, y puede dibujarse la curva trazada por un punto P, que se halle simultáneamente al nivel de los puntos M y N. De esta forma pueden trazarse dos fíguras, la neperiana y la cartesiana. Las fíguras son símbolos de líneas de pensamiento: el cinemático y el geométrico. Tal vez Newton no haya trazado nunca realmente tales fíguras, una junto a otra, pero, ciertamente, tuvo los dos órdenes de pensamiento. "caí gradualmente en el método del cálculo diferencial", señala y por diferenciales se refería, simplemente, a lo que nosotros llamamos velocidades simultáneas de los puntos M y N. Luego ideó, al intentar comparar la velocidad de M con la de N, el método que sugiere la fígura geométrica. Descubrió lo que nosotros llamamos *cálculo diferencial e integral*, pero lo guardó para sí.



En años posteriores, Leibniz anunció que él había descubierto este nuevo método matemático. Entonces surgió una querella entre los seguidores de Newton y los seguidores de Leibniz y desgraciadamente, se convirtió en una querella entre estos grandes hombres. Basta decir que la época estaba madura para tal descubrimiento; y tanto Newton como el filósofo alemán estaban suficientemente dotados para efectuarlo. Newton fue el primero en hacerlo e inconscientemente, se procuró sólo preocupaciones al abstenerse de publicar sus resultados.

8.2. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, nació en Leipzig en 1646 y murió en Hannover en 1716. Su universalismo, es aún más meritorio si se tiene en cuenta que Leibniz vivió y se destacó en una época de científicos tan importantes como Johann Kepler, Blaise Pascal, René Descartes, Pierre de Fermat, Galileo Galilei, Isaac Newton y Christian Huygens. Después de terminar sus estudios a edad muy temprana, se podía decir de él que, era ya, todo un académico.

Sin embargo, fue después de terminar la universidad que empezó a complementar sus conocimientos con el estudio de las matemáticas. Para él, la geometría de Euclides era un misterio y la geometría de Descartes le parecía ininteligible. No obstante, pasados algunos años logró ser un experto, no sólo en geometría, sino en todo el amplio espectro de las matemáticas de su tiempo. Más aun, contribuyó al enriquecimiento de las matemáticas con sus propios aportes, sobre todo al recién inventado, cálculo infinitesimal, nombre, que entre otras cosas, se debe a él, pues para Newton, era la teoría de las fluxiones y de las cuadraturas.

El ser abogado de profesión y diplomático de carrera, le permitió entrar en contacto con las esferas más altas de la sociedad de la antigua Prusia, de la sociedad francesa de Luís XIV, conocido como el Rey Sol, y de la flemática sociedad londinense, que lo acogió como uno más de los miembros de la Royal Society de Londres. En su obra **De Arte Combinatoria** (Sobre el arte de las combinaciones) de 1666, hace de la igualdad de conceptos un objeto de análisis. Entre las propiedades que se desprenden de sus estudios están las siguientes:

Reflexividad. Si A es un concepto, entonces $A = A$.

Simetría. Para conceptos A y B, si $A = B$, entonces $B = A$.

Transitividad. Para conceptos A, B y C, si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

En esta misma obra dedica bastante espacio al estudio de las sucesiones y las series y hace un estudio sistemático de las propiedades de las combinaciones y permutaciones. Alrededor del año 1672, trabajaba sobre las diferencias sucesivas de progresiones aritméticas del tipo, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. Observó que las diferencias sucesivas de los términos: $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$, definidas por: $d_i = a_i - a_{i-1}$, cumplían la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{n} = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Una serie de este tipo, hoy se conoce como serie telescópica.

Se sigue de aquí que la suma de las diferencias de una sucesión es la diferencia entre el primero y el último término de la progresión. De esta elemental propiedad, Leibniz encuentra todas las propiedades que los *pitagóricos* hallaron a través del álgebra geométrica, como son la suma de los números impares, de los pares, de los cuadrados, etc. Y va más allá cuando extiende la propiedad a sumas infinitas, al encontrar que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = a_1$$

donde la sucesión b_i es decreciente y está definida por $b_i = (a_i - a_{i+1}), i = 1, 2, 3, ...$

París fue su mayor experiencia. Allí recibió la benéfica influencia del científico holandés Christian Huygens (1629-1695), quizá el científico más prestigioso de Europa por esa época, quien en una ocasión le puso como reto, el cálculo de la serie:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + ...$$

Donde los sumandos son los inversos de los números triangulares, o sea, aquellos que resultan de la suma de los primeros naturales, en su orden 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, etc. Leibniz convierte esta serie en otra más digerible.

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + ... \\
&= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + ...\right] \\
&= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ...\right] \\
&= 2[1] \\
&= 2
\end{aligned}$$

Esta serie se convierte en telescópica usando transformaciones simples. En efecto, la suma de los primeros k números naturales es,

$$\frac{k(k+1)}{2}.$$

Pero

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

A este resultado se llega usando fracciones parciales, tema común, cuando se trata de integrar funciones racionales. Usando la notación para series, la suma de Leibniz se reduce a:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big] = 2\Big[1 - \frac{1}{n+1}\Big]$$

Como se vio arriba, Leibniz ya tenía la fórmula para calcular estas sucesiones decrecientes. Cuando $n \longrightarrow \infty$, el miembro de la izquierda se convierte en una serie infinita y el miembro de la derecha va a 2(1) =2.

La serie anterior fue como un bautizo de ingreso para Leibniz al seno de las matemáticas. Fascinado con las series, siguió explorando su comportamiento y fue a través de ellas que llegó a inventar el cálculo.

En 1675, escribió un manuscrito donde el simbolismo $\int f(x)dx$ ya estaría presente y es la primera vez que esta notación aparece en imprenta. En el mismo artículo aparece la regla para la diferenciación de un producto de dos funciones. Para el año 1676, Leibniz había descubierto la fórmula; $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, para derivar una potencia donde el exponente podía ser entero o racional.
Por esta época Newton y Leibniz se habían cruzado cartas en las que tocaban estos temas. Por esta razón Newton sospechó que Leibniz le estaba copiando sus métodos y resultados para publicarlos como propios. En una de estas cartas Leibniz describe a Newton la forma en la que él encuentra la derivada de una función compuesta, tema que para este tiempo ya lo había tratado Newton. La polémica sobre la prioridad del descubrimiento del cálculo tomó un cariz ácido al involucrar, tanto a seguidores de Newton como de Leibniz. Los dos contrincantes en esta polémica, eran figuras de gran relieve intelectual, quienes no se rebajarían a cometer plagio para ganar una fama inmerecida.

El juicio de la historia parece concluir que las dos celebridades de las matemáticas, llegaron al descubrimiento del cálculo por sendas propias y por métodos distintos. Ya decíamos que Newton estaba clasificado entre los tres matemáticos mayores de la historia, y recordemos que Leibniz también es considerado uno de los más grandes lógicos que haya producido la humanidad, al lado de Aristóteles, Frege, Russell y Tarski.

Un mérito que exalta la personalidad científica de Leibniz es su capacidad de síntesis, al involucrar los ejemplos particulares en fórmulas generales, como igualmente lo hiciera Newton, con la probable ventaja de que, su notación, tanto para la diferencial como para la integral se universalizó dentro del lenguaje matemático. Pero no sólo fue el cálculo, la única aportación de Leibniz. También encontró curiosas propiedades en la teoría de números. Hizo un estudio detallado del sistema binario del cual dejó un escrito, *Essay d'une nouvelle science des nombres* (Ensayo sobre una ciencia moderna de los números) que es considerado como el primero en estos temas, trabajo que además fue presentado a la Academia de Ciencias de París. En este trabajo se introduce el sistema binario o de base dos, que permite expresar todos los números reales con sólo los dígitos $\{0, 1\}$.

Leibniz estudió este sistema motivado en la interpretación del libro clásico de la filosofía taoísta, el *I Ching* (Libro de las Mutaciones), donde las unidades básicas que forman los hexagramas son el *ying* y el *yang*. George Boole (1815-1864) desarrolló un álgebra que lleva su nombre, en la que el sistema binario de 0´s y 1´s, juega un papel importante. En el proceso de resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, Leibniz encontró los determinantes, de los cuales hizo un estudio sistemático, el que, sin embargo, permaneció inédito por varios años. Entre las cosas curiosas en el álgebra elemental logradas por Leibniz es la extraña identidad:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6},$$

El proyecto de su vida fue la búsqueda de un lenguaje unificador o lenguaje simbólico para la lógica, que permitiera mecanizar, no sólo las operaciones aritméticas si no también los procesos racionales de la mente, y así ahorrarle a la misma mente, el esfuerzo y desgaste que implica la actividad repetitiva de las rutinas presentes en las operaciones aritméticas y en el logro de juicios acertados a partir de las premisas de una argumentación. Esa búsqueda de un lenguaje universal que simplifique procesos y que guíe a la mente, lo llevó a convertir su notación en el cálculo infinitesimal, como la simbología estándar en esa disciplina matemática. Para ilustrar la conveniencia de su notación, recordemos aquí, cómo expresa Leibniz en su notación, la regla de la cadena, que Newton había tratado.

Cuando $z = h(x) = f[g(x)]$, donde $y = g(x)$, sabemos que $h'(x) = f[g(x)]g'(x)$. En notación de Leibniz, esta última expresión se convierte en:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Una fórmula que a simple vista muestra su carácter evidente. La aparición del término dy en el miembro de la derecha de la igualdad, aunque obvio en apariencia, su significado en todo el proceso de diferenciación es muy importante. La versión de la regla de la cadena en el cálculo integral corresponde al proceso de integración por sustitución $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$. Donde la sustitución, $u = g(x)$, y, $du = g'(x)dx$, se ve casi obvia.

La concepción con que Leibniz se acerca al cálculo, es global, en el sentido de tratar las variaciones discretas de las variables geométricas como un todo, es decir, una curva está asociada en un punto específico, a su tangente, que a su vez, está ligada a una componente dy y a una componente dx, tomadas en relación a las variables y y x respectivamente, que la definen como el cociente diferencial $\dfrac{dy}{dx}$. Al contrario Newton se interesa en las fluxiones o cambios de las variables con respecto al tiempo, basado en la idea intuitiva del movimiento continuo. Como consecuencia de esto, la notación y la terminología de Leibniz soslaya el concepto de límite que se supone implícito en los procesos infinitesimales. En el caso de Newton el concepto de límite aparece claramente explicito, como lo hemos visto, tanto en las derivadas y cuadraturas como en el mismo método de aproximar raíces.

La integral de Newton es una integral indefinida; es un flujo determinado por una fluxión dada. Para Leibniz la integral es una suma infinita de diferenciales, representada explícitamente en su notación $\int f(x)dx$, donde el símbolo $\int$ corresponde a la distorsión de la letra S, como aparecía en imprenta en los libros de la época, y para el caso aquí, representaba una suma de infinitos términos.

Las inquietudes científicas de Leibniz fueron muy amplias. En una visita a la Royal Society de Londres llevó su máquina calculadora, que aunque incompleta, sería el primer acercamiento a la meta de lograr el cálculo aritmético en forma mecánica. Al igual que Newton, Leibniz se interesó por la alquimia, por la física, sobre todo por la cinemática y la geología. Propuso el diseño de motobombas accionadas por energía eólica (producida por el viento) o movidas por energía hidráulica. En fin, su curiosidad científica e intelectual no tuvo límites. Estuvo ligado como miembro, o fundador, de las principales academias de Europa; empezando por la *Academia Ciencias de París*, siguiendo con la *Royal Society de Londres*, con la *Academia de San Petersburgo* y con la *Academia de Berlín*, de la que fue su fundador.

La siguiente tabla muestra el simbolismo y la terminología de Newton y Leibniz.

	Cálculo Infinitésimal	**Integral**	**Derivada**	**Diferencial**
Newton	Teoría de fluxiones y cuadraturas	$f(x)$	$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ cociente de fluxiones	$\dot{x}$ fluxión de x
Leibniz	Cálculo diferencial e Integral	$\int f(x)dx$	$\frac{dy}{dx}$ cociente diferencial	dx diferencial de x

Capítulo 9
Los Bernouilli y Euler

9.1. Los Bernouilli

La historia de las matemáticas durante el siglo XVIII se centra en torno a Euler, y el escenario de la acción se localiza, principalmente, en Suiza y en Rusia. Aproximadamente en la época en que Napier estaba experimentando los disturbios de la reforma, tuvo lugar una violenta persecución de protestantes en Amberes. Uno de los muchos refugiados, que Bélgica difícilmente podía permitirse perder, fue un tal Jacques Bernouilli, que huyó a Francfort. En 1622, su hijo mayor se instaló en Basilea, y allí, en la frontera de Suiza, la familia Bernouilli estaba destinada a dar fama a su país adoptivo. Su historia matemática no tiene par como muestra del poder de la herencia, o de la temprana influencia del hogar. No menos de nueve miembros de la familia lograron preeminencia en matemáticas o en física, cuatro de los cuales recibieron distintivos de la Academia de Ciencias de París. De estos nueve, los dos más importantes fueron los hermanos Jacques y Jean, nietos del fugitivo de Amberes. Jacques fue el quinto hijo de una gran familia, y Jean, trece años más joven, el décimo. Fueron, sucesivamente, profesores de matemáticas en Basilea.

El hermano mayor sólo se dedicó por su destacada carrera como analista matemático después de considerables experiencias y viajes. En cierta época, su padre le había prohibido estudiar matemáticas o astronomía, con la esperanza que se dedicara a la teología. Pero un talento innato impulsaba a su hijo a dedicar su vida a perfeccionar lo que habían iniciado: Pascal y Newton. Entre sus muchos descubrimientos, y tal vez el más admirable de todos, se cuenta la espiral equiangular. Es una curva que puede hallarse en la trama de la tela de araña, en las conchas que se encuentran sobre la costa y en las espiras de las lejanas nebulosas. Matemáticamente, se halla relacionada con el círculo, en geometría, y con el logaritmo, en análisis. Un círculo atraviesa los radios, cortándolos siempre en ángulos rectos; esta espiral también cruza sus radios formando un ángulo constante –pero no recto–. Son maravillosas las propiedades universales de la curva; dejemos que todos los equivalentes matemáticos la quemen y la hagan pedazos -¡reaparecerá incólume!-. A Bernouilli en su vejez, le parecía que la curva era un símbolo, no sin valor, de su vida y su fe; y, de acuerdo con sus deseos, la espiral fue grabada sobre su lápida y, con ella, las palabras *Eadem mutata resurgo.*

Su hermano menor Jean (1667-1748) siguó sus pasos, añadiendo continuamente nuevo material a los recursos del análisis, que entonces incluía ya las ecuaciones diferenciales. Sus obras muestran un uso más atrevido de los números negativos e imaginarios, cumpliendo con ello "el gran emolumento", que el mismo Napier habría otorgado a las matemáticas, a través de "este espíritu de una cantidad", si su propia atención no se hubiera visto absorvida por los logaritmos. sus hijos Daniel y Nicolás Bernouilli fueron también matemáticos muy capacitados, y fue bajo su influencia, que Euler descubrió su vocación.

9.2. L'Hospital

L'Hôpital Guillaume, nació en 1661 en París (Francia) donde también falleció el 2 de febrero de 1704. Era un competente matemático, su fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692).

El marqués de L'Hospital fue un matemático aficionado que desde temprana edad se interesó por las Matemáticas y muy particularmente por el nuevo Cálculo presentado al mundo por Leibniz en dos breves trabajos en 1684 y en 1686. Consciente de que él no podría por sí mismo dominar esta excitante faceta, "recurrió", a Johann Bernoulli.

En 1696, repentinamente, apareció al público su obra, en cuya introducción, al tiempo que reconoce sus deudas con Leibniz y Johann Bernoulli, subraya: "me he servido libremente de sus descubrimientos". El prefacio contiene una breve reseña histórica del Cálculo hasta esos momentos, anotando: "Newton está en posesión de un Cálculo semejante al de Leibniz, pero me inclino por el de este último, por estar expuesto más fácil y expeditivo". Divide la obra en diez secciones, de las cuales, es la Novena en la que aparece la controversial Regla de L'Hospital en los siguientes términos:

> "...para hallar el valor de una expresión racional en x que para un valor de abscisa dada x toma la forma $0/0$,se determina el cociente de las diferencias del numerador y del denominador para este valor de la abscisa..."

Que en la notación actual transcribimos:

Si f y g son funciones diferenciables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$ y existe $\lim_{n\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces:

$$\lim_{n\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La obra tuvo gran éxito y se editaron varias ediciones durante el siglo XVIII, conjuntamente con otra obra suya titulada *Tratado analítico de las secciones cónicas* que desempeñó un papel tan útil en la Geometría Analítica como la anterior en el Cálculo. Ambas se consideraron obras clásicas de la Matemática del siglo XVIII.

9.3. Moivre

Nació en Vitry-le-François (Champagne - Francia) en 1667. *Moivre* fue encarcelado durante un año en París, y tras concluir su encierro emigró a Londres con su familia y en este ciudad fue donde falleció en 1754.

Su amistad con Newton y Halley supuso un fuerte apoyo en su candidatura para ingresar en la Royal Society (1697). Nunca llegó a ocupar un puesto en una universidad, muriendo ciego, sin ilusiones y sin que sus trabajos llegaran a ser reconocidos por la comunidad científica.

Se le considera, junto al astrónomo y matemático Pierre Simon de Laplace, uno de los dos grandes pensadores de la teoría de la probabilidad en el siglo XVIII. Precisó los principios de cálculo de probabilidades y desarrolló numerosos problemas prácticos.

Su obra *La doctrina de las suertes* (1718) es una auténtica obra maestra. En ella expone la probabilidad binominal o distribución gaussiana, el concepto de independencia estadística y el uso de técnicas analíticas en el estudio de la probabilidad. Al derivar una expansión para $n!$, De Moivre sumó los términos de la forma binominal. Su teorema más importante aparece en *Miscellanea Analytica* (1730), obra en la que investiga las series infinitas y los números complejos.

Enunció la ley de probabilidades compuesta e inició el empleo de las ecuaciones de diferencias finitas, que posteriormente debía generalizarse.

Estableció muchos de los elementos de los cálculos actuales y, por encima de sus muchos logros, descubrió la relación trigonométrica en (1730):

$$(cos\beta + isen\beta)^n = cos(n\beta) + i\ sen(n\beta)$$

9.4. Taylor

Taylor nació el 18 de agosto de 1685 en Edmonton (Inglaterra) y murió el 29 de diciembre de 1731 en Londres (Inglaterra). Fue educado con tutores privados hasta que entró, en 1703, en St. John's College de Cambridge, en donde se convirtió en un admirador de la obra de Newton.

Se graduó en 1709, pero ya en 1708 había escrito su primera obra importante, aunque no se publicó hasta 1714 en una revista de la Royal Society: dio solución al problema del centro de oscilación, la cual desde que fuera difundida hasta 1724, resultaba ser la disputa prioritaria con Johann Bernoulli.

Taylor participó, en este año, en el comité que se constituyó para zanjar la disputa sobre quién había sido el fundador del Cálculo, Newton o Leibniz.

En 1715 publicó *Methodus incrementorum directa et inversa,* su obra más importante, y Perspectiva Lineal, dos libros importantes en la historia de las matemáticas. En el primero agregaba a las matemáticas una nueva rama llamada ahora El cálculo de las diferencias finitas, e inventó la integración por partes y descubrió la célebre fórmula conocida como la **Serie de Taylor,** la importancia de esta fórmula no fue reconocida hasta 1772, cuando Lagrange proclamó los principios básicos del Cálculo Diferencial. En dicha obra aborda la determinación de las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales, el problema del cambio de variable, la determinación de los centros de oscilación, de percusión y de curvatura, y el problema de la cuerda vibrante.

9.5. Leonard Euler

Leonard Euler (1707-1783) fue hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los Elementos, bajo la tutela de su padre. A una edad temprana fue enviado a la universidad de Basilea, donde atrajo la atención de Jean Bernouilli. Inspirado por un maestro así, maduró rapidamente, y a los 17 años de edad, cuando se graduó Doctor, provocó grandes aplausos con un discurso probatorio, el tema del cual era una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano.

Su padre deseaba que ingresara en el sagrado ministerio, y orientó a su hijo hacia el estudio de la teología. Pero, al contrario del padre de Bernouilli, abandonó sus ideas cuando vió que el talento de su hijo iba en otra dirección. Leonard fue autorizado a reanudar sus estudios favoritos y, a la edad de diecinueve años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y otra sobre la filisofía del sonido. Estos ensayos marcan el comienzo de su espléndida carrera.

Por esta época decidió dejar su país nativo, a consecuencia de una aguda decepción, al no lograr un profesorado vacante en Basilea. Así, Euler partió en 1727, año de la muerte de Newton, a San Petersburgo, para reunirse con sus amigos, los jóvenes Bernouilli, que le habían precedido allí, algunos años antes. En el camino hacia Rusia, se enteró de que Nicolás Bernouilli había caído víctima del duro clima nórdico; y el mismo día que puso pie sobre el suelo ruso murió la emperatriz Catalina, acontecimiento que amenazó con la disolución de la Academia, cuya fundación ella había dirigido. Euler, desanimado, estuvo a punto de abandonar toda esperanza de una carrera intelectual y alistarse en la marina rusa. pero, felizmente para las matemáticas, Euler obtuvo la cátedra de filosofía natural en 1730, cuando tuvo lugar un cambio en el sesgo de los asuntos públicos. En 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernouilli, que deseaba retirarse, y el mismo año se casó con Mademoiselle Gsell, una dama suiza, hija de un pintor que había sido llevado a Rusia por Pedro el Grande.

Dos años más tarde, Euler dió una muestra insigne de su talento, cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la´pérdida de la vista de un ojo.
Pese a esta calamidad, prosperó en sus estudios y descubrimientos; parecía que cada paso no hacía más que darle fuerzas para esfuerzos futuros. Hacia los treinta años de edad, fue honrado por la Academia de París, recibiendo un nombramiento;

así mismo Daniel Bernouilli y Collin Maclaurin, por sus disertaciones sobre el flujo y el reflujo de las mareas. La obra de Maclaurin contenía un célebre teorema sobre el equilibrio de esferoides elípticos; la de Euler acercaba bastante la esperanza de resolver problemas relevantes sobre los movimientos de los cuerpos celestes.

En el verano de 1741, el rey Federico el Grande invitó a Euler a residir en Berlín. Esta invitación fue aceptada, y Euler vivió en Alemania hasta 1766. Cuando acababa de llegar, recibió una carta real, escrita desde el campamento de Reichenbach, y poco después fue presentado a la reina madre, que siempre había tenido un gran interés en conversar con los hombres ilustres. Aunque intentó que Euler estuviera a sus anchas, nunca logró llevarle a una conversación que no fuera en monosílabos. Un día, cuando le preguntó el motivo de esto, Euler replicó: "Señora, es porque acabo de llegar de un país donde se ahorcan a todas las personas que hablan". Durante su residencia en Berlín, Euler escribió un notable conjunto de cartas, o lecciones, sobre filosofía natural, para la princesa de Anhalt Dessau, que anhelaba la instrucción de un gran maestro. Estas cartas son un modelo de enseñanza clara e interesante, y es notable que Euler pudiera encontrar el tiempo para un trabajo elemental tan minucioso como éste, en medio de todos sus demás intereses literarios.

Su madre viuda vivió también en Berlín durante varios años, recibiendo asiduas atenciones de su hijo y disfrutando del placer de verle universalmente estimado y admirado. En Berlín, Euler intimó con M. de Maupertuis, presidente de la Academia, un francés de Bretaña, que favorecía especialmente a la filosofía newtoniana, de preferencia a la cartesiana. su influencia fue importante, puesto que la ejerció en una época en que la opinión continental aún dudaba en aceptar las opiniones de Newton. Maupertius impresionó mucho a Euler con su principio favorito del mínimo esfuerzo, que Euler empleaba con buenos resultados a sus problemas mecánicos.

Un hecho que se habla mucho en favor de la estima en que se tenía a Euler, es que cuando el ejército ruso invadió Alemania en 1760 y saqueó una granja perteneciente a Euler, y el acto llegó al conocimiento del general, la pérdida fue inmediatamente remediada, y a ello se añadió un obsequio de cuatro mil florines, hecho por la emperatriz Isabel cuando se enteró del suceso. En 1766 Euler vovió a San Petersburgo, para pasar allí el resto de sus días, pero poco después de su llegada perdió la vista del otro ojo. Durante algún tiempo, se vió obligado a utilizar una pizarra, sobre la cual realizaba sus cálculos, en grandes caracteres. No obstante, sus discípulos e hijos copiaron luego su obra, escribiendo las memorias exactamente como se las dictaba Euler. Una obra magnífica, que era un extremo sorprendente, tanto por su esfuerzo como su originalidad. Euler poseyó una asombrosa facilidad para los números y el raro don de realizar mentalmente cálculos de largo alcance. Se recuerda que en una ocasión, cuando dos de sus discípulos, al realizar la suma de unas series de diecisiete términos, no estaban de acuerdo con los resultados en una unidad de la quincuagésima cifra significativa, se recurrió a Euler. Éste repasó el cálculo mentalmente, y su decisión resultó ser correcta.

En 1771, cuando estalló un gran fuego en la ciudad, llegando hasta la casa de Euler, un compratiota de Basilea, Peter Grimm, se arrojó a las llamas, descubrió al hombre ciego, lo salvó llevandolo sobre sus hombros. Si bien se perdieron los libros y el mobiliario, se salavaron sus preciosos escritos. Euler continuó su profuso trabajo durante doce años más, hasta el día de su muerte. a los setenta y seis años de edad.

Euler era, como Newton y muchos otros, un hombre capacitado, que había estudiado anatomía, química y botánica. Como se dice de Leibniz, podría repetir la *Eneida*, del principio hasta el fin, e incluso podría recordar las primeras y las últimas líneas de cada página de la edición que solía utilizar. Esta capacidad parece haber sido el resultado de su maravillosa concentración, aquel gran elemento del poder inventivo, del que el mismo Newton ha dado testimonio, cuando los sentidos se encierran en intensa meditación y ninguna idea externa puede introducirse.

La apacibilidad de ánimo, la moderación, y la sencillez de las constumbres fueron sus características. Su hgar era su alegría, y le gustaban los niños. Pese a su desgracia, fue animoso y alegre, poseyó abundante energía; como ha atestiguado su discípulo M. Fuss, "su piedad era racional y sincera; su devoción,ferviente".

Es imposible hacer justicia, en una descripción no técnica, a las matemáticas de Euler; pero, mientras que Newton es un heroe nacional, Euler seguramente es un heroe de los matemáticos. Newton fue el Arquímedes y Euler el Pitágoras.

La labor de Euler en problemas de física fue grande, pero sólo porque sus modelos matemáticos atraían y retenían su atención. Su placer era especular en los dominios del intelecto puro, y aquí domina como príncipe de los analistas. Ni tan sólo la geometría, y el estudio de las líneas y figuras, le distraían; su último y constante objetivo fue el perfeccionamiento del cálculo y del análisis. Sus ideas discurrían con tanta naturalidad por este cauce que encontraba, incluso en la poesía de Virgilio, imágenes que sugirieran una investigación filosófica, conduciendole a nuevas aventuras matemáticas. Eran aventuras que sus seguidores más prudentes a veces aclamaban con placer, y que, ocasionalmente, condenaban. Aquí se desplegaba todo el esplendor de los primeros comienzos griegos y de las obras posteriores de Napier, Newton y Leibniz. Citemos una pequeña fórmula como compendio de lo que realizó Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Cada símbolo tiene su historia: Los principales números enteros, 0 y 1; las relaciones matemáticas más importantes, $+, e, =$; el número π, descubrimiento de Hipócrates; i, el signo de la raíz cuadrada “imposible”de menos uno; y e, la base de los logaritmos neperianos.

Capítulo 10
Maclaurin y Lagrange

Entre los contemporaneos de Euler hubo muchos matemáticos excelentes, en Inglaterra y Francia, tales como Cotes, Taylor, Demoivre, D'Alembert, Clairaunt, Stirling, Maclaurin y, algo más tarde, Ivory, Wilson y Waring. Esta lista, en modo alguno exhaustiva, contiene los nombres de varios amigos de Newton, especialmente Cotes, Maclaurin y D'moivre. Eran discípulos de Newton, y cada uno de ellos es responsable, en parte, de que la obra del maestro fuera accesible a todos. Cotes y Maclaurin fueron geómetras altamente dotados; los demás de su época se interesaban por el análisis. Por ello, el que Cotes y Maclaurin hayan muerto jóvenes los dos, fue una pérdida, no sólo para las matemáticas británicas , sino también para las europeas.

10.1. Collin Maclaurin

Collin Maclaurin (1698-1746), un habitante de los Highlands de condado de Argyle, fue educado en la Universidad de Glasgow. Su extraordinaria habilidad fue tal que, a los diecinueve años de edad, fue erigido profesor de matemáticas en Aberdeen. Ocho años más tarde, cuando ejercía como deputy professor(profesor titular) en Edinburgo, Newto escribió privadamente, ofreciendo pagar parte del salario, ya que era díficil reunir la suma adecuada. Maclaurin tomó parte activa, en 1745, en la oposición a la marcha del joven pretendiente, a la cabeza del gran ejército de los Highlands, que invadió el país y, finalmente sitió Edimburgo. Maclaurin huyó, pero las penalidades de la guerra de trincheras y la huida consiguiente a York resultaron fatales, y murió en 1746.

Maclaurin, animado por la brillante idea de Cotes, que llegó, afortunadamente, a sus manos, escribió un maravilloso compendio de geometría superior. trataba de la parte que se denomina la *Descripción orgánica de curvas planas*, un tema tratado por Euclides, Pappus, Pascal y Newton. son las matemáticas de las barras y palancas sujetas por pivotes y guías –la réplica abstracta de la mecánica de las válvulas y juegos de palancas, usuales para los ingenieros– y fascina al geómetra, que "quiere ver las ruedas girando",. Maclaurin continuó lo que Pascal había comenzado, el célebre hexagrama místico (que en aquellas fechas, aún permanecía oculto), y obtuvo resultados de gran generalidad. Proporcionó una base para los avances en geometría pura, realizados, un siglo más tarde, por Chasles, Salmon y Clifford. En este tipo de geometría, el método de coordenadas cartesiano deja de ir aparejado con el puramente geométrico. En él, los hombres respiraban un aire enrarecido, análogo al de la teoría de números.

El mismo exito de Maclaurin tiene algo trágico. pues existen tratados enteros de matemáticas en los cuales las coordenadas proporcionan el medio natural; en los cuales, para cualquiera, excepto si es un maestro excelente, el análisis sale adelante y la geometría pura le deja a uno desamparado. Cuando Maclaurin escribió su ensayo sobre el equilibrio de los planetas en su rotación, que le valió los honores de la Academia en París, inició un camino en el que pocos podrían seguirle; pues el problema se había interpertado en la geometría más pura. Cuando, además, Maclaurin produjo una gran obra geométrica sobre fluxiones, la balanza se inclinó tan fuertemente que apartó a Inglaterra de las formas de pensamiento continentales. Durante el resto del siglo, las matemáticas británicas estuvieron relativamente poco acreditadas, y no hubo un renacimiento adecuado hasta que se comenzó a enseñar en Cambridge el cálculo diferencial, según los métodos de Leibniz.
–Un cambio que tuvo lugar hace unos cien años–. Este retraso fue un desafortunado legado de la controversia Newton-Leibniz, que nunca tuvo necesidad de aparecer.

Las circunstancias que impulsaron a Maclaurin a adoptar un estilo geométrico en su libro sobre fluxiones, extendieron aún más su parcialidad por la geometría. Muchas influencias filosóficas actuaban, y habían dificultades lógicas para afrontar lo que parecía insuperable si no se recurría a la geometría. Las dificultades se centraron el la palabra *infinitésimo*, que Eudoxo había excluido tan cuidadosamente del vocabulario de las matemáticas griegas (el solo hecho de que sea una palabra latina y no griega no carece de significación; tantos son nuestros términos matemáticos corrientes que tienen una etimología griega). Por infinitésimo se entiende algo, distinguible de cero, que no obstante es sumamente pequeño –tan minúsculo, en realidad, que no puede obtenerse ningún múltiplo de un tamaño finito–. Elude el axioma de Arquímedes. Prácticamente, todos los analistas, desde Kepler en adelante, creyeron en la eficacia de los infinitésimos, hasta que Weierstrass mostró lo contrario.

El cálculo diferencial de Leibniz estuvo fundado en esta creencia, y su tremendo éxito, en manos de los Bernouilli, Euler y Lagrange, oscureció la salida. los hombres se hallaban poco dispuestos a rechazar una doctrina que había actuado tan brillantemente, y hacían oidos sordos a los filósofos,antiguos y modernos. En la misma Escocia, un vivo ataque contra los infinitésimos fue dirigido por el famoso filósofo y teólogo irlandés Bishop Berkeley. Su crítica del cálculo no fue desperdiciada por Maclaurin, que también era versado en matemáticas griegas y en la cuidadosa obra de Eudoxo. Así, Maclaurin ajustó su pensamiento para sentar las fluxiones sobre una base sólida y, por este motivo, les dio forma dentro de una estructura geométrica. Este fue su tributo a Newton, el maestro "cuya cautela - decía Maclaurin- fue una parte tan distintiva de su carácter como su inventiva".

Uno de los principales admiradores de Maclaurin fue Lagrange, el gran analista francés, cuyo propio trabajo ofrecía un contraste total con el del gómetra. Maclaurin había trabajado con líneas y figuras: aquellos carácteres, como dijo sutilmente Galileo, en los cuales se halla escrito el gran libro del universo. Lagrange por el contrario, pintaba el universo como un tema, igualmente rítmico, de números y ecuaciones, y estaba orgulloso de decir de su obra maestra, la *Mécanique Analytique*, que no contenía ni una sola figura geométrica. no obstante, apreciaba al verdadero geómetra, declarando que la obra de Maclaurin superaba a la del propio Arquímedes, si bien, como para Newton, aquél era "el mayor genio que ha visto nunca el mundo- ¡y el más afortunado, pues sólo puede existir una vez un hombre que descubra el sistema del universo!.

10.2. Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) procedía de una ilustre familia parisiense, que tenía profundo arraigo en Cerdeña, y algún rastro de noble linaje italiano.
Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín, y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. Una especulación insensata llevada a cabo por su padre, abandonó a Lagrange a sus propios recursos, a una edad temprana, pero este cambio de fortuna no resultó ser una gran calamidad, "pues de otro modo- dijo él- tal vez nunca hubiera descubierto mi vocación".

En la escuela, sus intereses infantiles eran Homero y Virgilio, y cuando una memoria de Halley le cayó en las manos, se alumbró la chispa matemática. Como Newton, pero a una edad aún más temprana, llegó al corazón de la materia en un espacio de tiempo increíblemente corto. A los dieciseís años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín, donde el tímido muchacho, que no poseía recursos de oratoria y era de muy pocas palabras, mantenía la atención de hombres bastante mayores que él. Su encantadora personalidad atraía su amistad y entusiasmo. Pronto condujo un joven de grupos científicos, que fueron los primeros miembros de la Academia de Turín. Lagrange se transfiguraba cuando tenía una pluma en sus manos; y, desde un principio, sus escritos fueron la elegancia misma. Transcribia a las matemáticas todos los pequeños temas sobre investigaciones físicas que le traían sus amigos, de la misma manera que Schubert pondría música a cualquier ritmo perdido que arrebatara su fantasía.

A los diecinueve años de edad, obtuvo fama resolviendo el así llamado problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. Comunicó su demostración en una carta a Euler, el cual se interesó enormemente por la solución, de modo especial en cuanto concordaba con un resultado que él mismo había hallado. Euler, con admirable tacto y amabilidad, respondió a Lagrange, ocultando deliberadamente su propia obra, de manera que todo el honor recayera sobre su joven amigo. En realidad, Lagrange no sólo había resuelto un problema, también había inventado un nuevo método, un nuevo *cálculo de variaciones*, que sería el tema central de obra de su vida. Este cálculo permanece a la historia del mínimo esfuerzo, que comenzó con los espejos reflectores de Heron y continúo cuando Descartes reflexionó sobre la curiosa forma de sus lentes ovales. Lagrange podía demostrar que los postulados newtonianos de materia y movimiento, un tanto modificados, se adaptaban al alto principio de economía de la naturaleza. El principio a conducido a los resultados aún más fructíferos de Hamiltón y Maxwell, y, actualmente, continúa, en la obra de Einstein y en la últimas fases de la mecánica ondulatoria.

Lagrange estaba dispuesto a apreciar el trabajo sutil de los demás, pero estaba igualmente capacitado para descubrir un error. En una temprana memoria sobre las matemáticas del sonido, señaló defectos, incluso en la obra de su reverenciado Newton. otros matemáticos le reconocían, sin envidia, primero como su compañero, y, más tarde, como el mayor matemático viviente. Después de varios años del mayor esfuerzo intelectual, sucedió a Euler en Berlín. De vez en cuando estaba gravemente enfermo, debido al exceso de trabajo. En Alemania, el rey Federico, que siempre le había admirado, pronto comenzó a gustar de sus modales modestos, y le reprendía por su intemperancia en el estudio, que amenazaba con desquiciar su mente. Las amonestaciones debieron producirle algún efecto, porque Lagrange cambió sus hábitos, e hizo cada noche un programa de lo que debería leer al día siguiente, sin exceder nunca la proporción. Siguió residiendo en Prusia durante veinte años, produciendo obras de alta distinción, que culminaron en su *Mécanique Analytique*. Decidió publicarla en Francia, a donde fue llevada a salvo por uno de sus amigos

La publicación de esta obra maestra originó gran interés, que aumentó considerablemente, en 1787, con la llegada a París del célebre autor en persona, que había dejado Alemania después de la muerte del rey Federico, Puesto que ya no encontraba una atmósfera afín en la corte prusiana. Los matemáticos acudieron en tropel a recibirle y a rendirle todos los honores, pero se desanimaron al encontrarle perturbado, melancólico e indiferente al ambiente circundante. Durante dos años, no abrió ni una sola vez su *Mécanique Analytique*; por el contrario, dirigía sus pensamientos a cualquier otro punto, a la metafísica, la historia, la religión,la filología, la medicina, la botánica y la química. Como ha dicho Serret, " aquel cerebro especulativo sólo podía cambiar los objetos de sus meditaciones". Cualquiera que fuera el tema que escogiera, sus amigos se veían impresionados por su originalidad de sus observaciones. Su expresión de que la química era "tan fácil como el álgebra"les asombró mucho. En aquellos días, se examinaban agudamente los primeros principios de la química atómica; pero parecía extraño establecer una comparación entre cosas tan palpables como las químicas, que pueden ser vistas y tocadas, y abstracciones tales como los símbolos algebraicos.

Lagrange siguió durante dos años en este estado filosófico y no matemático, cuando de pronto el país se vió precipitado en la Revolución. Muchos evitaron la prueba huyendo al exterior, pero Lagrange se negó a marcharse. Permaneció en Paris, preguntándose, cuando veía matar a sus amigos, si había llegado su turno, y sorprendido de su buena suerte al sobrevivir. Francia tiene motivos para estar contenta de que no fuera eliminado, como lo fuera su amigo Lavoisier, el gran químico; en años posteriores, su habilidad matemática volvió nuevamente, y produjo muchas joyas de álgebra y análisis.

Una consecuencia matemática de la Revolución fue la adopción del sistema métrico, en el cual la subdivisión de las monedas, pesos y medidas, se halla estrictamente basada en el número diez. Cuando alguien hacía objeciones a este número, prefiriendo naturalmente el doce, porque tiene más factores, Lagrange señaló, inesperadamente, que era una pena que no se hubiera escogido el número once como base, porque es primo. ¡EL M.C.C. resulta ser uno de los pocos cuerpos oficiales que han seguido esta sugerencia, pensando sistemáticamente en términos de dicha unidad!.

Lagrange es uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos, no sólo por la abundancia y originalidad de su obra, sino también por la belleza y propiedad de sus escritos. Posee la grandeza y la sencillez de los geómetras antiguos.

10.3. Laplace

Pierre Simon Laplace, nació en Normandia el 23 de marzo de 1749. Estudió teología en la Universidad de Caen, y en 1768 marchó a París donde gracias al apoyo de D'Alembert consigue una plaza de profesor en la Real Escuela Militar. Años después fue nombrado profesor de la Escuela Normal Superior, y desde 1784, fue monitor del cuerpo de artillería. Al mismo tiempo que su labor docente realizó una importante labor investigadora que fue reconocida desde la década de los 70 cuando presentó sus primeros trabajos sobre el Sistema Solar.

En 1789 se inicia la Revolución Francesa, en esta época fue nombrado miembro de la Comisión de Pesos y Medidas que estableció el sistema métrico y en 1792 participó en la organización de la Escuela Politécnica. En tiempos del Consulado, Napoleón lo designa ministro del Interior. Fue miembro del Senado desde 1799 y llegó a ser su vicepresidente en 1803. Una vez constituido el Imperio Napoleón lo nombró Conde en 1806. Dos años más tarde la restauración de la Monarquía, producida en 1815, Luis XVIII le otorgó el título de Marqués. Falleció en París el 5 de Marzo de 1827.

Laplace fue, junto con Lagrange, la figura más destacada en el campo de la astronomía teórica de su tiempo. Laplace realizó su trabajo más importante al desarrollar el análisis matemático del sistema de astronomía gravitacional elaborado por Isaac Newton. En su tratado *Mecánica Celeste,* obra en 5 volúmenes publicados entre 1799 y 1825, Laplace sistematizó toda la obra matemática que se había realizado sobre la gravitación, culminando el trabajo de más de un siglo de duración durante el cual los científicos intentaron dar una explicación matemática de la teoría de la gravitación universal basada en los principios de Newton. Laplace reunió en un sólo cuerpo, todos los trabajos dispersos de Newton, Halley, D'Alembert, Euler, etc. De esta manera, y junto con sus propios aportes, recogió el conocimiento de su época sobre el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar. Los primeros dos volúmenes, publicados en 1799, contienen los métodos para calcular los movimientos de los planetas, determinando sus figuras, y resolviendo problemas de marea. Los volúmenes tercero y cuarto, publicados en 1802 y 1805, contienen aplicaciones de estos métodos y varias tablas astronómicas.

El quinto volumen, publicado en 1825, es principalmente histórico, pero presenta, como apéndice, los resultados de las últimas investigaciones de Laplace.
Mecánica Celeste completa todos aquellos apartados que Newton fue incapaz de justificar en sus detalles. El tratado de Laplace será considerado siempre como un

texto clásico. La célebre “Ecuación de Laplace”, o laplaciano de una función se encuentra en su *Mecánica*.

Las contribuciones matemáticas de Laplace son de primera importancia. Se destacan sus investigaciones sobre el cálculo de probabilidades. En 1812 se publicó su *Teoría analítica de las probabilidades.* Esta obra representa la introducción de los recursos del análisis matemático en el estudio de los fenómenos aleatorios y recopila toda una serie de memorias publicadas desde 1771. En la segunda parte de su célebre, titulada Teoría general de las probabilidades, se analizan todos los problemas y contribuciones de los autores anteriores sobre el tema. Así se estudia, entre otros, el teorema de Bayes sobre la “probabilidad de las causas”. El cuarto capítulo es probablemente el más importante, porque contiene la notable teoría del “método de mínimos cuadrados”. El método de los mínimos cuadrados para la combinación de observaciones numerosas se había dado empíricamente por Legendre, pero el cuarto capítulo de la *Teoría Analítica* contiene una demostración formal del mismo.

10.4. Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier nació el 21 de Marzo de 1768 en Auxerre, Bourgogne, Francia y falleció el 16 de Mayo de 1830 en París, Francia.

Fourier estudió matemáticas y más tarde enseñaba matemática en la Escuela Normal. En 1801 a su regreso de Egipto, empezó a ocuparse de lleno de la ciencia. El problema que más le interesaba era el del modo en que el calor fluía de un punto a otro a través de un objeto en particular. Publicó *La teoría analítica del calor* en 1822 seguido de la teoría matemática de la conducción del calor. Estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor solucionándolo por el uso de series infinitas de funciones trigonométricas. En esto introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier.

Fourier recopiló todo su ingenio matemático y descubrió lo que hoy se conoce como teorema de Fourier. Según este, cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se puede expresar como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. El teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones; puede ser utilizado en el estudio del sonido y de la luz y desde luego en cualquier fenómeno ondulatorio. El estudio matemático de tales fenómenos, basado en el teorema de Fourier se llama análisis armónico.

10.5. Monje

Durante la primera mitad del siglo XVIII pocos matemáticos se ocuparon de la geometría. Pero afines de siglo la geometría comienza a ser estudiada con los recursos del análisis y surgen también nuevas ramas de la geometría en las que el análisis no tiene ya cabida. Tal es el caso de la geometría descriptiva que nace gracias a Gaspard Monge.

Gaspard Monge nació en Francia en 1746. Sus grandes dotes para el dibujo le abrieron las puertas de la Escuela Militar de Meziéres. Allí empezó a desarrollar métodos de representación de objetos tridimensionales mediante su proyección sobre dos planos, los cuales constituyeron los inicios de la geometría descriptiva.
En 1799 fue editada su *Geometría descriptiva,* donde desarrolló el método con el cual pueden representarse en un plano las curvas, las superficies y sus relaciones mutuas, mediante dos proyecciones ortogonales de aquellas sobre dos planos perpendiculares entre sí.

La Geometría de Monge, fue inventada en principio para ser usada en la ingeniería militar por lo que Monge tuvo que jurar que no divulgaría su método, que durante quince años fue celosamente considerado como secreto militar. La Geometría descriptiva es la base de todos los dibujos de la mecánica y procedimientos gráficos que ayudan para llevar a la práctica la Ingeniería. Afiliado a la causa revolucionaria, tras el triunfo de la misma, Monge desempeñó numerosos cargos gubernamentales. Convencido de la importancia de la educación, intervino en la creación de instituciones académicas como la École Normale Supérieure o la Polytechnique. Amigo personal de Napoleón Bonaparte, acompañó al entonces general en su campaña de Egipto (1798-1801). A su regreso continuó dando clases en la Polytechnique; su labor pedagógica resultó decisiva en la formación de una espléndida generación de geómetras franceses, entre los que cabe citar a Poncelet, Dupin, Meusnier y Rodriguez.

La contribución de Monge a la geometría fue inmensa, tanto en diversidad como en profundidad; amén de la rama descriptiva, se le considera a menudo el fundador de la geometría diferencial. En su obra *Aplicaciones del análisis a la geometría* introdujo importantes conceptos en esta área. Asimismo fue el primero en emplear de forma sistemática las ecuaciones en derivadas parciales para el estudio de las superficies. En su doble faceta de científico y pedagogo, se lo considera el principal responsable de la gran expansión experimentada por la geometría en el siglo XIX.

Capítulo 11
Gaus y Hamilton

El siglo XIX, que liga la obra de Lagrange con la de nuestros días, es, tal vez, la era más brillante de la larga historia de las matemáticas. El tema alcanzó una grandeza en la que se recuperó todo lo que había de grande en las matemáticas griegas; la geometría se impuso nuevamente, el análisis continuó ampliando su objetivo, y la salida para sus aplicaciones aumentaba constantemente. El siglo se destacó en tres aspectos muy notables: hubo una visión más profunda de las propiedades usuales del número; hubo un descubrimiento positivo de nuevos procesos de cálculo, que, según las curiosas palabras de Sylvester, residían en el "reino de Álgebra II"; y también hubo una filosofía de las matemáticas. Durante estos años, Inglaterra volvió a rivalizar matemáticamente con Francia y Alemania e Italia alcanzaron proporciones de importancia científica; si bien encima de todas se halla el genio de un hombre, un matemático merecedor de un lugar de honor en la línea suprema, junto a Arquímedes y Newton.

11.1. Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nació en 1777, en Brunswick, y murió en 1855, a los 78 años. Era hijo de un albañil, y el deseo de su padre era que él también fuera albañil. Pero, a una edad muy temprana, se demostró que el niño tenía un talento poco común. Al contrario de Newton y Lagrange, mostró la precocidad de Pascal y Mozart. Se dice que Mozart escribió un minueto a los cuatro años, en tanto que Gauss señaló a su padre un error en un cálculo cuando tenía tres. En la escuela la inteligencia atraía su atención, y llegó, eventualmente, a conocimiento del propio duque de Brunswick, que se interesó por el muchacho. Pese a la protesta paterna, el duque le envió durante algunos años al Collegium Carolinum y, en 1795, a Göttingen. Gauss, aún indeciso sobre si seguiría matemáticas o filología, cayó sobre la influencia de Kaestner, "aquel primer geómetra entre los poetas, y primer poeta entre los geómetras", como observaba orgulloso su discípulo. En el transcurso de su carrera escolar, Gauss llegó a ser conocido por su maravillosa intuición en aritmética superior. "Matemática, la reina de las ciencias, y aritmética, la reina de la matemática", diría; y las matemáticas se convirtieron en el estudio más importante de su vida.

Los nueve años siguientes los pasó en Brunswick, interrumpiéndolos con viajes ocasionales, en el curso de los cuales encontró por primera vez a su amigo Pfaff, que era el único matemático en Alemania que se aproximaba a su calibre.

Después de declinar el ofrecimiento de una cátedra en la Academia de San Petersburgo, Gauss fue nombrado primer director del nuevo observatorio de Göttingen, en 1807, y allí vivió una vida sencilla y estudiosa, feliz en su ambiente y bendecido por una buena salud, hasta poco antes de su muerte. Una vez visitó Berlín, en 1828, y, en 1854, hizo un gran viaje para asistir a la apertura del ferrocarril de Hannover a Göttingen. vió su primera máquina de ferrocarril en 1836,pero, si se exeptúan estas tranquilas aventuras, ¡se dice que hasta el último año de su vida no durmió nunca bajo ningún otro techo que el del su propio observatorio!.

Su carácter sencillo y directo impresionaba profundamente a sus discípulos, que, sentados alrededor de su mesa, y sin autorización para tomar notas, escucharía con placer la animada locución del maestro.

Gauss al igual que Euler, Lagrange y Laplace, escribió abundantemente, pero con una diferencia. Euler nunca condenso su obra; se recreaba en la riqueza de sus ideas. Lagrange tenía el estilo fácil de un poeta; el de Laplace era cortante y díficil de leer. Gauss condujo sus escritos con austeridad , eliminándolo todo fuera de los resultados esenciales, después de tomarse molestias interminables para ajustar los detalles. Sus páginas estimulan, pero exigen gran paciencia por parte del lector.

Gauss se creó una temprana reputación con su obra sobre teoría de números. Ésta no fue sino una de sus muchas actividades matemáticas, y, aparte de todo lo que siguió, le habría colocado en primera línea. Manifestaba, como Fermat, aquel genio desconcertante que salta –uno no sabe cómo– a la conclusión verdadera, dejando la demostración deductiva, larga de obtener, para que otros la formularan. *El teorema de los números primos*, que ha tardado un siglo en ser demostrado, proporciona un ejemplo típico. Los números primos fueron estudiados por Euclides, y siguen siendo una eterna fuente de interés para los matemáticos. Son los números, tales como 2,3,5,7,11, que no pueden ser divididos en factores. Son infinitos, tal como sabía el propio Euclides; aparecen esparcidos a lo largo de la escala ordenada de los números, con una irregularidad que, al mismo tiempo, molesta y cautiva a los matemáticos. Naturalmente, se sugiere la pregunta: *¿cuán a menudo, o cuán raramente aparecen los números primos como promedio?*, o, en otra forma, ¿cuál es la probabilidad de que un número específico sea primo? Este problema fue conocido por Gauss en una forma u otra; y he aquí su respuesta, de apariencia inocente:

$$\text{Primzahlen unter } a (= \infty)$$

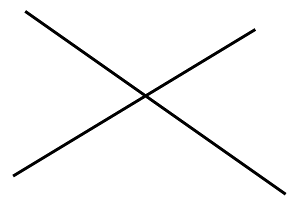
$$\frac{a}{1a}$$

Significa que cuando a es un número primo muy grande, el resultado de dividir a por su logaritmo da una aproximación del número total de números primos menores que a: y cuanto mayor sea a, más preciso será el resultado. No se sabe si Gauss demostró su proposición; la cita está tomada del reverso de una copia de la tabla de logaritmos de Schulze, que pasó a su poder cuando tenía catorce años. Probablemente hizo su nota algunos años más tarde.

Desde la época de Gauss, las matemáticas han aumentado tan extensamente que ningún individuo puede esperar dominar su totalidad. Gauss fue el último matemático completo, y de él puede decirse realmente que adornó todas las ramas de la ciencia. Los inicios de casi todos sus descubrimientos se encuentran en las notas de juventud, que apuntó en un diario, mantenido sin método durante muchos años, que felízmente se ha conservado. El diario revela hechos de primera línea en trigonometría superior, un tema generalmente conocido como funciones elípticas; también contiene ciertos aspectos de geometría no euclídea.

No hay duda que Gauss se interesó por la geometría a través de Kaestner, su maestro, el cual ha escrito sobre los fundamentos del tema. Otra influencia contemporanéa fue la de Legengre, cuyo libro, *Eléments de Géometrie,* había aparecido en 1794. Estos autores se interesaron por un problema que había sido discutido a menudo, especialmente por Wallis, en Inglaterra, y Saccheri, un monje italiano de comienzos del siglo XVIII. Se refería al postulado de las paralelas de Euclides, aquel curioso rasgo áspero en la suave lógica de los antiguos, la eliminación del cual parecía ser tan deseable. Gauss fue, tal vez, el primero en ofrecer una explicación satisfactoria de la anomalía, y su diario muestra cuán pronto ocurrió esto en su carrera. Pero, al igual que Newton, era un hombre prudente, especialmente cuando trabajaba con novedades extrañas y desconcertantes. Durante algunos años guardó el asunto para sí, hasta que descubrió que otros estaban pensando sobre las mismas cosas. Entre sus amigos de colegio se contaba un húngaro, W.Bolyai, con el cual aún mantenía correspondencia; y, en 1804, Bolyai le escribió una carta que hacía referencia a su teoría de las paralelas. El interés se extendió, y de él surgió una rama de la geometría, denominada geometría hiperbólica. Esta rama del tema la asociamos siempre a los nombres de Gauss y de sus dos amigos, los Bolyai, padre e hijo, y de

Lobatchewski, un ruso, que escribió unos veinte años más tarde. Es otro caso de varios descubrimientos independientes sobre un tema que tienen lugar en la misma época.



La geometría hiperbólica no fue simplemente una novedad; fue una revolución. Se suponía en forma muy práctica a Euclides, y en forma aún más práctica a las opiniones corrientes sobre lo que se suponía que enseñaba Euclides. Euclides dijo, por ejemplo, que la suma de los tres ángulos de un traángulo es igual a dos ángulos rectos. También, dijo que la suma de dos ángulos adyacentes, formados por líneas que se cortan, es igual a dos ángulos rectos. Ambas propiedades se hallaban implicadas, como demostró, en sus axiomas y postulados fundamentales. Pero, según Gauss y Bolyai, mientras que la afirmación sobre las líneas que se cortan es verdadera, la que se refiere al triángulo no lo es; ellos construyeron, de hecho, un triángulo para el cuál la suma de los ángulos es *menor* que dos ángulos rectos. Luego, como hermosa compensación, *Riemann* y otros hicieron lo mismo, un poco más tarde, para un triángulo en el cual la suma es *mayor* que dos ángulos rectos. A la suya la denominaron geometría analítica; es la geometría que conocen también los navegantes que viajan en trayectos directos sobre los océanos curvos del globo. Menor, igual y mayor: he aquí tres afirmaciones contradictorias. Éstas originaron tres cuerpos de doctrina geométrica: elíptica, parabólica e hiperbólica, siendo la parabólica de Euclides. Aquí se hallaba la preparación de una batalla de primera clase, no entre campos científicos opuestos que sostenían hipótesis contradictorias relativamente vagas, si no en la misma fortaleza de la argumentacion lógica: el reino que cada uno había dado por supuesto que se hallaba establecido y seguro.

11.2. Hamilton

William Rowan Hamilton, hizo dos espléndidos descubrimientos, primero uno en óptica, sobre el principio del mínimo esfuerzo, y ulteriormente los cuaterniones, en álgebra. Nació en 1805, y fue educado en Trinity College, Dublín, donde fue nombrado profesor de astronomía a los ventiún años de edad y siguió manteniendo el puesto hasta 1865, año de su muerte. Fue un poeta, y amigo de Wordsworth y Coleridge, y entre estos tres tuvo lugar una correspondencia muy interesante, que trataba de filosofía, ciencia y literatura.

Cuando niño, Hamilton sorprendía a todo el mundo con sus tempranas virtudes. A los tres años podía leer ingles; a los cuatro, se interesaba totalmente por geografía, y había comenzado a leer latín, griego y hebreo; antes de cumplir los diez años, había apagado su sed de lenguas orientales, trabando un íntimo conocimiento con el sánscrito, y expresandose en persa, árabe, caldeo, sirio y diversos dialectos indios. El italiano y el francés fueron absorbidos como cosa corriente, y estaba perparado para expresar sus sentimientos en un latín improvisado. Dedicandose a este progama monumental con facilidad y diligencia, fue para todos aquel niño fuerte, tan pronto a saltar y correr y nadar como cualquier otro niño pequeño.

A los diecisiete años, comenzó a meditar por su cuenta sobre la óptica, y desarrolló su gran principio de la *función característica,* que presentó cuatro años más tarde a la Academia irlandesa, en una tesis titulada *Account of a Theory of Systems of Rays.* Esta producción de juventud fue una obra de capital importancia en filosofía natural, como puede deducirse a las consecuencias. Comparte, junto con cierta obra sobre electromagnetismo de Clerk Maxwell, la distinción difícilmente ganada de sobrevivir triunfalmente a la revolución de nuestros días, provocada por la teoría de la relatividad.

Una cita de la tesis de Hamilton no puede ser inadecuada, a causa de su importancia en la historia de las matemáticas.

Después de observar como otros–y particularmente Malus, un oficial que sirvió a Napoleón– habían invocado el principio del mínimo esfuerzo al estudiar los rayos de luz, dice:

> "una cierta cantidad, que en una teoría física es la *acción* y en otra el *tiempo*, invertida por la luz en trasladarse desde cualquier primer punto a cualquier segundo punto, resulta ser menor que si la luz hubiera recorrido cualquier otra trayectoria distinta de la suya real... la novedad matemática de mi método consiste en considerar esta cantidad como una fnción...y *en reducir toda investigación respecto a sistemas ópticos de rayos al estudio de esta sola función;* una reducción que presenta a la óptica matemática bajo un aspecto enteramente nuevo, y análogo(como me parece a mí) al aspecto bajo al cual presentó Descartes la aplicación del álgebra a la geometría."

Así, la luz recorre el espacio como navegan los marinos en el océano, buscando la trayectoria directa. Por eso casi no es sorprendente que la obra de Gauss y Hamilton se hubiera fundido, eventualmente, en una armonía matemática más amplia. No se requería sino un paso más –inventar un medio para aplicar estas ideas al aspecto de *más* de las tres dimensiones ordinarias– para que la teoría de la relatividad adquiera vida. Este paso esncial fue dado por *Christoffel,* que trabajó con la geometría riemanniana, y, actualmente, la grandilocuente *Función Universal* de Hilbert no es otra que la función característica del joven Hamilton, reestablecida para cuatro dimensiones. Se produjo un rasgo de genio cuando Einstein descubrío en esta geometría, excesivamente elaborada, el mismo medio necesario para competir con los fenómenos físicos reales.

Hamilton también tenía ideas elevadas sobre el álgebra, a la que denominaba "la ciencia del puro tiempo", y al hacer su descubrimiento de los *cuaterniones* dió vida a un método del cálculo enteramente nuevo. Sus cuaterniones, pese a que se comportaban de manera muy parecida a los números, no eran números, pues infringían la ley conmutativa. Por ella se entiende la ley por la cual se afirma que $2 \times 3 = 3 \times 2$ ó $a \times b = b \times a$, para números ordinarios. Puesto que esta ley había sido perfectamente adecuada, en cada etapa, para todos los nuevos tipos de número, fraccionario, negativo, irracional, e incluso complejo– estando, por decirlo así, apenas secos los últimos toques de Gauss y Cauchy–, el mundo matemático se había adormecido y esperaba muy poco que apareciera algo explosivo en éste ámbito. No obstante, tuvo lugar una explosión; de hecho, dos explosiones.

Una fue provocada por Hamilton, y la otra por Grassmann, en Alemania. Pues cada uno descubrió independientemente la necesidad, en geometría o dinámica, de símbolos algebraicos cuyo comportamiento fuera ejemplar, juzgado de acuerdo con todos los patrones numéricos aceptados, excepto para la ley conmutativa.
Para tales símbolos, los productos ij y ji difieren. Si $ij = k$, entonces, dice Hamilton $ji = -k$.

Hamilton hizo este descubrimiento en 1843, a los treinta y ocho años de edad. Apareció como un destello, para llenar una necesidad intelectual que le había obsesionado durante quince años. Möbius ya había inventado una especie de máquina de calcular geométrica, que denominaba *calculadora baricéntrica,* con la cual se podían *sumar* no sólo números, sino también puntos y fuerzas. De aquí surgió la noción de vectores, nombre dado para cubrir diversos fenómenos físicos, tales como fuerzas y velocidades.

Hamilton llamaba ternas a sus vectores, porque las fuerzas actúan en tres dimensiones, y, con el transcurso del tiempo, se hallaba ansioso de encontrar una forma para multiplicarlos. Su círculo hogareño se interesó por este problema. Cada mañana, cuando bajaba a desayunar, uno de sus hijos pequeños solía preguntar: "Bueno, papá, ¿puedes multiplicar ternas?", a lo cual se veía obligado a responder, con un triste movimiento de cabeza: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas". Pero un día, así lo cuenta él, estaba paseando con su mujer junto al canal Real, camino de una reunión de la Academia, en Dublín. Aunque ella le hablaba de vez en cuando, no obstante, una corriente de pensamiento subterranea discurría por su mente, que finalmente dió un resultado. Este apareció en una forma muy tangible, y, de pronto, le sugirió un largo año de trabajo intencionado sobre un tema importante. No pudo resistir el impulso de tallar con un cuchillo, sobre las piedras del puente de Brongham, cuando lo cruzaban, la fórmula fundamental:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

que indican los *cuaterniones* que dan la solución del problema.

La sensación instintiva de que el descubrimiento era imporatante estaba bien fundamentada. Hamilton y Grassmann proporcionaron los primeros ejemplos de un amplio campo de las matemáticas, que se ha apropiado a la misma *álgebra*.
Aritmética, álgebra, análisis y geometría: éstos son los ingredientes de las matemáticas, cada uno con su influencia sobre los otros, pero cada uno con su propio sabor peculiar. Una de las características del siglo pasado fue subrayar las peculiaridades, de manera que ahora tenemos una noción mucho más clara de sus diversas significaciones. Los temas han estado presente desde los inicios de la ciencia, y Eudoxo, con su interés por los números puros; Pitágoras, por sus modelos y ordenaciones de cosas; Arquímedes, por sus especulaciones sobre el infinito, y Apolonio, por sus proyecciones de rectas y curvas.

Capítulo 12
Progresos Recientes

12.1. Bolzano

Bernard Bolzano, matemático, filósofo y teólogo checo. Nació en Praga el 5 de octubre de 1781. Ingresó a la facultad de filosofía en la Universidad de Praga en el 1796, estudió filosofía y matemática y se hizo sacerdote en 1805; ese año fue designado profesor de filosofía de la religión en la Universidad de Praga. Es de destacar que su *aritmetización del cálculo* coincide casi exactamente con la del prolífico Cauchy, a pesar de haber sido obtenida de forma independiente.

Bernard Bolzano, liberó al cálculo del concepto infinitesimal. También dio ejemplos de la correspondencia de las funciones. Bolzano además trabajó en metafísica oponiéndose a Kant.

Bolzano, se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX del concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series, y en la existencia de funciones continuas sin derivadas; pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga.

Falleció el 18 de Diciembre 1848 en Praga dejándonos al final de su vida logros importantes como el teorema que lleva su nombre o el método de la bisección.

Teorema de Bolzano y método de la bisección para localizar las raíces de una función

Teorema. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y si, además, en los extremos del intervalo la función $f(x)$ toma valores de signo opuesto $(f(a) * f(b) < 0)$, entonces existe al menos un valor c (a, b) para el que se cumple: $f(c) = 0$.
Es decir: si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, y

los valores en los extremos del intervalo tienen signos distintos, entonces podemos asegurar la existencia de al menos una raíz de la función en el intervalo abierto (a, b).

Método de la Bisección: El teorema de Bolzano tiene una interesante aplicación en la localización de las raíces o ceros de una función continua. Consiste en lo siguiente: buscamos por tanteo dos valores "a" y "b" para los que la función tome signos opuestos. Si conseguimos encontrar dos valores que cumplan la condición anterior, por ejemplo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, y, además, la función es continua en $I = [a, b]$, queda garantizada por el teorema de Bolzano la existencia en el intervalo (a, b) de al menos una raíz. Si ahora tomamos el punto medio del intervalo $x = \dfrac{a+b}{2}$ la función en ese punto puede tomar el valor 0, en cuyo caso ya tendríamos localizada una raíz, o bien en $\dfrac{a+b}{2}$ toma un valor positivo o negativo. Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, nos fijaríamos ahora en el intervalo $I_1 = \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$ en el que la función es continua y en cuyos extremos toma valores de signos opuestos.

El teorema de Bolzano garantiza así la existencia de al menos una raíz en ese intervalo I_1 de longitud la mitad de la longitud del intervalo inicial.
Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0 \quad I_1 = \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$. Se repite el mismo proceso con el intervalo I_1, con lo que vamos obteniendo intervalos cada vez más pequeños, dentro de los cuales sabemos que existe una raíz.Podemos así hallar el valor de esa raíz con la aproximación deseada.

12.2. Cauchy

Augustin Louis Cauchy, Matemático francés, considerado uno de los impulsores del análisis en el siglo XIX. Nació en París en 1789 y estudió en la Escuela Politécnica de esta ciudad. Fue profesor simultáneamente en el Colegio de Francia, en la Escuela Politécnica y en la Universidad de París. En 1848 fue nombrado profesor de astronomía matemática de esa universidad.

Cauchy verificó la existencia de funciones elípticas recurrentes, dio el primer impulso a la teoría general de funciones y sentó las bases para el tratamiento moderno de la convergencia de series infinitas. También perfeccionó el método de integración de las ecuaciones diferenciales de primer grado.

Agustín Louis Cauchy pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos.

Él ayudó ocupando diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, El Colegio de Francia y La Escuela Politécnica. En 1814 el publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.
Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Con Cauchy se precisan los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangentes.

Cauchy vuelve a tomar el concepto tradicional de integral, como suma y no como operación inversa. También introdujo el rigor en el tratamiento de las series fijando criterios de convergencia y eliminando, algo a pesar suyo, las series divergentes, pues dice "Me he visto obligado a admitir diversas proposiciones que parecerán algo duras; por ejemplo, que una serie divergente carece de suma".

Cauchy retornó a París en 1838 y retomó su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy retomó su cátedra en Sorbonne. El ayudo en los postgrados hasta la hora de su muerte.

12.3. Bolyai

János Bolyai, matemático húngaro, nacido el 15 de diciembre de 1802, en Kolozsvár; hijo Wolfgang Bolyai un matemático amigo de Gauss, que con solo trece años, dominaba el cálculo y otras formas de mecánicos analíticos. También se convirtió en violinista realizándose en Viena. Entró a los quince años en la facultad de ingeniería de Viena, en la que permaneció desde 1818 hasta 1822; ingresando, cinco años más tarde, en el ejército, en el que permaneció durante once años.

Bolyai era un lingüista realizado que hablaba nueve idiomas extranjeros, entre ellos el chino y el tibetano. Entre 1820 y 1823 Bolyai preparó un tratado sobre un sistema completo de la geometría no-Euclidiana. Antes de que el trabajo fuera publicado descubrió que Gauss había anticipado mucho de su trabajo aunque nunca lo había publicado en esta área, probablemente porque él no se sentía confidente para publicar, esto era un soplo severo a Bolyai. Este trabajo fue publicado en 1831 como apéndice a una obra de matemáticas escrita por su padre, en el que explica la geometría no euclídea, formulada tres años antes por el matemático ruso Lobachevski. Bolyai descubrió unos años después, en 1848 que Lobatchevsky había publicado un pedazo similar de trabajo en 1829. Además de este trabajo en geometría, Bolyai desarrolló un concepto geométrico riguroso de números complejos como pares pedidos de números verdaderos.

Bolyai nunca publicó más que las veinticuatro páginas del apéndice que hizo al trabajo de su padre; aunque las veinte mil páginas del manuscrito de su trabajo permanecen hoy en la biblioteca de Bolyai-Teleki en Tirgu-Mures.
Bolyai murió el 17 de enero de 1860 en Morosvásárhely.

12.4. Sylvester

James Joseph Sylvester nació en Londres el 8 de septiembre del año 1814, de padres israelitas, y se ignora todo lo relativo a su infancia.

Los invariantes durante mucho tiempo han sido artículo de fe la creencia en el valor de símbolos matemáticos sin sentido, creencia que ha dado lugar a verdaderos absurdos cuyo origen está en la que Enriques ha llamado "superstición del formalismo", que nace de una falsa interpretación del principio de Hankel, según el cual toda expresión escrita con los símbolos de la Aritmética universal sigue siendo válida cuando las letras dejan de representar simples "cantidades". Hoy sabemos que esto sólo es cierto bajo ciertas condiciones.

Ya en el año 1858 Cayley había encontrado una extraña propiedad en el cálculo de matrices: la no conmutatividad del producto, que causó el efecto de una herejía; pero las herejías dejan de serio cuando son razonables y la de Cayley ha sido, precisamente, la base de la obra de Heisenberg que ha modificado la Mecánica ondulatoria, sustituyendo el principio de causalidad toda causa tiene un efecto, admitido como dogma científico, por el de indeterminación, que reduce a la modesta categoría de probable la certeza que orgullosamente hemos venido atribuyendo a la Ciencia. Pero en la primera mitad del siglo XIX, las cosas pasaban de otro modo, y fueron los ingleses quienes, saliendo de su "espléndido aislamiento", las modificaron de raíz.

El año 1812 Jorge Peacock, Carlos Babbage y Juan Federico Guillermo Herschell fundan en Cambridge una *Sociedad Analítica* que no tardó en hacer progresar la

Matemática, encerrada hasta entonces en moldes newtonianos. Dicha sociedad fue el germen de lo que después se ha llamado escuela de los reformadores ingleses, quienes, con su característica originalidad insular, pusieron los cimientos de la actual Álgebra por postulados; y cuando el año 1841 Cayley y Sylvester crean la teoría de invariantes, de importancia capital en la Física teórica, el terreno está ya preparado para recibir la nueva semilla.

Gauss y Peacock dan a conocer su tratado de Álgebra en el que por primera vez se consideran las letras a, b, que intervienen en relaciones como:

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a$$

No como números, sino cómo símbolos arbitrarios combinados convenientemente en dos operaciones: un representada por el signo + y la otra por el signo * de acuerdo con los postulados previamente admitidos A Peacok le faltó, sin embargo, dar el paso decisivo: *demostrar* que sus postulados no eran contradictorios, paso que franquearon los alemanes que se ocupaban de los fundamentos de la Matemática.

Cayley y Sylvester se conocieron el año 1850, no como matemáticos, sino como abogados, y en verdad que debió de ser curiosa la entrevista. Cada uno de ellos conocía la labor del otro y ambos se profesaban mutua admiración, de la que nació en aquel momento una amistad perdurable.

La relación personal de ambos tuvo recíproca influencia de la que salió beneficiada la Matemática y perjudicada la Jurisprudencia. Sylvester pidió un puesto de profesor en la Escuela Militar de Woolwich, y no se lo dieron, lo que le obligó a seguir trabajando en la compañía de seguros. Cayley fue más afortunado, pues que la Universidad de Cambridge creó por entonces una nueva cátedra de Matemática de la que le encargaron, y entonces se casó con Susana Moline. Sylvester permaneció célibe, encerrado unos años más en una oficina, realizando una labor de burócrata que no se acomodaba a su temperamento, y, al vacar una plaza en el Gresham College de Londres, la solicitó, pero no se la dieron. En cambio, fue llamado por la Academia de Woolwich para sustituir al candidato que lo había derrotado antes, porque éste acababa de morir.

Sylvester conservó en la cátedra de Woolwich hasta el año 1870 en que fue jubilado por imperativo legal, aunque estaba en plena actividad y en pleno vigor; escribiendo: *The Laws of Verse* (1870).

Sylvester no se limitó a las lecciones magistrales de la cátedra, sino que realizó, además, una labor de divulgación y de extensión desde el *American Journal of Mathematics*, que fundó en 1875, provocando una verdadera revolución en la enseñanza de la Matemática, y cuando volvió a Inglaterra, en 1885, como profesor especial de Oxford, podía sentirse verdaderamente orgulloso de sí mismo. En la otra orilla del Atlántico quedaban una afición y un método que ya habían empezado a dar pruebas fidedignas de inmediatos frutos sazonados, y cuando en 1893 hubo de retirarse no ya por razones de carácter burocrático, sino biológico, porque era octogenario y estaba casi ciego, alcanzó a saber con legítima e íntima satisfacción que la semilla depositada por él daba ya frutos de bendición.

Murió en Londres el 15 de marzo de 1897. Dos años antes, el 26 de enero de 1895, había muerto Cayley, dejando escritas novecientas sesenta y seis memorias, que ocupan trece volúmenes en cuarto de seiscientas páginas cada uno.

12.5. Boole

George Boole, Nació el 2 de Noviembre de 1815 en Lincoln, Lincolnshire (Inglaterra), primero concurrió a una escuela en Lincoln, luego a un colegio comercial. Sus primeras instrucciones en matemática, sin embargo fueron de su padre quién le dio también a George la afición para la construcción de instrumentos ópticos. El interés de George se volvió a los idiomas y recibió instrucción en Latín de una librería local.

En ese periodo Boole estudió los trabajos de Laplace y Lagrange, tomando apuntes, los cuales llegaron a ser más tarde las bases para sus primeros papeles matemáticos. Comenzó a estudiar álgebra y aplicación de métodos algebraicos para la solución de ecuaciones diferenciales fue publicada por Boole en el *Transaction of the Royal Society.*

Investigó las propiedades básicas de los números, recluyó la lógica a una álgebra simple, trabajó en ecuaciones diferenciales, el cálculo de diferencias finitas y métodos generales en probabilidad. Boole fue nominado para una cátedra de matemática en el Queens College, Cork en 1849. El enseñó allí por el resto de su vida, ganándose una reputación como un prominente y dedicado profesor.

En el 1854 publicó una investigación de las leyes del pensamiento sobre las cuales son basadas las teorías matemáticas de Lógica y Probabilidad. Boole aproximó la lógica en una nueva dirección reduciéndola a una álgebra simple, incorporando lógica en las matemáticas. Agudizó la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan formas lógicas. Comenzaba el álgebra de la lógica llamada Álgebra Booleana la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadores, circuitos eléctricos, etc.

Boole también trabajó en ecuaciones diferenciales, el influyente Tratado en Ecuaciones Diferenciales apareció en 1859, el cálculo de las diferencias finitas, Tratado sobre el Cálculo de las Diferencias Finitas (1860), y métodos generales en probabilidad. Publicó alrededor de 50 escritos y fue uno de los primeros en investigar las propiedades básicas de los números, tales como la propiedad distributiva que fundamento los temas del álgebra.

A Boole le fueron concedidos muchos honores; fue reconocido como el genio en su trabajo, recibió grandes honores de las universidades de Dublín y Oxford y fue elegido miembro académico de la Real Sociedad (1857). Sin embargo, su carrera que comenzó un tanto tarde terminó infortunadamente temprano cuando murió a la edad de 49 años, el 8 de Diciembre de 1864 en Ballintemple, County Cork (Irlanda).

Su trabajo fue elogiado por De Morgan quién dijo: el sistema de lógica de Boole es una de las muchas pruebas de genio y paciencia combinada.
Está el proceso simbólico del álgebra, inventado como herramienta de cálculos numéricos, sería competente para expresar cada acto del pensamiento, y proveer la gramática y el diccionario de todo el contenido de los sistemas de lógica, no habría sido creíble hasta probarlo. Cuando Hobbes publicó su "Computación ó Lógica"él tenía un remoto reflejo de algunos de los puntos que han sido ubicados en la luz del día por Mr. Boole.

El trabajo de Boole llegó a ser un paso fundamental en la revolución de los computadores, cuando Claude Shannon en 1938, demostró como las operaciones booleanas elementales, se podían representar mediante circuitos conmutadores eléctricos, y como la combinación de estos podía representar operaciones aritméticas y lógicas complejas. Shannon demostró así mismo que el álgebra de Boole se podía utilizar para simplificar circuitos conmutadores.

12.6. Weierstrass

Karl Weierstrass, fue un matemático alemán nacido en Ostenfel de (Westfalia) el 31 octubre 1815. Estudió funciones abelianas y elípticas, los números irracionales, las singularidades esenciales de las curvas algebraicas, el teorema final de la Aritmética, las formas cuadráticas.

En 1838, comenzó sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Münster, tras un intento fallido de estudiar Derecho. Fue profesor de enseñanza media desde 1848 hasta 1854,año en que se doctoró en Konisberg.

En 1856 ocupó un puesto de profesor en el Instituto Industrial de Berlín, para pasar en 1864 a una cátedra de Matemáticas en la Universidad de esa misma ciudad, de la que fue rector desde 1873 a 1897. Murió en Berlín el 19 febrero 1897.

Su obra más importante: *Abhandlungen aus der Funktionenlehre* (1886)

Weierstrass es uno de los máximos creadores de la Matemática del Siglo XIX; además ejerció una gran influencia sobre los matemáticos de su generación. Trabajó en temas diversos: estudio de los números irracionales mediante clases de números racionales; estudio sobre las singularidades esenciales de las curvas algebraicas; teorema final de la Aritmética, en el que demuestra la no existencia de sistemas de números, aparte de los complejos, que cumplan todas las leyes de la Aritmética; estudio de las formas cuadráticas; demostración de la trascendencia de π y de e; etc.

Sus trabajos más meritorios son los referentes a funciones analíticas, comparte con Cauchy y Riemann el honor de ser el creador de la teoría moderna para el estudio de estas funciones. El primero en trabajar sobre esta materia fue Cauchy, que dio una primera definición excesivamente restrictiva, la cual fue generalizada por Riemann desde el punto de vista geométrico, y por Weierstrass desde el aritmético. Para Weierstrass, una función analítica es la que se puede representar localmente mediante una serie de potencias. Esta definición local nos da, mediante la prolongación analítica, la posibilidad de efectuar un estudio global. Este método, riguroso y válido para cualquier número de variables, reduce el estudio de las funciones analíticas al de las series, estudio totalmente efectuado por los matemáticos anteriores a Weierstrass. A partir de esta definición, Weierstrass realizó un desarrollo completo de las funciones analíticas.

Otros puntos importantes en las obras de Weierstrass son los análisis de las funciones enteras, las elípticas y las abelianas. En la teoría de las funciones enteras trata los llamados por él factores primarios, productos de un polinomio de primer grado por una exponencial, cuyo exponente es un polinomio de grado q (que recibe el nombre de factor), demostrando que toda función entera es producto de factores primarios, lo cual le permite una clasificación de éstas. Además, ideó un procedimiento para construir una función entera con ceros previamente dados, método posteriormente generalizado a funciones meromorfas por Mittag-Leffler. En funciones elípticas simplifica y generaliza los resultados de Jacobi mediante la introducción de la función $p(u)$, y en funciones abelianas generaliza los resultados de Riemann; trabajando sobre las funciones más generales de n variables con $2n$ periodos.

12.7. Cayley

Arthur Cayley fue un Jurista y matemático británico, cuya aportación más importante a las matemáticas es la teoría de los invariantes algebraicos. Junto con su coetáneo Hamilton, encabezaron la prestigiosa escuela de matemáticos ingleses del siglo XIX.

Creó la geometría del espacio de n-dimensiones y la teoría de matrices, proporcionó los medios para unificar la geometría euclídea y las no euclídeas y desarrolló con J. J. Silvestre el concepto de invariantes.

Arthur fue creador de la teoría de los invariantes y de la primera definición abstracta de un grupo finito. Introdujo la métrica proyectiva, formulando conceptos geométricos, luego desarrollados por Klein.

Nació en Richmond (Surrey) y estudió en el King's College y en el Trinity College, Universidad de Cambridge. A comienzos de su carrera, mientras se dedicaba al estudio y a la práctica del derecho, realizó alguno de sus descubrimientos matemáticos más brillantes.

En 1857 propició con sus investigaciones el origen y desarrollo posterior del cálculo matricial. De gran importancia para hoy en día, ya que las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc.

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos.

Es considerado como el tercer escritor más prolífico de matemáticas, siendo sólo superado por Euler y Cauchy. Hizo importantes contribuciones en la Teoría de curvas y superficies, en la geometría analítica, en la teoría de los determinantes y el desarrollo de la teoría de los invariantes.

En 1863 fue profesor de matemáticas puras en Cambridge. Sus trabajos en geometría cuatridimensional, proporcionaron a los físicos del siglo XX, especialmente a Albert Einstein, la estructura para desarrollar la teoría de la relatividad.
En 1876 escribió: *Elementary Treatise on Elliptic Functions, Collected Mathematical Papers* (13 vols; con 966 trabajos).

12.8. Riemann

Georg Friedrich Riemann, nació el 17 de Septiembre en Breselenz (Alemania) y falleció el 20 de Julio 1866 en Selasca, Italia. Estudió en la Universidad de Gottingen, de la que fue profesor auxiliar (1854) y catedrático (1859).

Revolucionó la geometría diferencial en la que basó Einstein su teoría de la relatividad, aportó métodos topológicos para la teoría de las funciones de variable compleja, inventó la función Zeta de su nombre, y desarrolló la teoría de las funciones abelianas.

Su principal publicación fue su tesis doctoral (de suma importancia en geometría no euclidiana): *Übre die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (1854).

Las ideas de Riemann referentes a la geometría del espacio tuvo profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna y proveía los conceptos y métodos usados después en la Teoría de la Relatividad. Clarificó la noción de Integral, definiendo lo que ahora llamamos Integral de Riemann. Era un original pensador y un anfitrión de métodos, teoremas y conceptos que llevan su nombre.

Riemann se trasladó de Gottingen a Berlín en el año 1846 para estudiar bajo la enseñanza de Jacobi, Dirichlet y Einstein.

El año 1849 retornó a Gottingen y su tesis supervisada por Gauss fue presentada en el año 1851. En su informe de la tesis Gauss describe a Riemann como alguien que tenía una fácil y gloriosa originalidad. Con las recomendaciones de Gauss, Riemann fue nominado para un puesto en Gottingen. (La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann).

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann (conocidas un tiempo antes) y el concepto de la superficie de Riemann aparecen en su tesis de Doctorado.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados fueron incorporados dentro de la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein.

El 10 de junio del año 1854, en una conferencia, Georg Riemann dio a conocer una nueva geometría que vino a ampliar la que durante siglos se había considerado como definitiva, la de Euclides. En la obra de Euclides, todas las figuras geométricas son de 2 ó 3 dimensiones. Riemann amplió eso. Einstein, a final del mismo siglo, utilizará la geometría de cuatro dimensiones de Riemann para explicar el Universo.

La importancia de Riemann no queda ahí, ya que engrandecerá ideas que resultan muy actuales en el pensamiento científico actual:

a) La utilización del espacio multidimensional para simplificar las leyes de la naturaleza. La electricidad, el magnetismo y la gravedad no serían más que efectos causados por la distorsión del hiperespacio (o de la cuarta dimensión, si usamos un término del siglo XIX). La fuerza, según Riemann, sería una consecuencia de la geometría del espacio.

b) Los agujeros de gusano están en su idea de espacios múltiples conectados.

Euclides había sentenciado que:

- Un punto no tiene ninguna dimensión.

- Una línea solo tiene una: longitud.

- Una superficie tiene dos dimensiones: longitud y anchura.

- Un sólido tiene tres dimensiones: longitud, anchura y altura.

- No hay nada que tenga más de tres dimensiones.

Esta limitación fue rota por Riemann al postular la existencia de espacios de n-dimensiones, tesis que acompañó con un instrumental matemático denominado tensor métrico. En el espacio plano, el único que existe para Euclides.

Las líneas paralelas no se cortan nunca, y solo podemos dibujar una por un punto exterior a una recta. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180 grados.

En el *espacio curvado,* de curvatura positiva, como la superficie de una esfera, las líneas paralelas siempre se cortan, la suma de los ángulos interiores de un triángulo supera los 180 grados.

En el *espacio curvado,* de curvatura negativa, podemos dibujar un número infinito de líneas paralelas a una línea dada, la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180 grados.

Riemann, yendo más allá de los límites de la geometría euclidiana, comprobó que todos estos espacios de cualquier dimensión (n-dimensiones) con curvatura arbitraria no planteaban ningún tipo de contradicción.

Para Riemann la curvatura o distorsión del espacio provoca la aparición de una fuerza, pero no obtuvo ningún resultado en la búsqueda sobre qué provoca tal curvatura. Fue Einstein quien anunció que la curvatura del espacio está determinada por la cantidad de materia y energía contenida en este. Este fue el descubrimiento del principio físico que se comprobó experimentalmente correcto. Einstein, sin embargo, estuvo tres largos años -de 1912 a 1915- buscando desesperadamente un aparato matemático suficientemente potente para explicar este principio.

Riemann murió con tuberculosis a la edad de 39 años, sin haber resuelto las ecuaciones que regían la electricidad, el magnetismo y la gravedad. Por lo que hace a esta última estaba escrito que se debía de esperar a Einstein. Einstein planteó, independientemente del programa de Riemann, la idea de una explicación geométrica del concepto de “fuerza”.

Durante sesenta años, el trabajo de Riemann y su tensor métrico permanecieron ignorados por los físicos. El azar hizo que cayese en manos de Einstein la conferencia de 1854, dándose cuenta del encaje perfecto de las ideas riemannianas con su principio físico. Se ha escrito que la reinterpretación física de la conferencia de Riemann del año 1854 hoy recibe el nombre de "*relatividad general*".

A partir de Riemann, Einstein pudo formular las famosas ecuaciones de campo de la gravedad. La reflexión a partir de estas ecuaciones ha permitido explicar los movimientos de las estrellas y de las galaxias, los agujeros negros, el big bang y, hay quien lo intenta, el destino del Universo.

12.9. George Cantor

Georg Cantor nació el 3 de marzo de 1845. Comenzó sus estudios en Wiesbaden (Alemania) en 1860, orientándose por decisión paterna hacia la ingeniería. Posteriormente (1862) logra convencer a su padre de que su futuro está en las Matemáticas. Los primeros estudios de Cantor fueron semejantes a los de la mayor parte de los matemáticos eminentes. Su gran talento y su interés absorbente por los estudios matemáticos fueron conocidos precozmente (antes de cumplir los 15 años).

Dividió su interés entre las dos primeras. En matemáticas sus profesores fueron: Kummer, Weierstrass y su futuro enemigo Kronecker. Siguiendo las costumbres alemana, Cantor pasó breve tiempo en otra Universidad, y cursó el semestre de 1866 en Gottingen.

Con Kummer y Kronecker en Berlín, la atmósfera matemática estaba altamente cargada de Aritmética. Cantor hizo un profundo estudio de las "*Disquisitiones Arithmeticae*"de Gauss, el escribió, en el año de 1867, su disertación, aceptada para aspirar al título de doctor sobre un punto difícil que Gauss había dejado a un lado respecto a la solución en números enteros x, y, z de la ecuación determinada:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

donde a, b, c, son números enteros.

Sus primeros trabajos con las series de Fourier lo condujeron al desarrollo de una teoría de los números irracionales.

El año 1874, apareció el primer trabajo revolucionario de Cantor sobre la teoría de conjuntos. El estudio de los infinitos por parte de Cantor fue considerado por Kronecker con una locura matemática. Creyendo que la matemática sería llevada al manicomio bajo la dirección de Cantor, Kronecker lo atacó vigorosamente con toda las armas que tuvo en su mano, con el trágico resultado de que no fue la teoría de conjuntos la que cayó en el manicomio, sino el propio Cantor En 1884 Cantor fue víctima de una enfermedad mental.

Cantor murió en Halle (ciudad del centro de Alemania), el 6 de enero de 1918, teniendo 73 años de edad. Ya le habían sido concedidos múltiples honores y su obra había logrado ser reconocida.

12.10. Hilbert

David Hilbert, Nació el 23 de Enero de 1862 en un pueblo cerca de Königsberg, y murió el 14 de Febrero de 1943 en Gottingen, Alemania.

Königsberg es famosa por ser la ciudad natal de Immanuel Kant, pero también es famosa por sus siete puentes y por el problema que consistía en saber si una persona podría cruzar todos los puentes una sola vez. Este problema fue resuelto por Euler, quien demostró que no era posible. Hilbert era reconocido como uno de los mejores matemáticos de su época y le ofrecieron el puesto matemático más importante de la universidad de Berlín, pero prefirió quedarse en Gotinga y convenció a las autoridades para que crearan otro puesto de profesor para su amigo Minkowski.

Es famosa la conferencia que dio en el Congreso Internacional de Matemáticas de París en 1900, en la que presentó una lista de 23 problemas que estaban sin resolver (algunos todavía lo están).

Otras dos cuestiones: ¿es la matemática completa?, es decir, ¿puede ser demostrada o refutada cualquier sentencia matemática? y ¿es la matemática consistente?, es decir, ¿es cierto que sentencias tales como $0 = 1$ no pueden demostrarse por métodos válidos? En 1931, Kart Godel fue capaz de responder a estas dos preguntas, demostrando que cualquier sistema formal suficientemente potente es inconsistente o incompleto.

Hilbert trabajó sobre los invariantes algebraicos, geometría, ecuaciones integrales, análisis funcional y también se dedicó a la Física (decía que la Física es demasiado difícil para los físicos), también trabajo en los fundamentos de las matemáticas y en la lógica matemática.

En el año 1888 probó su famoso Teorema da la Base. Su publicación suscitó cierta polémica con Jordan, ya que éste estaba trabajando en el mismo tema y en principio se mostró en desacuerdo con los resultados de Hilbert, pero con el tiempo tuvo que rendirse a la evidencia incontestable de los argumentos de Hilbert.

El epitafio de Hilbert es "Wir müssen wissen, wir werden wissen" ("Debemos saber, de modo que sabremos").

Capítulo 13

Referencias Bibliográficas

- Sigma el Mundo de Las Matemáticas
  James R.Newman
  Editorial Grijalbo
  Barcelona
  1968

- A History of Mathematics
  From Mesopotamia to Modernity
  Luke Hodgkin
  Oxford University Press
  New York
  2005

- The History of Mathematics from Antiquity to the Present:
  A Selective Annotated Bibliography,
  Edited by Joseph W. Dauben
  American Mathematical Society
  Washington
  2000

- Landmark Writings in Western
  Mathematics 1640-1940
  Edited by: I.Grattan-Guinness
  Editorial Board
  Amsterdam
  2005

- Pioneers in Mathematics Modern
  Mathematics 1900 to 1950
  Michael J. Bradley
  Chelsea House Publishers
  New York
  2006

- books.google.com.co

  - Lecciones de Historia de Las Matemáticas
    Hans Wussing
    Siglo XXI de España Editores S.A
    España
    1998.
  - Historia de las Matemáticas II
    Jean Paul Collette
    Siglo XXI de España Editores S.A.
    España
    1993
  - Las Matemáticas de la Antigüedad y su Contexto Histórico
    Carlos Masa Gomez
    Gafrités S.L
    Sevilla
    2000
  - Matemáticas de la Antigüedad
    Francisco Luis Florez Gil
    Sierra Mágina 10
    España
    2008