



Neiva, 13 de Junio de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

El (Los) suscrito(s):

Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes, con C.C. No.1.075.321.787.

Autor de la tesis y/o trabajo de grado titulado Análisis de un modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower modificado con respuesta funcional Holling Tipo II y con cooperación cinética presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas.

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes

Firma:

Vigilada Mineducación



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Análisis de un modelo depredador-presa con respuesta funcional Holling Tipo II y con cooperación entre los depredadores.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Rodríguez Cifuentes	Camilo Andrés

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar
Bahamón Reyes	Francisco Javier

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Bahamón Reyes	Francisco Javier

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 29

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas X Fotografías___Grabaciones en discos___Ilustraciones en general X Grabados___Láminas___
Litografías___Mapas___Música impresa___Planos___Retratos___Sin ilustraciones___Tablas o Cuadros X

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO: Ninguno



PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*): Ninguna

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español

Inglés

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| 1. Modelo depredador-presa | Depredator-prey model |
| 2. Respuesta funcional | Functional Response |
| 3. Cooperación Cinegética | Hunting Cooperation |

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Los modelos depredador-presa con cooperación cinegética tienen una gran importancia en ecología. Las características de la especie presa, como su densidad, comportamiento, tamaño y distribución espacial, influyen en la probabilidad de que los depredadores cooperen en la caza. En este trabajo de investigación se analizó la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional autónomo, no lineal y de tipo Kolmogorov que modela la relación entre presa-depredador, que se obtuvo mediante una transformación del modelo de Leslie-Gower con una respuesta funcional Holling tipo II, donde consideramos la cooperación entre los depredadores. Se localizó una región positivamente invariante, la acotación de las trayectorias y la existencia de dos puntos de equilibrios en el primer cuadrante. Se realizaron simulaciones numéricas en el software Matlab para comprobar los resultados analíticos.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Predator-prey models with hunting cooperation have great importance in ecology. The characteristics of the prey species, such as their density, behavior, size, and spatial distribution, influence the likelihood of predators cooperating in hunting, thus enhancing ecological realism. This article proposes a modified Leslie-Gower predator-prey system with a Holling type II functional response, taking into account predator cooperation. However, it is important to note that increasing the hunting efficiency of predators can have negative effects, such as depleting available resources rapidly and reducing the prey population, which can lead to the extinction of both species and impact the ecosystem. To analyze the biological impacts, the Holling type II functional response was utilized due to its form being based on realistic biological assumptions about how predators search for and consume prey, thus increasing the credibility of the ecological model. Additionally, numerical simulations were conducted using Matlab software to visualize the dynamic behavior of the system.



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 3
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Francisco Javier Reyes Bahamón

Nombre Jurado: Julio Cesar Duarte Vidal

Firma:

Nombre Asesor: Francisco Javier Reyes Bahamón

Firma:



**Análisis de un modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower
modificado con respuesta funcional Holling tipo II y
cooperación entre los depredadores**

Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes

Universidad Surcolombiana
Licenciatura en Matemáticas
Neiva - Huila
2023

**Analysis of a modified Leslie-Gower predator-prey model
with Holling type II functional response and cooperation
among predators**

Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes

Surcolombiana University
Bachelor's Degree in Mathematics
Neiva - Huila
2023

**Análisis de un modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower
modificado con respuesta funcional Holling tipo II y
cooperación entre los depredadores**

Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes

Tesis de pregrado presentada como modalidad de grado para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas

Director:
Francisco Javier Reyes Bahamón, MSc

Universidad Surcolombiana
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Proyecto de Investigación
Neiva - Huila
2023

Agradecimientos

A Dios por su acompañamiento. Quiero agradecer a todos los participantes de este estudio, cuya contribución fue esencial para la realización de esta investigación. Su disposición a compartir sus conocimientos y el apoyo a lo largo de este proceso ha enriquecido enormemente este trabajo como mi persona. Además, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor, el MSc. Francisco Javier Reyes Bahamón por su orientación y dedicación en la supervisión de este estudio. Sus valiosas orientaciones, sugerencias y comentarios fueron cruciales para su desarrollo. Finalmente, agradezco a mi madre Dora Stella Cifuentes por su amor y aliento constante a lo largo de mi carrera académica.

¡Muchas Gracias!

Camilo Andrés Rodríguez Cifuentes

Resumen

Los modelos depredador-presa con cooperación cinegética tienen una gran importancia en ecología. Las características de la especie presa, como su densidad, comportamiento, tamaño y distribución espacial, influyen en la probabilidad de que los depredadores cooperen en la caza. En este trabajo de investigación se analizó la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional autónomo, no lineal y de tipo Kolmogorov que modela la relación entre presa-depredador, que se obtuvo mediante una transformación del modelo de Leslie-Gower con una respuesta funcional Holling tipo II, donde consideramos la cooperación entre los depredadores. Se localizó una región positivamente invariante, la acotación de las trayectorias y la existencia de dos puntos de equilibrios en el primer cuadrante. Se realizaron simulaciones numéricas en el software Matlab para comprobar los resultados analíticos.

Palabras claves: Modelo depredador-presa, respuesta funcional, cooperación cinegética.

Abstract

Predator-prey models with hunting cooperation have great importance in ecology. The characteristics of the prey species, such as their density, behavior, size, and spatial distribution, influence the likelihood of predators cooperating in hunting, thus enhancing ecological realism. This article proposes a modified Leslie-Gower predator-prey system with a Holling type II functional response, taking into account predator cooperation. However, it is important to note that increasing the hunting efficiency of predators can have negative effects, such as depleting available resources rapidly and reducing the prey population, which can lead to the extinction of both species and impact the ecosystem. To analyze the biological impacts, the Holling type II functional response was utilized due to its form being based on realistic biological assumptions about how predators search for and consume prey, thus increasing the credibility of the ecological model. Additionally, numerical simulations were conducted using Matlab software to visualize the dynamic behavior of the system.

Keyword: Predator-prey model, functional response, hunting cooperation.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Modelos Poblacionales continuos	8
1.2. Respuesta funcional de los depredadores	9
1.2.1. Tipos de respuesta funcional	9
1.3. Modelo de tipo Leslie-Gower	12
1.3.1. Modelos Leslie-Gower modificados	13
2. Modelo	15
2.1. Formulación del modelo	15
2.2. Invariancia positiva y acotación	16
2.3. Existencia de los Puntos de Equilibrio	18
2.4. Naturaleza de los Puntos de Equilibrio	20
3. Simulaciones Numéricas	23
4. Conclusiones	25
5. Bibliografía	26

Capítulo 1

Introducción

El estudio de cómo el comportamiento individual afecta los fenómenos poblacionales es un tema de gran relevancia en la ecología teórica contemporánea. Sin embargo, la conexión entre el comportamiento y la dinámica de las poblaciones ha sido poco explorada [1, 2].

En el contexto de las interacciones depredador-presa, la mayoría de los estudios teóricos y empíricos se han centrado en el comportamiento de los depredadores y cómo esto afecta a la dinámica de las poblaciones [2].

La teoría plantea que la probabilidad de éxito de los depredadores que cazan presas formidables aumenta en grupos grandes debido a una mayor cooperación y esfuerzo individual [3, 4]. Esto se debe a que la posibilidad de que un cazador solitario capture estas presas por sí mismo es baja, lo que promueve la cooperación en grupos grandes para mejorar las oportunidades de caza. No obstante, cuando la caza en solitario es exitosa, la cooperación disminuye, ya que un cazador adicional tiene poco impacto en mejorar los resultados. Por lo tanto, se espera que los cazadores que persiguen presas relativamente fáciles se mantengan en grupos grandes, limitando los aumentos adicionales en el éxito de caza a medida que el grupo crece. Un estudio con lobos (*Canis lupus*) cazando alces (*Cervus elaphus*) respalda esta predicción, mostrando que el éxito de caza grupal se estabiliza en grupos de 4 lobos, siendo este el tamaño máximo de grupo en el cual el esfuerzo individual se mantiene constante [5, 6, 7].

Según otro estudio, la cooperación en los guepardos durante la caza se promueve por la poca efectividad de esta actividad. Aunque varios documentales e investigaciones han señalado que los guepardos son animales que viven y cazan principalmente en solitario, también se ha observado que en ocasiones pueden colaborar con otros guepardos durante la caza o compartir una presa. A pesar de ello, las manadas de guepardos son extremadamente raras, en algunos casos se han encontrado grupos compuestos por hembras y sus cachorros, pero no se ha documentado que los guepardos machos formen manadas [8, 9].

La disminución de la población de presas es una de las principales causas por las que los guepardos se encuentran en peligro de extinción actualmente [10]. Sin embargo, en la reserva natural de Masai Mara ubicada en el sudoeste de Kenia se ha observado un comportamiento anormal en un grupo de 5 machos guepardos no emparentados que cooperan entre sí para mejorar sus oportunidades de caza, lo que ha llamado la atención de los investigadores [11].

Desde el punto de vista matemático, los modelos depredador-presa se han estudiado utilizando diferentes tipos de ecuaciones como son las ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, fraccionarias, estocásticas, con o sin retardo de tiempo, entre otros [12, 13, 14]. Investigaciones previas sobre la caza cooperativa han utilizado modelos matemáticos como el de Berec (2010), que emplea ecuaciones diferenciales ordinarias para describir las interacciones entre depredadores y presas, utilizando una respuesta funcional Holling tipo II [15].

La cooperación cinagética es un comportamiento común entre los depredadores en la naturaleza, que les permite obtener suficiente comida a través de la colaboración, lo que beneficia su supervivencia [16]. En ecología, los modelos matemáticos se clasifican en dos tipos de depredadores: especialistas y generalistas, en función de su naturaleza. Mientras que un depredador especialista depende de una única presa, un depredador generalista tiene la capacidad de cambiar entre diversas fuentes de alimento [12, 17].

La cooperación es una característica importante de los animales sociales y se ha observado en muchos sistemas biológicos [15]. Por ejemplo, las especies carnívoras, como los lobos [5], perros salvajes [18], leones [19, 20], cocodrilos [21], arañas [22] y halcones [23], a menudo trabajan juntos para cazar sus presas. Otras especies, no carnívoras, también persiguen y atacan a sus presas de forma colaborativa como, hormigas [24, 25], pájaros [26], entre otros [27]. Sin embargo, aunque la cooperación es ampliamente observada en la naturaleza, son pocos los modelos matemáticos que la incorporan como mecanismo biológico.

A continuación se abordará la sección de modelos poblacionales continuos que exploran diferentes enfoques matemáticos utilizados en ecología para estudiar la dinámica de las poblaciones. Estos modelos proporcionan una base teórica sólida para comprender cómo los factores individuales y las interacciones entre depredadores y presas pueden influir en la dinámica de las poblaciones a lo largo del tiempo.

En cuanto a los tipos de respuesta funcionales, se examinan las diferentes formas en que los depredadores responden a la disponibilidad y la densidad de sus presas. Estas funciones describen cómo los depredadores buscan, seleccionan y consumen sus presas, lo que es fundamental para comprender las interacciones depredador-presa.

Por último, la sección de modelos Leslie-Gower modificados presenta una amplia gama de estudios que exploran diferentes enfoques, como la incorporación de diversas respuestas funcionales o la consideración de la disponibilidad de fuentes alternativas de alimento para los depredadores.

1.1. Modelos Poblacionales continuos

Los modelos poblacionales continuos son herramientas fundamentales en la ecología y la biología para comprender y predecir el comportamiento de las poblaciones a lo largo del tiempo. Estos modelos se basan en ecuaciones diferenciales que describen cómo cambia la población en función del tiempo, y proporcionan una base matemática para analizar y pronosticar el crecimiento y la dinámica de las poblaciones [28, 29, 30].

En 1798, el economista británico Thomas Robert Malthus presentó su obra “Ensayo sobre el principio de la población”, donde propuso una hipótesis que establecía que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño [31, 32, 33]. Esta idea se expresa matemáticamente a través de una ecuación diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = rx,$$

donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población, en cada tiempo $t \geq 0$ y r es la constante de proporcionalidad, conocida como la tasa de crecimiento intrínseca de la población; se interpreta como la diferencia entre las tasas de natalidad, mortalidad y migración. La solución de la ecuación es:

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

donde $x(0) = x_0 > 0$ es el tamaño de la población en el tiempo inicial y la población tiene un crecimiento exponencial si $r > 0$. Sin embargo, el modelo fue muy cuestionado, debido a que las poblaciones no tienen un crecimiento exponencial ilimitado a largo plazo [33].

En 1838, el biólogo y matemático P. Verhulst modificó el modelo de Malthus al considerar que algunos recursos están disponibles en cantidades limitadas. Cada población crece a un nivel de saturación K en el que no puede crecer más y debe competir por dichos recursos. Este nivel se

conoce como capacidad de carga del medio ambiente. Por lo tanto, la dinámica poblacional responde a la ecuación diferencial de Verhulst, también conocida como modelo logístico de crecimiento poblacional. Este modelo describe un crecimiento autolimitado de una población en el que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad de carga [33, 34, 35]. En consecuencia, la dinámica de la población puede ser descrita mediante una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población, en cada tiempo $t \geq 0$, r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y K es la capacidad de carga del medio ambiente. La solución de la ecuación es:

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}},$$

donde $x(0) = x_0 > 0$, es el tamaño de la población en el tiempo inicial. Si la población inicial, representada como x_0 , es menor que la capacidad de carga K , el crecimiento de la población aumenta gradualmente hasta acercarse asintóticamente a K . Por otro lado, si la población inicial x_0 es mayor que K , el crecimiento de la población comienza a disminuir gradualmente hasta acercarse asintóticamente a K [33].

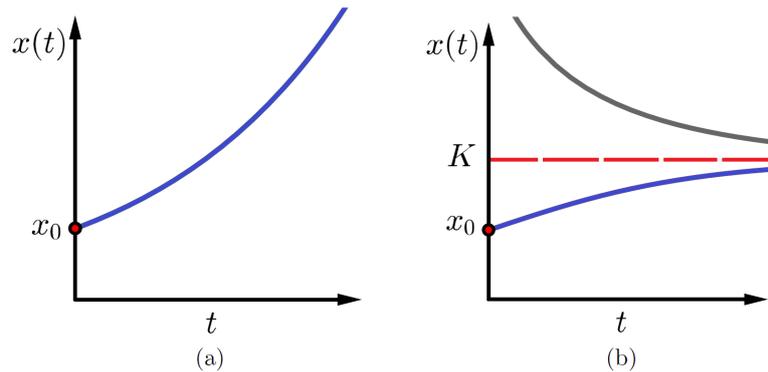


Figura 1.1: (a) Crecimiento Malthusiano Exponencial para $r > 0$ y (b) crecimiento logístico $x(0) = x_0 > 0$. [33]

1.2. Respuesta funcional de los depredadores

La respuesta funcional en modelos depredador-presa es un concepto fundamental en la ecología de poblaciones y se refiere a la forma en que un depredador responde a la disponibilidad de presas. Esta respuesta funcional describe la relación entre la tasa de consumo de presas por parte del depredador y la densidad de presas en el ambiente [36].

1.2.1. Tipos de respuesta funcional

Respuesta funcional Holling tipo I

En este tipo de respuesta funcional, la tasa de consumo del depredador aumenta de manera lineal con la densidad de presas, hasta alcanzar un límite máximo. Esto significa que la tasa de depredación es proporcional a la abundancia de presas, pero no se ve afectada por la densidad de presas más allá de cierto punto. Es típico de depredadores generalistas que consumen una amplia variedad de presas [31, 33, 37].

La función utilizada en esta respuesta funcional viene dada por [35, 38]:

$$h(x) = \begin{cases} \delta x & \text{si } 0 \leq x \leq c, \\ \delta c & \text{si } c \leq x, \end{cases}$$

donde δ es una constante, c representa la saturación y $x(t)$ es la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$.

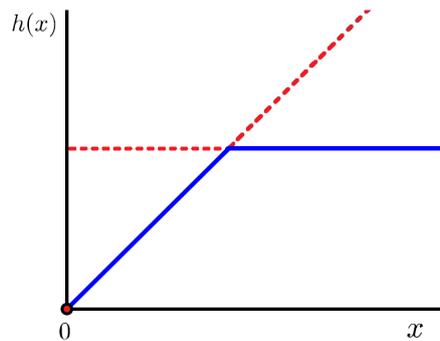


Figura 1.2: La respuesta funcional Holling tipo I [33].

Respuesta funcional Holling tipo II

En este caso, la tasa de consumo del depredador aumenta inicialmente de manera proporcional a la densidad de presas, pero a medida que la densidad de presas aumenta, la tasa de consumo se estabiliza y alcanza un punto de saturación. A partir de ese punto, el depredador no puede consumir más presas, incluso si la densidad de presas sigue aumentando. Este tipo de respuesta funcional es común en depredadores que tienen ciertas limitaciones físicas o fisiológicas en su capacidad para capturar y consumir presas [31, 33, 37].

Para esta respuesta funcional la función es la siguiente [38, 39]:

$$h(x) = \frac{qx}{x+a},$$

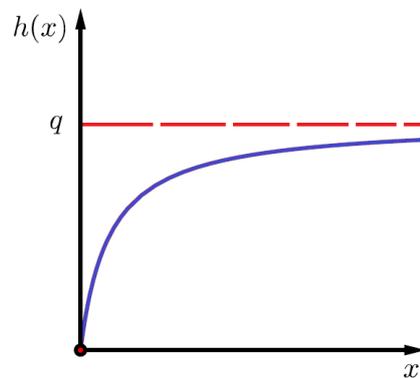


Figura 1.3: La respuesta funcional Holling tipo II [33].

donde $x(t)$ representa la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$, q es la tasa máxima de consumo per cápita y a es la tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo.

Respuesta funcional Holling tipo III

Este tipo de respuesta funcional, la tasa de consumo del depredador es baja cuando la densidad de presas es baja, luego aumenta rápidamente a medida que la densidad de presas aumenta, y finalmente se estabiliza o disminuye a medida que la densidad de presas continúa aumentando. En este caso, la tasa de depredación puede estar influenciada por factores como la búsqueda de presas, la selección de presas y la saciedad del depredador. Este tipo de respuesta funcional es común en depredadores especializados que requieren ciertos umbrales de densidad de presas para activar su respuesta de depredación eficiente [33, 35].

La función utilizada para el Holling tipo III es [38, 40]:

$$h(x) = \frac{qx^2}{x^2 + a^2},$$

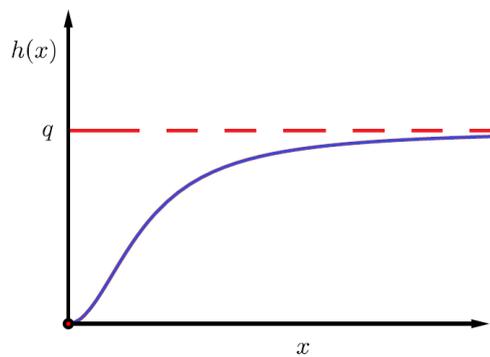


Figura 1.4: La respuesta funcional Holling tipo III [33].

$x(t)$ se refiere a la densidad de población de presas en el tiempo $t \geq 0$. El parámetro q representa la tasa máxima de consumo por individuo y a representa la tasa media de saturación, que es el punto en el cual la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo.

Respuesta funcional Holling tipo IV

La respuesta funcional Holling tipo IV, también conocida como respuesta funcional de depredación Holling tipo IV, es un tipo de respuesta funcional que describe la relación entre la tasa de consumo de un depredador y la densidad de presas disponibles. Se caracteriza por tener una tasa de consumo baja cuando la densidad de presas es baja, luego aumenta rápidamente a medida que la densidad de presas aumenta, y finalmente se estabiliza o disminuye a medida que la densidad de presas continúa aumentando [31].

Esta respuesta funcional es aplicada en la modelización de comportamientos antidepredatorios, como la formación de grupos de defensa (APB, por sus siglas en inglés), que ha sido documentada en estudios [31]. Además, se utiliza para entender el fenómeno de agregación [30], el cual es empleado por las presas como una estrategia para evitar la depredación [33].

La primera parte de la curva (representada en la figura 1.5) puede corresponder a cualquiera de los tipos anteriores de respuestas funcionales. Sin embargo, el interés se centra en la disminución en la cantidad de presas consumidas que a veces se observa en altas densidades de presas. Esta reducción puede deberse a tres posibles causas. En primer lugar, los depredadores pueden concentrarse menos en una presa individual cuando hay muchas presas entre las cuales elegir. En segundo lugar, algunas presas pueden cooperar al compartir la carga de vigilancia ante la presencia de depredadores y comunicarla a otras presas. En tercer lugar, algunas presas pueden intimidar e incluso defenderse contra los ataques de los depredadores. [33, 41]

Las funciones utilizadas en Holling Tipo IV viene dadas por [42, 43] :

a)
$$h(x) = \frac{qx}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{b) } h(x) = \frac{qx^2}{x^2 - bx + a}.$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{qx^m}{x^n + a^n}, \text{ con } 1 \leq m \leq n.$$

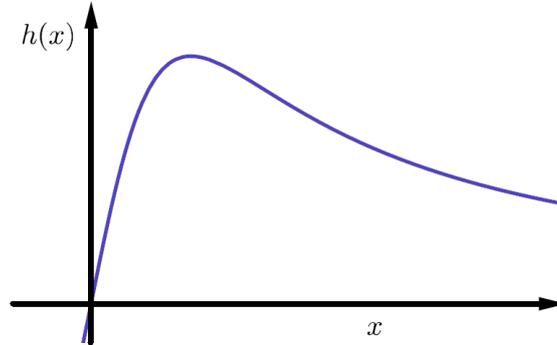


Figura 1.5: La respuesta funcional Holling tipo IV [33].

En este contexto, el enfoque de este estudio se centra en el análisis de un modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower modificado que incorpora la cooperación cinética entre depredadores generalistas, utilizando una respuesta funcional Holling tipo II. Como el objetivo es examinar la interacción entre una especie depredadora generalista y su presa dentro de este marco teórico, se busca analizar cómo la cooperación entre los depredadores puede influir en la dinámica del sistema depredador-presa y cómo esto puede tener implicaciones en la estabilidad del ecosistema [17, 44]. Además, se explora cómo la cooperación puede afectar y limitar el aumento del éxito de la caza con el tamaño del grupo [45].

Existen varios tipos de respuesta funcional como se evidenció anteriormente, pero uno de los más utilizados y estudiados es la respuesta funcional Holling tipo II. Esta respuesta funcional describe una tasa de consumo de presas que aumenta linealmente con la densidad de presas hasta alcanzar un punto máximo, después del cual la tasa de consumo se estabiliza o disminuye a medida que la densidad de presas sigue aumentando [36, 46].

Hay varias razones por las cuales la respuesta funcional Holling tipo II es preferida en los modelos depredador-presa. En primer lugar, esta respuesta funcional refleja la idea intuitiva de que un depredador no puede consumir un número infinito de presas, y que la tasa de consumo se satura a medida que la densidad de presas aumenta. En segundo lugar, la forma de la respuesta funcional de Holling tipo II puede explicar ciertos patrones observados en la naturaleza, como la estabilidad de las poblaciones depredador-presa o la existencia de ciclos de población.[36, 47].

Además, la respuesta funcional Holling tipo II puede ser derivada teóricamente a partir de supuestos razonables sobre el comportamiento del depredador y la presa, lo que la convierte en una herramienta valiosa para entender la dinámica de las poblaciones en la naturaleza [36, 48].

1.3. Modelo de tipo Leslie-Gower

La dinámica del modelo Leslie-Gower [40] es descrito por el sistema de EDO del tipo Kolmogorov [37, 44]

$$G_{\beta}(x, y) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy, \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y, \end{cases}$$

Donde, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ indican los tamaños de las poblaciones de presas y depredadores para $t \geq 0$, respectivamente, los cuales son medidos como biomasa; β es el vector de parámetros, los cuales son todos positivos. Cabe resaltar que, el factor qxy representa la interacción presa-depredador sobre la presa y nx indica la cantidad de alimento sobre el depredador que en función a su naturaleza representa un depredador especialista. [49]. El significado del resto de parámetros ecológicos será definido más adelante.

1.3.1. Modelos Leslie-Gower modificados

Se ha realizado una revisión bibliográfica a partir de los modelos depredador-presa tipo Leslie-Gower, encontrando otros modelos que consideran distintos tipos de respuestas funcionales y exploran la presencia de fuentes alternativas de alimento para los depredadores. Como resultado de esta revisión se halló lo siguiente:

<i>Descripción</i>	<i>Modelo modificado</i>	<i>Referencias</i>
Modelo de Leslie-Gower incorporando efecto Allee con colaboración entre depredadores.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - (q + ay)xy \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right) y \end{cases}$	González Olivares, Rojas Palma. (2022). Influence of the Allee effect on prey and collaboration between predators in a Leslie-Gower-type predation model [50].
Modelo de Leslie-Gower con respuesta funcional Holling tipo IV.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qxy}{x^2 + bx + a} \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y \end{cases}$	González Olivares. (2022). Bifurcations in a Leslie-Gower type predator-prey model with a rational non-monotonic functional response [51].
Modelo de colaboración entre depredadores tipo Leslie-Gower con respuesta funcional lineal.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qx \left(1 + \frac{a}{q}y\right) y \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y \end{cases}$	González Olivares & Rojas Palma. (2021). A modified Leslie-Gower-type predation model considering collaboration between predators [52].
Modelo de depredación tipo Leslie-Gower, considerando que la acción de la población de depredadores es sigmoidea o del tipo Holling III.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qx^2y}{x^2 + a} \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases}$	Ruiz, P. C. T., Berrío, L. M. G., & González, E. (2019). Una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y alimento alternativo para los depredadores [53].
Modelo depredador de May-Holling-Tanner, considerando el efecto Allee en la ecuación de crecimiento de la población de presas.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qxy}{x + a} \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases}$	Tintinago-Ruiz, P. C., Gallego-Berrío, L. M., & González-Olivares, E. Modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional no-monotónica racional [54].

Análisis de bifurcaciones y estabilidad en un sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo IV.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{xy}{a + bx + x^2} \\ \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{\mu x}{a + bx + x^2} - D\right) \end{cases}$	Huang ¹ , J. C., & Xiao ² , D. M. (2004). Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response [43].
Modelo de colaboración entre depredadores tipo Leslie-Gower con respuesta funcional Holling tipo II.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{n}{x+b}\right) x \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx+c}\right) \end{cases}$	González-Olivares, E., Mena-Lorca, J., Rojas-Palma, A. & Flores, J. D. (2011). Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey. [39].
Modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower con respuesta funcional Holling tipo II y efecto Alle.	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases}$	Arancibia-Ibarra, C. & González-Olivares, E. (2011). A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey. [38].
Modelo tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea o del tipo Holling III.	$\begin{cases} (x - m) \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qx^2y}{x^2 + a^2} \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx+c}\right) \end{cases}$	R.A. Becerra-Klix, Modelos de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea y efecto Allee multiple en las presas [35].

Tabla 1.1: Modelos modificados tipo Leslie-Gower.

Por último, este trabajo se basa en modelos matemáticos anteriores que han investigado la caza cooperativa y busca contribuir a la comprensión de los efectos de la cooperación en la dinámica de los sistemas depredador-presa. El estudio tiene implicaciones importantes para la ecología y la conservación de la biodiversidad, ya que la cooperación es una característica fundamental de la vida social animal y juega un papel importante en la regulación de las poblaciones y el mantenimiento del equilibrio ecológico.

Capítulo 2

Modelo

2.1. Formulación del modelo

En esta investigación, se han considerado las siguientes modificaciones al modelo: en primer lugar, se ha incorporado el factor de cooperación cinegética entre los depredadores, representado por by^2 , al momento de capturar a sus presas. Esta cooperación en grupo afecta la dinámica de las presas, generando cambios en su comportamiento y abundancia. En segundo lugar, se ha incluido el factor $nx + c$, el cual refleja la naturaleza de los depredadores generalista y su capacidad para adaptarse y utilizar diversas fuentes de alimento. Esta flexibilidad dietaria tiene un impacto significativo en las poblaciones involucradas [52, 55, 56].

El modelo a estudiar está basado en el modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower modificado [40, 45], descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional autónomo, no lineal y de tipo Kolmogorov [37, 44], definido de la siguiente manera:

$$X_\mu = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{q}{x+a} y - by^2 \right) x, \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx+c} \right) y, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ indican los tamaños de las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente, para $t \geq 0$, (medidas en número de individuos, densidad o biomasa).

Todos los parámetros son positivos, es decir, $\mu = (r, K, q, a, b, s, n, c) \in \mathbb{R}_+^8$ y tienen los siguientes significados ecológicos:

<i>Parámetros</i>	<i>Significados</i>
n	Calidad del alimento e indica cómo los depredadores convierten a las presas comidas en nuevos nacimientos de depredadores.
K	Capacidad de carga del medio ambiente (o capacidad de soporte) de las presas.
s	Tasa de crecimiento intrínseca de la población de depredadores.
c	Cantidad de alimentos alternativos disponibles para los depredadores.
r	La tasa de crecimiento intrínseca de la población de presas.
q	Tasa máxima de consumo per cápita de los depredadores.
a	Cantidad de presas para llegar a la mitad de q .
b	Tasa de cooperación depredadora en la caza constante.

Tabla 2.1: Parámetros y significado en el sistema (2.1).

El sistema (2.1) está definido en el primer cuadrante, es decir,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Los puntos de equilibrio del sistema (2.1) o singularidades del campo vectorial $X_\mu(x, y)$ son: $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, c)$, y aquellos que están en la intersección de las isoclinas,

$$y = nx + c, y, \left(r - \frac{rx}{K}\right) - \frac{q}{x+a}y - by^2 = 0.$$

Es decir, si (x_e, y_e) es un punto de equilibrio positivo, la abscisa x_e satisface la ecuación polinomial

$$p(x) = bn^2x^3 + \left[\frac{r}{K} + 2bcn + abn^2\right]x^2 + \left[qn - r + \frac{ra}{K} + bc^2 + 2abcn\right]x + [qc - ra + abc^2] = 0.$$

2.2. Invariancia positiva y acotación

Lema 1. [Existencia de una región positivamente invariante].

El conjunto $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq K, y \geq 0\}$, es una región positivamente invariante.

Demostración: el sistema (2.1) es de tipo Kolmogorov, entonces los ejes coordenados son conjuntos invariantes [57]. Sea $x = K$; se tiene que $\frac{dx}{dt} = -\frac{Kqy}{K+a} - Kby^2 \leq 0$. Cualquiera que sea el signo de $\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{nx+c}\right)$, las trayectorias del sistema entran en la región Γ . [58] \square

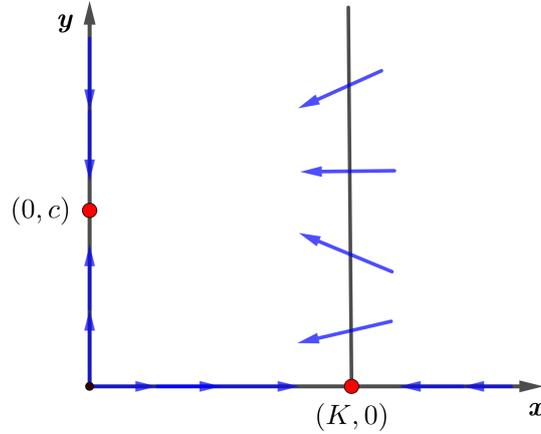


Figura 2.1: Región positivamente invariante

Lema 2. [Acotación de las trayectorias]. Todas las soluciones son uniformemente acotadas.

Demostración: Desde la primera ecuación de (2.1), se obtiene la siguiente condición $\frac{dx}{dt} < rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, con condición inicial $x(0) = x_0 > 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema definido deben satisfacer la condición $x(t) \leq K, \forall t > 0$.

Consideremos la función $w(t)$ tal que $w(t) = x(t) + y(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qxy}{x+a} - bxy^2 + sy - \frac{sy^2}{nx+c} \\ &< rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) + sy - \frac{sy^2}{nK+c}. \end{aligned}$$

Sea $L > 0$ y reescribiendo las ecuaciones anteriores, tenemos

$$\frac{dw}{dt} + Lw \leq -\frac{r}{K}(x^2 - Kx) - \frac{1}{nK+c}(sy^2 - sy(nK+c)) + Lx + Ly$$

$$\leq -\frac{r}{K} \left(x^2 - \frac{(r+L)K}{r} x \right) - \frac{s}{nK+c} \left(y^2 - \frac{(nK+c)(s+L)}{s} y \right).$$

Realizando una mayor simplificación obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + Lw &\leq -\frac{r}{K} \left(x - \frac{(r+L)K}{2r} \right)^2 - \frac{s}{nK+c} \left(y - \frac{(nK+c)(s+L)}{2s} \right)^2 \\ &+ \frac{K(r+L)^2}{4r} + \frac{(nK+c)(s+L)^2}{4s} \leq \frac{K(r+L)^2}{4r} + \frac{(nK+c)(s+L)^2}{4s}. \end{aligned}$$

Denotando $N = \frac{K(r+L)^2}{4r} + \frac{(nK+c)(s+L)^2}{4s}$, obtenemos

$$0 \leq \frac{dw}{dt} + Lw \leq N.$$

Aplicando un teorema de comparación para desigualdades diferenciales [59], obtenemos

$$w(t) \leq N/L + (w(0) - N) e^{-Lt}, \quad 0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq N/L.$$

Entonces, existe una región R , tal que $R = \{(x, y) \in \Omega / 0 < x + y \leq \frac{N}{L} + \epsilon, \forall \epsilon > 0\}$. Esto demuestra que todas las soluciones están acotadas. \square

Para simplificar los cálculos se realiza un cambio de variable y un reescalamiento del tiempo, descrito a continuación.

Lema 3. (Sistema topológicamente equivalente)

El sistema (2.1) es topológicamente equivalente al sistema del tipo Kolmogorov [37, 44, 60]

$$Y_\xi(u, v) = \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = [(1-u)(u+A) - Bv - Cv^2(u+A)]u(u+M), \\ \frac{dv}{d\tau} = [P(u+M-v)]v(u+A), \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\xi = (A, B, C, M, P) \in \mathbb{R}^5$, con $A = \frac{a}{K}$, $B = \frac{qn}{r}$, $C = \frac{bn^2K^2}{r}$, $M = \frac{c}{nK}$ y $P = \frac{s}{r}$.

Demostración: Sean $x = Ku$ y $y = nKv$.

$$U_\mu(u, v) = \begin{cases} K \frac{du}{dt} = \left[r(1-u) - \frac{qnKv}{Ku+a} - bn^2K^2v^2 \right] Ku, \\ nK \frac{dv}{dt} = s \left(1 - \frac{nKv}{nKu+c} \right) nKv. \end{cases}$$

Factorizando y simplificando se obtiene:

$$U_\mu(u, v) = \begin{cases} \frac{du}{dt} = \left[(1-u) \left(u + \frac{a}{K} \right) - \frac{qn}{r} v - \left(\frac{bn^2K^2}{r} v^2 \right) \left(u + \frac{a}{K} \right) \right] \frac{ur}{\left(u + \frac{a}{K} \right)}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{sv}{\left(u + \frac{c}{nK} \right)} \left(u + \frac{c}{nK} - v \right). \end{cases}$$

Haciendo el cambio de escala del tiempo dado por

$$\tau = \frac{r}{\left(u + \frac{a}{K} \right) \left(u + \frac{c}{nK} \right)} t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt},$$

Se obtiene finalmente,

$$V_{\mu}(u, v) = \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \left[(1-u) \left(u + \frac{a}{K} \right) - \frac{qn}{r} v - \left(\frac{bn^2 K^2}{r} v^2 \right) \left(u + \frac{a}{K} \right) \right] \left(u + \frac{c}{nK} \right) u. \\ \frac{dv}{d\tau} = \left[\frac{s}{r} \left(u + \frac{c}{nK} - v \right) \right] \left(u + \frac{a}{K} \right) v. \end{cases}$$

Definiendo $A = \frac{a}{K}$, $B = \frac{qn}{r}$, $C = \frac{bn^2 K^2}{r}$, $M = \frac{c}{nK}$ y $P = \frac{s}{r}$, se obtiene el sistema (2.2)

Observación 1. El sistema (2.2) o el campo vectorial $Y_{\xi}(u, v)$ está definido en

$$\bar{\Omega} = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0 \}.$$

Se ha construido un difeomorfismo $\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(u, v, \tau) = \left(Ku, nKv, \frac{\left(u + \frac{a}{K} \right) \left(u + \frac{c}{nK} \right)}{r} \tau \right) = (x, y, t).$$

La matriz Jacobiana de la función φ es

$$D\varphi(u, v, \tau) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & nK & 0 \\ \left[u^2 + \frac{c}{nK} + \frac{a}{K} \right] \frac{\tau}{r} & 0 & \frac{\left(u + \frac{a}{K} \right) \left(u + \frac{c}{nK} \right)}{r} \end{pmatrix}.$$

y $\det D\varphi(u, v, \tau) = \frac{nK^2}{r} \left(u + \frac{a}{K} \right) \left(u + \frac{c}{nK} \right) > 0$, entonces, el difeomorfismo preserva la orientación del tiempo [39, 61, 62, 63].

2.3. Existencia de los Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio positivos del sistema (2.2) o campo vectorial $Y_{\xi}(u, v)$ son: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, M)$ y aquellos que están en la intersección de las isoclinas [51, 52],

$$v = u + M \text{ y } (1-u)(u+A) - Bv - Cv^2(u+A) = 0.$$

Las abscisa u_e de los puntos de equilibrio positivos (u_e, v_e) , satisface la ecuación polinomial:

$$P(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0, \quad (2.3)$$

donde,

$$\begin{aligned} a_3 &= C. \\ a_2 &= 1 + AC + 2CM. \\ a_1 &= A + B + 2ACM + CM^2 - 1. \\ a_0 &= BM + A(CM^2 - 1). \end{aligned}$$

Observación 2. Los puntos de equilibrio positivos del sistema (2.2) o campo vectorial $Y_{\xi}(u, v)$ son: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, M)$ y $P_e = (u_e, v_e)$ determinados por la intersección de las isoclinas.

La abscisa u_e de los puntos de equilibrio positivos es una solución de la ecuación polinomial de tercer grado [38, 51, 58]:

$$P(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0,$$

De acuerdo con la regla de signos de Descartes, el polinomio $P(u)$ puede tener:

- 1) Ninguna raíz real positiva, si y sólo si, $a_1 \geq 0$ y $a_0 > 0$.
- 2) Una raíz real positiva, si y sólo si, $a_1 < 0$ y $a_0 \leq 0$, ó
- 3) Una raíz real positiva, si y sólo si, $a_1 \geq 0$ y $a_0 < 0$
- 4) Dos raíces reales positivas, si y sólo si, $a_1 < 0$ y $a_0 > 0$.

Sustituyendo u por $-u$ se obtiene el siguiente polinomio:

$$P(-u) = -a_3u^3 + a_2u^2 - a_1u + a_0 = 0.$$

Con base a la regla de signos de Descartes, el polinomio $P(-u)$

- 1) Puede tener hasta dos raíces negativas, si y solo si, $a_1 > 0$ y $a_0 > 0$,
- 2) Dos raíces reales negativas, si y sólo si, $a_1 < 0$ y $a_0 > 0$, ó
- 3) Dos raíces reales negativas, si y sólo si, $a_1 > 0$ y $a_0 < 0$,
- 4) Puede tener una única raíz negativa, si y sólo si, $a_1 < 0$ y $a_0 > 0$.

Por lo tanto, sujeto a ciertas condiciones, existe una raíz real positiva $u_e = H$ para la ecuación (2.3). Asumimos que $P_e = (H, H + M)$ se encuentra en \mathbb{R}_+^2 .

Realizando la división entre el polinomio $P(u)$ y $(u - H)$, se obtiene la siguiente ecuación polinomial cuadrática [38, 51, 64].

$$P_1(u) = a_3u^2 + (a_3H + a_2)u + H(a_3H + a_2) + a_1 = 0. \quad (2.4)$$

Como el polinomio $P_1(u)$ es un factor de $P(u)$, el resto de la división es [51, 65]

$$R(H) = a_3H^3 + a_2H^2 + a_1H + a_0 = 0.$$

Sea Δ el discriminante de la ecuación cuadrática asociada (2.4), entonces

$$\Delta = (a_3H + a_2)^2 - 4a_3(H(a_3H + a_2) + a_1).$$

Lema 4. (Número de raíces reales y puntos de equilibrio)

1. Para la ecuación polinomial (2.3) puede tener:

- a) Una raíz real positiva, si y sólo si, $\Delta = 0$, ó
- b) Una raíz real positiva, si y sólo si, $\Delta < 0$,
- c) Dos raíces reales positivas, si y sólo si, $\Delta > 0$; $u_{e1} = H$ y $u_{e*} = \frac{-(a_2 + a_3H) + \sqrt{\Delta}}{2a_3}$, donde $(a_2 + a_3H) < \sqrt{\Delta}$.

2. El sistema (2.2) o campo vectorial $Y_\xi(u, v)$ puede tener:

- a) Si $\Delta < 0$, hay un único punto de equilibrio $(H, H + M)$ al interior de $\bar{\Omega}$.
- b) Si $\Delta = 0$, existe un punto de equilibrio al interior de $\bar{\Omega}$ cual es $(H, H + M)$.
- c) Si $\Delta > 0$, existe dos puntos de equilibrio al interior de $\bar{\Omega}$ los cuales son $(H, H + M)$ y $(u_2, u_2 + M)$, donde $u_2 = \frac{-(a_2 + a_3H) + \sqrt{\Delta}}{2a_3}$, con $(a_2 + a_3H) < \sqrt{\Delta}$.

Demostración:

1. Del polinomio de grado dos, obtenemos $P_1(u) = a_3u^2 + (a_3H + a_2)u + H(a_3H + a_2) + a_1 = 0$. Entonces, las raíces de $P_1(u)$ cuando $\sqrt{\Delta} > (a_2 + a_3H)$ es: $u_2 = (-(a_2 + a_3H) + \sqrt{\Delta})/2a_3$ [38, 51].

- (a) $P_1(u)$ no tiene raíz real positiva, si y sólo si, $\Delta = 0$. Entonces, $P(u)$ tiene solamente una única raíz real positiva.
- (b) $P_1(u)$ no tiene una raíz real, si y sólo si $\Delta < 0$. Entonces, $P(u)$ tiene una raíz real positiva dada por $u_e = (H, H + M)$.
- (c) Hay dos diferentes raíces reales positivas, si y sólo si, $\Delta > 0$. Las raíces reales positivas son:
 H y $u_2 = \frac{-(a_2 + a_3H) + \sqrt{\Delta}}{2a_3}$.

2. La segunda parte del lema es inmediata. \square

Por tanto, el número de puntos de equilibrio positivos, y los diferentes casos obtenidos, se muestran en la siguiente Tabla (2.2).

a_1	a_0	Δ	Raíces Reales Positivas	Raíces Reales Negativas
-	+	+	2	1
+	-	0	1	2
+	-	-	1	2
0	-		1	2
-	-		1	2
-	0		1	2
+	+		0	3
+	0		0	3
+	-		1	2
0	+		0	3
0	0		0	3

Tabla 2.2: Número de raíces reales positivas de la ecuación (2.3).

2.4. Naturaleza de los Puntos de Equilibrio

Para determinar la naturaleza de los puntos de equilibrio del sistema (2.2), se requiere de la matriz Jacobiana dada por [38, 58, 66, 67]:

$$DY_\xi(u, v) = \begin{pmatrix} dY_\xi(u, v)_{11} & -u(u + M)[B + 2Cv(u + A)] \\ Pv(2u + M + A - v) & P(u + A)(u + M - 2v) \end{pmatrix}.$$

Donde,

$$dY_\xi(u, v)_{11} = (2u + M) [(1 - u)(u + A) - Bv - Cv^2(u + A)] + u(u + M) [1 - 2u - A - Cv^2].$$

Lema 5. [Naturaleza del punto $(1, 0)$]. *La singularidad $(1, 0)$ es un punto de silla hiperbólico para todo $\xi = (A, B, C, M, P)$.*

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(1, 0)$, se tiene:

$$DY_\xi(u, v) = \begin{pmatrix} -(1 + M)(1 + A) & -B(1 + M) \\ 0 & P(1 + A)(1 + M) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el $DetDY_\xi(1, 0) = -P(1 + M)^2(1 + A)^2 < 0$; es decir, el punto de equilibrio $(1, 0)$ es un punto de silla hiperbólico. \square

Lema 6. [Naturaleza del punto $(0, 0)$]. La singularidad $(0, 0)$ es un punto repulsor hiperbólico para todo $\xi = (A, B, C, M, P)$.

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(0, 0)$, se tiene:

$$DY_{\xi}(0, 0) = \begin{pmatrix} AM & 0 \\ 0 & PAM \end{pmatrix},$$

donde el $DetDY_{\xi}(0, 0) = PA^2M^2 > 0$. La naturaleza de este punto de equilibrio depende del valor de la traza,

$$TrDY_{\xi}(0, 0) = AM(1 + P) > 0.$$

En conclusión, el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un punto nodo-repulsor. \square

Lema 7. [Naturaleza del punto $(0, M)$]. La singularidad $(0, M)$ para todo $\xi = (A, B, C, M, P)$ es,

- i) Un punto de silla hiperbólico, si y sólo si, $A < \frac{BM}{1 - CM^2}$.
- ii) Un punto de silla no hiperbólico, si y sólo si, $A = \frac{BM}{1 - CM^2}$.
- iii) Si $A > \frac{BM}{1 - CM^2}$, entonces
 - a) Un nodo atractor, si y sólo si, $A < \frac{BM}{1 - CM^2 - P}$.
 - b) Un nodo repulsor, si y sólo si, $A > \frac{BM}{1 - CM^2 - P}$.

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(0, M)$, se tiene:

$$DY_{\xi}(0, M) = \begin{pmatrix} -M(BM + ACM^2 - A) & 0 \\ PAM & -PAM \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el $DetDY_{\xi}(0, M) = PAM^2(BM + ACM^2 - A)$, cuyo signo depende del factor $(BM + A(CM^2 - 1))$.

1. Si el $DetDY_{\xi}(0, M) \leq 0$ implica que $BM + A(CM^2 - 1) \leq 0$,
 - i) Si $BM + A(CM^2 - 1) < 0$ implica que la singularidad $(0, M)$ es un punto silla hiperbólico.
 - ii) Si $BM + A(CM^2 - 1) = 0$ implica que la singularidad $(0, M)$ es un punto silla no hiperbólico.
2. Si el $DetDY_{\xi}(0, M) > 0$ implica que $BM + A(CM^2 - 1) > 0$ tal que, $A < \frac{BM}{1 - CM^2}$ y la naturaleza de este punto de equilibrio depende del valor de la traza $TrDY_{\xi}(0, M) = M(A - BM - ACM^2 - PA)$.
 - iii) Si $M(A - BM - ACM^2 - PA) < 0$ implica que la singularidad $(0, M)$ es un foco atractor.
 - iv) Si $M(A - BM - ACM^2 - PA) > 0$ implica que la singularidad $(0, M)$ es un foco repulsor. \square

Lema 8. [Naturaleza del punto $(H, H + M)$]. La singularidad $(H, H + M)$ para todo $\xi = (A, B, C, M, P)$ es,

- 1) Un punto de silla hiperbólico si y sólo si,

$$A < \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)z_2}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - H(H + M)[2C(H + M) + 1]}.$$

- 2) Si $A > \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)z_2}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - H(H + M)[2C(H + M) + 1]}$,

entonces,

- ii) Un foco atractor, si y sólo si,

$$A < \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)[2H + P + C(H + M)^2 - 1]}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - (H + M)(H + P)}.$$

- iii) Un foco repulsor, si y sólo si,

$$A > \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)[2H + P + C(H + M)^2 - 1]}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - (H + M)(H + P)},$$

donde $z_1 = H(H - 1) + B(H + M) + C(H + M)^2$, $z_2 = 2H(1 + C(H + M)) + C(H + M)^2 + B - 1$.

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(H, H + M)$, se tiene:

$$DY_\xi(H, H + M) = \begin{pmatrix} dY_\xi(H, H + M)_{11} & -H(H + M)[B + 2C(H + M)(H + A)] \\ P(H + M)(H + A) & -P(H + M)(H + A) \end{pmatrix}$$

Donde,

$$dY_\xi(H, H + M)_{11} = (2H + M)[(1 - H)(H + A) - B(H + M) - C(H + M)^2(H + A)] \\ + H(H + M)[1 - 2H - A - C(H + M)^2]$$

Por lo tanto, el

$Det DY_\xi(H, H + M) = P(H + M)(H + A)[H(H + M)[B + 2C(H + M)(H + A)] - dY_\xi(H, H + M)_{11}]$, cuyo signo depende del factor $dY_\xi(H, H + M)_{11}$.

1. Si el $Det DY_\xi(H, H + M) < 0$ implica que

$$A < \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)z_2}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - H(H + M)[2C(H + M) + 1]}$$

y la singularidad $(H, H + M)$ es un punto silla hiperbólico.

2. Si el $Det DY_\xi(H, H + M) > 0$ implica que

$$A > \frac{(2H + M)z_1 + H(H + M)z_2}{(2H + M)[(1 - H) - C(H + M)^2] - H(H + M)[2C(H + M) + 1]}$$

y la naturaleza de este punto de equilibrio depende del valor de la traza $Tr DY_\xi(H, H + M) = dY_\xi(H, H + M)_{11} - P(H + M)(H + A)$.

- ii) Si $Tr DY_\xi(H, H + M) < 0$ implica que la singularidad $(H, H + M)$ es un foco atractor.

- iii) Si $Tr DY_\xi(H, H + M) > 0$ implica que la singularidad $(H, H + M)$ es un foco repulsor.

□

Capítulo 3

Simulaciones Numéricas

En esta sección, se presentan algunas simulaciones que ilustran la cooperación entre depredadores del modelo (2.2), relacionados con el comportamiento del punto de equilibrio positivo $(H, H + M)$ el cual se encuentra acorde con los resultados teóricos previamente establecidos.

Para analizar la dinámica del modelo propuesto, se utilizó el software Matlab. Las gráficas generadas por estas simulaciones respaldan los resultados teóricos previos. Aquí se puede apreciar diferentes situaciones para el sistema cuando cambian los valores de los parámetros.

Se presenta dos casos considerando el número de puntos de equilibrio positivos en el campo vectorial. En todas las simulaciones, se puede observar que el punto de equilibrio $(1, 0)$ es un punto de silla hiperbólico y el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un punto repulsor hiperbólico.

Caso 1. Existencia de un punto de equilibrio positivo que está en la intersección de las isoclinas. En las Figuras 3.1 y 3.2, se muestran las principales dinámicas del sistema (2.2).

Caso 2. Existencia de dos punto de equilibrio positivos que está en la intersección de las isoclinas. En las Figuras 3.3 y 3.4, se muestran comportamientos dinámicos complejos del sistema (2.2).

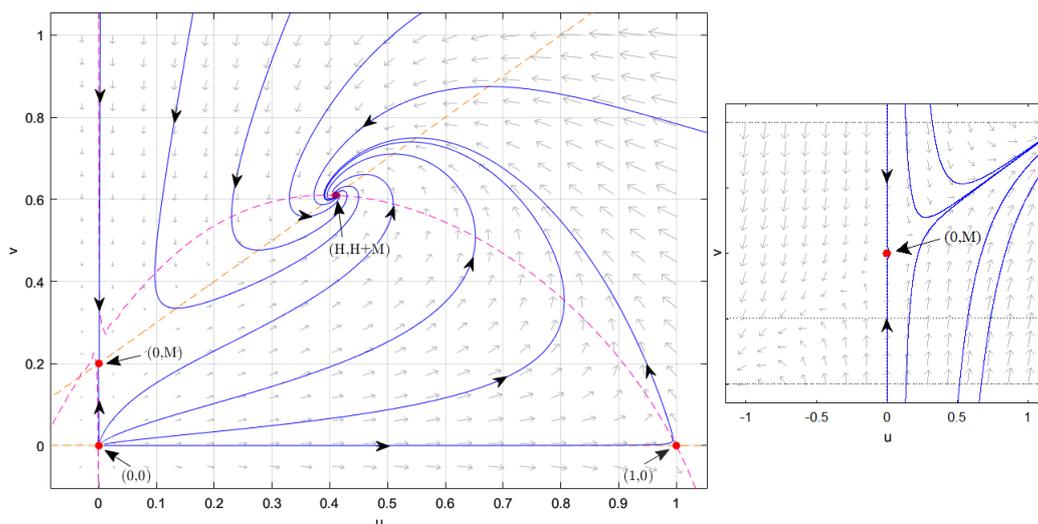


Figura 3.1: Para $A = 0.1$, $B = 0.4$, $C = 0.3$, $M = 0.2$, $P = 0.7$. El punto de equilibrio positivo $(H, H + M)$ es un nodo atractor y $(0, M)$ es un nodo atractor.

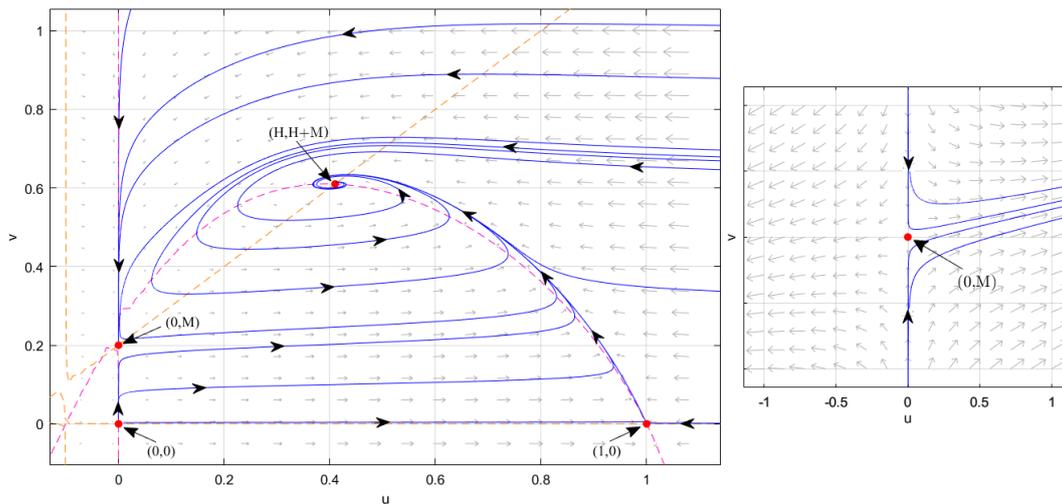


Figura 3.2: Para $A = 0.1, B = 0.4, C = 0.3, M = 0.2, P = 0.07$. El punto de equilibrio positivo $(H, H + M)$ es un foco atractor y $(0, M)$ es un nodo repulsor.

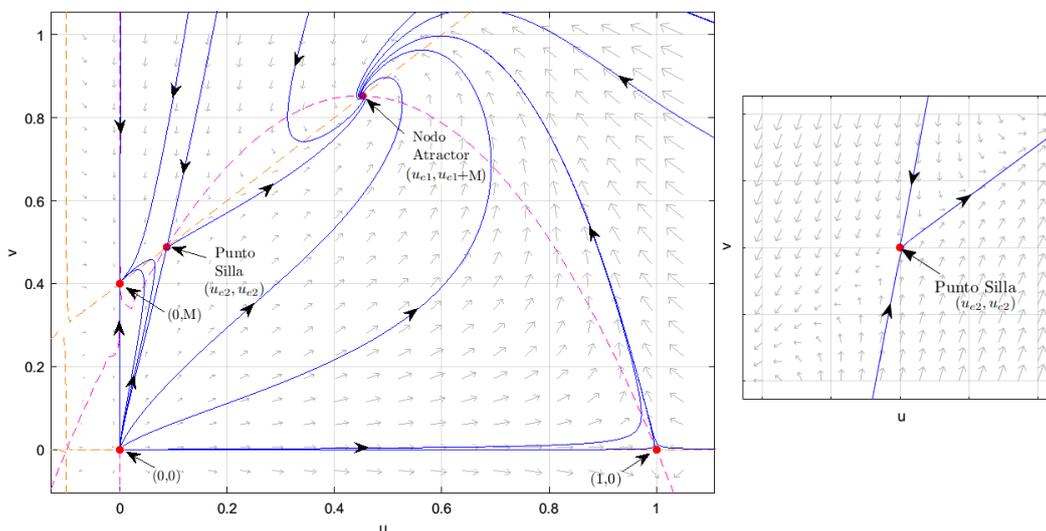


Figura 3.3: Para $A = 0.1, B = 0.35, C = 0.01, M = 0.4, P = 0.7$, existe dos puntos de equilibrio positivos, uno de ellos $(u_{e1}, u_{e1} + M)$ es un foco atractor y (u_{e2}, u_{e2}) un nodo atractor. El punto $(0, M)$ es una silla hiperbólica.

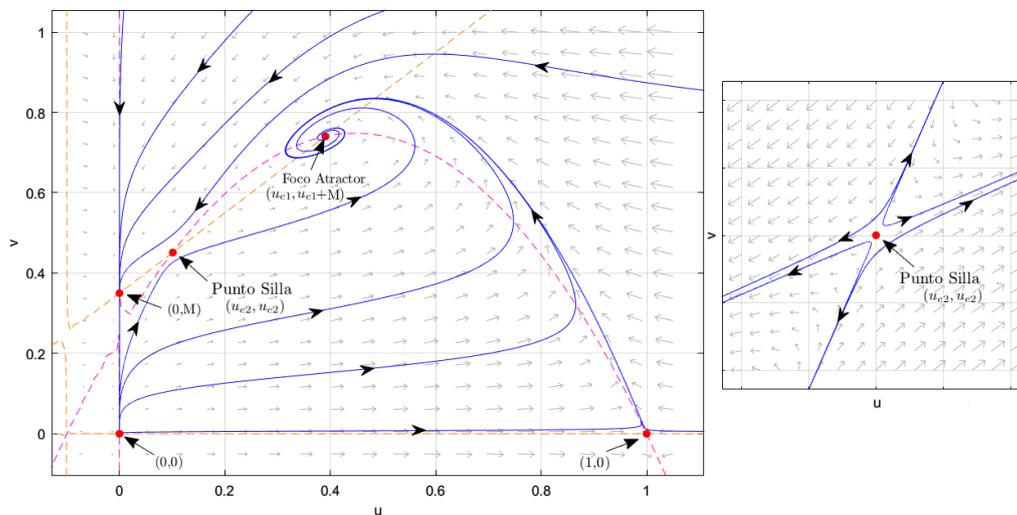


Figura 3.4: Para $A = 0.1, B = 0.4, C = 0.01, M = 0.35, P = 0.2$, existe dos puntos de equilibrio positivos, uno de ellos $(u_{e1}, u_{e1} + M)$ es un foco atractor y (u_{e2}, u_{e2}) un nodo repulsor. El punto $(0, M)$ es una silla hiperbólica.

Conclusiones

En este estudio se analizó un modelo depredador-presa tipo Leslie-Gower, descrito por un sistema bidimensional autónomo de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo no lineal y de tipo Kolmogorov, considerando la colaboración entre los depredadores generalistas incluyendo una respuesta funcional Holling tipo II [37, 44]. Mediante una reparametrización y reescalamiento temporal, se logró transformar el sistema original (2.1) en un sistema topológicamente equivalente (2.2). Esta transformación permitió reducir el número de parámetros del modelo sin alterar su comportamiento fundamental. Es importante destacar que los puntos de equilibrio se mantuvieron en el nuevo sistema, lo que garantiza la validez y consistencia de los resultados obtenidos.

En primera medida, dentro de la región positivamente invariante se estableció el número de singularidades del campo vectorial, demostrando que en el sistema puede existir hasta dos puntos de equilibrio positivos.

Como los sistemas (2.1) y (2.2) son topológicamente equivalentes, es posible afirmar que la principal característica del modelo (2.1) es que ambas especies pueden coexistir o bien, los depredadores pueden extinguirse, para los mismos valores de los parámetros, según a la relación entre sus tamaños iniciales de población y la efectividad en la cooperación cinegética de los depredadores. Asimismo, se establecen los requisitos mínimos para que el modelo de depredador-presa sea considerado creíble.

Después de un análisis, en nuestro trabajo se han identificado una serie de características que distinguen al artículo original de Leslie-Gower y lo diferencian de otros artículos relacionados con el mismo tema:

- 1) En otros estudios, se ha observado que los puntos de equilibrio $(0, 0)$ en el modelo depredador-presa pueden actuar como nodos o focos atractores, lo que indica la ausencia tanto de depredadores como de presas en el sistema, es decir, la extinción de ambas especies. Sin embargo, en nuestro caso, el punto de equilibrio $(0, 0)$ funciona como un nodo repulsor. Esto significa que las poblaciones de depredadores y presas no pueden alcanzar un estado de equilibrio estable en su ausencia, lo cual resalta la interdependencia de estas poblaciones y la necesidad de su presencia mutua para mantener un equilibrio sostenible. Esto respalda que el modelo depredador-presa es más realista. El punto de equilibrio $(1, 0)$ es una silla hiperbólica sugiriendo que el modelo depredador-presa puede mostrar comportamientos complejos y no lineales en función de las condiciones iniciales y puede ser más difícil de predecir a largo plazo por la oscilación en torno a este punto según la población de depredadores y presas.
- 2) Existe un subconjunto de valores de parámetros, hay al menos un punto de equilibrio positivo que es foco o nodo atractor (u_{e1}, u_{e1}) , lo que indica que cuando la población de presas y depredadores se encuentra en una vecindad cercana al punto de equilibrio, la dinámica del modelo los llevará de vuelta a este punto estable en lugar de alejarse de él. Esto se debe a la cooperación cinegética entre depredadores, la cual es esencial para mantener el equilibrio del ecosistema y evitar que las poblaciones se extingan o crezcan de manera descontrolada. Sin embargo, para cierto conjunto de valores de parámetros, como se demuestra en un punto de equilibrio que es nodo-repulsor (u_{e2}, u_{e2}) , puede ser el caso contrario.

En relación a la cooperación de los depredadores en la caza, es importante considerar tanto los efectos positivos como los negativos que puede tener para ellos. Un exceso de colaboración puede llevar a una disminución en la densidad de los depredadores en equilibrio a medida que aumenta la tasa de cooperación. Asimismo, es necesario tener precaución al aumentar la eficiencia de caza de los depredadores, ya que esto puede resultar en un agotamiento rápido de los recursos disponibles y una reducción en la población de presas. Estos factores podrían conducir a la extinción de ambas especies y tener un impacto significativo en el ecosistema.

Bibliografía

- [1] Real, L. A., & Brown, J. H. (Eds.). (2012). *Foundations of ecology: classic papers with commentaries*. University of Chicago Press.
- [2] González-Olivares, E., & Ramos-Jiliberto, R. (2003). Dynamic consequences of prey refuges in a simple model system: more prey, fewer predators and enhanced stability. *Ecological modelling*, 166(1-2), 135-146.
- [3] Packer, C., & Rutten, L. (1988). The evolution of cooperative hunting. *The American Naturalist*, 132(2), 159-198.
- [4] Hayward, M. W., & Kerley, G. I. (2005). Prey preferences of the lion (*Panthera leo*). *Journal of zoology*, 267(3), 309-322.
- [5] MacNulty, D. R., Tallian, A., Stahler, D. R., & Smith, D. W. (2014). Influence of group size on the success of wolves hunting bison. *PloS one*, 9(11), e112884.
- [6] MacNulty, D. R., Smith, D. W., Mech, L. D., Vucetich, J. A., & Packer, C. (2012). Nonlinear effects of group size on the success of wolves hunting elk. *Behavioral Ecology*, 23(1), 75-82.
- [7] MacNulty, D. R., Smith, D. W., Mech, L. D., & Eberly, L. E. (2009). Body size and predatory performance in wolves: is bigger better?. *Journal of Animal Ecology*, 532-539.
- [8] Pilfold, N. W., Letoluai, A., Ruppert, K., Glikman, J. A., Stacy-Dawes, J., O'Connor, D., & Owen, M. (2019). Confirmation of black leopard (*Panthera pardus pardus*) living in Laikipia County, Kenya. *African Journal of Ecology*, 57(2), 270-273.
- [9] Front Matter. (2018). *Journal of Mammalogy*, 99(3). <https://www.jstor.org/stable/27007651>
- [10] National Geographic. (s.f.). guepardo africano. Recuperado el 12 de mayo de 2023, de <https://www.nationalgeographic.es/animales/guepardo-africano>
- [11] Multipro. (2021, 28 de octubre). El linaje de los depredadores (5) La hermandad. DOCUMENTAL [Archivo de video]. Dailymotion.
- [12] Mondal, B., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2021). Complex dynamics of a generalist predator–prey model with hunting cooperation in predator. *The European Physical Journal Plus*, 137(1), 43.
- [13] Renshaw, E. (1993). *Modelling biological populations in space and time* (No. 11). Cambridge University Press.
- [14] May, R. M. (2019). *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton university press.
- [15] Sophia, R. J. J., Zhang, W., & Larriva, V. Cooperative hunting in a predator–prey system with Allee effects in the prey.
- [16] González-Olivares, E., & Rojas-Palma, A. (2022). Colaboración entre los depredadores y efecto Allee débil en las presas. Consecuencias en la dinámica de un modelo de depredación. *Selecciones Matemáticas*, 9(01), 173-183.
- [17] Hanski, I., Hansson, L., & Henttonen, H. (1991). Specialist predators, generalist predators, and the microtine rodent cycle. *The Journal of Animal Ecology*, 353-367.
- [18] Creel, S., & Creel, N. M. (1995). Communal hunting and pack size in African wild dogs, *Lycaon pictus*. *Animal Behaviour*, 50(5), 1325-1339.

- [19] Heinsohn, R., & Packer, C. (1995). Complex cooperative strategies in group-territorial African lions. *Science*, 269(5228), 1260-1262.
- [20] Stander, P. E. (1992). Cooperative hunting in lions: the role of the individual. *Behavioral ecology and sociobiology*, 29, 445-454.
- [21] Dinets, V. (2015). Apparent coordination and collaboration in cooperatively hunting crocodilians. *Ethology Ecology & Evolution*, 27(2), 244-250.
- [22] Uetz, G. W. (1992). Foraging strategies of spiders. *Trends in Ecology & Evolution*, 7(5), 155-159.
- [23] Bednarz, J. C. (1988). Cooperative hunting Harris' hawks (*Parabuteo unicinctus*). *Science*, 239(4847), 1525-1527.
- [24] Dejean, A., Leroy, C., Corbara, B., Roux, O., Céréghino, R., Orivel, J., & Boulay, R. (2010). Arboreal ants use the "Velcro®" principle" to capture very large prey. *PLoS One*, 5(6), e11331.
- [25] Moffett, M. W. (1988). Foraging dynamics in the group-hunting myrmicine ant, *Pheidologeton diversus*. *Journal of Insect Behavior*, 1, 309-331.
- [26] Hector, D. P. (1986). Cooperative hunting and its relationship to foraging success and prey size in an avian predator. *Ethology*, 73(3), 247-257.
- [27] Alves, M. T., & Hilker, F. M. (2017). Hunting cooperation and Allee effects in predators. *Journal of theoretical biology*, 419, 13-22.
- [28] Ladino Martínez, L. M. (2015). Modelos de Dinámicas Migratorias con factores de reclutamiento, depredación y captura.
- [29] May, R. M. (1977). Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. *Nature*, 269(5628), 471-477.
- [30] Ludwig, D., Jones, D. D., & Holling, C. S. (1978). "Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest". *Journal of Animal Ecology*, 47(1), 315-332.
- [31] P. Blanchard, R.L. Devaney, and G.R. Hall, *Differential Equations*, Boston University International Thomson Editores, (1998).
- [32] T, Malthus, *An essay on the Principle of population*. published anonymously, (1798).
- [33] Reyes Bahamón, F. (2017). Sobre la dinámica de algunos modelos depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona y efecto Allee en las presas. *Departamento de Matemáticas y Estadística*.
- [34] P. Verhulst, Notice sur la loi que la population pouruit dans son accroissement, *Math. Phys*, 10:113-121, (1838).
- [35] R.A. Becerra-Klix, Modelos de depredacion del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea y efecto Allee multiple en las presas, Tesis presentada para optar el título de Magister en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (2013).
- [36] Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *Canadian Entomologist*, 91(7), 385-398.
- [37] Goh, B. S. (1980). Management and analysis of biological populations. *Elsevier Scientific Publishing Company*.
- [38] Arancibia-Ibarra, C. & González-Olivares, E. (2011). A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey. En *BIOMAT 2010: International Symposium on Mathematical and Computational Biology* (pp. 146-162).
- [39] González-Olivares, E., Mena-Lorca, J., Rojas-Palma, A. & Flores, J. D. (2011). Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1), 366-381.
- [40] Leslie, P. H. & Gower, J. C. (1960). The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species. *Biometrika*, 47(219-234).

- [41] Rojas Palma, A. M. Control óptimo aplicado a modelos continuos para el manejo de recursos renovables.
- [42] Wang, Q., Dai, B., & Chen, Y. (2009). Multiple periodic solutions of an impulsive predator-prey model with Holling-type IV functional response. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(9-10), 1829-1836.
- [43] Huang¹, J. C., & Xiao², D. M. (2004). Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20(1), 167-178.
- [44] Freedman, H. I. (1980). Deterministic mathematical model in population ecology. *Marcel Dekker*.
- [45] Leslie, P. H. (1999). Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika*, 35(213-245).
- [46] Jeschke, J. M., & Kopp, M. (2018). Predator functional responses: discriminating between handling and digesting prey. *Ecology Letters*, 21(8), 1199-1211.
- [47] Liu, X., Chen, X., Gao, Y., Xie, X., & Li, J. (2020). Effects of prey density fluctuation on predator-prey interaction in an aquatic ecosystem. *Theoretical Ecology*, 13(3), 397-408.
- [48] Real, L. A. (1977). The kinetics of functional response. *American Naturalist*, 111(978), 289-300.
- [49] de Miguel, A. (2014). Modelo de Lotka-Volterra.
- [50] González Olivares, Rojas Palma. (2022). Influence of the Allee effect on prey and collaboration between predators in a Leslie-Gower-type predation model. *Selecciones Matemáticas*, 7(2), 302-313.
- [51] González Olivares. (2022). Bifurcations in a Leslie-Gower type predator-prey model with a rational non-monotonic functional response. *Mathematical Modelling and Analysis*, 27(23), 510-532.
- [52] González Olivares & Rojas Palma. (2021). A modified Leslie-Gower-type predation model considering collaboration between predators. *Selecciones Matemáticas*, 8(2), 379-385.
- [53] Ruiz, P. C. T., Berrío, L. M. G., & González, E. (2019). Una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y alimento alternativo para los depredadores. *Selecciones Matemáticas*, 6(2), 204-216.
- [54] Tintinago-Ruiz, P. C., Gallego-Berrío, L. M., & González-Olivares, E. Modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional no-monotónica racional. *ACTA DE RESÚMENES*, 62.
- [55] González Olivares, E., Cabrera-Villegas, J., Córdova-Lepe, F. & Rojas Palma. (2019). A competition among predators and Allee effect on prey: their influence on a Gause-type predation model. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, Article ID 3967408, 19 pages.
- [56] Ye, P. & Wu, D. (2020). Impacts of strong Allee effect and hunting cooperation for a Leslie-Gower predator-prey system. *Chinese Journal of Physics*, 68, 49-64.
- [57] Chicone, C. (2008). Ordinary differential equations with applications. *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York.
- [58] Valenzuela-Figueroa, S., González-Olivares, E. & Rojas-Palma, A. (2022). Influence of the weak Allee effect on prey in a Leslie-Gower type predation model with sigmoid functional response. *Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones*, 29(1), 105-138.
- [59] Birkhoff, G., & Rota, G. S. (1989). Ordinary Differential Equations (4th ed.). New York: John Wiley & Sons.
- [60] Ma, Z., Li, W., Zhao, Y., Wang, W., Zhang, H. & Li, Z. (2009). Effects of prey refuges on a predator-prey model with a class of functional responses: the role of refuges. *Mathematical Biosciences*, 218(2), 73-79.

- [61] González-Olivares, E., González-Yañez, B., Lorca, J., Rojas-Palma, A. & Flores, J. (2011). Consequences of double Allee effect on the number of limit cycles in a predator-prey model. *Computers Mathematics with Applications*, 62(9), 3449-3463.
- [62] Aguirre, P., González-Olivares, E. & Sáez, E. (2009). Three limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 69(5), 1244-1262.
- [63] Aguirre, P., González-Olivares, E. & Sáez, E. (2009). Two limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(1401-1416).
- [64] Martin, A. & Ruan, S. (2001). Predator-prey models with delay and prey harvesting. *Journal of Mathematical Biology*, 43, 247-267.
- [65] Xiao, Y. & Chen, L. (2022). A ratio-dependent predator-prey model with disease in the prey. *Applied Mathematics and Computation*, 131(2-3), 397-414.
- [66] Souna, F., Lakmeche, A. & Djilali, S. (2020). Spatiotemporal patterns in a diffusive predator-prey model with protection zone and predator harvesting. *Chaos, Solitons and Fractals*, 140, 110180.
- [67] Gonzalez-Olivares, E. & Rojas-Palma, A. (2020). Global stability in a modified Leslie-Gower type predation model assuming mutual interference among generalist predators. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17(6), 7708-7731.