Neiva, 30 de enero de 2020

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Juan Davis Parra Castrillón, con C.C. No. 1.075.280.111,

Rafael Quintero Leal, con C.C. No. 1.075.233.119,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o Johnny Fernando Alvis Puentes

titulado Secuencia didáctica para la enseñanza de circunferencia en el grado décimo, basada en el modelo de Van Hiel; presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

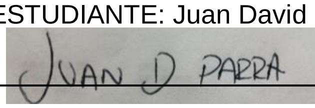
- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

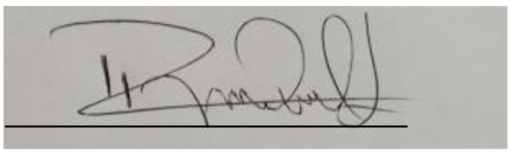
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Juan David Parra Castrillón

Firma: ______________________________


EL AUTOR/ESTUDIANTE: Rafael Quintero Leal

Firma: ______________________________


TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS UN CONJUNTO OLVIDADO

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Parra Castrillón	Juan David
Quintero Leal	Rafael

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en matemáticas.

FACULTAD: Educación.

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en matemáticas.

CIUDAD: **Neiva - Huila** **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2020 **NÚMERO DE PÁGINAS:100**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas_x_ Fotografías_x_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Adobe Acrobat Reader DC

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Secuencia	sequence	6.	Fases	Phases
2.	Circunferencia	circumference	7.		
3.	Exploratoria	Exploratory	8.		
4.	Validar	Validate	9.		
5.	Niveles	levels	10.		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El trabajo de investigación tuvo por finalidad diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia, basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele con apoyo del software de GeoGebra. La elección del modelo como marco teórico permitió proponer niveles de desarrollo del pensamiento geométrico para la adquisición de conocimientos y habilidades en relación a la circunferencia así como, identificar el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes; y además servirá para señalar las fases de aprendizaje que se deben seguir para promover el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior. Además, las propiedades de recursividad y de secuencialidad que son propias de estas fases garantizan el desarrollo de las actividades, las cuales permitirán alcanzar mayores grados de adquisición en los distintos niveles de razonamiento. Con este trabajo pretendemos que los estudiantes del grado décimo de secundaria superen el nivel 2, de análisis, de acuerdo al modelo de Van Hiele. La metodología que usamos para este trabajo está basada en describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento y describe una forma de evaluar las respuestas de los alumnos. A los estudiantes se les aplico una prueba de entrada para identificar el nivel de razonamiento en el que se encontraban respecto al objeto matemático circunferencia. Luego se diseñaron varias actividades diseñadas según las fases de aprendizaje de Van Hiele con el objetivo de promover el desarrollo del pensamiento geométrico respecto a la circunferencia y ayudarlos a avanzar a un nivel de razonamiento superior.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

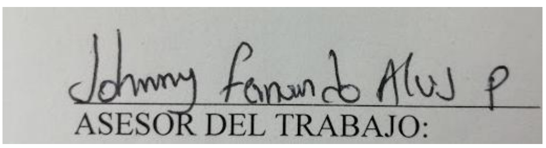
The purpose of the research work was to design a didactic proposal for the teaching of the circumference, based on the learning phases of the Van Hiele model with the support of GeoGebra software. The choice of the model as a theoretical framework allowed us to propose levels of development of geometric thinking for the acquisition of knowledge and skills in relation to the circumference as well as to identify the level of reasoning in which the students are; and it will also serve to indicate the phases of learning that must be followed to promote the promotion of students from a level of reasoning to the immediate superior. In addition, the recursion and sequential properties that are characteristic of these phases guarantee the development of the activities, which will allow to achieve higher levels of acquisition at different levels of reasoning. With this work we intend that the students of the tenth grade of high school exceed the level 2, of analysis, according to the Van Hiele model. The methodology we use for this work is based on describing the process of acquiring a new level of reasoning and describes a way of assessing student responses. To the students an entrance test was applied to identify the level of reasoning in which they were with respect to the mathematical object circumference. Then, several activities designed according to the learning phases of Van Hiele were designed with the aim of promoting the development of geometric thinking with respect to the circumference and helping them to advance to a higher level of reasoning.

APROBACION DE LA TESIS

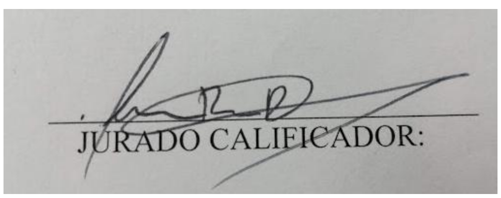
Nombre Presidente Jurado: Julio Cesar Duarte Vidal.

Firma:

Nombre Jurado: Johnny Fernando Alvis P

Firma: 

Nombre Jurado: Francisco Javier Reyes

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Secuencia didáctica para la enseñanza de la Circunferencia en el grado Décimo, basada en el modelo de Van Hiele

Juan David Parra Castrillón
Rafael Quintero Leal

Neiva, Huila
2020

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Secuencia didáctica para la enseñanza de la Circunferencia en el grado Décimo, basada en el modelo de Van Hiele

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Juan David Parra Castrillón
20121110891
Rafael Quintero Leal
20121108904

Asesor:
Johnny Fernando Alvis

Neiva, Huila
2020

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva,24 de Enero de 2020.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Formulación y Descripción del Problema

1. Antecedentes

Uno de los grandes desafíos y retos de la labor como docentes en la actualidad, es la incorporación de estrategias y nuevas ideas para la enseñanza de los conocimientos a desarrollar dentro del aula de clases, en especial el área de geometría, en donde el estudiante debe hacer uso de diferentes representaciones para comprender de manera amplia el significado de un concepto matemático.

El propósito de los siguientes antecedentes, es presentar algunas estrategias de enseñanza realizadas por investigadores que pueden ser base para el desarrollo de nuestro objetivo planteado. Dividiremos estos antecedentes en, estrategias para la enseñanza de la geometría y estrategias para la enseñanza de la circunferencia.

1.1. Estrategia para la enseñanza de la geometría

Se plantea una síntesis de diferentes autores, que plasman diferentes estrategias para la enseñanza de la geometría, entre ellas encontramos el planteamiento del uso de la tecnología en el proceso de enseñanza, donde se tienen en cuenta primero las dificultades que presentan y la necesidad de un cambio, así lo expresa Sordo(2005) quien hace un análisis de la necesidad de enseñar matemáticas y las dificultades que esto conlleva. También menciona como utilizar las TIC, mediante simuladores juegos y demás, pero resulta que el uso de la tecnología se orienta para que los estudiantes adquieran habilidades en torno a la observación, la exploración, la intuición matemática y la comprobación de hipótesis.Verificar que las actividades tradicionales tales como la generalización y la abstracción no se vean perjudicadas. Es necesario un equilibrio entre las matemáticas formales y las matemáticas experimentales.

Entre las dificultades que plantea el autor en este trabajo es la falta de desarrollo de estrategias de tipo personal para la resolución de problemas. Estos inconvenientes se presentan según el autor porque al alumno se le transmite una concepción cerrada de esta rama de la Matemática, el estudiante presenta dificultades al no visualizar los conceptos hablados en clase y haciendo uso de la memoria para asociarlos. En el trabajo en clase hay una carencia de conocimientos de otras geometrías como la proyectiva y la topológica y por tanto una falta de construcción del espacio previa a la sistematización geométrica. Esto provoca que el alumno muestre una gran inseguridad cuando se les manda hacer algún tipo de clasificación con las formas geométricas.Resalta que en la enseñanza de la geometría en Primaria hay un exceso de aritmetización, mecanización de ejercicios. Este fenómeno se ha hecho crónico y por tanto difícil de erradicar, el alumno lleva este problema hasta la universidad donde se le dificulta el análisis y el análisis inductivo

Es por esto que Arnal(2013) mediante la construcción de una estrategia didáctica con cinco actividades, haciendo uso de la tecnología identifica dificultades que el estudiante presenta a la hora del aprendizaje pero mediante el manejo de programas tecnológicos y el gusto hacia la utilización de ellos pueden usarse a favor para hacer llamativas las matemáticas, como también que el uso de la tecnología puede proporcionar ayuda para ser más eficientes y lograr mayor precisión al resolver un problema. Sin embargo, tiene en cuenta que se pueden cometer errores en el uso y aplicación de estas herramientas, por lo que es importante crear mecanismos para verificar los resultados, ya sea con el uso de la tecnología o por otros métodos.En las actividades se trabajan aspectos como : la enseñanza y aprendizaje de la geometría,la presencia de entornos tecnológicos en el aula y la problemática educativa de los estudiantes de situación de riesgo.

López (2012), plantea como objetivo la realización un trabajo que permitan estudiar la evolución de los conocimientos en geometría a lo largo de las etapas educativas de Enseñanza Primaria, Secundaria, Bachillerato y Universidad. El primer trabajo de campo presenta la determinación de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de las actividades de geometría propuestas por libros de texto de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Así busca mostrar una radiografía objetiva de los niveles de razonamiento de van Hiele que el sistema educativo español propone para alcanzar por los alumnos.

Además,menciona la comparación con los niveles de razonamiento medidos en alumnos, que permite evaluar el grado en que se han conseguido los objetivos en el aprendizaje de la geometría. Realiza la medición de los niveles de razonamiento en alumnos de las etapas: Educación Primaria, Secundaria, Bachillerato y Universitaria, aplicando 1120 cuestionarios a 934 alumnos de las citadas etapas. Aplicando el cuestionario de Usiskin en cuatro centros de Enseñanza Media en Madrid de titularidad pública, concertada y privada, así como a ocho grupos de las facultades de Educación de las UAM y UCM.

Analiza los resultados de la medida del nivel de razonamiento de van Hiele obtenido al aplicar el cuestionario de Usiskin a los alumnos de Educación Primaria, Secundaria, Bachillerato y Enseñanza Universitaria. Contrastando los niveles de razonamiento medidos con los que obtuvieron al analizar los libros de texto de geometría, para estimar la eficacia del sistema educativo en el aprendizaje de la geometría. Se analizan sus implicaciones en la Enseñanza de la Geometría.

1.2. Estrategia para la enseñanza de la Circunferencia

Según la búsqueda realizada se encontró que varios autores han trabajado entorno a las estrategias de enseñanza de la circunferencia. Alguno de ellos, se destacan por la utilización de programas como Cabrí, con la cual se busca facilitar la construcción de las diferentes representaciones gráficas permitiendo tener una visualización de ella un poco mas clara.

García y Arriero (2000) plantean diferentes actividades para el estudio de las secciones cónicas mediante el uso de software Cabri. En ese sentido por el dinamismo del programa se pueden dibujar las figuras de una manera atractiva y sencilla. La utilización de la tecnología en el dinamismo de el mundo contemporáneo hace necesario el uso de ella en la enseñanza, de ahí que Padron y Gómez (2011), diseñan una estrategia para el aprendizaje de las secciones cónicas mediante la utilización de una plataforma virtual, sabiendo que en la era de la tecnología es necesario estar a la vanguardia manteniendo el interés y la creatividad de los estudiantes. En esta estrategia hacen un análisis de diferentes secciones cónicas en donde se evidencia las dificultades y las facilidades que presentaban los estudiantes.
El aprendizaje de la geometría como se ha mencionado se facilita cuando se es palpable la teoría, esto puede hacerse mediante el uso de la tecnología pero también se puede realizar usando recursos que estén a la mano como lo es el papel.En ese sentido Santana y Jaramillo (2011) plantean mediante doblado de papel y la utilización del modelo Van Hiele hacer construcciones tan precisas como las hechas con regla y compás; por eso, usando los axiomas propuestos por Humiaki Huzita y Koshiro Hatori, para fundamentar esta geometría del doblado de papel, alterna a la geometría euclidiana. En el artículo se formalizan algunos conceptos necesarios en las construcciones geométricas mediante el doblado de papel y, también hace una propuesta alternativa para construir y deducir conceptos correspondientes a las secciones cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Como producto de la revisión de las investigaciones, mencionadas anteriormente, el docente es quien debe ser consciente de las etapas de aprendizaje de sus estudiantes e intuitivamente generar conocimiento, para ello, necesita planear, dirigir y evaluar los métodos de los cuales hace uso en el aula de clase, de ser necesario, cambiar su metodología para obtener resultados exitosos en la enseñanza.

2. Formulación y Descripción del Problema

Generalmente, la presentación de los diversos contenidos en los colegios y en los libros se realiza bajo la siguiente forma, tal como lo anotan Jaime (1993) Se enuncia una definición matemática del concepto en cuestión y se hace una descripción de sus características. Finalmente, se plantea ejercicios de memorización, de resolución algorítmica y de reconocimiento de figuras concretas.

Es por eso que en la enseñanza de las matemáticas, se hace mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica, teniendo en cuenta que no se les ha dado una introducción adecuada ni ninguna situación de aprendizaje o de visualización, si no que solo reciben el concepto y la resolución de los ejercicios; los estudiantes son capaces de resolver mecánicamente las operaciones matemáticas, pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo les ha enseñado a actuar de forma mecánica y repetitiva.

Según Kamii (1994) "La resolución de problemas debería darse al mismo tiempo que el aprendizaje de las operaciones en vez de después, como aplicaciones de éstas";(P.326) por lo tanto, el aprendizaje simultáneo de ambos facilitaría la comprensión y asimilación de las operaciones aritméticas.La metodología empleada en la enseñanza de la resolución de problemas en matemáticas, es un elemento clave para el logro satisfactorio de los contenidos en esta área (Polya,1965).

La importancia de la geometría no se ve reflejado en la enseñanza de esta disciplina pues se ve afectada por una serie de problemas. Según lo afirman Báez, Iglesias y Ortiz (2007), la mayoría de las instituciones educativas desarrollan la enseñanza de la geometría de una manera tradicional caracterizada, principalmente, por la clase magistral, por el trabajo en grupos y, sobre todo, por el uso del discurso del profesor como principal medio didáctico. Sea cual sea la modalidad educativa que se aplica, en la mayoría de los casos se tiene un factor en común: se brinda una enseñanza basada en el lápiz y papel, o de pizarra y tiza, que no ofrece, al estudiante, mayores posibilidades de desarrollo.

También la enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar y/o crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (Goncalves, 2006, p. 96)

Por otro lado, el docente debe abrir paso a la interacción en la enseñanza, a partir de hacer, examinar, predecir, evaluar y generalizar. En este sentido Barrios, Muñoz y Zetién (2008) menciona que si el docente ofrece a los estudiantes una visión dinámica de la geometría, los estudiantes estarán en la capacidad de desarrollar un pensamiento deductivo.

Pero esto no se ve reflejado en las aulas, por el contrario, se sigue encaminando la enseñanza de manera tradicional basada, por un lado, en la presentación de los contenidos como un producto final y, por otro lado, se presenta un sinnúmero de ejercicios cuyas soluciones se basan en algoritmos preestablecidos

Particularmente la geometría analítica es innegablemente una herramienta fundamental de la matemática y a la vez de la educación matemática, porque de un lado permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del álgebra, e inversamente,y por otro lado facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones. Según MEN (2004):

> La enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones, buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos.(P. 2)

Es así que los profesores en las clases de Matemáticas se inclinan hacia aquellos temas considerados más asequibles y también más importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, por lo que temas de geometría se ven relegados al ser considerados poco importantes desconociendo que esta disciplina da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar a los estudiantes a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y convertirse en mejores resolutores de problemas.

En el desarrollo del pensamiento geométrico toma particular importancia el estudio de la circunferencia como lugar geométrico, su representación, relaciones, propiedades, permitiendo afianzar en los educandos dichos conceptos para potenciar las relaciones espaciales.

Lo expuesto, evidencia la problemática que se presenta en el aprendizaje de la geometría, y en este caso particular de las circunferencia, lo que conlleva en esta investigación profundizar en dichos elementos. En ese sentido se busca implementar en el aula una variedad de estrategias metodológicas de manera que el profesor pueda pueda cultivar en los estudiantes la habilidad para investigar, comprender y construir su propio conocimiento y transferirlo a situaciones nuevas. particularmente para la circunferencia

De acuerdo con Barrantes y Blanco (2004), la forma de enseñar geometría es algo que se ha ido comunicando a través de distintas generaciones y parece una larga cadena que no se ha podido romper. Las experiencias pasadas de los docentes tienen mucho peso en su forma de planear las clases de geometría, ya que, en su proceso de formación, carecen de un punto de referencia o comparación que les permita explorar nuevas formas de enseñanza de la geometría a partir de lo ya conocido.Para Goncalves (2006), los docentes deben buscar nuevas estrategias didácticas que les permitan hacer que los estudiantes descubran con mayor facilidad que la geometría es una herramienta para la vida.

Es por ello que nace la necesidad de abordar la siguiente pregunta, la cual guiara nuestra investigación ¿ Que herramientas permitiran el mejoramiento de la enseñanza de la circunferencia a nivel de secundaria ?

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

- Validar por juicio de expertos una secuencia didáctica diseñada bajo el modelo Van Hiele dirigida a la enseñanza de la circunferencia en grado décimo

3.2. Objetivos Específicos

- Caracterizar el grado de adquisición inicial que poseen los estudiantes de grado décimo de educación básica secundaria para el aprendizaje de la circunferencia.
- Realizar actividades que de forma secuencializada y organizadas le permitan al estudiante adquirir nuevas estructuras mentales.
- Diseñar una secuencia didáctica, según el modelo de Van Hiele, para promover que los estudiantes de grado décimo comprendan y analicen el concepto de circunferencia

4. Justificación

En la formación como futuros maestros es obligación generar auténticos procesos de aprendizaje a través de la apropiación y aplicación de los conocimientos adquiridos, pues estos se impartirán a las nuevas generaciones y es necesario investigar nuevos métodos de enseñanza convencionales o poco convencionales, cuyas herramientas sirvan de mediadoras en el proceso y faciliten no sólo que el estudiante se apropie de los conceptos sino que sea capaz de aplicarlos en un contexto real.

Dado que el transcurso curso del bachillerato el estudiante desarrolla la capacidad de análisis, teniendo elementos conceptuales comunes pueda diseñar diferentes soluciones a situaciones problema en donde integra la mayoría de los pensamientos de matemáticas: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.

Hoy la geometría se constituye en el lenguaje a través del cual entendemos nuestra realidad. La importancia de esta rama de las Matemáticas se ha reconocido por los beneficios cognitivos que conlleva su estudio. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MENC) (2004) afirma:

> La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. (p. 1)

Es por esto que se busca que la geometría despierte en el estudiante diversas habilidades que le sirvan para comprender otras áreas de las Matemáticas y lo prepare mejor para entender el mundo que lo rodea; además, son muchas las aplicaciones de las Matemáticas que poseen un componente geométrico. Por esto, para los docentes de Matemáticas es necesario explorar diversas formas de obtener provecho de la riqueza que posee la geometría y, por lo tanto, deben tratar de romper los esquemas a los que se habituaron, para dedicarse a la investigación, exploración y aplicación de nuevas actividades dentro y fuera del aula.

El estudio de la geometría presenta algunas dificultades en su desarrollo formal. Básicamente estas se dan a partir de las concepciones y creencias del estudiantado y del profesorado, manifiestas en el salón de clase. De acuerdo con Barrantes y Blanco (2004), el personal docente, debido a las concepciones y experiencias adquiridas en su formación, planea las lecciones y utiliza los mismos recursos que experimentó, en su momento, como estudiante. Muchas veces su vivencia personal le impide llevar a cabo una experiencia de aprendizaje que guíe al estudiante al descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento.

> (...) nuestro estudio nos muestra, a pesar de los esfuerzos de los investigadores por presentar nuevos métodos, recursos o materiales sobre enseñanza de la geometría, que muchos estudiantes siguen llegando a las facultades con las mismas experiencias, falta de conocimientos y concepciones sobre la geometría y su enseñanza que hace unos años, lo que indica que se sigue enseñando igual que antes de tales reformas. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 249)

Por esto, resulta de vital importancia darle, nuevamente, a la geometría un lugar preponderante en la clase de Matemáticas. De esta manera, las nuevas generaciones tendrían las vivencias que no han gozado otros individuos anteriormente, incluyendo sus propios profesores, y esto se traduciría en una mejor experiencia de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, que provoque un desarrollo a nivel social y cultural de la geometría como "tema importante" en el área de la educación matemática.

La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar y/o [sic] crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (Goncalves, 2006, p. 96)

Consistente con lo anterior, el eje de éste trabajo, la circunferencia presenta serios inconvenientes en la planificación curricular, ya sea como contenido de la asignatura de Matemáticas o de Geometría. Los Estándares Básicos de Matemáticas no hacen referencia al estudio de sus propiedades y los libros de texto en su gran mayoría limitan a una unidad temática muy reducida, otros textos asumen sus propiedades desde la Geometría Analítica dentro de las secciones cónicas. La utilización de herramientas didácticas y Modelos de enseñanza innovadores y creativos en el aula, son elementos de estimulación de actitudes y competencias tanto en docentes como en estudiantes, en éste campo existen amplias investigaciones de la incidencia del Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de la Geometría, estos niveles proponen describir el dominio y comprensión de nociones espaciales (Godino y Ruíz 2004).

Es por esto que los docentes deben buscar nuevas estrategias didácticas que les permitan hacer que los estudiantes descubran con mayor facilidad que la geometría es una herramienta para la vida, además, la importancia de conocer, aplicar y especializarse en el Modelo de Van Hiele, de desarrollo de pensamiento geométrico en el proceso de enseñanza de la geometría y en los niveles propuestos por este modelo propone para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo, se presentan los conceptos de mayor relevancia que sustentan el trabajo desarrollado, los cuales son: modelo Van Hile, Lineamientos en Matemáticas Ministerio de Educación Nacional

1. Modelo Van Hiele

De acuerdo con Crowley (1987) y Jaime (1993), el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele tiene su origen en los trabajos doctorales presentados, en la Universidad de Utrech, por dos profesores holandeses de Matemáticas de enseñanza secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiel

A menudo es común escuchar entre los docentes de Matemáticas las dificultades que presentan los estudiantes frente al razonamiento de problemas de orden geométrico, en muchos casos pueden resolver problemas concretos con creatividad y rapidez, sin embargo cuando es necesario avanzar a sistemas más formales de abstracción, conjeturas o rigor presentan serias dificultades y en caso formal de las demostraciones, estas se memorizan perdiendo su carácter riguroso y deductivo.

Este problema, en geometría no es nuevo. A mediados de 1950 la pareja de profesores Van Hiele iniciaron trabajos con grupos pilotos sustentando lo que entonces era una teoría: El Modelo de Razonamiento de Van Hiele.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior. El modelo de Van Hiele también indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro.

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El Modelo consta de dos componentes: una es descriptiva, identificando tipos de razonamiento denominados "Niveles de Razonamiento", que van progresando desde la visualización hasta el rigor. El otro componente da pautas para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento, se conocen como "fases de aprendizaje". A raíz de sus planteamientos, no sólo los esposos Van Hiele sino múltiples matemáticos y sicólogos han aportado elementos para ir mejorando el Modelo, particularmente (Gutiérrez, J. 1989) y (Senk, 1985), enlutándolo básicamente a la Geometría, es decir, un modelo que se pensó para las matemáticas en su conjunto, se particularizo a la Geometría.

1.1. Niveles de Razonamiento

En la teoría de Van Hiele se afirma que para conocer en qué nivel de razonamiento se encuentra un alumno es necesario atender tanto a sus estrategias de resolución de problemas como a su forma de expresarse y al significado que le da al vocabulario que escucha, lee o utiliza para expresar sus conocimientos. Desde este punto de vista resulta relevante detenerse en la comprensión y uso que los alumnos muestran de lo que para ellos significan los términos "definir" y "demostrar". Las concepciones de los alumnos sobre el significado de estos términos son dos valiosas pistas, para que el docente comprenda con qué nivel de razonamiento matemático los alumnos están operando. (Bressan, 2000, 2006. p.76)

NIVEL 1. RECONOCIMIENTO: El estudiante reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

- Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen.

- No suelen reconocer explícitamente las partes de las que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Gutiérrez (2000).
- Reconocen las figuras solamente por su aspecto, comparándolos con un prototipo conocido. Las propiedades de una figura no se perciben. En este nivel, toman decisiones basadas en la percepción, no el razonamiento.

NIVEL 2. ANALISIS: El estudiante puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.

Se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas, pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.

- Pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- No relacionan unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. Gutiérrez (2000).
- Pueden ver figuras como las colecciones de propiedades. Pueden reconocer y nombrar las propiedades de figuras geométricas, pero no ven las relaciones entre estas propiedades.

NIVEL 3. CLASIFICACION: El estudiante determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las Matemáticas. El individuo ubicado en el nivel 2 no era capaz de entender que unas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora puede entender, por ejemplo, que en un cuadrilátero la congruencia entre ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados opuestos.

Comienza el razonamiento formal, reconocen que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades.

- Describen las figuras de manera formal, dan definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y sus requisitos
- Aplican pasos individuales para el razonamiento lógico-formal, pero sin concatenarlos, no se entiende la estructura de la demostración.
- No se entiende la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 4. (DEDUCCION FORMAL). En este nivel ya el estudiante realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las Matemáticas. El individuo puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba, sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

Realizan razonamientos lógicos formales.

- Las demostraciones adquiere sentido.
- Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
- Entienden la equivalencia de definiciones del mismo concepto conceptos.
- Se tiene una visión globalizadora del área de estudio.

1.2. Característica de los niveles

En un primer lugar hablamos de "secuenciación", algo que, visto o explicado hasta ahora, no necesita más explicación, de "jerarquización" esto es, los niveles tienen un orden que no se puede alterar, lo cual es obvio visto también lo anterior y los niveles "son recursivos". Esta última idea es importante y conviene explicarla y concretarla un poco más. Esta característica nos indica que "lo que es implícito en un nivel se convierte en explícito en el siguiente nivel".

La segunda característica a señalar es "el lenguaje" específico para cada nivel. La progresión en y entre los niveles va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje. No sé trata sólo de adquirir conocimientos matemáticos sino también mejoras y ampliar las capacidades referidas al lenguaje necesario en cada nivel. Como más tarde señalaremos en este modelo es muy importante el test-entrevista, es decir, que se da mucha importancia a que expliquen lo que saben y cómo lo saben no sólo que lo escriban en respuesta a un problema o un test de ítems más o menos abiertos.

La tercera idea es si el aprendizaje y, por tanto, el paso de nivel se hace de una manera "continua o discreta". La idea, eterno dilema, es si el salto es repentino o se hace de forma gradual. Nos parece lógico pensar que se hace de forma continua mediante pequeños saltos que conexos que nos darán el paso final de nivel. Esto está más de acuerdo con las teorías cognitivas modernas del aprendizaje que señalan cómo creamos esquemas significativos de pensamiento, mejores pero cercanos a los que teníamos, que se interconectan entre sí y que, a su vez, podemos reemplazar por otros nuevas más sencillos y prácticos que los anteriores. Para construir o mejorar estos esquemas tiene mucha importancia la interacción alumno/a- profesor/a. Lo señalado en el párrafo anterior (test-entrevista) sería ya el punto de partida para conocer estos esquemas de pensamiento.

1.3. Fases de Aprendizaje

El aprendizaje es un acumulado como resultado de una serie de experiencias adecuadas, existe entonces la posibilidad de alcanzar los diferentes Niveles de razonamiento, incluyendo los superiores, inclusive fuera de la enseñanza escolar si se vivencian las experiencias pertinentes (Van Hiele). En la escuela, el docente debe diseñar e implementar actividades que potencien el razonamiento de tal manera que la experiencia permita el salto cognitivo. Las Fases de Aprendizaje son etapas graduales y organizadas que deben permitir el avance al interior de cada Nivel, a través de experiencias significativas lo llevan al Nivel Superior de razonamiento. Se parte de conceptos previos y luego, mediante las experiencias se aplican, combinan, relacionan, construyendo el razonamiento

FASE I. (INFORMACION) En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este. Fouz y De Donosti (2005) citan a Azubel (1978) para respaldar que este es el primer acercamiento a los conocimientos del alumno: “Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia” (p. 72). Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

- Se da cuenta del campo de estudio en geometría a trabajar
- Materiales a trabajar y adquisición conocimientos básicos.
- El docente hace diagnóstico de conocimientos previos. (Nivel de Razonamiento)

FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor debe seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y, cuando lo necesiten, orientar a sus alumnos hacia la solución. De acuerdo con Jaime (1993), esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Al respecto cita a Van Hiele (1986), quien señala que ”(...) las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior”(p. 10). El papel del profesor resulta primordial en esta fase, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento. Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruiz (1994) indican sobre la planificación de la fase 2 que “(...) una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas” (p. 36).

- Descubren, aprende, comprende las propiedades y conceptos de los objetos de estudio
- Las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior. (Van Hiele, 1986).

FASE III. (EXPLICITACION) Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

- Se identifican regularidades en los objetos de estudio
- Intercambio de experiencias y saberes

FASE IV. (ORIENTACION LIBRE) En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), "(...) los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales" (p. 11). Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase

- Se plantean actividades diferentes a las iniciales, el estudiante aplica los conceptos y lenguaje adquiridos

FASE V. (INTEGRACION) Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si ya se ha conseguido.

- No se aportan nuevos conceptos, se construye sobre la base de lo previo y lo adquirido.

Un elemento diferenciador destacado son los tipos de problemas que se deben plantear en cada fase (Van Hiele, 1986).

El paso por cada una de estas fases y la observación de las mismas potencia, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

1.4. Evaluación de los niveles

Para la evaluación de un nivel de razonamiento se considera que este tiene un grado de adquisición, el cual permite observar el mayor o menor dominio de un determinado nivel de razonamiento. Este dominio va desde un dominio nulo (inicio del proceso) hasta un dominio completo (final del proceso). A cada uno 5 de estos dominios, se le ha asignado un nivel, que Jaime (1993) caracteriza de la siguiente manera:

1. Adquisición nula: no se emplean las características de este nivel de razonamiento.
2. Adquisición baja: empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero la utilización que se hace de ellas es muy pobre. Es frecuente que el estudiante abandone el nivel para trabajar en el nivel anterior.
3. Adquisición intermedia: el empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso; sin embargo, ante la aparición de alguna dificultad y considerando que el dominio no es completo, se realiza un retroceso al nivel anterior intentando regresar al actual, nuevamente. Por lo tanto, en este proceso hay saltos entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
4. Adquisición alta: se tiene como nivel de trabajo habitual el actual, aunque de vez en cuando se produce el retroceso al nivel anterior. En algunas ocasiones, se hace uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento.
5. Adquisición completa: hay dominio total de las herramientas y métodos de trabajos, propios de este nivel de razonamiento.

1.5. Propiedades del modelo de Van Hiele

Para comprender mejor el modelo de Van Hiele, es necesario analizar y tomar en cuenta las siguientes características (Beltrametti, Esquivel y Ferrarri, 2005; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez 1990):

Recursividad: El éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior. Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), afirma que "(...) el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel"(p. 14).

Secuencialidad: No se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior, hay que tener cuidado ya que una mala instrucción o aprendizaje en un nivel anterior puede llevar a aparentar que ya están preparados para pasar al siguiente nivel, cuando no es así. Van Hiele decía que la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.

Especificidad del lenguaje: Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático; por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.

Continuidad: Se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, puede tardar varios años en los niveles 4 y 5. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar el nivel 5.

Localidad: Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría, será más fácil para el individuo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas.

2. Lineamientos en Matemáticas Ministerio de Educación Nacional

En los lineamientos se proponen unos referentes curriculares para orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo del currículo dentro del respectivo PEI. Estos referentes tienen que ver con la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas, sobre una nueva visión del conocimiento matemático escolar, sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y sobre la evaluación.

Los cinco **procesos generales** que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

- **La formulación, tratamiento y resolución de problemas**

  Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad.

La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas. Más bien que la resolución de multitud de problemas tomados de los textos escolares, que suelen ser sólo ejercicios de rutina, el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas.

- **La modelación**

  Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. En ese sentido, todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Análogamente, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo, aunque cualquier sistema podría utilizarse como modelo, pues esa es la manera de producir nuevas metáforas, analogías, símiles o alegorías.

- **El razonamiento**

  El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. En los grados superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos y materiales, y puede trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos.

Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

- **La comunicación**

  A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

  Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido

- **La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos**

  Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”, procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

  Para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos mecanismos es la alternación de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

Otro mecanismo cognitivo clave es la automatización, que requiere de la práctica repetida para lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos; esta automatización no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí contribuye a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas. Estas destrezas dan seguridad al alumno y pueden afianzar y profundizar el dominio de dichos conocimientos, pero también pueden perder utilidad en la medida en que se disponga de ayudas tecnológicas que ejecuten dichas tareas más rápida y confiablemente.

Otro mecanismo cognitivo involucrado es la reflexión sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización. Esta reflexión exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuándo basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado.

Los cinco tipos de pensamiento matemático

Los aspectos referidos anteriormente con respecto a la expresión ser matemáticamente competente muestran la variedad y riqueza de este concepto para la organización de currículos centrados en el desarrollo de las competencias matemáticas de manera que éstas involucren los distintos procesos generales descritos en la sección anterior. Estos procesos están muy relacionados con las competencias en su sentido más amplio explicado arriba, y aun en el sentido restringido de "saber hacer en contexto", pues ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia. Además de relacionarse con esos cinco procesos, ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

Los cinco tipos de pensamiento mencionados anteriormente tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje –y en particular de situaciones problema– que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático.

Contexto en el aprendizaje de las matemáticas

El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar –no sólo físico, sino ante todo sociocultural– desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas. La palabra contexto, tal como se utiliza en los Lineamientos Curriculares, se refiere tanto al contexto más amplio al entorno sociocultural, al ambiente local, regional, nacional e internacional– como al contexto intermedio de la institución escolar –en donde se viven distintas situaciones y se estudian distintas áreas– y al contexto inmediato de aprendizaje preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva

2.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Por ello aparecen en cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él, aunque muchos de esos estándares se refieran también a otros tipos de pensamiento y a otros sistemas

En forma semejante, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan dichos tipos de pensamiento (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), pero suele referirse también a otros procesos generales que pueden practicarse en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar.

En cuanto a cada uno de los cinco tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio), si bien es necesario distinguir procesos y procedimientos asociados a cada uno de esos tipos (por ejemplo, para el numérico, la lectura y escritura de números), también es necesario reconocer que algunos son transversales a varios de ellos, como es el caso de los procedimientos asociados a las representaciones gráficas, pues el uso de gráficas incluye la representación lineal de los números en la recta numérica; la representación de conceptos geométricos por medio de fi guras; las representaciones de relaciones entre dos variables por medio de gráficas cartesianas o las representaciones en gráficos de barras en los sistemas de datos

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Décimo a undécimo

A continuación se mencionan los estándares establecidos por el Ministerio de Educación para los grados Décimo a Undécimo para el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Desarrollo del Pensamiento Geométrico

Una moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar.

Las investigaciones de Van Hiele y de los psicólogos soviéticos muestran que el paso de un nivel a otro no es automático y es independiente de la edad. Muchos adultos se encuentran en un nivel 1 porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que les ayuden a pasar al nivel 2.

Sin embargo, algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, especialmente el del rigor, pues exige un nivel de cualificación matemático elevado, y que no hay mucha diferencia entre estos dos niveles.

Parece que los estudiantes deben recorrer un largo trecho entre los tres primeros niveles y los últimos de rigor y formalización, y que ese trecho no ha sido investigado suficientemente para detectar a su vez la existencia de niveles intermedios.

Aunque estos niveles son una aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico, los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. La propuesta de geometría activa, que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos, no coincide con la descripción de Van Hiele, más orientada a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones en T o a doble columna.

3. TIC en Educación matemática

La idea de representación en educación matemática ha cobrado mucha importancia recientemente. Los estudios acerca del tema están motivados por necesidades teórica prácticas. Las necesidades prácticas obedecen a las dificultades, por todos conocidas que tienen los estudiantes para trasladar ideas matemáticas de una representación a otra desde la experiencia común a la matemática. La preocupación por estas dificultades se ha incrementado últimamente por el nuevo y amplio rango de oportunidades que ofrece la tecnología.

La perspectiva teórica tiene que ver con la preocupación por la actividad cognitiva del sujeto que piensa matemáticamente, preocupación que ha desplazado a las reflexiones entorno a la existencia de los objetos matemáticos.

La actividad matemática se realiza a través del reconocimiento perceptual de las representaciones de los objetos matemáticos. A diferencia del trabajo en biología donde un profesor puede traer un animal o una planta, el profesor de matemáticas no dispone de esa misma forma de objetos matemáticos. Sólo puede acceder a dibujos u objetos construidos que son representaciones de una entidad matemática conceptual. La existencia material de un objeto matemático se hace a través del dibujo del mismo o de otro tipo de representación. El dibujo de un triángulo es sólo una representación del concepto matemático de triángulo.

Se señalan dos instancias en las que es posible ubicar el profundo impacto de la tecnología en la educación matemática: el conocimiento matemático propiamente dicho y el currículo. En ambos cases este impacto es de carácter intrínsecamente cognitivo ya que la tecnología se convierte en un nuevo ambiente para trabajar representaciones formales de objetos y relaciones matemáticas. A diferencia de otros ambientes de aprendizaje, el recurso de la tecnología proporciona de manera inmediata, una retroalimentación de la acciones de un estudiante en el mismo sistema de representación en el que está trabajando permitiéndole su mirada como un fenómeno matemático, y facilitando de esta manera, una amplia y directa experiencia matemática.

El doctor Luis Moreno plantea que las calculadoras y los computadores tienen un impacto muy fuerte porque nos cambian el campo de experiencia posible. Lo que podemos capturar a nivel de la simbolización es una serie de fenomenilogías que, vistas en la panatlla de estos artefactos, podemos ver de otra manera.

Aunque las TIC no son la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, hay indicios de que ellas se convertirán paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a que ofrecen múltiples posibilidades de manejar dinámicamente los objetos matemáticos de diferentes sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el alumno pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) que le permitirán manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración.

En general, el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos se ve mejorado gracias al empleo de las TIC y en particular con el uso de los la utilización del softwares educativos en virtud de que:

- el conocimiento matemático no es lineal, sino que está organizado en forma de redes proposicionales cuyos nodos se conectan entre sí por múltiples enlaces transversales y de distinto nivel, lo que hace que sea difícil plasmarlo en forma lineal en el libro de texto. Por eso, la matemática se convierte en uno de los principales campos en que se puede trabajar utilizando la paginas web y sofware puesto que la organización de éstas funcionan por medio de enlaces que permiten emular dicho conocimiento.
- La matemática, quizás más que cualquier otra disciplina, necesita una buena codificación y organización de la información, así como simulaciones y multi-representaciones que faciliten la comprensión de los diversos conceptos. Los hipermedia ofrecen estas ventajas de forma más adecuada que otros soportes de enseñanza conocidos, además de agilizar el desarrollo de muchos procedimientos matemáticos (Riveros, 2004).

Con el uso de las TIC se puede facilitar el análisis y la consolidación de conceptos matemáticos, para su posterior aplicación a situaciones concretas. Los materiales computarizados, no solamente deben ser expositivos o presentar ejercicios para que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos, sino que además deben estar orientados y guiados por un tutor o asesor que brinde ayuda, asesoría y retroalimentación para que el participante llegue a la solución de los problemas y teoremas planteados. La integración de las TIC en la enseñanza de la matemática tienen la capacidad de:

1. Presentar los materiales a través de múltiples medios y canales.
2. Motivar e involucrar a los alumnos en actividades de aprendizaje significativas.
3. Proporcionar representaciones gráficas de conceptos y modelos abstractos.
4. Mejorar el pensamiento crítico y otras habilidades.
5. Utilizar adecuadamente la información adquirida para resolver problemas y para explicar los fenómenos del entorno (Riveros, 2004).
6. Permitir el acceso a la investigación científica y al contacto con científicos y especialistas en el área.
7. Ofrecer a docentes y alumnos una plataforma a través de la cual puedan comunicarse con compañeros y colegas de lugares distantes, intercambiar trabajos, desarrollar investigaciones y funcionar como si no hubiera fronteras geográficas (Riveros, 2004). Las TIC no reemplazan la comprensión básica y la intuición, más bien contribuyen a fomentarlas, razón por la cual se las debe incluir en los programas de enseñanza de la matemática, y así enriquecer el aprendizaje de esta disciplina.

El manejo de las TIC en el aula de matemática depende del docente, quien las debe emplear para mejorar las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que aprovechen lo que la tecnología puede brindar como gráficos, visualizaciones, cálculos, etc. (Riveros, 2004).

Las TIC no reemplazan al docente, porque es él quien decide cuándo y cómo se van a utilizar. Sin embargo, su acertada aplicación en la enseñanza de la matemática le permitirá observar e inferir cómo razonan sus estudiantes y evaluarlos, permitiéndole examinar los procesos que han seguido en sus investigaciones, como también, en los resultados obtenidos.

Las TIC también ayudan a los docentes a promover el desarrollo de habilidades y procedimientos desde una perspectiva más general respecto a la comprensión de la matemática, exigiendo a los alumnos que trabajen en niveles más rigurosos de generalización o abstracción. Un software de geometría como el Cabri-geometresimplifica la experimentación con familias de objetos geométricos, con un enfoque explícito en transformaciones geométricas.

El uso adecuado e inteligente de las TIC permite que los alumnos manejen de forma dinámica y activa los múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos, facilitándoles su comprensión y relaciones, mejorando las actividades matemáticas que ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos (Janvier, 1987; Kaput, 1992). Mediante las representaciones externas (actividades físicas del sujeto) el estudiante organiza la experiencia matemática que tiene lugar cuando realiza una tarea; y con las representaciones internas sistematiza internamente la información (Kaput, 1992). A través de las actividades físicas, los sistemas de representación se sistematizan en conjuntos de símbolos que se manipulan de acuerdo con reglas que permiten identificar o crear caracteres, operar con ellos y determinar sus relaciones. Un mismo objeto matemático puede mostrarse mediante diferentes sistemas de representación.

La geometría es un área formadora de razonamiento lógico y a lo largo de la historia uno de los pilares de la formación académica desde edades tempranas y en el desarrollo de habilidades cotidianas.Actualmente disponemos de las herramientas necesarias para que la formación del alumno sea más completa. Los programas de geometría dinámica han demostrado en las dos últimas décadas su capacidad de ayuda al usuario para adquirir destrezas en uno de los campos más creativos de las matemáticas.

Los ejemplos más importantes para la ayuda de la enseñanza de la geometría mediante medios informáticos son los llamados programas de Geometría Dinámica. Proporcionan una ayuda extraordinaria para la experimentación. Un programa de Geometría Dinámica permite construcciones de geometría elemental, donde los elementos que se construyen se definen por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa.

Existen varios programas de Geometría Dinámica que son similares aunque cada uno tiene características especiales que le hacen mejor para algunas cosas:

Cabri-Geometre,es el más antiguo y por ello tiene la ventaja de tener el mayor número de desarrollos efectuados por usuarios, está incluso incluido en algunas calculadoras gráficas de Texas Instruments. Es sin duda el más utilizado aunque tiene algunos fallos de continuidad debidos a su codificación interna.

Sketchpad es tan antiguo como Cabri y con gran difusión en Estados Unidos. Tiene todas las cualidades de Cabri y además tiene posibilidades de tratamiento y estudio de funciones, lo que permite ser utilizado también en temas distintos de los estrictamente geométricos. El inconveniente es que está en inglés, aunque existe una versión.

Para el estudio de la circunferencia tratada en este trabajo vemos mas útil el uso de **Geogebra** que es programa muy similar a Cabri en cuanto a instrumentos y posibilidades pero incorporando elementos algebraicos y de cálculo. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa además sus rutinas analíticas permiten su uso como instrumento para el estudio de funciones como un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, etc

Marqués (2000) habla sobre las ventajas de utilizar programas didácticos como Geogebra en el proceso de enseñanza- aprendizaje, pues los alumnos se sienten muy motivados con la utilización de este medio, se mantiene activos y con un nivel de atención máximo. se les da la oportunidad de experimentar, de tomar decisiones y de equivocarse, sin que suponga ello un retroceso en sus ganas de interactuar con el ordenador y con esto. Medina (2000), habla de las dificultades y señala que se debe partir del hecho de que la incorporación de las TIC en el aula no es algo fácil y no son pocos los obstáculos que van a frenar o retrasar dicha incorporación. El profesorado, como responsable de llevar a cabo esta labor, se encuentra con limitaciones tales como:

a) Carencias de infraestructuras adecuadas en los centros. Son muchos los que no disponen de espacios acondicionados para tal fin. Difícilmente podremos hablar de trabajar en este tema si ni siquiera existe un lugar acondicionado para ello.

b) Falta de tiempo para su impartición puesto que no queda recogida en el Proyecto Curricular. No suele presentarse como actividad programada y globalizada sino que se trabaja como una actividad complementaria y, en la mayoría de los casos, sin conexión con los contenidos que se están trabajando en las unidades didácticas.

4. Secuencia Didáctica

La elaboración de una secuencia didáctica es una tarea importante para organizar situaciones de aprendizaje que se desarrollarán en el trabajo de los estudiantes. El debate didáctico contemporáneo enfatiza que la responsabilidad del docente para proponer a sus alumnos actividades secuenciadas que permitan establecer un clima de aprendizaje, ese es el sentido de la expresión actualmente de boga en el debate didáctico: centrado en el aprendizaje. Mientras la clase frontal establece una relación lineal entre quien emite información y quien la recibe, la teoría de las situaciones didácticas elaborada por Brousseau (2007) pone el énfasis en las preguntas e interrogantes que el docente propone al alumno, en la manera como recupera las nociones que estructuran sus respuestas, la forma como incorpora nuevas nociones, en un proceso complejo de estructuración/desestructuración/estructuración, mediante múltiples operaciones intelectuales tales como: hallar relaciones con su entorno, recoger información, elegir, abstraer, explicar, demostrar, deducir entre otras, en la gestación de un proceso de aprender. El alumno aprende por lo que realiza, por la significatividad de la actividad llevada a cabo, por la posibilidad de integrar nueva información en concepciones previas que posee, por la capacidad que logra al verbalizar ante otros (la clase) la reconstrucción de la información. No basta escuchar al profesor o realizar una lectura para generar este complejo e individual proceso

Mientras que en otra perspectiva que tiene el mismo sentido se ha construido la noción de secuencias didácticas. Noción formulada inicialmente por Hilda Taba (1974) y posteriormente se realiza una serie de desarrollos específicos en los trabajos de Díaz Barriga (1984, 1996). Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Por ello, es importante enfatizar que no puede reducirse a un formulario para llenar espacios en blanco, es un instrumento que demanda el conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y la experiencia y visión pedagógica del docente, así como sus posibilidades de concebir actividades "para" el aprendizaje de los alumnos. Para acompañar al docente en esta responsabilidad permanente presentamos una guía que le permitirá la construcción de secuencias didácticas que respondan a esta perspectiva didáctica.

Estructura de una secuencia

La secuencia didáctica contiene los siguientes elementos que son mencionados por Tobón (2010) los cuales se consideran en la presente investigación para el diseño de la secuencia didáctica que estará articulada con el modelo Van Hiele para la enseñanza de la Circunferencia: Situación del problema del contexto, competencias a formar, Actividades de aprendizaje y evaluación, proceso metacognitivo, evaluación y recursos de aprendizaje.

- **Situación del problema del contexto**: Problema relevante al contexto de los estudiantes el cual se busca la formación. Siendo este un aspecto fundamental en las secuencias didácticas orientando el proceso de enseñanza ya que la educación no solo consiste en formar sino también en contribuir y resolver.

- **Competencias a formar**: Se describe la competencia o competencias que se pretender formar mediante la secuencia didáctica.

- **Actividades de aprendizaje y evaluación**: Se indican las actividades de aprendizaje autónomo de los estudiantes a partir del problema del contexto y las competencias a formar. Dichas actividades deben estar articuladas entre sí para contribuir al problema.

- **Evaluación**: Se establecen criterios y evidencias para orientar la evaluación del aprendizaje así como la ponderación respectiva. En el formato de la secuencia didáctica, la evaluación es paralela a las actividades y se realiza en dichas actividades.

- **Recursos**: Se establecen los materiales educativos para la secuencia didáctica así como los espacios físicos y equipos.

- **Proceso Metacognitivo**: Se describen las principales sugerencias orientando a los estudiantes para que reflexionen y se autorregulen en el proceso de aprendizaje. Este proceso se realiza antes de las actividades con el fin de que tomen conciencia de lo que se va hacer y actúen de la mejor manera durante el desarrollo de las actividades.

Tobón (2009, 2010) y Pimienta y Enríquez (2009).

En el modelo de competencias, las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje en el marco del aprendizaje o refuerzo de competencias; para ello se retoman los principales componentes de dichas secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia), actividades pertinentes y evaluación formativa (orientada a enjuiciar sistemáticamente el proceso). Con ello, se sigue una línea metodológica que permite a los docentes que ya trabajan con esta metodología una mejor adaptación al trabajo por competencias en el aula.

Por lo anterior el modelo por competencias estará articulado con el modelo Van Hiele en las fases de aprendizaje: La fase de información, la fase de orientación dirigida, explicación, orientación libre y luego integración.

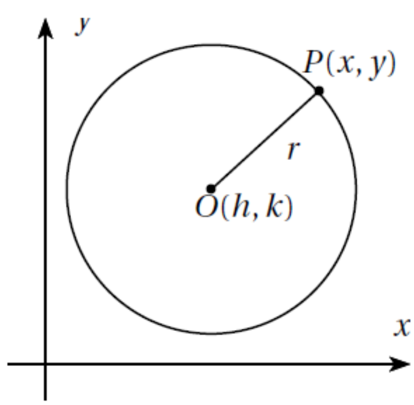
Capítulo 3

EL OBJETO MATEMÁTICO: CIRCUNFERENCIA

Objeto Matemático: Circunferencia

En este capítulo se encuentran las principales definiciones relacionadas con la circunferencia, cada uno de sus elementos, como también la relación que tiene cada uno de ellos con la misma y algunas gráficas que servirán de ilustración.

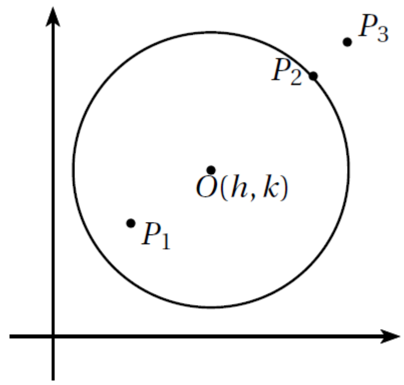
Propiedades generales de la circunferencia. Definición. Una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P tales que $|OP| = r$ También llamamos radio a cualquier segmento que une un punto sobre la circunferencia con O. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama cuerda. Si la cuerda contiene al origen la llamamos diámetro (de la circunferencia o círculo). También llamamos diámetro al valor común de las longitudes de los diámetros (que es $2r$).
Notación: La circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r es: $C(O, r) = P \in \pi / OP = r; O \in \pi$



Interior de la circunferencia: Al conjunto de puntos del plano, tales que su distancia al centro es menor que el radio de la circunferencia dada , se le llama el interior de la circunferencia.

Notación: El interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\overset{\circ}{c} = \widehat{C(O, r)} = int(C)$

Exterior de la circunferencia: Al conjunto de puntos del plano tales que su distancia al centro sea mayor que el radio de la circunferencia, se le llama el exterior de la circunferencia. Notación: El exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $extC(O, r)$



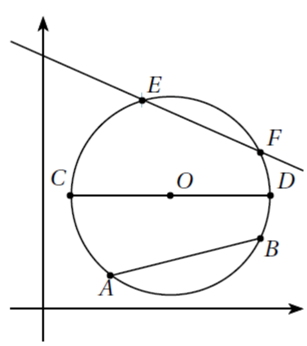
Los puntos $P1, P2, P3$ estan en el mismo plano de la circunferencia $C(O, r)$:
Como $OP1 < r$ entonces $P1 \in intC(O, r)$
Como $OP2 = r$ entonces $P2 \in C(O, r)$
Como $OP3 > r$ entonces $P3 \in extC(O, r)$

Círculo: La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo. Notación: El círculo de centro O y radio r se denota por C(O, r)

Cuerda: Es un segmento que conecta dos puntos sobre a circunferencia. Si los dos puntos son A y B denotamos la cuerda de extremos A y B por $\overline{AB}$

Diámetro: Es la longitud de toda cuerda que pasa por el centro y este es igual a dos radios. Si d es el diámetro de un círculo de radio r , entonces $d = 2r$

Secante: es la recta que contiene a una cuerda de la circunferencia.



En la figura podemos observar:

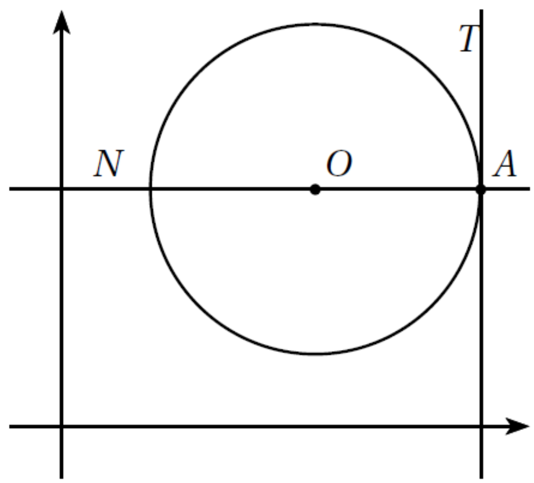
- El segmento $\overline{AB}$ es cuerda a la circunferencia $C(O, r)$, lo mismo $\overline{EF}$
- El número CD es diámetro de la circunferencia $C(O, r)$
- La recta EF es secante de la circunferencia $C(O, r)$ por que contiene a la cuerda $\overline{EF}$

Tangente: Es la recta en el plano donde esta la circunferencia que la intercepta en un único punto, llamado punto de contacto o punto de tangencia. Es una especie de secante que contiene a una cuerda con un único punto.

Notación: La recta tangente a la circunferencia se denota por T.

Normal: Es la recta perpendicular a una recta tangente en el punto de contacto.

Notación: La recta normal a la circunferencia se denota por N



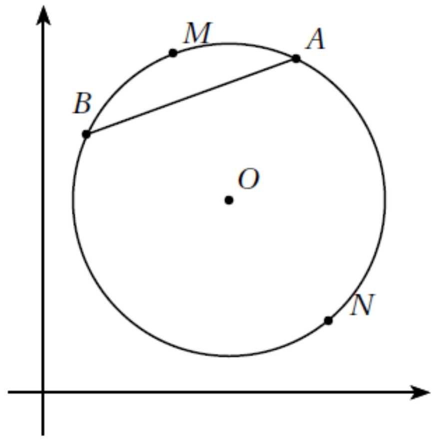
En la figura podemos observar:

- La recta T es tangente a la circunferencia $C(O,r)$ en en el punto A
- La recta N es n a la tangente T de la circunferencia $C(O,r)$ en el punto A

Arco: Es el conjunto de todos los puntos que estan en una circunferencia que se encuentra entre los puntos a A y B a la misma distancia del centro.

Notación: Si los puntos de la circunferencia son A y B sus arcos son AMB y ANB los cuales denotamos por $\widehat{AMB}$ y $\widehat{ANB}$ respectivamente. Diremos que estos dos arcos son mutuamente complementarios.

El segmento que une los extremos de un arco se llaman cuerdas del arco. Dos arcos complementarios comparten la misma cuerda.

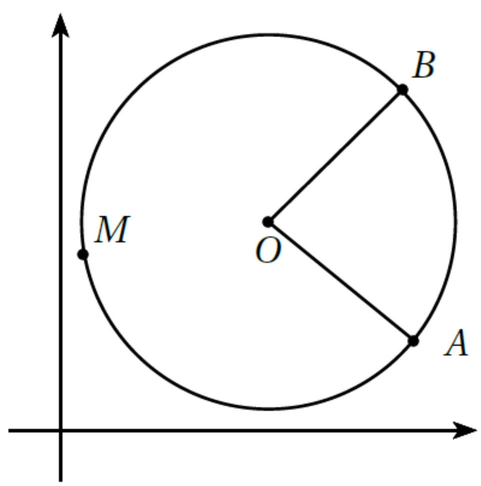


Si al arco le quitamos los extremos a este nuevo conjunto lo llamamos el interior del arco y lo denotamos por: $int(\widehat{ANB})$

Arco principal : Si el centro de la circunferencia y el interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco principal.

Arco no principal: Si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en el mismo semiplano con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco no principal.

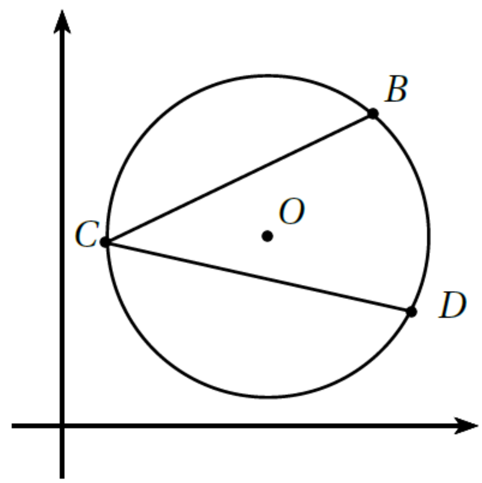
Ángulo Central: Es un ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y es coplanar con la circunferencia.



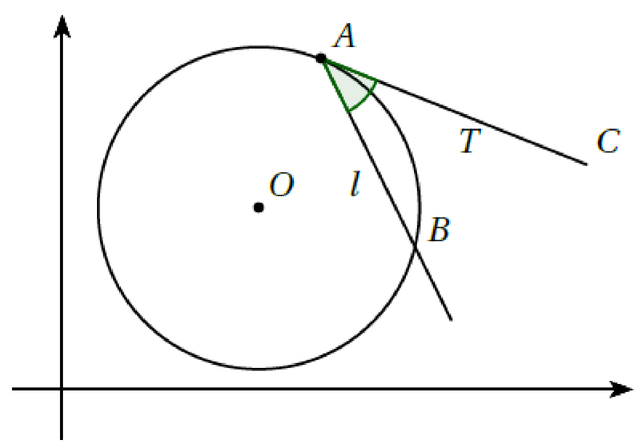
En la Figura podemos observar que el ángulo $\measuredangle AOB$ es un ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro; Se puede observar que al arco no principal $\widehat{AMB}$ no se le asocia un ángulo central, ya que los ángulos están definidos entre 0^o y 180^o .

Ángulo inscrito en un arco: Diremos que un ángulo está inscrito en una circunferencia $C(O, r)$ si su vértice está en $C(O, r)$ y sus lados cortan a $C(O, r)$ (en otros puntos distintos de su vértice).

Cuando digamos que un ángulo $\widehat{BCD}$ está inscrito en una circunferencia $C(O;r)$ se entenderá que B, C y D están en $C(O,r)$

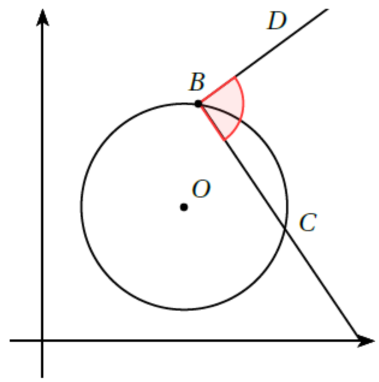


Ángulo semi-inscrito: Diremos que un ángulo está semi-inscrito en una circunferencia $C(O,r)$ cuando su vértice está sobre la circunferencia, uno de los lados es tangente y el otro es secante a la circunferencia, se le llama ángulo semi-inscrito



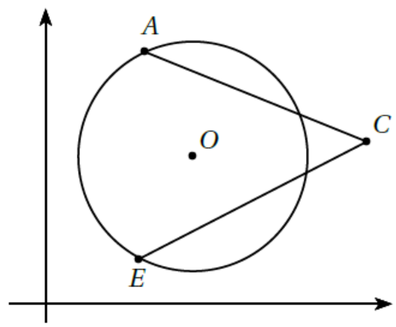
Si el ángulo formado por las semi-rectas l y T está semi-inscrito a $C(O,r)$ entonces l es la semirecta que empieza en A y pasa por B siendo A y B puntos de $C(O,r)$ y T es tangente a $C(O,r)$ en A, el arco $\widehat{AB}$ esta contenido en la intersección del ángulo con $C(O,r)$ formado por las semirectas l y T.

Ángulo ex-inscrito: Un ángulo ex-inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia, un lado es secante y el otro es exterior a la circunferencia $C(O,r)$



El $\widehat{CBD}$ es un ángulo ex-inscrito a la circunferencia $C(O, r)$

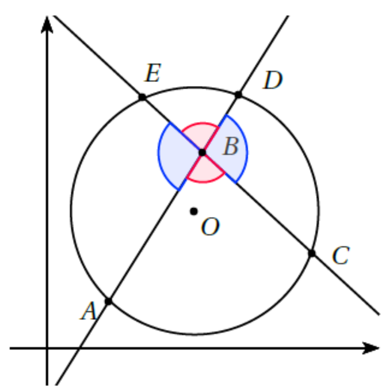
Ángulo exterior: Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia



El $\measuredangle ACE$ es un ángulo exterior

Ángulo interior: Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior a la circunferencia.

$\measuredangle ABC, \measuredangle EBD, \measuredangle ABE, \measuredangle CBD$ Son ángulos interiores a la circunferencia $C(O, r)$



Capítulo 4

Metodología

El presente capitulo presentamos cómo se desarrolló la investigación, como se diseñaron los instrumentos de investigación además presentando de manera clara el tipo de investigación que mejor se acopla a este estudio, el cual es cualitativo interpretativo. Este enfoque se tomó en cuatro fases que componen el proceso de investigación cualitativa las cuales son: fase preparatoria, fase trabajo de campo, fase analítica y fase informativa. Estas fases son expuestas en el capítulo siendo importantes en el desarrollo del trabajo. Dentro de las fases se encontrarán las diferentes técnicas e instrumentos de recolección de información que se emplearon para alcanzar los objetivos y responder a la pregunta de investigación.

1. Tipo de investigación

Este trabajo tomo una investigación de tipo cualitativo entendida como:

"La investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos".(Sandín,2003, p.32)

Lo anterior significa que esta investigación es de tipo cualitativa y su diseño se define como fenomenológico, porque, trata de analizar, describir y observar las dificultades de compresión en el aprendizaje de la circunferencia, permitiendo establecer una propuesta didáctica que satisfaga las necesidades de aprendizaje del estudiantado. El estudio se realizó en estudiantes de grado décimo del Colegio la Anunciaión del municipio de Timaná- Huila

2. Diseño metodológico

Basados en las fases del proceso de investigación cualitativa (Latorre et al., 1996), se toma una serie de etapas para organizar y llevar adelante la investigación con el fin de llegar a obtener resultados del objeto estudiado. Es por eso que el diseño metodológico es entendido como la descripción del conjunto de pasos y estrategias concebidas para alcanzar los objetivos propuestos y dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. En el presente trabajo se realizó una investigación cualitativa, asociada a 4 fases: fase preparatoria, fase de trabajo de campo, fase analítica y fase informativa. En lo que sigue del capítulo, se describe lo que refiere en cada fase de esta investigación.

2.1. Fase preparatoria

Esta fase está dividida en dos etapas: etapa reflexiva donde se aclara y se describen y las razones de la elección del tema a investigar, así como también su desarrollo desde el momento de su elección. La segunda etapa es la de diseño en la cual se definen las actividades, técnicas e instrumentos que se ejecutaron en las fases de: trabajo de campo, analítica e informática. En definitiva esta fase refiere a las etapas necesarias para poner en marcha el proyecto.

Etapa reflexiva

La problemática abordada en este trabajo está centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la Circunferencia en la educación media, se decidio hacer una propuesta didáctica porque como lo plantea Gómez (2013) una propuesta pedagógica es un proceso en el que se planifica, del modo más adecuado al contexto y los estudiantes, las actividades y recursos de aprendizaje con base en lo que se va a aprender, para, al final realizar un análisis y reflexión sobre la puesta en práctica de ello.

Segura y Chacón (1996) señalan que el sistema tradicional de enseñanza en la educación, no dan al estudiante las herramientas necesarias para un pleno desarrollo de la personalidad, razón por la cual, para el estudiante hay una brecha entre lo que se trabaja en el aula de clase y lo que encuentra en su entorno. Los temas transmitidos en el aula de clase no generan motivación por ser memorísticos, superficiales y poco consecuentes.

Tomando el caso particular de la circunferencia es de cierta forma un tema complejo para los estudiantes. En la enseñanza tradicional, los profesores no lo hacen visualizar. Han pasado una cantidad de años considerables, donde los alumnos construyen gráficas y realizan operaciones básicas para manejar dichas representaciones, no obstante, son pocos los estudiantes que al terminar el bachillerato tienen pleno dominio de este tema, lo que evidencia que no hay un aprendizaje significativo y son los profesores los que tienen un grado de culpabilidad por no presentar propuestas didácticas, no generar inquietudes y motivaciones en los estudiantes.

Por lo anteriormente expuesto, se busca mostrar una secuencia de pasos, que permitan al docente ordenar, planificar y evaluar de forma correcta el desempeño de sus estudiantes en la circunferencia , rediseñando sus clases, explorando diferentes maneras de exponer un tema, sin embargo, es necesario tener claro la instrucción adecuada para que los estudiantes puedan superar los cinco niveles que están propuestos en el método de Van Hiele y de esta forma, dominar el tema. Dado que el propósito de este trabajo está encaminado para profesores de secundaria, se espera que puedan llegar al cuarto nivel del método mencionado con sus estudiantes.

Etapa de diseño

La etapa de diseño giro en torno a los objetivos de la investigación como son: la identificación de dificultades, la realización de actividades que permitieron al estudiante la adquisición de nuevas estructuras mentales , así como el diseño de la propuesta de enseñanza, así como su validación. Se planificaron las actividades que se llevaron a cabo en las tres fases posteriores: la fase de trabajo de campo que es la descripción de cada una de las actividades desarrolladas para alcanzar los objetivos planteados. La fase analítica que es donde se expuso la manera la cual se a analizaron los resultados del trabajo de campo. Finalmente se diseñó la fase informativa donde se dio a conocer dónde y a quienes se presentaron los resultados y conclusiones de la investigación.. Dentro de estas fases se tomó un enfoque cualitativo con observación pasiva y participante, se utilizó instrumentos de recogida de datos como: notas en una libreta, fotografías y videograbaciones. Para así obtener la información necesaria y dar respuesta a la pregunta de investigación.

2.2. Fase de trabajo de campo

A continuación se detalla la forma en que se procedió y se dio todo el proceso para la consecución de los objetivos planteados

Para el cumplimiento del primer objetivo, identificar el el grado de adquisición inicial en el que se encuentran los estudiantes de grado undécimo, se diseñó la Actividad 1 (ANEXO 1) que dio cuenta de los conceptos manejados así como el diagnóstico para el diseño de las demás actividades de la secuencia didáctica . Se aplicó en un grupo de 11 estudiantes grado undécimo de bachillerato que ya habían estudiado a la circunferencia dado que según lo estipulado en los Lineamientos Curriculares y los Estándares para matemáticas en grado décimo e undécimo es donde se debe orientar el concepto de circunferencia, sus elementos y sus propiedades.

La actividad 1 (Anexo 1) es una prueba enmarcada en el modelo Van Hiele, que buscaba determinar el nivel de razonamiento en el que se encuentra este grupo, conceptos básicos que conocen los estudiantes, así mismo, buscaba determinar las fortalezas y dificultades respecto al tema. Después para complementar y caracterizar el nivel en el que se encuentran, se hizo una entrevista semi-estructurada.

La actividad exploratoria, que consta de 12 preguntas, fue aplicada a los estudiantes en grupos y tuvo una duración de 80 minutos, cada nivel de razonamiento del modelo, tiene tres preguntas para tener un diagnostico acertado. De manera simultanea se tomaron notas de campo teniendo en cuentas datos relevantes de las respuestas dadas por los estudiantes y luego se realizo una entrevista semi-estructurada para indagar profundamente.

La elaboración de la secuencia didáctica , se articulo con las dificultades que se observaron la actividad exploratoria y su posterior análisis. Para el diseño de la secuencia didáctica se tomo el modelo soportado por Tobón et al., (2010) quien establece un modelo por competencias y el modelo Van Hiele. El modelo esta conformado por cinco fases: información, orientación dirigida,explicitación,orientación libre, integración. Por lo que para la elaboración de esta secuencia, se diseño un esquema que articula las fases mencionadas. Posteriormente durante la elaboración del contenido de la secuencia, se tuvieron en cuenta actividades y estrategias para trabajar circunferencia planteadas en la pagina de Colombia aprende de igual manera una actividad propuesta por Rodriguez(2004) rectas tangentes a una circunferencia con uso de Geogebra. Todo lo anterior se ajusto y se modifico para la elaboración de la secuencia didáctica.

Capítulo 5

Secuencia didáctica

La elaboración de secuencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de un determinado tema debe ser considerado cada vez mas por los docentes, ya que por medio de esta se satisfacen las necesidades de la educación actual que aumentan a pasos agigantados. Ademas aclara el sentido y pertinencia de lo que se enseña, los aprendizajes que se pretenden potenciar y las actividades que se deben realizar.

Para este trabajo la secuencia didáctica permitió tener una serie de actividades planteadas de manera que los estudiantes obtengan un avance y una superación en el aprendizaje en términos de los niveles del modelo Van Hiele.

1. Construcción de la secuencia didáctica

1.1. Estructura

La siguiente es una secuencia didáctica por competencia, tomando como base un modelo planteado por Tobón (2009, 2010) y Pimienta y Enríquez (2009), la cual esta conformada por cuatro componentes fundamentales que son: situación problema, competencias a formar, actividades planteadas, proceso metacognitivo, evaluación y recursos de aprendizaje, ademas de ir enlazadas con el modelo Van Hiele, con sus fases aprendizaje para el avance en los diferentes niveles.

De este modo lo que se busca con esta secuencia es que mediante diferentes actividades los estudiantes logren superar las dificultades para alcanzar los niveles de aprendizaje planteados en el modelo Van Hiele para el estudio de la circunferencia . Ademas se pretende que con esta secuencia involucrar actividades con el uso de la TICS algo llamativo y muy necesario para los jóvenes .

1.2. Documento técnico

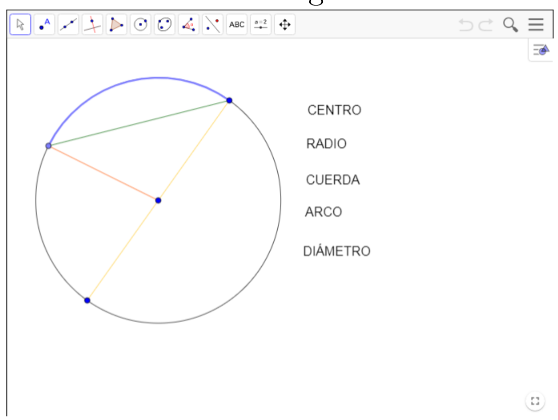
El documento técnico es en el cual se recolecto toda la información de manera especifica de cada una de las actividades propuestas y pasos dentro de la secuencia didáctica con varias secciones. Ademas se describió de manera detallada cada una de las fases para superar los diferentes niveles.

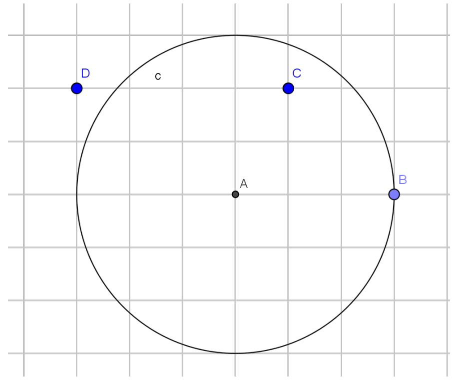
<table>
<tr><td colspan="3">DOCUMENTO TÉCNICO</td></tr>
<tr><td colspan="3">IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</td></tr>
<tr><td>INSTITUCIÓN:
Colegio La Anunciación (Timana - Huila)</td><td>ÁREA: Matemáticas</td><td>TEMA: Circunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="3">INVESTIGADORES: Juan David Parra - Rafel Quintero Leal</td></tr>
<tr><td colspan="3">ESTUDIANTE:</td></tr>
<tr><td>NUMERO DE NIVELES ASOCIADOS AL MODELO VAN HIELE:</td><td>TIEMPO POR NIVELES:
▪ Nivel 2: 4 horas
▪ Nivel 3: 6 horas
▪ Nivel 4: 8 horas</td><td>FECHA:
▪ Nivel 2:
▪ Nivel 3:
▪ Nivel 4:</td></tr>
<tr><td colspan="3">INTENCIONES FORMATIVAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPÓSITO DE LA SECUENCIA</td><td>COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Seguir las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración.
▪ Mostrar cómo el uso de la tecnología ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la circunferencia.
▪ Mediante la utilización del Modelo de Van Hiele se permita hacer un seguimiento de los niveles de interpretación de los objetos matemáticos y sus propiedades (circunferencia y elementos básicos), diferenciando según las habilidades y competencias de cada estudiante, pero a su vez integrando una serie de actividades que les facilitan el tránsito entre Niveles de Razonamiento y Fases de Aprendizaje.</td><td>▪ Resuelve problemas en los que se usen las propiedades geométricas de la circunferencia por medio de transformaciones
▪ Usa argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
▪ Reconoce y distingue los distintos tipos de rectas, segmentos y ángulos asociados a la circunferencia.
▪ Describe las características de los ángulos centrales, inscritos y semi inscritos, y del radio, diámetro, cuerdas, arcos, secantes y tangentes de una circunferencia.
▪ Emplea las propiedades de los elementos asociados como radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y secante a la circunferencia en la resolución de problemas.
▪ Interpreta mapas, diagramas o gráficas mediante los elementos y propiedades de la circunferencia.</td></tr>
</table>

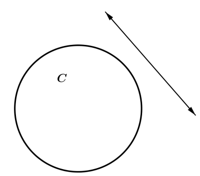
El esquema anterior o documento técnico, contiene información general de manera puntual de la secuencia didáctica como son los niveles que se deben superar y las faces para ello y de las actividades a desarrollar. Para el diseño del formato del documento técnico y de los elementos situados en el, se establecieron elementos propios y se tomo en cuenta el diseño presentado por Perdomo (2018) el cual esta basado en el documento de Tobón et al., (2010) quien explica y muestra ejemplos de diferentes elementos específicos que deben estar contenidos en el documento técnico como son los anteriormente mencionados, identificación de la secuencia, propósito de la secuencia, intensiones formativas y el manejo del tiempo de cada nivel.

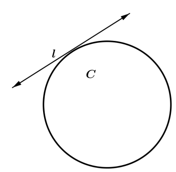
A continuación se muestra el contenido de la secuencia o documento guía,para el cual se tuvieron en cuenta aspectos los resultados obtenidos en la actividad exploratoria y sus respectivos análisis. Se busco que las actividades no fueran extensas y que ademas se implementara Geogebra. Esta separado por niveles según el método de Van Hiele y las diferentes faces secuenciales para que al final de ellas se logre superar dicho nivel. También los propósitos del nivel, objetivo y recursos para ello.

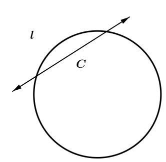
NIVEL DEL MODELO	PROPÓSITOS DEL NIVEL	FASES DE APRENDIZAJE	OBJETIVO	RECURSOS
NIVEL II	Conocer la definición, los elementos y las partes de la circunferencia. Ademas Calcular la longitud de circunferencias y de arcos de circunferencia. como también conocer las posiciones relativas de la circunferencia con respecto a un punto, una recta y otra circunferencia.	**FASE 1: INFORMACIÓN.** Actividad 1 El docente les dará a los estudiantes los conceptos de los elementos básicos de la circunferencia La circunferencia Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA CENTRO: es el punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia. Es importante comprender que el centro no es un punto de la circunferencia. RADIO: es cualquiera de los segmentos que unen el centro con un punto de la circunferencia. La circunferencia tiene infinitos radios y todos tienen la misma longitud. CUERDA: es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia. DIÁMETRO: Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Los diámetros son las cuerdas más grandes y todos tienen la misma longitud: cualquier diámetro es el doble de un radio. ARCO DE CIRCUNFERENCIA: es la parte de la circunferencia limitada por los extremos de una cuerda.	Mencionar los elementos y partes de la circunferencia	▪ Colores ▪ Reglas ▪ Compás ▪ Hojas Cuadriculadas ▪ Elementos para Dibujar (lápiz)

		FASE 1: INFORMACIÓN. Actividad 2 Luego el docente plantea la siguiente actividad En el dibujo aparece una circunferencia con sus elementos. A un lado puedes ver una serie de etiquetas. Utiliza la herramienta vector  que aparece en el menú de rectas para relacionar cada etiqueta con el elemento correspondiente. Cuando termines guarda el archivo  	Mediante el uso de Geogebra dar a conocer los elementos principales de la circunferencia	• Software Geogebra • Reglas • Compás • Hojas Cuadriculadas
		FASE 2 : ORIENTACIÓN DIRIGIDA Actividad 3 En el siguiente imagen aparecen tres puntos y una circunferencia de radio 3 u. Utiliza la herramienta distancia para calcular la distancia de cada punto al centro de la circunferencia. Mueve los puntos arrastrándolos con el ratón. Puedes cambiar su posición	Mediante el uso de Geogebra dar a conocer la posición relativa entre un punto y una circunferencia	• Software Geogebra • Reglas • Compás • Hojas Cuadriculadas

		 Escribe debajo de cada uno de ellos su posición relativa con respecto a la circunferencia		
		FASE 3:EXPLICITACION. Actividad 4 Construye tres rectas, un recta secante, tangente y exterior a una circunferencia de radio 3 u. Utiliza la herramienta "distancia" para calcular la distancia de cada recta al centro de la circunferencia. Escribe al lado de cada una de ellas su posición relativa con respecto a la circunferencia en el mismo color que la recta con la que se corresponda y guarda el archivo	Determinar la posición relativa de la recta con respecto a la circunferencia	▪ lápiz ▪ borrador ▪ Hojas Cuadriculadas
		FASE 5. INTEGRACIÓN Actividad 5 En el centro de un jardín circular de radio $4,5m$ se quiere construir una fuente cuya base es un triángulo equilátero con perímetro $3m$. La medida del área del jardín que no esta cubierta por la fuente es:	Interpretar y solucionar problemas referentes a la circunferencia	▪ Colores ▪ Reglas ▪ Compás ▪ Hojas Cuadriculadas ▪ Elementos para Dibujar (lápiz)

<table>
<tr><th>NIVEL DEL MODELO</th><th>PROPÓSITOS DEL NIVEL</th><th>FASES DE APRENDIZAJE</th><th>OBJETIVO</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>NIVEL III</td><td>Mediante la visualización y el uso de Geogebra, deducir propiedades de la circunferencia que involucran perpendicularidad, construcción de la tangentes a partir del movimiento de las secantes, movimiento de un punto y una recta</td><td>FASE 1: INFORMACIÓN. Actividad 1 El docente planteara a los estudiantes la siguiente pregunta, para ser resuelta por estos de forma individual
▪ De acuerdo a las siguientes representaciones, ¿Qué relación existe entre la recta y la circunferencia en cada caso?
Representación A


Representación B


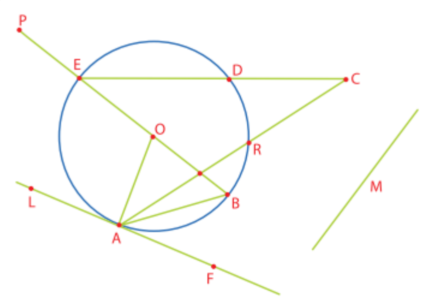
Representación C

</td><td>Interpretar la relación que existente entre una recta y una circunferencia</td><td>▪ Colores
▪ Reglas
▪ Compás
▪ Hojas Cuadriculadas
▪ Elementos para Dibujar (lápiz)</td></tr>
</table>

		Después de que los estudiantes den respuesta a las pregunta formulada, el docente explicara a los estudiantes la relación existente entre la recta y la circunferencia en cada caso.		
		FASE 2 : ORIENTACIÓN DIRIGIDA Actividad 2 Abra el programa de GeoGebra, haciendo clic en el icono de acceso directo que previamente se halla instalado correctamente. Escriba en la barra de entrada la ecuación de la recta $x + y = 3$ luego de la circunferencia que va a interceptar $x^2 + y^2 = 5$ Para ver los puntos de intersección utilice la herramienta intersección  	Establecer y determinar los puntos de intersección de una circunferencia con una recta utilizando GeoGebra	• Software Geogebra • Reglas • Compás • Hojas Cuadriculadas

		Seleccione la ecuación de la recta y de la circunferencia y aparecerán en la ventana de vista algebraica los valores de los puntos así mismo en la gráfica.		
		FASE 3:EXPLICITACION. Actividad 3 Posterior a la socialización y explicación de la anterior actividad, se requiere que el docente indique a sus estudiantes que es posible determinar la posición relativa de una recta y una circunferencia resolviendo el sistema conformado por las dos ecuaciones, es decir tomando en consideración la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia. En relación a lo anteriormente dicho, el docente propone a los estudiantes resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, donde la primera ecuación corresponde a una circunferencia y la segunda a una recta: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 15 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0 \\ 2x + 3y + 31 = 0 \end{cases}$	Determinar la posición relativa de la recta con respecto a la circunferencia	▪ lápiz ▪ borrador ▪ Hojas Cuadriculadas

		Finalizado el proceso realizado por los estudiantes, se tiene que el primer sistema tiene una única solución y el segundo no tiene soluciones. En relación a esto, el docente asentara lo siguiente: Si el sistema no tiene solución la recta es exterior a la circunferencia, pues no la corta en ningún punto. Si el sistema tiene una única solución, la recta es tangente a la circunferencia, pues la corta en un solo punto. Y si la recta tiene dos soluciones, la recta es secante a la circunferencia pues la corta en dos de sus puntos.		
		FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE Actividad 4 Consecutivamente, el docente propone a sus estudiantes, dar solución a la siguiente consigna de forma individual en el cuaderno de cada estudiante: ▪ Determinar la posición relativa de la recta para cada caso: $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0; y - x = 0$ $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25; y - 3x = 6$ $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 28 = 0; y - 4 = 0$	Indicar la posición entre una circunferencia y una recta haciendo manejo algebraico	▪ lápiz ▪ borrador ▪ Hojas Cuadriculadas
		FASE 5. INTEGRACIÓN Actividad 5 Después de la realización de la parte práctica, el docente debe proponer las siguientes consignas y preguntas para ser resueltas de forma individual:	interpretar las propiedades dadas y ademas hacer un manejo formal de ellas	▪ lápiz ▪ borrador ▪ Hojas Cuadriculadas

- ¿Recuerdas alguna propiedad matemática? Si, Enúnciala No, ¿Por qué?
- Lee detenidamente las siguientes propiedades y recíprocos que se tienen en relación a la tangencia que se establece entre la circunferencia y la recta:
  1. Propiedad: Si una recta y una circunferencia en un mismo plano se interceptan en un punto, entonces la circunferencia y la recta son tangentes y el punto se llama punto de tangencia.
  2. Propiedad: Una recta perpendicular al segmento radial de una circunferencia en su extremo externo es tangente a la circunferencia.
  3. Recíproco: Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento radial en el punto de tangencia.
  4. Recíproco: Los segmentos tangentes trazados a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y determinan ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y el punto de intersección de las tangentes.

		▪ Representa gráficamente la información que presenta cada propiedad y recíproco. ▪ ¿Qué relación se puede establecer, entre la parte práctica que se realizó y las propiedades y recíprocos que se están trabajando?. ▪ ¿Qué se puede ganar, al conocer las propiedades y recíprocos que se establecen a partir de la tangencia entre la circunferencia y la recta?. Después socializar las respuestas dadas a las consignas y preguntas anteriores		
NIVEL DEL MODELO	PROPÓSITOS DEL NIVEL	FASES DE APRENDIZAJE	OBJETIVO	RECURSOS
NIVEL IV	Fortalecer el proceso metodológico que se propicia en el estudiante cuando se aborda la prueba matemática.	**FASE 1: INFORMACIÓN.** Actividad 1 De acuerdo a la figura, en la cual O es el centro de la circunferencia, completa las siguientes oraciones:  __________ es un diámetro. __________ es un radio. __________ es una cuerda. __________ es una recta secante. __________ es una recta tangente. __________ es una recta exterior.	Interpretar la relación que existente entre una recta y una circunferencia	▪ Colores ▪ Reglas ▪ Compás ▪ Hojas Cuadriculadas ▪ Elementos para Dibujar (lápiz)

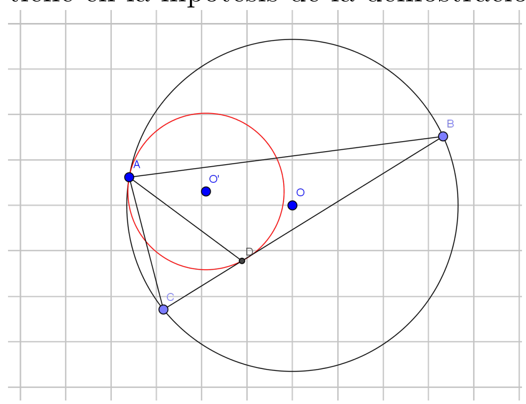
FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

Actividad 2

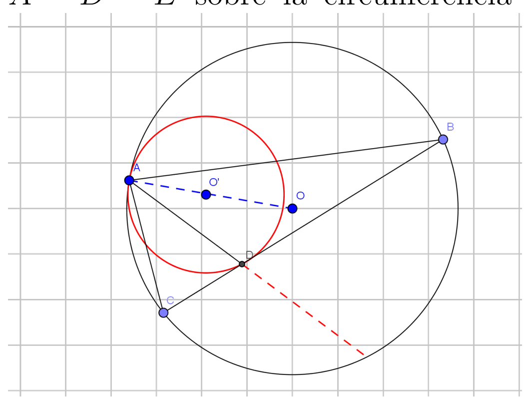
Dos circunferencias de centros O y O' son tangentes interiores en A. Por un punto D sobre la circunferencia interior ue se traza una angente BC (B y C sobre la circunferencia mayor.

Demostrar que AD es bicectriz del angulo BAC

Primero construir y realizar los datos que se tiene en la hipótesis de la demostración



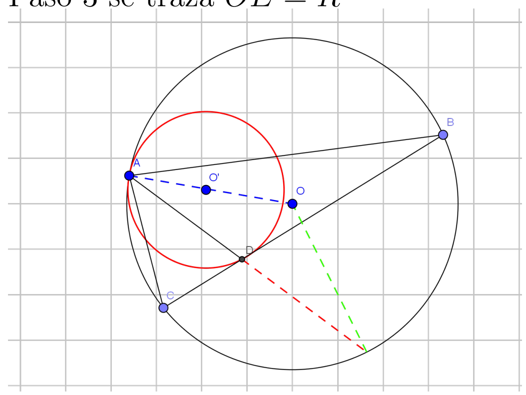
Paso 2 trazar $AO = R$ (radio mayor de la circunferencia) y tamben prolongar AD $A - D - E$ sobre la circunferencia mayor



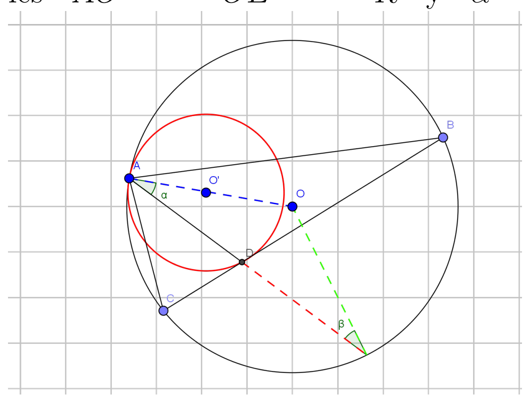
Mediante la ayuda de Geogebra hacer una demostración de un teorema de circunferencias tangentes

- Software Geogebra
- Reglas
- Compás
- Hojas Cuadriculadas

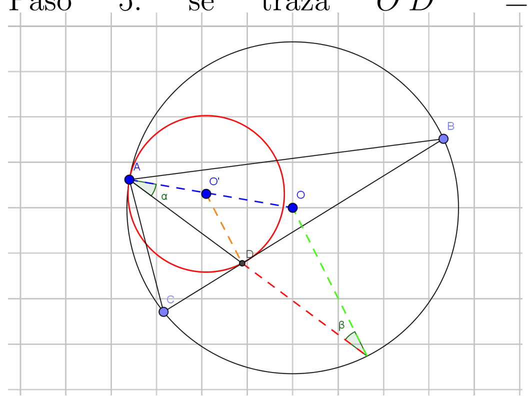
Paso 3 se traza $OE = R$



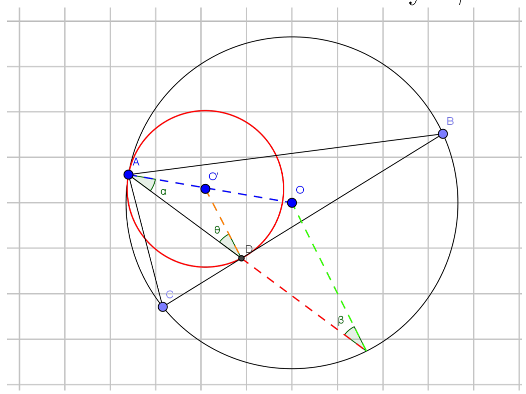
Paso 4: el triangulo AOE es isósceles $AO = OE = R$ y $\alpha = \beta$



Paso 5: se traza $O'D = r$

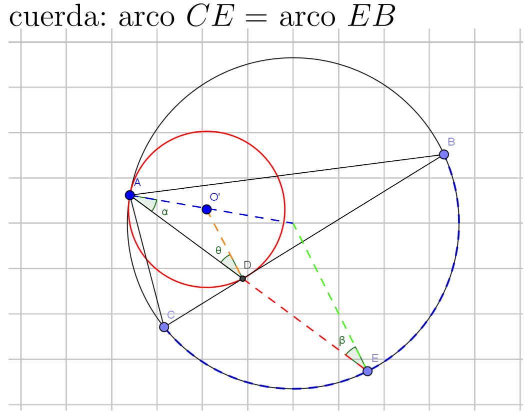


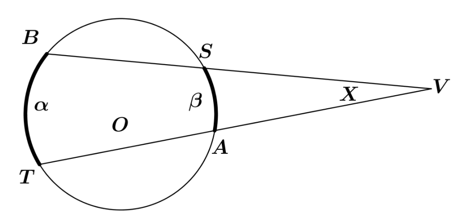
El triangulo $O'AD$ es isósceles $AO' = O'D = r$ y $\beta = \theta$



El profesor plantea a los estudiantes las siguientes afirmaciones para seguir avanzado en la demostración

- Lo segmentos DO' y EO son paralelos ¿por qué?
- $O'D$ es perpendicular a CB ¿por qué?
- OE es perpendicular a CB por las afirmaciones anteriores
- como OE es un radio perpendicular a la cuerda CB entonces la biseca y biseca mayor y menor subtenidos por la cuerda: arco $CE =$ arco EB



		luego de esto se pueden sacar las siguientes conclusiones ▪ los ángulos inscritos CAE y EAB son iguales en medida, pues subtienden arcos iguales ▪ Por la afirmación anterior, ang $CAE =$ ang EAB, luego AE (y or lo tanto AD) es bicectriz del ang BAC		
		FASE 3. EXPLICITACIÓN Actividad 3. Basado en el ejercicio anterior resolver lo siguiente Demostrar que el diámetro es la mayor cuerda posible que se puede trazar	Mostrar que la construcción de una figura responde a propiedades matemáticas.	▪ Reglas ▪ Compás ▪ Hojas Cuadriculadas ▪ Elementos para Dibujar (lápiz)
		FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE Actividad 4 Demostrar que todo angulo exterior cuyos lados son secantes con la circunferencia tiene como medida la semicircunferencia entre los arcos correspondientes por las cuerdas que lo forman. 	Realizar demostraciones sencillas y establecer las relación entre un angulo exterior a una circunferencia y sus arcos.	▪ Hojas Cuadriculadas ▪ lápiz

		FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE Actividad 5 De manera individual se plantean los siguientes problemas para resolver a) Un grupo de epidemiólogos necesita aislar una zona de tierra tal que no se afecten las muestras a estudiar ni que éstas infecten al resto de la fauna y flora del terreno. Para ello aíslan la zona en un radio de 5 metros a la redonda. Si el centro de la zona en cuarentena debe estar a 5 metros de distancia al oriente y a 7 metros de distancia al nort del puesto de control. ¿Un epidemiólogo que se desplace sin protección por la recta $-3x + 10y = 0$ entrará a la zona de cuarentena en algún momento? b) Un equipo de bomberos requiere apagar un incendio forestal que aqueja una zona de llanura, el fuego ha consumido una zona a la redonda del punto de ignición que se encuentra encerrada por la ecuación $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$, para ello recurren a trazar una línea de acción descrita por un corta fuego de ecuación $-x + 6y = 14$. ¿Surtirá efecto la medida con respecto al fuego, teniendo en cuenta que se necesita de al menos dos puntos de contacto con el corta fuego para que el fuego se extinga?	Resolver problemas contextualizados sobre circunferencia que impliquen la organización de datos.	▪ Hojas Cuadriculadas ▪ lápiz

Capítulo 6

Análisis

En este capítulo presentaremos los análisis de los datos recogidos en los diferentes instrumentos de investigación (actividad exploratoria, entrevista diagnostica, notas de campo).

1. Análisis objetivo 1

Para lograr caracterizar al grupo de estudiantes en que nivel de aprendizaje se encuentran según el modelo Van Hile, se obtuvo la información directamente de los estudiantes, siendo nuestras primeras fuentes, los datos recolectados a través de los instrumentos aplicados a estos: Documento escrito(actividad exploratoria),las notas de campo ademas de una entrevista semi-estructurada. Primero se aplico la actividad exploratoria, luego de leer y analizar las respuestas escritas por los estudiantes se diseño una entrevista semi-estructurada para indagar y aclarar algunas respuestas que no eran claras, la información de esta fue guardada en audios para su posterior análisis.

1.1. Diagnostico

En la teoría de Van Hiele se afirma que para conocer en qué nivel de razonamiento se encuentra un alumno es necesario atender tanto a sus estrategias de resolución de problemas como a su forma de expresarse y al significado que le da al vocabulario que escucha, lee o utiliza para expresar sus conocimientos. Desde este punto de vista resulta relevante detenerse en la comprensión y uso que los alumnos muestran de lo que para ellos significan los términos "definir" y "demostrar". Las concepciones de los alumnos sobre el significado de estos términos son dos valiosas pistas, para que el docente comprenda con qué nivel de razonamiento matemático los alumnos están operando. (Bressan, 2000, 2006. p.76). Es así que enunciaremos las características principales de cada nivel y de este modo diagnosticar a los estudiantes tomando como eje central la actividad exploratoria y enriqueciendo estos datos con olas notas de campo y la entrevista.

NIVEL 1. RECONOCIMIENTO:

- Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen.
- No suelen reconocer explícitamente las partes de las que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Gutiérrez (2000).
- Reconocen las figuras solamente por su aspecto, comparándolos con un prototipo conocido. Las propiedades de una figura no se perciben. En este nivel, toman decisiones basadas en la percepción, no el razonamiento.

NIVEL 2. ANÁLISIS:

- Pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- No relacionan unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. Gutiérrez (2000).
- Pueden ver figuras como las colecciones de propiedades. Pueden reconocer y nombrar las propiedades de figuras geométricas, pero no ven las relaciones entre estas propiedades.

NIVEL 3. CLASIFICACION:

- Describen las figuras de manera formal, dan definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y sus requisitos
- Aplican pasos individuales para el razonamiento lógico-formal, pero sin concatenarlos, no se entiende la estructura de la demostración.
- No se entiende la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 4. DEDUCCIÓN FORMAL:

- Las demostraciones adquiere sentido.
- Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
- Entienden la equivalencia de definiciones del mismo concepto conceptos.
- Se tiene una visión globalizadora del área de estudio.

1.2. Análisis nivel 1

Análisis a las respuestas de la primera pregunta

En la pregunta 1 se busca que los estudiantes relacionen de manera natural la circunferencia con la imagen presentada con una comparación con otros objetos.

En el grupo 1 los estudiantes, consideran que la figura contiene algunas circunferencias que ellos enumeraron, mencionan algunas partes de ella como que tiene un radio y centro. evidenciado en la respuesta dada en la actividad exploratoria.

De igual manera en la entrevista semi-estructurada evidenciamos y completamos lo dicho por los estudiantes en la actividad exploratoria y que no eran claros a la hora de analizar

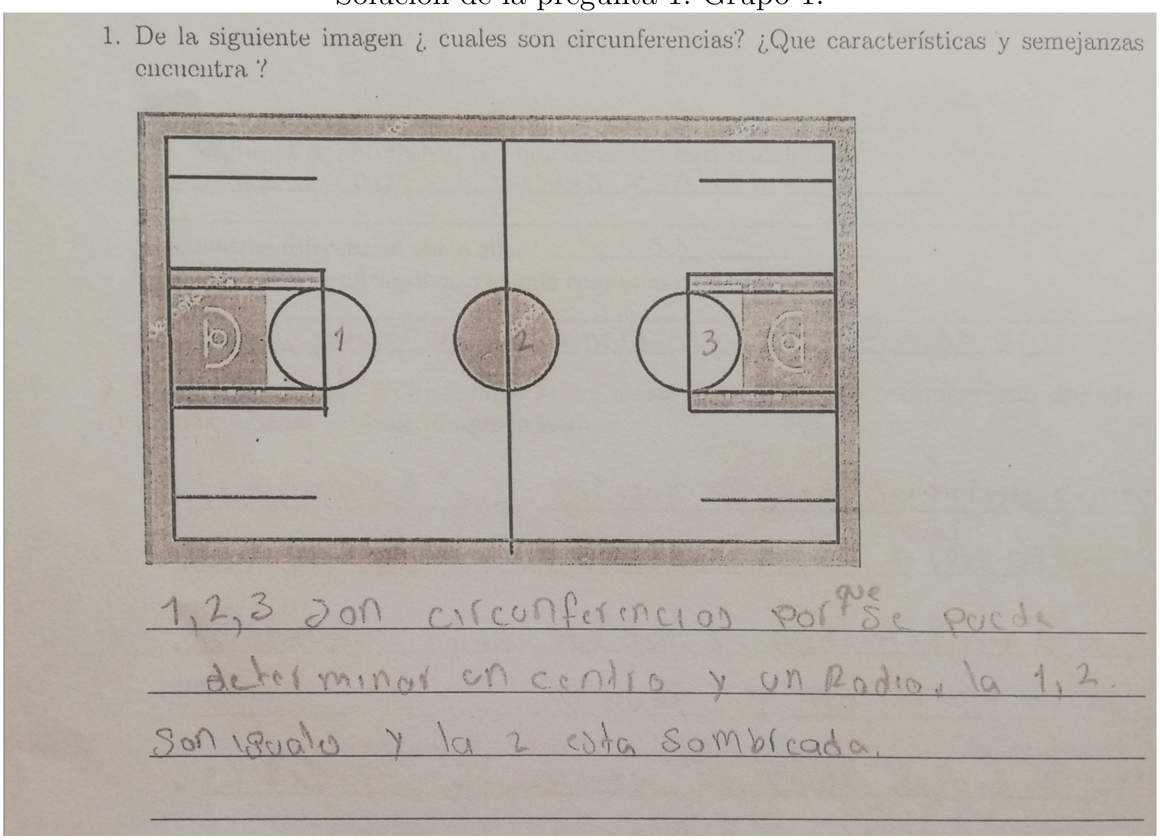
Respuesta pregunta 1. Grupo 1.

Investigador	¿Cual es la diferencia entre circulo y circunferencia?
Estudiantes	El circulo es una figura que tiene fin

Fuente: Entrevista semi-estructurada

De la misma manera en las notas de campo se refleja que para deducir cuales de las figuras eran circunferencias en el grupo se debatió la diferencia entre circulo y circunferencia pues para ellos es difícil realizar una diferenciación concreta. Lo anterior lo evidenciamos en la siguiente imagen que muestra lo escrito por el grupo de estudiantes

Solución de la pregunta 1. Grupo 1.

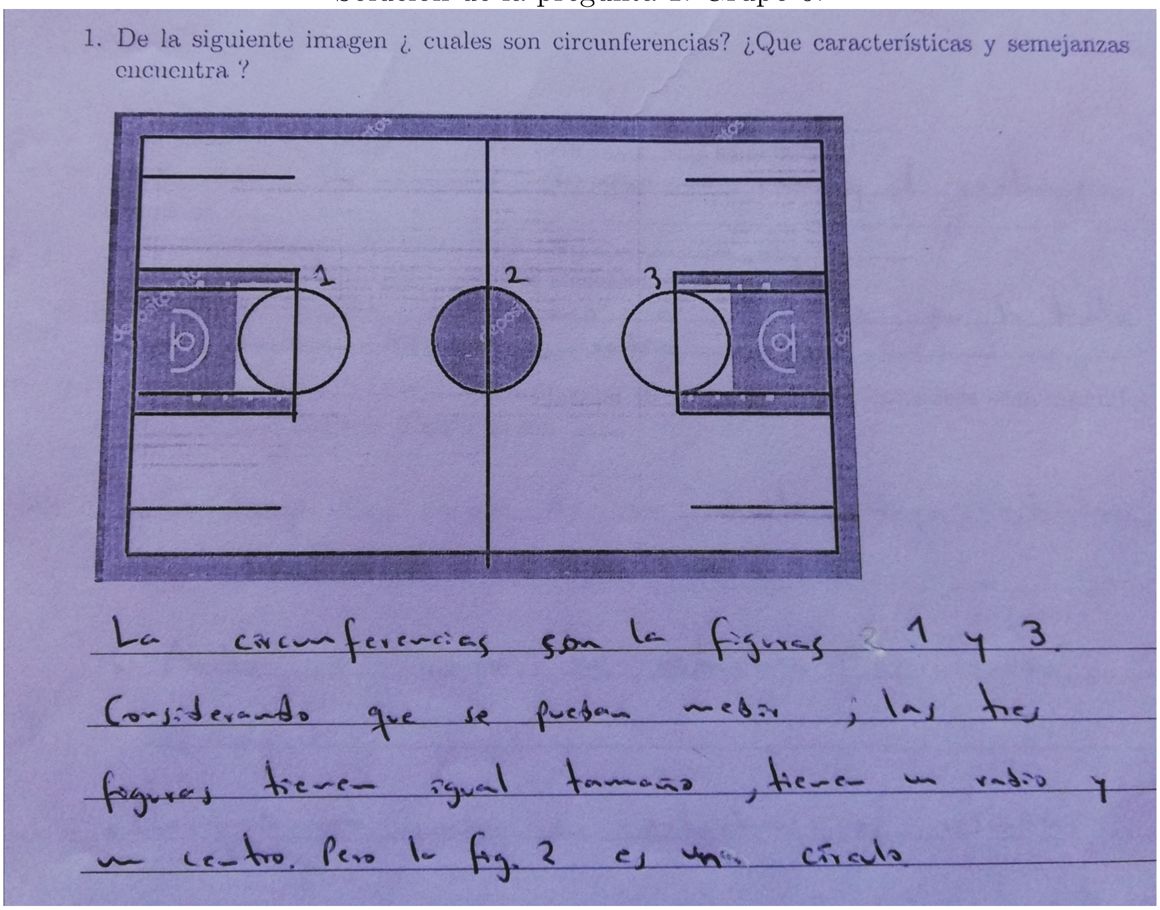


Fuente: Actividad exploratoria.

Esta respuesta refleja varias cosas, primero nombran algunas partes de la circunferencia como centro y radio ademas que los estudiantes no tiene claro la diferencia entre circulo y circunferencia, pues al comparar 1 y 2 como ellos nombraron para hacer referencia al circulo dicen que esta sombreado, para tener claro esto es necesario realizar un trabajo anterior para afianzar los conceptos, los aprendizajes vinculados a los conceptos de círculo y circunferencia son complejos y abarcan varios años de escolaridad (Sadovsky, 1998), otros autores la establecen la diferencia argumentando que la circunferencia es el número que mide la longitud del círculo (Clements,1998), o definen a la circunferencia como la curva y el círculo como la superficie encerrada por la circunferencia (Roanes,1980).

En cambio el grupo numero 5 ya hace referencia al circulo, evidenciado en la respuesta que plantean, nombran otras características como tamaño y posición. En lo cual se observa una respuesta que corresponde a un nivel superior a este, se evidencia en la siguiente imagen

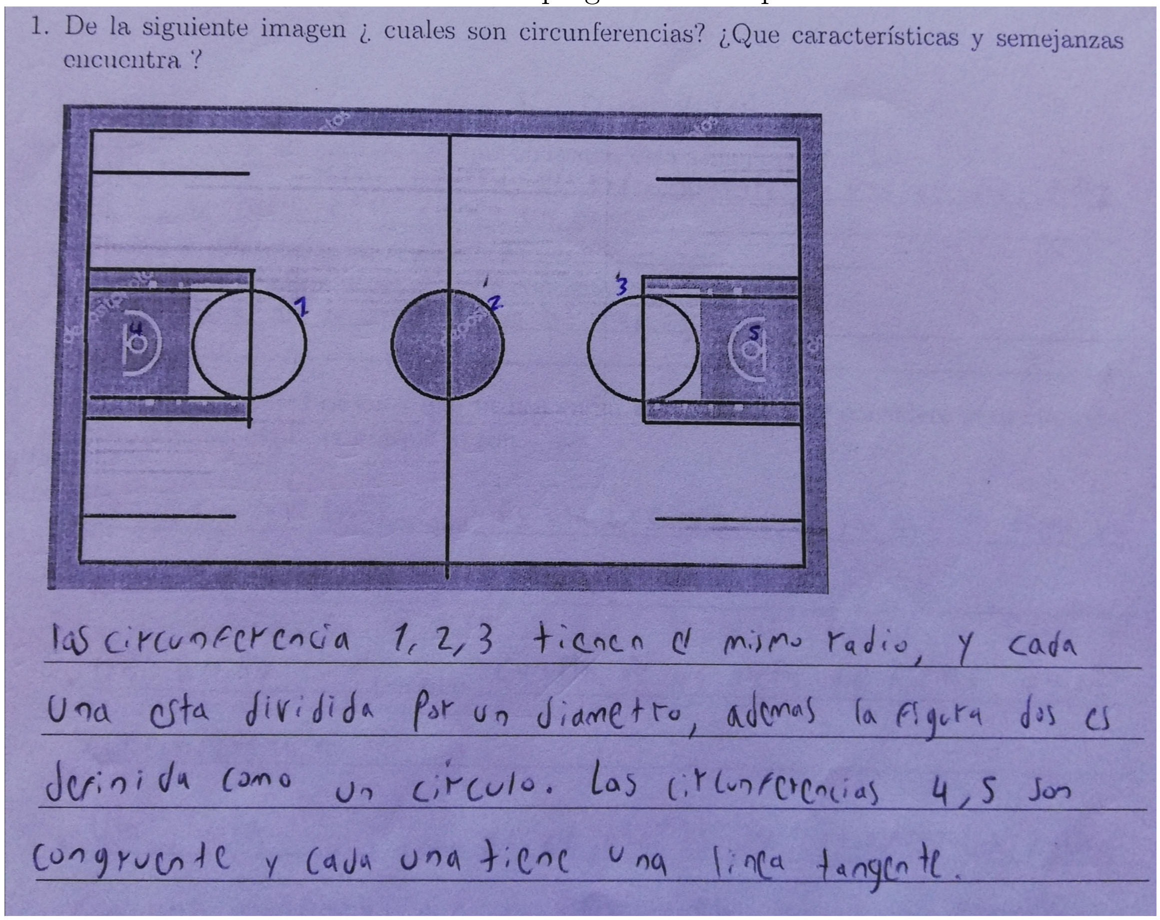
Solución de la pregunta 1. Grupo 5.



Fuente: Actividad exploratoria.

Y así mismo el grupo 2 plantea otras características de la circunferencia como es diámetro, hablan de congruencia y rectas tangentes, en las notas de campo notamos que tienen un manejo claro de la definición de circunferencia y de la misma manera lo mostramos en la siguiente imagen

Solución de la pregunta 1. Grupo 2



1. De la siguiente imagen ¿ cuales son circunferencias? ¿Que características y semejanzas encuentra ?

las circunferencia 1, 2, 3 tienen el mismo radio, y cada una esta dividida por un diametro, ademas la figura dos es definida como un circulo. Las circunferencias 4, 5 son congruente y cada una tiene una linea tangente.

Fuente: Actividad exploratoria.

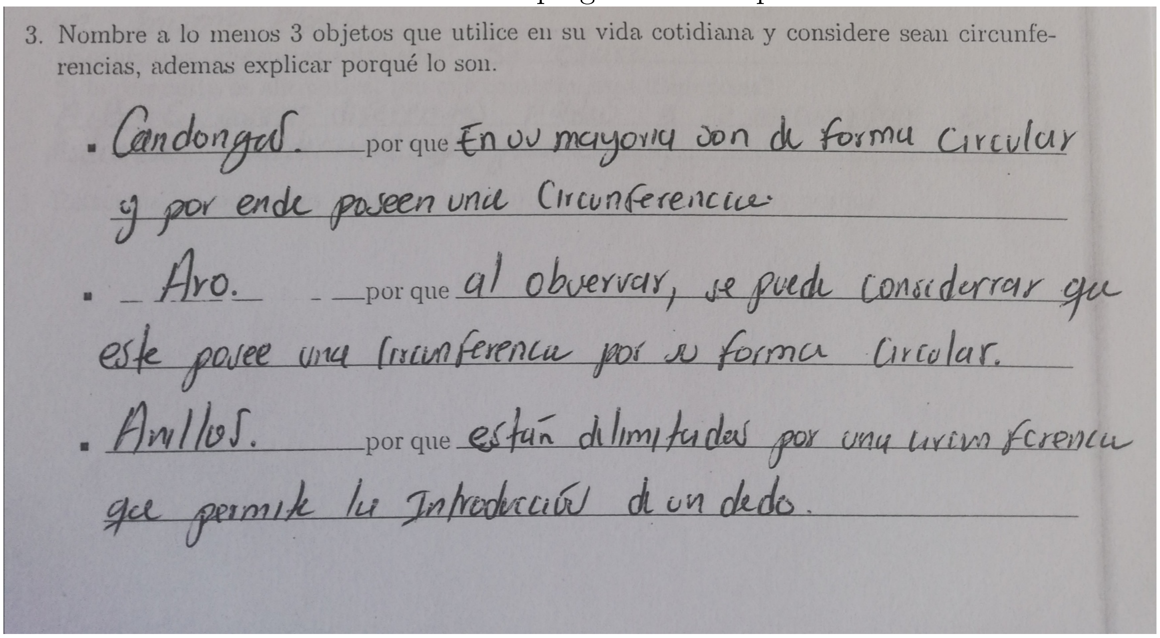
Es importante resaltar que en este grupo se observan y visualizan mas características y elementos de la circunferencia que no son propios de este nivel, es decir que podemos afirmar que superan el nivel 1, pues ven mas allá de relacionar y comparar . Es así que Clements y Battista (1992), (citado en Castiblanco et al., 2004), consideran que "(...) la visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones a partir de las representaciones de los objetos bi tridimensionales observadas en construcciones y manipulaciones" (p. 10). Es decir que mediante la observación de la imagen los estudiantes pudieron relacionar y concluir elementos de la circunferencia.

Análisis a las respuestas de la tercera pregunta

La preguntas 3 tienen como objetivo analizar las descripciones de los estudiantes sobre la circunferencia en el ambiente que lo rodea

En esta pregunta los estudiantes del grupo 4 relacionan figuras que utilizan en la vida cotidiana como lo son anillos, candongas, aros, pero a la hora de justificar sus respuestas son superficiales y repetitivas, y a la hora de justificar porque son circunferencias no son capaces de hacerlo formal, su respuesta es vaga como lo que se espera en este nivel.

Solución de la pregunta 3. Grupo 4.



3. Nombre a lo menos 3 objetos que utilice en su vida cotidiana y considere sean circunferencias, ademas explicar porqué lo son.

- Candongas. por que En su mayoria son de forma circular y por ende poseen una circunferencia
- Aro. por que al observar, se puede considerar que este posee una circunferencia por su forma circular.
- Anillos. por que están delimitados por una circunferencia que permite la introducción de un dedo.

Fuente: Actividad exploratoria.

Respuesta pregunta 3. Grupo 4.

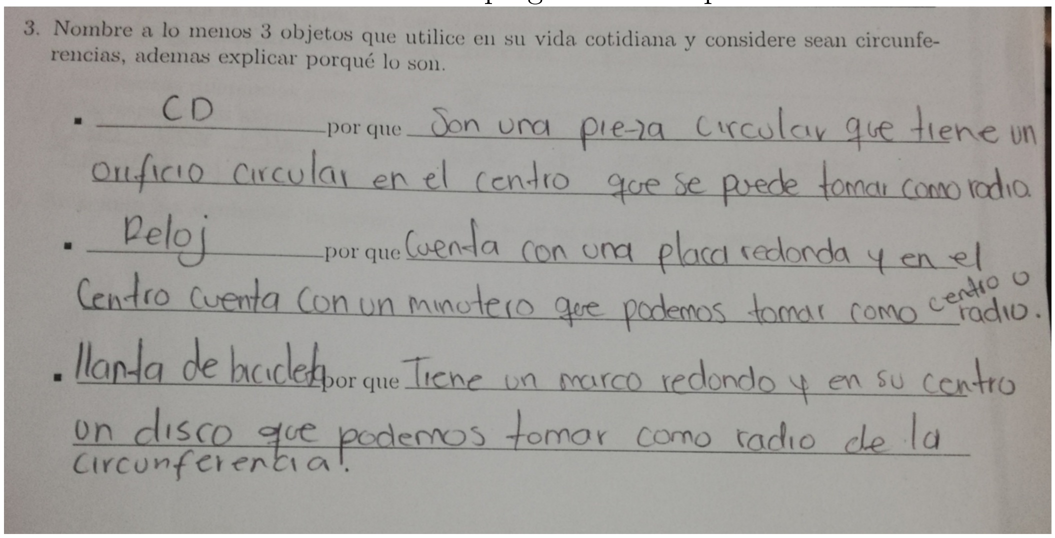
Investigador	según la justificación, a que las candongas y aro son circunferencias porque poseen una forma circular, explique a que hace referencia a forma circular
Estudiantes	primero había una confusión entre que todo lo que fuera circulo tenia circunferencia y no encontrabamos unas palabras que justificaran el porque esos objetos eran circunferencia

Fuente: Entrevista semi-estructurada

Observamos que los objetos asociados en general si son circunferencias pero la justificación no es ,uy clara y al indagar en la entrevista semi-estructurada sobre a que se referían con que era circunferencia por tener forma circular, nos dan conocer que tenían dificultad a la hora de diferenciar circulo y circunferencia algo que ya hemos visto plasmado en algunos grupos en la pregunta anterior, de otra manera la justificación fue esa pues no encontraban unas palabras que expresaran el porque esos objetos son circunferencias.

De otra manera encontramos en el grupo 6 que los algunos de los objetos mencionados no son circunferencias y en la justificación se nota confusa y de pocos elementos.

Solución de la pregunta 3. Grupo 6.



3. Nombre a lo menos 3 objetos que utilice en su vida cotidiana y considere sean circunferencias, ademas explicar porqué lo son.

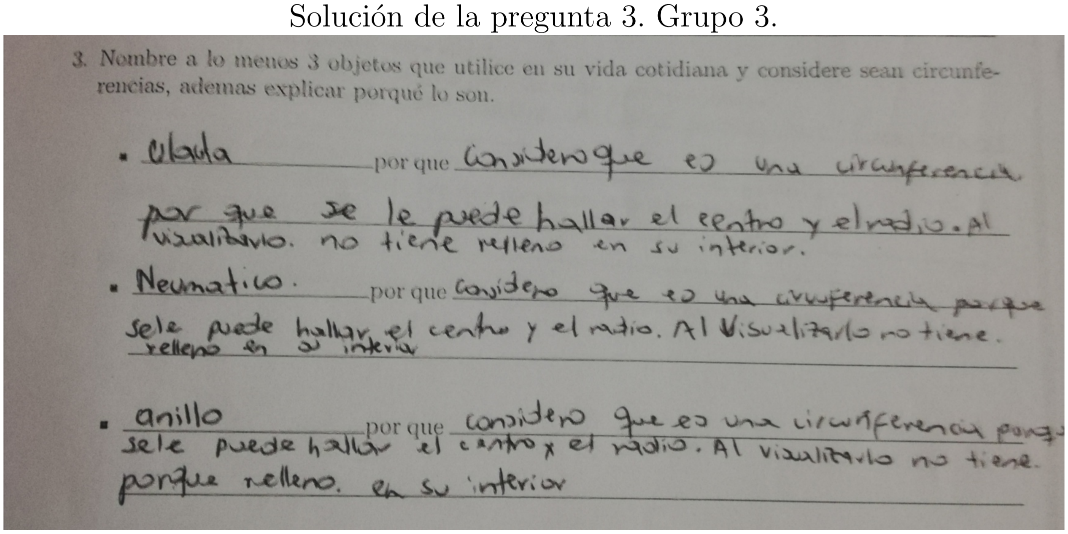
- CD por que Son una pieza circular que tiene un orificio circular en el centro que se puede tomar como radio
- Reloj por que Cuenta con una placa redonda y en el Centro cuenta con un minotero que podemos tomar como centro o radio.
- llanta de bicicleta por que Tiene un marco redondo y en su centro un disco que podemos tomar como radio de la circunferencia.

Fuente: Actividad exploratoria.

En la entrevista se indaga en el porque de la escogencia de estos objetos que claramente no son circunferencias y su justificación. Los estudiantes dicen que no saben que mas responder de mas a lo escrito en la actividad exploratoria.
Es claro que los estudiantes no tienen claro la diferencia entre radio y centro pero esto no es propio de este nivel, pues la asociación de los objetos con la circunferencia en general esta bien. Gutiérrez y Jaime (2012) afirman que existe un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. esto evidenciado en la justificación de los objetos.

Por otro lado en le grupo 3 los estudiantes relacionan objetos como ula ula, neumatico anillo, su justificación es pobre y repetitiva coo se esperaba para este nivel.

Solución de la pregunta 3. Grupo 3.



3. Nombre a lo menos 3 objetos que utilice en su vida cotidiana y considere sean circunferencias, ademas explicar porqué lo son.

- Ulaula por que Considero que es una circunferencia por que se le puede hallar el centro y el radio. Al visualizarlo. no tiene relleno en su interior.
- Neumatico. por que Considero que es una circunferencia porque se le puede hallar el centro y el radio. Al Visualizarlo no tiene. relleno en su interior
- anillo por que considero que es una circunferencia porque se le puede hallar el centro y el radio. Al visualizarlo no tiene. porque relleno. en su interior

Fuente: Actividad exploratoria.

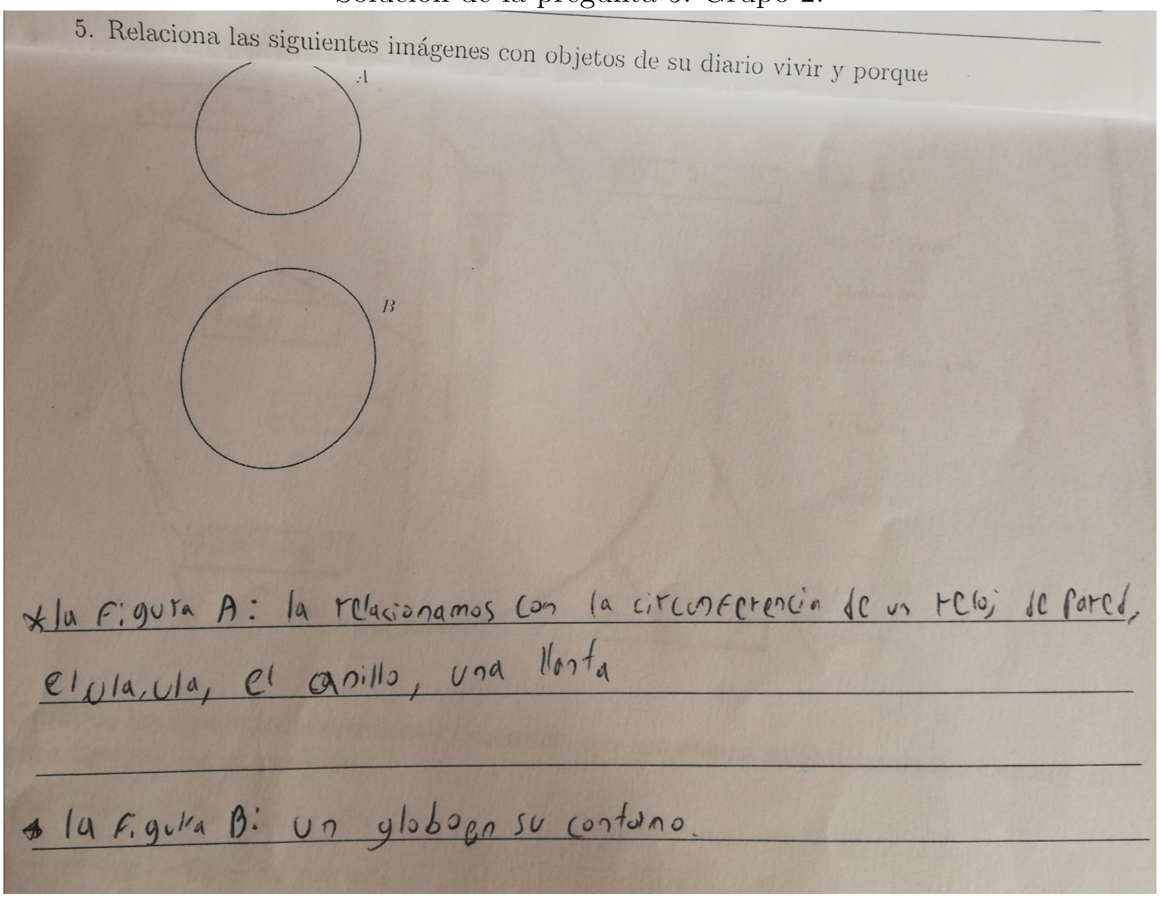
Se evidencia que aunque relacionan objetos que son circunferencias la justificación es escasa y repetitiva, nombran algunos elementos como son centro y radio y hacen énfasis en que no tiene relleno en su interior, en las notas de campo se evidencio que esto fue para que quedara claro que no era un circulo.

Análisis a las respuesta de la quinta pregunta

La pregunta 5 busca que visualmente encuentre la diferencias, semejanzas con otros objetos de la vida cotidiana.

En el grupo 2 observamos que relacionan la figura A con objetos tales como ula ula, anillos, llantas pero no hay una justificación de porque escogieron estos objetos. ademas la figura B la relacionan con el contorno de un huevo, en las notas de campo se observo que las escribían porque se parecían a una circunferencia. Lo anterior lo mostramos en la siguiente imagen:

Solución de la pregunta 5. Grupo 2.

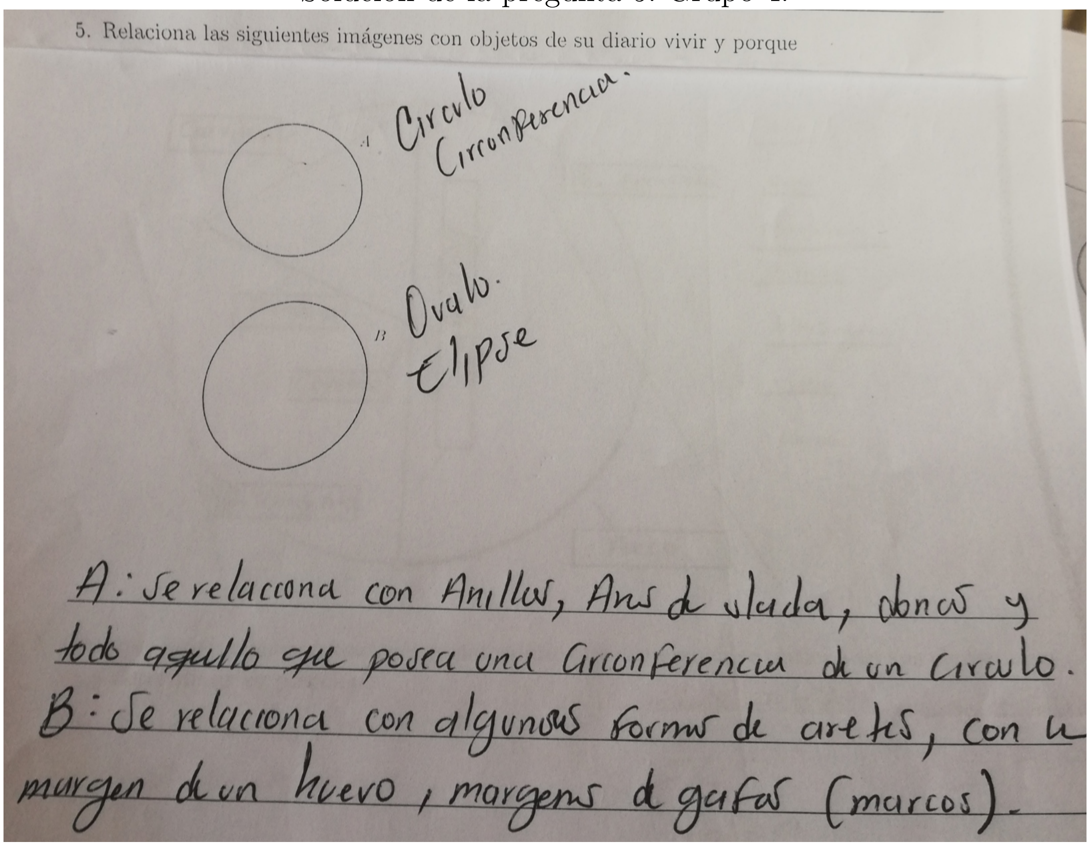


Fuente: Actividad exploratoria.

Es necesario tener en cuenta la importancia de la pregunta que era relacionar la circunferencia con objetos de la vida diaria y presentar estas desde un enfoque globalizado y geométrico cuyo objetivo es relacionar los distintos campos de las matemáticas entre sí y con conocimientos de otras materias, así como utilizar las habilidades matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana. Por ello, es esencial que los estudiantes vean que las matemáticas están presentes en multitud de situaciones su entorno más cercano. (Gregorio, 2002)

De la misma manera el grupo 4 hace la relación de la figura A con objetos que si son circunferencias aunque la justificación es similar a lo expuesto en la pregunta 3. En la figura B evidenciaron que no era una circunferencia, ellos la llamaron “ Ovalo - Elipse ” y lo relacionaron con la margen de un huevo.
Lo anterior lo mostramos en la siguiente imagen:

Solución de la pregunta 5. Grupo 4.



Fuente: Actividad exploratoria.

En este caso podemos ver que los estudiantes observaron que una de ellas era circunferencia y la otra no aunque fueran similares, también que estas figuras las relacionan con objetos cotidianos que como argumenta Edo (1999), para enseñarle geometría a los estudiantes hay que partir de su propia experiencia, investigando en primer lugar su alrededor. Para que vayan aprendiendo las figuras y sus nombres, se debe empezar con la observación de aquellas figuras que les rodean.

Después de realizar los análisis y ver las soluciones a cada una de las preguntas, es claro ver que, la comparación con otros objetos no necesariamente geométricos es clara, su justificación la hacen con elementos de la circunferencia que son características de niveles superiores a este, como or ejemplo al decir que un anillo es una circunferencia “porque se le puede hallar el centro, el radio. Al visualizarlo no tiene relleno en su interior ”.(Solución a la pregunta 3.Grupo 3)

Los objetivos planteados para cada pregunta que se encuentra en la actividad exploratoria se cumplen, pues en la ‘pregunta 1 se se buscaba que los estudiantes relacionaran de manera natural la circunferencia con la imagen presentada con una comparación con otros objetos. pues lo comparan con objetos geométricos y nombran características de ellos. en la preguntas 3 tenia como objetivo analizar las descripciones de los estudiantes sobre la circunferencia en el ambiente que lo rodea. y los objetos nombrados hacen referencia a circunferencia ademas de reconocer partes de la circunferencia algo que no es de este nivel según lo planteado en las características del nivel del reconocimiento y en la pregunta 5 buscaba que visualmente encentrara las diferencias, semejanzas con otros objetos de la vida cotidiana a lo cual los estudiantes contestaron no solo por la percepción, compararon y justificaron de manera adecuada.

Por lo expuesto, anteriormente, se deduce que los estudiantes superan el nivel de reconocimiento, pues los estudiantes relacionan la circunferencia con otros objetos y mencionan elementos de ella algo que es de un nivel superior a este, ademas no se quedan solo con su aspecto si no que hay un poco de reconocimiento de propiedades y razonamiento de ellas.

2. Análisis objetivo 2

En el capitulo V se encuentra la secuencia didáctica, para su diseño se partió del modelo de Van Hiele articulado con secuencias didácticas soportado por Tobón et al., (2010) el cual presenta una metodología de planeación de actividades secuenciales.A continuación se van analizar de manera general las actividades seleccionadas para la secuencia didáctica.

Actividad 1. Nivel 2

El docente les dará a los estudiantes los conceptos de los elementos básicos de la circunferencia

La circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo.

ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

CENTRO: es el punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia. Es importante comprender que el centro no es un punto de la circunferencia. RADIO: es cualquiera de los segmentos que unen el centro con un punto de la circunferencia. La circunferencia tiene infinitos radios y todos tienen la misma longitud. CUERDA: es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia.

DIÁMETRO: Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Los diámetros son las cuerdas más grandes y todos tienen la misma longitud: cualquier diámetro es el doble de un radio.

ARCO DE CIRCUNFERENCIA: es la parte de la circunferencia limitada por los extremos de una cuerda.

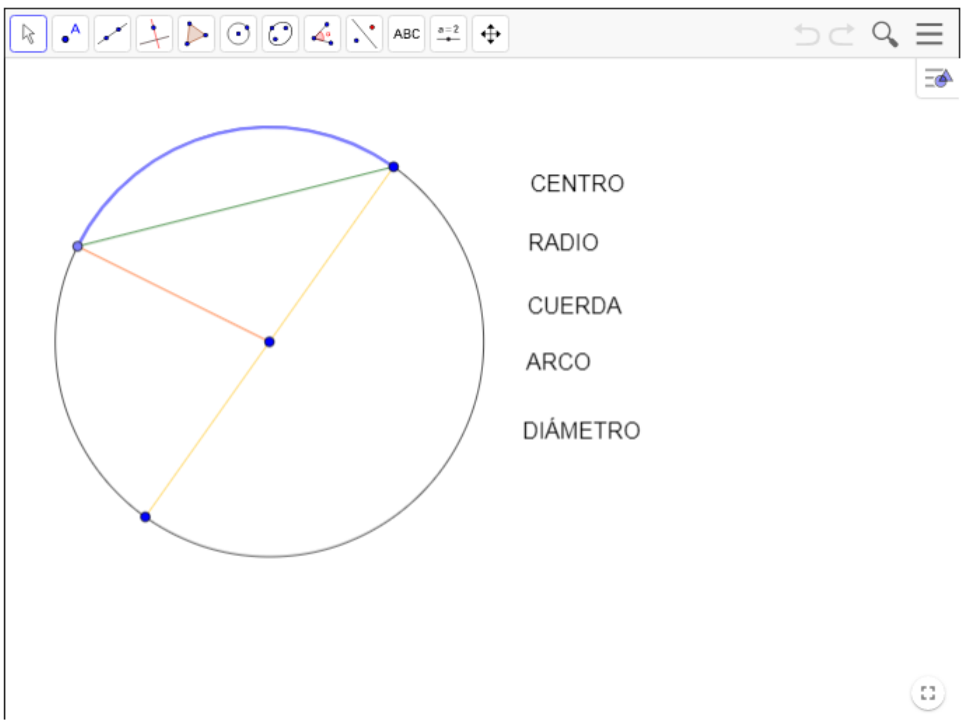
Según Fran (2017) para la fase de información, e l profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etcétera.Es así que en esta actividad se busca acercar al estudiante al concepto de circunferencia y sus elementos.

Actividad 2. Nivel 2

el docente plantea la siguiente actividad En el dibujo aparece una circunferencia con sus elementos.

A un lado puedes ver una serie de etiquetas. Utiliza la herramienta vector  que aparece en el menú de rectas para relacionar cada etiqueta con el elemento correspondiente.

Cuando termines guarda el archivo



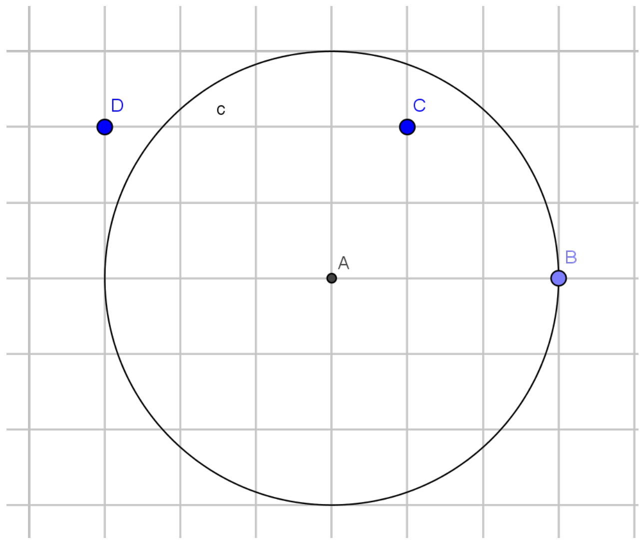
Como esta actividad también es de la fase de información, según Vargas (1990) es bueno que mediante las preguntas adecuadas se trate de determinar el punto de partida de los alumnos y el camino a seguir de las actividades siguientes. Se puede realizar mediante un test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida. Es or eso que se plantea así, pues es necesario que relacionen y conozcan los elementos de la circunferencia.

Actividad 3. Nivel 2

En el siguiente imagen aparecen tres puntos y una circunferencia de radio 3 u.

Utiliza la herramienta distancia para calcular la distancia de cada punto al centro de la circunferencia.

Mueve los puntos arrastrándolos con el ratón. Puedes cambiar su posición



Escribe debajo de cada uno de ellos su posición relativa con respecto a la circunferencia

Esta actividad esta diseñada para la fase de orientación dirigida. Según Vargas (2012) en esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado.

Actividad 4. Nivel 2

Construye tres rectas, un recta secante, tangente y exterior a una circunferencia de radio 3 u.

Utiliza la herramienta ”distancia”para calcular la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.

Escribe al lado de cada una de ellas su posición relativa con respecto a la circunferencia en el mismo color que la recta con la que se corresponda y guarda el archivo

Para esta actividad de la fase de Explicitación Alsina (1997) propone que los estudiantes intercambien sus experiencias, comenten las regularidades que han observado, y expliquen cómo han resuelto las actividades en un contexto de diálogo en grupo. Es asi que la actividad se propone ara que cada uno lo solucione de una manera diferente haciendo uso de Geogebra y socializando con los demás compañeros

Actividad 5. Nivel 2

En el centro de un jardín circular de radio $4,5m$ se quiere construir una fuente cuya base es un triángulo equilátero con perímetro $3m$. La medida del área del jardín que no esta cubierta por la fuente es

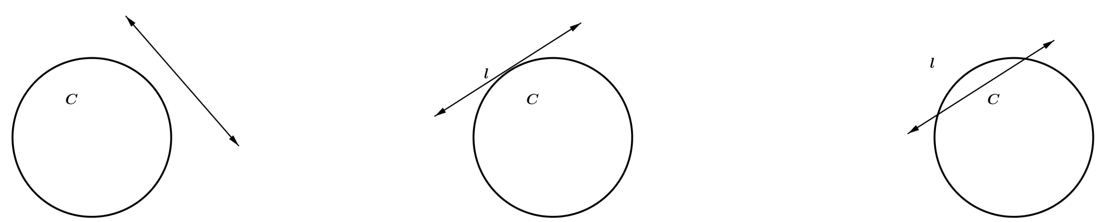
Para la actividad de esta fase basados en Gutierrez (2016) El objetivo de esta fase es lograr que los estudiantes se formen una visión global de lo aprendido sobre el tema y que terminen de formar su nueva red de relaciones integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que ya tenían.

Actividad 1. Nivel 3

El docente planteara a los estudiantes la siguiente pregunta, para ser resuelta por estos de forma individual

- De acuerdo a las siguientes representaciones, ¿Qué relación existe entre la recta y la circunferencia en cada caso?

Representación A | Representación B | Representación C



Después de que los estudiantes den respuesta a las pregunta formulada, el docente explicara a los estudiantes la relación existente entre la recta y la circunferencia en cada caso.

De acuerdo con Gutierrez(1990) quien menciona que las actividades para la fase 1 deben ser para dar a conocer el instrumento a trabajar se tomo y planteo esta actividad que tiene como interpretar la relación que existente entre una recta y una circunferencia, pues para este nivel ya se manejan las características y elementos que como‘ponen a la circunferencia. se plantea una pregunta abierta para que los estudiantes abiertamente den a conocer sus diferentes puntos de vista para luego el maestro de a conocer realmente la relación que hay entre la recta y la circunferencia para complementar y corregir las respuestas dadas.

Actividad 2. Nivel 3

Abra el programa de GeoGebra, haciendo clic en el icono de acceso directo que previamente se halla instalado correctamente.

Escriba en la barra de entrada la ecuación de la recta $x + y = 3$ luego de la circunferencia que va a interceptar $x^2 + y^2 = 5$

Para ver los puntos de intersección utilice la herramienta intersección

Seleccione la ecuación de la recta y de la circunferencia y aparecerán en la ventana de vista algebraica los valores de los puntos así mismo en la gráfica.
Esta actividad tiene como objetivo establecer y determinar los puntos de intersección de una circunferencia con una recta utilizando Geo-Gebra. Fouz (2017) dice que el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de la geometría que están estudiando. Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz, por lo que es necesario la actividad propuesta esta dirigidas hacia los conceptos, propiedades, entre otros, que deben estudiar.

El trabajo que va a hacer esta organizado para que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de manera progresiva.

Actividad 3. Nivel 3

Posterior a la socialización y explicación de la anterior actividad, se requiere que el docente indique a sus estudiantes que es posible determinar la posición relativa de una recta y una circunferencia resolviendo el sistema conformado por las dos ecuaciones, es decir tomando en consideración la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia.

En relación a lo anteriormente dicho, el docente propone a los estudiantes resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, donde la primera ecuación corresponde a una circunferencia y la segunda a una recta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0 \\ 2x + 3y + 31 = 0 \end{cases}$$

Finalizado el proceso realizado por los estudiantes, se tiene que el primer sistema tiene una única solución y el segundo no tiene soluciones.

En relación a esto, el docente asentara lo siguiente:

Si el sistema no tiene solución la recta es exterior a la circunferencia, pues no la corta en ningún punto. Si el sistema tiene una única solución, la recta es tangente a la circunferencia, pues la corta en un solo punto. Y si la recta tiene dos soluciones, la recta es secante a la circunferencia pues la corta en dos de sus puntos.
En esta actividad para la fase explicitación se busca que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar. La interacción entre alumnos es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. Es así que la actividad se platea una articulación con temas antes vistos.

Actividad 4. Nivel 3

Consecutivamente, el docente propone a sus estudiantes, dar solución a la siguiente consigna de forma individual en el cuaderno de cada estudiante:

- Determinar la posición relativa de la recta para cada caso:

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0; y - x = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25; y - 3x = 6$

$x^2 + y^2 + 12x - 2y + 28 = 0; y - 4 = 0$

Esta actividad esta planteada de tal manera que los estudiantes apliquen lo visto antes, pero trabajen de tal manera individual y los ejercicios que se proponen buscan indicar la posición entre una circunferencia y una recta haciendo manejo algebraico, que mediante una serie de pasos determinen y encuentren que Si la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes la recta es secante a la circunferencia. Si la recta y la circunferencia sólo tienen un punto en común, la recta es tangente a la circunferencia. Si la recta y la circunferencia no tienen puntos comunes, la recta es exterior a la circunferencia.

Actividad 5. Nivel 3

Después de la realización de la parte práctica, el docente debe proponer las siguientes consignas y preguntas para ser resueltas de forma individual:

- ¿Recuerdas alguna propiedad matemática? Si, Enúnciala No, ¿Por qué?
- Lee detenidamente las siguientes propiedades y recíprocos que se tienen en relación a la tangencia que se establece entre la circunferencia y la recta:

1. Propiedad: Si una recta y una circunferencia en un mismo plano se interceptan en un punto, entonces la circunferencia y la recta son tangentes y el punto se llama punto de tangencia.
2. Propiedad: Una recta perpendicular al segmento radial de una circunferencia en su extremo externo es tangente a la circunferencia.
3. Recíproco: Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento radial en el punto de tangencia.
4. Recíproco: Los segmentos tangentes trazados a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y determinan ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y el punto de intersección de las tangentes.

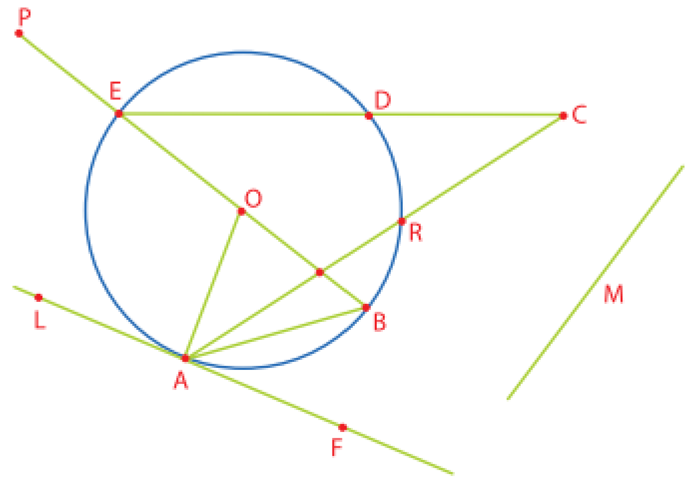
- Representa gráficamente la información que presenta cada propiedad y recíproco.
- ¿Qué relación se puede establecer, entre la parte práctica que se realizó y las propiedades y recíprocos que se están trabajando?.
- ¿Qué se puede ganar, al conocer las propiedades y recíprocos que se establecen a partir de la tangencia entre la circunferencia y la recta?.

  Después socializar las respuestas dadas a las consignas y preguntas anteriores

En esta actividad se busca sintetizar los temas ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía, se plantea trabajar de manera individual, se les dan una serie de preguntas abiertas con el fin de interpretar las propiedades dadas y ademas hacer un manejo formal de ellas para buscar el siguiente nivel.

Actividad 1. Nivel 4

De acuerdo a la figura, en la cual O es el centro de la circunferencia, completa las siguientes oraciones:



_________________ es un diámetro.

_________________ es un radio.

_________________ es una cuerda.

_________________ es una recta secante.

_________________ es una recta tangente.

_________________ es una recta exterior.

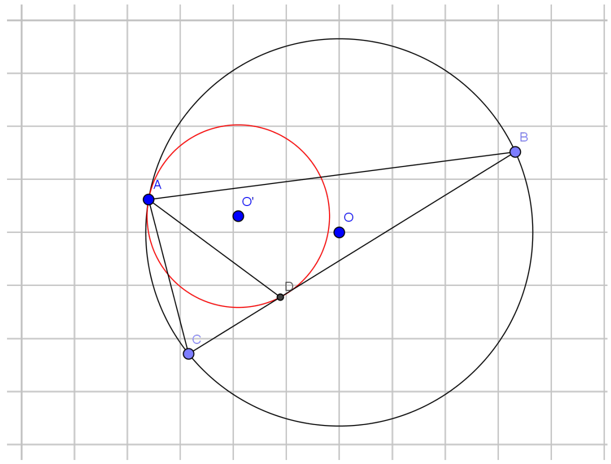
Es una actividad de la fase de información en la que se trata de determinar el punto de partida de los alumnos y el camino a seguir de las actividades siguientes. Se plantea que en la figura relacionen la circunferencia con las rectas se hace de manera individual utilizando actividades del nivel 4.

Actividad 2. Nivel 4

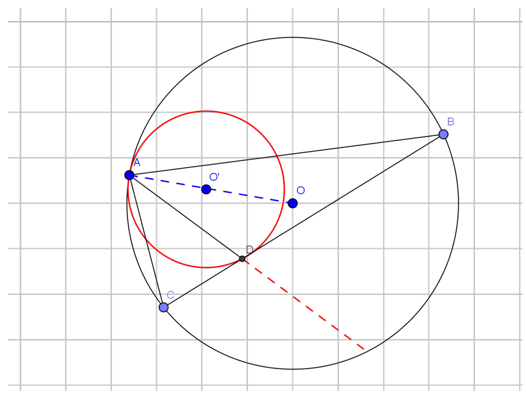
Dos circunferencias de centros O y O' son tangentes interiores en A. Por un punto D sobre la circunferencia interior ue se traza una angente BC (B y C sobre la circunferencia mayor.

Demostrar que AD es bicectriz del angulo BAC

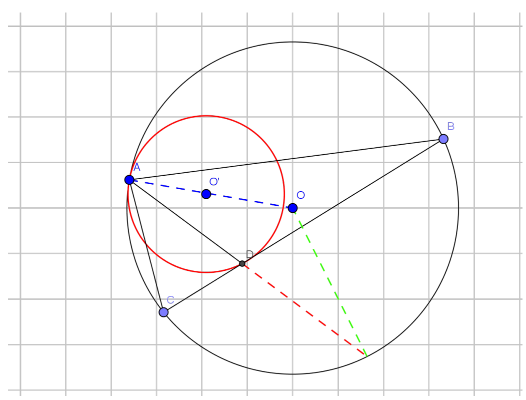
Primero construir y realizar los datos que se tiene en la hipótesis de la demostración



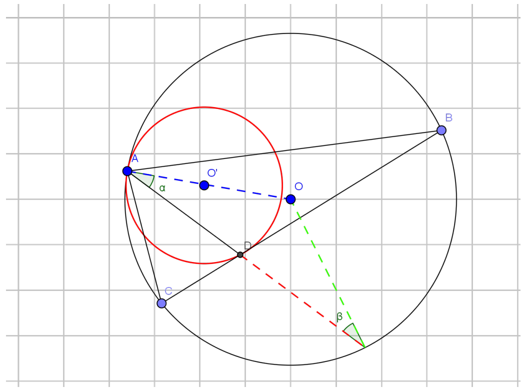
Paso 2 trazar $AO = R$ (radio mayor de la circunferencia) y tamben prolongar AD $A - D - E$ sobre la circunferencia mayor



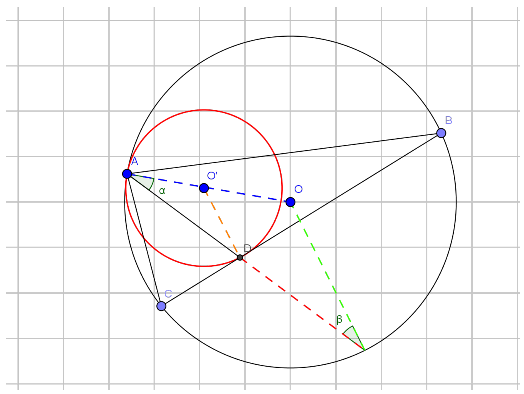
Paso 3 se traza $OE = R$



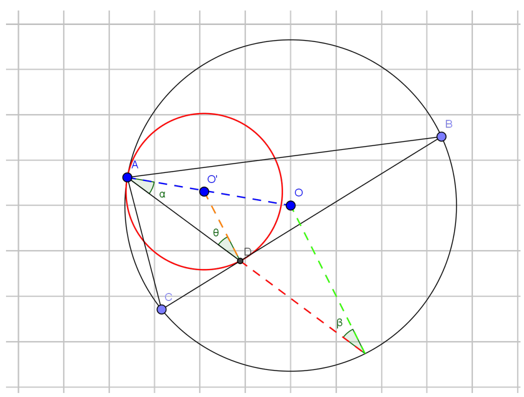
Paso 4: el triangulo AOE es isósceles $AO = OE = R$ y $\alpha = \beta$



Paso 5: se traza $O'D = r$

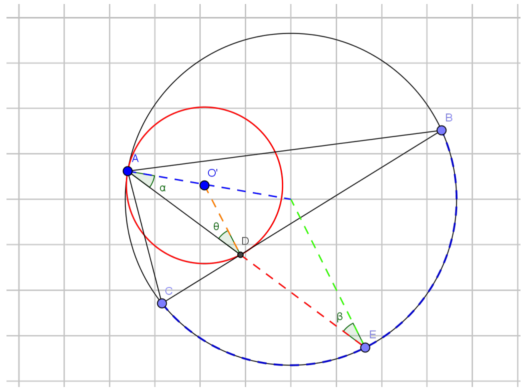


El triangulo $O'AD$ es isósceles $AO' = O'D = r$ y $\beta = \theta$



El profesor plantea a los estudiantes las siguientes afirmaciones para seguir avanzado en la demostración

- Lo segmentos DO' y EO son paralelos ¿por qué?
- $O'D$ es perpendicular a CB ¿por qué?
- OE es perpendicular a CB por las afirmaciones anteriores
- como OE es un radio perpendicular a la cuerda CB entonces la biseca y biseca mayor y menor subtenidos por la cuerda: arco CE = arco EB



luego de esto se pueden sacar las siguientes conclusiones

- los ángulos inscritos CAE y EAB son iguales en medida, pues subtienden arcos iguales
- Por la afirmación anterior, ang CAE = ang EAB, luego AE (y or lo tanto AD) es bicectriz del ang BAC

Como en este nivel que ya es de rigor, se plantea una actividad para la fase de orientación dirigida, mediante la ayuda de Geogebra se realiza una demostración y los estudiantes siguen una serie de pasos para lograr el objetivo de realizar la demostración de un teorema.

Actividad 3. Nivel 4

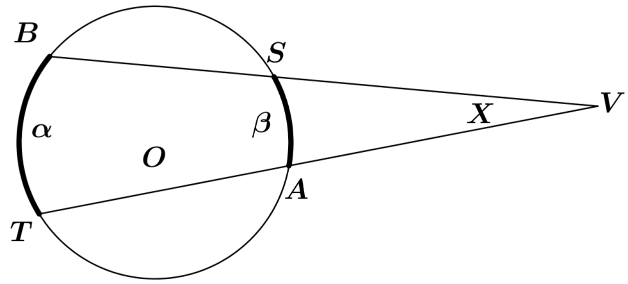
Basado en el ejercicio anterior resolver lo siguiente

Demostrar que el diámetro es la mayor cuerda posible que se puede trazar

En esta actividad la actuación del maestro es mínima y toma como referencia el ejercicio anterior para realizar una demostración similar.

Actividad 4. Nivel 4

Demostrar que todo angulo exterior cuyos lados son secantes con la circunferencia tiene como medida la semicircunferencia entre los arcos correspondientes por las cuerdas que lo forman.



En esta actividad ara la fase de orientación libre. Aparece una actividad más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Al realizar demostraciones obliga a justificar de una mejor manera y utilizar un lenguaje adecuado.

Actividad 5. Nivel 4

De manera individual se plantean los siguientes problemas para resolver

a) Un grupo de epidemiólogos necesita aislar una zona de tierra tal que no se afecten las muestras a estudiar ni que éstas infecten al resto de la fauna y flora del terreno. Para ello aíslan la zona en un radio de 5 metros a la redonda. Si el centro de la zona en cuarentena debe estar a 5 metros de distancia al oriente y a 7 metros de distancia al nort del puesto de control. ¿Un epidemiólogo que se desplace sin protección por la recta $-3x + 10y = 0$ entrará a la zona de cuarentena en algún momento?

b) Un equipo de bomberos requiere apagar un incendio forestal que aqueja una zona de llanura, el fuego ha consumido una zona a la redonda del punto de ignición que se encuentra encerrada por la ecuación $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 16$, para ello recurren a trazar una línea de acción descrita por un corta fuego de ecuación $-x+6y = 14$. ¿Surtirá efecto la medida con respecto al fuego, teniendo en cuenta que se necesita de al menos dos puntos de contacto con el corta fuego para que el fuego se extinga?

según Fouz(2013) las actividades para la fase de orientación dirigida, deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado.

3. Análisis objetivo 3

La secuencia se diseño teniendo en cuenta el modelo propuesto por Tobón (2009, 2010) Pimienta y Enríquez (2009) y articulada con el modelo de Van Hiele ya que es un modelo ideal para temas de geometría.

En esta propuesta el referente principal es el Modelo de Van Hiele, porque en este modelo matemático consta y trata sobre los niveles de razonamientos geométricos y las fases de aprendizaje que orientará a la estrategia didáctica, y el software GeoGebra se utilizará como recurso educativo para facilitar el desarrollo de las competencias matemáticas en la circunferencia.

La labor como docentes hace reflexionar sobre la importancia de dejar a un lado la improvisación de las clases,es por ellos que la elaboración de una secuencia como esta que consta de un documento técnico que permite sintetizar la información general de la secuencia, el numero de niveles, el tiempo ara ellos como la fecha, ademas del propósito y las competencias.

Para el diseño del formato del documento técnico y de los elementos situados en el, se establecieron elementos propios y se tomo en cuenta el diseño presentado por Perdomo (2018) el cual esta basado en el documento de Tobón et al., (2010) quien explica y muestra ejemplos de diferentes elementos específicos que deben estar contenidos en el documento técnico como son los anteriormente mencionados, identificación de la secuencia, propósito de la secuencia, intensiones formativas y el manejo del tiempo de cada sesión.

<table>
<tr><td colspan="3">DOCUMENTO TÉCNICO</td></tr>
<tr><td colspan="3">IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</td></tr>
<tr><td>INSTITUCIÓN:</td><td>ÁREA:</td><td>TEMA:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Docente:</td></tr>
<tr><td colspan="3">ESTUDIANTE:</td></tr>
<tr><td>NUMERO DE NIVELES ASOCIADOS AL MODELO VAN HIELE:</td><td>TIEMPO POR NIVELES:
▪ Nivel 2:
▪ Nivel 3:
▪ Nivel 4:</td><td>FECHA:
▪ Nivel 2:
▪ Nivel 3:
▪ Nivel 4:</td></tr>
<tr><td colspan="3">INTENCIONES FORMATIVAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPÓSITO DE LA SECUENCIA</td><td>COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪
▪
▪</td><td>▪
▪
▪
▪</td></tr>
</table>

Según Perdomo et al., (2018) “Estos elementos son muy completos puesto que permiten evidenciar las falencias tanto del diseño de la secuencia, como en los desempeños de los estudiantes cuando se aplicó ” (p.62). Es así que el conjunto de elementos que se situaron en el documento técnico, son pertinentes, puesto que dan orden a la secuencia didáctica presentando de manera clara lo planteado en la secuencia y el objetivo de aprendizaje. Ademas, en el momento de su implementación, el documento técnico proporcionara la guía en cada uno de los momentos de la secuencia didáctica. Por ejemplo, antes de empezar cada una de los niveles, se revisara el documento técnico para verificar las etapas y actividades a desarrollar para después ubicarlas en el documento guía.

En relación al contenido de la secuencia o documento guía, se tuvieron en cuenta aspectos del modelo Van Hiele para que de manera individual logren superar cada uno de los niveles. Dichas actividades cabe resaltar que unas fueron adaptadas del banco de documentos de Colombia aprende otras fueron adaptadas del trabajo propuesto por Corberán et al. (1994) y las restantes fueron diseñadas por los investigadores.

Para Vargas (2013) cita que el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Al usar este modelo, el docente debe hacer una evaluación inicial que identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes. Esto le permita describir el avance del razonamiento geométrico de cada uno de ellos luego de aplicar las actividades programadas.

Dado que la evaluación en el modelo de Van Hiele no es del tipo tradicional, ya que da importancia a lo que los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, para obtener resultados confiables tras su aplicación, es importante usar los instrumentos de evaluación con sumo cuidado. El modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje, pues este es crucial en el paso de un nivel a otro. Por esto, los docentes deben establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas, en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar en el uso del lenguaje matemático.

Esta secuencia tiene actividades propuestas con Geogebra, bien sabemos existe una diversidad de software matemáticos, pero Geogebra , resuelve cualquier inconveniente, ya que es, un gran programa de geometría dinámica con la ventaja añadida de ser de código libre.

Geogebra remite desde el principio a la geometría de coordenadas con una ventana algebraica que mantiene a la vista los valores que toman las variables y las coordenadas de los puntos en cada momento, esto lo hace especialmente apto para el estudio de la circunferencia ya que las relaciones entre gráfica y expresión algebraica aparecen más evidentes. Para el dibujo con regla y compás supone algunas pequeñas dificultades fácilmente resolubles si cambiamos un poco la forma de pensar y el tipo de razonamientos que utilizamos.

Las dificultades que se presentan en el diseño se destacan la falta de conocimiento entorno a las herramientas que se pueden utilizar para ejecutar la clase de la mejor manera y que se utilicen en forma organizada, ademas la construcción de los componentes requieren de apropiación del tema y tener claros los objetivos que se buscan desarrollar, ademas de la elaboración o modifiacación de actividades que sean del nivel diseñado este nivel

Capítulo 7

CONCLUSIONES

1. Objetivo general

- Validar por juicio de expertos una secuencia didáctica diseñada bajo el modelo Van Hiele dirigida a la enseñanza de la circunferencia en grado décimo
  - Se puede concluir que el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes es el nivel 2 por cuanto sus argumentaciones están asociados al reconocimiento de las partes de la circunferencia sin establecer una relación directa con alguna de sus propiedades . La caracterización permitió identificar el tipo de actividades para el diseño de la secuencia.

2. Objetivos específicos

- Caracterizar el grado de adquisición inicial que poseen los estudiantes de grado décimo de educación básica secundaria para el aprendizaje de la circunferencia.
  - Se puede concluir que el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes es el nivel 2 por cuanto sus argumentaciones están asociados al reconocimiento de las partes de la circunferencia sin establecer una relación directa con alguna de sus propiedades . La caracterización permitió identificar el tipo de actividades para el diseño de la secuencia.
- Realizar actividades que de forma secuencializada y organizadas le permitan al estudiante adquirir nuevas estructuras mentales.
  - Se establece que las actividades diseñadas han seguido una secuencialidad que permite generar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento geométrico desde la circunferencia.
- Diseñar una secuencia didáctica, según el modelo de Van Hiele, para promover que los estudiantes de grado décimo comprendan y analicen el concepto de circunferencia
  - Los propósitos de formación establecidos para el aprendizaje de la circunferencia se materializo en una estructura denominada secuencia didáctica que condujo al

establecimiento de actividades reflexionadas desde el modelo de Van Hiele para el aprendizaje amplio del concepto de circunferencia en grado décimo.

Capítulo 8

Anexos

En este capítulo se describen los pasos seguidos en el diseño y aplicación de la propuesta didáctica sobre la circunferencia basados en una investigación llamada ”desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización”

1. Anexo 1(Actividad exploratoria)

Con el fin de identificar en qué nivel de razonamiento geométrico, de acuerdo al modelo de Van Hiele, se encuentra cada uno de los estudiantes de un grupo de grado undécimo, se modifico y ajusto basado en los niveles del modelo Van Hiele un cuestionario de la tesis ”DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN”, elaborada por Carla Kerlegand Bañales

Los estudiantes de grado Undécimo del Colegio la Anunciación a quienes se les aplicó están por concluir sus estudios de bachillerato dentro del cual se abordan el tema de circunferencia. Consiste en 12 preguntas las cuales se presentan a continuación y luego un análisis comparativo de las preguntas con sus niveles y fases respectivos

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Nombres: ____

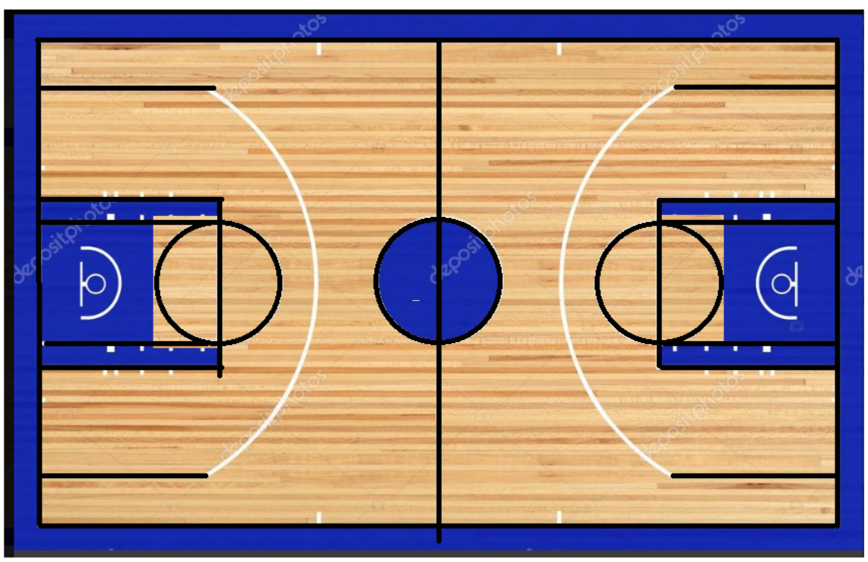
____

____

Actividad 1

El cuestionario es el siguiente:

1. De la siguiente imagen ¿ cuales son circunferencias? ¿Que características y semejanzas encuentra ?



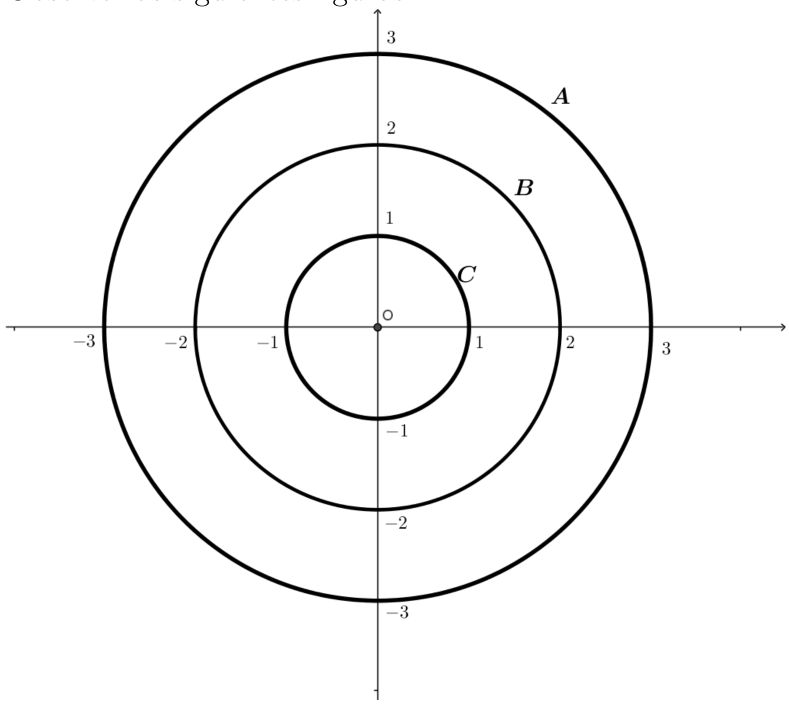
____

____

____

____

2. Observa las siguientes figuras.



   ¿Encuentras semejanzas entre ellas? ______________________
   Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?
   ____
   ____

   ¿Encuentras diferencias entre ellas? ______________________
   Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?
   ____
   ____

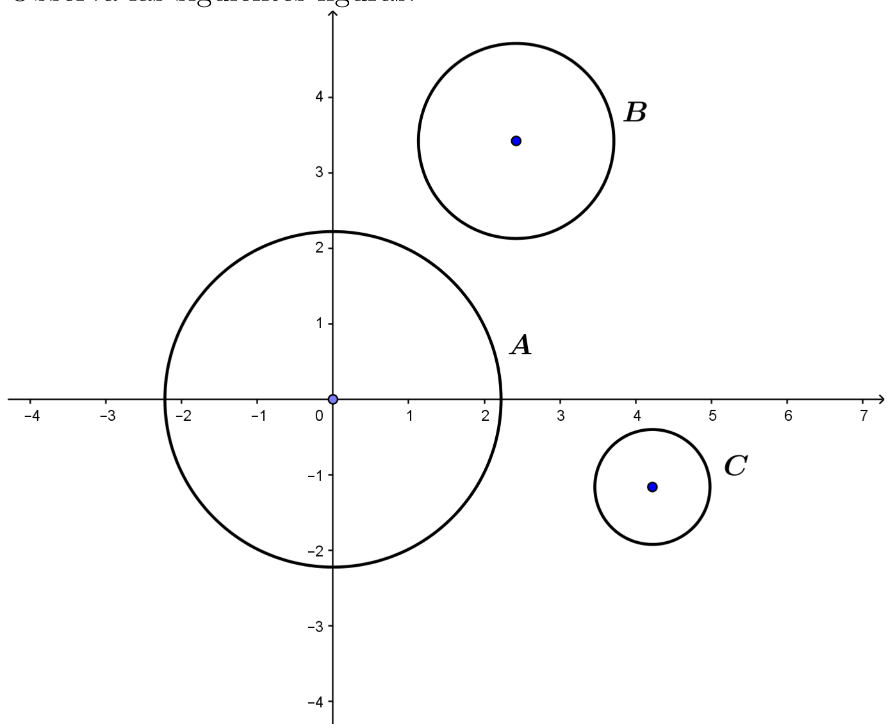
3. Nombre a lo menos 3 objetos que utilice en su vida cotidiana y considere sean circunferencias, ademas explicar porqué lo son.

   - ______________ por que ______________________________
     ____
   - ______________ por que ______________________________
     ____
   - ______________ por que ______________________________
     ____

- ______________________ por que ____

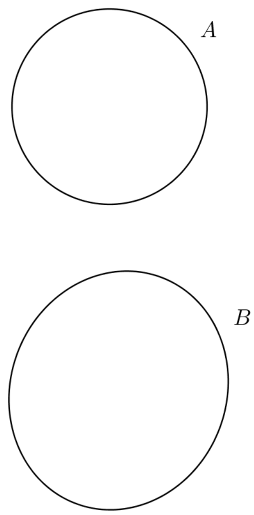
  ____

4. Observa las siguientes figuras.

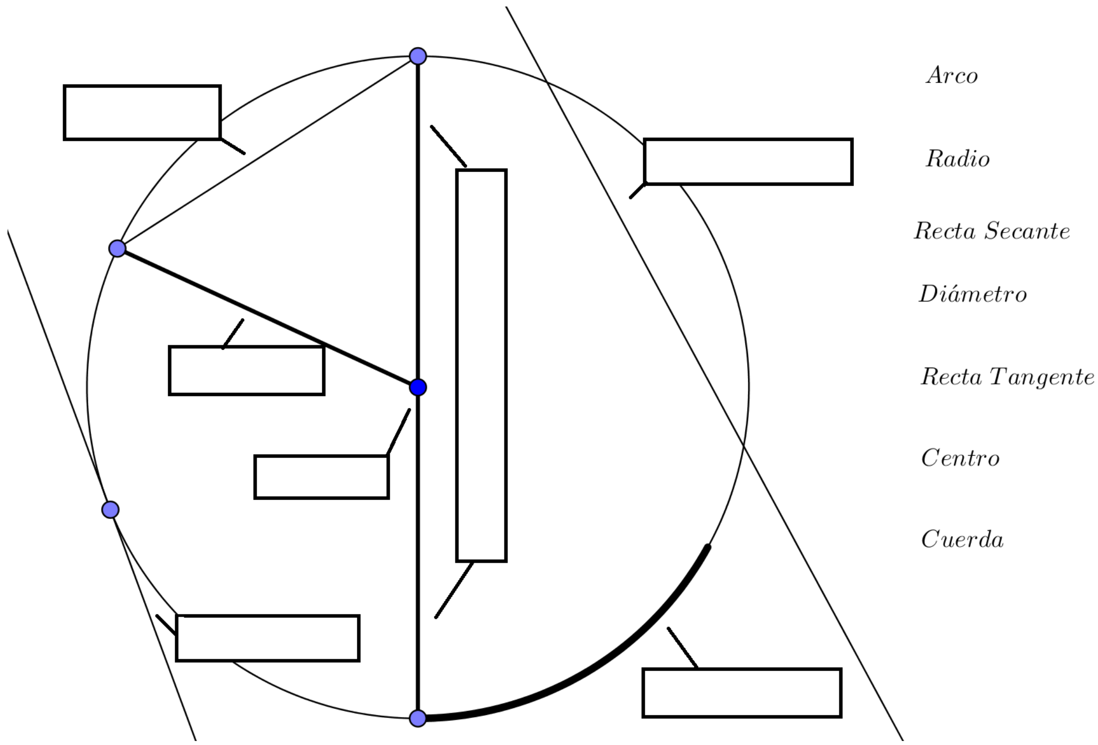


¿Encuentras semejanzas entre ellas? ______________________________
Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?
____
____
¿Encuentras diferencias entre ellas? ______________________________
Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?
____
____

5. Relaciona las siguientes imágenes con objetos de su diario vivir y porque

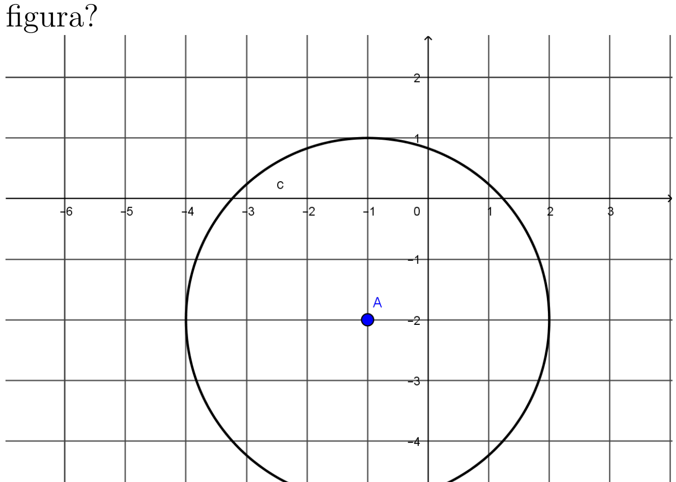


6. Relacionar las partes con su respectiva posición en la figura .



7. Grafique las siguientes ecuaciones y determine que semejanza se obtiene en sus elementosn para determinar su posición.
   - $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$
   - $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

8. ¿Cuál de las ecuaciones dadas corresponde a la circunferencia mostrada en la siguiente figura?



a) $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ y $x^2+y^2-2x-4y+2=0$

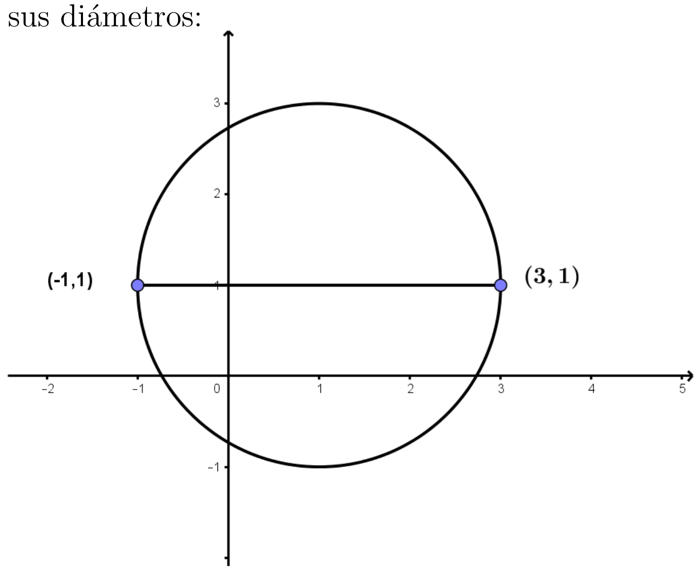
b) $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ y $x^2+y^2+2x+4y-4=0$

c) $(x-2)^2+(y-1)^2=3$ y $x^2+y^2-4x-2y+2=0$

d) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ y $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

¿Por qué?

9. Determina la ecuación de la siguiente circunferencia si el segmento mostrado es uno de sus diámetros:

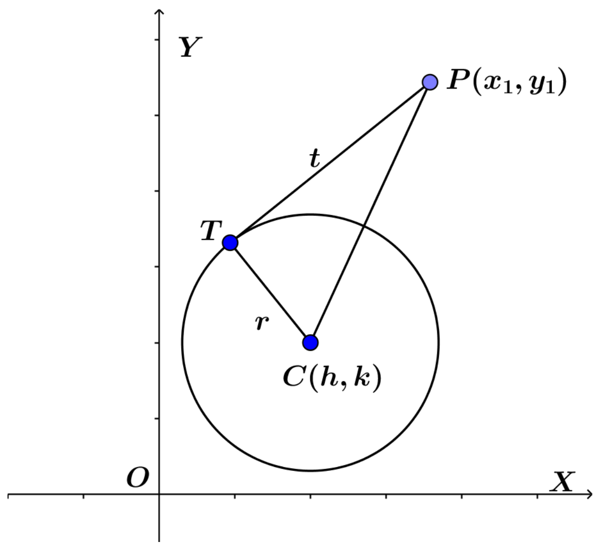


10. Explica y deduce la ecuación canónica de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

11. Explica y deduce la ecuación general de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

12. Demuestre que Si t es la longitud de la tangente trazada del punto exterior $P_1(x_1, y_1)$ a la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, entonces

$$t=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}.$$



Modelo Van Hiele	Preguntas	Propuesta
Nivel 1 - RECONOCIMIENTO Los alumnos perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en la descripción que hacen. Además, perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase. Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas. Los estudiantes no suelen reconocer las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Las descripciones de las figuras están basadas en sus semejanzas con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como "...se parece a...", "...tiene forma de...", etc. Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.	1,3,5	Estas pregunta tiene como objetivo el analizar la descripción hecha por el alumno. Para un estudiante con nivel de razonamiento 1. en la pregunta 1 se busca que los estudiantes relacionen de manera natural la circunferencia con la imagen presentada con una comparación con otros objetos. La preguntas 3 tienen como objetivo analizar las descripciones de los estudiantes sobre la circunferencia en el ambiente que lo rodea la pregunta 5 busca que visualmente encuentre la diferencias, semejanzas con otros objetos de la vida cotidiana.

Nivel 2 - ANÁLISIS Los estudiantes se dan cuentas de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal. Además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación. Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.	2,4,6	Las preguntas 2 y 4 tiene como objetivo que mediante la observación los estudiantes escriban las diferencias y semejanzas de las partes y propiedades de cada una de las figuras mostradas. En estas dos preguntas se espera que hagan referencia a distinto radio o mismo centro, es decir, que mencionen propiedades de la circunferencia para explicar las semejanzas y diferencias. En la pregunta 6 se busca que los estudiantes relacionen cada una de las partes de la circunferencia en el gráfico planteado y los elementos que la conforman.

Nivel 3 - CLASIFICACIÓN En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes. Ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación. Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta. Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, lo ven de forma aislada, no entienden la necesidad de encadenamiento de estos pasos, ni entienden la estructura de la demostración. Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los alumnos no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.	7,8,9	La pregunta numero 7 se busca que los estudiantes relacionen que las dos ecuaciones dadas, hacen referencia a circunferencias concéntricas pues en este nivel son capaces de razonar con la manipulación de propiedades ya vistas. la pregunta 8 busca que el estudiante relacione la ecuación general con la imagen y las opciones de respuesta dadas, se espera que se equivoquen en los signos del h y k ademas de el valor del radio. La pregunta 9 busca que el estudiante logre determinar la ecuación de la circunferencia dada en la imagen, para esto tiene que tener claro la distancia entre dos puntos pues necesita con el diametro encontrar el valor del radio y las coordenadas del centro
Nivel 4 - DEDUCCIÓN FORMAL Alcanzando este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como medio para verificar la verdad de una afirmación. Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido de la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas. Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas, la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.	10,11,12	En la pregunta 10 11 y 12 se busca que los estudiantes realicen una demostración formal ademas de verificar la veracidad de las afirmaciones dadas. En estas preguntas no se espera que los estudiantes logren realizar por los menos una de las demostraciones por la rigurosidad y dificultad de las preguntas

Bibliografía

[1] GUTIERREZ, J. (1989). Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiel. Revista Enseñanza de las Ciencias 7(1). 89-95.

[2] GUTIERREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. Alfar; Sevilla, España. 295-384

[3] Corberán et al. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. C.I.D.E., M.E.C.: Madrid.

[4] Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!. Obtenido de Colombia aprende la red del conocimiento.: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-167733_archivo.pdf.

[5] Patricio, P. (2010). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje de los conceptos de mediatriz y circuncentro en estudiantes de tercero de secundaria, utilizando el GeoGebra. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

[6] Rojas, R. (2002). Investigación-Acción. Enseñanza-Aprendizaje de la metodología. Inicial del nombre Plaza y Valdez editores. Colombia, 71-211.

[7] AFONSO, M. C; CAMACHO, M.; SOCAS, M. (2003). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio. Tesis Doctoral. Universidad de Laguna.

[8] Rodríguez-Izquierdo, R. M. (2011). Repensar la relación entre las TIC y la enseñanza universitaria: problemas y soluciones.

[9] TOBÓN, PIMIENTA & GARCÍA. (2010). Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. México: Editorial Pearson

[10] Odriozola, E. E. (2012). Factores de riesgo y factores de protección en la adicción a las nuevas tecnologías y redes sociales en jóvenes y adolescentes. Rev Esp Drogodepend [Internet], 4, 435-48.

[11] Alonso, S. H., Sáez, A. M., & PICOS, A. P. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. Revista de educación, 334, 75-95.

[12] Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N. Z., & Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17, 52-61.

[13] Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isomerías. La evaluación del nivel de razonamiento. (Tesis de doctorado), Universidad de Valencia.

[14] Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele, en S. Llinares, M.V. Sánchez (eds.), Teoría y práctica en educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), 295-384