Neiva, 12 de noviembre del 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Andrés Mauricio Murcia Ramírez, con C.C. No. 1075278263 de Neiva Huila,

Leonardo Flórez Herreño, con C.C. No. 1075294628 de Neiva Huila,

Autores del trabajo de grado (Informe de semillero de investigación) titulado Imágenes del concepto y principales estrategias utilizadas por futuros profesores al resolver problemas de área, presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas;

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

ANDRÉS MAURICIO MURCIA RAMÍREZ

Firma: Andrés Mauricio R

LEONARDO FLÓREZ HERREÑO

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Imágenes del concepto y principales estrategias utilizadas por futuros profesores al resolver problemas de área

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Murcia Ramírez	Andrés Mauricio
Flórez Herreno	Leonardo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Urrutia	Martha Cecilia

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Urrutia	Martha Cecilia

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva Huila **AÑO DE PRESENTACIÓN: 2019** **NÚMERO DE PÁGINAS: 98**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías_X__ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X__ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Área	area	6.		
2.	Imágenes del concepto	Concept Images	7.		
3.	Imagen primitiva	Primitive image	8.		
4.	Imagen operativa	Operative image	9.		
5.	Imagen descriptiva	Descriptive image	10.		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Presentamos las imágenes del concepto y las estrategias que utilizan en la resolución de problemas del área los futuros profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas 2017-2 A 2018-2 de la Universidad Surcolombiana, a partir de la aplicación del taller, denominado interpretación del concepto de área propuesto por la Doctora Turégano en su investigación en el año 1993, donde los ejercicios son de tipo no rutinarios; tomándolo en cuenta, ya que que la investigadora logra identificar tres imágenes distintas del concepto de área (imagen primitiva, imagen operativa e imagen descriptiva) las cuales nos permiten dar una conclusión del informe que dé respuesta al objetivo planteado . El problema didáctico tiene que ver con la imagen que tienen los profesores de matemáticas sobre el concepto de área, lo cual crea limitaciones para la enseñanza si el profesor tiene una imagen primitiva y así mismo, las presenta al orientar el concepto de área a los estudiantes y en la construcción de ejemplos. La aplicación del taller, la solución a priori del mismo, las entrevistas realizadas y el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, permiten determinar con seguridad la imagen del concepto que poseen ellos. Las estrategias que usaron los estudiantes en la solución del taller nos muestra las dificultades que presentan y da la oportunidad para dar recomendaciones. Los resultados obtenidos según la investigación, son que de los 79 estudiantes escogidos como muestra, el 72,52% presenta una imagen primitiva, el 21.24% presenta una imagen operativa y el 6,2% restante presenta una imagen descriptiva.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

We show the concept images and the strategies that are used for solving problems from the area by future math teachers 2017-2 A 2018 -2 from the South Colombian University. From the application of a workshop, dominating the interpretation of the concept from the area proposed by the Dr. Turegano, in her research made in 1993, where the exercises are not routine type; taking into account that the researcher manages to identify three different images from the concept of the area. (primitive image, operative image, and descriptive image) which do not allow to give a conclusion of the report that gives an answer to the stated objective. The didactic problem has to be with the image that the math teacher have from the concept of the area, it creates limitations for teaching if the teacher has a primitive image and those are shown when orienting the concept from the area to the students and building examples.

The application of a workshop, the priori solution of the same one, the interviews made and the analysis of the answers given by the students, allow us to determine the image of the concept they have. The strategies used by the students while solving the workshop show us the difficulties they had and give us the opportunity to offer them some recommendations. The results obtained according to the research are: from 79 students chosen as the example. 72,52% show a primitive image, 21,24% show an operative image and 6,2% show a descriptive image.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado (Tutora): Dra. Martha Cecilia Mosquera Urrutia

Firma: Martha C Mosquera U.

Nombre Jurado: Dra. Mercy Lilia Peña Morales

Firma: Mercy L. Peña Morales

FACULTAD DE EDUCACION
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS

ACTA DE SUSTENTACION DE TRABAJO DE GRADO

FECHA DE LA SUSTENTACION: 12 de Noviembre del 2019

TITULO DEL TRABAJO DE GRADO: Imágenes del concepto y principales estrategias utilizadas por futuros profesores al resolver problemas de área.

AUTORES:

CODIGO	NOMBRE Y APELLIDO
20121109228	Leonardo Flórez Herreño
20121110535	Andrés Mauricio Murcia Ramírez

- Para la aprobación del Trabajo de Grado se tuvieron en cuenta los conceptos emitidos por el asesor del Trabajo y el jurado calificador.
- Los estudiantes presentaron el Trabajo de Grado cumpliendo con todos los requisitos exigidos en el reglamento correspondiente los cuales fueron revisados por el Asesor del Trabajo y el jurado calificador.

OBSERVACIONES DEL ASESOR: Es un buen trabajo el cual lleva a la reflexión sobre aspectos importantes para la formación de profesores, como por ejemplo el manejo de las definiciones.

OBSERVACIONES DEL JURADO CALIFICADOR:

CALIFICACION DEL TRABAJO: APROBADO X REPROBADO

En constancia se firma:

Martha C Mosquera U.
ASESOR DEL TRABAJO:
Martha Cecilia Mosquera Urrutia

Percy L. Peña Morales
JURADO CALIFICADOR:

Neiva, 12 de Noviembre de 2019.

IMÁGENES DEL CONCEPTO Y PRINCIPALES ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR FUTUROS PROFESORES AL RESOLVER PROBLEMAS DE ÁREA

PRESENTADO POR

ANDRES MAURICIO MURCIA RAMIREZ
CODIGO 20121110535

LEONARDO FLOREZ HERREÑO
CODIGO 20121109228

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA EN LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Semillero TIM@TH "Temas de Investigación para Niñ@s y Jóvenes"
Grupo E.MAT.H Educación MATemática en el Huila
NEIVA – HUILA
2019

IMÁGENES DEL CONCEPTO Y PRINCIPALES ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR FUTUROS PROFESORES AL RESOLVER PROBLEMAS DE ÁREA

PRESENTADO POR

ANDRES MAURICIO MURCIA RAMIREZ
CODIGO 20121110535

LEONARDO FLOREZ HERREÑO
CODIGO 20121109228

ASESORA

DRA. MARTHA CECILIA MOSQUERA URRUTIA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA EN LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Semillero TIM@TH "Temas de Investigación para Niñ@s y Jóvenes"
Grupo E.MAT.H Educación MATemática en el Huila
NEIVA – HUILA
2019

INTRODUCCIÓN

Luego de estudiar varias fuentes de información relacionadas con problemas que tienen los futuros profesores en la comprensión del concepto de área, se encontraron algunas investigaciones de interés: Los profesores de la Universidad Pedagógica Nacional Carlos Julio Luque Arias, Lyda Constanza Mora Mendieta Johana Andrea Torres Díaz presentan el concepto de área desde el punto de vista de Euclides y Hilbert, comparándolos con la presentación que se hace en algunos textos de la educación básica, media y universitaria (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 1), Mihály André Martínez Miraval en su tesis de maestría tenía como objetivo analizar el aprendizaje de los estudiantes de primer ciclo de la carrera de Administración de una universidad de Lima, al trabajar una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos (Martínez Miraval, 2015, pág. 6) y por último la Dra. Pilar Turégano pretendía por una parte indagar cuáles son las "imágenes del concepto" que con mayor frecuencia evocan los estudiantes al referirse al área, y, por otra, analizar las estrategias que ponen en manifiesto cuando se enfrentan a problemas y cuestiones sobre áreas que no son habituales en la enseñanza (Turégano P. , 1993, pág. 237). Estos objetivos son importantes para este estudio, por cuanto no se encontró en la literatura reciente, ni en trabajos realizados en el Programa de Licenciatura en Matemáticas, estudios que proporcionaran información al respecto.

Se decidió en consecuencia profundizar en el estudio de este trabajo (Turégano P. , 1993) dado que la investigadora logra identificar tres imágenes distintas del concepto de área (primitiva, operativa o descriptiva), concordantes con los diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes de los tres cursos de primero de BUP, pertenecientes a tres institutos de Albacete, además la Dra. Turégano toma como referencia este documento para la elaboración de otros trabajos, tales como, "Los conceptos en torno a la medida y aprendizaje del cálculo infinitesimal", "Del área a la integral", "Didáctica de la Geometría", "Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula". Además, ha sido utilizado por Mihály

André Martínez Miraval en su tesis de maestría "Una propuesta para articular área y medida usando la TSD, alumnos de nivel superior".

Al aplicar el cuestionario con una muestra de estudiantes del Programa, se espera identificar al igual que lo hizo en su momento Turégano: "*las imágenes que evocan los estudiantes al referirse al área y analizar las estrategias que ponen de manifiesto cuando se enfrentan a problemas y cuestiones sobre áreas que no son habituales en la enseñanza*" (Turégano P. , 1993, pág. 237).

Se realizó entonces un estudio de tipo comparativo, en el que se desarrollaron las siguientes etapas:

1. Análisis a priori del cuestionario y análisis de la teoría.
2. Estudio teórico.
3. Aplicación del cuestionario.
4. Análisis de los resultados.
5. Análisis comparativo.
6. Formulación del Problema didáctico.
7. Elaboración de conclusiones y recomendaciones.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE ILUSTRACIONES

INDICE DE FIGURAS

CAPITULO I

1.1. JUSTIFICACIÓN

El GIPMEN (Grupo de Investigación Pedagógica del Ministerio de Educación Nacional) de la República de Colombia, en la búsqueda de conocimientos acerca de los lineamientos pedagógicos y curriculares que el país necesita y el MEN (Ministerio de Educación Nacional) debe ofrecer, realiza un documento interdisciplinario e interinstitucional con el propósito de construir en forma participativa unos lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Luego de que se realizará el Encuentro Nacional con Docentes e Investigadores en Educación Matemática, en diciembre de 1996, se conformó el Grupo de Apoyo al MEN, se genera una estrategia de implementación de algunas reflexiones sobre la formación en educación matemática de los docentes, presentadas en la tercera y última sección del documento anteriormente mencionado, las cuales implican que las relaciones entre el maestro, los estudiantes y la matemática escolar (siendo esta el campo disciplinar del docente de matemáticas), deben interactuar de forma paralela, tomando este campo no solo como disciplina científica sino como el desarrollo de una forma de comprender los conocimientos y saberes matemáticos que circulan en los contextos escolares, generando así un nuevo rol, definido por los docentes a partir de las condiciones que creen las instituciones.

Esta formación debe de ser entendida como un proceso a través del cual el sujeto se hace profesional en un campo disciplinar específico: la Educación Matemática, el futuro docente debe recibir una formación intrínsecamente interdisciplinaria distinta a la que se ha venido realizando: una sumatoria de cursos que el estudiante debe integrar por su propia cuenta y riesgo, teniendo una actualización en la forma de reflexionar y conceptualizar el nuevo conocimiento que ingresa al campo disciplinar a través de su práctica, adquiriendo nuevas herramientas conceptuales que le permitan dar las respuestas necesarias a su trabajo en el aula. El papel del docente consiste en diseñar situaciones didácticas, logrando recontextualizar y personalizar los conocimientos matemáticos, así pues, el trabajo del maestro es en cierta medida comparable con el trabajo de un investigador ya que debe determinar el tipo de actividad a proponer al estudiante, de tal manera que cada conocimiento surja de la respuesta a un problema que el alumno se ha planteado y del cual ha formulado su solución (GIPMEN, 1996).

Los procesos relacionados con el aprendizaje o la enseñanza de las matemáticas en general, y de la geometría en particular, deben ser orientados bajo una didáctica con fundamentos teóricos, haciendo una clara distinción entre la definición del concepto y la imagen del concepto. Tall y Vinner establecen una diferencia entre lo que este término significa y la definición del concepto, estos términos tienen en común la característica de que todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Al momento de la práctica el docente en formación, no necesariamente debe de utilizar la definición si un objeto matemático es un ejemplo o contraejemplo del concepto, sino que, en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en la imagen del concepto, que es el conjunto de todas las imágenes asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiéndose tratar de una representación visual o bien una serie de impresiones o experiencias, reaccionando de manera diferente ante un mismo concepto en situaciones distintas. (Tall & Vinner, 1981).

Según la teoría de Vinner, adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto podemos encontrar atributos relevantes, útiles para dar la definición del concepto, y atributos irrelevantes, generalmente utilizados para clasificaciones, permitiendo diferenciar unos ejemplos de otros. Según los planteamientos de (Hershkowitz, 1990), la relación entre los elementos que permiten al estudiante construir conceptos básicos geométricos, está expuesta en la siguiente imagen:

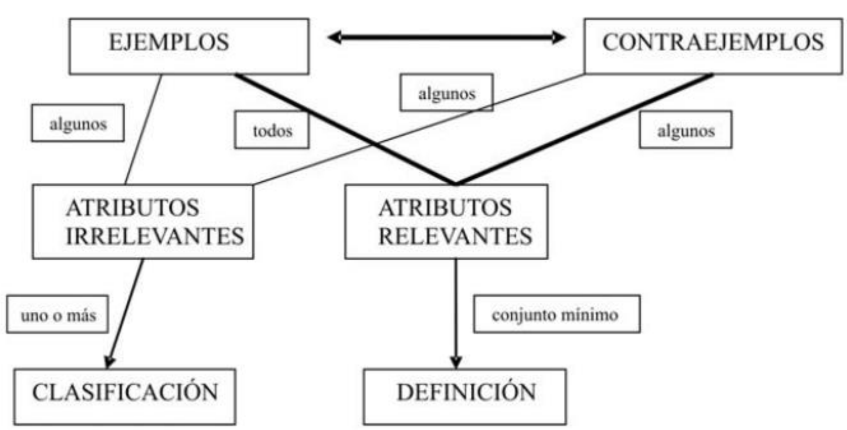


Figura 1 Relación entre los elementos que permiten al estudiante construir conceptos básicos geométricos

Fuente: (Turégano M. P., 2006, pág. 39)

La nueva formación matemática que deben recibir los estudiantes, debe de estar basada en la idea de que saber matemáticas significa hacer matemáticas, haciendo uso de materiales didácticos, con el objetivo de que los docentes no enseñen como a ellos se les ha enseñado, sino como se les ha dicho que deben enseñar, en nuestro caso particular, la geometría (Turégano M. P., 2006).

En la base de del aprendizaje de la geometría, hay dos elementos importantes, el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos, Van Hiele señala que "no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo, pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición" (Van Hiele, 1986).

> La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar o crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (Goncalves, 2006)**.**

Cuando se realiza la previa parcelación de una clase de geometría, queriendo orientar el tema de área, el docente en formación, debe brindarle al estudiante todas las herramientas y condiciones necesarias para que pueda desenvolverse apropiadamente en el proceso de adquisición del saber; y en dicho proceso desarrolle habilidades para argumentar y justificar sus procedimientos, suposiciones y resultados, fomentando así la creatividad y el aprendizaje significativo en el estudiantes, elementos claves para desarrollar una imagen descriptiva del concepto de área, según lo establecido por la Dra. Turégano, ya que los estudiantes emplean tres imágenes o nociones distintas del concepto de área que se diferencian cada una de ellas por el nivel de razonamiento empleado (Turégano P. , 1993, págs. 254-257).

La finalidad de este informe de semillero es tomar decisiones acerca de cómo actuar para poder mejorar, completar o crear una imagen descriptiva en los estudiantes del Programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, sobre el concepto de área, dando a conocer que la importancia de determinar el área de una figura limitada o no rectilíneamente, radica en la interpretación que se le pueda dar a dicha magnitud.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dificultad que tiene algunos de los PF al realizar la construcción de polígonos diferentes a los convexos y de lograr hacer la equidescomposición y descomposición aceptando que tienen la misma área al hacer uso de transformaciones en el plano como la rotación y la traslación. Los estudiantes en su mayoría, se les dificulta hallar el área y el perímetro de una figura sin necesidad de usas cálculos algebraicos. Tenemos en cuenta que:

> *"Si una región no se encuentra limitada totalmente por segmentos de recta o por curvas conocidas como semicircunferencias, los estudiantes presentan dificultades para obtener la medida del área de dicha región o describir un procedimiento que les permita aproximarse a dicha medida, ya que no pueden relacionarla con una figura geométrica impidiéndoles así utilizar las propiedades y fórmula previamente estudiadas"* (Martínez Miraval, 2015, pág. 16)

El no conocer alguna herramienta no convencional da el por qué la dificultad de un procedimiento para hallar el área cuando se trata de una figura que no está delimitada rectilíneamente; sea este dando valores numéricos para usar las formulas, la construcción de un polígono como una unidad o un el proceso de realizar infinitas construcciones.

Las dificultades que presentaran los estudiantes pueden darse de acuerdo al proceso que tiene en su formación académica en la primera etapa escolar. En esta etapa se mira el área a través del uso de expresiones numéricas y como el espacio de una superficie, sin tener en cuenta otras definiciones que otros autores han demostrado, que en el desarrollo del trabajo vamos a nombrar.

Teniendo en cuenta lo anterior nace una pregunta de investigación ¿Cuáles son las imágenes y las estrategias que frecuentemente se usan los profesores en formación para dar solución a ejercicios de tipo no rutinarios acerca del concepto de área?

CAPITULO II

2.1.OBJETIVOS

2.1.1. Objetivo General:

Indagar las imágenes del concepto de área que poseen los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas 2017-2 a 2018-2 de la Universidad Surcolombiana y cuales son las estrategias que usan en el desarrollo de problemas no rutinarios.

2.1.2. Objetivos específicos:

- Comparar los resultados de la aplicación del cuestionario con los obtenidos por Turegano en 1993.
- Dar cuenta de las imágenes del concepto de área que con mayor frecuencia evocan los estudiantes encuestados
- Dar cuenta de las principales estrategias utilizadas los estudiantes encuestados para resolver problemas no rutinarios

2.2.MARCO TEÓRICO

Conocer cómo algunos autores hablan acerca de un concepto nos permite comprender lo que se ha ido desarrollando en el aprendizaje de este concepto. El uso del cuestionario de la Doctora Turegano del año 1993, en el cual realiza una investigación acerca de las imágenes del concepto de área, nos da la seguridad de que el trabajo va encaminado a conseguir el objetivo. Los problemas que son de tipo no rutinario, los cuales desarrollarán los estudiantes, permitirán reconocer las imágenes que tienen los estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas **2017-2 A 2018-2** de la Universidad Surcolombiana.

Según Vinner, todos los objetos matemáticos excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se presentan antes o después a los estudiantes. Pero los educandos no necesariamente deciden si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto.

> *"En la Teoría de Vinner, adquirir un conocimiento entonces significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar y construir todos los ejemplos del concepto tal y como este está concebido por la comunidad matemática. En todos los ejemplos de concepto encontramos atributos relevantes y atributos no relevantes.*" (Turégano M. P., 2006, pág. 38)

> *"La imagen del concepto es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. Es, por tanto, algo no verbal que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de las experiencias de todo tipo y que puede que contenga partes que no estén de acuerdo con la definición formal o con otras partes de la propia imagen. En este caso el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que espera el profesor de él.*" (Turégano M. P., 2006, pág. 40)

Es por eso, que para construir un concepto podemos tener en cuenta los modelos de actividad mental propuestos por la Doctora Turégano;

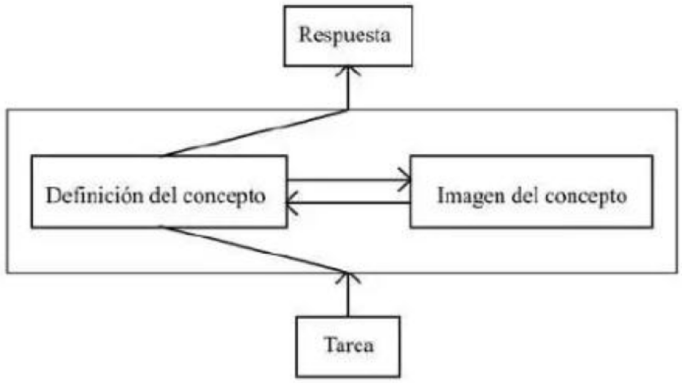


Figura 2Interacción entre la definición y la imagen.
Fuente: (Turégano M. P., 2006, pág. 41)
.

En la figura 1, se tiene en cuenta la construcción de una respuesta a través de la definición del concepto y con ella hay una interacción con la imagen del concepto, donde tiene la posibilidad de revisar la definición nuevamente y la imagen para finalmente dar una respuesta. Este sería ideal.

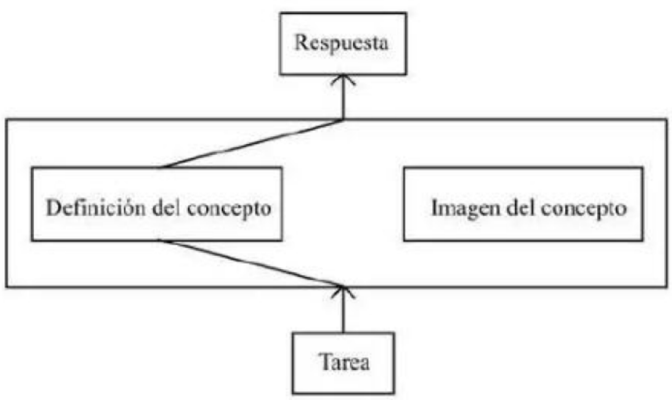


Figura 3 Deducción puramente formal
Fuente: (Turégano M. P., 2006, pág. 42)
En la figura 2, se da la respuesta teniendo en cuenta la definición formal del concepto, sin tener en cuenta la imagen del concepto que se tiene.

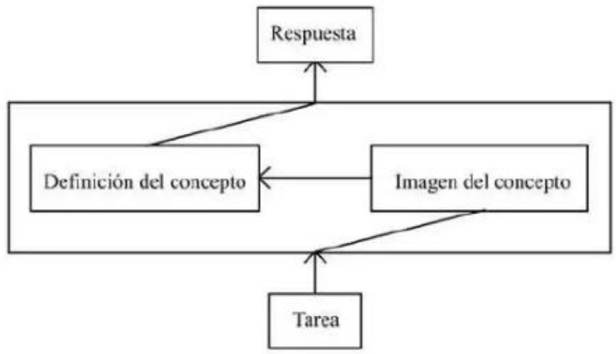


Figura 4 Deducción según pensamiento intuitivo
Fuente: (Turégano M. P., 2006, pág. 42)

En la figura 3, se tiene en cuenta la respuesta a través del pensamiento intuitivo, teniendo en cuenta inicialmente la imagen que tenemos del concepto sin dejar a un lado la definición formal para poder dar una respuesta.

En estos tres modelos se tiene en cuenta la definición formal para la construcción de una respuesta, en algunas, y de hecho en muchos casos no se tiene en cuenta esta definición, sino que se recurre únicamente al pensamiento intuitivo, se tiene en cuenta que muchas veces la imagen que tenemos de un concepto permite tener una definición precisa sobre algún concepto.

Pilar Turegano, en la conclusión de su investigación habla de que los estudiantes usan tres distintas imágenes (primitiva, operativa y descriptiva) acerca del área, la cuales son primordiales conocer para poder hacer uso en nuestra investigación.
Antes de conocer, la definición de estas, tenemos también en cuenta la definición que le atribuye el diccionario de la Real Academia Española.

PRIMITIVA: Rudimentario o elemental.

OPERATIVA: Preparado o listo para ser utilizado o entrar en acción.

DESCRIPTIVA: Que describe algo, una narración descriptiva.

(Turégano P. , 1993), relaciona la definición y las características de dichas imágenes así según las respuestas de los estudiantes:

"Un estudiante manifiesta una ***imagen primitiva*** *del área si solo admite la noción de área que está caracterizada por una concepción por parte del entendimiento humano de las formas espaciales en lo referente a su extensión. A veces llega un poco más lejos, asignando un número a un determinado polígono como medida de su área obtenida por medio de una formula.*

Podemos hablar de estudiantes con una imagen primitiva geométrica ligada a la extensión y con una imagen primitiva numérica ligada a una formula, no siendo excluyente estas imágenes en un mismo estudiante.

Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes:

- *Admitir que las superficies rectilíneamente limitadas tienen área;*
- *Que el área depende de la forma de la superficie, y, por lo tanto, su medida viene determinada por una formula;*
- *No admitir la congruencia de superficies con distinta forma;*
- *Imposibilidad de admitir que se puede determinar el área de superficies no rectilíneamente limitadas.*

Cuando un estudiante presenta una imagen primitiva sus imágenes de concepto se puede decir que tiene conflictos potenciales" (Turégano P. , 1993, pág. 254)

"Un estudiante pone en evidencia una ***imagen operativa*** *del área si alcanza el concepto de área, y, por tanto, asigna propiedades a la noción, pero no da una descripción explícita de qué entiende por área junto con sus propiedades, que ni siquiera menciona, pero que usa correctamente, …*

Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes:

- *Admitir la igualdad de áreas para superficies de distinta forma, estén o no rectilíneamente limitadas;*
- *Conservación del área mediante el cambio de posición o disposición de sus partes;*
- *Utilización de la propiedad aditiva y transitividad;*

- *Admitir la posibilidad de poder asignar un número a cualquier superficie, aunque no conozca procedimiento para hacerlo.*

En esta imagen, los estudiantes no presentad factores de conflictos potenciales'""(Turégano P. , 1993, pág. 255)

"Un estudiante tiene una **imagen descriptiva** *del área si es capaz de describir por medio del lenguaje que entiende por área ligándolo a sus propiedades que puede nombrar, además de utilizar correctamente.*

Estos estudiantes, al igual que los anteriores, no se cuestionan la existencia del área. Parten de que hay algo que llamamos área y que todos tenemos una idea clara de ella, y que, al medirla, le asignan un número , bien con un proceso finito o infinito, según el caso….

Las características de estos estudiantes son las siguientes:

- *Dan una descripción verbal del área como lo que es común a todos los dominios derivados de un único dominio con el cambio de posición y disposición de las partes que le pertenecen (congruencia de áreas);*
- *Hablan de la propiedad aditiva y de la transitividad;*
- *Hablan de asignar un número a cualquier dominio, esté o no rectilíneamente limitado, y conozcan o no un procedimiento para calcularla." (Turégano P. , 1993, págs. 255 - 256)*

Ahora bien, se quiere estudiar las imágenes del concepto del área, que hay en los estudiantes tenemos en cuenta y estudiamos algunas definiciones;

Según Euclides, tenemos:

- *"El concepto de área se aborda por primera vez en la proposición 34, sin que haya explícitamente alguna definición o se recurra a números y fórmulas para expresarla";* (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 105)

  Proposición 34: Los lados y los ángulos opuestos de regiones paralelográmicas son iguales entre sí y la diagonal divide en dos dichas regiones,

- *"Euclides establece, de manera implícita, cuestiones relativas al área de figuras planas, en términos de magnitudes y proporciones que, en últimas, aportan las condiciones básicas del concepto; esto se evidencia, particularmente, en la proposición 35 del libro I, debido a la ampliación de la idea de igualdad de figuras planas".*

  (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 107)

  "Proposición 35: *establece que Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales.*

  En la demostración de esta proposición, que Euclides trata a las figuras como magnitudes; es decir, que implícitamente señala que el área es una magnitud, pues suma y resta áreas iguales y utiliza las nociones comunes para garantizar la igualdad de las nuevas áreas que se obtienen de estos procedimientos, que antes habían sido usadas para las longitudes". (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 109)

- *"En las proposiciones I-45 y I-47, aparece una nueva idea, la posibilidad de expresar un área como suma de otras. El Teorema de Pitágoras (Proposición I-47) es tal vez el ejemplo más conocido de este planteamiento sobre el área: En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman ese ángulo recto".* (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 111)

- *"Euclides finaliza su estudio sobre áreas de figuras planas, haciendo uso por primera vez del método de exhaución, hoy denominado de paso al límite. Como vemos, el concepto de área en Euclides no requiere el uso de números ni de fórmulas, pero sí enfatiza en el concepto de área como la equivalencia de figuras que tienen igual* *descomposición en figuras congruentes".* (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 116)

Según (Luque, Mora, & Torres, El Concepto de Área, 2002) tenemos que;

"Hilbert introduce las nociones de área de un triángulo ABC, recorrido en sentido positivo y la nota [ABC] y de área de un triángulo recorrido en sentido negativo cuya notación es [CBA] y demuestra que,
49. Si un punto O está situado fuera de un triángulo ABC, entonces se tiene la relación:
[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].

La relación de equidescomponibilidad es de equivalencia, a cada clase de equivalencia la llamamos un área y a cada área le hacemos corresponder un número que es la medida de su área.
Como en un triángulo cualquiera el producto de un lado por la altura correspondiente no depende del lado elegido, entonces el semiproducto de un lado por la altura correspondiente es un número positivo a éste es la medida del área del triángulo y se cumple que:
- Triángulos congruentes tienen igual área.
- Si un triángulo se divide en un número finito de triángulos sin puntos interiores comunes, el área del triángulo es la suma de las áreas de cada uno de los triángulos que lo componen.
- Si dos triángulos son semejantes la razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de dos lados cualesquiera correspondientes." (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 122)

Según los textos; Según los textos;

"Según el nivel al que va dirigido el texto, se hacen presentaciones del área que van desde lo intuitivo hasta la ubicación del área dentro de una teoría matemática propiamente dicha pasando por definiciones de área, uso de una

única unidad de medida para calcular áreas, determinación de áreas para figuras usuales, asignación de solamente números naturales a áreas de figuras, que pueden inducir a errores en el aprendizaje del concepto en cuestión. Los aspectos que establecimos a partir de nuestras observaciones son los siguientes:

1. Presentación intuitiva del área.

2. Definición del área como medida de una superficie.

3. Utilización de diversas unidades de medida.

4. Calculo de áreas de figuras no poligonales.

5. Consideración de los números naturales como única medida de área.

6. Determinación de fórmulas para el área de figuras usuales.

7. Presentación del área dentro de una teoría matemática:

7.1. El área es un número real positivo.

7.2. El área asociada una función del conjunto de las figuras poligonales a los números reales.

7.3. El área es una clase de equivalencia de la partición inducida por la relación de equidescomponibilidad.

"En varios libros, de distintos niveles y épocas, se define el área como la medida de una superficie.

Esta idea sobre el área es la que prevalece, los estudiantes la repiten, muchas veces sin comprensión, "el área es la medida de una superficie"; se asocia el área a un número, resultante de la teselación de una figura plana a partir de una unidad de medida. Sin embargo, resaltamos que una cosa es el área y otra, la medida de ésta y aunque son ideas relacionadas, no deben confundirse; recordemos que Euclides presenta en sus Elementos áreas y no establece medidas." (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 128)

2.3. MARCO METODOLOGICO

El marco metodológico que se propone en este informe de semillero, consiste en la aplicación del cuestionario de la Dra. Turégano (Turégano, 1993), el cual tiene como objetivo indagar cuáles son las imágenes del concepto que con más frecuencia evocan los estudiantes al referirse al área, y, por otra, analizar las estrategias que ponen en manifiesto cuando se enfrentan a problemas y cuestiones sobre áreas que no son habituales en la enseñanza, es decir, que no son rutinarios. Este cuestionario no necesito de ser válido por ningún ente, ya que fue utilizado por la Dra. Turégano para la elaboración de su tesis de maestría, aprobada por los miembros del jurado en su sustentación. Además, es seleccionado, porque fue aplicado a una población similar con la que cuenta el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.

La población de estudio, está constituida por 79 estudiantes pertenecientes a tres cursos del programa, Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo, Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo y Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y la Geometría.

La metodología empleada es de tipo descriptiva y comparativa, puesto que los datos obtenidos en nuestro estudio fueron comparados con los resultados encontrados por la Dra. Turégano en su investigación de su tesis de maestría (Turégano, 1993), en donde se establece que los estudiantes emplean tres imágenes o nociones distintas del concepto de área (primitiva, operativa o descriptiva), que se diferencian cada una de ellas por el nivel de razonamiento empleado.

El cuestionario de la Dra. Turégano está estructurado en 4 bloques, cuyo contenido presentamos en la siguiente tabla:

BLOQUE	Problemas	CONTENIDO/DIFICULTAD
I ÁREA COMO MAGNITUD AUTÓNOMA	1	Transformación de un cuadrado en otros polígonos. Concepto de polígono. Congruencia.
	2	Proceso reversible del anterior. Equidescomposición.
	3	Duplicación del área del cuadrado. Equidescomposición.
	4	Transformación de un triángulo en rectángulo. Equidescomposición.
	5	Descomposición en figuras más sencillas. Confusión área/perímetro.

II COMPARACIÓN DEL ÁREA CON OTRA MAGNITUD	**6**	Relacionar área con otra magnitud. Figuras de distinta forma: rectilíneamente limitadas y no. Igual área.
	7	Relacionar área con otra magnitud. Establecer proporcionalidad.
	8	División de la figura en partes infinitesimales.
III INFINITESIMALES E INDIVISIBLES	**9**	Indivisibles de Cavalieri. Cortar la figura por planos paralelos.
IV EXHAUSIÓN	**10**	Agotamiento de la figura de acuerdo con una unidad de medida. Relación inversa del tamaño de la unidad con el área.

Tabla 1 Bloques de la Estructura del contenido relacionado con el cuestionario
Fuente: (Turégano M. P., 1993, pág. 238)

Además de contar con esta serie de problemas, este contiene una pregunta abierta sobre ¿Qué es el área de una superficie?, con el propósito de determinar la interpretación del concepto del área que tienen los estudiantes al referirse al área.

Una vez finalizada de etapa de análisis e interpretación de resultados, se seleccionaron 3 de los 79 estudiantes que componían la muestra, siendo entrevistados posteriormente con el objetivo de constatar las estrategias utilizadas en la solución del taller.

CAPITULO III

3. EL CUESTIONARIO

En este capítulo daremos a conocer el cuestionario que presentamos a los estudiantes de los cursos de Enseñanza y aprendizaje del Cálculo, del Aritmética y la Geometría y del Algebra y la Estadística de la Universidad Surcolombiana y junto a él, las soluciones, los posibles errores con sus posibles causas.

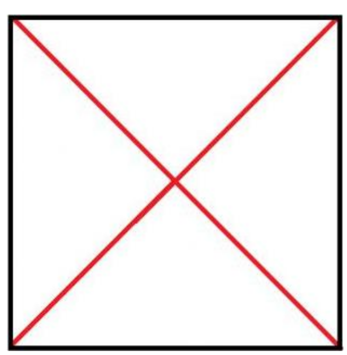
Las categorías que tiene este cuestionario, son muy importantes porque nos permite identificar con seguridad las imágenes del área que tiene los estudiantes, ya que los problemas son de tipo no rutinario. Las categorías que presentan son el Área como magnitud autónoma, la comparación del área con otra magnitud, infinitesimales e indivisible y la exhausción. Y en ellas contenidos a desarrollar como el concepto de polígono, de equidescomposición, de congruencia, área y perímetro; la transformación de un cuadrado en otros polígonos, el proceso reversible del anterior, duplicación del área del cuadrado, transformación de un triángulo en un rectángulo, figuras de distinta forma rectilíneamente limitadas o no, división de figuras en partes infinitesimales, indivisibles de Cavalieri, y agotamiento de la figura de acuerdo con una unidad de medida**.** (Turégano P. , 1993)

3.1. PRESENTACION DEL CUESTIONARIO Y SOLUCIONES A PRIORI

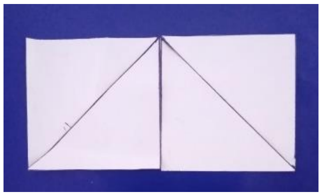
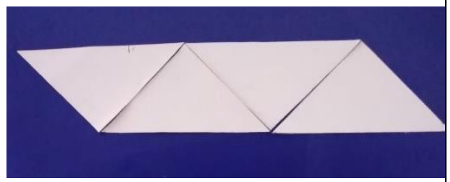
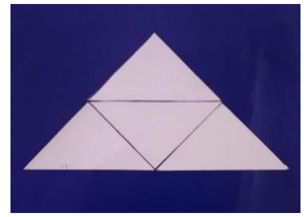
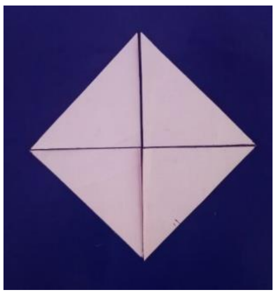
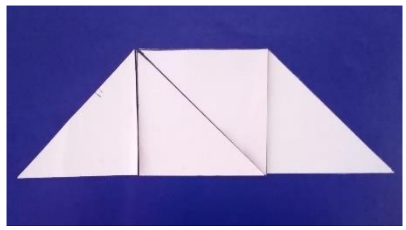
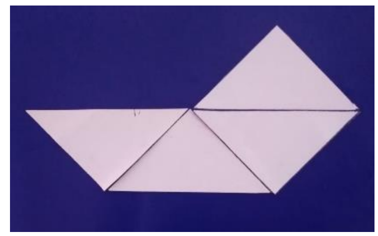
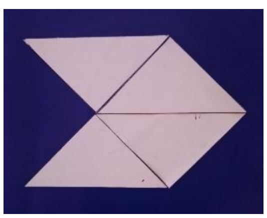
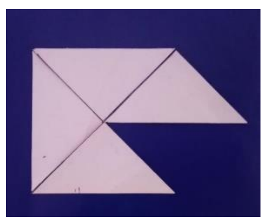
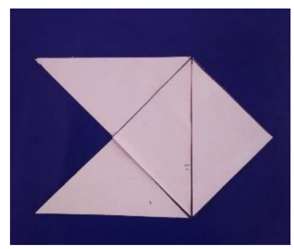
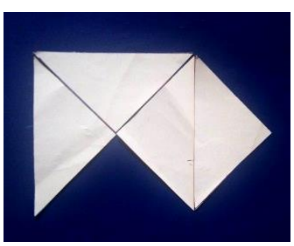
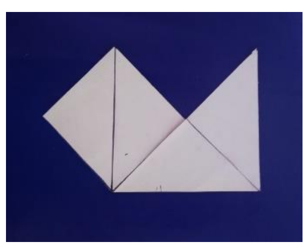
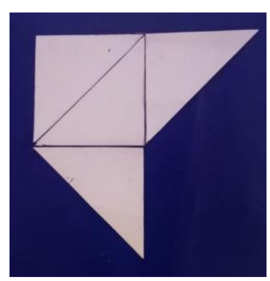
PROBLEMA 1.

Este problema está dividido en dos partes:

a) Construir diferentes polígonos que se puedan formar utilizando los cuatro triángulos en que queda dividido un cuadrado al cortarse por sus diagonales.



Construcción de los posibles polígonos:

RECTANGULO	PARELELOGRAMO	TRIANGULO ISOSCELES
		
ROMBO	TRAPECIO ISOSCELES	HEXAGONO NO CONVEXO 1
		
HEXAGONO NO CONVEXO 2	HEXAGONO NO CONVEXO 3	HEXAGONO NO CONVEXO 4
		
HEXAGONO NO CONVEXO 5	HEXAGONO NO CONVEXO 6	PENTAGONO NO CONVEXO 1
		

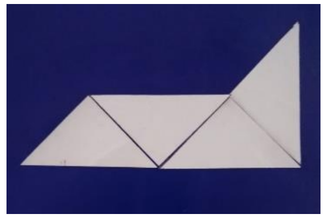
	PENTAGONO NO CONVEXO 2	
		

Tabla 2 Construcción de posibles Polígonos convexo y no convexos
Fuente: Construcción propia

JUSTIFICACIÓN

David Hilbert en el capítulo cuarto de su libro “Fundamentos de la Geometría”, desarrolla la teoría del contenido superficial en el plano, donde el teorema de Pascal juega un papel importante y en él se introducen los conceptos de equidescomponibilidad y equicomplementariedad de polígonos. Hilbert define, dos polígonos son equidescomponibles cuando se pueden descomponer en un numero finito de triángulos, los cuales, por parejas, son congruentes entre sı, dos polígonos simples son equicomplementarios cuando se les puede agregar un numero finito de polígonos equidescomponibles, de modo que los polígonos compuestos, sean equidescomponibles. Con base en lo anterior, se realiza el dibujo en una hoja aparte del cuadrado dado con sus respectivas diagonales, en donde se recortan los cuatro triángulos isósceles rectángulos en los que queda divido, para luego hacer uso de las transformaciones que se llevan a cabo en el plano cartesiano, tales como, la rotación, traslación y reflexión de figuras planas, empleando la recomposición de figuras, haciendo coincidir sus lados, con el objetivo de construir diferentes polígonos.

b) Determinar la relación que existe entre las áreas de todos los polígonos formados con respecto al cuadrado inicial.

Las áreas son iguales para cada uno de los polígonos.

JUSTIFICACIÓN

Con base en los teoremas 51,52 y 53 del capítulo IV de libro *"Fundamentos de la Geometría"* de David Hilbert, en donde se define el área de un polígono simple recorrido en sentido positivo como la suma de las áreas de los triángulos recorridos positivamente en que queda dividido por una determinada descomposición.

> *"51.Polígonos equidescomponibles tienen igual área y polígonos equicomplementarios tienen igual área.*
> *52. Dos polígonos equicomplementarios tienen igual área y dos polígonos de igual área son equicomplementarios.*
> *53. Al descomponer, mediante rectas, un rectángulo en diversos triángulos y suprimir uno de los triángulos, no es posible completar el rectángulo con los triángulos restantes*." (Luque, Mora, & Torres, El concepto del área, 2002, pág. 121)

Por otra parte en la proposiciones 45 Y 47 del Libro I de Euclides, se menciona acerca de la posibilidad de expresar el área como la suma de otras; referenciando el teorema de Pitagoras, como el ejemplo mas conocido de este planteamiento sobre el área, concluyendo que el concepto de área en Euclides no requiere el uso de números ni de formulas, pero si enfatiza en el concepto de área como la equivalencia de figuras que tienen igual descomposicion en figuras congruentes. (Luque, Mora, & Torres, El concepto del área, 2002, pág. 116)

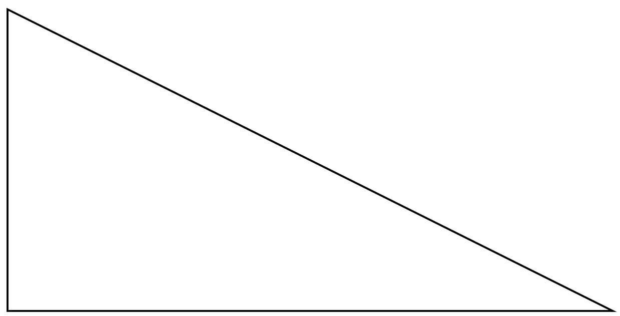
Por ultimo, en los postulados 20 y 21 tomados del libro I de Euclides, se explicita el área como un número real positivo, de la siguiente manera:

> *"Postulado 20. "El Postulado de la Congruencia"*
>
> *Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares determinadas por ellos tienen la misma área.*
>
> *Postulado 21. "El Postulado de la Adición de Áreas"*

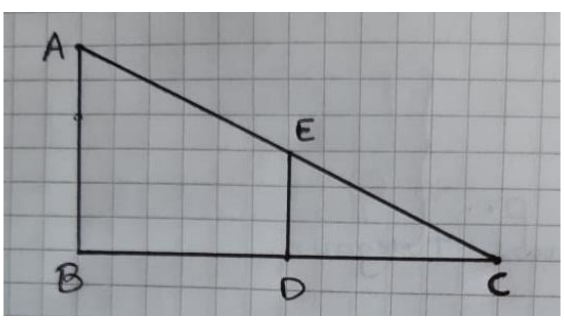
Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Supongamos que R_1 y R_2 se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos. Entonces, $aR = aR_1 + aR_2$." (Luque, Mora, & Torres, El concepto del área, 2002, pág. 134)

PROBLEMA 2.

Con base en el siguiente triángulo, ¿Por dónde habría que cortarlo para formar con las piezas resultantes un cuadrado? Realiza la construcción.



Solución 1.

PASO A PASO	JUSTIIFICACIÓN
	Trazar la mediatriz de $\overline{BC}$

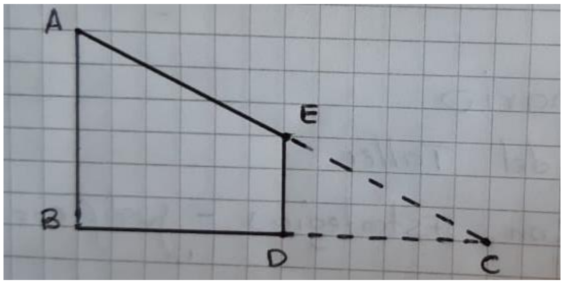
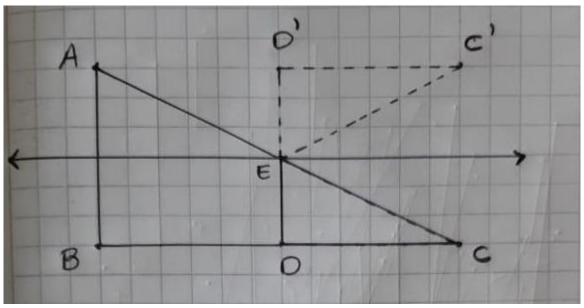
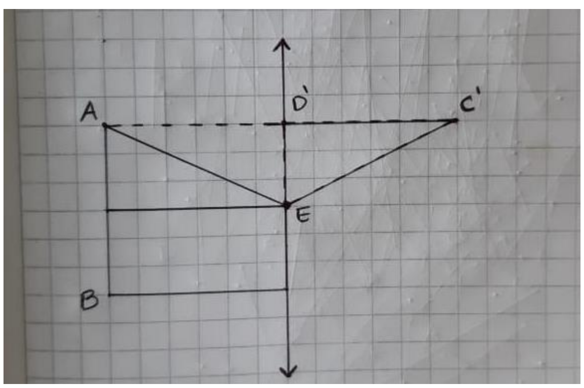
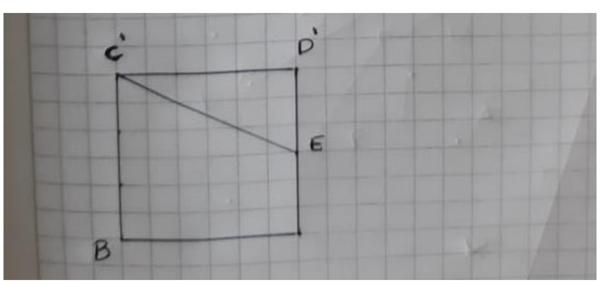
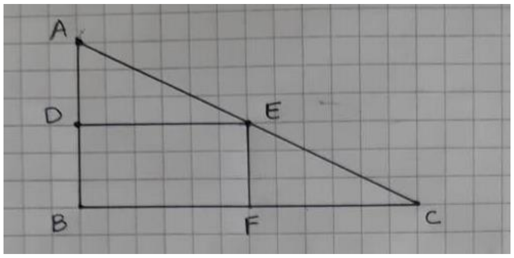
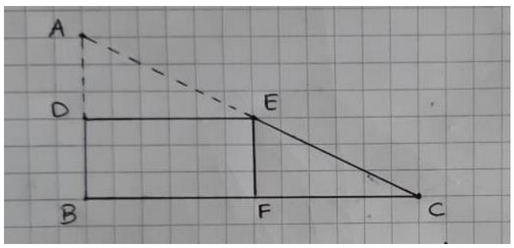
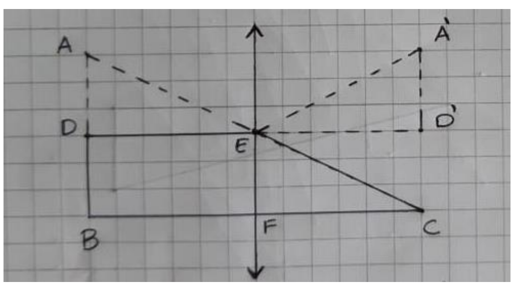
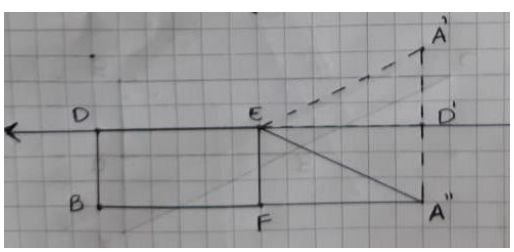
	Luego de haber trazado la mediatriz de $\overline{BC}$, obtenemos el ΔEDC.
	Trazamos la mediatriz de $\overline{AB}$, siendo tomada como eje de simetría para realizar la reflexión del ΔEDC. Obteniendo así el $\Delta EC'D'$.
	Tomamos como eje de simetría el segmento $\overline{ED'}$ y realizamos la reflexión del triangulo $\Delta EC'D'$.
	Finalmente, luego de haber realizado la reflexión del $\Delta EC'D'$, obtenemos el cuadrado $C'D'DB$

Tabla 3 1ra Construcción a priori de un cuadrado con base a un triangulo
Fuente: Construcción propia

SOLUCION 2:

PASO A PASO	JUSTIFICACIÓN
	Trazar la mediatriz de $\overline{BC}$ y la mediatriz de $\overline{AB}$.
	Al trazar las mediatrices $\overleftrightarrow{DE}$, y $\overleftrightarrow{EF}$ se forman los ΔADE y ΔFEC.
	Tomando como eje de simetría la mediatriz $\overleftrightarrow{EF}$, realizamos la reflexión del ΔADE obteniendo así el $\Delta A'D'E$.
	Ahora, tomamos como eje de simetría la mediatriz $\overleftrightarrow{DE}$, haciendo la reflexión del $\Delta A'D'E$.

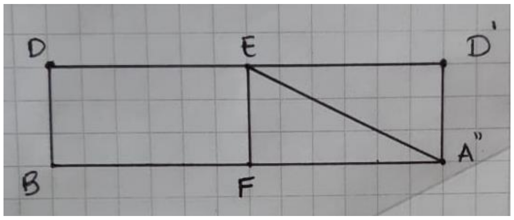
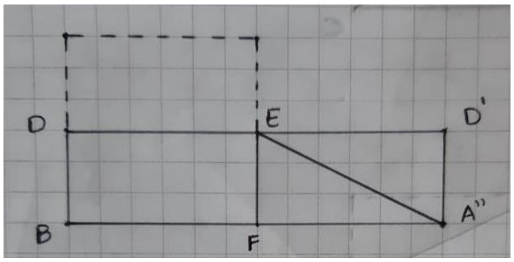
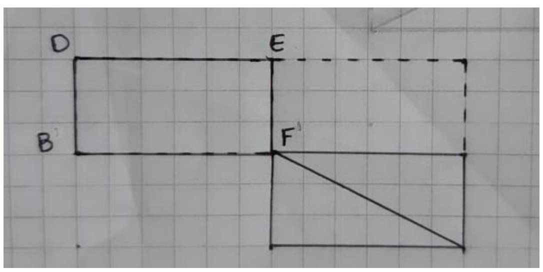
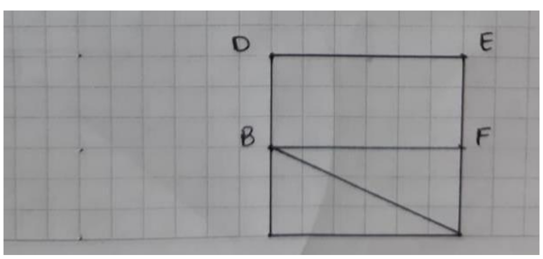
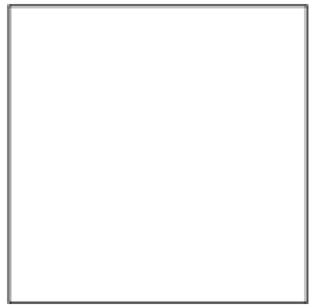
<table>
<tr><td>
</td><td>Obteniendo el rectángulo ED'A''F.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Realizamos la traslación del rectángulo DBFE tres unidades verticalmente hacía arriba, quedando así formado el rectángulo D''B'F'E'.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ahora al rectángulo D''B'F'E' se le realiza una traslación de 6 unidades horizontalmente hacia la derecha, para formar así el rectángulo trasladado D'''B''F''E''.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Finalmente queda construido el cuadrado D'''E''A''F pedido inicialmente.</td></tr>
</table>

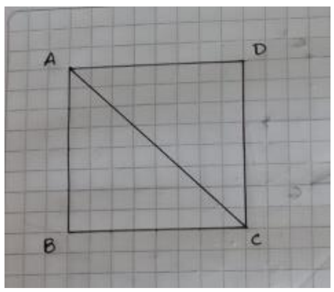
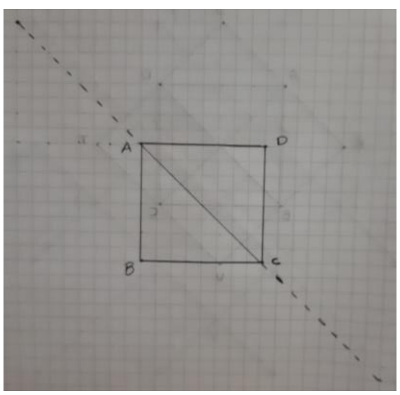
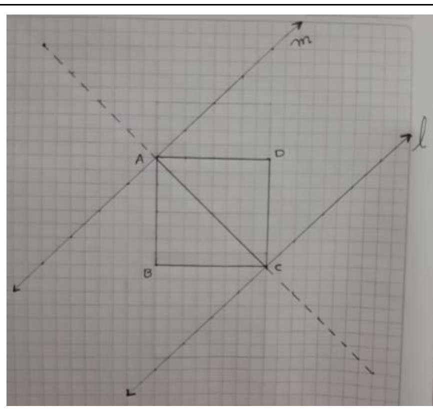
Tabla 4 2da Construcción a priori de un cuadrado con base a un triangulo
Fuente: Construcción propia

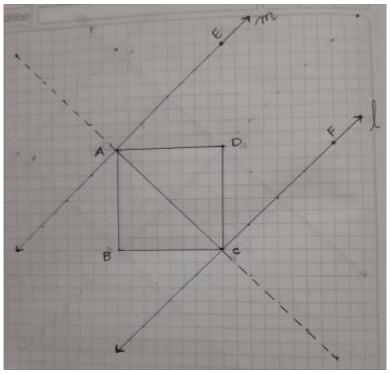
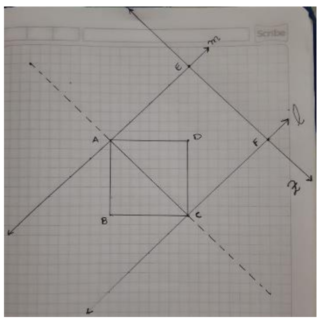
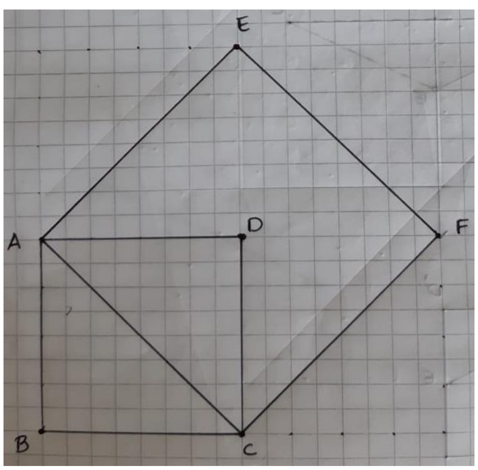
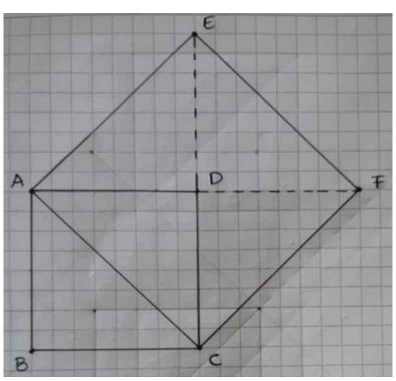
PROBLEMA 3.

Duplicar el área del siguiente cuadrado, utilizando como estrategia la búsqueda de un segmento cuya medida exprese el lado del cuadrado de doble superficie.



Solución 1:

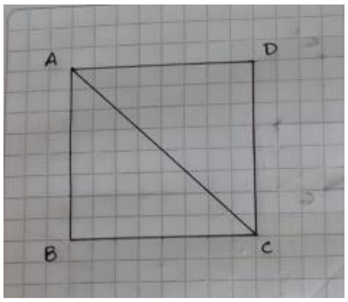
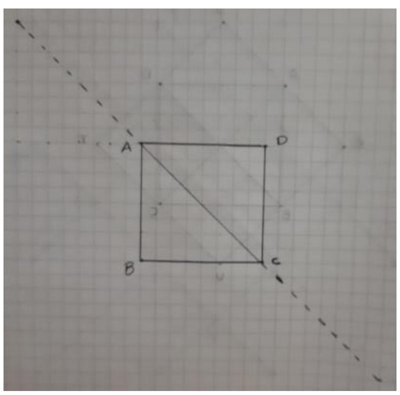
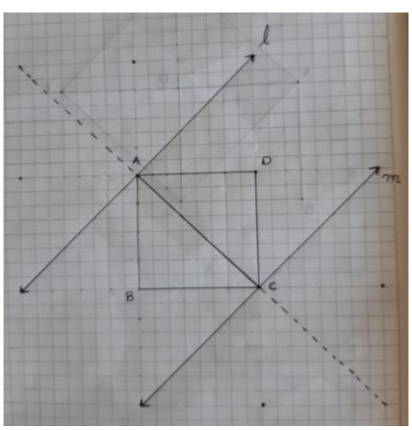
Construcción	Justificación
	Trazar la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado ABCD.
	Se prolonga $\overline{AC}$ en ambas direcciones.
	Sobre esta prolongación, se traza la $\overleftrightarrow{m}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto A y luego se traza la $\overleftrightarrow{l}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto C.

	Se mide $\overline{AC}$ para luego ubicar esta medida sobre la $\overleftrightarrow{l}$, partiendo del punto C finalizando en el punto F, de igual manera se ubica esta medida sobre la $\overleftrightarrow{m}$ partiendo del punto C finalizando en el punto E.
	Al ubicar los puntos E y F, se generan $\overline{AE}\ y\ \overline{CF}$. Luego se traza la $\overleftrightarrow{z}$ perpendicular a estos segmentos pasando los puntos E y F.
	Obteniendo así el cuadrado ACFE.
	Para validar que el nuevo cuadrado generado AEFC duplica en el área al cuadrado inicialmente dado ABCD, trazamos las diagonales respectivas en cada uno de ellos, logrando identificar que el cuadrado ABCD contiene en su interior dos triángulos congruentes $\Delta ADC\ y\ \Delta ABC$, en cambio el cuadrado AEFC contiene en su interior 4 triángulos congruentes a los

	$\Delta ADC\ y\ \Delta ABC$ del cuadrado ABCD, según el criterio de congruencia L-A-L.

Tabla 5 1ra 2da Construcción a priori de un cuadrado de doble superficie con respecto a otro usando una estrategia específica
Fuente: Construcción propia

Solución 2:

Construcción	Justificación
	Trazar la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado ABCD.
	Se prolonga $\overline{AC}$ en ambas direcciones.
	Sobre esta prolongación, se traza la $\overleftrightarrow{l}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto A y luego se traza la $\overleftrightarrow{m}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto C.

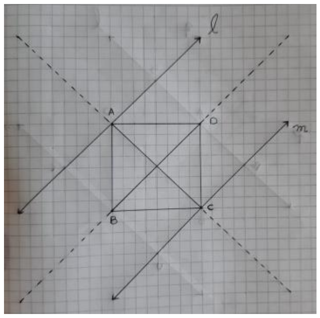
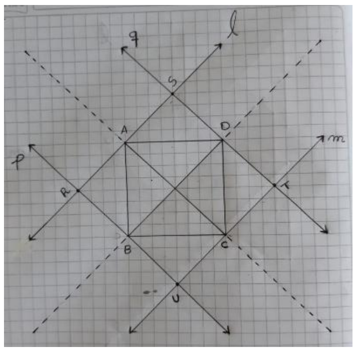
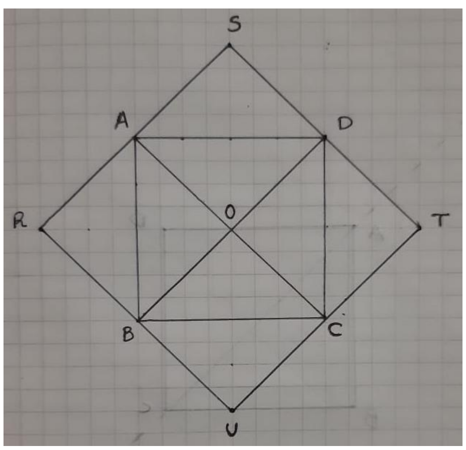
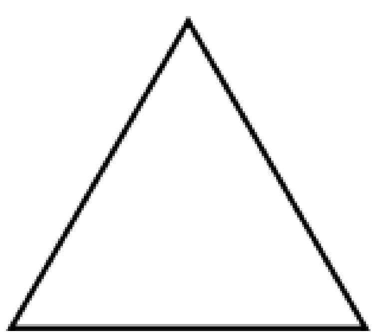
	Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ para luego ser prolongada en ambas direcciones.
	Sobre esta prolongación, se traza la $\overleftrightarrow{p}$ perpendicular a $\overline{BD}$ en el punto B y luego se traza la $\overleftrightarrow{q}$ perpendicular a $\overline{BD}$ en el punto D, generando $\overline{RU}, \overline{UT}, \overline{TS}, \overline{SR}$.
	Luego de realizar los trazos anteriormente mencionados, se forma el cuadrado RSTU, el cuál duplica en área al cuadrado ABCD inicialmente dado. Para demostrar esta duplicación, los triángulos inscritos en el cuadrado ABCD son congruentes a los triángulos inscritos en el cuadrado RSTU, estableciéndose las siguientes relaciones de congruencia $\Delta AOD \cong \Delta ASD$, $\Delta BOC \cong \Delta BUC$, $\Delta COD \cong \Delta CTD$, $\Delta ABR \cong \Delta AOB$, todas validas por el criterio de congruencia A-L-A.

Tabla 6 2da Construcción a priori de un cuadrado de doble superficie con respecto a otro usando una estrategia específica
Fuente: Construcción propia.

PROBLEMA 4.

Con base en el siguiente triángulo, construir un rectángulo de igual área.



Solución 1:

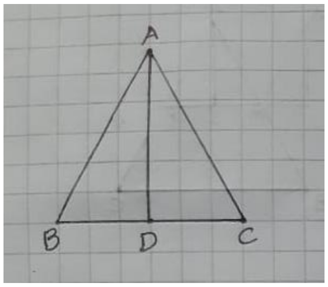
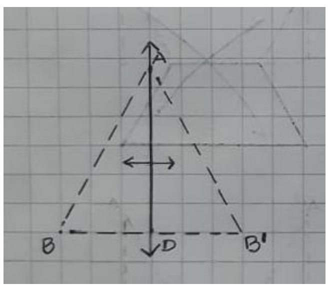
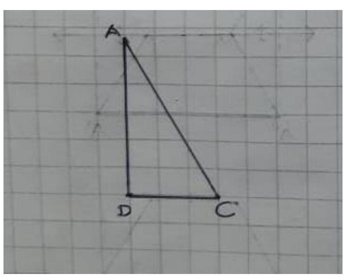
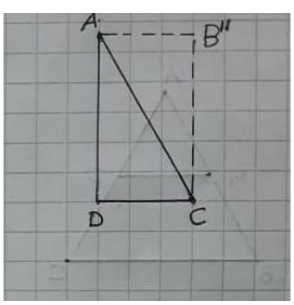
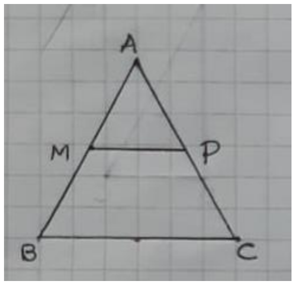
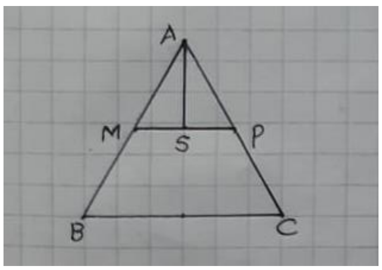
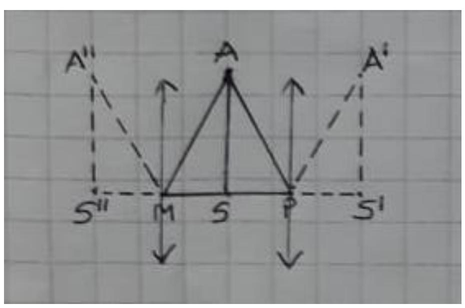
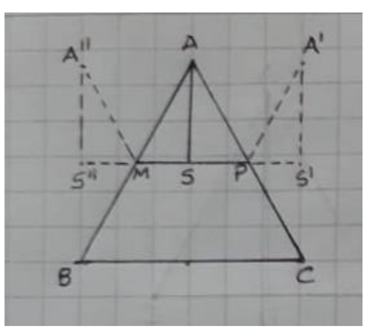
PASO A PASO	JUSTIFICACIÓN
	Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{BC}$
	Al trazar la mediatriz queda formado el ΔADB, tomamos como eje de simetría el segmento $\overleftrightarrow{AD}$, que resultó de la mediatriz construida y realizamos una reflexión.
	Al realizar la reflexión que sobrepuestos el triángulo que resulto de la reflexión $\Delta ADB'$ y el ΔADC que hacia parte de la triangulo inicial.
	Finalmente realizamos una rotación de 180º al $\Delta ADB'$, haciendo coincidir sus hipotenusas y así quedando construido el rectángulo ADCB''

Tabla 7 1ra Construcción a priori de un rectángulo de igual área de un triángulo propuesto.

Fuente: Construcción propia.

SOLUCION 2

<table>
<tr><th>PASO A PASO</th><th>JUSTIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Trazamos la recta $\overleftrightarrow{MP}$ en los puntos medios de los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CA}$ siendo esta paralela al segmento $\overline{BC}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Con la recta construida se forma el ΔMPA y en el $\overline{MP}$, se traza la mediatriz $\overleftrightarrow{SA}$ quedando así divido en 2 triángulos rectángulos.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Los dos triángulos formados son $\Delta MSA\ y\ \Delta PSA'$; trazando el eje de simetría de manera vertical que pasa por los vértices M y P , se realiza la reflexión de cada uno de los triángulos.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Realizando dichas reflexiones quedan construidos los triángulos $\Delta PS'A'\ y\ \Delta MS''A''$.</td></tr>
<tr><td></td><td>Usando como eje de reflexión la recta formada en la parte inicial $\overleftrightarrow{MP}$,</td></tr>
</table>

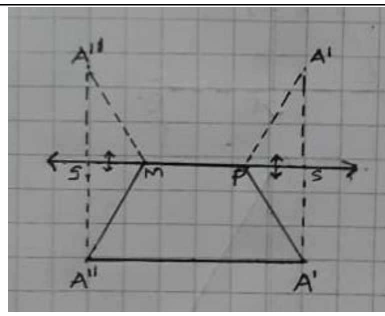
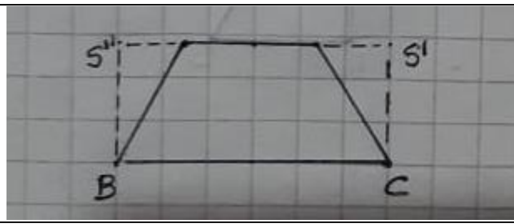
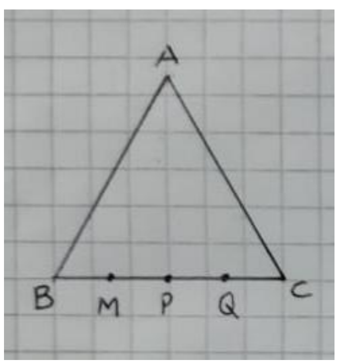
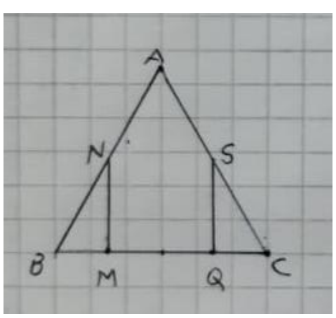
	hacemos reflexión de los triangulo $\Delta PS'A'$ y $\Delta MS''A''$.
	Realizando la reflexión de los dos triangulo mencionados en la justificación anterior, coinciden las hipotenusas quedando así formado el rectángulo S''S'CB.

Tabla 8 2da Construcción a priori de un rectángulo de igual área de un triángulo propuesto.

Fuente: Construcción propia.

SOLUCION 3

	Tomamos con unidad el segmento $\overline{BC}$ dividiéndolo en 4 partes, obteniendo los puntos de la recta, M, P y Q.
	Trazamos dos rectas perpendiculares al segmento $\overline{BC}$ en los puntos M Y Q construidos anteriormente, estas rectas coinciden en los puntos medios de los otros dos segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$. Al realizar esto, quedan formados 2 triángulos ΔBMN y ΔCQS.

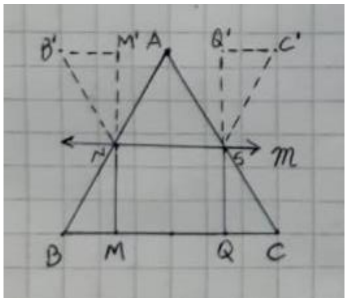
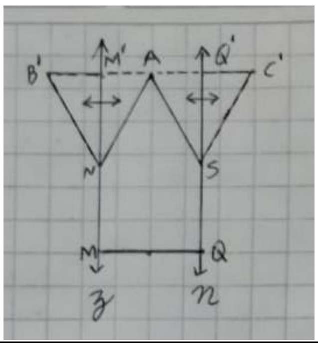
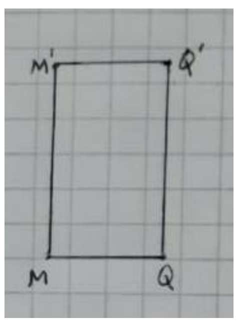
	Trazamos un eje de simetría de manera horizontal $\overleftrightarrow{m}$, pasando por los puntos medio de los segmentos $\overline{CA}\ y\ \overline{BA}$. Realizamos la reflexión de cada uno de los $\Delta BMN\ y\ \Delta CQS$, quedando formados ahora los triángulos $\Delta B'M'N\ y\ \Delta C'Q'S$.
	Ahora, tomamos como ejes verticales de simetría, un segmento de cada uno de los triángulos formados anteriormente, en este caso tomaremos como ejes de simetría los segmentos $\overline{NM'}\ y\ \overline{SQ'}$. Se realiza la reflexión de los triángulos $\Delta B'M'N\ y\ \Delta C'Q'S$ para así quedar construido el rectángulo pedido.
	El triángulo construido es M'Q'QM

Tabla 9 3ra Construcción a priori de un rectángulo de igual área de un triángulo propuesto.

Fuente: Construcción propia.

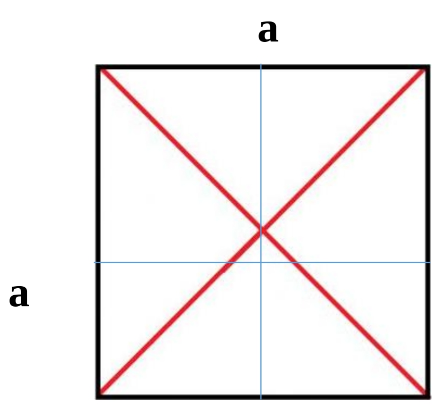
PROBLEMA 5.

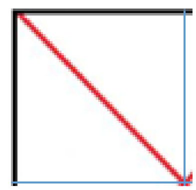
Para cada uno de los polígonos construidos en el *Problema 1*, determine el área y el perímetro, justificando los procedimientos empleados para hacerlo.

Determinación del Área y el perímetro, para esto pueden existir varias soluciones, presentamos algunas soluciones de estas.

Solución 1:

Para la construcción del área y el perímetro podemos tenemos en cuenta las características de la figura inicial así:





= 1u

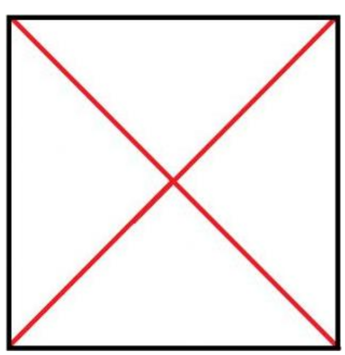
Donde esta va a ser mi unidad

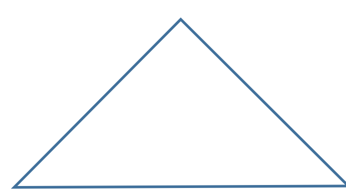
Por medio de la descomposición y la recomposición de esta unidad fácilmente voy a hallar el área. Y tengo en cuenta que el lado del cuadrado es igual a **a.**

Como sabemos que un lado del cuadrado es igual a **a**, entonces y teniendo en cuenta que la diagonal del cuadrado inicial es $a\sqrt{2}$ y como necesitamos para hallar el perímetro solo la mitad de esta diagonal esta es: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Observación: En todos los casos al realizar la descomposición de los triángulos y la composición de los cuadrados unidad en esta solución, encontraremos los mismos 4 cuadrados, daremos únicamente la explicación en el polígono 1.

Solución 2:





= 1u

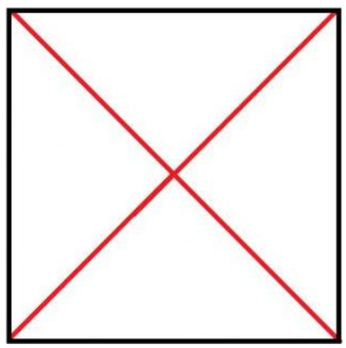
Donde esta va a ser mi unidad

Observación: En todos los casos al contar los triángulos que son nuestra unidad en esta solución, encontraremos los mismos 4 triángulos por tal motivo el área siempre será igual a 4 unidades, daremos únicamente la explicación en el polígono 1.

Solución 3:

Vamos a dar una magnitud a los lados de mi cuadrado

2cm



2cm

De acuerdo con esto, la diagonal es igual a

$$d^2 = 2^2 + 2^2$$

$$d^2 = 4 + 4$$

$$d^2 = 8$$

$$d = \sqrt{8}$$

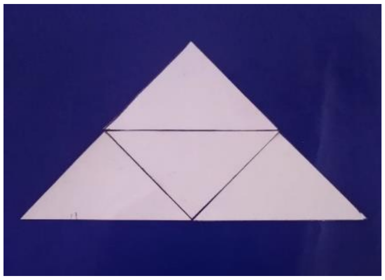
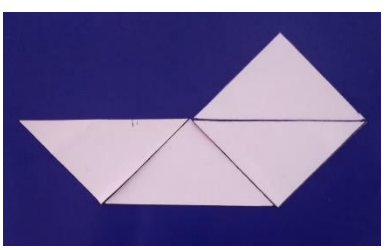
$$d = 2\sqrt{2}$$

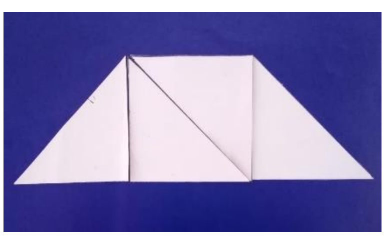
Luego la mitad de la diagonal sería igual a $\frac{d}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ **.** Entonces cada lado de lado de los triángulos en los que está descompuesto el cuadrado es igual a $\sqrt{2}$

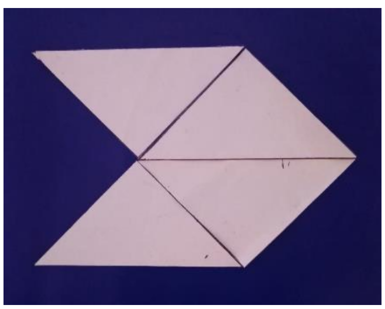
Observación: En los polígonos convexos lograremos hallar el área de acuerdo a sus fórmulas y al procedimiento para hallar el área en cada caso, en el caso de los polígonos no convexos realizaremos el procedimiento en el primer polígono no convexo de la tabla ya que para los demás se realiza el mismo procedimiento.

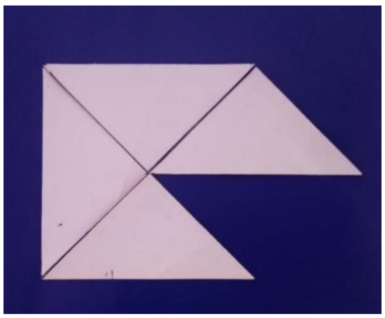
FIGURA	AREA	PERÍMETRO
	**Solución 1:** Puedo por medio de la descomposición recomponemos 4 cuadrados, donde de cada	**Solución 1:** P= a + a + a + a + $2(\frac{a\sqrt{2}}{2})$

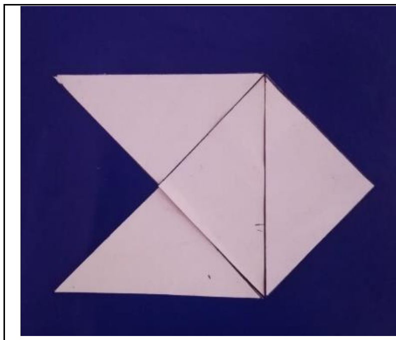
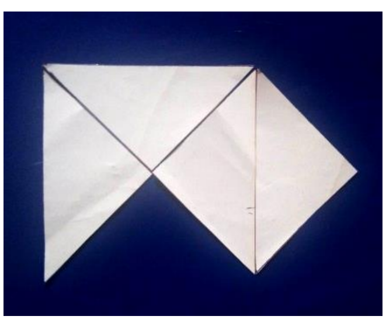
	triangulo trazando la mediatriz encuentro un cuadrado al realizar la rotación. Área: 4 unidades **Solución 2:** Por medio de lo dicho en la parte inicial, en esta solución mi unidad es uno de los triángulos en que está dividido el cuadrado. Área= 4 Unidades **Solución 3:** Por medio de lo dicho en la parte inicial, en esta parte tenemos en cuenta la parte numérica. Área del romboide es igual a: Área: b*h b=4cm Hallamos la altura del romboide: $\sqrt{2}^2 = 1^2 + (h)^2$ $2 = 1 + (h)^2$ $2 - 1 = (h)^2$ $\sqrt{1} = h$ $1 = h$ h=1cm entonces el área es igual área: $4cm * 1cm$ área= $4cm^2$	P= a+a+a+a+ $a\sqrt{2}$ P = a(1+1+1+1+ $\sqrt{2}$) P= a (4 + $\sqrt{2}$) **Solución 3:** **P = 4** $(\boldsymbol{2cm}) + \boldsymbol{2}(\sqrt{\boldsymbol{2}}cm)$ **P =** $\boldsymbol{8cm} + \boldsymbol{2}\sqrt{2}cm$

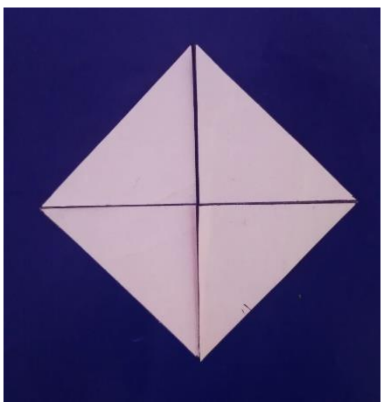
	**Solución 3:** Área del triángulo es igual a: Área: $\frac{b*h}{2}$ b=4cm Hallamos la altura del triángulo: $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + (h)^2$ $8 = 4 + (h)^2$ $8 - 4 = (h)^2$ $\sqrt{4} = h$ $2 = h$ h=2cm entonces el área es igual área: $\frac{4*2}{2}$ área= $4cm^2$	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2(a\sqrt{2})$ P= $2(a)(1 + (\sqrt{2}))$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{2(2cm) + 4(\sqrt{2}cm)}$ **P** = $\mathbf{4cm + 4(\sqrt{2}cm)}$ **P**= $\mathbf{4cm(1 + \sqrt{2})}$
	**Solución 3:** En este ejercicio donde el polígono es no convexo, hallamos el área de uno de sus triángulos y con él hallaremos el área.	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2(a\sqrt{2})$

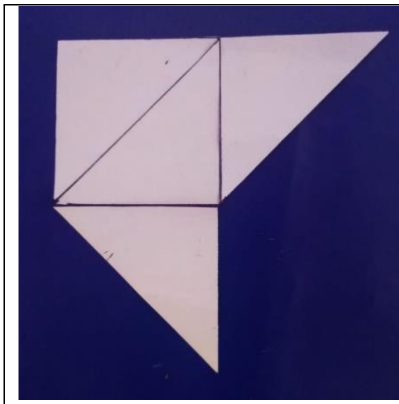
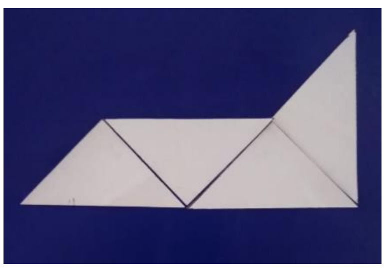
	Áreat1 = $\frac{b*h}{2}$ Hallamos la altura de uno de sus triángulos: $(\sqrt{2})^2 = 1^2 + (h)^2$ $2 = 1 + (h)^2$ $2 - 1 = (h)^2$ $\sqrt{1} = h$ $1 = h$ Luego; Áreat1 = $\frac{1*2}{2}$ Áreat1= $1cm^2$ Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	P= $2(a)(1 + (\sqrt{2}))$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{2(2cm) + 4(\sqrt{2}cm)}$ **P** = $\mathbf{4cm + 4(\sqrt{2}cm)}$ **P**= $\mathbf{4cm(1 + \sqrt{2})}$
	**Solución 3:** Hallamos el área del trapecio isósceles con la formula Área= $h * \frac{a+b}{2}$ Donde a es la medida de la base superior y b e la medida de la base inferior.	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2(a\sqrt{2})$ P= $2(a)(1 + (\sqrt{2}))$

	Área= $\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}$ Área= $\sqrt{2} * \frac{4\sqrt{2}}{2}$ Área= $\sqrt{2} * 2\sqrt{2}$ Área= $2\sqrt{4}$ Área= $4\ cm^2$	**Solución 3:** **P** = $\mathbf{2(2cm)} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P** = $\mathbf{4cm} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P=** $\mathbf{4cm(1+\sqrt{2})}$
	Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2\left(a\sqrt{2}\right)$ P= $2(a)(1 + \left(\sqrt{2}\right))$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{2(2cm)} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$

		P $= \mathbf{4cm} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P=** $\mathbf{4cm}(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}})$
	Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	**Solución 1:** P= $4(a) + 2(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $4(a) + (a\sqrt{2})$ P= $(a)(4 + (\sqrt{2}))$ **Solución 3:** **P** $= \mathbf{4}(\mathbf{2cm}) + \mathbf{2}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P** $= \mathbf{8cm} + \mathbf{2}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P=** $\mathbf{2cm}(\mathbf{4} + \sqrt{\mathbf{2}})$
	Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	**Solución 1:**

		P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2\left(a\sqrt{2}\right)$ P= $2(a)(1 + \left(\sqrt{2}\right))$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{2(2cm)} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P** = $\mathbf{4cm} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P=** $\mathbf{4cm(1 + \sqrt{2})}$
	Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2(a) + 2\left(a\sqrt{2}\right)$ P= $2(a)(1 + \left(\sqrt{2}\right))$

		Solución 3: **P** = $\mathbf{2(2}\boldsymbol{cm}) + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm\ )$ **P** = $\mathbf{4}\boldsymbol{cm} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm\ )$ **P**= $\mathbf{4}\boldsymbol{cm}(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}})$
	Hallamos el área de un rombo con la formula= Área = $\frac{D*d}{2}$ Área = $\frac{2(\sqrt{2})*2(\sqrt{2})}{2}$ Área = $\frac{4(\sqrt{4})}{2}$ Área = $\frac{4(2)}{2}$ Área = 4 cm^2	**Solución 1:** P= $4(a)$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{4(2}\boldsymbol{cm})$ **P** = $\mathbf{8}\boldsymbol{cm}$
	Área total es igual a =	**Solución 1:** P= $2(a) + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$

	ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	P= $2(a) + 2\left(a\sqrt{2}\right)$ P= $2(a)(1 + \left(\sqrt{2}\right))$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{2}(\mathbf{2cm}) + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P** = $\mathbf{4cm} + \mathbf{4}(\sqrt{\mathbf{2}}cm)$ **P=** $\mathbf{4cm}(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}})$
	Área total es igual a = ÁreaF = $4 * (1cm^2) = 4cm^2$	**Solución 1:** P= $4(a) + 2(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $4(a) + \left(a\sqrt{2}\right)$ P= $(a)(4 + \left(\sqrt{2}\right))$ **Solución 3:**

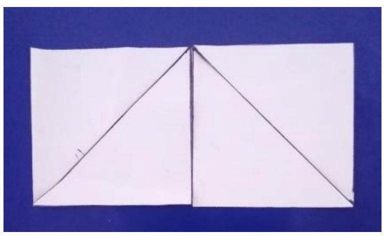
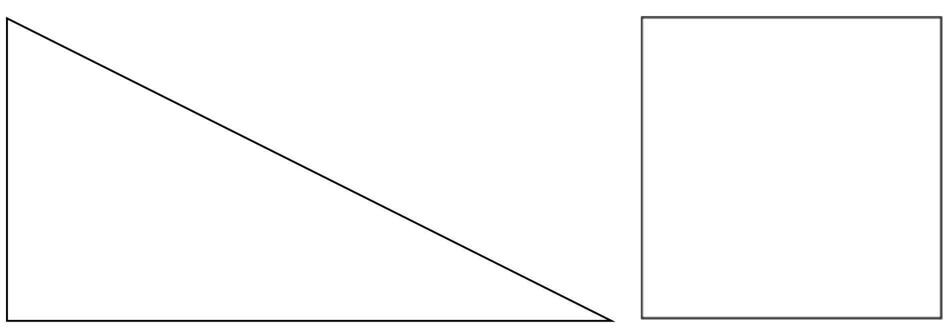
		P = $\mathbf{4(2\boldsymbol{cm})+2(\sqrt{2}}\boldsymbol{cm}\,)$ **P** = $\mathbf{8\boldsymbol{cm}+2(\sqrt{2}}\boldsymbol{cm}\,)$ **P**= $\mathbf{2\boldsymbol{cm}(4+\sqrt{2})}$
	Hallamos con la fórmula del área de un rectángulo: Área = $b * h$ Área = $2\sqrt{2} * \sqrt{2}$ Área = $2\sqrt{4}$ Área = $2(2)$ Área = $4\ cm^2$	**Solución 1:** P= $4(\frac{a\sqrt{2}}{2})$ P= $2\left(a\sqrt{2}\right)$ **Solución 3:** **P** = $\mathbf{4(\sqrt{2}}\boldsymbol{cm}\,)$

Tabla 10 Área y perímetro de polígonos convexos y no convexos

Fuente: Construcción propia

PROBLEMA 6.

Reconocer si hay conservación o no del área de figuras de distintas formas recortadas en láminas de plata del mismo grosor y de igual peso (problema6) o distinto peso (problema 7).



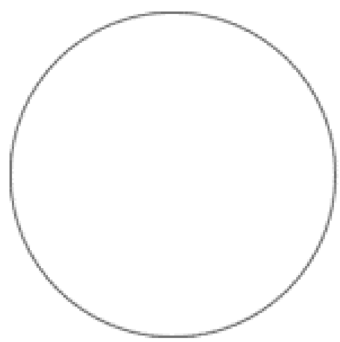
Solución.

La finalidad del problema, es comprobar si se admite que figuras rectilíneamente limitadas y otras curvilíneas pueden tener la misma área, y para ello nos servimos de otra magnitud, estableciendo el área como una magnitud autónoma, no comparándola con otra magnitud.

La igualdad de pesos es admitida por más del 64.7% de los estudiantes como criterio válido para establecer la igualdad de áreas cuando todas las otras cualidades de los objetos permanecen constantes.

PROBLEMA 8

Dibujar un triángulo de igual área que la del siguiente círculo.



Solución 1.

Dibujar varios círculos concéntricos en los que los radios se escalonan de 0 a r, trazando luego, un corte rectilíneo desde el borde hasta el centro. Por último, vamos estirando capa a capa, formando así un triángulo, así estas dos superficies compuestas de indivisibles iguales dos a dos tienen, pues, la misma área, los indivisibles se van formando con las longitudes de las circunferencias, pudiéndose establecer una correspondencia uno a uno que justifica la igualdad de áreas (Turégano, 1993).

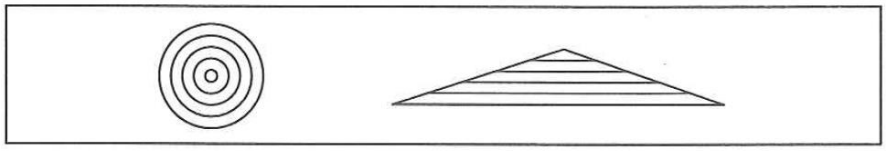


Ilustración 1 Descomposición infinitesimal del circulo para construir un triángulo de igual área

Fuente: (Turégano P. , 1993, pág. 250)

Las descomposiciones infinitesimales, bien de la misma dimensión o de una dimensión menor que la figura original, no son evocadas por los estudiantes de forma espontánea.

Buenaventura Cavalieri (1598-1647) que utilizó razonamientos similares a los de Arquímedes para tratar los temas de cálculo de medidas de áreas y de volúmenes, basándose en el concepto de los indivisibles (áreas formadas por segmentos rectilíneos) que aparece por primera vez en su libro *Geometría Indivisibilibus* el año 1635. La idea fundamental en la que basó su libro fue que un área se puede considerar formada por segmentos rectilíneos o indivisibles. Cavalieri calculó la integral de las potencias x^k para $k = 1,2,3,4,5,6$ y 9. (Martínez, 2015)

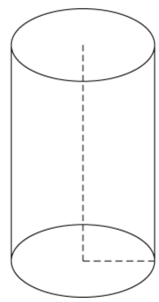
En el primer caputilo del libro *Fundamentos de la Geometría* de David Hilbert, se presentan los axiomas de continuidad

> V. Axiomas de continuidad
> V1. (Axioma de la medida o de Arquímedes). Si *AB* y *CD* son dos segmentos cualesquiera,
> existe siempre sobre la recta *AB* un número de puntos *A*1, *A*2, *A*3, . . ., *An*, tales que los segmentos *AA*1, *A*1*A*2, *A*2*A*3, . . ., *An*−1*An* son congruentes con *CD* y el punto *B* está situado entre *A* y *An*.
> V1∗. (Axioma de la medida o de Arquímedes para el cálculo de segmentos). Si *AB* y *a* son dos segmentos cualesquiera de una recta, existe siempre sobre la misma un numero
> de puntos *A*1, *A*2, *A*3, . . ., *An* de modo que *B* está situado entre *A* y *An* y los segmentos *AA*1, *A*1*A*2, *A*2*A*3, . . ., *An*−1*An* son iguales a *a* en el sentido del cálculo de segmentos fundado en los axiomas I, II, IV∗ y el teorema de Desargues.
> V2. (Axioma de la compleción lineal). El conjunto de los puntos de una recta provisto de las relaciones de orden y de congruencia, no es susceptible de ampliación alguna en la que sean válidas las relaciones precedentes y las propiedades fundamentales de orden lineal y de congruencia deducidas de los axiomas I - III y del axioma V1.
> V2∗ (Axioma de la compleción lineal para el cálculo de segmentos). El conjunto de los puntos de una recta provisto de la relación de orden, no es susceptible de ampliación

alguna en la que sea válida esta relación y las propiedades fundamentales de orden lineal deducidas de los axiomas I - III y del axioma V1 (Luque, Mora, & Torres, 2002).

PROBLEMA 9.

Realizar diferentes cortes en el siguiente cilindro (sin tener en cuenta sus tapas), de tal forma que en las diferentes figuras creadas haya una conservación del área del cilindro inicial.

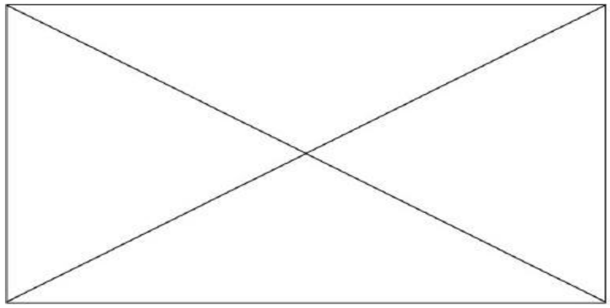


Solución.

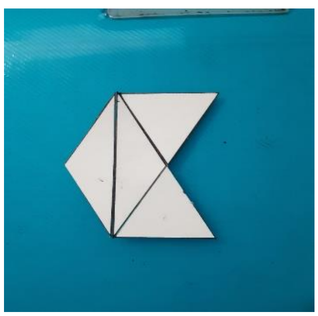
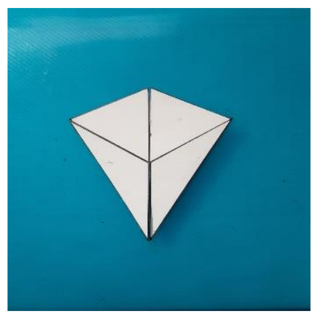
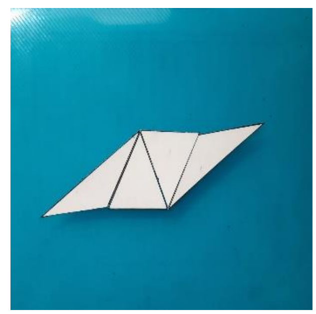
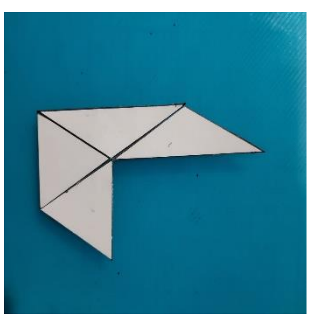
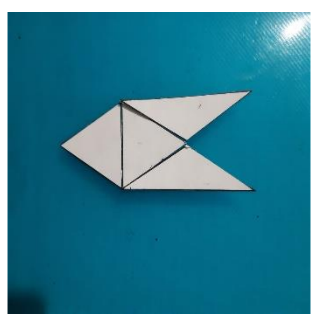
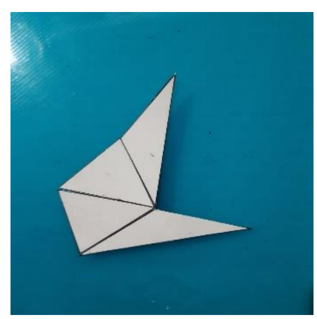
Antes de iniciar con la solución a este problema, se dice que en la justificación del problema 1 también lo es para este problema; debemos recordar que el desarrollo plano de un cilindro recto es un rectángulo y dos círculos congruentes. La base del rectángulo que forma la superficie lateral tiene la misma longitud que la circunferencia del círculo que forma cada base y la altura coincide con la altura del cilindro.

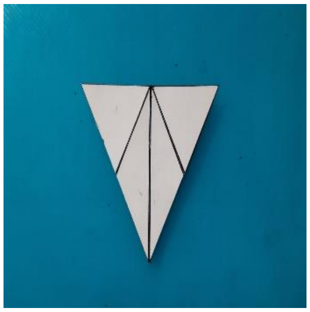
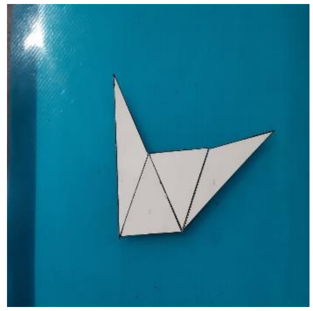
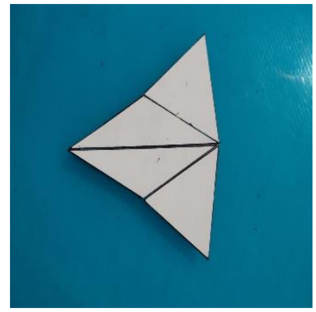
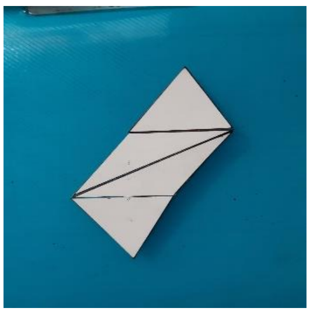
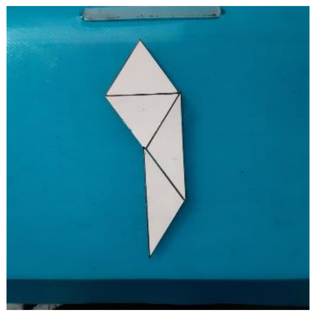
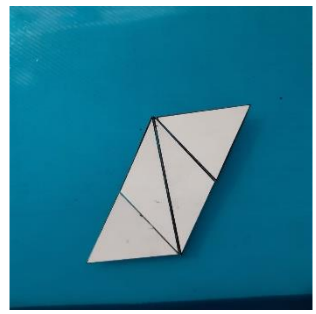
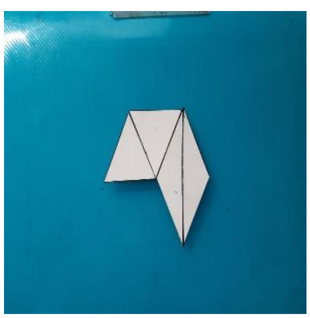
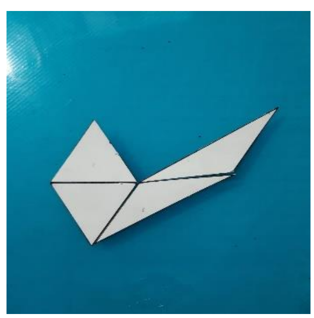
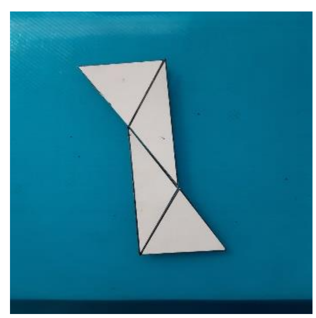
Con base en lo anterior y teniendo en cuenta la condición establecida en el enunciado del problema, trabajaremos solamente con el rectángulo proveniente en el desarrollo del cilindro.

Uno de los posibles cortes que se le pueden realizar a este rectángulo, es trazando sus diagonales, quedando este dividido en cuatro triángulos, dos isósceles acutángulos y dos isósceles obtusángulos.



Con base en la descomposición realizada en el rectángulo anterior, se pueden dibujar utilizando como estrategia la recomposición, rotación y traslación de figuras, los siguientes polígonos:

HEXAGONO NO CONVEXO	CUADRILATERO CONVEXO	HEXAGONO CONVEXO
		
HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO CONVEXO
		

TRIANGULO	HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO COVEXO
		
CUADRILATERO	HEXAGONO NO CONVEXO	CUARILATERO
		
HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO CONVEXO
		

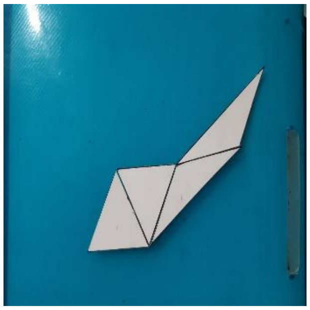
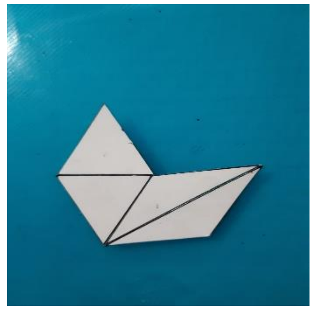
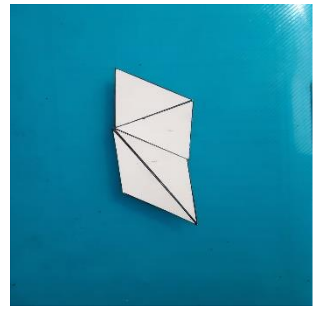
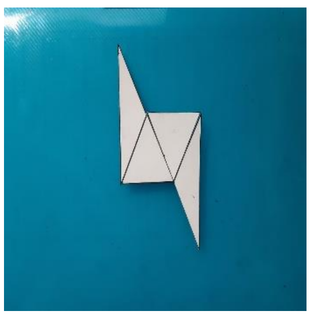
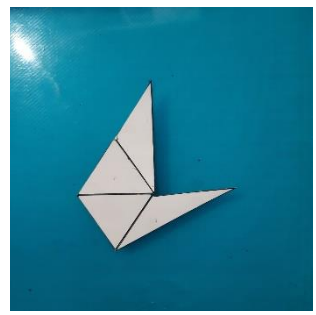
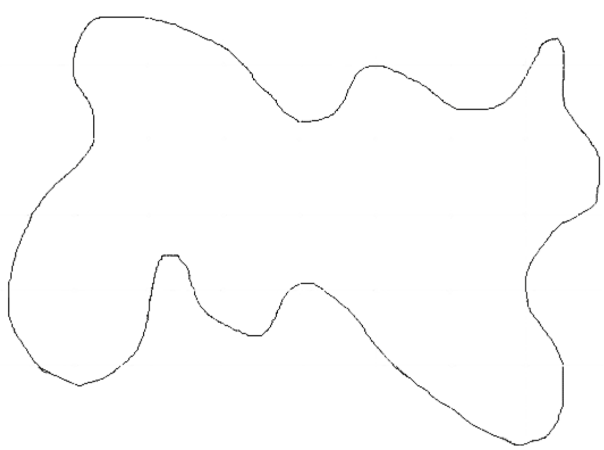
HEXAGONO NO CONVEXO	HEXAGONO NO CONVEXO	CUADRILATERO
		
HEXAGONO NO CONVEXO		PENTAGONO NO CONVEXO
		

Tabla 11 Construcción de polígonos de igual área de un cilindro dado.
Fuente: Construcción propia

PROBLEMA 10.

Determinar el área de la siguiente figura.



Solución 1.

Pierre de Fermat (1601-1665) descubrió en el año 1629 o más tarde un teorema relativo al área encerrada bajo las curvas, que en esencia era el teorema que publicó Cavalieri en 1635 y 1647, pero ya no estaba limitado a valores enteros de m entre 1 y 9, sino se podía utilizar tanto para valores enteros y fraccionarios. Para ello, consideremos la curva $y = x^n$, y supongamos que se desea calcular la medida del área comprendida bajo la curva, entre los valores $x = 0$ y $x = a$. Fermat subdividía el intervalo de $x = 0$ a $x = a$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando los puntos de abscisas a, aE, aE^2, aE^3, …, donde E es un número menor que 1; en estos puntos considera las ordenadas de los correspondientes puntos de la curva, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos tal como se indica en la figura:

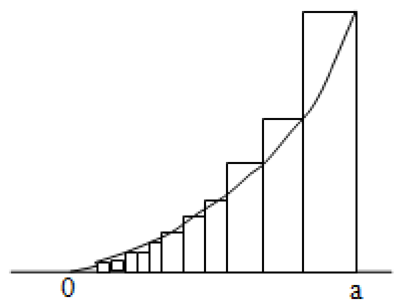


Ilustración 2 Área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos

Fuente: (Martínez Miraval, 2015, pág. 71)

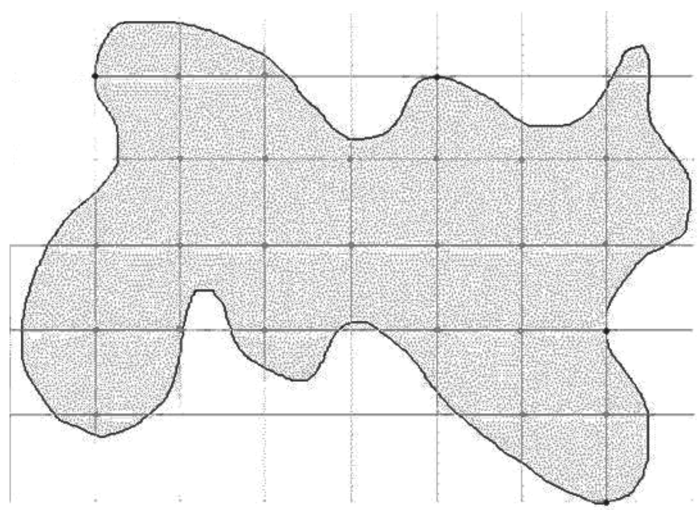
La medida de las áreas de los sucesivos rectángulos, empezando por el mayor, vienen dadas por los términos de la progresión geométrica $a^n(a - aE), a^nE^n(aE - aE^2), a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)\ldots$ y la suma de estos infinitos términos es $\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}}$ o $\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$ Según E tiende a 1, es decir, según los rectángulos se van haciendo cada vez más estrechos, la suma de la medida de las áreas de todos estos se va aproximando cada vez más a la medida del área bajo la curva. Y haciendo 1 =E en la fórmula anterior, obtenemos $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, que da la medida del área de la región bajo la curva (Martínez, 2015, págs. 70-71).

La intención de este problema, no es que el estudiante defina la medida del área como el límite de la suma de la medida de las áreas de infinitos rectángulos, sino de que el estudiante articule su concepto de medida de área, con un procedimiento, mediante rectángulos, que le permita aproximar dicha medida tanto como desee.

Solución 2.

Una de las estrategias utilizadas para la solución de este tipo de problemas, es emplear la cuadricula, para hallar el área de regiones que no están delimitadas rectilíneamente, ya que medir una superficie es compararla con otra superficie elegida como unidad de medida y calcular el número de veces que contiene esa superficie a la que hemos elegido como unidad de medida. Para encontrar el área de una región, se puede pensar en dividirla en regiones cuadradas unitarias y luego contar el número de estas unidades, estrategia validada por el postulado 21 del libro I de Euclides.

> Postulado 21. "El Postulado de la Adición de Áreas"
>
> Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Supongamos que R_1 y R_2 se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos. Entonces, $aR = aR_1 + aR_2$. (Luque, Mora, & Torres, 2002, pág. 134)



3.2. RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA SOLUCION DEL CUESTIONARIO

Problema Nº 1:

Este problema consta de 2 ejercicios, en el primero los polígonos que los estudiantes dibujaron con más frecuencia son: paralelogramos y triángulos, donde la mayoría utiliza la descomposición de la figura inicial para formar luego polígonos, apoyados en la rotación y traslación de estas figuras haciendo coincidir unas con otras, formando polígonos e ir realizando subdivisiones del mismo. Uno de los estudiantes logro realizar algunos polígonos no convexos.

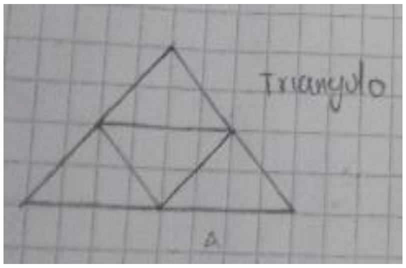
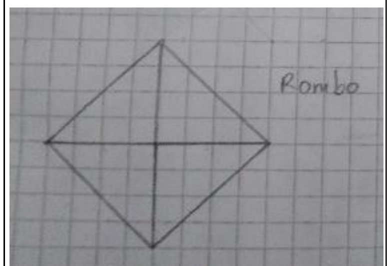
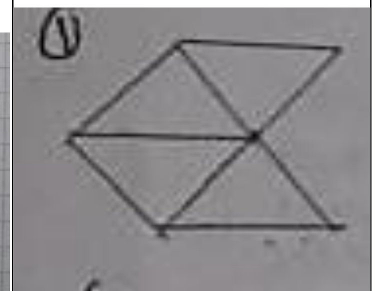
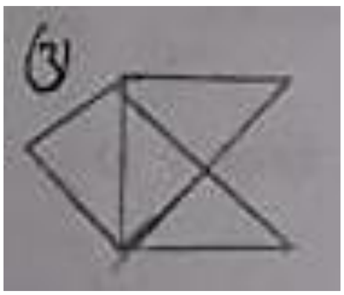
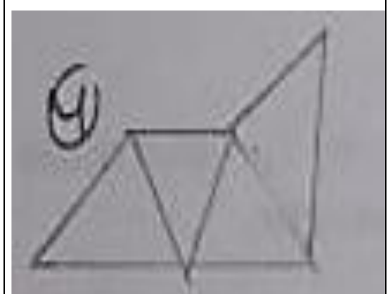
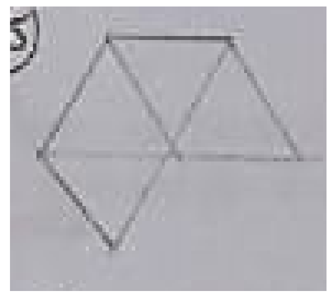
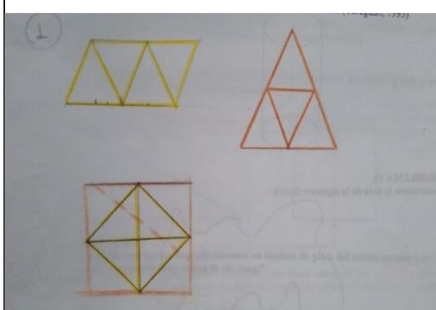
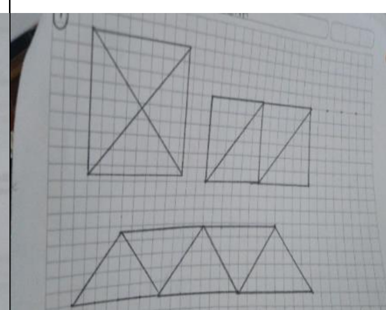
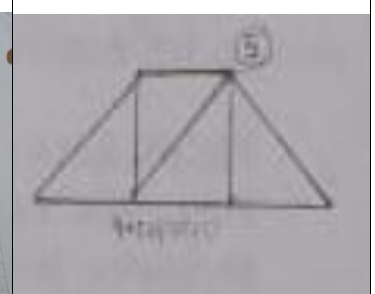
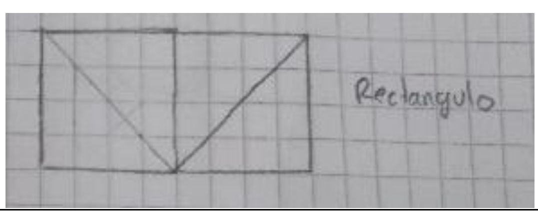
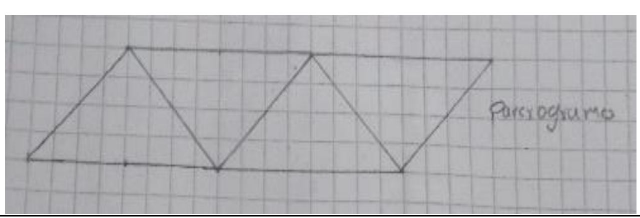
De los estudiantes encuestados el 1,26% (1 estudiante) dibujo más de 7 polígonos, el 35,44% de ellos (28 estudiantes) dibujo menos o igual a 5 polígonos, otro 35,44% (28 estudiantes) nombra los polígonos, pero no los construye, el 11,39%(9 estudiantes) los dibuja mal o dan otras respuestas y el 16,45% (13 estudiantes) no responde a la pregunta.

Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Aritmética y la Geometría
Puede dibujar 7 polígonos	0	1	0
Puede dibujar una cantidad menor o igual a 5 polígonos	11	10	7
No dibuja o dibuja mal	2	2	2
Nombra los polígonos, pero no los dibuja	5	0	23
Dan otras respuestas	0	0	3
No contesta	8	1	4
Total	26	14	39

Tabla 12 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el primer ejercicio del problema 1.

Fuente: Elaboración propia

Algunas de las construcciones realizadas se presentan a continuación:

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

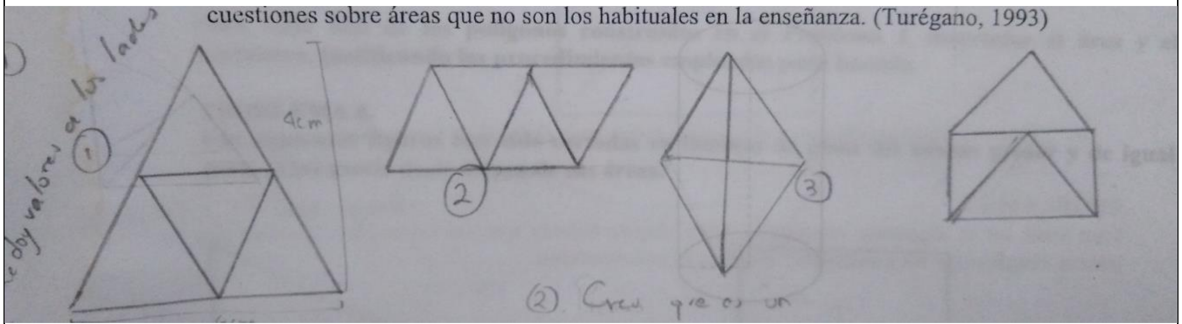


Tabla 13 Construcción de polígonos con los cuatro triángulos en que queda dividido un cuadrado al cortarse por sus diagonales

Fuente: Construcción de los estudiantes que desarrollaron el taller.

la segunda pregunta de este problema, el 65,82% es decir 52 de los estudiantes encuestados dicen que las áreas de los polígonos que se pueden formar son iguales, algunos escriben las razones de que el área es igual debido a que se mantienen las mismas figuras para reconstruir otras; el 12,65% (10 estudiantes) dicen que son desiguales y el 21,51% (17 estudiantes) no contesta a la pregunta.

Categoría de Respuesta	**Enseñanza del Álgebra**	**Enseñanza del Cálculo**	**Enseñanza de la Aritmética y la Geometría**
Áreas Iguales	19	11	22
Áreas Desiguales - Otras Respuestas	0	0	10
No Contesta	7	3	7
Total	26	14	39

Tabla 14 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el segundo ejercicio del problema 1.

Fuente: Elaboración propia

Problema Nº 2:

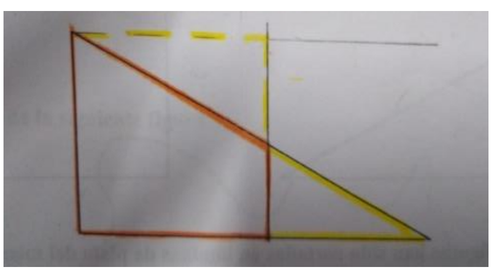
En este problema, se da un triángulo rectángulo, en el cual deben de realizar un corte y construir un cuadrado. Los estudiantes del programa realizaron cortes usando la mediatriz de la base del rectángulo, usando estrategias como la rotación.

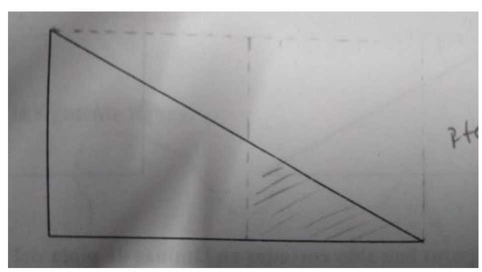
53,16% (42 de los estudiantes) lograron realizar un corte usando la mediatriz de la base del triángulo y realizan posteriormente la construcción del cuadrado, otro 44,30% (35 estudiantes) realizaron mal el corte o algunos de ellos realizaron el corte, pero no hicieron la construcción; es este ejercicio solo el 2,53% (2 estudiantes) no contestaron nada a la pregunta. Pensamos que los estudiantes no asocian este problema con el proceso de reversibilidad del anterior. (Turégano, 1993, pág. 240)

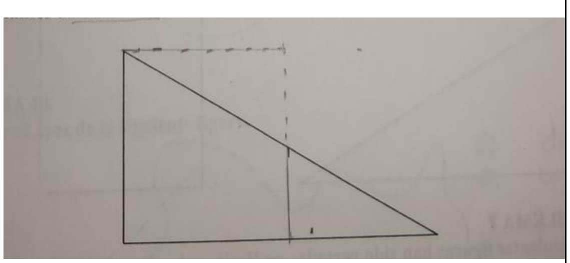
Categoría de Respuesta	**Enseñanza del Álgebra**	**Enseñanza del Cálculo**	**Enseñanza de la Arítmetica y la Geometría**
Descompone bien el triángulo y dibuja el cuadrado	14	9	19
No dibuja o dibuja mal	11	5	19
No contesta	1	0	1
Total	26	14	39

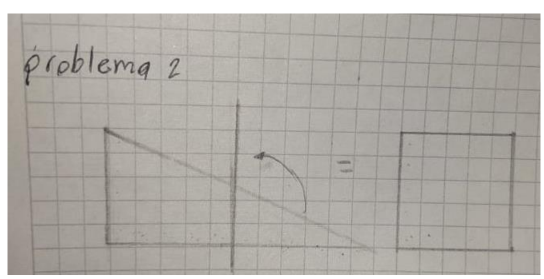
Tabla 15 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 2.
Fuente: Elaboración propia

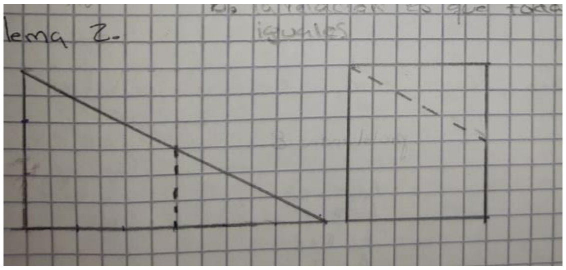
Algunas de las construcciones realizadas se presentan a continuación:

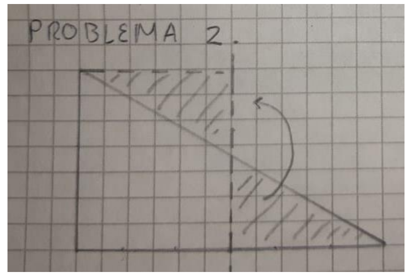












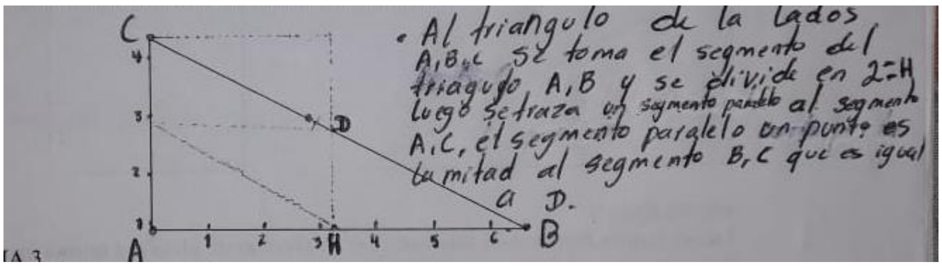


Tabla 16 Construcción de cuadrados con base a las piezas resultantes de un corte realizado a un triángulo dado.
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 3:

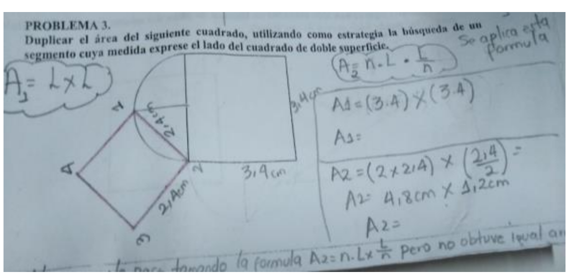
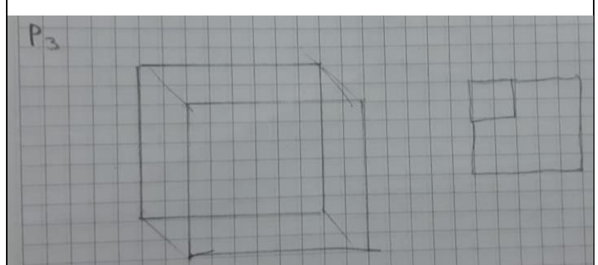
El desarrollo de este problema buscaba duplicar el área de un cuadrado. El objetivo era buscar un segmento el cual hiciera parte del nuevo cuadro que estaría duplicado. Para Szabo (1977), la duplicación del cuadrado ha sido el punto de partida del descubrimiento de la inconmensurabilidad línea. (Turégano, 1993).

Ninguno de los estudiantes encuestados logro desarrollar correctamente el ejercicio, ni de forma gráfica ni usando algún método algebraico, el 49,36% (39 de ellos) realizaron algunas construcciones, pero las sin tener en cuenta el uso del segmento y el 50,63% (40 estudiantes) decidieron no contestar. Un error muy común que los estudiantes dibujaban el mismo cuadrado a lado.

Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Arítmetica y la Geometría
Dibuja bien sin cálculos algebraicos	0	0	0
Dibuja bien con cálculos algebraicos	0	0	0
No dibuja o dibuja mal	11	5	23
No contesta	15	9	16
Total	26	14	39

Tabla 17 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 3.
Fuente: Elaboración propia

Algunas de las construcciones que no están bien de realizadas se presentan a continuación:

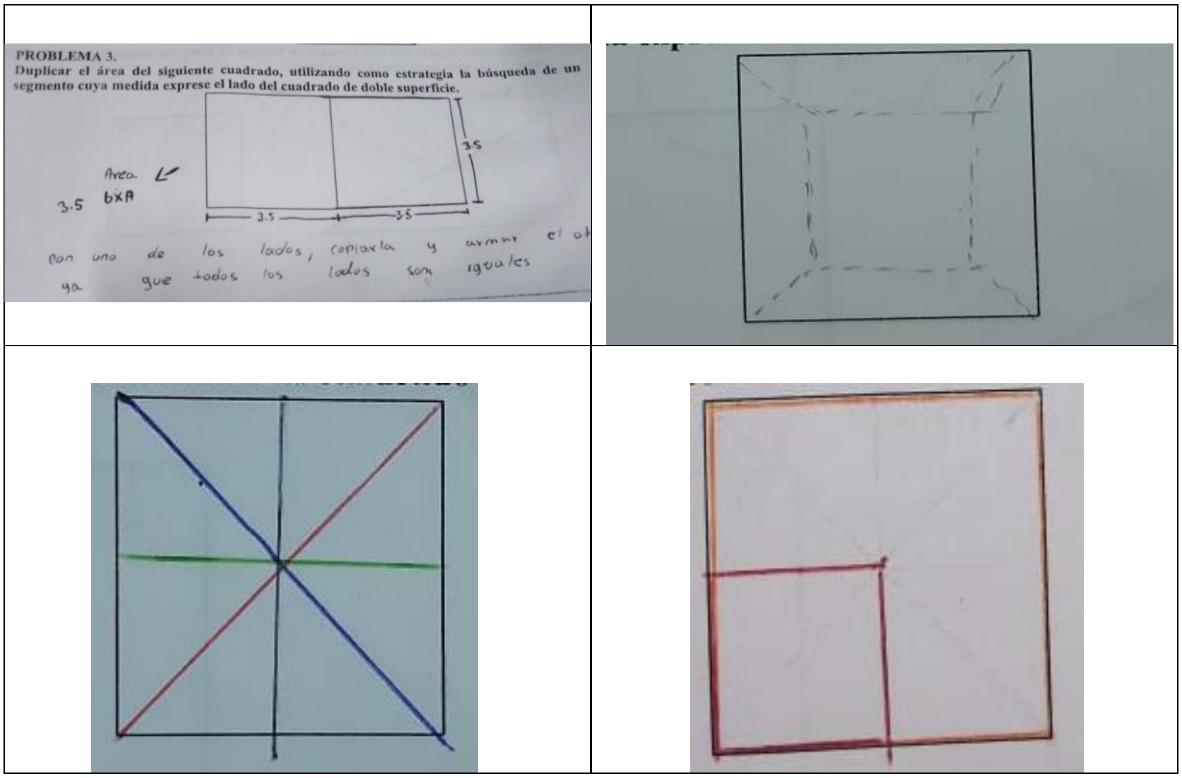


Tabla 18 Construcción de cuadrado donde se duplica el área de un cuadrado usando como estrategia la búsqueda de un segmento cuya medida exprese el lado del cuadrado de doble superficie

Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 4:

En este ejercicio los estudiantes debían realizar cortes en un triángulo y construir un rectángulo que tuviera la misma área.

Unos trazaron la altura del vértice superior del triángulo con respecto a su lado opuesto, transformando el triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes, que girados 180º de forma vertical se transforman en un rectángulo.

Otro grupo de estudiantes trazo la paralela media desde los puntos medio de los lados, dejando en la parte superior un triángulo que, dividido en dos triángulos rectángulos, que al rotarlos y trasladarlos hacen parte del rectángulo pedido conservando la misma área. Hay algunos estudiantes que realizaron cálculos algebraicos, donde hacían coincidir el área del triángulo con la de un triángulo.

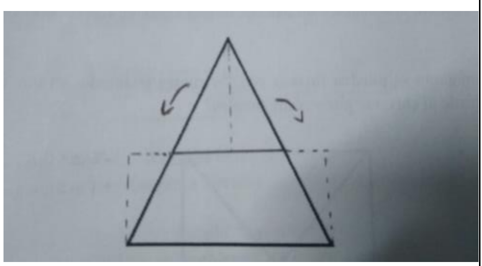
"Intervienen aquí estrategias visuales, cambio de posición, y disposición de las partes. Aditividad del área. Finalmente, la conservación del área después de varias operaciones" (Turégano, 1993)

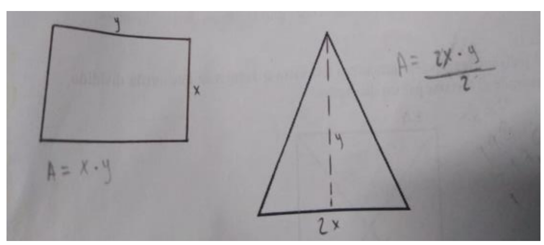
El 32,91% (26 de los estudiantes encuestados) lograron la transformación del triángulo y la construcción del rectángulo, 5,06% de ellos (4 estudiantes) dio solución al problema usando cálculos algebraicos, el 40,50% 32 de estudiantes) concluyen que dos figuras no pueden tener la misma área si han sido dibujadas de diferente forma y el 21,51% (17 estudiantes) de ellos no respondieron a la pregunta.

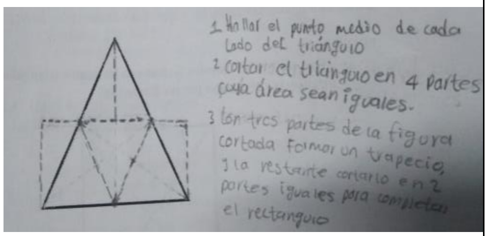
Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Aritmética y la Geometría
Forma bien sin cálculos algebraicos	6	7	13
Forma bien con cálculos algebraicos	1	1	2
No lo forma o lo forma mal	11	5	16
No contesta	8	1	8
Total	26	14	39

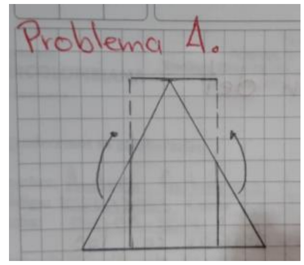
Tabla 19 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 4.
Fuente: Elaboración propia

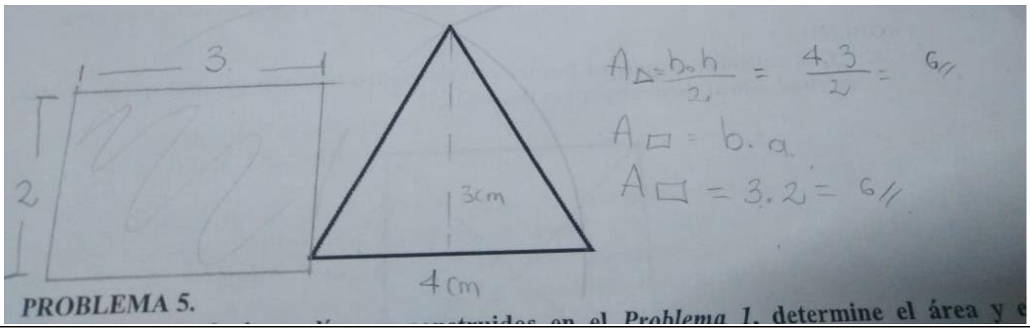
Algunas de las construcciones realizadas se presentan a continuación:

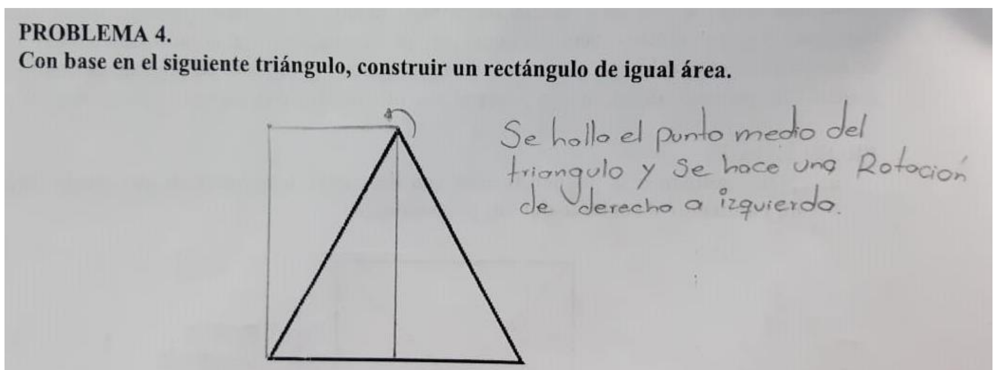


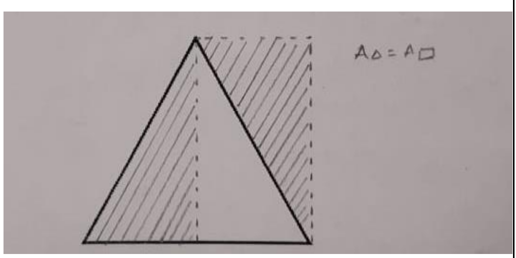


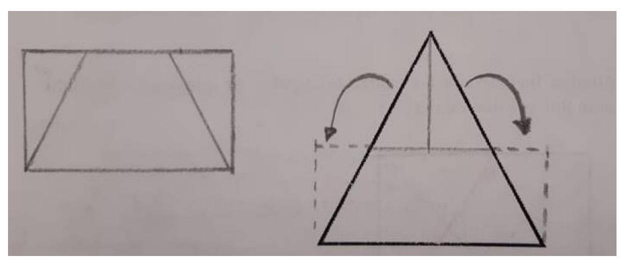

1. Hallar el punto medio de cada lado del triángulo
2 cortar el triángulo en 4 partes cuya área sean iguales.
3 con tres partes de la figura cortada formar un trapecio, y la restante cortarlo en 2 partes iguales para completar el rectángulo


Problema A.


3.
2
3cm
4cm
A△ = b.h / 2 = 4.3 / 2 = 6//
A□ = b. a
A□ = 3.2 = 6//
PROBLEMA 5.


PROBLEMA 4.
Con base en el siguiente triángulo, construir un rectángulo de igual área.
Se hallo el punto medio del triangulo y se hace una Rotación de derecho a izquierdo.


A△ = A□



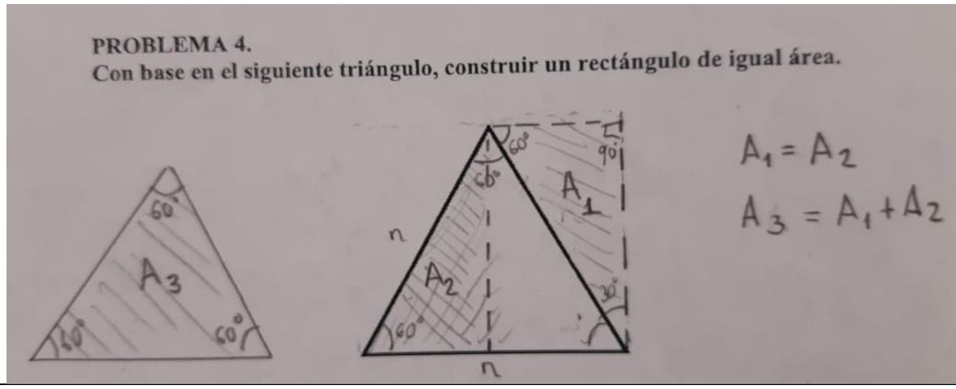


Tabla 20 Construcción de un rectángulo de igual área a la de un triángulo dado.
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 5:

En este ejercicio, los estudiantes debían de hallar el área y el perímetro de los diferentes polígonos formados en el primer problema. El objetivo es mirar las estrategias que usan los estudiantes para encontrar dichas magnitudes, pero es un poco inquietante los resultados, pues en la gran mayoría no contesto la pregunta. Algunos estudiantes se limitan en querer tener una formula y expresiones numéricas para dar solución al mismo.

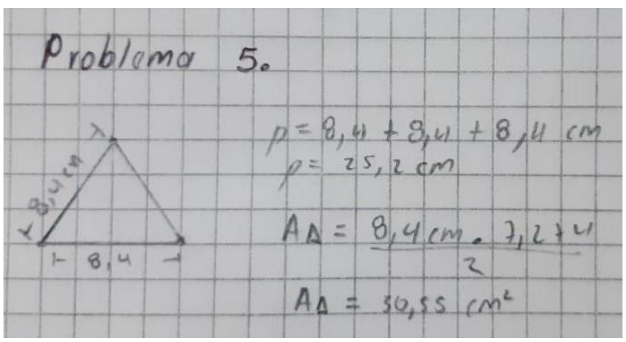
Según esto, el 2,53% de los estudiantes (2 estudiantes) uso cálculos algebraicos para dar una solución correcta, el 25,58% que equivale a 21 estudiantes respondieron, reconociendo que el área depende de la forma de la región, y que el resultado está vinculado a una fórmula y el 75,15% de ellos (57 estudiantes) no lo hicieron.

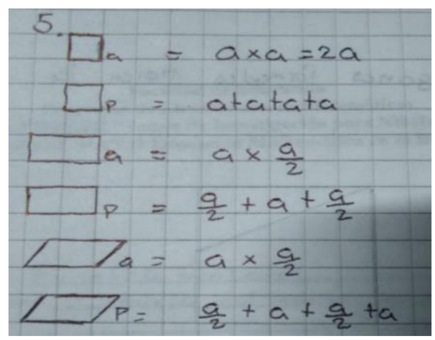
Categoría de Respuesta	**Enseñanza del Álgebra**	**Enseñanza del Cálculo**	**Enseñanza de la Aritmética y la Geometría**
Triangula desde un vértice e indica bien cuál es área y el perímetro	0	0	0
Triángulo desde un punto interior e indica bien cuál es el área y el perímetro	0	0	0

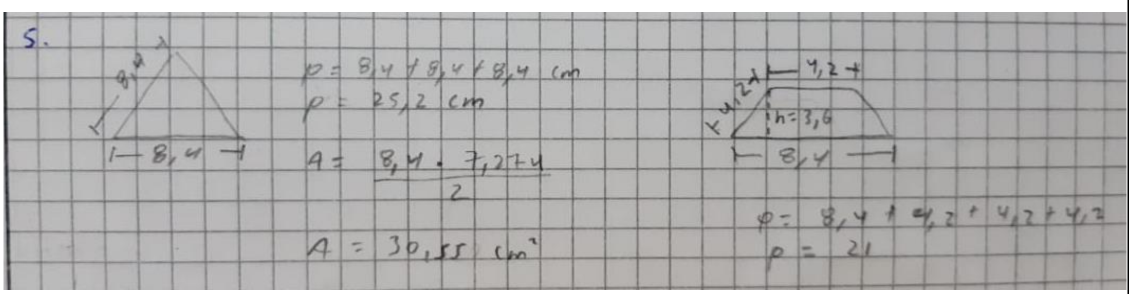
Realiza otro tipo de descomposiciones e indica bien cuál es el área y el perímetro	0	2	0
Confunde área y perímetro	0	0	0
No da indicaciones o las da mal de cómo calcular el área y el perímetro	9	4	8
No contesta	17	9	31
Total	26	14	39

Tabla 21 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 5.
Fuente: Elaboración propia

Algunas de las construcciones realizadas se presentan a continuación:







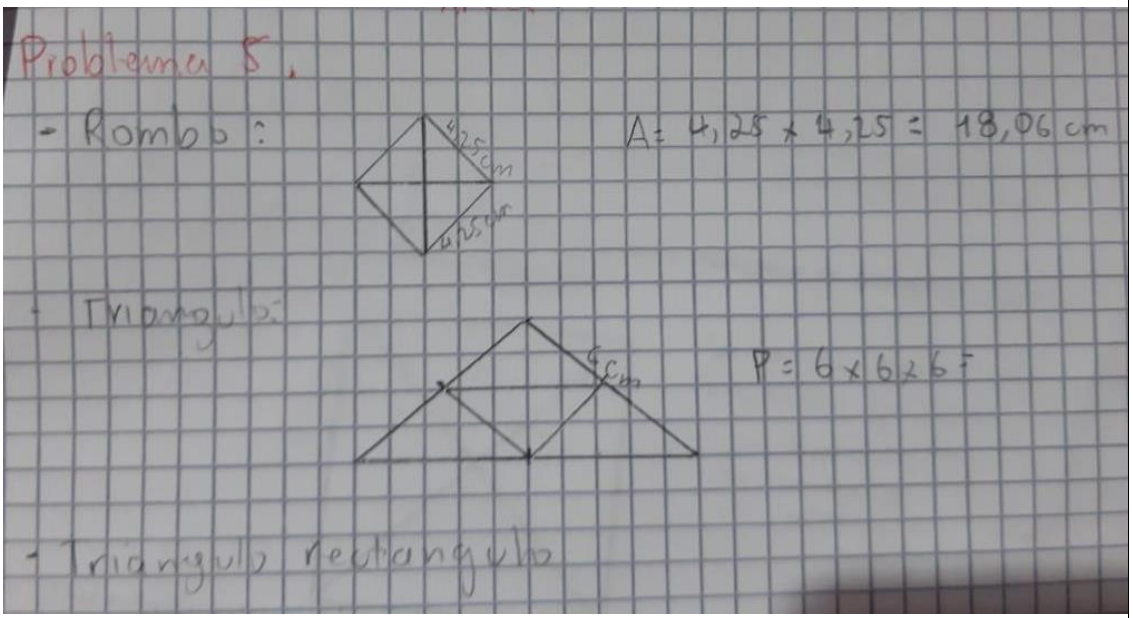


Tabla 22 Búsqueda del área y del perímetro de los polígonos formados en el problema 1.

Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 6 y 7:

Particularmente en el problema 6, consiste en pedir a los estudiantes que reconozcan si hay conservación del área en dos figuras que han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de igual peso. Algunos estudiantes aciertan en que si conservan la misma área teniendo en cuenta que el área no depende de la magnitud de peso y grosor.

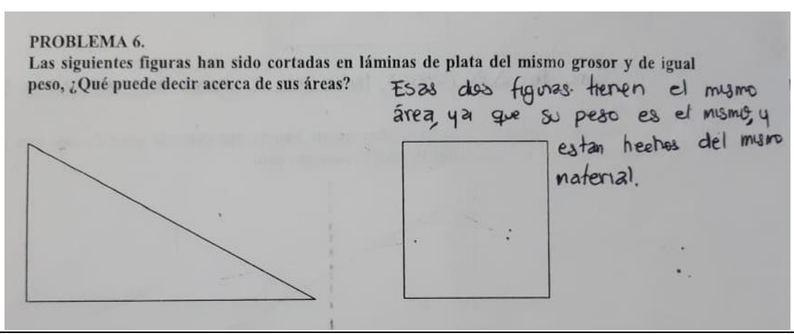
Sin embargo, hay otros que realizaron cálculos numéricos para hallar el área de las dos figuras lo cual no era pedido y otros creen que sí varía de acuerdo al grosor. No era esta la finalidad del problema, sino de comprobar si se admite que, si hay figuras rectilíneamente limitadas y otras curvilíneas, se puede tener la misma área, teniendo en cuenta otra magnitud. (Turégano, 1993, pág. 243)

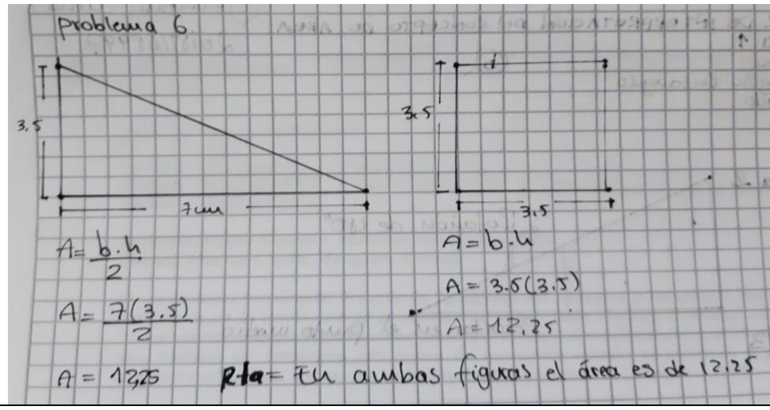
De los estudiantes encuestados el 44,30% (35 estudiantes) contestan que el área es la misma, algunos con un haciendo apreciación sobre las magnitudes y otros no, 11,39% de los estudiantes (9 estudiantes) consideran que las áreas son desiguales y 43,03% (34 estudiantes) no dan solución a esta pregunta.

Categoría de Respuesta	**Enseñanza del Álgebra**	**Enseñanza del Cálculo**	**Enseñanza de la Aritmética y la Geometría**
Áreas iguales con razonamiento correcto	4	2	7
Áreas iguales con razonamiento incorrecto	7	7	9
Áreas desiguales o no puede saber	5	1	3
No contesta	10	4	20
Total	26	14	39

Tabla 23 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 6.
Fuente: Elaboración propia

Algunas apreciaciones realizadas se muestran a continuación:





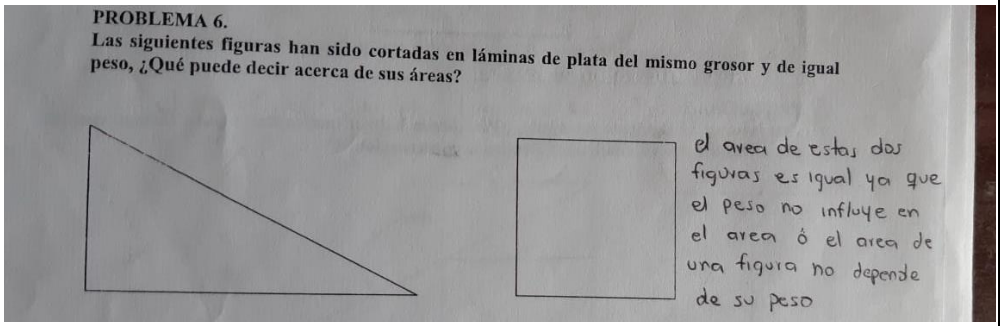

PROBLEMA 6.
Las siguientes figuras han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de igual peso, ¿Qué puede decir acerca de sus áreas?

Tabla 24 Apreciaciones del área de dos figuras que han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de igual peso
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

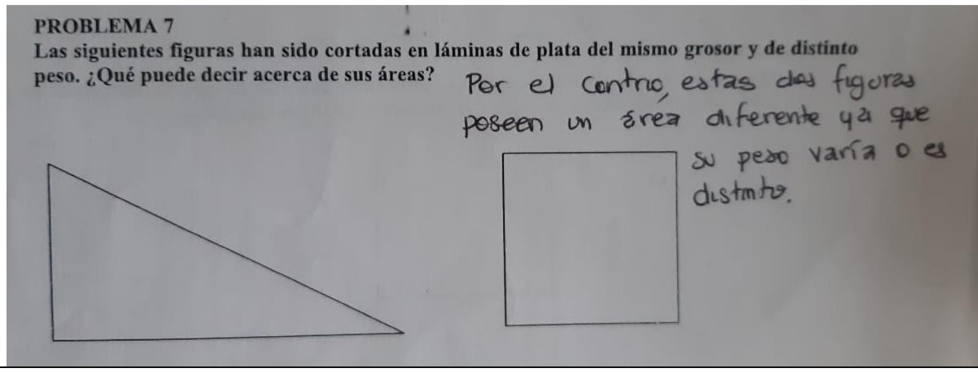
En el problema 7, consiste en pedir a los estudiantes que reconozcan si hay conservación del área en dos figuras que han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de distinto peso. En este caso sucede lo mismo del caso anterior, el área no depende de ninguna magnitud. El cambio radica en las reflexiones sobre el área que dan los estudiantes, donde el 12,65% de los encuestados (10 estudiantes) da la relación correcta, 27,84% (22 estudiantes) de ellos no dan la relación correcta con respecto al ejercicio refiriéndose en que las diferentes magnitudes si pueden variar la conservación del área; los otros 47 que equivalen al 59,49% no responden a la pregunta.

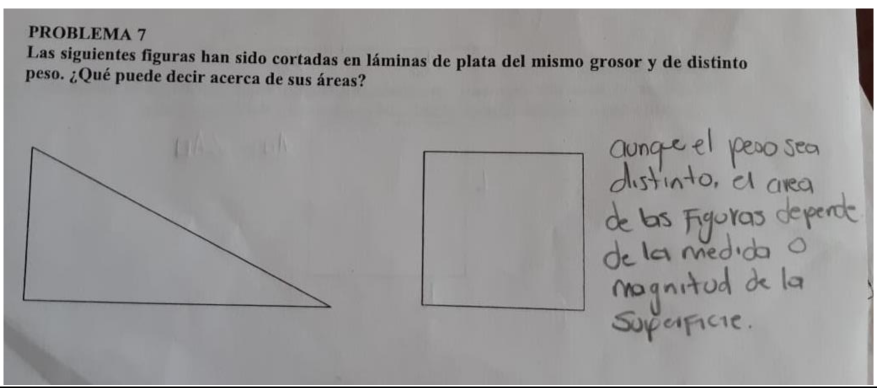
Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Aritmética y la Geometría
Da la relación correcta	2	5	3

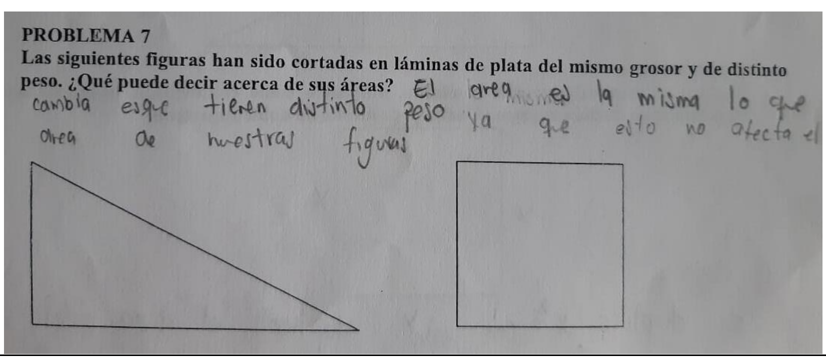
Da una relación incorrecta o no la da	14	3	5
No contesta	10	6	31
Total	26	14	39

Tabla 25 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 7
Fuente: Elaboración propia

Algunas apreciaciones realizadas se muestran a continuación:


PROBLEMA 7
Las siguientes figuras han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de distinto peso. ¿Qué puede decir acerca de sus áreas?
Por el contrio, estas dos figuras poseen un área diferente ya que su peso varía o es distinto.


PROBLEMA 7
Las siguientes figuras han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de distinto peso. ¿Qué puede decir acerca de sus áreas?
aunque el peso sea distinto, el area de las Figuras depende de la medida o magnitud de la Superficie.


PROBLEMA 7
Las siguientes figuras han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de distinto peso. ¿Qué puede decir acerca de sus áreas?
El area es la misma lo que cambia es que tienen distinto peso ya que esto no afecta el area de nuestras figuras

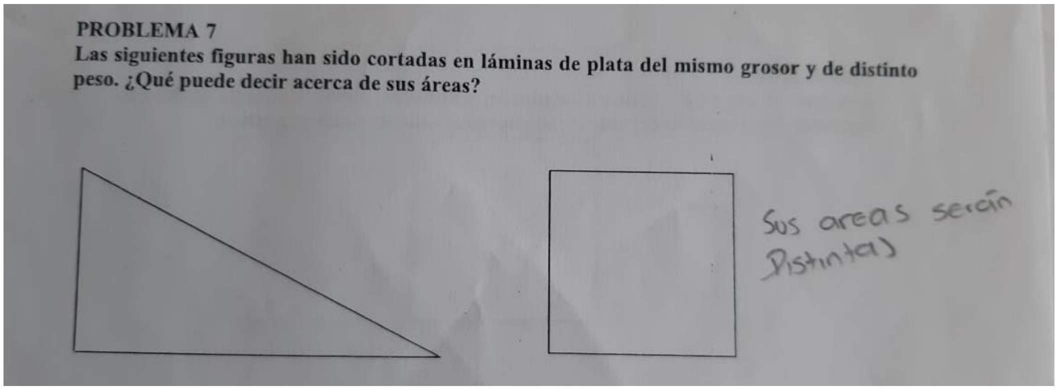


Tabla 26 Apreciaciones del área de dos figuras que han sido cortadas en láminas de plata del mismo grosor y de distinto peso.
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 8:

En este problema, se pide formar un triángulo que tenga la misma área de un circulo dado. Es un ejercicio que nos da indicios sobre lo que saben los estudiantes acerca de las descomposiciones infinitesimales.

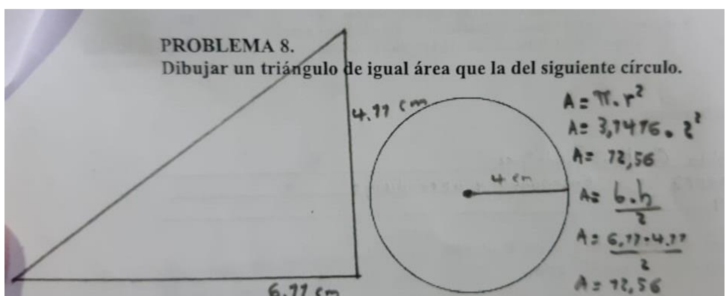
El ejercicio tiene cierto grado de dificultad que permite poner a los estudiantes a que reflexionen acerca del cómo resolver el ejercicio. De todos los estudiantes encuestados ninguno se deduce que para ellos es complejo el proceso de hallar el área de una figura que no está delimitada rectilíneamente. No usa una herramienta no convencional, con el fin de reemplazar luego todas estas medidas en las formulas respectivas, brindando así una posible solución al problema. (Turégano, 1993).

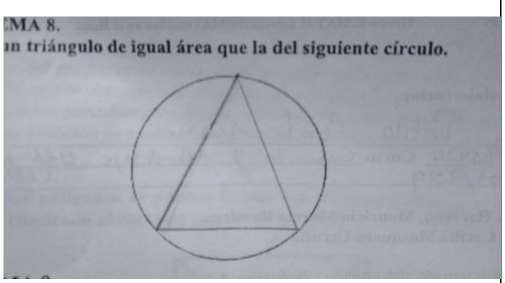
El 29,11% (23 de los estudiantes) intentaron realizar algunas construcciones, pero no se aproximan a lo que se pretendía con el ejercicio; los otros 56 estudiantes que equivalen al 70,88 no contestaron nada. En este ejercicio los estudiantes presentan mucha dificultad teniendo en cuenta que más del 50% de los encuestados no contestan o no recurren a los procedimientos infinitesimales u otra herramienta no convencional.

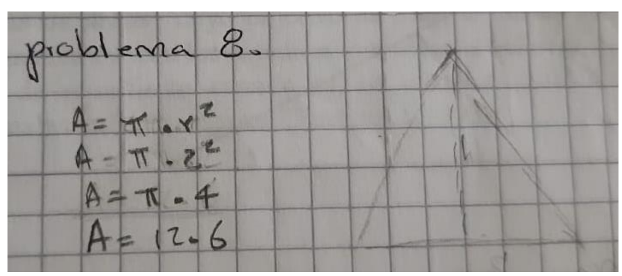
Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Arítmetica y la Geometría
Dibuja bien el triángulo sin cálculos algebraicos	0	0	0
Dibuja bien el triángulo con cálculos algebraicos	0	0	0
No lo dibuja o lo dibuja mal	6	4	13
No contesta	20	10	26
Total	26	14	39

Tabla 27 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 8.
Fuente: Elaboración propia

Algunas de las construcciones realizadas se muestran a continuación:







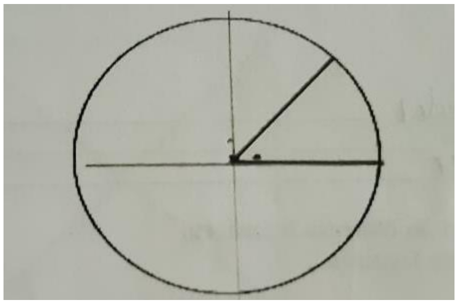
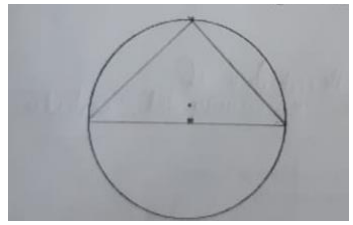
	

Tabla 28 Construcción de un triángulo de igual área que la de un círculo dado.
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 9:

En este ejercicio los encuestados deben de realizar diferentes cortes en un cilindro (sin tener en cuenta sus tapas), de tal forma que en las diferentes figuras creadas haya una conservación del área del cilindro inicial. Los estudiantes debían tener en cuenta el desarrollo del cilindro y lo vieran como un rectángulo, pero ningún estudiante cuenta con esta posible solución. Algunos estudiantes deducen que es complejo el proceso de hallar el área de una figura que no está delimitada rectilíneamente. (Turégano, 1993)

Terminando una de sus entrevistas en el su diagnóstico la Doctora Turégano(1993) menciona, ***"Otra vez las justificaciones en base a toda la superficie; cambio de forma, pero sin perder de vista toda la figura. Justificaciones en base a la magnitud, al recorte-pegado"***

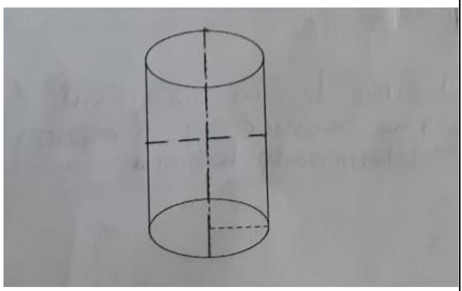
El 10,12% de los estudiantes (8) de todos los encuestados, decidieron hacer su intento al buscar donde trazar los segmentos para la construcción de nuevas figuras que tuvieran la misma área, pero presentan algunas dificultades en temas como desarrollo en el plano de cilindros, uso de alguna herramienta de tipo no convencional, área de cilindros. Los otros 89,81% (71 estudiantes) no contestaron nada.

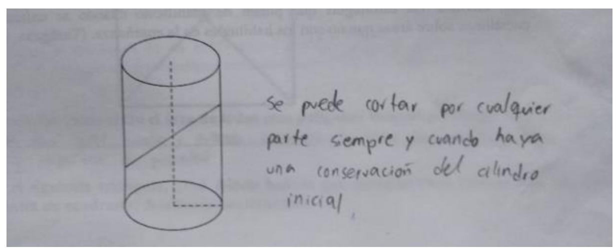
Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Aritmética y la Geometría
Da bien la relación del área y dibuja alguna fígura más	0	0	0

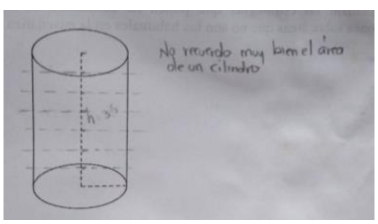
Da bien la relación del área y no dibuja más figuras o las dibuja mal	0	0	0
No da relación del área o la da mal	4	4	0
Otras respuestas	0	0	0
No contesta	22	10	39
Total	26	14	39

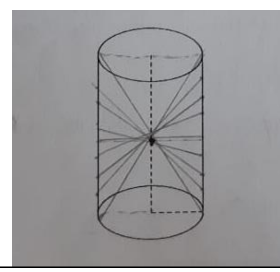
Tabla 29 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 9.
Fuente: Elaboración propia

Algunas apreciaciones realizadas se muestran a continuación:









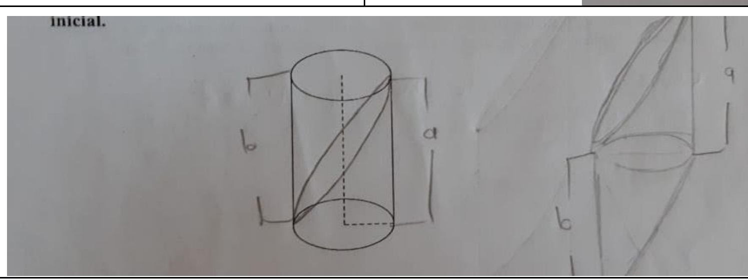


Tabla 30 Construcción de diferentes figuras realizando diferentes cortes en un cilindro (sin tener en cuenta sus tapas) de tal forma que se conserve el área cilindro dado
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

Problema Nº 10:

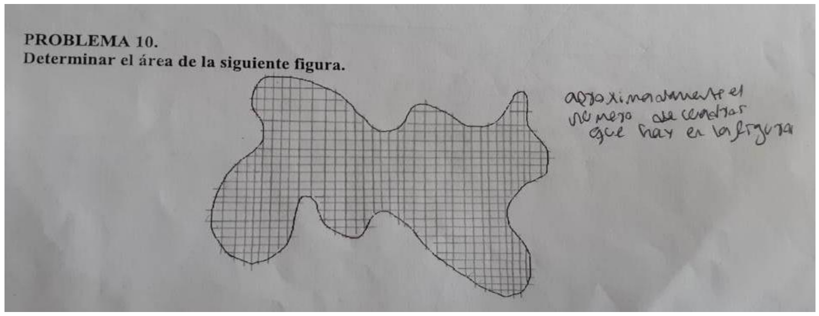
Este problema consiste en hallar el área del Green del Hoyo 16, un campo de golf, una figura que no está limitada de forma rectilínea. Se busca idenficar que estrategia puede usar el estudiante para hallar el área. Solo un estudiante logro trazar una cuadricula en este ejercicio, y tomo una unidad de medida que le permitiera aproximarse el área de toda la figura. Para otros estudiantes le fue difícil realizar una interpretación debido a la falta de expresiones numéricas, concluyen que es muy difícil realizar el proceso.

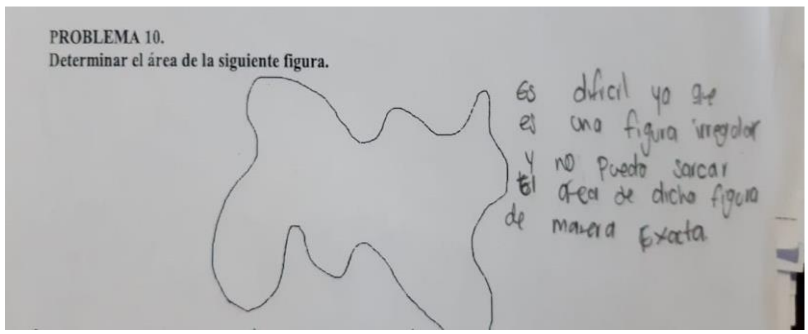
De todos los estudiantes solamente 1 que equivale al 1,26% logro realizar una cuadricula, aunque no halló el área de la figura, realizó una interpretación que le permitió usar una herramienta no convencional; el 3,79% (3 estudiantes) hacen referencia al área y a una posible solución, pero no la calculan y el otro 94,93% (75 de los estudiantes) no respondió a esta pregunta, teniendo en cuenta que es un ejercicio no rutinario, al serlo, algún estudiante dijo "que no existía y que no se podía".

Categoría de Respuesta	Enseñanza del Álgebra	Enseñanza del Cálculo	Enseñanza de la Arítmetica y la Geometría
Conoce procedimiento y es correcto	0	0	0
Cuadricula la figura para calcular el área	0	1	0
Hace referencia al área, pero no conoce procedimiento para calcularla o es incorrecto	1	0	2
Hace referencia a medir el perímetro	0	0	0
Da una fórmula	0	0	0
Otras respuestas	0	0	0
No contesta	25	13	37
Total	26	14	39

Tabla 31 Categorías de respuesta y resultados de los estudiantes en el problema 10.
Fuente: Elaboración propia

Algunas construcciones y apreciaciones realizadas se muestran a continuación:





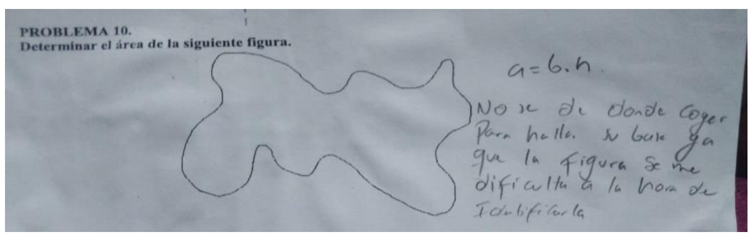


Tabla 32 Construcción de estrategias para determinar el área de una figura.
Fuente: Elaboración de los estudiantes que desarrollaron el taller

3.3. PRESENTACIÓN Y RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES EN LAS ENTREVISTAS REALIZADAS

Entrevista de Interpretación del Concepto de Área

La entrevista se realiza con el objetivo de conocer las estrategias implementadas en la solución del taller de interpretación del concepto de área, aplicado a los estudiantes de los diferentes cursos del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana; La información que se obtenga, fortalecerá la determinación de las imágenes que evocan los estudiantes.

Se escogieron a 3 estudiantes, uno de cada curso. Estas entrevistas dan a conocer a través de su análisis las imágenes asociado al concepto de área.

Los tres estudiantes escogidos fueron:

E1 – Estudiante del curso Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo.

E2 – Estudiante del curso Enseñanza y Aprendizaje del Algebra.

E3 – Estudiante del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y la Geometría.

PROBLEMA 1.

¿Cómo has conseguido dibujar estos polígonos?

E1 – "Yo los dibuje haciendo traslación de cada triangulo, trasladaba cada triángulo de tal forma que iba formando estas figuras".

E2 – "Busque un papel y dibuje el cuadrado con sus diagonales de tal forma que, al recortarlo, con los triángulos resultantes, iba formando cualquier tipo de polígono que se me pudiera presentar, ya que no me especificaban si tenían que ser regulares o irregulares"

E3 – "Haciendo coincidir cada uno de los triángulos como en un rompecabezas, de tal forma que iba logrando dibujar polígonos"

¿Qué me puedes decir del área de todos estos polígonos?

E1 – "Es la misma"

E2 – "Que todas las áreas son iguales, no importa que diferencia tienen las figuras, siempre van a tener la misma área"

E3 – "Que siempre vamos a tener la misma área"

¿Podrías explicarme por qué?

E1 – "Porque todos se construyen con la misma cantidad de triángulos"

E2 – "Ya que la superficie o el entorno de los triángulos o el cuadrado todos tienen la misma medida entonces eso causa que tengan la misma área, no importa si están acomodados de diferente forma".

E3 – "Pues porque estamos trabajando con las mismas figuras, es decir, trabajamos con las mismas áreas"

¿Al formar todas estas figuras, tuvo en cuenta la dimensión de los triángulos?

E1 – "Trate de tener las mismas características, más en sus ángulos"

E2 – "Si claro, hay que trabajar con los mismos triángulos"

E3 – "Claro, o sino no obtendríamos la misma área"

¿Qué me puedes decir acerca del perímetro de todas estas figuras?

E1 – "El perímetro variaría, ya que las figuras están acomodadas de formas diferentes"

E2 – "El perímetro si va a variar, ya que este depende de la forma de la figura, es decir de las medidas de sus lados mas no de su superficie"

E3 – "El perímetro va a ser distinto, porque este está relacionado con las medidas de su contorno".

¿Qué es el área?

E1 – "Es la superficie delimitada por una figura, o que contiene una figura plana"

E2 – "Es el espacio o entorno que ocupa una figura"

E3 – "Espacio que ocupa un cuerpo geométrico, es decir, la superficie"

¿Cómo podríamos hallar el área de una figura?

E1 – "Si no conozco la fórmula de la figura, realizo subdivisiones con figuras que, si conozco el área, y luego hallaría el área total de la figura"

E2 – "Le podría poner variables o letras, y así utilizar la forma del área"

E3 – "Si no me dan medidas, tomaría una regla y mediría para así aplicar la formula adecuada"

¿Se podrían dibujar más polígonos aparte de los que lograste dibujar?

E1 – "Si claro, se podrían dibujar polígonos no regulares, es decir esos polígonos que tiene fisuras"

E2 – "Si claro, se podría dibujar una cantidad infinita, ya que podemos dibujar polígonos deformes"

E3 – "Claro, porque no me piden exactamente polígonos regulares, se pueden formar polígonos irregulares"

¿La cantidad de polígonos que se pueden formar es finita o infinita?

E1 – "A parte de los 4 que hice, claro se pueden hacer más, eso sí de manera finita, entre ellos polígonos regulares y no regulares"

E2 – "Yo diría, que se podrían dibujar infinitos polígonos, ya que no me especifican, si son regulares o irregulares"

E3 – "Finita, ya que llegara al momento en donde se repitan los polígonos"

PROBLEMA 2.

¿Cómo hiciste este problema?

E1 – "Tomé una regla y medí la base del triángulo que me daban, entonces trace una recta perpendicular a la base de tal forma que, con la parte restante, la hago coincidir con la parte faltante y así poder construir un cuadrado".
E2 – "Busque una regla, y me puse a medir las medidas que hay entre sus lados, de tal modo que pueda formar un rectángulo, y del pedazo que me sobra (triángulo), lo que hice fue una rotación de tal forma que me quedara acomodado con el otro extremo, es decir que coincidieran".
E3 – "Dibuje el triángulo en un papel aparte y le trace cortes hasta que lograra construir un cuadrado, al estilo rompecabezas".

¿Qué me puedes decir acerca de sus áreas?

E1 – "El área es la misma, porque no le aumento ningún pedazo, sino que trabajo con la misma área del triángulo, lo que hago es cambiar de forma".
E2 – "El área es igual, como dije anteriormente, ya que tienen las mismas medidas".
E3 – "Yo pensaría que es igual, porque pasaría lo mismo que en el problema anterior".

PROBLEMA 3.

¿Cómo hiciste este problema?

E1 – "Lo que hice fue duplicar la medida de ambos lados del cuadrado".
E2 – "En este caso utilice la estrategia de ponerle medidas al cuadrado, por ejemplo, que cada lado midiera 4, para tener un área de 16, luego me encargue en las esquinas, trace unas paralelas a todas las esquinas y de tal forma que esas paralelas se crucen y pues vi que se formaba un cuadrado, similar a la inicial, pero no sé si el área sea igual, yo creo que varía".
E3 – "Tome una regla y medí el lado del cuadrado, y luego dibuje un cuadrado en donde el área de este sea multiplicada por dos, ya que me piden un cuadrado de doble de área"

PROBLEMA 4.

¿Cómo hiciste este problema?

E1 – "Primero hice un bosquejo del cuadrilátero que quería formar, y pues vi que me quedaba un triángulo, entonces lo dividí, cortándolo en la mitad, y lo que hice fue proyectar hacia ambos lados, de tal forma, que se completara el rectángulo que me pedían".

E2 – "Primero le puse medidas a los lados del triángulo, con el fin de saber su área, luego dependiendo de esa medida, a ensayo y error, busqué medidas que coincidan para formar un rectángulo, por ejemplo, en las medidas del triángulo, les puse 8 cm en todos, ya que es equilátero, y le saque el área que me dio 28, entonces busque rectángulos, en donde al multiplicar sus lados me diera 28, como rectángulos de 7x4, 14x2, 1x28 y así".

E3 – "Tracé una recta desde la base hasta el vértice de arriba y me di cuenta que si acomodaba el triángulo que me sobraba me iba a dar un rectángulo".

PROBLEMA 5.

¿Cómo hiciste para hallar el área y el perímetro de los polígonos dibujados en el PROBLEMA 1?

E1 – "Utilizando las fórmulas que me sabía, y las que no, pues realizaba subdivisiones con figuras que si me sabía la formula y luego hacia la sumatoria de estas".

E2 – "Le pondría variables, letras, y poder así utilizar la fórmula del área"

E3 – "Lo que hice fue, medir con una regla para poder aplicar las fórmulas, y me di cuenta que todas aproximadamente daban lo mismo"

PROBLEMA 6.

¿Qué puede decir acerca de sus áreas?

E1 – "El área es la misma"

E2 – "Que son iguales"

E3 – "Que vamos a obtener la misma área en juntas laminas"

¿Podrías explicarme por qué?

E1 – "Me base en el PROBLEMA 2, y vi que con el triángulo se podría formar un cuadrado, y como estamos utilizando las mismas figuras pues el área va a ser la misma, solamente estoy cambiando de forma"

E2 – "Utilicé la estrategia de dibujar aparte el triángulo y le hice trazos hasta obtener el rectángulo, haciendo coincidir el pedazo que me sobraba con el pedazo faltante en la parte superior, llegando así a la conclusión de tener la misma área"

E3 – "Tome una regla y medí cada uno de los lados de ambas figuras, luego aplique la fórmula del triángulo y del cuadrado, observando que, en ambos casos, me daba el mismo resultado"

PROBLEMA 7.

¿Qué me puedes decir acerca de sus áreas?

E1 – "Va a ser la misma, porque el peso no influye en el área".

E2 – "Creo que son de la misma área, porque no creo que el peso influya en el área, sino las medidas de su superficie"

E3 – "De igual manera vamos a obtener la misma área, lo que cambia es su peso"

PROBLEMA 8.

¿Cómo hiciste este problema?

E1 – "Lo hice aparte, trate de dibujar en el interior del circulo un triángulo, y me di cuenta que no ocupaba toda el área del círculo, me quedaban unas partes sobrando entonces no lo dibuje por eso"

E2 – "Primero hallaría el punto centro del círculo, para poder sacar el radio, y así aplicar la formula y determinar el área del círculo, luego dibujaría un triángulo a manera de ensayo y error hasta obtener medidas que, al reemplazarlas en la fórmula del triángulo, las áreas sean iguales"

E3 – "Tracé el radio del círculo, para medirlo y así aplicar la formula, luego dibuje un triángulo, otorgándole medidas de tal forma que al hallar su área seas igual a la del circulo".

¿Conoces otra estrategia para solucionar este problema?

E1 – "No"

E2 – "No"

E3 – "Ni entendí el ejercicio, por eso lo dejé sin solución"

¿Conoces la descomposición infinitesimal?

E1 – "La verdad no"

E2 – "Cuando me explicaron eso a inicios del semestre, no entendí muy bien"

E3 – "No había escuchado de ese tema".

NOTA: Se les hace una ilustración a los estudiantes sobre el proceso de la descomposición infinitesimal de un circulo, dibujando una serie de círculos concéntricos en el interior del circulo dado inicialmente, en donde los radios están escalonados de 0 a r, posteriormente se efectúa un corte rectilíneo desde el borde hasta el centro, de tal manera que, al ir estirando capa por capa, la figura que se logra identificar es un triángulo. Los tres estudiantes manifiestan que es tema complejo que en la carrera no ha sido expuesto a manera de afianzamiento, siendo este un recurso de vital importancia en la solución de problemas de este tipo.

Finalmente, se les pregunta, si estas dos figuras tendrán la misma área, y efectivamente a pesar de que el proceso infinitesimal no es de comprensión inmediata, los tres estudiantes deducen que si son iguales.

PROBLEMA 9.

¿Conoces el desarrollo de un cilindro?

E1 – "Se obtienen dos círculos y un rectángulo"
E2 – "Se formaría un rectángulo y dos círculos"
E3 – "Cuando se desarma un cilindro, vi que me resultaba un rectángulo y las dos tapas son círculos"

¿Qué cortes le harías al rectángulo proveniente del desarrollo del cilindro, de tal forma que, al dibujar polígonos con estas, haya una conservación del área?

E1 – "Haría lo mismo que en el PROBLEMA 1, trazaría sus dos diagonales y con los triángulos que se obtienen, dibujaría polígonos regulares o irregulares, utilizando la traslación para hacer coincidir los triángulos y así formar polígonos diferentes"
E2 – "Dibujaría el rectángulo en una hoja aparte y trazaría sus diagonales para poder recortar la figura, al estilo rompecabezas, y así comenzar a dibujar polígonos regulares y polígonos deformes"
E3 – "Emplearía el mismo procedimiento que utilice en el PROBLEMA 1"

NOTA 1: Este ejercicio no había sido entendido, debido a que los tres estudiantes desconocían el desarrollo de un cono, lo cual no permitía una interpretación valida del ejercicio. Luego de haber realizado una explicación sobre el desarrollo de un cilindro, de manera inducida los estudiantes lograron interpretar lo que se les pedía en el problema.

NOTA 2: Se les preguntó a los tres estudiantes, acerca del área de las figuras que se podrían dibujar, en donde los tres estudiantes responden que las áreas van a ser iguales, ya que se trabajan con las mismas figuras en las que ha quedado dividido el rectángulo, haciendo referencia que este proceso es igual al empleado en el PROBLEMA 1.

PROBLEMA 10.

¿Una figura que no está delimitada rectilíneamente, tiene área?

E1 – "Si"
E2 – "Si, pero parece complicado"
E3 – "Si"

NOTA 1: Los tres estudiantes hacen referencia al círculo, así como este no está delimitado por rectas, tiene área.

¿Qué harías para hallar el área de una región que no está delimitada rectilíneamente?

E1 – "Haría polígonos dentro de ella, hasta llegar el caso que la cubramos toda, así como una cuadratura"
E2 – "Empezaría a formar cuadrados, triángulos o cualquier figura geométrica de tal forma que yo si le pueda hallar el área, el problema es que los bordes no son rectos, y ahí complicaría el proceso"
E3 – "La verdad no sé cómo hallar el área, pero lo que si se es que si se le puede hallar"

NOTA 2: Luego de esta pregunta, se les explica a los tres estudiantes acerca de utilizar una cuadricula, tomando como unidad de medida, la unidad cuadrada, lo cual permite descomponer una figura, en este caso en cuadrados de igual área, de tal forma que el área sea la sumatoria de todas las unidades cuadradas, en el caso de los bordes, se haría la completación de unidades, utilizando como estrategias, la rotación y traslación de figuras, como en un plano cartesiano.

NOTA 3: Finalizando este taller, se les esboza a los estudiantes otra estrategia, útil en este tipo de problemas, como lo es la triangulación desde un punto interior. Al observar esta estrategia, los tres estudiantes concluyen que llegara el momento en que los triángulos sean tan cerrados, que llegaran a ser segmentos, a los cuales no se les puede hallar área. Lo cual permite concluir que los estudiantes confunden el término "medir" con la medición de longitudes y no con la interpretación de calcular el área.

Fechas de realización de las entrevistas:

E1– 18 de septiembre de 2019.

E2 - Edward Marín Piso – 19 de septiembre de 2019.

E3 Javier Peña Ramírez – 20 de septiembre de 2019.

Agradecemos su colaboración.

Leonardo Flórez Herreño, Mauricio Murcia Ramírez.

Tutora: Martha Cecilia Mosquera Urrutia

CAPITULO IV

4.1. CONCLUSIONES

Luego de ser aplicadas y analizadas las entrevistas, en 3 de los 79 estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas, y teniendo en cuenta los resultados de la aplicación del taller de interpretación del concepto de área y además las conclusiones de la investigación realizada por la Dra. Turégano, se logró reconocer las imágenes que tienen estos estudiantes sobre el concepto de área. Estas imágenes pueden ser primitivas, operativas o descriptivas, según el nivel de razonamiento brindado en las justificaciones de los procedimientos realizados en el taller (Turégano, 1993).

Un estudiante interpreta el concepto de área mediante una **imagen primitiva**, cuando reúne las siguientes características:

- Admiten que las superficies rectilíneamente limitadas tienen área.
- Reconocen que el área depende de la forma de la región, la cual está vinculada mediante una fórmula.
- Concluyen que dos figuras no pueden tener la misma área si han sido dibujadas de diferente forma, utilizando las mismas descomposiciones realizadas a las figuras.
- Deducen que es complejo el proceso de hallar el área de una figura que no está delimitada rectilíneamente.

Estos estudiantes, interpretan el área como el espacio ocupado por una región que está perfectamente definida, asociando la forma con la palabra extensión.

Además, estos estudiantes se les dificulta entender que cuando se realizan equidescomposiciones en una figura, y se dibuja otra con las mismas subdivisiones, estas van a tener igual área, llegan a pensar, que al cambiar de posición estas figuras, se verá afectada su área.

Ahora, un estudiante refleja el dominio de una **imagen operativa**, cuando en sus procedimientos o estrategias, se evidencia que el concepto de área, está siendo tomado como medición de una superficie comprendida dentro de un perímetro. Por consiguiente, establece lo siguiente en sus argumentos:

- Dos superficies tienen la misma área, si llegan a tener diferente forma, o no están delimitadas rectilíneamente, siempre y cuando utilicen las mismas figuras, en su recomposición.
- Reconocen que el área de una figura que no está delimitada rectilíneamente, puede existir, si se realiza una equidescomposición, con figuras a las cuales sea más fácil el proceso de hallar su área, y luego todas estas medidas, serán sumadas en su totalidad, obteniendo así lo requerido para la solución del problema planteado.
- Interpretan que, si una figura cambia de forma, su área no tiene por qué variar.
- Otorgan valores numéricos a las partes de las figuras propuestas en los problemas, mediante la medición de las anteriormente mencionadas, utilizando regla o una herramienta no convencional, con el fin de reemplazar luego todas estas medidas en las formulas respectivas, brindando así una posible solución al problema.

Finalizando la clasificación, de si un estudiante manifiesta una **imagen descriptiva**, en sus argumentos, se evidencia un claro dominio e interpretación de la definición del concepto de área, estableciendo como valido la existencia del término. Ligándolo de esta manera, con afirmar que figuras rectilíneamente delimitadas, tiene área, aplicando métodos como la exhausción o descomposiciones infinitesimales, para poder calcularlas, otorgando así importancia a la magnitud.

Además de las estrategias anteriormente mencionadas, estos estudiantes conocen del tema de las descomposiciones infinitesimales, ya que para ellos es evidente que este proceso tienda a converger ya que están referenciando al área como un límite. Por otra parte, en sus análisis de situaciones problema, logramos identificar que estos estudiantes, reúnen las siguientes características:

- Cuando se realiza la equidescomposición y recomposición de figuras, los polígonos formados, van a tener la misma área, ya que esta no depende de la forma.
- Utilizan los métodos numéricos como herramienta útil, para hallar el área de una figura, teniendo dominio en el procedimiento para calcularla.

En cuanto a las estrategias utilizadas en la solución de los problemas, los resultados más relevantes fueron:

1. La construcción de figuras en papel para poder ser recortadas y luego empezar a recomponer figuras de manera mental, es un método que los estudiantes no utilizan. El proceso de dibujar las figuras y realizar cambios en su forma, de manera escrita, es más efectivo que el anterior, no obstante, estos estudiantes presentan afianzamiento en la conservación del área después de un cambio de forma.
2. Los estudiantes no utilizan estrategias, como dibujar una cuadricula en el interior de la figura a la cual se le quiere hallar el área, estando está delimitada de forma recta o curva.
3. Los estudiantes admiten que las estrategias con descomposiciones infinitesimales, son de gran importancia, para realizar congruencias de áreas, pero que no son vistas en clases con la importancia sugerida.
4. Los estudiantes presentan dificultad en aplicar estrategias tales como, la triangulación desde un punto interior.
5. Los estudiantes manejan y aplican muy frecuentemente estrategias como transformaciones en el plano, para hacer coincidir figuras, de tal forma que haya una conservación en sus áreas.
6. Los estudiantes, concluyen que ninguna otra magnitud está ligada al área, ya que se está hablando de un espacio cubierto por una figura.
7. Los estudiantes, en su gran mayoría, presenta dificultades en el dominio de conceptos y propiedades, ya que confunden términos queriéndose referir a otros, como en el caso de los polígonos regulares e irregulares, haciendo alusión a la clasificación entre convexos y no convexos.

La muestra tomada para realizar la entrevista, fue bastante representativa, puesto que, de los 3 estudiantes entrevistados (de un total de 79), el 33.33% presenta una imagen primitiva del área, el 33.33% una imagen operativa y el 33.33% una imagen descriptiva, según la comparación realizada entre los resultados obtenidos por la Dra. Pilar Turégano (1993), en su taller sobre la interpretación del concepto de área, y los obtenidos en nuestra investigación.

Luego de realizar la clasificación en los estudiantes que asocian una imagen primitiva, operativa o descriptiva, en la solución de problemas de áreas, analizamos las dificultades identificadas en el uso de estrategias para determinar el área de una región delimitada o no de forma rectilínea; en la interpretación de la importancia del concepto de área se logró evidenciar que:

- En el curso Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra y la Estadística, de los 26 estudiantes matriculados, el 69,23% presenta una imagen primitiva, el 19,23% una imagen operativa y el 11,54% restante evoca una imagen descriptiva.
- En el curso Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo, de los 14 estudiantes matriculados, el 71,42% presenta una imagen primitiva, el 21,42% presenta una imagen operativa y el 7,14 restante presenta una imagen descriptiva.
- En el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y la Geometría, de los 39 estudiantes matriculados, el 76,92% presenta una imagen primitiva, el 23,08% presenta una imagen operativa y ninguno del curso presenta una imagen descriptiva.

Por lo tanto, de los 79 estudiantes escogidos como muestra, en este informe de investigación, damos la conclusión que el 72,52% presenta una imagen primitiva, el 21.24% presenta una imagen operativa y el 6,2% restante, presenta una imagen descriptiva.

4.2. RECOMENDACIONES

- Realizar el proceso de construcción del concepto y no sólo del concepto.
- Realizar actividades que involucren estrategias no convencionales, para evitar la generalización de una sola unidad de medida.
- Realizar una serie de ejemplos y contraejemplos, seguido de una secuencia didáctica, por medio del cual los estudiantes formen la imagen del concepto.
- Los docentes en formación deben adquirir un mecanismo de construcción e identificación de conceptos, con el objetivo de generar un aprendizaje significativo en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

GIPMEN, G. d. (1996). Serie de Lineamientos Curriculares. *Encuentro Nacional con Docentes e Investigadores en Educación Matemática.* , 96 -100.

Goncalves, T. R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Ciencias de la Educación*, 84 - 96.

Hershkowitz, R. (1990). Aspectos Psicológicos de la Geometría del Aprendizaje. *Creative Education* , 70.95.

Luque, C., Mora, L., & Torres, J. (2002). El Concepto de Área. *Memorias XVI Encuentro de Geometría y IV de Aritmética*, 105-139.

Martínez Miraval, M. A. (2015). Una Propuesta Para Articular Área y Medida Usando La TSD, En Alumnos De Nivel Superior. *Tesis de Maestría - Pontifica Universidad Católica Del Perú*, 15-221.

MEN, M. d. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Edita y Escribe.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies In Mathematics.*, 151-169.

Turégano, M. P. (1993). Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas. *Actas del IV Congreso Internacional sobre la Investigación en la Didática de las Ciencias y las Matemáticas.* , 237-257.

Turégano, M. P. (2006). Una Interpretación de la Formación de Conceptos y su Aplicación en el Aula. . *E. U. Magisterio Plaza Uniersdad* , 35-48.

Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight . *Academic Press* , 67-81.