



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 14 de noviembre del 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Vanessa Tovar Castro, con C.C. No. 1.075.310.932

La Autora del trabajo de grado (informe de semillero de investigación) Titulado PROYECTO APRENDIENDO A ESTUDIAR LAS CLASES DE MATEMÁTICAS: OPTIMIZACIÓN DE ÁREAS.

Presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de

Licenciada en Matemáticas;

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Vanessa Tovar C.

Vigilada Mineducación



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** PROYECTO APRENDIENDO A ESTUDIAR LAS CLASES DE MATEMÁTICAS: OPTIMIZACIÓN DE ÁREAS

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Tovar Castro	Vanessa

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Urrutia	Martha Cecilia

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mosquera Urrutia	Martha Cecilia

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Licenciada en Matemáticas

**FACULTAD:** Educación

**PROGRAMA O POSGRADO:** Licenciatura En Matemáticas

**CIUDAD:** Neiva

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019

**NÚMERO DE PÁGINAS:** 63

**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**

Diagramas\_\_\_ Fotografías\_\_\_ Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general X Grabados\_\_\_  
Láminas\_\_\_ Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas  
o Cuadros X

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento:

**MATERIAL ANEXO:**

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

**Español**

**Inglés**

- |                                |                  |
|--------------------------------|------------------|
| 1. <i>Modos de pensamiento</i> | Modes of thought |
| 2. <i>Variación</i>            | Variation        |
| 3. <i>Estudio de Clases</i>    | Lesson Study     |
| 4. Optimización                | Optimization     |
| 5.                             |                  |

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

Se presentan un estudio de clase realizado en el grado noveno de la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Elías-Huila, cuyo objetivo consistió en que los estudiantes modelaran una situación de variación (optimización del área de un rectángulo), teniendo como base un problema del entorno de los estudiantes. La importancia de este tipo de clases se fundamenta en tomar el contexto como una herramienta para el aprendizaje de la matemática. Esta clase hace parte del proyecto aprendiendo a estudiar las clases de matemáticas realizado por estudiantes del semillero Club de Apoyo MATemático del Huila (CAMATH) con el objetivo de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de área en contextos de variación, en una institución educativa del departamento del Huila.

La mirada a los procesos se realiza desde el marco teórico de los modos de pensamiento, propuesto por Sierpiska. Este marco es importante debido a que estos modos de pensamiento (sintético geométrico, analítico aritmético, analítico estructural) que se consideran apropiados para interpretar los fenómenos relacionados con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción particularmente en conceptos del álgebra lineal, permiten determinar los diferentes significados que adquiere un objeto matemático según el modo en que sea abordado. En ese sentido para resolver el problema los estudiantes utilizaron varios modos lo que nos permitió concluir que alcanzaron un buen nivel de comprensión, durante la clase.

**Palabras clave:** Modos de pensamiento, variación, estudio de clases, optimización, modelación.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

presents advances a study of class in the ninth grade of the Educational Institution Maria Auxiliadora in the municipality of Elias-Huila, whose objective was that students will model a situation of variation (optimization of the area of a rectangle), on the basis of an environment problem students. The importance of this type of classes is based on taking the context as a tool for learning of mathematics. This class is part of the project learning to study mathematics classes conducted by students of the seedbed mathematical Support Club of the Huila (CAMATH) with the goal to design, implement, and evaluate an educational unit for teaching the concept of area in the context of variation, in an educational presents advances of research results from a study of class in the ninth grade of the Educational Institution Maria Auxiliadora in the municipality of Elias-Huila, whose objective was that students will model a situation of variation and change (optimization of the area of a rectangle), on the basis of an environment problem students. The importance of this type of classes



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

3 de 3

is based on taking the context as a tool for learning of mathematics. This class is part of the project learning to study mathematics classes conducted by students of the seedbed mathematical Support Club of the Huila (CAMATH) with the goal to design, implement, and evaluate an educational unit for teaching the concept of area in the context of variation, in an educational institution of the department of Huila.

The look at the processes is performed from the theoretical framework for the modes of thought, proposed by Sierpiska. This framework is important because these modes of thought (synthetic-arithmetic-geometric, analytical, analytical-structural) which are considered to be appropriate to interpret the phenomena related with the way to achieve a higher level of abstraction in particular concepts of linear algebra, allow you to determine the different meanings that acquires a mathematical object according to the way in which to be addressed. In that sense to resolve the problem the students used several ways which allowed us to conclude that reached a good level of understanding, during the class.

**Key words:** modes of thought, variation, lesson study, Optimization, modeling.

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre Presidente Jurado: Martha Cecilia Mosquera Urrutia

Firma:

Nombre Jurado: Johnny Fernando Alvis Puentes

Firma:

Johnny Alvis Puentes  
JURADO

FACULTAD DE EDUCACION  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS

ACTA DE SUSTENTACION DE TRABAJO DE GRADO

FECHA DE LA SUSTENTACION: 12 de Noviembre del 2019

TITULO DEL TRABAJO DE GRADO: Proyecto Aprendiendo a estudiar las clases de matematicas "Optimización...)

AUTORES:

CODIGO	NOMBRE Y APELLIDO
<u>20151133780</u>	<u>Vanessa Tovar Castro</u>
_____	_____
_____	_____

- Para la aprobación del Trabajo de Grado se tuvieron en cuenta los conceptos emitidos por el asesor del Trabajo y el jurado calificador.
- Los estudiantes presentaron el Trabajo de Grado cumpliendo con todos los requisitos exigidos en el reglamento correspondiente los cuales fueron revisados por el Asesor del Trabajo y el jurado calificador.

OBSERVACIONES DEL ASESOR: El trabajo corresponde a un proceso de investigación desarrollado por dos años en el Semillero CAMATH. y aporta elementos en pro de una necesaria transformación de las prácticas

OBSERVACIONES DEL JURADO CALIFICADOR: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

CALIFICACION DEL TRABAJO: APROBADO X REPROBADO \_\_\_\_\_

En constancia se firma:

Martha Cecilia Hargueta U.  
ASESOR DEL TRABAJO  
Martha Cecilia Hargueta U.

Johnny Alvis Puentes.  
JURADO CALIFICADOR:  
Johnny Fernando Alvis Puentes.

Neiva, 12 de Noviembre de 2019.

**PROYECTO APRENDIENDO A ESTUDIAR LAS CLASES DE  
MATEMÁTICAS: OPTIMIZACIÓN DE ÁREAS**

**VANESSA TOVAR CASTRO**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**NEIVA**

**2019**

**PROYECTO APRENDIENDO A ESTUDIAR LAS CLASES DE  
MATEMÁTICAS: OPTIMIZACIÓN DE ÁREAS**

**VANESSA TOVAR CASTRO**

**Trabajo de grado para optar título de  
Licenciada en matemáticas**

**Asesor académico**

**MARTHA CECILIA MOSQUERA URRUTIA**

**Doctora en Didáctica de las Matemáticas**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**NEIVA**

**2019**

## Resumen

Se presentan un estudio de clase realizado en el grado noveno de la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Elías-Huila, cuyo objetivo consistió en que los estudiantes modelaran una situación de variación (optimización del área de un rectángulo), teniendo como base un problema del entorno de los estudiantes. La importancia de este tipo de clases se fundamenta en tomar el contexto como una herramienta para el aprendizaje de la matemática. Esta clase hace parte del proyecto aprendiendo a estudiar las clases de matemáticas realizado por estudiantes del semillero Club de Apoyo MATemático del Huila (CAMATH) con el objetivo de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de área en contextos de variación, en una institución educativa del departamento del Huila.

La mirada a los procesos se realiza desde el marco teórico de los modos de pensamiento, propuesto por Sierpinska. Este marco es importante debido a que estos modos de pensamiento (sintético geométrico, analítico aritmético, analítico estructural) que se consideran apropiados para interpretar los fenómenos relacionados con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción particularmente en conceptos del álgebra lineal, permiten determinar los diferentes significados que adquiere un objeto matemático según el modo en que sea abordado. En ese sentido para resolver el problema los estudiantes utilizaron varios modos lo que nos permitió concluir que alcanzaron un buen nivel de comprensión, durante la clase.

**Palabras clave:** Modos de pensamiento, variación, estudio de clases.

## ABSTRACT

presents advances a study of class in the ninth grade of the Educational Institution Maria Auxiliadora in the municipality of Elias-Huila, whose objective was that students will model a situation of variation (optimization of the area of a rectangle), on the basis of an environment problem students. The importance of this type of classes is based on taking the context as a tool for learning of mathematics. This class is part of the project learning to study mathematics classes conducted by students of the seedbed mathematical Support Club of the Huila (CAMATH) with the goal to design, implement, and evaluate an educational unit for teaching the concept of area in the context of variation, in an educational presents advances of research results from a study of class in the ninth grade of the Educational Institution Maria Auxiliadora in the municipality of Elias-Huila, whose objective was that students will model a situation of variation and change (optimization of the area of a rectangle), on the basis of an environment problem students. The importance of this type of classes is based on taking the context as a tool for learning of mathematics. This class is part of the project learning to study mathematics classes conducted by students of the seedbed mathematical Support Club of the Huila (CAMATH) with the goal to design, implement, and evaluate an educational unit for teaching the concept of area in the context of variation, in an educational institution of the department of Huila.

The look at the processes is performed from the theoretical framework for the modes of thought, proposed by Sierpinska. This framework is important because these modes of thought (synthetic-arithmetic-geometric, analytical, analytical-structural) which are considered to be appropriate to interpret the phenomena related with the way to achieve a higher level of abstraction in particular concepts of linear algebra, allow you to determine the different meanings that acquires a mathematical object according to the way in which to be addressed. In that sense to resolve the problem the students used several ways which allowed us to conclude that reached a good level of understanding, during the class.

**Key words:** modes of thought, variation, lesson study.

# Contenido

Introducción	9
Capítulo I	14
1.1 Justificación Y Planteamiento del problema	7
1.2 Objetivos	19
1.2.1 Objetivo general	19
1.2.2 Objetivos específicos	19
Capitulo II	20
Marco teórico	20
Capitulo III	25
Marco metodológico	25
3.1 Desarrollo de la metodología	23
3.1.1 Estudio de clases sobre optimización de áreas.	27
3.1.2 Análisis didáctico	27
3.1.2.1 Análisis de contenido	27
Capitulo IV	25
Conclusiones y Resultados	25
Capitulo V	32
Anexos	32
5.1. Matriz SQAT	32
5.2 Plan De Clase	34
Capitulo VI	44
Referencias Bibliografía	44

## **LISTA DE TABLAS**

**Tabla 1.** Textos Estudiados

**Tabla 2.** Relación entre contextos y subestructuras

**Tabla 3.** Relaciones entre contextos, subestructuras, situaciones y fenómenos.

## **LISTA DE IMÁGENES**

**Imagen 1.** Microdiseño curso Cálculo diferencial.

**Imagen 2.** Grafica DBA.

**Imagen 3.** Secuencias Didácticas en Matemáticas para Educación Básica Secundaria.

**Imagen 4.** Libro VI de los Elementos de Euclides.

**Imagen 5.** Mapa conceptual optimización de áreas.

**Imagen 6.** Sistemas de representación.

## Introducción

Se presentan resultados del proyecto de investigación “**Aprendiendo a Estudiar las clases de matemáticas En El Club de Apoyo MATemático del Huila CAMATH**” desarrollado por los participantes en el semillero de investigación Club de Apoyo MATemático del Huila CAMATH, adscrito al grupo de investigación E.MAT.H del Programa de Licenciatura en Matemáticas, dicho proyecto contó con la financiación de la Vicerrectoría de Investigación y Proyección Social de la Universidad Surcolombiana VIPS Acuerdo N° 2260 del 26 de enero del 2017 , y su objetivo consistió en Diseñar, implementar y evaluar un conjunto de clases sobre el concepto de área en contextos de variación, para ser implementada en una institución educativa del departamento del Huila. (Arcavi, Lorca, & Isoda, 2007).

Para el caso de este informe, el estudio de clase abordó el objeto matemático - optimización de áreas – con un enfoque cognitivo, bajo el marco teórico de los Modos de Pensamiento propuestos por Anna Sierpinska para estudiar fenómenos y problemas didácticos del algebra lineal y posteriormente ampliado a la derivada por (Pinto & Parraguez, 2015).

Estos modos (Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estructural) permiten mirar problemáticas didácticas relacionadas con abordar un determinado obstáculo epistemológico que para el caso del algebra se traduce en dos posiciones dogmáticas opuestas: una que rechaza los números dentro de la geometría y la otra que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un plano puramente aritmético. (Parraguez, 2012, pág. 75)

El objetivo de la clase consistió en que los estudiantes modelaran una situación de variación de las dimensiones de los lados de un rectángulo con perímetro fijo, a través de una función de área; teniendo como base un problema del entorno de los estudiantes (MEN, 2006) . La importancia de esta metodología se fundamenta en la posibilidad de mejorar el

conocimiento didáctico del contenido de los profesores en formación inicial, a través del estudio de clases.

El desarrollo del informe se ha organizado en capítulos:

Capítulo I: Planteamiento Del Problema, Justificación del problema y Objetivos De La Investigación.

La problemática fundamental, en la cual se enmarca la teoría, de los modos de pensamiento es alcanzar niveles superiores de abstracción para enriquecer el aprendizaje del Álgebra, a través de la conexión entre los distintos modos de pensamiento (Parraguez, 2012). Los diferentes modos de pensar la optimización de áreas no aparecen definidos propiamente así ni en los EBC, ni en los DBA, ni en los libros de texto para el grado noveno, por ello esta investigación da cuenta de los distintos modos de pensar la optimización y algunas formas de articularlos, pues ni los libros de texto, ni los microdiseños de la licenciatura promueven un trabajo enfocado en el modo AA (análisis de la función de área) y en menor medida en el SG.

Cabe mencionar que si bien existen elementos que permiten transitar de un modo de pensamiento a otro, la posibilidad de alcanzar niveles superiores de abstracción y enriquecer el aprendizaje del concepto en cuestión, se ve frenado debido a que el trabajo se centra fundamentalmente en las técnicas que proporcionan la primera y la segunda derivada.

Así desde lo cognitivo el problema de esta investigación se presenta a través de la pregunta: ¿al enfrentar a los estudiantes del grado noveno de la IE María Auxiliadora del municipio de Elías, a un problema que puede resolverse de manera intuitiva sin el uso de las técnicas del cálculo diferencial, se consigue que perciban regularidades y relaciones, realicen conjeturas y predicciones, justifiquen o refuten las conjeturas y construyan explicaciones coherentes; logrando un tránsito natural entre los diferentes modos de pensar la optimización de áreas?

Desde el Conocimiento Didáctico del Contenido, esto implica lograr que los docentes en formación sean conscientes que, las técnicas que proporcionan la primera y la

segunda derivada no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto de optimización de áreas.

El objetivo general desde lo cognitivo es mostrar la forma de comprender la optimización de áreas en cada uno de los modos de pensamiento y determinar algunos elementos que facilitan el tránsito de un modo de pensamiento a otro, en la búsqueda de su comprensión profunda.

Y desde el Conocimiento Didáctico del Contenido es Generar conocimiento a partir de un estudio de clases que será desarrollado por los participantes en la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Elías - Huila.

## Capítulo II: Marco Teórico De La Investigación.

Se utiliza el marco teórico de los modos de pensamiento propuesto por Anna Sierpinska, con el propósito de estudiar cómo los estudiantes de grado noveno de la I.E María Auxiliadora del municipio de Elías (Huila) comprenden el concepto de optimización de área, Bajo un enfoque cognitivo (Anna Sierpinska, 2000) . Este marco nos permite distinguir tres modos de comprender un objeto matemático, Sintético Geométrico SG (la persona es capaz de identificar e imaginar aspectos geométricos del objeto matemático, determinando la relación de dichos objetos con figuras, conjuntos, operaciones como la unión y la intersección), Analítico Aritmético AA (los objetos matemáticos se representan a través de expresiones numéricas y algebraicas. Por ejemplo, ver el área de una figura como una ecuación determinada por una fórmula que permite el cálculo a partir del valor de los lados de la figura) y el Analítico Estructural AE (a través de funciones, relaciones funcionales, derivadas de las funciones y lugares geométricos).

En síntesis, la teoría caracteriza los tres modos de pensamiento concibiendo que una articulación entre ellos, permitirá la comprensión profunda de los objetos matemáticos por parte de los aprendientes.

### Capítulo III: Metodología de la Investigación.

La investigación es de tipo cualitativo documental y reflexivo y proporciona dos tipos de resultados: unos en relación con los modos de pensar la optimización de los estudiantes del grado noveno de la IE María Auxiliadora y el segundo en relación con el Conocimiento didáctico del contenido optimización de áreas puesto en juego por la docente en formación, en el marco de un estudio de clases.

Con el fin de establecer los modos de pensar la optimización de áreas, se hizo un breve estudio histórico epistemológico el cual nos permitió sustentar las distintas formas de pensar la optimización en las producciones de los matemáticos de diferentes épocas y establecer las categorías necesarias para analizar las producciones de los estudiantes.

Se analiza la propuesta curricular para la Optimización de Áreas, lo que conlleva a dos partes: análisis de la propuesta del Ministerio de Educación para el grado noveno desde lo geométrico, numérico, métrico y algebraico analítico y el análisis de los libros de texto.

Para obtener datos sobre como comprenden los alumnos de grado noveno de la IE María Auxiliadora la optimización de áreas, se analizaron las producciones elaboradas por ellos al resolver el problema de la clase.

Para obtener los datos en relación con el conocimiento didáctico del contenido (CDC) se analizaron tanto los planes de clase, la multitarea y la matriz SQAT, elaborados en la fase de planificación, así como las diferentes reacciones de la docente durante la clase.

Se presenta la forma cómo se llevó a cabo la investigación, haciendo explicito el tipo de investigación, el método de investigación, las técnicas de recogida de los datos, el contexto en que se obtuvieron los datos y los participantes.

### Capitulo IV: Conclusiones y Resultados.

A lo largo de la investigación se logró evidenciar que los estudiantes priorizaron la ejercitación y comparación de procedimientos, dando prevalencia al pensamiento analítico aritmético; a pesar de dibujar diferentes rectángulos y dar conclusiones vagas sobre las consecuencias de la variación, se evidencian dificultades al trabajar con cantidades decimales.

#### Capitulo IV: Anexos.

Se encuentran los anexos pertinentes, con el objetivo de dar una mayor comprensión de aspectos específicos que forman parte de esta investigación, además de Exponer las diversas referencias bibliográficas que sustentan los aportes y argumentos dados.

# Capítulo I

## 1.1 Justificación Y Planteamiento del problema

Este estudio se justifica en la necesidad de reflexionar sobre lo que el docente de matemáticas debe saber y saber hacer, así como en la de generar espacios para atravesar la línea que separa al alumno del profesor que en ocasiones no se tiene en cuenta; ya que la formación del profesor de matemáticas se centra principalmente en el aprendizaje de lo disciplinar, dejando de lado los procesos cognoscitivos y las cuestiones curriculares; además, de reconocer la importancia del papel del profesor y sus creencias en el aprendizaje de los alumnos, (MEN, 1998). Por el contrario el profesor de matemáticas debe tener una visión holística que le permita comprender diferentes maneras de abordar esos problemas y de utilizarlos para desarrollar la intuición de los estudiantes, transitar de un modelo educativo centrado en la explicación de contenidos declarativos a un modelo centrado en la comprensión del sentido, ir de una educación lineal y estrictamente racional, a una educación relacional de ubicación socio histórica y espacial para toda la vida.

Durante los últimos años se han emprendido investigaciones sobre el profesor de matemáticas, sus carencias, sus creencias, su formación inicial y continua. Además de eso es creciente el número de investigaciones en el área de la educación matemática, pero a pesar de ello en la Universidad hay un arraigo en métodos tradicionales y hay pocos estudios sobre problemáticas propias del contexto huilense.

En los últimos años el MEN ha adelantado algunas iniciativas para cualificar a los profesores como por ejemplo el convenio con la Agencia de Cooperación Internacional del Japón JICA y estrategias que derivan de ellas como el Programa Todos a Aprender PTA, cabe resalta que a pesar de que el objetivo del convenio JICA es establecer bases para el mejoramiento de la metodología de enseñanza de ciencias naturales y matemáticas en las instituciones educativas y en las Facultades de Educación de Colombia, a través de la adaptación de la metodología de educación japonesa en las áreas de ciencias naturales y

matemáticas al contexto particular de los docentes de nuestro país; y el objetivo del PTA es mejorar los aprendizajes en matemática y lenguaje de los estudiantes de básica primaria (de transición a quinto) en los establecimientos educativos del país con desempeño insuficiente; el cumplimiento de estos no son evidentes aún en los programas de formación de profesores.

Por otra parte si revisamos el plan de estudio del programa de Licenciatura En Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, podemos observar que la enseñanza de la optimización de áreas solo aparece en el diseño curricular del curso de cálculo diferencial como una aplicación de la derivada.

*Imagen 1. Microdiseño curso Cálculo diferencial*

3	9-10	usando la definición. Algebra de derivadas (reglas de derivación), y Regla de la cadena.	• Presentaciones alternadas entre el docente y los estudiantes, complementando las formulaciones teóricas del docente, con las experiencias y vivencias de los estudiantes sobre el uso y manejo de software especializado.	8	2	4	5
	11	Derivada de funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica. Derivación implícita.		4	1	4	6
	12	Teoremas de Rolle y del valor medio.		4	1	4	6
	13-14	Aproximaciones lineales y método Newton. Valores máximos y mínimos.		8	2	4	6
4	15	Trazado de curvas: primera y segunda derivada		4	1	3	4
	16	Aplicaciones de la derivada.		4	1	3	4

*Fuente: Microdiseño curso Cálculo diferencial PLM Universidad Surcolombiana*

Sin embargo la forma en la que se enseña el concepto no permite que el futuro profesor logre una comprensión profunda del concepto. Por lo tanto este estudio también se justifica en la necesidad de reflexionar acerca de la enseñanza de la optimización de área en la educación básica secundaria y universitaria; Para ello se realiza la revisión a algunos libros de texto.

En el siguiente cuadro listamos los textos estudiados. Enfatizamos en que el criterio para la selección de los libros analizados fue la facilidad de acceso y que trataran el tema en cuestión.

**Tabla 1. Textos Estudiados**

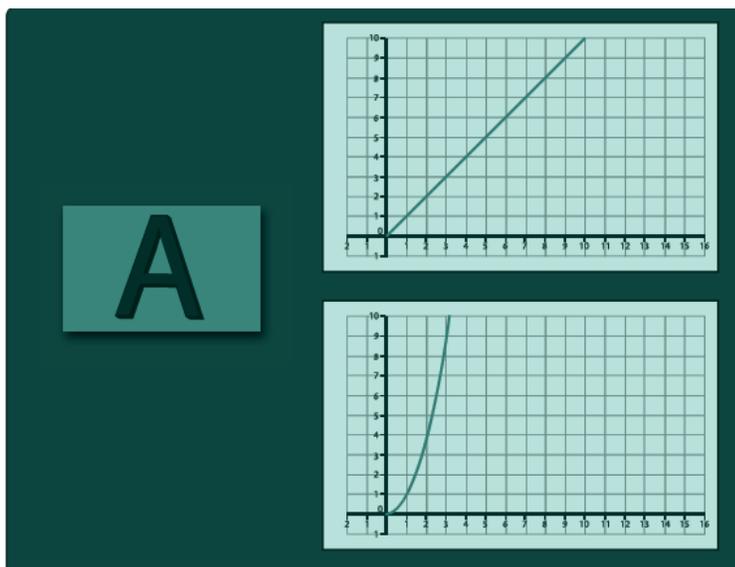
Educación Básica Secundaria	(MEN, 2013, págs. 118-152) (MEN, 2016, pág. 56)
Educación Universitaria	(Stewart, 2008, págs. 271-278) (Leithold, 1998, págs. 198-206)

*Fuente: Elaboración Propia*

Al revisar, leer e interpretar los Derechos Básicos de Aprendizaje encontramos en grado 7° el DBA N° 6 la siguiente situación acerca de optimización de área:

Manipula las longitudes de un par de lados paralelos de un rectángulo, con el uso de un software de geometría dinámica. Establece el factor de escala para relacionar las longitudes de los lados, los perímetros y las áreas de los dos rectángulos. Determina qué indica el registro gráfico en correspondencia con la longitud de los lados y con las áreas de los rectángulos. (MEN, 2016, pág. 56)

*Imagen 2. Grafica DBA*



*Fuente: Tomado de (MEN, 2016) Derechos Básicos de Aprendizaje DBA.*

Por otro lado al revisar la Secuencias didácticas de matemáticas para básica secundaria encontramos la secuencia didáctica: ¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales? (MEN, 2013) acerca de optimización de área, la cual está diseñada para el grado 9°.

**Imagen 3.** Secuencias Didácticas en Matemáticas para Educación Básica Secundaria

*¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?*

SEMANA	PREGUNTAS GUÍA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
<b>1</b>	<i>¿Qué puede variar en las formas de las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La relación de dependencia entre dos variables.</li> <li>Tipos de variables: Dependiente e independiente.</li> <li>Algunas características de la función como dominio y rango.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Enuncio verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación.</li> <li>Identifico el dominio y el rango de una función.</li> <li>Argumento las relaciones positiva y negativa entre variables.</li> </ul>
<b>2</b>	<i>¿Cómo representar las variaciones de las diferentes medidas de las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Las funciones se representan a través de tablas y gráficas.</li> <li>Algunas propiedades de las funciones que se identifican en la representación tabular.</li> <li>Algunas propiedades de las funciones que se identifican en la representación gráfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establezco la relación existente entre tablas y gráficas.</li> <li>Caracterizo la función a partir de las representaciones.</li> <li>Explico algunas relaciones matemáticas con las variables involucradas en la situación.</li> </ul>
<b>3</b>	<i>¿Cuánto material se requiere para armar una cerca?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.</li> <li>La función afín como la expresión algebraica <math>f(x) = ax + b</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relaciono la función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.</li> <li>Establezco relaciones entre las funciones lineales y afines.</li> </ul>
<b>4</b>	<i>¿Cómo representar las variaciones de la cantidad de material que se requiere para armar las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características de las representaciones de las funciones lineales.</li> <li>Características de las representaciones de las funciones afines.</li> <li>Los procesos de interpolación y extrapolación para encontrar datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determino las características de las representaciones de las funciones lineales.</li> <li>Ejercito algunos procedimientos estandarizados para determinar la expresión algebraica de una función</li> <li>Explico la relación que existe entre una función lineal y una función afín.</li> </ul>
<b>5</b>	<i>¿Cuánto varía el tamaño de los terrenos a cercar?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelación de situaciones con las funciones cuadráticas.</li> <li>Características de las funciones cuadráticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caracterizo la función cuadrática.</li> <li>Explico las características de la función cuadrática.</li> <li>Utilizo las tablas y gráficas para resolver problemas.</li> </ul>
<b>6</b>	<i>¿Cómo representar variaciones del tamaño de los terrenos a cercar?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Algunos significados de los parámetros de las funciones cuadráticas.</li> <li>La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.</li> <li>Características de las traslaciones de las parábolas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determino las características de las parábolas.</li> <li>Establezco relaciones entre las diferentes representaciones de la función cuadrática.</li> </ul>
<b>7</b>	<i>¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Representaciones tabulares y gráficas correspondientes a las funciones polinómicas.</li> <li>Características de la variación de las funciones polinómicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.</li> <li>Identifico la relación entre los cambios en los parámetros con la representación algebraica de las funciones polinómicas.</li> <li>Establezco la relación entre los cambios en los parámetros con la representación gráfica de las funciones polinómicas.</li> <li>Analizo los comportamientos de cambio de las funciones polinómicas.</li> <li>Determino las propiedades de relación positiva y negativa entre variables, de variación lineal, de variación cuadrática y de variación polinómicas.</li> </ul>
<b>8</b>	<i>Cierre y Evaluación</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de las funciones polinómicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Empleo las características de las diferentes funciones polinómicas.</li> <li>Resuelvo problemas que requieren de las funciones polinómicas.</li> </ul>

Fuente: Tomado de (MEN, 2013)

Al revisar el libro Cálculo De Una Variable (Stewart, 2008) y El Cálculo (Leithold, 1998); encontramos que ambos libros presentan el concepto de optimización de área como una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial, la cual consiste en determinar donde una función alcanza sus valores máximos y mínimos (extremos); en dichos problemas de optimización, se pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo.

Cabe concluir que al revisar a los libros se evidencia que la forma en cómo se presenta el concepto de optimización de área no permite que se logre una comprensión profunda del concepto.

En este orden de ideas surge la pregunta de investigación:

¿Al enfrentar a los estudiantes del grado noveno de la IE María Auxiliadora del municipio de Elías, a un problema que puede resolverse de manera intuitiva sin el uso de las técnicas del cálculo diferencial, se consigue que perciban regularidades y relaciones, realicen conjeturas y predicciones, justifiquen o refuten las conjeturas y construyan explicaciones coherentes; logrando un tránsito natural entre los diferentes modos de pensar la optimización de áreas?

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

- Generar conocimiento a partir del estudio de una clase sobre optimización de áreas que será planificada, aplicada y evaluada en la Institución Educativa rural María Auxiliadora del municipio de Elías (Huila).

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Implementar estrategias de mediación pedagógico-didácticas para el desarrollo del pensamiento matemático para mejorar el conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores
- Desarrollar, capacidades, conocimientos y habilidades, para identificar, analizar y proponer alternativas de solución a problemas de enseñanza y/o aprendizaje de la optimización de áreas.

## Capítulo II

### Marco teórico

El marco teórico que orienta la experiencia son los Modos de Pensamiento creado por Anna Sierpinska (2000), al estudiar algunos aspectos del razonamiento de estudiantes universitarios en el aprendizaje del álgebra lineal. Observó que los estudiantes comprendían el álgebra lineal en muchos aspectos de la teoría con un enfoque más práctico que teórico (Parraguez, 2012).

Cuando nos referimos a la comprensión profunda del concepto, pensamos en que los estudiantes puedan comprender la optimización del área en los modos: Sintético geométrico (como rectángulos de diferentes tamaños que se pueden descomponer, recomponer y aplicar en otras figuras, para estimar su tamaño), Analítico Aritmético (a través de las fórmulas que permiten calcular el área de los rectángulos, tablas de valores, gráficas cartesianas que expresan las relaciones entre las variables) y analítico estructural (a través de funciones, relaciones funcionales, derivadas de las funciones y lugares geométricos).

Este marco es importante en este tipo de trabajos debido a que estos modos de pensamiento (sintético-geométrico, analítico-aritmético, analítico-estructural) se caracterizan por dar elementos para comprender un objeto matemático. Cuando se habla de modos de pensamiento se hace referencia a que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados teniendo en cuenta el modo en el que son abordados. En ese sentido lo que se pretende es que los estudiantes utilicen varios modos de “pensar” los objetos matemáticos y aprendan a utilizar diferentes estrategias que les permitan pasar de un modo de pensar a otro logrando así una comprensión profunda de los conceptos.



La primera etapa de la historia de la matemática relacionada con la optimización se encuentra en el periodo que abarca desde el siglo IV a. C. hasta el siglo IV d. C. Las obras de matemáticos como Euclides, Apolonio, Ptolomeo o Pappus aportan resultados que podemos considerarlos como problemas de máximos y mínimos (HEATH, 1956) (Citado por (Balcaza, Font, & Contreras, 2017, pág. 1067).

**Etapa Algebraica:** En la primera mitad del siglo XVII destaca la aportación que Fermat ofrece para calcular máximos y mínimos. En su obra “Methodus ad disquirendam maximam et minimam”, establece un procedimiento general (TANNERY; HENRY, 1912) basado en la idea de incrementar la cantidad de cierta magnitud. Introduce en este método la técnica de adigualdad utilizada por Diofanto de Alejandría, en su obra Aritmética. Es en este contexto, cuando surge el significado de adigualdad, que, como indica González (1992), se trata de un método puramente algebraico que no se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos, derivados de la teoría de ecuaciones de Viète. (Balcaza, Font, & Contreras, 2017, pág. 1067).

**Etapa Analítica:** En la segunda mitad del siglo XVII, los matemáticos Newton y Leibniz con el uso de las derivadas revolucionaron el Cálculo Diferencial. Las técnicas de cálculo las formularon en términos de fluxiones y de cocientes diferenciales, respectivamente (GAUD et al., 1998). Newton aplicó los resultados sobre flujos y fluxiones a los problemas de máximos y mínimos y Leibniz publica “Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus”, basado en un enfoque geométrico del enfoque cinemático de Newton, ofreciendo dos argumentaciones distintas para el cálculo de máximos y mínimos (CASTAÑEDA, 2006). (Balcaza, Font, & Contreras, 2017, pág. 1068)

En este contexto geométrico surgen otros dos significados. Por una parte, basándose en la comparación de estados afirma que el máximo será el que tenga mayor ordenada (distancia mayor) lo que hemos considerado como significado de la ordenada mayor o menor. Por otra parte, utilizando una condición geométrica para afirmar que la tangente en el punto máximo será horizontal lo que hemos considerado como significado de la tangente. Además de estas dos argumentaciones, se ofrece una tercera identificando el signo de las

diferencias en una región muy cercana al máximo. Con respecto a esta argumentación, L'Hôpital (1696 apud CASTAÑEDA, 2006) afirma que una diferencia no puede cambiar de signo sino pasa por cero o infinito. Surge, por tanto, el significado de la derivada primera.

Posteriormente, asociamos los criterios de máximos y mínimos basados en derivadas de orden superior a uno a Taylor, quien en su obra “Methodus Incrementorum Directa e Inversa” ofrece criterios para el cálculo de máximos y mínimos mediante el signo y la anulación de las derivadas sucesivas en un punto. Surge, así, el significado de la derivada de orden superior a 1. En el siglo XVIII la optimización vuelve a protagonizar un gran avance. Euler, basándose en los trabajos de Lagrange sobre variaciones de una función, crea el Cálculo de variaciones. Aporta un método al que denomina Método para hallar curvas de máximo o de mínimo, que permite tratar los problemas con varias variables y restricciones de igualdad abordando problemas donde el objeto optimizante fuese una función. Lagrange continúa con el trabajo de Euler y desarrolla el concepto de variación de una función. Introduce una nueva operación de diferenciación y ofrece una herramienta para resolver problemas de optimización con restricciones utilizando la técnica denominada multiplicadores de Lagrange. Surge, en esta época, el significado de los Multiplicadores de Lagrange (BOYER, 1968).

**Pensamiento sintético Geométrico:** En el modo de pensamiento sintético geométrico, la persona es capaz de identificar e imaginar aspectos geométricos del objeto matemático (SG), determinando la relación de dichos objetos con figuras, conjuntos, operaciones como la unión y la intersección, por ejemplo, mirar el área de una figura como una superficie plana. En este trabajo un ejemplo de pensamiento SG se da cuando los estudiantes son capaces de construir una figura geométrica (rectángulo), haciendo variar sus lados y dejando fijo su perímetro (dependiendo de las restricciones del problema de la clase), así de manera implícita se desarrolla un proceso de comprensión del problema y posibles soluciones. En este modo de pensamiento es importante la visualización matemática.

**Pensamiento analítico aritmético:** En el modo de pensamiento analítico aritmético, los objetos se representan a través de expresiones numéricas y algebraicas. Por ejemplo, ver el

área de una figura como una ecuación determinada por el valor de los lados de la figura (en nuestro caso rectángulo). Se evidencia este pensamiento en los estudiantes cuando, en un primer momento, pasan de utilizar los números enteros asignados como medidas en los lados del rectángulo, a utilizar números decimales, debido a que para realizar este proceso se requiere de un manejo algebraico de la fórmula de área de un rectángulo sin necesidad de construirlo. En un segundo momento se evidencia cuando son capaces de escribir la ecuación del área y perímetro en función de lo que varía y lo que se mantiene constante.

$$\text{Área: } b * h = A$$

$$\text{Perímetro: } 2(b + h) = P$$

$$\text{Área en función del perímetro: } \frac{P}{2}h - h^2 = A$$

En este pensamiento AA, luego de determinar el área en función del perímetro, el estudiante a partir de la asignación de valores puede tabular la información de tal manera que permita organizar y sistematizar los datos, con el fin de que al construir la gráfica con  $x=1,2, 3,,n-1, n$ ; puedan observar una regularidad en los números obtenidos, convirtiéndose este proceso en un paso fundamental para alcanzar el último pensamiento.

**Pensamiento analítico- estructural:** en este modo, los objetos son definidos por medio de sus propiedades y axiomas que los sustentan. Según la teoría, este modo de pensamiento requiere de un nivel de comprensión alto de los objetos matemáticos estudiados, debido a esto, pensar la optimización de áreas desde este modo de pensamiento, permite que el estudiante sea capaz de identificar las regularidades en la gráfica resultante de la tabulación realizada en el pensamiento anterior. En nuestro caso, identificar el área máxima como el punto máximo de la función cuadrática del área en función del perímetro.

## Capítulo III

### Marco metodológico

El marco metodológico que se propone es el del estudio de clases, definiéndose como una metodología japonesa a través de la cual los profesores trabajan de modo cooperativo para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos, a través de la observación y discusión de las técnicas de enseñanza (Arcavi, Lorca, & Isoda, 2007).

El Estudio de la clase se realiza de manera progresiva y reiterativa, con el objetivo de mejorar continuamente los procesos metodológicos escogidos. De este modo, el estudio de clases involucra tres fases:

**Planificación de la clase:** Consiste en la selección inicial de un tema que permita el estudio determinado de un objeto matemático, luego una selección de los aprendizajes esperados para la clase (matriz SQAT) que permiten el desarrollo de habilidades y disposiciones que interesa fomentar en todos los estudiantes a lo largo de toda la enseñanza (razonamiento matemático, competencias comunicativas,...). En suma, la elaboración de un plan de clase que debe contener aspectos fundamentales para el análisis de la clase, tales como, el objetivo de la clase; los conocimientos previos, las competencias, las habilidades, las actitudes y los valores que se abordarán; las actividades didácticas; el tiempo; los recursos o materiales a utilizar, las posibles reacciones de los estudiantes o dificultades y la evaluación. Vale aclarar, que la planificación de la clase se realiza de manera conjunta con los integrantes del grupo de investigación.

Durante la etapa de planificación se da especial importancia a la matriz de cambio conceptual SQAT que permite reflexionar sobre cuatro aspectos: S ¿Qué SE? saberes previos; Q ¿Qué QUIERO Aprender? metas disciplinares, habilidades, actitudes, hábitos y valores que se ejercitarán paralelo al desarrollo del concepto. A ¿Qué APRENDÍ? Formular estrategias de coevaluación, autoevaluación heteroevaluación para determinar evaluar y T TRANSFERIR encontrar Contextos académicos y cotidianos en los cuales el concepto

adquiere significado. En la primera etapa de planificación se utilizará el análisis de contenido (Gómez, 2002) para realizar el análisis a priori de los objetos matemáticos. El objeto matemático de estudio es la optimización de áreas, utilizado en contextos de variación y cambio para determinar el éxito de una situación mediante el cálculo de extremos de la función objeto.

**Implementación de la clase** (siendo observado por otros y por quienes participaron en la preparación): permite la aplicación de la clase al grupo de estudiantes focalizados, con el fin de determinar la eficacia de las estrategias utilizadas. La etapa de planeación de clase, debe prever los posibles errores de los estudiantes y brindar estrategias para que se puedan superar en esta etapa. Cabe resaltar, que el producto que se espera obtener de la observación de la implementación de la clase, es la opinión de los observadores en cuanto a fortalezas, dificultades, obstáculos o aspectos por mejorar tanto de la labor del maestro, como el aprendizaje de los estudiantes, el ambiente de aula y la contribución del material empleado, en otras palabras la interacción estudiante-profesor- conocimiento.

**Discusión del éxito de la clase** (en función del plan de clases, para su mejoramiento y nueva implementación): Esta etapa comienza con una introducción en donde el profesor que orientó la clase expresa el propósito, los logros, debilidades y conclusiones generales de la implementación del plan de clase, igualmente, la pertinencia del material didáctico utilizado y características tanto académicas como comportamentales de los alumnos, de acuerdo a cada etapa de la clase y los propósitos de cada problema y actividad realizada. Luego, cada participante analiza, discute e intercambiar opiniones acerca de los problemas dados en la clase y el rol formativo del profesor, así como acerca de las expresiones y actividades de aprendizaje de los alumnos.

### **3.1 Desarrollo de la metodología**

#### **3.1.1 Estudio de clases sobre optimización de áreas.**

El desarrollo de la metodología comprende aspectos fundamentales abordados en la realización del estudio de clases y análisis de los resultados de la implementación de la clase. Para la fase de la planeación, se propone revisar el objeto matemático en cuestión, para determinar las estrategias y conocimientos previos que deben tener los estudiantes para la comprensión profunda del tema. A continuación, se realiza el análisis didáctico del tema, como insumo para la elaboración del plan de clase.

#### **3.1.2 Análisis didáctico**

Según (Gómez, 2002), Análisis didáctico se refiere a una parte del currículo que permite la identificación, organización y selección de significados de varios conceptos matemáticos con el fin de llevar un proceso acorde a las unidades didácticas. En este sentido, el análisis didáctico posee cuatro análisis, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, los cuales cumplen un papel fundamental en el desarrollo de la clase.

##### **3.1.2.1 Análisis de contenido**

El Análisis de Contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. Está compuesto por tres significados:

**La estructura conceptual:** entendida como el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002).

**Los sistemas de representación:** conjunto de reglas en el cual se hace tangible un objeto matemático a través de una variedad de sistemas de representaciones semióticas. En este sentido, se hace necesario apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra del mismo objeto, ya sea en el interior del propio sistema o entre diferentes sistemas ( Duval, 1999).

**El análisis fenomenológico:** como aquella relación que permite dar sentido a la Matemática con la experiencia, donde se involucran fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelados (Gómez, 2002).

### ***Estructura conceptual***

El estudio en el cual se enfoca el análisis didáctico, se centra en el objeto matemático optimización de área. Este tema se fundamenta en la importancia que tiene estudiar fenómenos de variación y cambio desde grados inferiores y con métodos que permiten desarrollar el pensamiento matemático en los escolares. Adicionalmente, la optimización de una función, permite determinar un modelo que permite realizar un proceso de toma de decisiones.

Por esta razón, cuando realizamos un problema de este tipo debemos poder a) determinar las variables implicadas en el problema, b) identificar las restricciones que presenta la situación y c) determinar la función objeto, la cual permite la toma de decisión y la resolución del problema planteado.

Para el análisis de la estructura conceptual utilizada para el desarrollo del plan de clase, enunciamos, desde el campo conceptual, algunos hechos, conceptos y estructuras. Desde el campo procedimental, listamos estrategias, razonamientos y destrezas. Finalmente, presentamos el mapa conceptual con su respectiva explicación, con el fin de constituir un conjunto de herramientas necesarias para la elaboración de una clase, la cual será aplicada en una institución educativa del departamento del Huila.

### *Hechos*

Los hechos se representan como los temas relacionados con el tema a tratar, estos nos permiten determinar aquellos conceptos internos al objeto matemático en general. A Continuación, mencionamos conceptos relacionados con el tema de optimizar una magnitud.

- Área, área máxima, perímetro.
- Forma, figura plana, rectángulo, cuadrado, ángulos, Parábola.
- Variación, cambio, longitud, covarianza, razón de cambio, función cuadrática, extremos de funciones.

Se hace mención a convenios que sustentan nuestro trabajo:

- El cuadrado es el rectángulo de mayor área.
- Cuando la distancia entre las longitudes de los lados es menor, el área se maximiza.
- El área del rectángulo varía y el perímetro permanece constante.

### *Razonamiento*

Entendiendo que los razonamientos se ejecutan sobre los conceptos, entonces identificamos 4 tipos de razonamiento enfocados en el proceso de optimizar áreas.

- Deductivo: determinar las propiedades de la figura que permiten su transformación.
- Inductivo: establecer relaciones generales entre las funciones objeto a optimizar.
- Geométrico: tratamiento cualitativo de la optimización de área.
- Numérico-algebraico: tratamiento cuantitativo y simbólico de la optimización de áreas.

### *Destrezas*

Optimizar áreas permite ejecutar los hechos mencionados anteriormente, entre esas destrezas se ubican comparar, iterar, contar, usar algoritmos, estimar, realizar aproximaciones sucesivas, paso de número entero a decimal.

### Estrategias

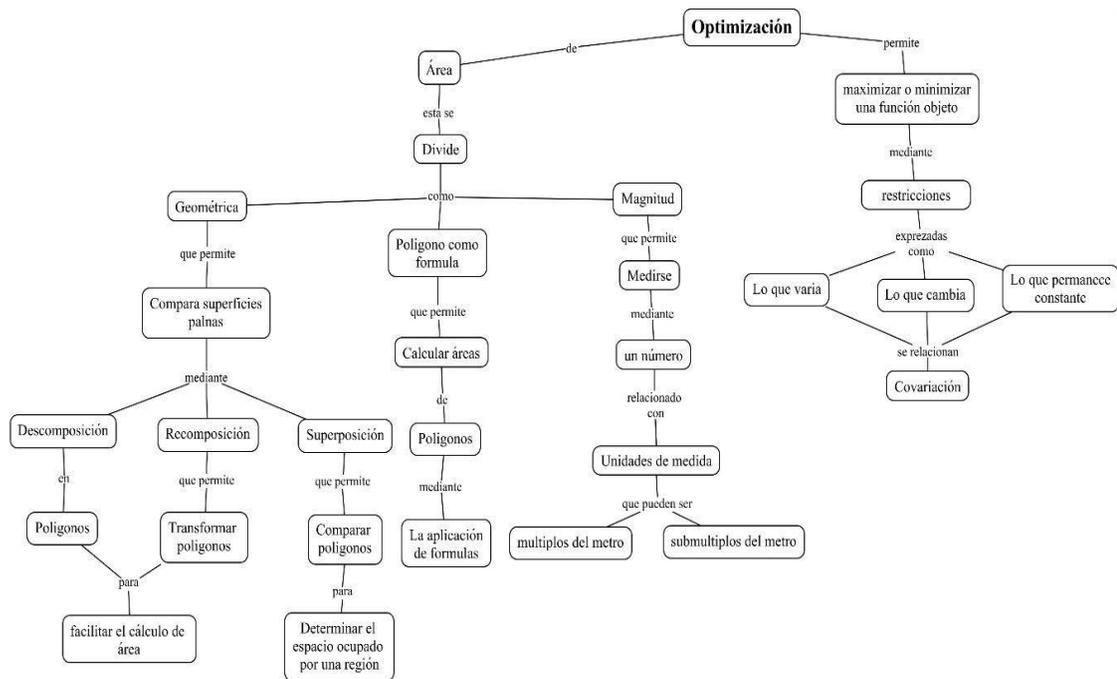
Las estrategias se ejecutan sobre las estructuras conceptuales. A continuación, mencionamos las estrategias más usadas para optimizar áreas.

- Transformar una superficie en otra equivalente, pero de distinta forma.
- Dada la familia de rectángulos “parametrizada”, encontrar el momento en el que el área de los rectángulos es máxima.

### Mapa conceptual

Se presenta el mapa conceptual realizado, a partir del estudio estructural de concepto de optimización de áreas.

Imagen 5. Mapa conceptual optimización de áreas.

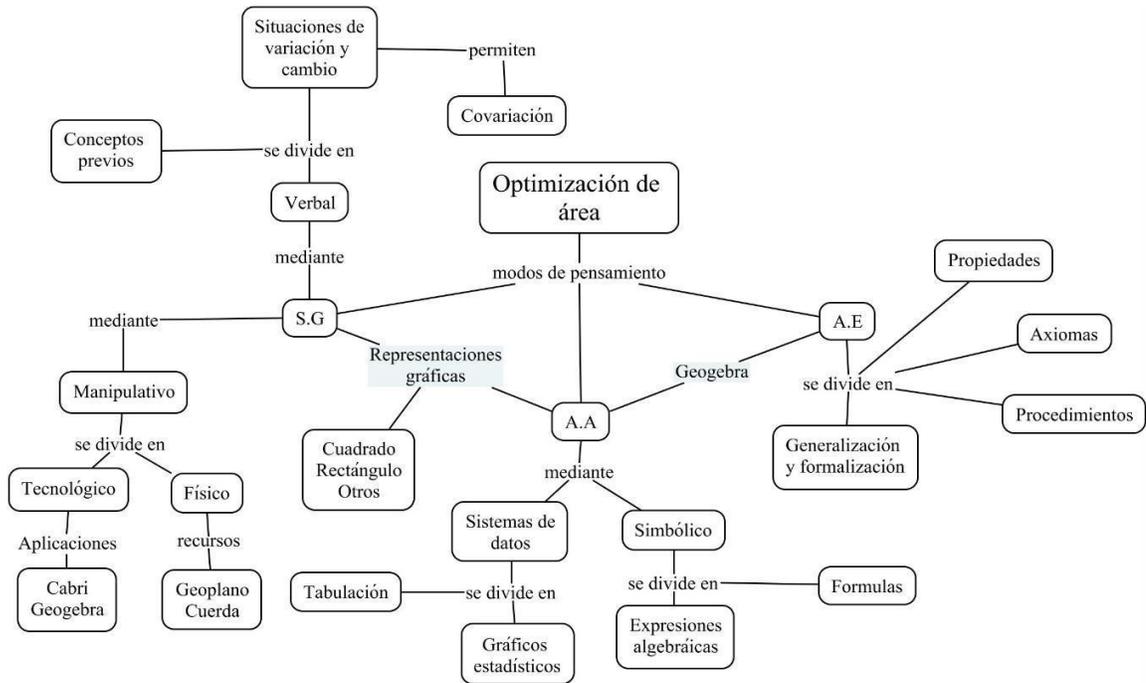


Fuente: elaboración propia

### Sistemas de representación

Los sistemas de representación otorgan “identificar los modos en que el concepto se presenta” (Gómez, 2007, pág. 455). A continuación, en la figura 2, damos a conocer los sistemas de representación que son importantes para nuestro tema.

**Imagen 6. Sistemas de representación.**



Fuente: elaboración propia.

### Fenomenología

Optimizar es una actividad frecuente en diferentes aspectos de la vida cotidiana, deseamos llegar a un lugar en el menor tiempo posible, construir una casa utilizando la menor cantidad de material, obtener la máxima ganancia en un negocio, etc. Particularmente optimizar áreas, desprende contextos en donde se debe medir cierta cantidad de superficie, repartir o distribuir dicha superficie de manera que su área se maximice, y transformar las figuras para conseguir dicha maximización.

En este sentido, se presentan problemas de optimización desde temas alejados al cálculo diferencial, debido a el nivel de escolaridad de los estudiantes y por la convicción de que existen muchos problemas que pueden resolverse sin necesidad de la aplicación de la derivada, promoviendo desde grados bajos de la escolaridad conceptos de variación y cambio, fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

A continuación, presentamos el listado de contextos que dotan de significado a nuestro objeto matemático, organizándolos según subestructuras del concepto y las situaciones en las cuales se clasifica.

*Contexto Transformar*

Los siguientes fenómenos se refieren al problema ¿cómo aprovechar al máximo el área que tengo?

Optimización de la tela necesaria para la elaboración de un vestido empleando patrones.

Optimización del tiempo para llegar a casa.

Cantidad y costo mínimos de pintura necesaria para cubrir una superficie.

*Contextos y Subestructuras*

En la tabla 2 se contemplan las subestructuras relacionadas con los contextos establecidos para la optimización de área.

**Tabla 2.** *Relación entre contextos y subestructuras*

<i>Contexto</i>	<i>Subestructuras</i>
<i>Medir</i>	<i>Relaciones geométricas</i>
<i>Repartir</i>	
<i>Transformar</i>	<i>Maximizar y Minimizar</i>

*Fuente: Elaboración Propia*

*Situaciones*

El estudio PISA clasifica las situaciones en personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005). A continuación, en la tabla 2 presentamos, un esquema que relaciona la optimización de áreas, con su contexto, sus subestructuras matemáticas y sus situaciones.

**Tabla 3.** Relaciones entre contextos, subestructuras, situaciones y fenómenos.

Contexto	Subestructura	Situaciones				Fenómenos
		P	E	PU	C	
<b>Medir</b>	Relaciones geométricas					
<b>Repartir</b>						
<b>Transformar</b>	Maximizar y Minimizar		✓			Cantidad y costo mínimos de pintura necesaria para cubrir una superficie
		✓				Optimización del tiempo para llegar a casa

Observación: P = personales; E = educativas o laborales; PU = públicas; C = científicas

*Fuente: Elaboración Propia*

## Capítulo IV

### Anexos

En este apartado, se presentan los documentos necesarios realizados para la primera etapa del estudio de clase (planeación de la clase)

#### 5.1. Matriz SQAT

ESTUDIO DE CLASES
<b>Unidad didáctica:</b> Variación
<b>Tema:</b> Optimización de áreas
<b>Grado:</b> Noveno
<b>Colegio:</b> Institución Educativa María Auxiliadora
<b>Municipio:</b> Elías
<b>Contexto:</b> Agrícola
<b>Duración:</b> 2 horas
<b>Estándar:</b> Modelo situaciones de variación con funciones cuadradas aplicándolas a un contexto cotidiano.

## CONTENIDOS DE LA COMPETENCIA

lo que los aprendientes deben saber		lo que los aprendientes deben saber hacer	
Conocimientos esenciales	Habilidades y destrezas	Actitudes y valores	Hábitos y prácticas.
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce figuras geométricas, identifica y describe sus características.</li> <li>• Reconoce la noción de área y perímetro en figuras geométricas.</li> <li>• Identifica las unidades de medida.</li> <li>• Calcula áreas y perímetros en figuras geométricas.</li> <li>• Proporcionalidad</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer saberes previos</li> <li>• Analizar</li> <li>• Comparar (variación)</li> <li>• Interpretar</li> <li>• Trabajar en equipo</li> <li>• Clasificar</li> <li>• Conceptualizar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar los conocimientos previos para estructurar conocimiento.</li> <li>• Tomar una postura crítica frente a las tareas.</li> <li>• Valorar la opinión de sus compañeros.</li> <li>• Motivar a la participación activa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar elementos de medio para la construcción de figuras geométricas en su ambiente</li> <li>• Determinar características de una figura.</li> <li>• Crear criterios válidos para la construcción de un concepto,</li> <li>• Determinar la importancia y utilidad de un concepto.</li> </ul>

## METAS A ALCANZAR CON EL DESARROLLO DE LA CLASE

Lo que los aprendientes deben saber	Lo que los aprendientes deben saber hacer
¿Qué deben comprender los aprendientes como resultado de esta unidad?	¿Qué deben saber hacer los aprendientes como resultado de esta unidad?
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber identificar el fenómeno de cambio.</li> <li>• Saber describir situaciones de la vida cotidiana donde se refleje el concepto de Optimización.</li> <li>• Saber interpretar las causas de variación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber hacer formulaciones de preguntas contextualizadas.</li> <li>• Saber hacer abstracción del contexto cotidiano al contexto matemático.</li> <li>• Saber hacer modelación de funciones de variable real.</li> </ul>

## OBJETIVOS DE LA CLASE

Objetivo general de la clase	Objetivos específicos de la clase
Modelar una situación de variación y cambio con la función de área y perímetro de un rectángulo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies y ángulos con niveles de precisión apropiados.</li> <li>• Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas.</li> </ul>

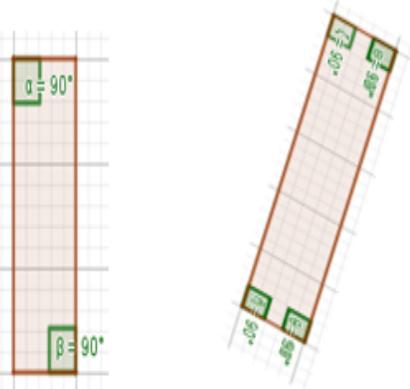
## 5.2 PLAN DE CLASE

**OPTIMIZACIÓN DE ÁREAS**  
**GRADO NOVENO**  
**I.E MARIA AUXILIADORA**  
**MUNICIPIO DE ELIAS –HUILA**

*Tabla 4. Plan De Clase*

<b>ESTUDIO DE CLASES</b>	
<b>TEMA:</b> Optimización De Áreas. El rectángulo, área y perímetro de un rectángulo, La fracción como razón de cambio entre el área y el perímetro de un rectángulo, tablas de valores.	
<b>TIEMPO ESTIMADO:</b> <i>90 minutos</i>	
<b>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Modelar una situación de variación y cambio con la función de área de un rectángulo.</i></li></ul>	<b>CAPACIDADES A DESARROLLAR:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Identifica cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos, registros tabulares y gráficos.</i></li><li>• <i>Generaliza que figuras con áreas diferentes pueden tener el mismo perímetro.</i></li><li>• <i>Interpreta las modificaciones entre el perímetro y el área con un factor de variación respectivo.</i></li><li>• <i>Coordina los cambios de la variación entre el perímetro y la longitud de los lados o el área de una figura.</i></li></ul>

ETAPAS DE LA CLASE	DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA		
	ACCIONES DEL PROFESOR <i>Procedimientos - actividades</i>	ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES <i>Trayectorias.</i>	EVALUACIÓN DE LA BUENA MARCHA DE LA CLASE
INTRODUCCIÓN 10 minutos	El profesor presenta a los estudiantes el objetivo de clase; el cual consiste en modelar una situación de variación y cambio (optimización del área de un rectángulo)		En este espacio los observadores de la clase realizarán los aportes relevantes en cada una de las etapas.
	A continuación el profesor realiza el reconocimiento de los conceptos previos de los estudiantes mediante las siguientes preguntas: a. ¿Recuerdan qué es un rectángulo?	Posible respuesta: a. Si, Un rectángulo es una figura geométrica que tiene cuatro lados. <b>P:</b> a partir de la respuesta del estudiante el profesor dibuja algunas figuras geométricas de cuatro lados; con el objetivo que los estudiantes reconozcan las características de un rectángulo, como la medida de sus ángulos, de sus lado, entre otras.  	
	b. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo?	Posible respuesta: b. Son el área, el perímetro y la longitud de sus lados.	
	c. ¿Qué es el área de un rectángulo y cómo se calcula?	Posible respuesta: c. El área de un rectángulo es la región que este encierra y se calcula multiplicando la base y la altura.	
	d. ¿Qué es el perímetro de un rectángulo y cómo se calcula?	Posible respuesta: d. El perímetro de un rectángulo es el borde de la figura y se calcula sumando las dimensiones de todos los lados.	

	<p>e. Dibujemos rectángulos con las siguientes condiciones.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Dibujar un rectángulo con las medidas que desee.</li> <li>2. Dibujar un rectángulo tal que su área sea el doble del área de un triángulo isósceles.</li> </ol>	<p>Posibles respuestas: e.</p> <p>1. </p> <p>P: Si todos los estudiantes dibujan los rectángulos horizontales, entonces el profesor dibuja varios rectángulos verticales y en diferentes posiciones.</p>  <p>2.</p> 
	<p>f. ¿Cuándo algo se mantiene constante, que significa?</p>	<p>Posibles respuestas: f. Es un valor fijo, que no puede modificarse.</p>

	<p><b>g.</b> Conocen cómo realizar un arreglo rectangular.</p>	<p>Posible respuesta: <b>g.</b> Si, consiste en organizar los datos u objetos en forma rectangular.  <b>P:</b> El profesor ayuda a los estudiantes a identificar algunos; como por ejemplo la posición de los pupitres en el salón, organizar frutas en una caja, etc.</p>	
<p>DESARROLLO</p> <p>45 minutos</p>	<p>El profesor explica la dinámica de la actividad, la cual consiste en formar equipos de 4 personas, cada persona tendrá un rol dentro del equipo, dos se encargaran de hacer las variaciones de los lados en la salida a campo, una persona tomara la información en una tabla y la última persona se encarga de medir los ángulos del rectángulo. Al finalizar la actividad se pedirá que se escriban las conclusiones en una cartulina para ser expuestas en otra parte de la clase.  Posteriormente enuncia el problema.  <i>Don Fernando quiere hacer un galpón para gallinas, pero solo dispone de 36 metros de malla para encerrar un espacio rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el terreno para que con esa malla se limite la mayor área posible?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La mayoría de jóvenes están atentos a la explicación</li> <li>✓ Se destacan algunos jóvenes por no prestar atención a la actividad</li> <li>✓ Hay estudiantes que piden que se explique de nuevo, debido a que no comprenden la dinámica de la actividad</li> <li>✓ Los estudiantes se dispone a salir al patio de la Institución a realizar las diferentes mediciones</li> </ul>	

			
<p>Posibles errores: considerar los 36 m como el área del rectángulo; no realiza las operaciones correctamente.</p> <p>Posibles propuestas: tabular la información para poder observar las regularidades encontradas.</p>			
<p>Encontrar el rectángulo de área mayor cuyo perímetro es 36 m.</p> <p>El anterior problema se desarrollará tomando como referencia los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000).</p> <p><b>Modo Analítico Aritmético (AA).</b> El área del rectángulo de dimensiones <math>x</math>, y es:</p> $A = x * y \quad (1)$ <p>Mientras que su perímetro, viene dado por:</p> $P = 2x + 2y \quad (2)$ <p>Ahora expresamos el lado <math>y</math> en función del perímetro y el lado <math>x</math>; para luego reemplazarla en la ecuación del área (1)</p>		<p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ No son capaces de escribir la ecuación del área y perímetro en función de lo que varía y lo que se mantiene constante.</li> <li>❖ No poder expresar uno de los lados en función del perímetro y el otro lado.</li> <li>❖ No operar correctamente.</li> <li>❖ Derivar incorrectamente.</li> <li>❖ No comprender que representa <math>x = \frac{p}{4}</math> y <math>y = \frac{p}{4}</math></li> </ul>	

área (1), obtenemos:

$$x = \frac{P}{2} - y$$

$$A = \left(\frac{P}{2} - y\right)y$$

$$A = \frac{Py}{2} - y^2 \quad (4)$$

Derivando (4), tenemos:

$$A'(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy$$

$$A'(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy = 0$$

$$\left(\frac{P}{2} - 2y\right) = 0$$

$$y = \frac{P}{4}$$

Si calculamos la segunda derivada, obtenemos:

$$A''(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy = -2$$

$$A''(y) = -2$$

Como la segunda derivada da negativa, entonces el valor  $y = \frac{P}{4}$  es un máximo.

Por lo tanto el área del rectángulo de dimensiones  $x = \frac{P}{4}$  y  $y = \frac{P}{4}$  es mayor.

$$y = \frac{P}{2} - x$$

$$A = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$$

$$A = \frac{Px}{2} - x^2 \quad (3)$$

Derivando (3), tenemos:

$$A'(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx$$

$$A'(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx = 0$$

$$\left(\frac{P}{2} - 2x\right) = 0$$

$$x = \frac{P}{4}$$

Si calculamos la segunda derivada, obtenemos:

$$A''(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx = -2$$

$$A''(x) = -2$$

Como la segunda derivada da negativa, entonces el valor  $x = \frac{P}{4}$  es un máximo.

Ahora, si expresamos el lado  $x$  en función del perímetro y el lado  $y$ ; para luego reemplazarla en la ecuación del

	<p><b>Modo Sintético Geométrico (SG).</b>          Construir rectángulos haciendo variar las medidas de los lados, para analizar cada una de los datos y lograra sacar conclusiones acerca del área del rectángulo. Para realizar el análisis de los datos se registrarán las medidas y el área del rectángulo en una tabla.</p> <p><b>Modo Analítico Estructural (AE).</b>          Si analizamos de la ecuación del área <math>A = \frac{Px}{2} - x^2</math>, la <math>-x^2</math> podemos observar que es una parábola convexa porque abre hacia abajo, que tiene vértice (Siendo ese el punto Máximo de la función; lo que nos indica <i>que cuando los lados miden respectivamente X unidades, el área del rectángulo es Y unidades cuadradas</i>)</p>	<p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Hacer variar las dimensiones de los lados de los rectángulos, pero no dejar fijo el perímetro.</li> </ul> <p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ No recordar que representa la función <math>-x^2</math></li> <li>❖ No identificar el área máxima como el punto máximo de la función cuadrática del área en función del perímetro.</li> </ul>	
<p>CONCLUSIÓN</p> <p>35 minutos</p>	<p>Se realizará una tabla en donde se tabulará la información obtenida en la elaboración de los rectángulos de área máxima, para ello se pregunta:          ¿Qué datos se deben registrar en la</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Se destaca la agilidad de algunos estudiantes para realizar cálculos que permitan encontrar nuevos rectángulos.</li> <li>✓ Los estudiantes identifican los datos que deben registrar la tabla.</li> </ul>	

tabla? ¿Se podrán formar otros rectángulos?, ¿Cuáles?, ¿podemos utilizar otro tipo de números?, ¿Cuáles?, ¿encontraremos otro rectángulo de mayor área?

Lado 1	Lado 2	Perímetro (metros)	Área (metros <sup>2</sup> )
15	3	36	45
12	6	36	72
10	8	36	80
9,8	8,2	36	80,36
9,5	8,5	36	80,75
9,4	8,6	36	80,84
9,2	8,8	36	80,96
9,1	8,9	36	80,99
9	9	36	81

- ✓ Algunos estudiantes comienzan a sugerir usar los números decimales para las dimensiones de los lados del rectángulo.
- ✓ Los estudiantes generalizan que entre más cerca sean las dimensiones de los lados del rectángulo su área es mayor.

Posibles errores: no operar correctamente los números decimales, no identificar el cuadrado como un rectángulo especial.

*Fuente: Elaboración propia*

### 5.3 Multitarea

*“APRENDER, no es saber lo que otros han dicho, hecho o escrito,  
Aprender es emplear la información disponible y los métodos que  
Otros utilizaron para descubrir, crear, innovar y hacer lo que los*

*Demás no han hecho...”*

*Dewey, 1898.*

*ENSEÑAR, no es explicar, “porque quien explica algo  
A alguien le niega la posibilidad de descubrirlo y comprenderlo”*

*Papert, 1960.*

**Proyecto de investigación: Diseño y gestión de un programa de prácticas para la formación inicial de Profesores en la  
Facultad de Educación de la Universidad Surcolombiana**

**Fecha:** 13 de diciembre de 2018

**Nombre:** Yaneth Tovar Castrillón y Vanessa Tovar Castro

**Programa académico:** licenciatura en matemáticas

Estimado estudiante: con el propósito caracterizar las prácticas pedagógicas de los profesores en formación inicial de la facultad, agradecemos su colaboración en desarrollar las actividades propuestas a continuación.

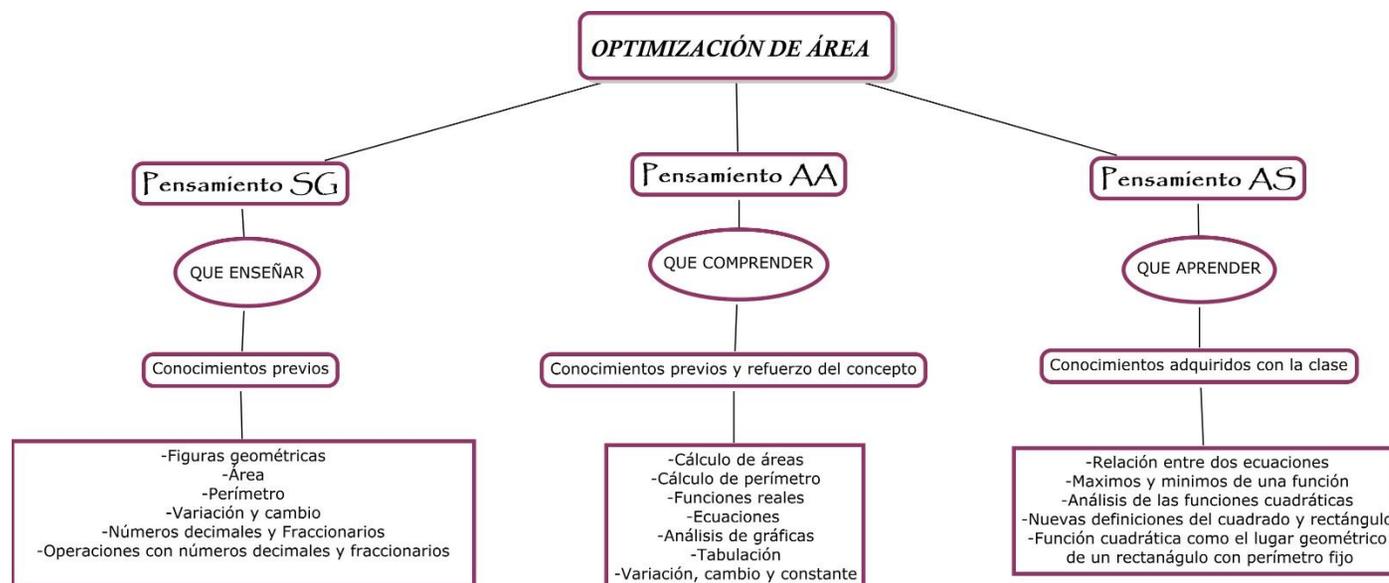
Seleccione **un contenido de su campo de formación que le gustaría abordar en el aula.**

1. Elabore un mapa conceptual que muestre las temáticas, y los diferentes aspectos que considere debería abordar en el aula con sus

estudiantes. **¿Qué enseñar?**

2. Registre las razones que justifican la selección del contenido. **¿Por qué enseñar ese contenido?**
3. Registre los **objetivos de aprendizaje** que considere pertinentes deben lograr los estudiantes asociados al contenido
4. Registre las razones que justifican la selección de los objetivos de aprendizaje.
5. Desarrolle una **metodología para abordar el contenido** en el aula, registre actividades, tareas, materiales, tiempos, los demás aspectos que considere necesarios.
6. Justifique las razones por las que considera pertinente la metodología propuesta.
7. Plantee **criterios y estrategias de evaluación** asociadas al contenido
8. Justifique las razones por las que considera pertinente la selección de esos criterios y esas estrategias

### *¿Qué enseñar?*



### **¿Por qué enseñar ese contenido?**

La optimización es un proceso natural que podemos encontrar en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana, sin embargo al igual que con otros conceptos matemáticos no los percibimos como tal resolviéndolos haciendo uso de procesos intuitivos. Según la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000), podemos percibir un concepto matemático haciendo uso de diversos pensamientos que nos llevan a un nivel de comprensión más avanzado. El primer pensamiento es el Sintético Geométrico (SG) en el cual podemos reconocer los objetos mediante figuras geométricas, de ahí se hace importante para este proceso reconocer conceptos de área y perímetro de manera gráfica, reconocer diferentes figuras geométricas, prever que sucede al dejar fijo una variable (ya sea el área o el perímetro), construir diferentes figuras que satisfagan el problema de la clase. El segundo pensamiento es el Analítico Aritmético (AA) el cual requiere de conocimientos más elaborados acerca de funciones reales, cálculo de área y perímetro, identificar que varía, que cambia y que se mantiene constante, uso de conjuntos numéricos diferentes al natural ( $\mathbb{N}$ ), tabulación, etc. El tercer y último pensamiento es el Analítico Estructural (AE) va más allá de los otros pensamientos, requiriendo un conocimiento y abstracción de los conceptos de mayor nivel, debido a que en este pensamiento el estudiante debe ser capaz de identificar la forma el problema, interpretando y asumiendo la gráfica como una función cuadrática en donde podemos observar máximos y mínimos, además al ubicar el punto máximo encontramos la solución al problema de la clase.

Es importante permitir que los estudiantes puedan resolver este tipo de problemas sin hacer uso del cálculo diferencial, ya que le permiten construir y reforzar el pensamiento variacional fundamental para conceptos matemáticos, desarrollando diferentes habilidades y destrezas útiles para el análisis de otros conceptos. De esta manera se escoge la optimización de área como objeto de estudio, utilizando solo procesos intuitivos y algebraicos que permitan encontrar diferentes maneras de representar la solución al problema de la clase.

### **Objetivos de aprendizaje**

- Identificar el fenómeno de cambio.
- Interpretar las causas de variación.
- Hacer modelación de funciones de variable real.
- Describir situaciones de la vida cotidiana donde se refleje el concepto de optimización.

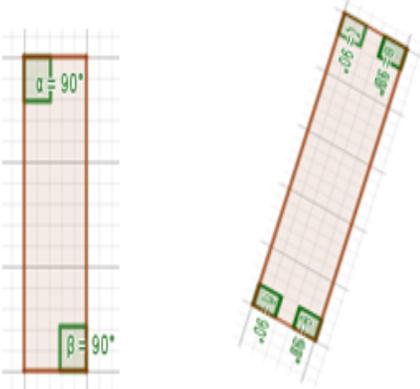
### **Razones de los objetivos de aprendizaje**

Los objetivos de aprendizaje son elegidos con la finalidad de que sean la base para alcanzar el conocimiento planteado inicialmente en la enseñanza del concepto de optimización, así por ejemplo al identificar el fenómeno de cambio los estudiantes podrán tener claro el punto inicial para empezar a aplicar los conceptos de variación y cambio en el área y perímetro. En el momento en que los estudiantes logran este objetivo, están listos para interpretar las causas de variación y realizar la modelación del problema haciendo uso de las funciones de variable real. Finalmente los estudiantes desarrollarán la habilidad de reconocer en diferentes contextos situaciones en donde podamos encontrar la optimización como fenómeno matemático. Se hace necesario que los estudiantes tengan claros conceptos básicos requeridos para el desarrollo intuitivo y algebraico de este problema, sin embargo, se plantean estrategias metodológicas que permitan superar los obstáculos conceptuales que se lleguen a presentar.

## Metodología para abordar el contenido

<b>ESTUDIO DE CLASES</b>	
<b>TEMA:</b> Optimización De Áreas. El rectángulo, área y perímetro de un rectángulo, La fracción como razón de cambio entre el área y el perímetro de un rectángulo, tablas de valores.	
<b>TIEMPO ESTIMADO:</b> <i>90 minutos</i>	
<b>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Modelar una situación de variación y cambio con la función de área de un rectángulo.</i></li></ul>	<b>CAPACIDADES A DESARROLLAR:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Identifica cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos, registros tabulares y gráficos.</i></li><li>• <i>Generaliza que figuras con áreas diferentes pueden tener el mismo perímetro.</i></li><li>• <i>Interpreta las modificaciones entre el perímetro y el área con un factor de variación respectivo.</i></li><li>• <i>Coordina los cambios de la variación entre el perímetro y la longitud de los lados o el área de una figura.</i></li></ul>

ETAPAS DE LA CLASE	DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA		
	ACCIONES DEL PROFESOR <i>Procedimientos - actividades</i>	ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES <i>Trayectorias.</i>	EVALUACIÓN DE LA BUENA MARCHA DE LA CLASE
INTRODUCCIÓN 10 minutos	El profesor presenta a los estudiantes el objetivo de clase; el cual consiste en modelar una situación de variación y cambio (optimización del área de un rectángulo)		En este espacio los observadores de la clase realizarán los aportes relevantes en cada una de las etapas.
	A continuación el profesor realiza el reconocimiento de los conceptos previos de los estudiantes mediante las siguientes preguntas: a. ¿Recuerdan qué es un rectángulo?	Posible respuesta: a. Si, Un rectángulo es una figura geométrica que tiene cuatro lados. <b>P:</b> a partir de la respuesta del estudiante el profesor dibuja algunas figuras geométricas de cuatro lados; con el objetivo que los estudiantes reconozcan las características de un rectángulo, como la medida de sus ángulos, de sus lado, entre otras.  	
	b. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo?	Posible respuesta: b. Son el área, el perímetro y la longitud de sus lados.	
	c. ¿Qué es el área de un rectángulo y cómo se calcula?	Posible respuesta: c. El área de un rectángulo es la región que este encierra y se calcula multiplicando la base y la altura.	
	d. ¿Qué es el perímetro de un rectángulo y cómo se calcula?	Posible respuesta: d. El perímetro de un rectángulo es el borde de la figura y se calcula sumando las dimensiones de todos los lados.	

	<p>e. Dibujemos rectángulos con las siguientes condiciones.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Dibujar un rectángulo con las medidas que desee.</li> <li>2. Dibujar un rectángulo tal que su área sea el doble del área de un triángulo isósceles.</li> </ol>	<p>Posibles respuestas: e.</p> <p>1. </p> <p>P: Si todos los estudiantes dibujan los rectángulos horizontales, entonces el profesor dibuja varios rectángulos verticales y en diferentes posiciones.</p>  <p>2.</p> 
	<p>f. ¿Cuándo algo se mantiene constante, que significa?</p>	<p>Posibles respuestas: f. Es un valor fijo, que no puede modificarse.</p>

	<p>g. Conocen cómo realizar un arreglo rectangular.</p>	<p>Posible respuesta: <b>g.</b> Si, consiste en organizar los datos u objetos en forma rectangular.  <b>P:</b> El profesor ayuda a los estudiantes a identificar algunos; como por ejemplo la posición de los pupitres en el salón, organizar frutas en una caja, etc.</p>	
	<p>Posibles errores: confundir el concepto de área y perímetro; no recordar las fórmulas para calcular el área y el perímetro; no saber que es una constante ni un arreglo rectangular; conceptualización del área y perímetro del rectángulo.</p>		
<p>DESARROLLO</p> <p>45 minutos</p>	<p>El profesor explica la dinámica de la actividad, la cual consiste en formar equipos de 4 personas, cada persona tendrá un rol dentro del equipo, dos se encargaran de hacer las variaciones de los lados en la salida a campo, una persona tomara la información en una tabla y la última persona se encarga de medir los ángulos del rectángulo. Al finalizar la actividad se pedirá que se escriban las conclusiones en una cartulina para ser expuestas en otra parte de la clase.</p> <p>Posteriormente enuncia el problema.</p> <p><i>Don Fernando quiere hacer un galpón para gallinas, pero solo dispone de 36 metros de malla para encerrar un espacio rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el terreno para que con esa malla se limite la mayor área posible?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La mayoría de jóvenes están atentos a la explicación</li> <li>✓ Se destacan algunos jóvenes por no prestar atención a la actividad</li> <li>✓ Hay estudiantes que piden que se explique de nuevo, debido a que no comprenden la dinámica de la actividad</li> <li>✓ Los estudiantes se dispone a salir al patio de la Institución a realizar las diferentes mediciones</li> </ul>	

			
<p>Posibles errores: considerar los 36 m como el área del rectángulo; no realiza las operaciones correctamente.</p> <p>Posibles propuestas: tabular la información para poder observar las regularidades encontradas.</p>			
<p>Encontrar el rectángulo de área mayor cuyo perímetro es 36 m.</p> <p>El anterior problema se desarrollará tomando como referencia los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000).</p> <p><b>Modo Analítico Aritmético (AA).</b> El área del rectángulo de dimensiones <math>x</math>, y es:</p> $A = x * y \quad (1)$ <p>Mientras que su perímetro, viene dado por:</p> $P = 2x + 2y \quad (2)$ <p>Ahora expresamos el lado <math>y</math> en función del perímetro y el lado <math>x</math>; para luego reemplazarla en la ecuación del área (1)</p>		<p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ No son capaces de escribir la ecuación del área y perímetro en función de lo que varía y lo que se mantiene constante.</li> <li>❖ No poder expresar uno de los lados en función del perímetro y el otro lado.</li> <li>❖ No operar correctamente.</li> <li>❖ Derivar incorrectamente.</li> <li>❖ No comprender que representa <math>x = \frac{p}{4}</math> y <math>y = \frac{p}{4}</math></li> </ul>	

área (1), obtenemos:

$$x = \frac{P}{2} - y$$

$$A = \left(\frac{P}{2} - y\right)y$$

$$A = \frac{Py}{2} - y^2 \quad (4)$$

Derivando (4), tenemos:

$$A'(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy$$

$$A'(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy = 0$$

$$\left(\frac{P}{2} - 2y\right) = 0$$

$$y = \frac{P}{4}$$

Si calculamos la segunda derivada, obtenemos:

$$A''(y) = \left(\frac{P}{2} - 2y\right) dy = -2$$

$$A''(y) = -2$$

Como la segunda derivada da negativa, entonces el valor  $y = \frac{P}{4}$  es un máximo.

Por lo tanto el área del rectángulo de dimensiones  $x = \frac{P}{4}$  y  $y = \frac{P}{4}$  es mayor.

$$y = \frac{P}{2} - x$$

$$A = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$$

$$A = \frac{Px}{2} - x^2 \quad (3)$$

Derivando (3), tenemos:

$$A'(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx$$

$$A'(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx = 0$$

$$\left(\frac{P}{2} - 2x\right) = 0$$

$$x = \frac{P}{4}$$

Si calculamos la segunda derivada, obtenemos:

$$A''(x) = \left(\frac{P}{2} - 2x\right) dx = -2$$

$$A''(x) = -2$$

Como la segunda derivada da negativa, entonces el valor  $x = \frac{P}{4}$  es un máximo.

Ahora, si expresamos el lado  $x$  en función del perímetro y el lado  $y$ ; para luego reemplazarla en la ecuación del

	<p><b>Modo Sintético Geométrico (SG).</b>          Construir rectángulos haciendo variar las medidas de los lados, para analizar cada una de los datos y lograra sacar conclusiones acerca del área del rectángulo. Para realizar el análisis de los datos se registrarán las medidas y el área del rectángulo en una tabla.</p> <p><b>Modo Analítico Estructural (AE).</b>          Si analizamos de la ecuación del área <math>A = \frac{Px}{2} - x^2</math>, la <math>-x^2</math> podemos observar que es una parábola convexa porque abre hacia abajo, que tiene vértice (Siendo ese el punto Máximo de la función; lo que nos indica <i>que cuando los lados miden respectivamente X unidades, el área del rectángulo es Y unidades cuadradas</i>)</p>	<p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Hacer variar las dimensiones de los lados de los rectángulos, pero no dejar fijo el perímetro.</li> </ul> <p>Posibles errores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ No recordar que representa la función <math>-x^2</math></li> <li>❖ No identificar el área máxima como el punto máximo de la función cuadrática del área en función del perímetro.</li> </ul>	
<p>CONCLUSIÓN</p> <p>35 minutos</p>	<p>Se realizará una tabla en donde se tabulará la información obtenida en la elaboración de los rectángulos de área máxima, para ello se pregunta:          ¿Qué datos se deben registrar en la</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Se destaca la agilidad de algunos estudiantes para realizar cálculos que permitan encontrar nuevos rectángulos.</li> <li>✓ Los estudiantes identifican los datos que deben registrar la tabla.</li> </ul>	

tabla? ¿Se podrán formar otros rectángulos?, ¿Cuáles?, ¿podemos utilizar otro tipo de números?, ¿Cuáles?, ¿encontraremos otro rectángulo de mayor área?

Lado 1	Lado 2	Perímetro (metros)	Área (metros <sup>2</sup> )
15	3	36	45
12	6	36	72
10	8	36	80
9,8	8,2	36	80,36
9,5	8,5	36	80,75
9,4	8,6	36	80,84
9,2	8,8	36	80,96
9,1	8,9	36	80,99
9	9	36	81

- ✓ Algunos estudiantes comienzan a sugerir usar los números decimales para las dimensiones de los lados del rectángulo.
- ✓ Los estudiantes generalizan que entre más cerca sean las dimensiones de los lados del rectángulo su área es mayor.

Posibles errores: no operar correctamente los números decimales, no identificar el cuadrado como un rectángulo especial.

## **RAZONES PARA OPTAR POR ESTA METODOLOGIA**

Decidimos trabajar sobre la optimización de áreas con estudiantes de los grados octavo y noveno (13-15 años), a partir de un enfoque cognitivo que ocupa los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y el estudio de clases como un marco metodológico, con el objetivo de que los estudiantes “describan y representen situaciones de variación para determinar el rectángulo de mayor área si el perímetro es fijo”. Porque, a pesar de que el desarrollo del pensamiento variacional está priorizado en los lineamientos curriculares desde 1996, la optimización de áreas se enseña solamente en el grado once, como una aplicación de la derivada y mientras, en los otros grados la noción de área se trabaja únicamente como una cualidad medible en los polígonos.

La metodología pretende dar a entender que la optimización de áreas se puede obtener mediante otros métodos y no solamente a través de las técnicas que proporcionan la primera y la segunda derivada, sostenemos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto. Cuando hablamos de una comprensión profunda del concepto, pensamos en que los aprendientes puedan comprender la optimización del área en los modos: Sintético geométrico (como rectángulos de diferentes tamaños que se pueden descomponer, recomponer y aplicar en otras figuras, para estimar su tamaño), Analítico Aritmético (a través de las fórmulas que permiten calcular el área de los rectángulos, tablas de valores, gráficas cartesianas que expresan las relaciones entre las variables) y analítico estructural (a través de funciones, relaciones funcionales, derivadas de las funciones y lugares geométricos).

En la reunión de planificación de la clase con los integrantes del semillero y los profesores de la Institución Educativa María Auxiliadora, se hizo la presentación del tema y de la pregunta: ¿Cuál es el rectángulo con mayor área que se puede construir, si su perímetro es de 36 centímetros?, para relacionar el problema con el contexto de los estudiantes, se redactó la siguiente situación: “Don Fernando quiere hacer un galpón para gallinas, pero solo dispone de 36 metros de

malla para encerrar un espacio rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el terreno para encerrar la mayor área posible con esa malla?”. Se acordó la metodología y se diseñó el guion de la clase.

### **CRITERIOS Y ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN**

Para la evaluación del éxito de la clase se tendrán en cuenta aspectos básicos en el desarrollo de cada una de las etapas de la clase como lo son: Orden, comportamiento, participación, análisis de las respuesta de los compañeros, respuestas con una buena interpretación del concepto, intervenciones frente al tema, desarrollo del problema propuesto, atención en los diferentes procesos, medición de los ángulos de manera correcta, comprensión del concepto de área mayor, identifica regularidades en los rectángulos formados, participación y motivación en la clase, respuestas concretas y acertadas, análisis de los datos de la tabla, elaboración de conjeturas acerca del problema, manejo de los números decimales.

A demás de estos criterios, también se empleará un análisis posterior de la clase y de su ejecución, con el fin de identificar aspectos que se consideran deben mejorar o corregirse para que el éxito de la clase sea total y poder alcanzar nuestro propósito inicial.

### **RAZONES DE LOS CRITERIOS Y ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN**

El plan de clase propuesto para abordar el concepto de optimización de área, está conformado por actividades que nos permiten identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes con conceptos básicos para el grado Noveno en el área de matemáticas, es pr esto que la observación activa del profesor permitirá identificar a los estudiantes que poseen un mejor y más desarrollado conocimiento. En cierto modo, las actividades también permiten reforzar los conocimientos que se

han olvidado y aprender los nuevos conceptos que la clase nos otorga. Al realizar el análisis de la gestión de la clase y el análisis posterior, podemos darnos cuenta que en muchas ocasiones como profesores cometemos errores, los cuales se muestran como errores comunes en los estudiantes.

## Capítulo VI

### Referencias Bibliográficas

- Duval, R. (1999). *Semiosis Y Pensamiento Humano: Registros Semióticos Y Aprendizajes Intelectuales*.
- Anna Sierpinska. (2000). On Some Aspects Of Students' Thinking In Linear Algebra. En J. Luc Dorier, *On The Teaching Of Linear Algebra* (Págs. 209-246).
- Arcavi, Lorca, & Isoda. (2007). *El Estudio De Clases Japonés En Matemáticas : Su Importancia Para El Mejoramiento De Los Aprendizajes En El Escenario Global*. Valparaíso.
- Gómez, P. (2002). ANÁLISIS DIDÁCTICO Y DISEÑO CURRICULAR EN MATEMÁTICAS.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo Del Conocimiento Didáctico En Un Plan De Formación Inicial De Profesores De Matemáticas De Secundaria*.
- Leithold, L. (1998). Valores Máximos Y Mínimos De Funciones. En *El Cálculo* (Séptima Ed., Págs. 198-206).
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*.
- MEN. (2006). Estándares Básicos De Competencias .
- MEN. (2013). *Secuencias Didácticas En Matemáticas Para Educación Básica Secundaria*.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos De Aprendizaje* (Panamericana Formas E Impresos S.A. Ed., Vol. II).
- Parraguez. (2012). *Teoría Los Modos De Pensamiento*. Valparaíso, Chile.
- Pinto, & Parraguez. (2015). El Concepto De Derivada Desde La Teoría Los Modos De Pensamiento, Sustentada En La Epistemología De Cauchy.
- Stewart, J. (2008). Aplicaciones De La Derivación. En *Cálculo De Una Variable* (Sexta ed., págs. 271-278).

