Neiva, Julio 29 del 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Cesar Augusto Naranjo Castro, con C.C. No. 1.075.262.314, y Jhon Alberto Bata Santa, con C.C. No. 1.075.258.888 autores del trabajo de grado titulado Algunas Paradojas del Infinito y el Conjunto Ternario de Cantor, presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas; autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

AUTORES/ESTUDIANTES:

Firmas: Jhon Alberto Bata Santa

Cesar Augusto Naranjo Castro

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Algunas Paradojas del Infinito y el Conjunto Ternario de Cantor.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Naranjo Castro	Cesar Augusto

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Bata Santa	Jhon Alberto

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos	Hernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciados en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019 **NÚMERO DE PÁGINAS: 39**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones _x_ Tablas o Cuadros__

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Conjunto Infinito	infinite set	**6.** Cardinal	Cardinal

2. Expansión	Expansion	7. Equipotencia	Equipotence
3. Biyeccion	Bijection	8. Medida cero	Zero Measure
4. Trisección	trisection	9. Paradojas	Paradoxes
5. Biunívoca	Biunivoca	10. Correspondencia	Correspondence

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Problema: Que lleva al matemático George Cantor al estudio de los conjuntos infinitos, especialmente en aquellos conjuntos de medida nula que servían como una solución al problema de la unicidad de la representación de una suma infinita de senos y cosenos o exactamente una serie de Fourier.

Método de Investigación: Estudiando la naturaleza y comportamientos de conjuntos infinitos, se llega al descubrimiento de un curioso conjunto de media nula.

Resultados: El Conjunto Ternario de Cantor es una respuesta al problema de unicidad de la representación de una función en una suma infinita de senos y cosenos

Conclusiones:

- Se pueden indagar los antecedentes históricos respecto a la implicación de las paradojas en las matemáticas.
- Podemos demostrar la existencia de distintos ordenes de infinitud
- Se puede construir conjunto Ternaria de Cantor de diferentes maneras
- Los puntos que pertenecen al Conjunto Ternario en su expansión ternaria no aparece el digito 1.
- El Conjunto Ternario de Cantor tiene tantos elementos como el conjunto de números reales
- No es posible hacer una demostración válida para la Hipótesis del continuo

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Problem: That leads the mathematician George Cantor to the study of infinite sets, especially in those sets of null measurements that served as a solution to the problem of the uniqueness of the representation of an infinite sum of sines and cosines or exactly a Fourier series.

Research Method: Studying the nature and behaviors of infinite sets, we arrive at the discovery of a curious set of zero mean.

Results: The Cantor Ternary Set is a response to the uniqueness problem of the representation of a function in an infinite sum of sines and cosines

Conclusions:

- The historical background can be investigated regarding the implication of paradoxes in mathematics.

- We can demonstrate the existence of different orders of infinity

- You can build Ternaria de Cantor set in different ways

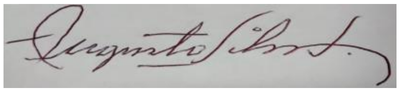
- The points that belong to the Ternary Set in its ternary expansion do not appear the digit 1.

- The Cantor Ternary Set has as many elements as the set of real numbers

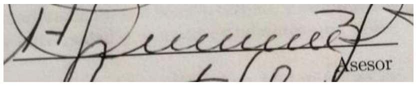
- It is not possible to make a valid demonstration for the Continuum Hypothesis

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: Augusto Silva Silva

Firma: 

Nombre Asesor: Hernando Gutiérrez Hoyos

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunas Paradojas del Infinito y el Conjunto Ternario de Cantor

Cesar Augusto Naranjo Castro
Jhon Alberto Bata Santa

Neiva, Huila
2019

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunas Paradojas del Infinito y el Conjunto Ternario de Cantor

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Cesar Augusto Naranjo Castro
2011199327
Jhon Alberto Bata Santa
2011198645

Asesor:
Profesor : Hernando Gutiérrez Hoyos

Neiva, Huila
2019

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Mayo de 2019.

AGRADECIMIENTOS

Realmente agradecer a todas las personas que contribuyeron de alguna manera a la consolidación de este Trabajo de Grado y carrera profesional. Es imposible nombrarlos a todos, pero reconocemos humilde y cariñosamente este gran apoyo que nos brindaron.

Vemos la etapa final de nuestra carrera profesional y pensamos que un pilar fundamental para su desarrollo fue la presencia permanente de nuestras familias, que nos brindaron ese calor fraternal día a día, que nos ayudaron a luchar incansablemente para llegar a este momento y a Dios agradecemos por darnos la vida y salud constante para poder hacerlo.

Encarecidamente mostramos nuestros mayores aprecios al profesor HERNANDO GUTIERREZ HOYOS, quien colmado de paciencia y carisma nos guió paso a paso para la elaboración de este trabajo, nuestros agradecimientos para el no solo están orientados por este logro, si no también por la calidad de maestro y ser humano que es, verdaderamente nos inspira respeto y admiración en cada una de sus labores desempeñadas en esta universidad y con sus estudiantes que tanto le debemos.

Nos sentimos muy orgullosos por pertenecer al programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana que durante nuestra carrera nos brindó una buena formación profesional para ejercer en un mañana nuestras labores como futuros docentes y contribuir a la construcción de sociedad.

Índice general

Introducción

El estudio de las matemáticas se hace interesante cuando se desafía la intuición, como lo es el análisis profundo del infinito que algunas veces pareciera que solo se basara en cuestiones de fé, puesto que para entender las implicaciones del mismo se hace necesario el uso excesivo de la imaginación, pero que una vez comprendido, entendemos la grandeza de la mente humana y lo lejos que ésta puede llegar. Esto nos motiva a la realización de Trabajo de Grado.

En el presente trabajo ”Algunas Paradojas del Infinito y el Conjunto Ternario de Cantor” se estudiarán algunos aspectos que se relacionan con el comportamiento del infinito. La mayoría de aportes aquí evidenciados fueron hechos por el matemático ruso George Cantor del cual conoceremos su vida y algunos episodios que hicieron de ella algo enigmático.

Nos interesa indagar más acerca del concepto de infinito aplicado a conjuntos numéricos que habitualmente utilizamos; para ello demostraremos la existencia de conjuntos infinitamente numerables y otros infinitamente no numerables. Sin embargo la demostración más representativa es la hecha por Cantor sobre la numerabilidad del conjunto de números racionales y su equipotencia con el conjunto de números naturales, ya que el ingenio y la sencillez para hacerlo vislumbraron el mundo matemático de la epoca.

Se presentan unas nociones preliminares las cuales creemos son herramientas necesarias para la buena comprensión del Conjunto Ternario de Cantor, el cual se construye en el intervalo cerrado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, elaborando la trisección en dicho intervalo y a su vez eliminando su tercio medio. Hacemos uso de una fórmula de recurrencia que nos permita identificar los intervalos que pertenecen a este conjunto y otra fórmula que nos permita reconocer la forma de cada uno de estos intervalos cerrados con los cuales nos hemos quedado.

Veremos que para los puntos que finalmente pertenecen al Conjunto Cantoriano en su expansion ternaria solo figuran los dígitos 0 y 2. Igualmente se demuestra que el Conjunto Ternario de Cantor es de medida nula a pesar que en el proceso de construcción eliminábamos el tercio medio, la sumatoria de todos los segmentos eliminados es igual a la unidad. Esto lo demostramos usando una serie geométrica que resulta de la suma total de las longitudes de los intervalos abiertos que han sido eliminados en la construcción del Conjunto Ternario de Cantor, el cual seguiremos notando por la letra C. También se demuestra la no numerabilidad del Conjunto C y por qué este es un conjunto compacto.

Uno de los aportes más controversiales hechos por George Cantor gira en torno a la formulación de la Hipótesis del Continuo, por tal motivo hacemos el enunciado de la misma y algunos datos de interés que giran en torno a ella y las conclusiones que hoy en día se conocen.

Desde la antiguedad el hombre se ha interesado por comprender el concepto de infinito y datos de sus primeros análisis se encuentran, por ejemplo en la palabra de origen griego Ouroboros

que se le atribuye a una serpiente mordiéndose su propia cola y esta era la representación de algo que no tiene comienzo ni fin.
El conjunto ternario ideado por George Cantor a finales del siglo XIX fue la solución de un problema matemático anteriormente planteado, que preguntaba por la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$, que fuera cerrado y acotado en donde sus puntos son de acumulación y denso en sí mismo. Esta sublime solución planteada por George Cantor a través del Conjunto Ternario serviría de herramienta para la solución de probemas avanzados en las matemáticas.

Objetivos

Objetivos generales

• Identificar los hallazgos de George Cantor en los campos del análisis y la Topología en relación con sus trabajos de fundamentación de las matemáticas.
• Estudiar los primeros aportes hechos por George Cantor a las matemáticas especialmente en los campos de Teoría de Números, Teoría de Fractales y Topología.
• Reconocer la importancia del concepto de infinito para el estudio de las matemáticas modernas.
• Justificar por que los puntos que pertenecen al Conjunto Ternario de Cantor en su expansión ternaria no aparece el digito 1.

Objetivos específicos

• Conocer algunos aspectos biograficos de la vida de George Cantor.
• Estudiar el concepto de infinito.
• Estudiar algúnas paradojas del infinito.
• Presentar y construir conjuntos infinitos con distinto orden de magnitud.
• Hacer la construcción del Conjunto Ternario de Cantor.
• Presentar algunos aportes relacionados con la Hipótesis del Continuo formulada por George Cantor.

Justificación

Cuando hacemos uso de las matemáticas, continuamente llegamos a una etapa en la cual nos preguntamos por pequeños detalles que componen ciertas teorías que estudiamos, pero cuando entramos en el análisis profundo de nuestro interrogante se desarrolla un caos mental que nos aleja más de la respuesta y nos acerca más a las dudas. Nuestro interes se centra en estudiar la incidiencia que tuvo el concepto de infinito en las matemáticas a través de su historia y es por eso que haremos un análisis de los conjuntos de números que usualmente conocemos y veremos los detalles que estos tienen relacionados con el infinito.

La base de la teoría de fractales fue ideada por George Cantor; esos monstruos matemáticos que se generaban en su mente, creaban un caos entre diferentes académicos de la época, por lo tanto debemos conocer el primer fractal conocido y que gracias a este se desarrolló toda una teoría que revolucionó por completo nuestro mundo. Nos interesa conocer dichos aportes que tanto impacto crearon en aquella sociedad cientifica y reconocer la grandeza de este genio que moldeaba las matemáticas a su modo en un mundo mental que solo construyo para ellas.

El estudio de algunos aportes de George Cantor a las matemáticas puede resultar anecdótico y esto gracias al misticismo que rodea la vida de este personaje; son precisamente estos episodios los que hacen despertar el interés hacia el estudio intenso de las matemáticas, cuando conocemos de cerca la vida de un genio y descubrimos la magnificiencia de sus estudios.

Cuando se estudian a profundidad conceptos matemáticos de alta rigurosidad, aparecen ciertos interrogantes que tal vez terminen cuestionando algunos puntos de alguna teoría. Del mismo modo es visto por primera ves el conteo de objetos de un conjunto infinito, pues nuestra razón nos advierte de antemano la imposibilidad de enumerar o enlistar los elementos de un conjunto que sabemos es infinito, pero la intuición de un hombre que vaya más halla de lo que comunmente otros ven y que en esos campos de visión matemática encuentre las respuestas acertadas y con su respectiva justificación logíca merece ser compartida y que estos datos sean los inicios de un viaje por el infinito que abre las puertas al estudio de las matemáticas abstractas y modernas.

Capítulo 1

Vida de George Cantor

Primeros años

Cuando la mirada y el pensamiento se detienen en el análisis minucioso de algún contenido matemático, seguramente se descubrirán cosas que resultan interesantes. Si dicho análisis se centra en enigmas de la matemática, como lo es lo infinito, se puede dejar volar la imaginación y descubrir cosas intangibles que serán más sorprendentes. Esto es, precisamente, lo que Georg Cantor hizo desde su juventud.

Las cosas que descubrió incidieron notablemente en el desarrollo del conocimiento matemático a partir de la última decada del siglo XIX incluso, hasta en su propia vida. Padeció los rigores de la inestabilidad emocional alterada por tan extraños hallazgos.

Nació el 6 de enero de 1845 en la gran San Petesburgo-Rusia, hijo del comerciante George Waldemar Cantor, figura paterna a la cual le ligaba una admiración infinita, su madre fue la señora Marie Bohm, amante de las expresiones artísticas.

Cantor desde muy temprana edad comenzó a dar reflejos de sus vislumbraciones matemáticas, tanto así que a la edad de 15 años ingresa al prestigioso instituto alemán Wiesbaden, posteriormente emprende sus estudios universitarios en los cuales tiene como maestros entre otros a Leopold Kronocker, Karl Weierstrass, Ernest Kummer. Durante esta estancia elabora sus estudios sobre Series de Fourier lo que terminaría en la creación de su teoría de números irracionales. Sus estudios preliminares lo llevaron a la creación de una novedosa y revolucionaria teoría de conjuntos, la cual le implicaría la gloria póstuma en la Historia de las Matemática, pues durante su vida no recibió los reconocimientos debidos a tan grandioso logro. Como toda teoría revolucionaria, esta tenía sus detractores que eran influyentes en el mundo cientifico de la época; en este círculo se incluye uno de sus maestros Leopold Kronocker quien lo califico como un creador de locuras matemáticas. Pero también fue aclamado por grandes genios como David Hilbert, quien más tarde en el año 1900 postularía los 23 problemas de mayor influencia en la matemática del siglo XX y el que encabezó esta lista fue la Hipótesis del Continuo formulada por Cantor.

Hilbert pregonaba que Cantor había construído un paraíso para los matemáticos y que nadie los echaría jamás de allí.

Cantor y la Fé

Entre los pilares fundamentales de la vida de George Cantor, se encontraba la fé que mantenía hacia su religión, esa Judío-Protestante que le fue heredada por su padre quien fallece en el año 1863 por causa de una enfermedad respiratoria y en honor a él Cantor seguiría fehacientemente profesando esta religión.
El poder de analizar y concluir premisas acerca del infinito en esa época era bastante delicado, pues el manejo de éste en el ámbito religioso y matemático solo era concebido por el mismo Dios y nadié más, esto atentaba contra los mismos principios de fé que habian sido asumidos por Cantor, quien decide buscar un argumento religioso que conciliara sus teorías sobre las matemáticas y la religión. Este argumento lo encontraría en San Agustin que argumentaba en sus manifiestos que Dios había creado los números y los manejaba a su modo, tampoco tenía limitaciones para contar, al mismo tiempo nos había creado a su imágen y semejanza por tanto éramos capaces de manipular también los números como él lo haria.
Este argumento era suficiente para que George Cantor se conciliara con su fé y pudiera manipular el infinito a su antojo sin inpedimentos o contradicciones con su fé, pero dicha conciliación trascendería más de lo usual manifestándolo en algúnas cartas dirigidas a su íntimo círculo de amigos reconociendo que Dios mismo le susurraba al oído las preguntas y las respuestas de las nociones matemáticas y las hacía ver como algo natural. Este tipo de comentarios hechos por el mismo George Cantor serían la fuente de malos comentarios acerca de su dudoso estado mental, lo cual se configuraba con los planteamientos abstractos de las matemáticas calificados de absurdos por algunos de sus detractores, pero que hoy sabemos la importancia de dichos planteamientos para el surgir de unas nuevas matemáticas.

El infinito hasta Cantor

¿Quién sabe en qué época exactamente el hombre percibió la infinitud en su entorno? Tal vez en una mirada al firmamento la descubrió o sentado en la playa concluyó que era imposible contar los granos de arena totales de ella o más fuerte aun, de todo el universo.
Este podría haber sido el origen del temor hacia el infinito, este hecho se refleja desde el siglo IV antes de Cristo mediante manifiestos aristotélicos que pregonaban: El infinito no es real, no está ahí afuera esperándonos, solo es concebible en potencia. Cuando pensamos en un número por grande que este sea, sabemos de antemano que siempre habrá otro mayor y así sucesivamente, lo que hace imposible alcanzar el infinito, quedando este solo en una aspiración a la cual nunca podemos llegar y esto infundaba temor en la percepción y los análisis profundos del infinito.
Podemos resaltar las antiguas conversaciones de los griegos en el siglo V y VI antes de Cristo, una de ellas atribuida a Zenón de Elea, formulando la paradoja de Aquiles y la Tortuga donde finalmente demostraba en la realidad la divisibilidad continua del espacio y por lo tanto éste era infinito. Zenón mencionaba que el espacio estaba compuesto de puntos y estos a su vez eran infinitos, así en el desarrollo de su paradoja cuando la tortuga se encuentra en cierto punto más adelante que Aquiles, al moverse la tortuga a un punto posterior, Aquiles ocupara el antiguo lugar de la Tortuga y esto pasaría siempre. Pero es evidente que para muchos en esa época esto era una locura, pues una tortuga no podría correr más rápido que Aquiles y tal vez a partir

de estas conjeturas y formulaciones se fue configurando un miedo al infinito que dejaba serias dudas en la teoría matemática y necesitaba ser solucionada.
Se comenzaba a estudiar el infinito de dos maneras: una desde lo infinitamente grande y otra desde lo infinitamente pequeño; esta última evidenciada en la práctica de la Teoría Atomista uno de cuyos principales precursores era Democrito. Estos defendían la idea de que la materia está formada por átomos tan eternos como invisibles para la percepción de nuestros sentidos. Más tarde en Grecia entre los siglo VI y VII serían los epicúreos quienes rescatarían nuevamente estas ideas.
Con la llegada del cristianismo los movimientos teológicos no tardaron en construir una relación directa entre Dios y el infinito, este hecho se ve reflejado a partir del siglo I después de Cristo con San Agustin quien definía el infinito a través de un ser supremo que tenía un conocimiento inagotable, decía que sería miserable de nuestra parte si quiera pensar que Dios pudiera tener límites en su sabiduría e inclusive limitaciones para poder contar, mientras tanto los hindúes abordaban el análisis del inifinito matemático con la inclusión del elemento cero en sus sistemas numéricos, ese elemento que se le atribuía a la nada, al vacío y que tanto pánico creaba entre los Griegos.
El inifinto empezaba a ver la luz nuevamente en el año 1655 gracias al matemático ingles Jhon Wallis quien hace uso del símbolo ∞ (Infinito) o mejor la llamada Lemniscata por primera vez, pero el mejor tratamiento intelectual no tardaría en llegar gracias a la genialidad del Ruso George Cantor, quien desafía los límites de la intuición y abre la puerta al estudio de los campos abstractos y analíticos que fundamentan las matemáticas.

La Teoría Conjuntista de Cantor

Cuando George Cantor crea la Teoría de Conjuntos y la expone como su tesis doctoral en Diciembre del año 1873, en ella se hallaba el fuerte concepto de numerabilidad de conjuntos infinitos y sus respectivos cardinales. Llamaría conjuntos numerables a todos aquellos conjuntos equipotentes con el de los números Naturales y su cardinal seria representado por $\aleph_0$.
Se presume que Cantor llegó a la construcción de la Teoriá de Conjuntos, mediante sus estudios realizados en la convergencia de algúnas series de Fourier, teoría que fué ratificada por aliados de George Cantor, como Richard Dedekin, con quien sostenía una comunicación permanente, igualmente con Frege quien se interesa por elaborar una correcta formalización del programa de Teoria de Conjuntos y con esto crea el Principió de la Buena Ordenación. No menos orgulloso se hallaba David Hilbert, quien jugaba un papel importante en esta bella creación Cantoriana, muestra de ello, lo manifiesta en las siguientes palabras dirigidas a Cantor, El fruto más admirable de una mente matemática y uno de los más altos logros de los procesos intelectuales del hombre. Tal vez todo este derroche de orgullo en Hilbert, no solo lo generaba el logro de Cantor, también vio en la Teoría de Conjuntos reflejada la perfecta interpretación de su recién creado programa de formalización de las matemáticas, que acababa de tener éxito en el campo de la Geometría Euclidiana, verdaderamente las matemáticas pasaban por su momento más sublime y era precisamente Cantor quien daba impulso a tan sorprendentes descubrumientos.
En la teoria de conjuntos, Cantor advertía la existencia de distintos tamaños de infinitud, pues el conjunto de los números Reales no era equipotente con el de números Naturales, asi que Cantor le asignaría el cardinal de $\aleph_1$ (Aleph sub uno) al conjunto de números Reales ó como Cantor lo llamaba tradicionalmente, el conjunto de números Reales tiene la potencia del conti-

nuo númerico, haciendo referencia a la recta real.
Cuando George Cantor demuestra la existencia de distintos tamaños de infinitud en los conjuntos númericos que usualmente utilizamos, empieza a incursionar en el campo de la matemática abstracta, que se fundamenta en la intuición y que nos lleva a tomar mentalmente aquellas cosas que son intangibles en la realidad. Parece que las preguntas en matemáticas valen más que las respuestas, esas preguntas monstruosas de la lógica que primaron desde las antiguas tertulias de los filosofos griegos hasta las hoy innovadoras preguntas del hombre matemático de la actualidad sobre el comportamiento de los agujeros de gusano, que dejan en carta abierta la posible manera de viajar en el espacio tiempo, como lo revela el transfondo de la Teoría de la Relatividad formulada por Einstein.

Fragmentación de Cantor

No podemos hablar de George Cantor y dejar de lado el maravilloso aporte hecho al campo Geométrico como lo es la Teoría de Fractales, que salía a flote por primera ves el 20 de junio de 1877 en una carta que el mismo Cantor dirigió a Richard Dedekin, en la cual cuestionaba ciertos fundamentos de la Geometría y en particular las nociones que la sostenían. A partir de ésto, decia haber desarrollado una nueva Geometría de alta complejidad y que se reflejaba en la naturaleza que permanentemente nos rodea.
George Cantor aludía que la fragmentación infinita de un segmento Geométrico generaraba un conjunto fractal igualmente infinito y como ejemplo trivial, crea el conjunto ternario, que se obtiene a traves de infinitas trisecciones hechas en el intervalo unitario $[0, 1]$ y en cada una eliminamos el tercio medio .
Sin duda algúna la intución de George Cantor revelaba el lado más abstracto de las matemáticas, ese que desafiaba las leyes de la lógica y ponía a tambalear los cimientos en los cuales se sotenía esta ciencia en su tiempo. Creó monstruos matemáticos que parecían sacados de la ficción y que generaron pánico, pero sus aportes fueron indispensables para la compresión mas profunda de las matemáticas y el mundo que nos rodea.
Realmente la incomprensión en la cual cayo Cantor, le costaba cualquier cantidad de críticas, pero el creía en sus teorías y ante tanta sátira respondia :La escencia de las matemaáticas reside precisamente en su libertad.
Otros matemáticos también desafiaron los axiomas planteados por Euclides como Janos Bolyai, Nikolai Lobachevsky y Bernard Riemman, quienes crearon extrañas geometrías que moldeaban a sus antojos. Hoy sabemos que en la ausencia de dichas geometrías la existencia la Teoría de la Relatividad sería nula.
Farkas Bolyai padre de Janos Bolyai asistio a algunos de sus cursos matemáticos en la universidad de Gottingen en Alemania junto a Frederich Gauss, desde allí entablaron una amistad muy común, independiente de este hecho Farkas también custionaba la axiomatica de la Geometría Euclidiana pensando en la existencia de nuevas Geometrías, pero pasaría casi toda su vida tratando de fundamentar sus conjeturas, pero su hijo Janos Bolyai quien también se intereso por las conjeturas planteadas por Farkas tuvo mejor suerte y en el año 1823 haciendo parte del cuerpo de marinos de la gloriosa armada Alemana animoso dirige una carta a su padre en la cual le anunciaba la existencia de nuevas geometrías del hiperespacio. Janos descubria un mundo geométrico nuevo y extraño los cuales no satisfacen la axiomatica Euclidiana y sin embargo no

presentan contradicciones o inconsistencia alguna en su planteamiento. Farkas Bolyai sumergido en la dicha decide que este gran descubrimiento merece ver la luz y que mejor que fuese impulsado por un grande de las matematicas y Farkas provechoso de la simple amistad entablada en su formación universitaria con Gauss, decide informarle de los descubrimientos de su hijo y Gauss en correspondencia personal le muestra los elogios y alabanzas para su hijo, Farkas ve gracias a su hijo la gloria que siempre esperaba, pero la sorpresa la daría Gauss en una intervención publica en la cual calificaba como una locura monstruosa las geometrías planteadas por Janos Bolyai.

Aporte de George Cantor

Se sabe que desde el siglo XVIII Gauss, por miedo a los movimientos newtonianos de la epoca, desechó sus descubrimientos en el campo de la geométria hiperbólica; precisamente esos descubrimientos eran proclamados antieuclidianos ya que atentaban contra el quinto postulado de Euclides sobre rectas paralelas. Luego en el siglo XIX Lobachevsky-Bolyai y Riemman arremeten de frente en contra del quinto postulado creando asi dos nuevas geométrias antieuclideanas. Por ultimo Georg Cantor el 20 de junio de 1877 en una carta dirigida a su intimo amigo Richard Dedekin comenta sobre sus apuntes de dimensión y en ella demostraba la existencia de funciones biyectivas entre una recta unitaria , un cuadrado , un cubo y un objeto n-dimensional, esto exigia un estudio más profundo del concepto de dimensión .
En la práctica George Cantor demuestra que es posible establecer una función biyectiva entre una recta unitaria, un cuadrado unitario, un cubo unitario y cualquier obtejo n-dimensional unitario. Claramente era dificil aceptar esta idea, pero las demostraciones hechas por Cantor eran infalibles y necesitaban de un pensamiento abstracto para ser comprendidas.

Enfermedad y desenlace

Desde la muerte de su padre Cantor comienza a sostener episodios depresivos, los cuales los manifiesta en el seno de su hogar establecido con su esposa y dos hijos, colapsos nerviosos y alteraciones nerviosas, son sus primeros síntomas. Esto también lo alejaba de la sociedad y lo incluía en el espelusnante mundo del infinito , que le creaba mas preguntas que respuestas .Más tarde otro hecho que derrumbaría la poca calma que se hallaba en Cantor fue la sorpresiva muerte de su hijo menor en quien más veía su propio reflejo ,esto lo sumiría en hondas crisis mentales , que lo llevarían a recluirse en unidades mentales en Alemania, mientras en algunos periodos se le prohibia hasta el contacto con las matematicas, pues generaban trastornos mentales en Cantor, así hasta el 6 de Diciembre del año 1918 cuando fallece , producto de una de sus crisis nerviosas.
Hoy que la sociedad cientifica reconoce la genialidad de cada uno de los trabajos hechos por George Cantor es cruel saber el fin que tuvo la vida de este genio en medio del abandono, la locura y la tristeza por que la grandeza de sus obras ameritaban el total prestigio y gloria para este autor que finalmente fue victima de su propio ingenio, pero que su sacrificio no fue vano, por que abriria las puertas de las matemáticas abstractas a la cual los hombres habian temido desde un principio.

Capítulo 2

Nociones preliminares

Se relacionan a continuación unas nociones preliminares necesarias para la comprension del curioso Conjunto Ternario de Cantor.

2.0.1. Funciones

Definición de función.
Sean M y N conjuntos no vacíos de números reales, llamamos función de M en N a toda correspondencia mediante la cual a cada elemento de M se le asigna un único elemento de N.
Nota :Las correspondencias entre conjuntos suelen representarse con las letras f,g,h,...etc.
Por ejemplo si h es una correspondencia mediante la cual, a cada $x \in \mathbb{R}$ le asociamos x^3, h es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la cual notamos por :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = x^3$$

Dominio de una función
Sea $g(x) = M \Rightarrow N$ una función , llamamos dominio a todo el conjunto de valores para los cuales esta definida, esto es :

$$D_g = \{m \in M / \exists n \in N; g(m) = n\}$$

Ejemplo 1, sabemos que el área de un circulo esta definido por $A = \pi r^2$; el dominio serán todos los posibles valores reales que pueda tomar el radio r.
Ejemplo 2,Calcular el dominio de la siguiente función racional $f(z) = \frac{3z^2-5}{z+6}$
Solución :Tenemos que garantizar que la función $f(z)$ no tome el valor de cero en su denominador y resulte en una indeterminación ,luego z puede tomar todos los valores reales exepto el -6, esto es $D_f = z \in \mathbb{R} - \{-6\}$.
Codominio de una función
El conjunto final de una función o codominio son todos los posibles valores que puede tomar la función $f(x)$ mediante la variación de x.
Ejemplo : Considerando la función cuadrática $f(x) = x^2$ se tiene que su codominio son todo el conjunto de $\mathbb{R}^+$, puesto que todo número real que se le asigne a la función su cuadrado resultante tendrá que ser positivo.

Rango de una función
Llamamos rango de una función g al conjunto de posbiles valores que pueda tomar $g(x)$.
Ejemplo: Calcular el rango de la función $g(x) = \frac{3x+4}{x-2}$
Solución:

$$\begin{gathered} g(x) = \tfrac{3x+4}{x-2} \Leftrightarrow y = \tfrac{3x+4}{x-2} \\ \Leftrightarrow y(x-2) = 3x+4 \Leftrightarrow yx - 2y = 3x+4 \\ \Leftrightarrow yx - 3x = 4+2y \Leftrightarrow x(y-3) = 4+2y \\ \Leftrightarrow x(y-3) = 4+2y \Leftrightarrow x = \tfrac{4+2y}{y-3} \end{gathered}$$

Luego la función $g^{-1}(x) = \frac{4+2y}{y-3}$ en consecuencia el rango de la función g son todos los reales exepto el 3 , esto es $R_g = \mathbb{R} - \{3\}$

Defnción de composición de funciones.
Sean h y j funciones de valor y variable real, definimos $h \circ j$ (que se lee : h compuesto j) por :

$$(h \circ j)(x) = h(j(x))$$

Y decimos que $h \circ j$ es la función compuesta de la función h con la función j

Ejemplo

Si h y f son funciones dadas por $h(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = x$, encontremos las siguientes composiciones.
$i)(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x) = x^2 + 1$
$ii)(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1$
$iii)(h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$
$iv)(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$
Aclaramos que la composición de funciones ,también es una función por tanto estas poseen las mismas caracteristicas de las funciones .

La composición de funciones es asociativa

Demostrar que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
Demostración :
Se tiene que $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
Por otro lado $(h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$
Se concluye finalmente que la composicion de funciones es asociativa

2.0.2. Relaciones

Sean M y N conjuntos, un subconjunto R del producto cartesiano $M \times N$ lo llamamos relación de M en N.
Ejemplo 1. Sean $M = \{x, y, z\}$ y $N = \{2, 4, 6\}$, una relación entre estos dos conjuntos podria ser $R_1 = \{(x, 2), (y, 4), (z, 6)\}$.
Ejemplo 2. La función cuadratica $f(x) = x^2$ tal que $x \in \mathbb{Z}$, también es una relación que a cada número entero le asigna su cuadrado correspondiente, las parejas ordenadas que hacen parte de esta relación son de la forma (x, x^2)
Ejemplo 3. Sean $J = \{1, 7, 9\}$ y $K = \{2, 4, 8\}$, se tiene que :
$R_1 = \{(2, 1), (4, 7), (8, 9)\}$, es una relación de K en J .
$R_2 = \{(x, y)/x \in J \wedge y \in K \wedge y < x\} = \{(7, 2), (7, 4), (9, 2), (9, 4), (9, 8)\}$, también es una relación.
$R_3 = \{(7, 2), (9, 8)\}$, es una relación de J en K.

Tipos de relaciones.
• Reflexiva
Decimos que una relación ξ definida en un conjunto A, es reflexiva cuando para todo $a \in A$ se tiene que $a\xi a$.
• Simétrica
Una relación ξ definida en un conjunto A, es simétrica cuando el escoger $(a, b) \in \xi$, con $a, b \in A$, tambien encontremos $(b, a) \in \xi$. Esto es, $\forall a, b \in A/a\xi b \Rightarrow b\xi a$.
• Transitiva
La relación ξ definida en un conjunto A, es transitiva cuando al escoger la terna de elementos a, b, c que pertenecen al conjunto A, se tiene que si $a\xi b$ y $b\xi c$ entonces $a\xi c$. Formalmente lo notamos asi, $\forall a, b, c \in A/a\xi b \wedge b\xi c \Rightarrow a\xi c$.
Nota : Cuando una relación definida en un conjunto X es reflexiva, simétrica y transitiva, diremos que esta es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Definición: Sea " $\cong$ " la relación de equipotencia definida en el conjunto U , el cual es una colección de conjuntos distintos de vacio , y P un conjunto de U ; llamamos clase de equivalencia de P (o asociada a P) a la colección formada por los conjuntos de U que se relacionan con P mediante la relación $\cong$. La clase de equivalencia de P se nota por :

$$[P]$$

Como toda relación de equivalencia induce un partición en el conjunto donde se define; la relación $\cong$ determina una partición del conjunto U . Los conjuntos de la partición son , precisamente las clases de equivalencia.
En el caso de la partición determinada por la relación $\cong$, las clases de equivalencia asociadas a esta partición reciben el nombre de cardinales .

Ejemplo

La clase de equivalencia que mediante la partición inducida por la relación $\cong$ se asocia al conjunto de números naturales recibe el nombre de $Aleph\ Sub - cero$ y representa por:

$$\aleph_0$$

Consideremos, por ejemplo, la relación definida en $\mathbb{Z}$ (conjunto de números enteros) por la condición "ser congruente módulo 5"; $(m \equiv n(mod5), \forall m, n \in \mathbb{Z})$
Ya se ha demostrado que la relación $\equiv$ (congruencia modular) es de equivalencia; en consecuencia, se puede hablar de las clases de equivalencia determinadas por la relación. Asi , si $n = 1$ la clase de equivalencia de 1 ([1]) corresponde a :

$$[1] = \{m \in \mathbb{Z}/m \equiv 1(mod5)\}$$
$$= \{m \in \mathbb{Z} : 5/m - 1\} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, 16, ...\}$$

Congruencia modulo n

Definición : sean $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ si $n \mid (m - p)$, se dice que:

$$m \equiv p(modn)$$

Probemos que la congruencia módulo n es una relación de equivalencia en el conjunto de números enteros.
En efecto :
$i)$ Reflexiva: Sea $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n/m - m = 0 \Longleftrightarrow m \equiv m(modn)$, pues $n \mid 0$, luego la relación congruencia modulo n es reflexiva.
$ii)$ Simétrica:

$$\text{si } m \equiv p(modn) \Longleftrightarrow n/(m - p)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(nk = m - p) \Longleftrightarrow n(-k) = p - m$$
$$\Longleftrightarrow n/(p - m) \Longleftrightarrow p \equiv m(modn)$$

Luego la relación " $\equiv$ " definida en los enteros es simétrica.
$iii)$ Transitiva:
Sean m, p, q números enteros , se tiene que :

$$[m \equiv p(modn)] \wedge [p \equiv q(modn)] \Longleftrightarrow (n/m - p) \wedge (n/p - q)$$
$$\Longleftrightarrow (n/(m - p + p - q)) \Longleftrightarrow (n/m - q) \Longleftrightarrow m \equiv q(modn)$$

Luego la relación "$\equiv$"definida en el conjunto de números enteros es transitiva .
Se concluye por $i), ii)$ y $iii)$ que la relación "$\equiv$"definida en los enteros es de equivalencia .

Funciones inyectivas

Definición : Una función es uno a uno o inyectiva cuando al escoger dos elementos distintos de su dominio, éstos tendran imágenes diferentes o de manera equivalente, la única posibilidad de que dos elementos del dominio tengan la misma imagen es que sean iguales , es decir :

$$\text{Si } x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y) \text{ o si } f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Ejemplo:
Veamos que la función $f(x) = 4x - 1, x \in \mathbb{R}$, es inyectiva: al escoger a y b elementos cualesquiera en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Longrightarrow 4a - 1 = 4b - 1 \\ &\Longrightarrow 4a = 4b \Longrightarrow a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto la función $f(x) = 4x - 1$ si es inyectiva.

Funciones sobreyectivas

Definición: Una función $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva , si para cada $y \in Y$ existe al menos un $x \in X$ tal que $f(x) = y$, esto es :

$$f : X \longrightarrow Y \text{ es sobreyectiva si } (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

Ejemplo : Si $f(x) = 1 - 3x$, demostrar que f es sobre en los reales , es decir que si $b \in \mathbb{R}$, debe hallarse $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = b$. En efecto :
Como $f(a) = 1 - 3a$ por definición de f , entonces $1 - 3a = b$, luego $a = \frac{1-b}{3}$, como $b \in \mathbb{R}$, $a = \frac{1-b}{3} \in \mathbb{R}$ y además $f(\frac{1-b}{3}) = 1 - 3(\frac{1-b}{3}) = 1 - 1 + b = b$, luego la función $f(x) = 1 - 3x$, es sobreyectiva .

Funciones biyectivas

Definición : Una función es biyectiva , cuando es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente .
Ejemplo: consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 5x$ .Probemos que f es biyectiva.
$i)$ Inyectibidad : Si x_1,$x_2 \in Domf$,$f(x_1) = f(x_2)$ entonces:

$$5x_1 = 5x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

En consecuencia f es inyectiva
$ii)$Sobreyectiva :Si $\propto \in 5\mathbb{N}$ entonces existe $a \in N$ tal que $f(a) = \propto$. En efecto : $f(a) = 5a$ (por defininción de f) , como se espera que $f(a) = \propto$, entonces $\propto = 5a$, luego $5a = \propto$, por lo tanto $a = \frac{1}{5} \propto$. Es decir, $f(a) = f(\frac{1}{5} \propto) = 5(\frac{1}{5} \propto) = \propto$, en consecuencia f es sobreyectiva.
Por $i)$ y $ii)$ se concluye que f es una función biyectiva.

Funciones inversas

Sea f una biyección de M en N, una relación g definida de N en M, se denomina función inversa de f y se nota por $g = f^{-1}$, si y solo si $(f \circ g) = (g \circ f) = idéntica$.

Ejemplos

1) Hallar las funciones inversas de las siguientes funciones
$a)$ Si $f(x) = \frac{2x-3}{4} \Longrightarrow y = \frac{2x-3}{4} \Longrightarrow 4y = 2x - 3 \Longrightarrow 4y + 3 = 2x \Longrightarrow x = \frac{4y+3}{2}$
Luego $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2}$.
$b)$ Si $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow y = (x-1)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow y^3 = x - 1 \Longrightarrow x = y^3 + 1$
Luego $f^{-1}(x) = x^3 + 1$
2)Dada $f = 2x + 3$,pruebe que $f \circ f^{-1} = identica$ y $f^{-1} \circ f = idéntica$
Hallando la función inversa de f, se tiene:
Si $f(x) = 2x + 3 \Longrightarrow y = 2x + 3 \Longrightarrow y - 3 = 2x \Longrightarrow x = \frac{y-3}{2}$
Luego $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
$i)$ $f \circ f^{-1} = idéntica$
Ahora $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2(\frac{x-3}{2}) + 3 = x - 3 + 3 = x$
Luego , $(f \circ f^{-1})(x) = i(x)$.
$ii)$ $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x}{2} = x$
Luego $(f^{-1} \circ f)(x) = x = i$

2.0.3. Equipotencia

Definición :
Sea U una colección de conjuntos distintos de vacío y sean $M, N \in U$. M y N son equipotentes si y solamente si, entre estos conjuntos se puede establecer una correspondencia $f : M \longrightarrow N$ tal que f es una biyección ,en tal caso , se nota por :

$$M \cong N$$

Y se lee M y N son equipotentes .
Ejemplos :
$i)$ Los conjuntos $T = \{\alpha, \beta, \varepsilon\}$ y $S = \{1, 2, 3\}$, contienen el mismo número de elementos, luego $T \cong S$ y por lo tanto entre ellos podemos establecer una biyección.
$ii)$ El conjunto $W = \{x/x \leq 5 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ tiene el mismo cardinal del conjunto $V = \{y/2 < y < 9 \wedge y \in \mathbb{N}\}$, en consecuencia $W \cong V$.
$iii)$ El conjunto de puntos contenidos en una recta unitaria es equipotente al conjunto de puntos contenidos en un cuadrado de lado 1.

La relación de equipotencia es de equivalencia

Se probara que la relación " $\cong$ " definida en U es reflexiva, simétrica y transitiva.

i) Reflexiva : Sea $P_1 \in U \Longrightarrow (\exists I_{P_1} : P_1 \to P_1)$, tal que I_{P_1} es la función idéntica de P_1 Es claro que la función I_{P_1} es biyectiva , luego $P_1 \cong P_1$ y se cumple la propiedad reflexiva.
ii) Simétrica : Sean $P_1, P_2 \in U$

$$\begin{aligned} \text{Si } P_1 \cong P_2 &\Longleftrightarrow \exists \text{f} : \text{P}_1 \to P_2 \text{ y } f \text{ es una biyección.} \\ &\Longleftrightarrow \exists f^{-1} : P_2 \to P_1 \text{ y } f^{-1} \text{ es una biyección} \\ &\Longleftrightarrow \text{P}_2 \cong P_1 \end{aligned}$$

iii) Transitiva :Sean $P_1, P_2, P_3 \in U$ si $(P_1 \cong P_2)$ y $(P_2 \cong P_3)$, entonces debe probarse que $P_1 \cong P_3$. En efecto .

$$\begin{aligned} (P_1 \cong P_2) \wedge (P_2 \cong P_3) &\Longleftrightarrow \exists g : P_1 \to P_2 \wedge h : P_2 \to P_3; g, h \text{ son biyecciones.} \\ &\Longleftrightarrow \exists (h \circ g) : P_1 \to P_3;\ (h \circ g) \text{ es una biyección.} \\ &\Longleftrightarrow P_1 \cong P_3 \end{aligned}$$

Como g es una biyección de P_1 en P_3 y h es una biyección de P_2 en P_3 entonces $(h \circ g)$ es una biyección de P_1 en P_3.
En consecuencia la relación $\cong$ definida en U es transitiva , luego por las afirmaciones $i), ii)$ y $iii)$ se concluye que también es una relación de equivalencia.

2.0.4. Las sospechas del infinito

Antes de George Cantor, ya un matemático había sospechado las curiosas relaciones que se presentaban entre conjuntos infinitos, este fué Galileo($1564 - 1642$), quien hacia notar que por cada número natural que se tome, éste siempre tendrá su cuadrado y a su vez el conjunto de números cuadrados resultantes es subconjuto propio de los números naturales.
Se podria intuir entonces que ambos conjuntos tenian la misma cantidad de elementos. Pero esto solo quedo en la simple sospecha de Galileo quien tal ves no pudo profundizar lo suficiente en esta paradoja ya que le preocupaba más el camino a la hoguera sentenciado por la iglesia en esa epoca por subvertir lo preceptuado en la escolástica.

Conjuntos Contables o Numerables

George Cantor identificó la existencia de muchos conjuntos equipotentes con el conjunto de números naturales. A estos conjuntos les hizo corresponder lo que el llamó el cardinal transfinito $\aleph_0$ $(aleph - subcero)$, llamando a estos conjuntos númerables o conjuntos que son contables.

Conjuntos no Contables

Llamaremos a un conjunto no contable o no numerable, cuando este no pueda establecer una correspondencia biyectiva con el conjunto de números naturales, si encontramos la existencia de dicho conjunto se hace necesario representarlo por un cardinal distinto al del conjunto números Naturales.

2.0.5. El conjunto ($\mathbb{Z}$) de números enteros es infinito numerable

Considerese la siguiente aplicación g:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \to g(n) = \begin{cases} -n/2 \text{ si n es par} \\ (n+1)/2 \text{ si n es impar} \end{cases} .$$

La aplicación g es una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.
i) inyectividad.
Se debe ver que si $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$; $(x_1, x_2 \in \mathbb{Z})$
Si x_1 y x_2 son pares, se tiene que:

$$\begin{gathered} [g(x_1) = -\tfrac{1}{2}x_1] \wedge [g(x_2) = -\tfrac{1}{2}x_2] \\ \text{Como } g(x_1) = g(x_2) \\ \Longleftrightarrow \tfrac{1}{2}(x_1) = \tfrac{1}{2}(x_2) \\ \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \end{gathered}$$

Si x_1 y x_2 son impares, se tiene que :

$$\begin{gathered} [g(x_1) = \tfrac{1}{2}(x_1+1)] \wedge [g(x_2) = \tfrac{1}{2}(x_2+1)] \\ \text{Como } g(x_1) = g(x_2) \\ \Longleftrightarrow -\tfrac{1}{2}(x_1+1) = -\tfrac{1}{2}(x_2+1) \\ \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \end{gathered}$$

Si x_1 es par y x_2 se tiene que :

$$\begin{gathered} [g(x_1) = -\tfrac{1}{2}x_1] \wedge [g(x_2) = \tfrac{1}{2}(x_2+1)] \\ g(x_1) = g(x_2) \Longleftrightarrow -\tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{1}{2}(x_2+1) \\ \Longleftrightarrow -x_1 = x_2 + 1 \end{gathered}$$

En consecuencia g es inyectiva
ii) Sobreyectividad.
Sea $y \in \mathbb{Z}^+$, y es de la forma $y = \frac{x_1}{2}$, donde $x_1 \in \mathbb{N}$; luego $x_1 = 2y$ .Claramente x_1 es un número positivo múltiplo de 2 , luego $g(x_1) = y$
Ahora si $y \in \mathbb{Z}^-$, y es de la forma $y = -\frac{x_1+2}{2}$ tal que $x_1 \in \mathbb{N}$, luego $x_1 = 1 - 2y$ por lo tanto $g(x_1) = y$
Luego g es una aplicación sobreyectiva.
En consecuencia por i) y ii) se concluye que la aplicación g es una biyección , por lo tanto el conjuto de los números enteros también está representado por el cardinal $\aleph_0$.
Ahora podemos decir que entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números

enteros existe una biyección, luego estos son equipotentes, y esto gracias a la llegada de Cantor quien construye la definición de equipotencia y con esto lo que antes era una sospecha se torna en afirmación.

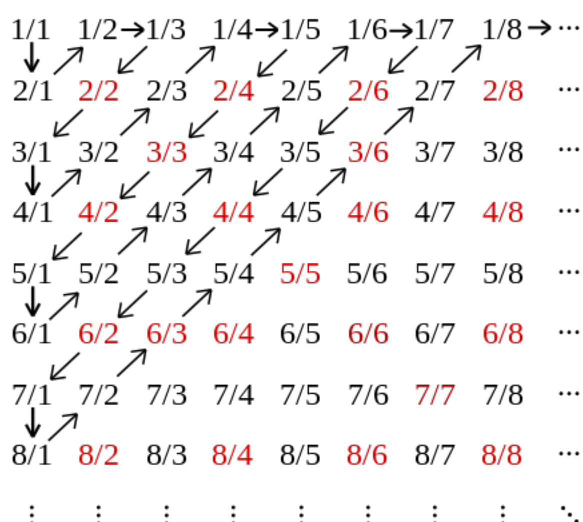
Números Naturales Números cuadrados

$$0 \to 0$$
$$1 \to 1$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 9$$
$$4 \to 16$$
$$\cdots$$

Cantor aquí abría las puertas al estudio del infinito, y no solo se daba cuenta que el conjunto de números naturales era equipotente con su subconjunto de números cuadrados, si no que cada vez surgían más y más subconjuntos de los naturales que eran equipotentes con él. Como es el caso de los números pares, los impares, multiplos de 10, etc. En consecuencia a estos conjuntos los llamo númerables y su cardinal es $\aleph_0$.

Con este descubrimiento Cantor no solo revoluciona las matemáticas, sino que acaba con el celebre pirincipio Aristotelico -Euclideano, que afirma que. El todo es mayor que cada una de sus partes .

Pero el infinito de los números racionales parecía ser diferente en su comportamiento respecto a los números naturales; sin embargo Cantor hallo la manera de ordenar en un listado secuenciado por los naturales la totalidad de elementos del conjunto de números racionales; a este tipo de ordenamiento él mismo lo llamó el método de diagonalización y se presenta en la siguiente figura:



(2).png

Siguiendo la flecha que serpentea en la figura anterior y eliminando las fracciones que se repiten, se obtiene el listado total de los elementos del conjunto de números racionales :

$$\mathbb{Q} = \{1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 1/5, 5, 6, 5/2, 4/3, ...\}$$

Es claro entonces que podemos construir una correspondecia biunivoca entre el conjunto $\mathbb{Q}$ y el conjunto $\mathbb{N}$ luego estos conjuntos son equipotentes entre si . En consecuencia el cardinal de los números racionales , también es $\aleph_0$.

Cantor concluye, ”LO VEO Y NO LO CREO”

2.0.6. El conjunto ($\mathbb{R}$) de números reales no es numerable

El ingenio de Cantor nos demostraba la numerabilidad de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, al mismo tiempo que sus subconjuntos propios también eran equipotentes con estos. De este modo el cardinal transfinito que representa a todos estos conjuntos es $\aleph_0$, pero a Cantor le inquietaba el comportamiento de los números reales, estos parecían imposibles de enlistar y ponerlos en una correspondencia biunívoca con el conjunto de números naturales, Cantor empieza a sospechar que el conjunto $\mathbb{R}$ no tendría el mismo cardinal de los conjuntos numerables y decide estudiar el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
Podemos decir que escoge un subconjunto de $\mathbb{R}$ haciendo referencia a que un conjunto es contable o númerable si cualquier subconjunto propio de él debe ser numerable, lo que revolucionaria el rumbo de las matemáticas y significaria su gloria postume.

En el estudio del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, Cantor confirma la existencia de un cardinal transfinito distinto a $\aleph_0$ y lo demuestra de la siguiente manera.
La demostración se hace por contradicción, Supongamos que el intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, es númerable, de ser así podemos definir una función biyectiva ”ϕ” de $\mathbb{N}$ en $[0, 1]$; esto es :

$$\phi : \mathbb{N} \to [0, 1]$$
$$\phi(i) = A_i$$

Siendo ;
$A_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots$
$A_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots$
$A_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots$
$\vdots$
$A_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3} \ldots$
Donde $0 < a_{ij} \leq 9 \; \forall i, j$
$1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$

Si consideramos el decimal $Y = 0, y_1 y_2 y_3 \cdots$, donde , y_n se define por :

$$y_n = a_{nn} + 1, \text{ si } a_{nn} < 9$$
$$y_n = 0, \text{ si } a_{nn} = 9$$

Es evidente que la $n - \acute{e}sima$ cifra decimal de Y siempre difiere de la $n - \acute{e}sima$ cifra decimal de A_n y por lo tanto Y que es el número que hemos construido no está en el intervalo $[0, 1]$ lo cual es una contradicción.
Se concluye que el conjunto de números reales no es numerable.
Este último resultado advierte la existencia de distintos órdenes de infinitud, pues el cardinal de $\mathbb{R}$ es distinto que $\aleph_0$. Cantor llamaría al cardinal de los números reales $\aleph_1$.

Nota

El fundamento de esta demostración radica en que dado un número $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [0, 1]$ este número se puede escribir en la forma $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, donde $0 \leq a_i \leq 9$ para $1 \leq i$

2 Resultados

$i)$Hemos probado la numerabilidad del conjunto de números racionales y la no numerabilidad del conjunto de números reales y sabemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, de esta manera se deduce que el conjunto $\mathbb{I}$ de números irracionales no es numerable
$ii)$ $\aleph_0 < \aleph_1$, esta conjetura formulada por Cantor, crea más dudas que certezas, pues nada nos asegura que realmente no exista un cardinal transfinito entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Podriamos decir que este fue el origen de la hipotesis del continuo, en la cual Cantor depositaría todos sus esfuerzos por demostrarla sin obtener resultados positivios, igualmente esta impotencia que le generaban cada uno de sus fracasos por demostrarla lo llevarian a continuos colapsos nerviosos que lo alejaban de la sociedad y hasta de su propia familia.

2.0.7. Conceptos básicos de topología

El conjunto ternario de Cantor es un conjunto cerrado, compacto, denso en sí mismo y de medida cero. Estos ultimos conceptos pertenecen a la topologia y es el motivo de la inclusión en esta sección de algunas nociones elementales al respecto.
La topologia en matemáticas es la rama que hace extensivo y profundo el estudio de las ideas de aproximación, cercania o vecindad atraves de los conceptos de limite y continuidad, en ella los números reales los llamaremos puntos y recta al eje real o continuo númerico.

Punto interior

Sea $b \in B$ y $B \subset \mathbb{R}$, llamamos a b un punto interior del conjunto B, cuando existe un número $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ está totalmente contenido en el conjunto B.
Cuando b es un punto interior del conjunto B, decimos que B es un entorno del punto interior b.

Conjuntos abiertos

Llamamos a $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto, cuando para todo $b \in B$, b es punto interior del conjunto B, esto lo notamos como $b \in intB$.
Puesto que $b \in intB$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo abierto $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset B$, seguidamente a todo el conjunto de puntos interiores de B, lo llamaremos interior de B

Ejemplos

$i)$Consideremos el intervalo abierto $(c,d) \subset \mathbb{R}$, este intervalo es un conjunto abierto, pues si tomamos cualquier $x \in (c,d)$ se tiene que $c < x < d$ luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (c,d)$, entonces todos los puntos del intervalo (c,d) son interiores .
$ii)$ Es fácil ver que el interior del conjunto $[c,d] \subset \mathbb{R}$ es el conjunto $(c,d) \subset \mathbb{R}$, si $x \in int[c,d]$ se cumple que $c < x < d$, luego $x \in (c,d)$ en consecuensia $int[c,d] = (c,d)$.
$iii)$Es claro que los extremos del intervalo cerrado $[m,n] \subset \mathbb{R}$ no son puntos interiores , pues dado $\varepsilon > 0$ el intervalo abierto $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ puede no estar contenido en el intervalo cerrado $[m,n]$, luego el conjunto $[m,n]$ no es abierto.

Teorema 1

M_1 y M_2 son conjuntos abiertos, entonces la intersección de ellos también es un conjunto abierto .

Demostración
$m \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow (m \in M_1) \wedge (m \in M_2)$
$\Rightarrow \exists(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R^+)/(m-\varepsilon_1, m+\varepsilon_1) \subset M_1 \wedge (m-\varepsilon_2, m+\varepsilon_2) \subset M_2$
$\Rightarrow \varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
$\Rightarrow$(m-$\varepsilon, m+\varepsilon) \subset M_1 \wedge (m-\varepsilon, m+\varepsilon) \subset M_2$
$\Rightarrow$(m-$\varepsilon, m+\varepsilon) \subset (M_1 \cap M_2)$
$\Rightarrow$(M$_1 \cap M_2$) es abierto

Si B_1 y B_2 son conjuntos abiertos , entonces la unión $B_1 \cup B_2$,también es un conjunto abierto.
Demostración.
$x \in (B_1 \cup B_2) \Rightarrow (x \in B_1) \vee (x \in B_2)$
$\Rightarrow \exists(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+)/[(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset B_1] \vee [(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset B_2]$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0/\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
$\Rightarrow$[(x-$\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B_1] \vee [(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B_2]$
$\Rightarrow$(x-$\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (B_1 \cup B_2)$
$\Rightarrow$(B$_1 \cup B_2$) es un conjunto abierto.

Teorema 2

Si $(B_\lambda)\lambda \in I$, donde I es un conjunto de índices, es una familia de conjuntos abiertos entonces la unión de todos esos conjuntos, también será un conjunto abierto.
Demostración
Llamemos $B = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$ a la unión de todos los conjuntos abiertos, si $x \in B$ entonces existe $\lambda \in I$ tal que $x \in B_\lambda$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B_\lambda$ y $B_\lambda \in B$, entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B$. Podemos concluir que $\bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda = B$ es un conjunto abierto.

$$B = B_1 \cap B_2 \cap \ldots$$

Aclaración :Consideremos la siguiente intersección infinita de conjuntos abiertos $B = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap ...$; donde $B = (-1, 1)$ y $B_1 = (-1/2, 1/2)$,$B_2 = (-1/4, 1/4)$, finalmente $B_n = (-1/n^2, 1/n^2)$, para todo $n \in N$, es claro que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{0\}$ .Ahora si $x \neq 0$,existe $n \in N$ tal que $\mid x \mid > 1/n$ por lo tanto x no pertenece a B_n y tampoco al conjunto B .Esto demuestra que no en todos los casos la intersección infinita de conjuntos abiertos también es un conjunto abierto.

Conjuntos cerrados

Llamamos a $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, cuando todos sus puntos son adherentes. El punto m es adherente al conjunto K, cuando $LimK_n = m$ donde K_n es un sucesión contenida en el conjunto K

Teorema 3

Un punto $m \in \mathbb{R}$ es adherente al conjunto K , si , y solo si , toda vecindad V del punto m contiene algún punto del conjunto K.
Demostración.
$i)$ Si m es punto adherente de K, entonces existe una sucesión $K_n \in K$, cuyo límite es m, esto es $m = LimK_n$, para todo número natural, ahora, dada una vecindad V de m se tiene que esta contiene algún punto de K_n, en consecuencia $(V \cap K) \neq \phi$.
$ii)$ Sea V una vecindad del punto m, esta contiene puntos del conjunto K, escogemos en cada intervalo $(m - 1/n, m + 1/n)$ con $n \in \mathbb{N}$ un punto de $K_n \in K$. Luego $\mid K_n - m \mid< 1/n$, así el límite de la sucesión K_n es el punto m, en consecuencia m es un punto adherente del conjunto K.

Teorema 4

Un conjunto $G \subset \mathbb{R}$ es cerrado si, y solo si, su complemento $G' = \mathbb{R} - G$ es un conjunto abierto.
Demostración
$i)$Sea $m \in G'$ y G un conjunto cerrado, se sabe que m no es un punto del conjunto G, luego existe algún entorno E del punto m que no contiene puntos de G, así $E \subset G'$. En consecuencia todos los puntos que pertenecen al conjunto G' son interiores, lo que hace a G' un conjunto abierto.
$ii)$Recíprocamente, si G' es un conjunto abierto y $m \in G$, donde $G = \mathbb{R} - G'$, se tiene que m es un punto adherente a G. Así toda vecindad de m contiene puntos del conjunto G , por lo tanto m no puede ser un punto interior del conjunto G', luego todos los puntos adherentes a G están contenidos en G, luego el conjunto G es cerrado.

Punto de Acumulación

Un número real b es llamado punto de acumulación del conjunto $X \subset \mathbb{R}$, cuando toda vecindad V con centro en b y radio $\varepsilon > 0$ contiene algún punto del conjunto X, excepto el mismo número real b. Esto es, $V \cap (X - \{b\}) \neq \Phi$, si el número real $b \in X$ no es un punto de acumulación lo llamaremos un punto aislado del conjunto $X \subset \mathbb{R}$.
Consideremos b un elemento del conjunto $X \subset \mathbb{R}$, llamemos V al entorno de b, tal que $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Si la intersección $V \cap X = \{b\}$, diremos que X es un conjunto de puntos aislados y por lo tanto es un conjunto discreto.
Si todo punto $X \subset \mathbb{R}$ es aislado se dice que X es un conjunto discreto.

Ejemplos

i)Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto finito y llamemos a X' el conjunto de puntos de acumlación de X, es fácil notar que $X' = \Phi$; esto quiere decir que todo conjunto finito, no tiene puntos de acumulación.
ii)Sea $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, el conjunto de números enteros positivos, se cumple que para todo $m \in Z^+$, existe $\varepsilon > 0$ tal que la vecindád $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ no contiene puntos del conjunto $\mathbb{Z}^+$, a exepción del mismo punto m. En consecuencia el conjunto $\mathbb{Z}^+$ está formado solamente por puntos aislados, esto es $(\mathbb{Z}^+)' = \Phi$.

Capítulo 3

Conjunto Ternario de Cantor

Este conjunto se construye a partir del intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mediante un proceso iterado de eliminación de subintervalos intermedios de longitud $\frac{1}{3}$ y se denota por "C".
Llamemos C_0 al intervalo inicial , esto es . $C_0 = [0,1]$, trisecamos C_0 y obtenemos los siguientes intervalos:

$$[0, \tfrac{1}{3}], (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), [\tfrac{2}{3}, 1]$$

Eliminamos el tercio medio de los intervalos anteriores y se obtiene C_1:

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

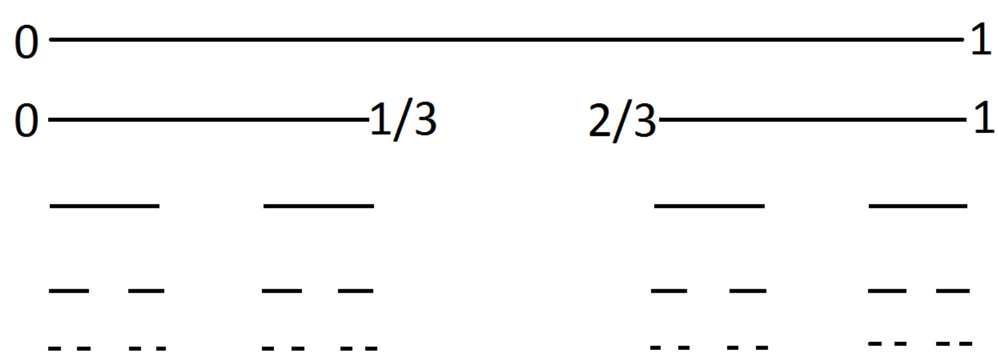
Es claro que C_1 está formado por 2 intervalos cerrados , estos son trisecados y sus tercios medios eliminados , obteniendo asi 4 intervalos cerrados que determinan C_2.

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

Igualmente obtenemos C_3

$$C_3 = [0, \tfrac{1}{27}] \cup [\tfrac{2}{27}, \tfrac{3}{27}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}] \cup [\tfrac{8}{27}, \tfrac{9}{27}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{19}{27}] \cup [\tfrac{20}{27}, \tfrac{21}{27}] \cup [\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}] \cup [\tfrac{26}{27}, \tfrac{27}{27}]$$
$$C_3 = [0, \tfrac{1}{27}] \cup [\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}] \cup [\tfrac{8}{27}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{19}{27}] \cup [\tfrac{20}{27}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}] \cup [\tfrac{26}{27}, 1]$$

Y , en general , C_k ; $(k = 0, 1, 2, \ldots)$



Notese que C_0 , se compone de 1 intervalo cerrado, C_1 se compone de 2 intervalos cerrados que son el primer y el tercer intervalo generados en la trisección hecha en C_0, en consecuencia C_2 se compone de cuatro intervalos cerrados y a su vez C_3, de ocho intervalos cerrados como se vío anteriormente. Esto sugiere que hay una regularidad o patrón en el número de intervalos cerrados que componen cada C_k, en la medida que lo estamos construyendo, la siguiente formula de recurrencia nos servirá para determinar el número de intervalos cerrados que componen cada C_k y los digitos resultantes de esta fórmula seran de ayuda para la determinación de dichos intervalos cerrados.
Se define $P_0 = \{1\}$ y $P_j = \{3r-2, 3r\}$ donde $r \in P_{j-1}$, para $j = 1, 2, 3, ...$ Haciendo uso de esta fórmula hallaremos P_1:

$$P_1 = \{3r-2, 3r\} \text{ y } r \in P_{1-1} = P_0 = \{1\}, \text{ luego } P_1 = \{3(1)-2, 3(1)\} = \{1, 3\}$$

De manera similar obtenemos P_2 y P_3 respectivamente:

$$\begin{gathered} P_2 = \{3r-2, 3r\};\ r \in P_{2-1} = P_1 = \{1, 3\} \\ \Rightarrow P_2 = \{3(1)-2, 3(1), 3(3)-2, 3(3)\} = \{1, 3, 7, 9\} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P_3 = \{3r-2, 3r\};\ r \in P_{3-1} = P_2 = \{1, 3, 7, 9\} \\ \Rightarrow P_3 = \{3(1)-2, 3(1), 3(3)-2, 3(3), 3(7)-2, 3(7), 3(9)-2, 3(9)\} \\ \Rightarrow P_3 = \{1, 3, 7, 9, 19, 21, 27, 29\} \end{gathered}$$

Seguidamente determinamos para cada valor de k los conjuntos C_k, los cuales se componen de 2^k intervalos cerrados de la forma :

$$M_{s_j}^k = [\tfrac{s_j-1}{3^k}, \tfrac{s_j}{3^k}]$$

Es claro que $j = 1, 2, ..., 2^k$ y $s_j \in P_j$ para $k = 0, 1, 2, ...$
En efecto, vamos hallar algunos C_k que hacen parte del conjunto C. Comenzamos con C_0, esto es:

$$\begin{gathered} C_0 = M_{s_1}^0 = [\tfrac{s_1-1}{3^0}, \tfrac{s_1}{3^0}]\ ;\ s_1 \in P_1 = \{1, 3\} \\ \Rightarrow C_0 = [\tfrac{1-1}{3^0}, \tfrac{1}{3^0}] = [0, 1] \end{gathered}$$

Para obtener el conjunto de intervalos cerrados que componen el conjunto C_1 , se tiene :

$$\begin{gathered} C_1 = M_{s_1}^1 \cup M_{s_2}^1 = [\tfrac{s_1-1}{3^1}, \tfrac{s_1}{3^1}] \cup [\tfrac{s_2-1}{3^1}, \tfrac{s_2}{3^1}] \\ \Rightarrow C_1 = [\tfrac{1-1}{3^1}, \tfrac{1}{3^1}] \cup [\tfrac{3-1}{3^1}, \tfrac{3}{3^1}] \\ \Rightarrow C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] \end{gathered}$$

Para hallar el conjuntos de intervalos cerrados que componen el conjunto C_2, empezamos por hacer notar que $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 7, s_4 = 9, etc$, entonces :
$C_2 = M_{s_1}^2 \cup M_{s_2}^2 \cup M_{s_3}^2 \cup M_{s_4}^2$
$\Rightarrow C_2 = [\tfrac{s_1-1}{3^2}, \tfrac{s_1}{3^2}] \cup [\tfrac{s_2-1}{3^2}, \tfrac{s_2}{3^2}] \cup [\tfrac{s_3-1}{3^2}, \tfrac{s_3}{3^2}] \cup [\tfrac{s_4-1}{3^2}, \tfrac{s_4}{3^2}]$
$\Rightarrow C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$

De manera general podemos escribir lo siguiente :

$$C_k = M^k_{s_1} \cup M^k_{s_2} \cup M^k_{s_3} \cup M^k_{s_4} \cup ... \cup M^k_{s_j}$$

Finalmente definimos el conjunto de Cantor de la siguiente manera :

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

Observaciones

i) De acuerdo a la construcción del conjunto C , se tiene que $C_0 \supset C_1 \supset C_2 ...$, algunos puntos del conjunto C seran precisamente los extremos de cada intervalo cerrado que pertenece a C_k.
ii)Resulta de utilidád , conocer el cardinal de cada P_j , pues este corresponde al número de intervalos cerrados que forman cada C_k.
$\#P_0 = 1 = 2^0$
$\#P_1 = 2 = 2^1$
$\#P_2 = 4 = 2^2$
$\#P_3 = 8 = 2^3$
$\vdots$
$\#P_k = 2^k$
Estos cardinales son, precisamente el número de intervalos que contiene cada C_k. Es decir,C_k es la unión de 2^k intervalos cerrados.
La anterior construcción del Conjunto Ternario de Cantor, corresponde a una de tipo geométrico, antes de continuar con el analisis de este conjunto veamos el siguiente ejemplo.
Cuando empezamos la trisección del intervalo $C_0 = [0, 1]$ de esta resultan 3 intervalos, eliminamos el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, entonces en la primera iteración se eliminó un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{3}$, en la segunda iteración se eliminaron dos intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{9}$, en la tercera interación se eliminaron cuatro intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{27}$, esto es:

$$\frac{1}{3} + [\frac{1}{9} + \frac{1}{9}] + [\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}] + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} \ldots = \frac{1}{3}[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} \ldots] =$$
$$\frac{1}{3}[\frac{1}{3^0} + \frac{2}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \ldots] = \frac{1}{3}[\frac{2^0}{3^0} + \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$$

La serie resultante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$, es de tipo geométrico . Luego :

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}) = (\frac{1}{3})3 = 1$$

Luego la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en cada iteracion de C es igual a 1. Lo cual resulta interesante pues hemos comenzado la construcción de C en un intervalo de longitud 1 , hemos retirado de este intervalo una cantidad infinita de subintervalos cuya longitud es igual a 1, lo cual advierte la medida nula de este conjunto .

El Conjunto de los Agujeros

Realmente cuando construimos el conjunto ternario de Cantor en el intervalo cerrado $[0,1] \subset$ $mathbbR$, podemos pensar que visualmente se trata de quitarle trozos a este intervalo y finalmente dejarlo lleno de agujeros. A partir de esta premisa también podemos elaborar una construcción alternativa del conjunto ternario de Cantor.
Para empezar eliminamos el tercio médio cn centro en el intervalo cerrado $C_0 = [0,1]$ y radio $\frac{1}{3}$; esto es el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, obteniendo así el conjunto de intervalos cerrados $C_1 = [0,1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y si llamamos al intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = T_1^1$, podemos escribir :

$$C_1 = [0,1] - (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] = [0,1] - T_1^1$$

Para obtener el conjunto C_2, es claro que se eliminan los tercios medios de los intervalos cerrados que estan en C_1, estos tercios medios son $T_2^1 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $T_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, para obtener el conjunto C_3 eliminamos los tercios medios de los intervalos cerrados del conjunto C_2, estos tercios medios son, $T_3^1 = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $T_3^2 = (\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $T_3^3 = (\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $T_3^4 = (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$
Entonces podemos escribir los siguiente:

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{3}] - T_2^1 \cup [\tfrac{2}{3}, 1] - T_2^2 = C_1 - (T_2^1 \cup T_2^2)$$

Para obtener el conjunto C_3, se tiene :

$$C_3 = C_2 - (T_3^1 \cup T_3^2 \cup T_3^3 \cup T_3^4) = C_2 - (\bigcup_{k=1}^{2^{3-1}} T_3^k)$$

Es fácil notar que la forma general de los subintervalos abiertos que son eliminados durante la construcción del conjunto C, son de la siguiente forma :

$$T_n^j = (\tfrac{3r_j - 2}{3^n}, \tfrac{3r_j - 1}{3^n})$$

Para $r_j \in P_{n-1}$, $j = 1, 2, ..., 2^{n-1}$, con $N = 1, 2, 3...$, ahora podemos notar la unión general de todos los subintervalos eliminados en la construcción del conjunto C como:

$$T_n = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} T_n^j$$

Luego definimos el conjunto de Cantor de la siguiente manera:

$$C = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$$

3.0.8. Naturaleza de sus puntos

Dado $x \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, podemos expresar este elemento en el sistema númerico base 3, de la siguiente forma:

$$x = 0.\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k = \frac{\beta_1}{3^1} + \frac{\beta_2}{3^2} + \frac{\beta_3}{3^3} + ... \frac{\beta_m}{3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{3^m}$$

Notemos que β_m solo puede tomar los dígitos 0,1, y 2. Puesto que x esta expresado en el sistema de base 3

Proposición

x es un elemento del conjunto C si, y solo si, en su expansión ternaria $x = 0.\beta_1\beta_2\beta_3, ...; \beta_i \neq 1$, para $1 \leq i \leq k$
Demostración
Cuando $k = 1$, se tiene que $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ o lo que es lo mismo de acuerdo a las construcciones del conjunto C que hemos hecho antes $C_1 = M^1_{s_1} \cup M^2_{s_2}$, luego si decimos que $x \in M^1_{s_1}$, se puede presentar que $x = \frac{1}{3}$, donde la expansión ternaria de este punto viene dada por $x = 0{,}0222...$ y es notable que $\beta_1 \neq 1$
Si $x \in M^1_{s_1}$ y $x \neq \frac{1}{3}$, la expansión generalizada de todos estos elementos viene dada por $x = 0{,}0\beta_2\beta_3...$ y también se tiene que $\beta_1 \neq 1$
Ahora, si tomamos el tercer tercio medio del conjunto C_1, esto es, el intervalo cerrado $M^1_3 = [\frac{2}{3}, 1]$, podemos tomar $x = 0{,}2\beta_2\beta_3, ...$ y nuevamente $\beta_1 \neq 1$.
Supongamos que el resultado anterior también se cumple para $n = k$, entonces podemos escoger cualquiera de los intervalos cerrados de la forma $M^k_{s_j}$ que hacen parte de los conjuntos C_k y suponer que dado $x \in C_k$, su expansión ternaria está dada por :

$$x = 0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}... = \frac{\beta_1}{3^1} + \frac{\beta_2}{3^2} + \frac{\beta_3}{3^3} + ... + \frac{\beta_k}{3^k} + \frac{\alpha_{k+1}}{3^{k+1}} + \frac{\alpha^{k+2}}{3^{k+2}} + ...$$

Ahora para obtener el conjunto C_{k+1}, debemos trisecar los intervalos cerrados de la forma M^k_s de la siguiente manera :
$M^k_s = [\frac{s-1}{3^k}, \frac{s_j}{3^k}]$, sumamos los extremos del intervalo anterior y lo dividimos entre 3, obteniendo $\frac{1}{3^{k+1}}$, entonces tenemos:

$$\frac{s-1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{3(s-1)+1}{3^{k+1}} = \frac{3s-3+1}{3^{k+1}} = \frac{3s-2}{3^{k+1}}$$

$$\frac{s-1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{3(s-1)+2}{3^{k+1}} \frac{3s-3+2}{3^{k+1}} = \frac{3s-1}{3^{k+1}}$$

En consecuencia los 3 subintervalos resultantes de la trisección hecha en uno de M^k_s intervalos cerrados que ocurren en C_k, son de la forma:

$$[\frac{s-1}{3^k}, \frac{3s-2}{3^{k+1}}], (\frac{3s-2}{3^{k+1}}, \frac{3s-1}{3^{k+1}}), [\frac{3s-1}{3^{k+1}}, \frac{s_j}{3^k}]$$

Es claro que al remover el intervalo abierto $(\frac{3s-2}{3^{k+1}}, \frac{3s-1}{3^{k+1}})$, también son removidos aquellos puntos para los cuales su expansión ternaria $\alpha_{k+1} = 1$.
Luego los puntos en los cuales su expansión ternaria $\alpha_{k+1} = 0$ son aquellos que pertencen al primer tercio medio, esto es al intervalo cerrado $[\frac{s-1}{3^k}, \frac{3s-2}{3^{k+1}}]$, se aclara de antemano la ambiguedad presentada con el punto $\frac{3s-2}{3^{k+1}}$, en su expansión ternaria aparece el digito 1, Cantor sugiere tomar

la siguiente expansión ternaria para este punto $0.\beta_1\beta_2\beta_3, ..., \beta_k0222...$ en lugar de la expansión ternaria $0.\beta_1\beta_2\beta_3, ..., \beta_k1000...$
Finalmente las expansiones ternarias de estos 3 subintervalos resultantes donde $\alpha_{k+1} = 2$, son aquellos puntos que pertenecen al intervalo cerrado $[\frac{3s-1}{3^{k+1}}, \frac{s_j}{3^k}]$, a exepción de la ambiguedad presentada en la expansión ternaria del punto $\frac{3s-1}{3^{k+1}}$, pero que es superada tomando en general para todos los puntos de este intervalo la expansión de la forma $0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k2000$.
Finalmente hemos garantizado que en el conjunto C_{k+1} , también en sus expansiones ternarias solo aparecen los dígitos 0 y 2 ,lo que concluye la demostración.

Observación

En la expansion ternaria de algunos puntos del conjunto ternario de Cantor aparece el digito 1, especialmente en los puntos extremos de los intervalos cerrados que componen cada conjunto C_k, Cantor a esto le llamaría ambiguedades que se presentaban en dichas expansiones pero que eran superadas en general de la siguiente forma :
i)Si la expansión ternaria de un punto está dado por $0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k1000$ tomamos la expansión ternaria $0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k0222$
ii)Si la expansión ternaria de un punto está dado por $0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k1222$ tomamos la expansión ternaria $0.\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_k2000$

3.0.9. El Conjunto Ternario de Cantor no es numerable

Propocisión: El conjunto C no es numerable.
Demostración
Dado $x \in [0,1] \subset R$, se tiene que la expansión binaria de este elemento viene dada por $x = \frac{w_1}{2^1} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w_3}{2^3} + ...$, donde $w_i \in \{0,1\}$; $1 \leq i \leq k$.
Se define la siguiente aplicación $g = [0,1] \to C$, dada por :

$$g(x) = g(\frac{w_1}{2^1} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w_3}{2^3} + ...) = \frac{2w_1}{3^1} + \frac{2w_2}{3^2} + \frac{2w_3}{3^3} + ...$$

La expresión $\frac{2w_1}{3^1} + \frac{2w_2}{3^2} + \frac{2w_3}{3^3} + ...$, es la expansion ternaria de cada elemento perteneciente al intervalo $[0,1]$
Demostremos que g es una aplicación biyectiva.
i)Inyectividad .
Sean $m, n \in [0,1] \subset R$, podemos escribir la expansión binaria de estos elementos de la siguiente forma:

$$m = \frac{m_1}{2^1} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + ...$$
$$n = \frac{n_1}{2^1} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + ...$$

Ahora supongamos que $g(m) = g(n)$, entonces:

$$\begin{aligned} g(m) &= \frac{2m_1}{3^1} + \frac{2m_2}{3^2} + \frac{2m_3}{3^3} + ... \\ &= \frac{2n_1}{3^1} + \frac{2n_2}{3^2} + \frac{2n_3}{3^3} + ... \\ &= g(n) \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que $\frac{2m_1}{3^1}$=$\frac{2n_1}{3^1}$,$\frac{2m_2}{3^2}$=$\frac{2n_2}{3^2}$,$\frac{2m_3}{3^3}$=$\frac{2n_3}{3^3}$.....
Luego $m_1 = n_1$,$m_2 = n_2$,$m_3 = n_3$,.... Finalmente $m = n$, lo que prueba la inyectividad de la aplicación g.
ii)Sobreyectividad.
Sea d un elemento del conjunto de Cantor su expansión ternaria está dada por

$$d = \frac{d_1}{3^1} + \frac{d_2}{3^2} + \frac{d_3}{3^3} + ..., \text{ donde } d_i \in \{0, 2\};\ 1 \leq i \leq k$$

Ahora si $x \in [0, 1]$, podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$x = \frac{d_1}{2^1} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{d_3}{2^3} + ..., \text{ donde } d_i \in \{0, 1\}\ ;1 \leq i \leq k$$

Entonces $f(x) = f(\frac{d_1}{2^1} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{d_3}{2^3} + ...) = \frac{d_1}{3^1} + \frac{d_2}{3^2} + \frac{d_3}{3^3} + ... = d$
En consecuencia g es una aplicación sobreyectiva .
Por i) y ii) se concluye que la aplicación g es una biyección, lo que demuestra la no númerabilidad del conjunto C.

3.0.10. Puntos que pertenecen a C

Es importante notar que el conjunto de Cantor no solo está formado por los puntos extremos de los intervalos cerrados que se generaron en cada iteración, esto es, puntos como $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, ...,$ también encontramos, por ejemplo el punto $\frac{1}{4}$, que claramente no es extremo de ningún intervalo, pero que hace parte del conjunto C.
Podemos pensar que pasaria si un punto no es extremo de ningún intervalo, como es el caso del punto $\frac{1}{4}$.En efecto si, $c \in [y_n, x_n]$, luego suponemos que $x_n < c < y_n$;$x_n, y_n \in C$, la longitud del n-esimo intervalo en C es $\frac{1}{3^n}$, esto es $x_n - y_n = \frac{1}{3^n}$, c es punto límite de x_n y y_n. Entonces Lim $y_n = Lim\ x_n = a$, lo que sugiere que c realmente no es un punto aislado del conjunto C y se prueba que los puntos del conjunto C son todos de acumulación.

3.0.11. Compacidad del conjunto C

Si al intervalo $C_0 = [0, 1]$, le quitamos su tercio medio $Q_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, obtenemos C_1. Esto es :

$$C_1 = [0, 1] \text{ - } Q_1^1$$

De los intervalos cerrados componen el conjunto C_1 , se eliminan los tercios medios $Q_2^1 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $Q_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; esto es :

$$C_2 = ([0, \tfrac{1}{3}] \text{ - } Q_2^1 \cup [\tfrac{2}{3}, 1] \text{ - } Q_2^2)$$
$$C_2 = C_1 \text{ - } (Q_2^1 \cup Q_2^2)$$

De igual manera obtenemos $C_3 = C_2$ - $(Q_3^1 \cup Q_3^2 \cup Q_3^3 \cup Q_3^4) = C_2 - (\bigcup_{k=1}^{2^{3-1}} Q_3^k)$
En general la forma de los tercios medios eliminado es :

$$Q_n^j = (\frac{3t_j-2}{3^n}, \frac{3t_j-1}{3^n}), \text{ para } t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 7, ..., \text{ y } ,n = 1, 2, 3, ...$$

Ahora digamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^j$, es la unión de todos los intervalos abiertos que fueron eliminados para la construcción del conjunto C, es claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^j$ es un conjunto abierto, pues es unión de abiertos .

Luego su conjunto complementario $G = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^j$ tiene que ser un conjunto cerrado. Por lo tanto $C = G \cap [0,1]$ es cerrado y acotado , se concluye que el conjunto ternario de Cantor es compacto.

Capítulo 4

Hipótesis del continuo

La hipótesis del continuo fue formulada por Cantor y sería el cierre majestuoso de sus estudios en la teoría de conjuntos, pero nunca pudo llegar a una demostración. Sus ultimos años de vida los dedicó a la busqueda infructuosa de tan anhelado resultado.
La hipótesis del continuo afirma que $\aleph_1$ es el primer cardinal infinito no númerable, donde $\aleph_0$ es el cardinal del infinito númerable; abreviadamente $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, para todo ordinal α; notemos que en la fórmula aparece $2^{\aleph_\alpha}$ que precisamente es el conjunto de partes de $\aleph_\alpha$.
Si la hipotesis del continuo fuera cierta ,seria valido afirmar o falso, que dado $\aleph_0$ cardinal infinito númerable del conjunto de números racionales, su conjunto de partes se nota por $2^{\aleph_0}$, entonces $2^{\aleph_0} = \aleph_{0+1}$ luego $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.Pero no hay manera de probar si el resultado anterior es cierto o falso, haciendo de este enunciado algo irrefutable o independiente.
Precisamente en matemáticas una formlación o enunciado E es indepediente de una teoria K, cuando no es posible demostrar E en K, y en este limbo se halla la Hipótesis del Continuo. Estas últimas conclusiones fueron aportadas por grandes lógicos como Godel en los años 1938 y 1940, Paul Cohen en el año 1963 entre otros.

Capítulo 5

Bibliografía

[1] *Elon Lages Lima.* (1997) *Análisis Real Vol* 1 *.Chile : Reverté, S.A.*
[2] *Tom M Apostol.* (1967) *CALCULUS, One − Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra, España Reverté, S.A.*
[3] *Prada Marin.* (2006) *Un Conjunto Dorado de Cantor. Tesis de Maestría en analísis matemático. Universidad Industrial de Santander Bucaramanga.*
[4] *George Thomas B. Jr.* (2010). *Cálculo, varias variables Decimosegunda edición. México, Pearson Educación*
[5] *Martha Macho Stadler.* (2012). *Matemáticas a través de las paradojas Vol*2 (*pags*127 − 145) *Universidad Del Pais Vasko − Euskal Herriko UNibertsitatea. España.*
[6] *Gustavo Rubiano.* (2004) *Teoria de Números para principiantes Bogota. Prop Offset Editorial Ltda.*