Neiva, 29 de enero del 2020

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Natalia Sandoval Ramírez., con C.C. No. 1.075.274.969,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o ________________

titulado Los números complejos un conjunto olvidado. presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de

Licenciada en matemáticas ;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: ________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS UN CONJUNTO OLVIDADO

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Sandoval Ramírez	Natalia

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Molano Cuéllar	Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciada en matemáticas.

FACULTAD: Educación.

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en matemáticas.

CIUDAD: **AÑO DE PRESENTACIÓN:** **NÚMERO DE PÁGINAS:**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas_x_ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Adobe Acrobat Reader DC

MATERIAL ANEXO: Graficas en Geogebra.

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Complejos	Complex	6.	Cardano	Cardano
2.	Números complejos	complex numbers	7.	Cálculo	Calculation
3.	Números Imaginarios	imaginary numbers	8.	Raíz	Root
4.	Ecuación	Equation	9.		
5.	Cuadrática	Quadratic	10.		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En el presente trabajo de grado titulado "Los números complejos un conjunto olvidado" tiene como objetivo dar a conocer, de manera intuitiva, algunas aplicaciones dentro de la enseñanza de la educación básica secundaria. Así, el documento consta de tres capítulos distribuidos de la siguiente manera:

Capítulo 1: *Presentación de los conjuntos numéricos*

- Los conjuntos numéricos. Se expone la historia y evolución de los sistemas numéricos (desde los números naturales hasta los números complejos). Se resaltan, a su vez, algunos autores que fueron pieza clave para la creación del sistema de los números complejos.

- Los números reales. Abarca la descripción de los números naturales, enteros, racionales e irracionales con sus respectivas propiedades. Continua con una breve historia de los números complejos, mencionados por primera vez en el año 1545 por el matemático italiano Girolamo

Cardano en su obra "Ars Magna", donde se registra el primer cálculo explícito utilizando los números complejos.

- Solución de la ecuación cúbica.

Capítulo 2: Contiene la Ecuación general de segundo grado, las soluciones respectivas ecuaciones completas e incompletas, Relación entre las raíces, coeficientes de una ecuación y algunos problemas que conducen a los números complejos por medio de ecuaciones de segundo y tercer grado.

Capítulo 3: En este capítulo se encuentra el conjunto de los números complejos, con la respectiva definición, escritura y operaciones básicas de suma resta y multiplicación, se presenta también el conjugado de un complejo y por último se utiliza el software Geogebra para visualizar las operaciones de suma, resta y multiplicación de los números complejos.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In the present degree work entitled "The complex numbers a forgotten set" aims to make known, intuitively, some applications within the teaching of secondary education. Thus, the document consists of three chapters distributed as follows:

Chapter 1: Presentation of the numerical sets
- The numerical sets. The history and evolution of numerical systems (from natural numbers to complex numbers) is exposed. In turn, some authors who were key pieces for the creation of the complex number system are highlighted.
- Real numbers. It covers the description of natural, integer, rational and irrational numbers with their respective properties. He continues with a brief history of complex numbers, analysis for the first time in 1545 by the Italian mathematician Girolamo Cardano in his work "Ars Magna", where the first explicit calculation is recorded using complex numbers.
- Solution of the public equation.

Chapter 2: Contains the general equation of the second degree, the respectful solutions complete and incomplete equations, Relationship between the roots, coefficients of an equation and some problems that lead to complex numbers by means of second and third degree equations.

Chapter 3: In this chapter you will find the set of complex numbers, with the respective definition, writing and basic operations of addition and subtraction, the conjugate of a complex is also presented and finally the Geogebra software is used to visualize the operations of addition, subtraction and multiplication of complex numbers.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Julio Cesar Duarte Vidal.

Firma:

Nombre Jurado: Mario molano Cuéllar.

Firma:

Nombre Jurado: Mauricio Penagos.

Firma:

graficas/

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

LOS NÚMEROS COMPLEJOS UN CONJUNTO OLVIDADO

Natalia Sandoval Ramírez

Neiva, Huila
2020

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

LOS NÚMEROS COMPLEJOS UN CONJUNTO OLVIDADO

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Natalia Sandoval Ramírez
20112104728

Asesor:
Mg Mario Molano Cuéllar

Neiva, Huila
2020

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, enero de 2020

DEDICATORIA

Doy gracias a Dios por brindarme siempre su compañía y bendecirme con salud para afrontar cada etapa del camino.

De manera muy especial dedico este trabajo de grado a mi madre Patricia Ramírez Pascuas, pues ella fue el principal cimiento para la construcción de mi vida profesional, sentó en mi las bases de superación, ella es mi espejo y mi motor, pues sus virtudes y su gran corazón hacen que la admire cada día más.

De igual manera a mi padre, hermano, familiares y amigos, por su compañía en cada una de las etapas de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

En la culminación de la carrera, como licenciada en Matemáticas, expreso mi agradecimiento en primer lugar a Dios, por la vida y las oportunidades que me ha brindado para desarrollar y alcanzar mis proyectos y metas.

A mis padres quienes, con esfuerzo y dedicación, me apoyaron en mis estudios, por su amor y apoyo moral y económico.

Al profesor Mauricio Penagos, por su apoyo y dedicación brindados al inicio de este trabajo.

Al profesor Mario Molano Cuéllar, Asesor de este trabajo, por la paciencia, visión crítica y compromiso para sacar adelante el mismo.

A todos los docentes del Programa Licenciatura en Matemáticas, que en cada clase inculcaron mi amor por las matemáticas y despertaron mi pensamiento crítico constructivo en aras de mi formación como docente y persona integra.

Por último a la Universidad Surcolombiana por acogerme durante 5 años y brindarme los recursos tecnológicos, físicos y humanos durante la formación y desarrollo de las practicas docentes, para lograr alcanzar mi meta como profesional.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado, titulado “Los números complejos un conjunto olvidado” tiene como objetivo dar a conocer, de manera intuitiva, algunas aplicaciones dentro de la enseñanza de la educación básica secundaria. Así, el documento consta de tres capítulos distribuidos de la siguiente manera:

Capítulo 1: Presentación de los conjuntos numéricos

- Los conjuntos numéricos. Se expone la historia y evolución de los sistemas numéricos (desde los números naturales hasta los números complejos). Se resaltan, a su vez, algunos autores que fueron pieza clave para la creación del sistema de los números complejos.
- Los números reales. Abarca la descripción de los números naturales, enteros, racionales e irracionales con sus respectivas propiedades. Continúa con una breve historia de los números complejos, mencionados por primera vez en el año 1545 por el matem’atico italiano Girolamo Cardano en su obra “Ars Magna”, donde se registra el primer cálculo explícito utilizando los números complejos.
- Solución de la ecuación cúbica. Se analiza la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sus soluciones por cambio de variable, y se consignan algunos ejemplos.

Capítulo 2: Ecuación general de segundo grado

- Ecuación completa e incompleta de segundo grado y sus respectivas soluciones; descomposición en factores, completando cuadrado, fórmula general y procedimiento Indú.
- Carácter de las raíces, relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación, ecuaciones bicuadradas y otras formas de resolver la ecuación general de segundo grado.
- Al final de este capítulo se presenta la solución y análisis de algunos problemas que conducen a los números complejos por medio de las ecuaciones de segundo y tercer grado.

Capítulo 3: Los Números Complejos, el cuál contiene:

- La definición de los números complejos, su escritura y las operaciones básicas de suma, resta y multiplicación; se presenta, también el conjugado de un complejo. Para ilustrar algunas propiedades de los vectores en las operaciones básicas de los números complejos y para comprenderlos desde la parte geométrica se hizo uso de la herramienta Geo-Gebra.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Presentar un material de estudio organizado sobre los números complejos, resaltando su importancia y utilidad y haciendo un abordaje a partir de la ecuación general de segundo grado y algunos problemas.

Objetivos Específicos

- Desarrollar las distintas soluciones (reales e imaginarias) de la ecuación general de segundo grado, incluyendo características y propiedades.

- Solucionar diferentes problemas en los que aparecen de manera natural los números complejos.

- Usar la herramienta Geo-Gebra facilitando la comprensión de algunas operaciones de los números complejos; por medio de la observación.

METODOLOGÍA

Para alcanzar los objetivos propuestos, y hacer un recuento pormenorizado de la evolución de los conjuntos numéricos, se dividió el proceso en 4 fases, expuestas a continuación, direccionadas principalmente, en torno a algunos aspectos relevantes de las matemáticas: la historia, la solución de ecuaciones, la resolución de problemas y la implementación de herramientas técnologicas.

Fase 1: Documentación teoríca mediante libros y documentos de diferentes autores, páginas de Internet y trabajos de grado relacionados con la temática.

Fase 2: Selección de diferentes autores de libros de texto que recopilarón información acerca de las soluciones que dierón inicio al surgimiento de nuevos conjuntos numéricos.

Fase 3: Análisis y solución de las ecuaciones de segundo y tercer grado utilizando diversos métodos implementados a través de la historia.

Fase 4: Utilización del software Geo-Gebra para visualizar la suma, resta y multiplicación de los números complejos.

Así, se evidenció que, en la actualidad, para el estudio de ecuaciones cuadráticas en el grado noveno, por lo general se presentan soluciones reales. Se ommiten, de esta manera, los casos en los cuales la solución involucra números complejos, con lo que se insinúa que dicho conjunto no tiene mucha trascendencia en las matemáticas.

JUSTIFICACIÓN

Al indagar en torno a la importancia de los números complejos dentro de la enseñanza, se esbozan preguntas tales como: ¿Por qué existen?, ¿Que aplicaciones tienen?, ¿Qué hubiese pasado si no existieran?, no se puede dejar de lado que gracias a su existencia, además de poder resolverse operaciones que no se pueden realizar en el conjunto de los números reales, se han obtenido grandes avances tecnológicos, físicos, astrofísicos entre otros.

El desarrollo del presente trabajo, así, resulta de gran relevancia, pues pone de manifiesto la importancia de los números complejos en la historia de las matemáticas y en muchas de sus aplicaciones. Para ello, se hace un recorrido histórico del conjunto, desde su nacimiento, y el impacto que ha tenido dentro de las matemáticas y otras disciplinas.

Se enfatiza, no obstante, en el estudio del mismo en la educación secundaria, particularmente en el grado noveno, donde se estudia la función cuadrática, la cuál abre un escenario de posibilidades para estudiar su resolución e interpretación.

Lo anterior, teniendo en cuenta que es esencial que los estudiantes se familiaricen con los números complejos, toda vez que estos facilitan una mayor comprensión y análisis de resultados al momento de, por ejemplo, resolver ecuaciones de segundo y tercer grado; además de fortalecer diversas competencias en la educación media y de ser de suma importancia para algunas disciplinas de la educación superior, como ingeniería y medicina. Así las cosas, se hace una consulta de la importancia que ha tenido este conjunto desde su nacimiento, y su impacto en las matemáticas y en otras disciplinas. Se resaltará la importancia del estudio de los números complejos en la educación secundaria, particularmente en el grado noveno, donde se estudia la ecuación cuadrática, la cuál abre un escenario de posibilidades para estudiar la resolución e interpretación del conjunto de los números complejos.

Finalmente se presentan las operaciones de suma, resta y multiplicación de números complejos utilizando el software Geo-Gebra.

CAPÍTULO 1

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

¿Qué son los números complejos? Para responder tal interrogante resulta imperativo indagar sobre la historia y evolución de los sistemas numéricos, en los que la resolución de ecuaciones ha jugado un papel importante.

Desde sus inicios, el hombre ha tenido la necesidad de contar: animales, objetos, personas... Los primeros antepasados, por ejemplo, para reconocer objetos propios, realizaban los respectivos conteos agrupando piedritas o hacíendo marcas en las cuevas o en huesos de animales. Con el paso del tiempo, las civilizaciones fueron avanzando en los sistemas de conteo.

Es así como en Mesopotamia se encuentran los vestigios de los primeros indicios de sistemas de numeración (rastros de fichas hechas en arcilla que sirvieron para designar números, medidas y categorías) que datan desde el milenio noveno hasta el milenio cuarto a.c. En el período paleosumerio se conservaban las simbolizaciones de un sistema de numeración ambiguo que estableció un agrupamiento de distintas cantidades constituidas en un orden específico. El sistema de numeración mesopotámico no obstante, era escaso en simbología, signos y diferentes órdenes en la composición de un número.

Los babilonios, por su parte, desarrollaron uno de los sistemas de numeración más completos en la antigüedad. Este, contaba con representaciones simbólicas para los números, con excepción del cero; además, poseían algoritmos para las cuatro operaciones aritméticas básicas, permitiendo, incluso, escribir fracciones y decimales. Asimismo, desarrollarón algunos métodos elementales para resolver ecuaciones de primer y segundo grado dando aproximaciones bastantes precisas de $\sqrt{2}$ y π. Más adelante, em la época en que los sistemas numéricos se vieron afectados por la escritura, surgieron los llamados sistemas alfanuméricos, que se fundamentan en el principio de agrupamiento, el cual consiste en lo que se conoce como elección de una base del sistema de numeración. De esta manera, sistemas como el romano, estruco, el griego, hebreo, fenicio y árabe se extendieron a lo largo de oriente próximo y medio, y por la cuenca del mediterráneo, influyendo, significativamente, en las culturas ibérica e hindú.

Así el sistema alfabético griego utilizaba 24 signos para la numeración y tres signos complementarios para representar las nueve unidades, las nueve decenas y nueve centenas; para representaciones de cifras superiores se empleaban signos, además de los iniciales. De este modo, un número se comenzó a definir como la combinación de letras y signos especiales. Sin embargo, el sistemas griego estuvo limitado por carecer de un signo para el cero, imposibilitando así su concepción. Los griegos, por otro lado, utilizaban el ábaco para las operaciones de suma, resta y multiplicación, aporte que basádo en el modelo deductivo, ayudo a sentar bases del sistema de los números naturales. Otros aportes a destacar son:

1. La Escuela Pitagórica, cuyos miembros profesaban que los números naturales construían el principio de todas las cosas. Para los pitagóricos el número no era un símbolo de cantidad y construcción intelectual; este, por el contrario, tenía diversas composiciones y relaciones. La noción de número fue de gran importancia en la representación de las configuraciones puntuales, llamados "números figurados" (conocidos hoy en día como números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, cúbicos, piramidales, entre otros), las cuales consideraban cada número como un agregado de puntos según una figura geométrica plana o espacial. Estas configuraciones enriquecieron la parte fundamental de las propiedades generales de los números, descubriendo nuevas relaciones entre ellos.

2. El proceso de contar, que caracterizaron como indefinido y continuo. Este avance se reflejó en los análisis que se realizaban en la matemática y también en la física sobre la noción de infinito, la determinación de dos tipos de infinito entre ellos, el infinito potencial, aplicado a los números naturales, que significa la posibilidad de ampliar continua e infinitamente los números naturales.

3. El trabajo de Euclides, que trata los racionales como proporciones entre números o entre longitudes, pero no los considera números. Esta concepción de Euclides se mantiene vigente durante 2.000 años.

Ya a finales del siglo V d.C. el matemático y astrónomo hindú conocido como Aryabhata o Aryabhata el Viejo (476-550), utilizó el principio posicional y el cero para obtener las raíces cuadradas y cúbica de un número. Posteriormente, al inicio del siglo VII se descubrió la implementación del uso de la numeración decimal y un símbolo para el cero, presentados en la obra del astrónomo indio Bhaskara también conocido como Bhaskara II (1114-1185). Dichos aportes permitieron a los árabes el empleo de las tablas astronómicas traídas por los astrónomos hindúes, con lo cuál se introdujo el principio posicional y el cero en el mundo árabe. El símbolo que se atribuyó para el número cero fue "sunya"que significa vació en hindú; en árabe el equivalente fue "sifr", que dio lugar en latín al termino "zephirum" hasta nuestro actual cero.

El sistema de numeración árabe, por otra parte, se introdujo durante la edad media en Europa gracias a la escuela de intérpretes de Toledo, en la que Juan de Sevilla realizó la primera traducción al latín del texto Aritmética y Álgebra. Allí aparecen los números hindúes, el símbolo del cero y se introducen los algorítmos sin utilizar el ábaco. El primer europeo en emplear el nuevo sistema fue Leonardo de Pisa, quien en su obra llamada "Liber Abacci"donde se explica la forma algorítmica de realizar cálculos con el nuevo sistema de numeración, comparando las ventajas de este nuevo sistema en relación con los números romanos. Además de ello, emplea reglas para el cálculo, muestra las tablas para la suma, la multiplicación y se enuncian reglas para la divisibilidad.

Con respecto al concepto de número, científicos y filósofos han planteado reiteradamente dos tipos de cuestiones, basados en dos ramas de la filosofía consideradas como la base del conocimiento matemático: la ontológia y la epistemología. En la primera, se plantean preguntas sobre la naturaleza de los números como, ¿qué clase de entes son esos símbolos a los que denominamos número? En la segunda se indaga por la formación del concepto de número, es decir, ¿Cuál es el origen de los números?, la relación entre los números y el mundo empírico, así como por la aplicabilidad de los conceptos numéricos.

Teniendo en cuenta lo anterior, La filosofía matemática surge con los pitagóricos quienes proponen un programa científico que analiza la noción de número como uno de los fundamentos del conocimiento. Filolao también llamado Filolao de Tarento o Filolao de Crotona (449-350 a.c) matemático y filósofo griego pitagórico y presocrático, expresa uno de los principios generales del pitagorismo cuando refiere que todas las cosas que se conocen poseen número, pues ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste. Sin embargo, desde un pitagorismo más radical se afirma que las cosas, más allá de poseer número, son números.

La escuela pitagórica establece, entonces, la igualdad entre la realidad numérica y la realidad física, alcanzando su crísis con el descubrimiento de la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal de un cuadrado, derivada del teorema atribuido a Pitágoras. A partir de este descubrimiento el paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica no se pudo mantener.

Platón, por su parte, pasa de la aritmética del hombre a la del filósofo. Y para ello, establece la distinción entre cálculo y lógica, que en nuestra terminología actual tiene el nombre de Teoría de Números pura y aplicada. Para él, los números son ideas que están más allá del número sensible e incluso del número aritmético. La ciencia de los números, de esta forma, alcanza los caracteres de las cosas que logran comprender en sus determinaciones y constituye el paradigma según el cual las cosas sensibles son imitaciones. Para los pitagóricos el uno significa el bien y el infinito es el mal. Sin embargo, hay cosas que están más allá del número, como las longitudes irracionales, sin que por eso dejen de ser evidentes, aun así, encuentran solución en la geometría. Este predominio del programa de Platón, sintetizado en la obra de Euclides, no será superado hasta el siglo XIX.

Los elementos de Euclides establecen, por tanto, la conceptualización de número que va a permanecer cerca de veinte siglos, la cual conserva nociones y planteamientos pitagóricos y propone, a su vez, aplicar el programa deductivo a las nociones estrictamente matemáticas. Los dos conceptos básicos de los elementos son el de unidad y el de número: número; la primera, gracias a la cual cada una de las cosas que hay es llamada una; y el segundo, que se concibe como una pluralidad compuesta de unidades. Así, y tal como lo mencionara Gerónimo Cortés, el concepto de número no es otra cosa que una agregación y ajuntamiento de unidades.

Hasta el siglo $XVII$ se amplía el concepto de número, pues aparece en escena. Nicolás Malebranche (1638-1715) quien considera que todo número es una relación. Los números naturales son, así las cosas, relaciones tan verdaderas como los números quebrados según lo expresa Juan de Luna (1575-1645), escritor y profesor de lengua español que tradujo la palabra **fractio** en español es fracción para traducir la palabra árabe **al-kasr** que significa quebrar, romper. De luna no se reflexiona en torno a dichos números que, a causa de los números naturales se representan mediante una sola cifra.

Como a la matemática desde sus inicios se consideró una disciplina interesante, por los procesos de razonamiento y estimulación del pensamiento lógico. En 1899 apareció, en la revista *L'Enseignement Mathématique*, el trabajo de Henri Poincaré (1854-1912) sobre la creación matemática, con un cuestionario dirigido a matemáticos profesionales para determinar las condiciones de tal creación. Ello, como resultado de algunas preguntas, planteadas por un grupo de investigadores, tales como: ¿Cómo piensan las personas en matemáticas? ¿Cuál es el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos?... Los especialistas de la época estudiaban de esta manera la contribución de la capacidad matemática por medio de la experiencia y el intelecto, lo cual dió origén a la psicología de las matemáticas, disciplina que relaciona el contenido matemático y el pensamiento humano.

Edward Thorndike (1874-1949, más adelante realizó investigaciones para poder establecer la que llamó "Ley del Efecto", en el sistema de los números naturales y publicó en 1922 el libro de la Psicología de la Aritmética, donde apunta que el aprendizaje aritmético establece y refuerza las piezas de conocimiento numérico, estando de acuerdo con la transferencia de aprendizaje. Además defiende la práctica seguida de la recompensa, como uno de los medios más importantes del aprendizaje humano. Estudia, finalmente, rigurosamente la secuencia de aprendizaje que va de los hechos numéricos básicos a formas más elaboradas del conocimiento aritmético.

En la década de los 50 apareció el psicólogo generalista alemán Max Wertheimer (1880-1943), quien trabajó en problemas matemáticos a partir del pensamiento basado en la comprensión de una estructura. Wertheimer, no obstante, estudió con mayor interés el problema de la suma de términos de una progresión aritmética, usando diversas representaciones que manifestaran la estructura de relación de términos de la progresión. Basándose en esta teoría, Karl Duncker (1903-1940) estudio las estrategias para la resolución de problemas diferenciando procesos ascendentes y descendentes, basado en el desarrollo de un principio estructural.

Posteriormente, para la década de los 60, aparece la *Teoría del Aprendizaje Acumulativo,* propuesta por Robert Mills Gagné, psicolólogo propuesta por Robert Mills Gagné psicolólogo y pedagogo estadounidense (1916-2002) quien explicó por qué los aprendizajes sencillos facilitan conocimientos complejos. Esta técnica de análisis fue, entonces, la jerarquía de los aprendizajes. La mayoría de los ejemplos que usa Gagné para representar su teoría se relacionan con tareas aritméticas y estan encaminadas a determinar y describir los procesos y capacidades implicadas cuando los niños, jóvenes y adultos realizan tareas aritméticas.

George Polya propone, por su lado, la heurística, uso del razonamiento lógico y deductivo necesario para las demostraciones: primero hay que "ver" y luego "demostrar", para la resolución de problemas. Teniendo en cuenta, por otro lado, Los estudios sobre visualización, que establecen el papel que juegan las imágenes visuales en el pensamiento matemático y el aprendizaje de las matemáticas escolares, en 1994, Carlos Prieto de Castro revisa las investigaciones de las visualizaciones. Descubre, asi, que desde los 80 se han estudiado la naturaleza y las características de las imágenes en el descubrimiento y análisis de conceptos y relaciones matemáticas, y que varios investigadores han elaborado estudios destacables en este marco, como es el caso del doctor Luis Rico Romero, quien sostiene que la visualización en el aprendizaje de conceptos numéricos propone una revisión de los sistemas de representación empleados en cada uno de tales sistemas y, asimismo, una recuperación de las representaciones con soporte visual.

Si bien es cierto, en la época griega la distribución de los números figurados construyó el núcleo de las investigaciones orientadas a los estudios de pensamientos numéricos, con el paso del tiempo se realizaron otros tipos de estudios sobre representaciones relativas a la recta numérica, tanto en el sistema de los números naturales como en el de los números racionales y reales. Así, los trabajos e investigaciones, de habilidad matemática, enfocados al estudio del pensamiento matemático se fundamentaron en tres criterios establecidos por el astrónomo, cartógrafo, matemático y físico alemán Johann Tobías Mayer (1723-1762), a saber:

1. El pensamiento cognitivo se refiere a la conducta. Las emociones priorizan el pensamiento y dirigen la atención a la información importante, tienen que ver con el estado de humor del individuo.

2. El pensamiento es un proceso: establece conjunto de operaciones en el sistema cognitivo.

3. El pensamiento es dirigido, resolución de problemas.

Más adelante, Piaget trabajó sobre el proceso y desarrollo del pensamiento y sobre la concepción de número natural. Sus aportes permitieron la construcción operacional de número, a la cual llamo epistemología genética o psicología cognitiva. Se debe tener en cuenta, sin embargo, que la psicología cognitiva no depende solo del marco psicológico, también de la propia estructura y del campo de fenómenos en cuya organización se ocupa, sobre cuyos problemas actúa.

Como hasta ahora se ha evidenciado, la concepción de número ha sido parte de un largo proceso investigativo y de reflexión, en el que todos los aportes han contribuido en el desarrollo y estudio de la matemática y su relación con el paso del tiempo y la evolución del hombre. No obstante, en el presente trabajo se resalta, principalmente, el conocimiento minucioso de términos, técnicas y recursos que la humanidad empezó a construir usando el recurso intelectual llamado número y su contribución a los distintos avances culturales y científicos entre otros acontecimientos importantes durante la historia.

El profesor Luis Rico Romero destaca, por ello, al número como herramienta cultural y a los números naturales como una herramienta con un gran campo de aplicaciones. Así, en uno de sus artículos, determinan los contextos en los que se utilizan los números:

- El primer contexto es el de conteo mediante el cual se determina una secuencia numérica siendo la más usada en el conjunto de los números naturales.

- El segundo contexto es el de cardinal, que nace de la necesidad de dar respuesta a la pregunta ¿Cuánto hay?

- El tercer contexto es el de medida, que permite conocer la cantidad de unidades de cualquier magnitud que hay tomando como referencia una unidad de medida.

- El cuarto contexto es el ordinal según el cual se puede conocer la posición de un elemento, dentro de un conjunto (discreto u ordenado) determinando el lugar que ocupa.

- El quinto contexto corresponde a las operaciones dando respuesta a la pregunta ¿Cuál es el resultado?

- El sexto contexto es el simbólico, en donde se distingue o se denomina el número en fenómenos o elementos. En este contexto simbólico el número se determina según el tiempo y la cultura.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta una breve descripción de los diferentes sistemas numéricos, atendiendo a su desarrollo histórico: el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) con sus respectivas operaciones (suma y multiplicación), los números enteros ($\mathbb{Z}$), con los que se pueden realizar algunas operaciones restringidas para los números naturales, como la resta; La división, los números de la forma $\frac{a}{b}$ dán lugar a la creación de los números racionales; se hace también, un abordaje de los irracionales para llegar, de manera natural, al conjunto de los números reales.

Cada conjunto numérico tiene sus ventajas y desventajas. Mas dichas "desventajas" posibilitaron los avances, en cada uno de los sistemas, para llegar al sistema numérico de los números complejos, el cual revolucionó todo lo conocido, lo palpable, lo visible en el mundo de la matemática fuera de lo real. El surgimiento de este conjunto significo la expansión del espacio conocido, pues ofreció soluciones que no se podían realizar en los reales. El descubrimiento de estos números, además, favoreció grandes avances científicos y tecnológicos actuales.

1.1. NÚMEROS REALES

NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

Los números son la base de la matemática moderna. Fueron creados por la mente humana para contar objetos agrupados de diversos modos, sin embargo, no contienen referencia alguna a las características de dichos objetos "*Dios creo los Números Naturales, el resto es obra de los hombres*". Con estas palabras Leopold Kronecker (1823 - 1891) señaló la base precisa sobre la cuál puede construirse el edificio de la matemática". [1]

El conjunto de los números naturales se puede caracterizar mediante los siguientes axiomas y postulados, introducidos por el matemático italiano Giuseppe Peano en 1889 en su obra "Aritmetices principia nova método exposita"

AXIOMAS:

- El cero es un número natural.
- Todo número natural tiene un único sucesor.
- El cero no es sucesor de ningún número natural. En otras palabras, establece la existencia del primer número natural que es 0.
- Números naturales diferentes tienen sucesores diferentes.
- Si S es un subconjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ tal que: El cero es un elemento de S, y, para cada numéro natural n, si $n \in S$ implica el sucesor de $n \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$. Este último postulado se conoce como el Principio de Inducción Matemática.

Como podemos observar, en los Axiomas de Peano se utilizan tres preconceptos: **número natural** (definido por los axiomas), **primer número natural** (Axiomas 1 y 4), y la función **"ser sucesor de"** o **"siguiente"** ($n \longrightarrow n + 1$)

OPERACIONES EN LOS NATURALES.

Suma: Tiene su origen en el hecho de que a cada número natural le sigue otro. En símbolos esto significa que

$$m+n=m+\underbrace{(1+1+1+...+1)}_{n-veces}$$

La suma de naturales puede interpretarse de dos maneras:

a. Conocidas las partes, hallar el todo.

b. Conocida una parte y su exceso sobre otra parte, hallar la otra parte.

Resta: Si m, n son números naturales, con $m \neq n$, la resta $m-n$ es el número natural d para el cual se verifica que $m=n+d$.

La resta puede interpretarse de dos maneras:

a. Conocida una parte, y el todo, hallar la otra parte.

b. Conocidas dos partes del todo hallar el exceso de una parte sobre la otra.

Multiplicación: Si m, n son números naturales, el producto $m \cdot n$ es una suma abreviada. La expresión $m \cdot n$, significa sumar m con ella misma n veces. En símbolos:

$$m \cdot n \quad = \quad \underbrace{m+m+m+\ldots+m}_{n-veces}=\underbrace{n+n+n+\ldots+n}_{m-veces}$$

División: Dados n, m números naturales, $n \neq 0$, dividir m entre n es encontrar dos números naturales q y r de manera que:

$$m=n \cdot q+r, \text{ con } 0 \leq r<n.$$

Los números m, n, q y r son llamados, respectivamente, dividendo, divisor, cociente y residuo. Cuando $r=0$, la división es exacta y, en tal caso, decimos que n es un divisor de m ó que m es un múltiplo de n. Si éste es el caso, la división puede interpretarse de dos maneras:

a) Como una operación inversa de la multiplicación: Dado el producto de dos números, y uno de ellos, hallar el otro número.

b) Dentro del contexto parte-todo: se trata de dividir el todo en partes iguales.

Cuando $r \neq 0$ la división puede considerarse como un reparto en partes iguales, pero sobra una cantidad llamada resto.

A continuación, presentamos las propiedades que cumplen los números naturales en la suma y en la multiplicación.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE LOS NÚMEROS NATURALES

La suma en los números naturales cumple las siguientes propiedades:

- **Ley de composición interna (propiedad clausurativa):** La suma de dos números naturales cualesquiera da como resultado otro número natural: Si a y b son números naturales, $a+b$ también es natural.
- **Propiedad conmutativa:** Al sumar dos números naturales, el orden de los sumandos no altera el resultado: sean a y b números naturales, $a+b=b+a$
- **Propiedad asociativa:** Al sumar tres o más números naturales, el orden de agrupar los sumandos no varía el resultado: sea a, b y c números naturales, entonces $(a+b)+c=a+(b+c)$
- **Elemento neutro:** El número cero (0) es el elemento neutro de la suma, se verifica o se cumple que todo número sumado con el cero da como resultado el mismo número. $0+b=b+0=b$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES

- **Propiedad clausurativa:** El producto de dos números naturales, es otro número natural. Si a y b números naturales, también $a \cdot b$ lo es.
- **Propiedad conmutativa:** Al multiplicar dos números naturales a y b, el orden en el que se operan los factores no altera el producto: $a \cdot b = b \cdot a$
- **Propiedad Asociativa:** Si se multiplican tres o más números naturales, el orden de agrupar los factores no altera ni varía el producto. Esto es, sean a, b y c números naturales: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Propiedad distributiva:**Multiplicar un número natural por la suma de dos números naturales es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos, es decir, si a, b y c son números naturales:

  $$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

  Nótese que, en el miembro derecho cuando se aplica la propiedad distributiva, se puede realizar el proceso de "sacar factor común", es decir el número natural que aparece en cada sumando:
- **Existencia de elemento neutro:** El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación de los números naturales, ya que todo número natural multiplicado por 1 el producto es el mismo número. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

Aunque tienen gran utilidad, los números naturales se tornan insuficientes para explicar algunas situaciones de la vida diaria: tener deudas, medir temperaturas bajo cero, medir alturas por debajo del nivel del mar o de la superficie terrestre, reseñar acontecimientos antes del nacimiento de Cristo... Es así como, a raíz de la necesidad de representar estas cantidades, surgieron los números enteros, conformados por:

- Los enteros positivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... que se pueden escribir +1, +2, +3, +4... Aunque, por lo general, el signo positivo suele omitirse, toda vez que si un número no lleva signo se reconoce como positivo.
- El cero (0): Este número no se considera ni positivo ni negativo.
- Los números negativos: $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9\ldots$ que en adelante, se llamaran los opuestos de los enteros positivos, razón por la cual se les coloca el signo menos "$-$"delante.

Este conjunto permitió la realización de operaciones que, como se menciono anteriormente, eran imposible resolverse con los naturales. Tal es el ejemplo de la resta, operación en la que el minuendo es menor que el sustraendo $4-7=-3$ resultando, por tanto, imposible de realizarse con el conjunto de los números naturales.

En general, el opuesto de un número es un número que sumado con él primero da como resultado cero. Así las cosas, sea $-a \in \mathbb{Z}$ el opuesto de $a \in \mathbb{Z}$, y recíprocamente ya que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Es importante aclarar que, la resta en los naturales $m - n$ puede hacerse solo si $m \geq n$; la resta o sustracción no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$, lo que quiere decir que, en general, si a es un número natural ($a \geq 1$) la ecuación $x+a=0$ no puede ser resuelta en los naturales. En los números enteros, por el contrario, para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe el opuesto de a (ó el inverso aditivo de a), notado $-a$ que resuelva la ecuación $x + a = 0$.

Así las cosas, el propósito siguiente es operar (sumar, restar y multiplicar) con los opuestos, conservando las propiedades que las operaciones tienen en los naturales (conmutativa, asociativa, distributiva, elementos neutros etc). Y para alcanzar dicho propósito se establecen los siguientes resultados:

a) $-(-a) = a$. Se justifica de la igualdad $(-a) + a = 0$. Es decir a es el opuesto de $-a$ y recíprocamente.

b) $(-a) + (-b) = -(a + b)$: se justifica porque $(-a) + (-b)$ es el opuesto de $(a + b)$.

c) $a + (-b) = -(b + (-a))$: se justifica porque $a + (-b)$ es el opuesto de $b + (-a)$.

Con base en este resultado se define la resta: $a - b = a + (-b)$. La cual es válida en todos los casos.

Para el caso de la multiplicación se mencionan las siguientes propiedades:

a) $a(-b) = -(ab)$: se justifica por que $a(-b)$ es el opuesto de $a \cdot b$.

b) $(-a)(-b) = a \cdot b$, resultado que puede obtenerse del caso anterior, colocando $(-a)$ en lugar de a

$$(-a) \cdot (-b) = -((-a) \cdot b) = -(-a \cdot b) = a \cdot b$$

Un breve resumen de lo dicho anteriormente es el siguiente:

- Los números enteros están formados por los números naturales, junto con los opuestos de los números naturales a partir del 1.

$$Z = \{\ldots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

- Los números enteros no tienen primer elemento. La ecuación $x + a = b$, puede resolverse en los enteros.
- La suma y la multiplicación de números enteros satisface las mismas propiedades que la suma y multiplicación definidas en los números naturales.

Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Aun cuando los números enteros bastan para resolver el problema de contar, en la cotidianidad, normalmente, se hace necesario medir magnitudes como longitud, área, peso, tiempo) que, además de expresarse con números que no son enteros, resultan de divisiones no exactas que relacionan cantidades arbitrariamente grandes y pequeñas. Y como los enteros no responden a esta necesidad resulta imperativo ampliar el conjunto.

Con base en lo anterior, el primer paso consiste en reducir el problema de medir al de contar. Para ello, Se elige una unidad de medida y, posteriormente, se cuenta el número de veces que puede colocarse en la unidad que quiere medirse. Por ejemplo, si fueron r veces, diremos que la magnitud mide r unidades, o sea, que la magnitud es múltiplo entero de la unidad de medida.

Sin embargo, la mayoría de veces la magnitud no es múltiplo entero de la unidad escogida. Se procede entonces a dividir la unidad escogida en n partes iguales (por ejemplo, el minuto se divide en 60 segundos, el metro en 100 centímetros, la libra en 16 onzas etc.) y cada una se representa con el simbolismo $\frac{1}{n}$. Si la magnitud que quiere medirse contiene exactamente, m de estas subunidades, diremos que la magnitud mide $\frac{m}{n}$ subunidades, simbolismo denominado fracción o razón.

Por otra parte, la ecuación $bx = a$, con a y b números enteros y $b \neq 0$, puede resolverse en los enteros únicamente cuando b divide a a. Si éste no es el caso, el nuevo número representado con el simbolismo $\frac{a}{b}$ resuelve esa ecuación. De esta manera, queda establecido que $b \times \frac{a}{b} = a$. Así las cosas, todos los nuevos símbolos $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, forman el conjunto de los números racionales.

Como todo entero a puede escribirse en la forma $\frac{a}{1}$ se deduce que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Una diferencia importante entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es que mientras entre dos enteros consecutivos no hay más enteros, entre dos racionales distintos pueden encontrarse infinitos números racionales.

Por útimo, en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales las operaciones suma y multiplicación cumplen las mismas propiedades que en los naturales.

NÚMEROS IRRACIONALES ($\mathbb{R}/\mathbb{Q}$)

Un segmento de longitud a se llama conmensurable con la unidad, si esta puede dividirse en n partes iguales de longitud $\frac{1}{n}$ de manera que a sea múltiplo entero de $\frac{1}{n}$, así que $a = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$

Por ejemplo, un segmento de longitud $\frac{7}{5}$ es conmensurable con la unidad si al dividir la unidad en 5 partes de tamaño $\frac{1}{5}$, esta parte, cabe 7 veces en $\frac{7}{5}$, o sea

$$\tfrac{7}{5} = 7 \cdot \tfrac{1}{5}$$

La existencia de segmentos inconmensurables da origen a los números irracionales. Por ejemplo, la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado, en un círculo la longitud de la circunferencia es inconmensurable con su diámetro, la diagonal de un cubo, es inconmensurable con su arista.

Los números irracionales ($\mathbb{R}/\mathbb{Q}$), entonces son los que corresponden a los segmentos inconmensurables. Las expansiones decimales de los racionales son finitas o infinitas periódicas; las de los irracionales, son infinitas no periódicas. Los números Reales ($\mathbb{R}$) así, resultan de la unión de los racionales con los irracionales.

NÚMEROS COMPLEJOS ($\mathbb{C}$)

Los números complejos fueron mencionados por primera vez en 1.545, por el médico y matemático italiano Girolamo Cardano, en su tratado de solución de las ecuaciones cúbicas y cuadráticas titulado **"Ars Magna"**. Para la época, el concepto de número negativo apenas había tenido aceptación, además, aún había controversia en torno a sus propiedades. Por tal motivo, Las cantidades "ficticias"de Cardano fueron ignoradas por la mayoría de sus contemporáneos.

Aunque ya los griegos conocían las fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas, asociaban los números con las longitudes de segmentos construibles con regla y compás (daban soluciones geométricas a las ecuaciones), por ello, una ecuación como $x = 0$ ó $x^2 + 2x + 1 = 0$ no tenía solución según su sistema matemático.

Hacia el final de la escuela Alejandrina, el matemático Diofanto de Alejandría ($\sim 210 - \sim 290$), propuso el siguiente problema:

"Hallar los lados de un triángulo rectángulo, de perímetro 12 *y área* 7*".*

Claramente para la resolución de éste problema se hacía necesaria una ecuación cuadrática con raíces complejas. Pasaron varios siglos hasta que los matemáticos hindúes empezaron a reconocer raíces negativas y Fibonacci (Leonardo de Pisa) descubriera que algunas raíces (reales o longitudes de segmentos) no se podían construir con regla y compás.

El descubrimiento de Cardano y de otros matemáticos italianos del siglo XVI evidenció la existencia de ecuaciones con raíces que no tenían una interpretación en el sistema geométrico griego. Surgieron entonces nombres curiosos como raíces "reales" e "imaginarias", pero la tendencia casi universal, rechazaba dichas raíces porque no tenían una explicación, sencilla, que tuviera una representación, al menos intuitiva.

Para finalizar, es importate tener en cuenta los números complejos, el Teorema Fundamental del Álgebra sería falso.

1.2. LOS APORTES DE WALLIS, WESSEL, ARGAND Y GAUSS.

Considerado como el mejor matemático inglés, antes de Newton, John Wallis (1616-1703), nació en Ashford Inglaterra el 23 de noviembre de 1616. Hizo sus estudios en Cambridge, donde obtuvo su bachillerato y una licenciatura. A raíz de sus estudios como sacerdote su aprendizaje de las matemáticas no comenzó hasta los 20 años; no obstante, logró obtener la cátedra de Geometría en Oxford, sucediendo a Briggs, quien la ocupaba desde 1619. Fue en 1665 cuando Wallis publicó dos de sus obras más importantes, una sobre Geometría Analítica y otra sobre Análisis Infinito. Sus contribuciones más notables las realizó en el campo del análisis infinitesimal, además, se adelantó a Euler en la función gamma, encontrando resultados intermedios para el número π por interpolación.

Wallis sustituía los conceptos geométricos por conceptos numéricos, cuando era posible, porque sostenía que las demostraciones algebraicas eran tan válidas como las geométricas y afirmaba, asimismo, que las proposiciones no debían ser interpretadas geométricamente, sino como conceptos aritméticos.

Fue Wallis, aunado a lo anterior, el primero en representar geométricamente las cantidades imaginarias al intepretar algebraicamente un número complejo puro como la primera proporcional entre un número positivo y un número negativo. Después, construyó figuras geométricas que le permitieron darse cuenta de la existencia de los números complejos y determinar las raíces de una ecuación cuadratica. Desgraciadamente, sus trabajos no tuvieron éxito, porque no pudo descubrir una construcción gráfica general y consistente para todos los valores complejos.

La primera explicación que satisface, entonces, la representación geométrica de los números complejos se publicó en el año 1799 en la Academia Real de Dinamarca, pero no obtuvo ningún impacto en las matemáticas europeas antes de 1897, año en que fue publicada nuevamente, con el título de **"Essai Sur la representación analytique de la direction"** en versión francesa.

El interés de Wessel Caspar (1745-1818)teniendo en cuenta lo anterior, se centra en la creación de métodos geométricos para representar números complejos, pues concebía estos números como vectores del plano. De esta manera, desarrollaba la suma y resta de complejos usando desplazamientos de vectores, pero conservando la dirección de uno de ellos. Su propuesta, además, para la multiplicación de números complejos corresponde a lo que actualmente se conoce como producto de complejos representados en forma polar: multiplicar longitudes y sumar ángulos. Los trabajos de Wessel fueron publicados gracias a la influencia de Jean Robert Argand (1768 – 1822).

Karl-Friedrich Gauss (1777 – 1855), nacido en Gotinga (Alemania) el 10 de abril de 1777, provenía de una familia humilde. Su don para la matemática era tal que se suele decir que aprendió a "calcular antes de hablar". A los tres años, ya ayuda a su padre, quién trabajaba en una compañía de seguros, a corregir las cuentas de pagos de obreros; y a los ocho años resolvió hábilmente un problema propuesto por su profesor, de la escuela elemental, para tener ocupados a sus alumnos: encontrar la suma de los primeros cien números naturales.

A los once años, con el patrocinio del Duque Carlos Guillermo, ingresó a un colegio y luego a la universidad de Gotinga. Durante estos años Gauss perfeccionó sus conocimientos de aritmética y estudió los "Principia de Newton" y el "Ars Conjectand", de Bernoulli. A los diecinueve años, se debatía entre dedicarse al estudio de la filosofía o al de las matemáticas. Finalmente, se decide por esta última, y es así como el 30 de marzo de 1796 obtiene, a partir del estudio de las ecuaciones ciclotómicas, la construcción del polígono regular de diecisiete lados con regla y compás. Ese día, consigna la primera anotación en su célebre diario matemático en el que, durante dieciocho años, inscribiría 146 enunciados de los resultados de sus trabajos. Tal diario, que consta de diecinueve páginas, fue encontrado en 1898 y publicado por Félix Klein en 1901.

En 1799 obtiene doctorado de la Universidad de Helmsted, bajo la dirección, del profesor Johann Friedrich Pfaff. Su tesis de doctorado constaba de la demostración de que toda ecuación polinómica, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ tiene al menos una raíz, cualquiera que sea la naturaleza real o imaginaria de los coeficientes de la ecuación.

En 1801 escribe, y publica, su tratado "Disquisitiones Aritmeticae", en el que presenta un resumen de los trabajos de sus predecesores Fermat Euler, Lagrange y Legendre, de al menos un siglo, sobre Teoría de Números. Gauss además de su trabajo en matemáticas hizo grandes contribuciones en otras ciencias como la Astronomía y la Geodesia. Buena parte de su vida transcurrió en la universidad de Gotinga en donde, aparte de desempeñarse como profesor, fue director del observatorio y decano. Se dice que allí estableció un fondo para las viudas de profesores sobre bases actuariales muy sólidas, aprendió a leer y escribir el ruso y continuó, por supuesto, trabajando gran variedad de problemas matemáticos, asegurando, a su vez, una enseñanza para estudiantes cada vez mejor preparados, entre los que están Dedekind y Riemann.

En 1851 aprobó la Tesis Doctoral de Riemann sobre los fundamentos del Análisis Complejo, y en junio de 1854, cuando su salud ya se encontraba deteriorada, asistió al curso inaugural de Riemann en Gotinga. falleció, finalmente, el 23 de febrero de 1855.

Su incidencia en el campo de la matemática ha sido tal que trabajos como los de Wessel y Argand sobre la representación de los números complejos, no impactaron lo suficiente a la comunidad matemática de la época como para que fueran aceptados. Contrario a ello, hubo que esperar a las contribuciones de Gauss, a quien se le debe el uso de "número complejo.$^{\text{en}}$ lugar de "cantidades imaginarias", sobre el tema para que, por fin, este conjunto fuese aceptado.

Fue en 1831 cuando Gauss hizo pública su descripción de la representación geométrica de los números complejos, en una memoria sobre los restos bicuadráticos presentada a la Sociedad Real de Gotinga. Así, presenta $a + ib$ no como un vector, como lo hacían Wessel y Argand, sino como un punto del plano, además, describe la adición y la multiplicación geométrica de esos números y, finalmente introduce la letra i para para designar la raíz cuadrada de -1, $(i = \sqrt{(-1)})$.

Las ideas de Gauss sobre las cantidades imaginarias suponen una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano: representa el número $x + iy$ mediante coordenadas (x, y) de un punto en el plano. En una carta dirigida a Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) en 1811 expresa que de la misma manera que puede representarse el dominio entero de todas las cantidades reales mediante una recta indefinida (recta real), puede imaginarse el dominio entero de todas las cantidades, las cantidades reales y las imaginarias mediante un plano indefinido en el que todo punto, determinado por su abscisa a y su ordenada b, representa, por así decirlo, la cantidad $a + ib$.

1.3. Operaciones básicas con números complejos

El conjunto de los números complejos, al igual que los demás conjuntos numéricos, contiene operaciones, entre elementos del mismo conjunto, (suma, diferencia, producto, cociente entre otras), que se apoyan en propiedades de los números reales, y tienen diferentes representaciones. En la siguiente tabla se representa un número complejo, y las operaciones más usuales de manera algebraica.

Terminología	Definición Algebraica
Número complejo	$z = a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$
Suma	$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
Diferencia	$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
Producto	$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad-bc)i$
Conjugado	$\bar{z} = a - bi$
Cociente	$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\cdot\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

[11] Tomada del libro Álgebra y trigonometría con geometría analítica autor Swokowski.

1.4. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CÚBICA

La ecuación cubica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ puede resolverse por radicales, los dos resultados siguientes constituyen la forma de hacerlo.

Teorema: El cambio de variable $y = x + \frac{b}{3a}$ transforma la ecuación cúbica $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ donde $a \neq 0$, en otra cúbica de la forma $y^3 + py + q = 0$

Demostración: Puesto que $a \neq 0$, las cúbicas puede escribirse como $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Como $y = x + \frac{b}{3a}$, entonces

$$\begin{aligned} y^3 = \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 &= x^3 + 3x^2\left(\frac{b}{3a}\right) + 3x\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 \\ &= x^3 + x^2\left(\frac{b}{a}\right) + x\left(\frac{b^2}{3a^2}\right) + \frac{b^3}{27a^3} \end{aligned}$$

Luego: $x^3 + \dfrac{b}{a}x^2 = y^3 - \dfrac{b^2}{3a^2}x - \dfrac{b^3}{27a^3}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= y^3 - \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \\ &= y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} \\ &= y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right) y - \frac{bc}{3a^2} + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} \\ &= y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right) y + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \end{aligned}$$

Al hacer: $p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2}$, y, $q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}$, obtenemos: $y^3 + py + q = 0$

Teorema: (Sustitución de Vieta). El cambio de variable $y = z - \dfrac{p}{3z}$ transforma la cúbica $y^3 + py + q = 0$, en una cuadrática.

Demostración: Como $y = z - \dfrac{p}{3z}$, entonces:

$y^3 = \left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 = z^3 + 3z^2\left(-\frac{p}{3z}\right) + 3z\left(-\frac{p}{3z}\right)^2 - \frac{p^3}{27z^3} = z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3}$
Luego

$$0 = z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + p\left(z - \frac{p}{pz}\right) + q = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q$$

multiplicando por z^3, se obtiene:

$$0 = z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27}$$

haciendo el cambio de variable $v = z^3$, se llega a la cuadrática

$$v^2 + qv - \frac{p^3}{27} = 0$$

las soluciones de esta cuadrática son:

$$v = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(1)\left(\frac{p^3}{27}\right)}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \left(\frac{4p^3}{27}\right)} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^3 - 2x - 21 = 0$.

Solución: En este caso: $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = -21$. Como $b = 0$, no hay término cuadrático, luego: $p = -2$ y $q = -21$. Se puede hacer directamente la sustitución de Vieta, $x = z - \frac{p}{3z} = z - \frac{2}{3z}$ para obtener la cuadrática:

$$v^2 + qv - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad ó \qquad v^2 - 21v + \frac{8}{27} = 0$$

Como $v = z^3$, entonces

$$v = \frac{21 \pm \sqrt{(21)^2 - 4(1)\left(\dfrac{8}{27}\right)}}{2} = \frac{21 \pm 20{,}97176}{2} = 20{,}98588$$

Así que $z_1 = 2{,}758305$

Una raíz de la ecuación inicial es entonces:

$x_1 = z_1 - \dfrac{p}{3z_1} = z_1 - \dfrac{2}{3z_1} = 2{,}758005 + \dfrac{2}{3(2{,}758305)} = 2{,}999999 \approx 3$

El valor $x_1 = 2{,}999999$, sugiere que $x = 3$ es raíz de la ecuación inicial $x^3 - 2x - 21 = 0$. Llamando $p(x) = x^3 - 2x - 21$. Como $p(3) = 3^3 - 2(3) - 21 = 0$. Luego: $p(x) = (x-3)\left(x^2 + 3x + 7\right)$

Las otras raíces se obtienen resolvíendo la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 7 = 0$, las cuales son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

Es decir, $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{19i}}{2}$ y $x_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{19i}}{2}$

Se puede, ahora, abordar el siguiente problema: ¿Cuál es el valor de la arista de un cubo de manera que su volumen sea igual a su perímetro disminuido en $10\sqrt{2}$?

Para facilitar la solución, es conveniente establecer el siguiente resultado preliminar: Si $z = a + bi$ es un número complejo distinto de cero, ¿que condiciones debe satisfacer z para que el número $z + \frac{4}{z}$ sea un número real?

Si $z = a + ib$, entonces:

$$\begin{aligned}
z + \frac{4}{z} &= a + ib + \frac{4}{a+ib} \\
&= \frac{(a+ib)^2 + 4}{a+ib} = \frac{\left(a^2 - b^2 + 4\right) + 2abi}{a+ib} \\
&= \frac{\left[\left(a^2 - b^2 + 4\right) + 2abi\right](a - ib)}{(a+ib)(a-ib)} \\
&= \frac{a[a^2 - b^2 + 4 + 2abi] - ib[a^2 - b^2 + 4 + 2abi]}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^3 - ab^2 + 4a + 2a^2bi - a^2bi + b^3i - 4ib - 2ab^2i^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^3 - ab^2 + 4a + a^2bi + b^3i - 4ib - 2ab^2(-1)}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^3 + 4a + a^2bi + b^3i - 4ib + ab^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^3 + ab^2 + 4a}{a^2 + b^2} + \frac{a^2bi + b^3 - 4ib}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Para que $z + \dfrac{4}{z}$ sea real es necesario que $b^3 + a^2bi - 4ib = 0$. En tal caso $z + \dfrac{4}{z} = \dfrac{a^3 + ab^2 + 4a}{a^2 + b^2}$ es un número real.

El problema se reduce resolver la cúbica $x^3 - 12x + 10\sqrt{2} = 0$. Como $b = 0$ (no hay término cuadrático) podemos aplicar la sustitución de Vieta $x = z - \dfrac{p}{3z}$, con $p = -12$ y $q = 10\sqrt{2}$.

Con esta sustitución, la cúbica se transforma en: $z^3 + \dfrac{64}{z^3} + 10\sqrt{2} = 0$. Multiplicando por z^3, se obtiene: $z^6 + 10\sqrt{2}z^3 + 64 = 0$.

Haciendo $z^3 = w$, se llega a la cuadrática

$$w^2 + 10\sqrt{2}w + 64 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$w = \frac{-10\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 4(1)(64)}}{2} = -5\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i$$

y por lo tanto $z = \sqrt[3]{-5\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}$

Aparecen, entonces, tres pares de valores para z (las raíces cúbicas de w) entre los que están las soluciones del problema.

- Raíces cúbicas de $w = -5\sqrt{2} + \sqrt{14}i$:
- Módulo de $w : |w| = \sqrt{50 + 14} = \sqrt{64} =$
- Argumento de $w : \theta = 2{,}648$ radianes

Luego: $w = 8(cos 2{,}6548 + isen 2{,}6548)$

Las raíces cubicas de w son:

$$u = 8^{\frac{1}{3}}\left(\left(cos\left(\frac{2.6548 + 2k\pi}{3}\right)\right) + i\left(sen\left(\frac{2.6548 + 2k\pi}{3}\right)\right)\right);\ k = 0,\ 1,\ 2$$

$$\begin{aligned} Si \qquad k = 0\ :\ u_0 &= 2\left(cos\left(\frac{2.6548}{3}\right) + i\, sen\left(\frac{2.6548}{3}\right)\right) \\ &= 2\,(0.63334 + i0.77387) \\ &= 1.26668 + i\ 1.54774 \end{aligned}$$

Para el caso: $a = 1.26668$, $\quad b = 1.54774$

$$\begin{aligned} Luego: \qquad b^3 + a^2b - 4b &= 2.03236 + 2.48331 - 6.19096 \\ &= -1.67529 \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces u_0 no proporciona solución real de la cúbica.

Si $k = 1\,:\,u_1 = 2\left(cos\left(\frac{2.6548+2\pi}{3}\right)+i\,sen\left(\frac{2.6548+2\pi}{3}\right)\right)$

$$= 2\,(-0.98686 + i\,0.16155)$$

$$= -1.97372 + i\,0.3231$$

Si $a = -1.97372$ y $b = 0.3231$, entonces $b^3+a^2b-4b = 0.03372+1.25865-1.2924 = -0.00003$, así que u_1 tampoco es solución del problema.

$$\begin{aligned} Si \qquad k = 2\,:\,u_2 &= 2\left(cos\left(\frac{2.6548+4\pi}{3}\right)+i\,sen\left(\frac{2.6548+4\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\,(0.35352 - i\,0.93542) \\ &= 0.70704 - i\,1.87084 \end{aligned}$$

Luego $a = 0.70704$ y $b = -1.87084$. De esta manera, $b^3 + a^2b - 4b = -6{,}5801 - 0.93524 + 7.48336 = 0.00011$. Por lo que u_2 proporciona una raíz real dada por:

$$\begin{aligned} \frac{a^3+ab^2+4a}{a^2+b^2} &= \frac{0.35345+2.47466+2.82816}{0.49990+3.50004} \\ &= \frac{5.65627}{3.99994} = 1.41488 \end{aligned}$$

u_2 es una solución del problema.

- De la misma forma, se calculan las raíces cúbicas de $\overline{V} = 5\sqrt{2}-\sqrt{14}i$, obteniéndose como raíces los números:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0.70704 + i\,1.87084 = \overline{u_2} \\ t_1 &= -1.97372 - i\,0.3231 = \overline{u_1} \\ t_2 &= 1.26668 - i\,1.54774 = \overline{u_0} \end{aligned}$$

- La raíz de t_1, proporciona una solución de la cúbica, pero no del problema; t_0 no proporciona solución de la cúbica, t_2 proporciona la solución real:

$$\frac{a^3+ab^2+4a}{a^2+b^2} = \frac{2.03236+3.03433+5.06672}{1.60447+2.39549} = 2.53337$$

El problema entonces tiene dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.41488 \\ x_2 &= 2.53337 \end{aligned}$$

Observación: la solución $x_1 = 1.41488$, sugiere que $x = \sqrt{2}$ es una solución exacta: En efecto, llamando $p(x) = x^3 - 12x + 10\sqrt{2}$, entonces $p(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 0$

Luego: $p(x) = (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 10)$. Las soluciones de la cuadrática son:

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(2 - 4(1)(-10)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{\sqrt{2}}$$

Finalmente las soluciones reales de la cúbica $x^3 - 12x + 10\sqrt{2} = 0$ son entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} = 1.4142 \\ x_2 &= \frac{-1 + \sqrt{21}}{\sqrt{2}} = \frac{3.58257}{1.4142} = 2{\cdot}53328 \\ x_3 &= \frac{-1 - \sqrt{21}}{\sqrt{2}} = \frac{-5.58257}{1.4142} = -3.94751 \end{aligned}$$

En el presente capítulo se presentó una introducción al conjunto de los números complejos por medio de un recorrido histórico de los hechos más importantes, en la evolución de las matemáticas, que generaron impacto, en su momento, y suscitaron preguntas, algunas de las cuales, a día de hoy, siguen vigentes.

Asimismo, se mostraron ejemplos de ecuaciones cúbicas, que se resuelven siendo sustituidas por una ecuación cuadrática. Así, en el siguiente capítulo se encontrarán métodos que se han demostrado y utilizado para resolver una ecuación cuadrática, además, se analizará el comportamiento de las ecuaciones y sus soluciones, reales o complejas, con problemas que muestran el carácter de las raíces.

CAPÍTULO 2

LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Los números a, b y c son llamados los coeficientes de la variable x que, como se verá, puede ser real o compleja. Las ecuaciones de segundo grado se clasifican en ecuaciones completas e incompletas.

2.1. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMPLETA

Una ecuación es completa cuando su expresión matemática contiene los tres números a, b y c antes mencionados, ninguno de ellos nulo.

Ejemplo: La ecuación $7x^2 - 8x = 7$ es una ecuación completa de segundo grado con $a = 7$, $b = -8$, $c = -7$.

2.2. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETA

La ecuación es incompleta cuando no contiene el término líneal de la incógnita o el término independiente. Pueden presentarse de dos formas:

- La ecuación $ax^2+c=0$, en donde no aparece el término lineal. Se resuelve de la siguiente manera:

  Se resta c en ambos lados de la igualdad: $ax^2 = -c$

  Se divide por $a \neq 0$ en ambos lados de la igualdad: $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

  Se saca raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad: $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

  Ahora, se analiza el radical, el cual depende de los valores de los coeficiente a y c:

  • Si tanto a como c son ambos positivos o negativos.

  La expresión $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, genera (da lugar a) soluciones complejas.

• Si uno solo de los dos, a ó c es negativo, la expresión $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ da lugar a soluciones reales.

- La ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$, en donde el término independiente no aparece (es igual a cero), pero aparece la potencia de primer grado de la variable, se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = 0 &\longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \\ &\longleftrightarrow x = 0 \quad o \quad ax + b = 0 \\ &\longleftrightarrow x = 0 \quad o \quad x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Se ve que una de las raíces es cero y la otra es igual al cociente que resulta de dividir el coeficiente del segundo término, con signo contrario, por el del primero. Queda claro, así, que las soluciones son números reales.

Ejemplo: Resuelva la ecuación $\dfrac{8x^2}{15} = 120$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{8x^2}{15} = 120 &\longleftrightarrow x^2 = \frac{120(15)}{8} \\ &\longleftrightarrow x^2 = 15 \times 15 = 225 \\ &\longleftrightarrow x = \pm\sqrt{225} = \pm 15 \end{aligned}$$

Luego, las raíces son $x = 15$ y $x = -15$

Ejemplo: Resuelva la ecuación $(x-2)(x+5) = 9x - 10$

Solución:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+5) &= 9x - 10 \\ &\longleftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 9x - 10 \\ &\longleftrightarrow x^2 - 6x = 0 \\ &\longleftrightarrow x(x-6) = 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad o \quad x_2 - 6 &= 0 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} = 6$

Solución: Al realizar la suma de las fracciones algebraicas se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1} &= 6\\
&\longleftrightarrow \quad (x+1)^2+(x-1)^2=6(x^2-1)\\
&\longleftrightarrow \quad (x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)=6x^2-6\\
&\longleftrightarrow \quad 2x^2+2=6x^2-6\\
&\longleftrightarrow \quad 4x^2-8=0\\
&\longleftrightarrow \quad x^2-2=0\\
&\longleftrightarrow \quad x^2=2\\
&\longleftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Luego las raíces son $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$.

2.3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN COMPLETA

2.3.1. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Al solucionar una ecuación cuadrática es usual encontrar una forma de escribirla como el producto de dos factores.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2-3x=-2$

Solución: Es claro que

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$$

Al igualar cada factor a cero se tienen dos raíces:

$$\begin{aligned}
(x-1)=0 \quad &o \quad (x-2)=0\\
x_1=1 \quad &o \quad x_2=2
\end{aligned}$$

2.3.2. COMPLETANDO EL CUADRADO

Ejemplo: Resuelva la ecuación $ax^2+bx+c=0$, donde los números a, b y c son todos no nulos.

Solución:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\\
&\longleftrightarrow \quad ax^2+bx=-c\\
&\longleftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\\
&\longleftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\\
&\longleftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\longleftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
&\longleftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}
\end{aligned}
$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$ en cualquier caso

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 15 = 0$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
&2x^2 + 7x + 15 = 0 \\
&\longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{7x}{2} + \frac{49}{16} - \frac{49}{16} + \frac{15}{2} = 0 \\
&\longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{7x}{2} + \frac{49}{16} = \frac{49}{16} - \frac{15}{2} \\
&\longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-71}{16} \\
&\longleftrightarrow \quad \sqrt{\left(x + \frac{7}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{-71}{16}} \\
&\longleftrightarrow \quad x + \frac{7}{4} = \pm\frac{\sqrt{-71}}{4}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$x + \frac{7}{4} = \frac{\sqrt{-71}}{4} \quad o \quad x + \frac{7}{4} = -\frac{\sqrt{-71}}{4}$$

De donde resulta que:

$$x_1 = \frac{-7 + i\sqrt{71}}{4} \quad o \quad x_2 = \frac{-7 - i\sqrt{71}}{4}$$

Los ejemplos anteriores ilustran diferentes casos en los que pueden encontrarse las ecuaciones de segundo grado y la manera de resolverlas. Sin embargo, existe una manera, más general, de solucionar cualquier ecuación de segundo grado: aplicar la llamada formula general, también conocida como "fórmula del bachiller", expuesta a continuación.

2.3.3. LA FÓRMULA GENERAL

Para resolver la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se procede como sigue: se divide la ecuación por el coeficiente del término cuadrático, $a \neq 0$ y se obtiene:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Se separa el término constante y se procede de manera similar como se procedió para completar cuadrados. Para ello, se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Se factoriza el primer término en un binomio cuadrado

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Al extraer la raíz cuadrada se obtiene:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De donde

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si se llama x_1 y x_2 a los valores de las raíces, se tiene:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 - 7x - 14 = 0$

En este caso, $a = 1$, $b = -7$ y $c = -14$, aplicando la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$Esdecir, x = \frac{7 + \sqrt{105}}{2} \quad o \quad x = \frac{7 - \sqrt{105}}{2}$$
$$Obien, x = 8,623475 \quad o \quad x = 1,623475$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x^2 - x + 2 = 0$

Solución:

Es claro que $a = 3$, $b = 1$ y $c = -2$, aplicando la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son $x = \frac{2}{3}$ o $x = -1$

2.3.4. EL PROCEDIMIENTO HINDU

Considérese la ecuación cuadrática completa:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se traslada el término c al lado derecho de la igualdad y se multiplica por $4a$ en ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Se suma a ambos miembros, la cantidad b^2. Se nota, así, que el miembro izquierdo es el cuadrado del binomio $2ax + b$:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Factorizando :

$$\begin{aligned} (2ax+b)^2 &= b^2 - 4ac \\ \sqrt{(2ax+b)^2} &= \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Si $2ax + b \geq 0$ entonces, $2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$

Si $2ax + b < 0$ entonces, $-(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Esto equivale a $2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$

Luego, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$, o bien, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Despejando x se obtendrá:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.4. CARÁCTER DE LAS RAÍCES

En la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la cantidad $b^2 - 4ac$ se llama discriminante, porque nos permite conocer la naturaleza de las raíces de la ecuación. En ocasiones, el discriminante se denota con la letra griega delta en mayúscula “Δ”, que corresponde a la letra d del alfabeto español. Se consideran, de esta manera, tres casos para el discriminante:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

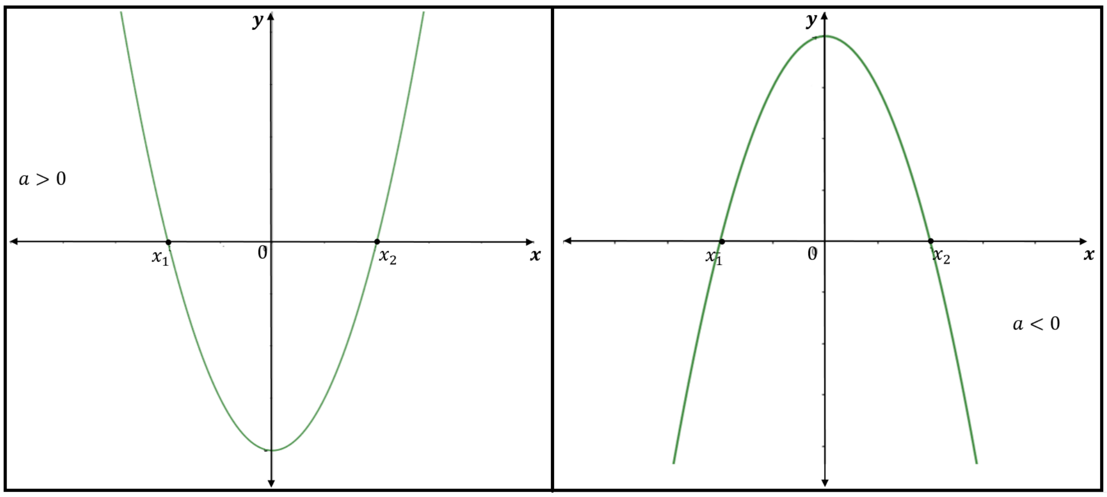
Caso 1: Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas. En tal caso, $b^2 - 4ac$ igual a un número real positivo m^2, y resulta:

$$b^2 - 4ac = m^2 \longleftrightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm m$$

Las raíces son:

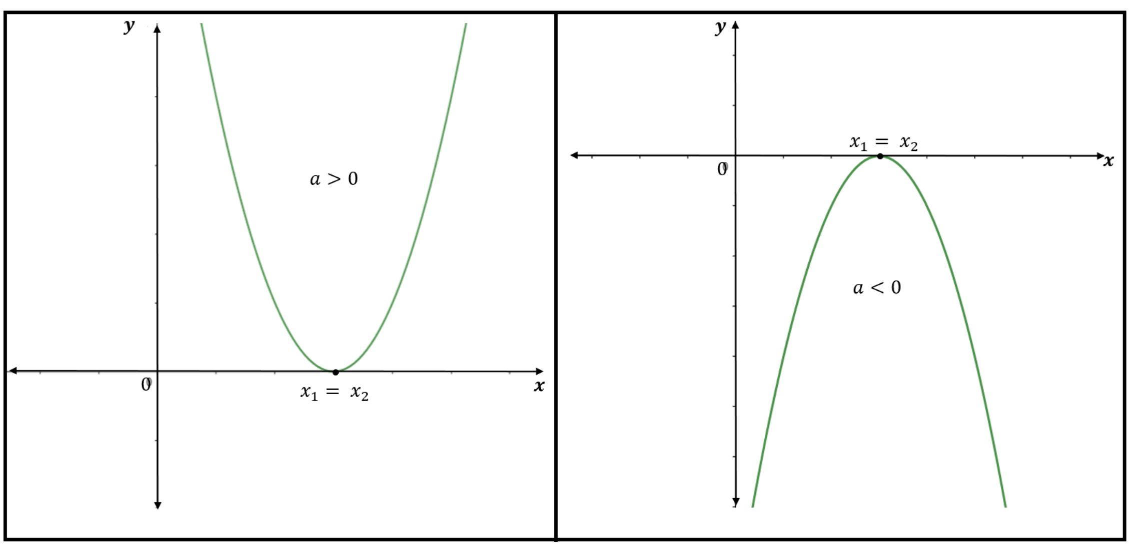
$$x_1 = \frac{-b+m}{2a}, \qquad \text{y,} \qquad x_2 = \frac{-b-m}{2a}$$

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ corta el eje x en dos puntos distintos x_1 y x_2:



Caso 2: Si $\Delta = 0$. Las dos raíces son reales e iguales: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

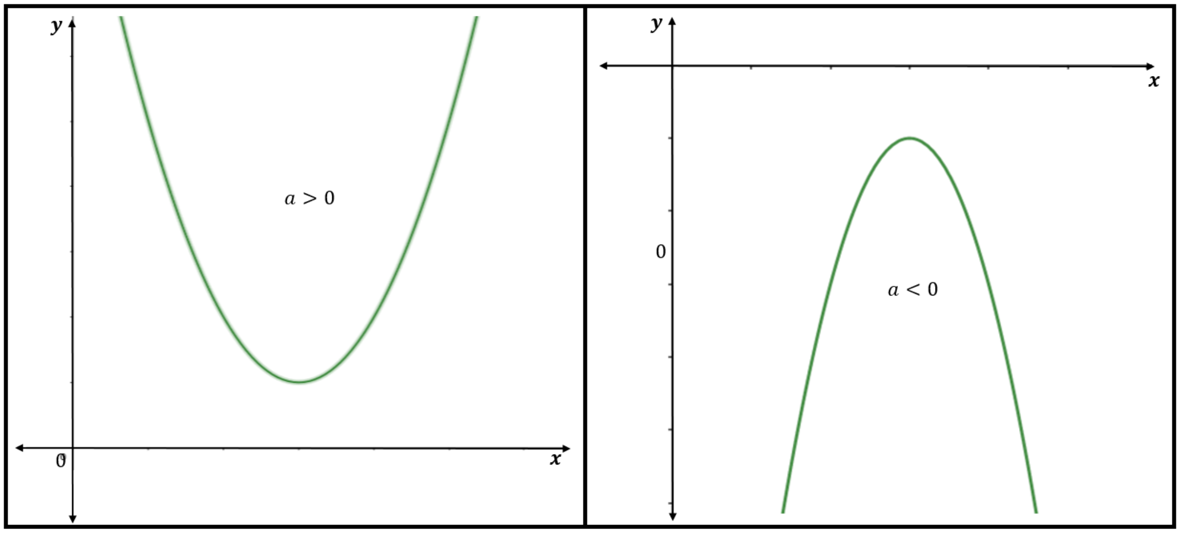
La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ toca el eje x en un único punto $x_1 = x_2$:



Caso 3: Si $\Delta < 0$, las dos raíces serán imaginarias. Se puede llamar $b^2 - 4ac = -m$, donde m es un número real positivo y las raíces son: $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{m}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{m}}{2a}$

Las raíces pueden escribirse en la forma $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{m}\cdot\sqrt{(-1)}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{m}\cdot i}{2a}$ y corresponde a números complejos conjugados de la forma $z_1 = \mathrm{v} + wi$ y $z_2 = \mathrm{v} - wi$. Donde v, w son números reales.

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ no corta ni toca el eje x.



Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 + 5x - 8 = 0$

Solución: Se tiene que $a = 1$, $b = 5$ y $c = -8$. Aplicando, entonces, la fórmula general, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+32}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{2} \\ x_1 &= \frac{-5+\sqrt{57}}{2} = 1,27491721 \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{2} = -6,27491721 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 1,27491721$ o $x = -6,27491721$, donde se han encontrado raíces reales distintas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$
Lo cual $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$. Aplicando la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Luego $x = -1$ es una raíz doble.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 15 = 0$

Solución:

Se tiene que $a = 1$, $b = -6$ y $c = 15$. Aplicando la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{6 \pm i2\sqrt{6}}{2} = 3 \pm i\sqrt{6}$$

Por lo tanto, $x_1 = 3 + \sqrt{6}i \quad \wedge \quad x_2 = 3 - \sqrt{6}i$ son las raíces complejas conjugadas.

2.5. RELACIÓN ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN

Al estudiar las ecuaciones de grado n o ecuaciones polinomiales, se deben hallar los valores (Reales o imaginarios) que den solución a la ecuación. En el caso de la ecuación cuadrática, el método más empleado es el de la fórmula general.

El matemático Italiano Girolamo Cardano (1501- 1576) halló una manera de encontrar los coeficientes de un polinomio de grado n a partir de sus soluciones (reales o imaginarias). A continuación, se desarrollará la generalización para la ecuación cuadrática y la ecuación cúbica.

Caso 1: ***GENERALIZACIÓN ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:***

Considérese la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ y sean $\alpha, \quad \beta$ sus raíces.

$$\alpha = x_1 = 3 + \sqrt{6}i; \qquad \beta = x_2 = 3 - \sqrt{6}i$$

Así las cosas,

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) = ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta)$$

Al igualar los coeficientes de los términos cuadrático lineal y constante, se obtiene:

$$a = a, \qquad b = -a(\alpha+\beta) \qquad \text{y} \qquad c = a\alpha\beta$$

Es decir,
La suma de las raíces es igual a $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, y el producto de las raíces es igual a $\alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$

Ejemplo: Escribir la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son los complejos $z_1 = 2+3i$ y $z_2 = 2 - 3i$

Solución:

Como $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, entonces $(2+3i)+(2-3i) = 4$. Luego $-\dfrac{b}{a} = 4$, de donde $a = 1$, $b = -a$.
Por otro lado:
$z_1 \cdot (z_2) = \dfrac{c}{a}$, así que $(2+3i)(2-3i) = 4+9 = \dfrac{c}{a}$. De aquí que $c = 13$.
La ecuación buscada es $x^2 + 4x + 13 = 0$

Caso 2: ***GENERALIZACIÓN ECUACIÓN DE TERCER GRADO.***

Considérese la ecuación cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y sean α, β y θ las soluciones. Luego,

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\theta) \\ &= a(x^3 - \theta x^2 - \beta x^2 - \alpha x^2 + \beta\theta x + \alpha\theta x + \alpha\beta x - \alpha\beta\theta) \\ &= a(x^3 - (\alpha+\beta+\theta)x^2 + (\beta\theta + \alpha\theta + \alpha\beta)x - \alpha\beta\theta) \\ &= ax^3 - a(\alpha+\beta+\theta)x^2 + a(\beta\theta + \alpha\theta + \alpha\beta)x - a\alpha\beta\theta \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes en ambos miembros se concluye que:

$a = a$, $b = -a(\alpha + \beta + \beta)$ y $c = a\alpha\beta\theta$. Así las cosas:

$$\alpha + \beta + \theta = -\frac{b}{a}\beta\theta + \alpha\beta + \alpha\beta = \frac{c}{a}\alpha\beta\theta = -\frac{d}{a}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación cuadrática cuyas soluciones son los números complejos $\alpha = 3 + \sqrt{6}i$; y $\beta = 3 - \sqrt{6}i$.

Solución: Como $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$, entonces

$a = 1$, y

$$b \;\; = \;\; -1(\alpha + \beta) = -\left[(3 + \sqrt{6}i) + (3 - \sqrt{6}i)\right] = -6$$

Además:

$$c \;\; = \;\; a\alpha\beta = 1(3 + \sqrt{6}i)(3 - \sqrt{6}i) = 1\left[3^2 - (\sqrt{6}i)^2\right] = 9 + 6 = 15$$

Luego, la ecuación buscada es $x^2 - 6x + 15 = 0$

2.6. ECUACIONES BICUADRADAS

Las ecuaciones bicuadradas son ecuaciones de cuarto grado de la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. En otras palabras, son ecuaciones de cuarto grado en las que aparecen todos los monomios que tiene la incógnita con exponente par (x^4, x^2 y x^0). Los coeficientes b y c pueden ser 0, pero no puede serlo el coeficiente de a. Las ecuaciones bicuadraticas son de las ecuaciones que tienen cuatro raíces, que por supuesto, son números reales o complejos y cuyo carácter ya se estudió en las secciones precedentes.

Considérese la ecuación bicuadrada general:

$$ax^4 + bx^2 + c \;\; = \;\; 0, \;\; \text{con} \;\; a \neq 0$$

Al aplicar el cambio de variable siguiente $x^2 = t$, entonces $x^4 = t^2$. Reemplazando la ecuación original obtiene:

$$at^2 + bt + c = 0$$

La cual es una ecuación de segundo grado en la variable t, cuya solución es:

$$t = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es decir, $t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y por lo tanto, $x_1 = \pm\sqrt{t_1}$, y, $x_2 = \pm\sqrt{t_2}$

Con lo cual se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación inicial, que son:

$$x_1 \;\; = \;\; \sqrt{t_1}, \qquad x_2 = -\sqrt{t_1}, \qquad x_3 = \sqrt{t_2} \qquad \text{y} \qquad x_4 = -\sqrt{t_2}$$

2.7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Búsquense tres números impares consecutivos cuyo producto sea igual a 7 veces su suma.

   Solución: Sean $2x-1$, $2x+1$ y $2x+3$ los números buscados. Luego

$$\begin{aligned}(2x-1)(2x+1)(2x+3) &= 7\left[(2x-1)+(2x+1)+(2x+3)\right]\\ (2x-1)\cancel{(2x+1)}(2x+3) &= 7\,(6x+3) = 7\cdot 3\cancel{(2x+1)}\end{aligned}$$

   Es decir $4x^2+4x-3=21$. Luego $4x^2+4x-3=21 \longleftrightarrow 4x^2+4x-24=0 \longleftrightarrow x^2+x-6=0 \longleftrightarrow (x+3)\,(x-2)=0$

   Así, $x=-3$ ó $x=2$. Si $x=3$: los números son: -7, -5, -3. Si $x=2$: los números son: 3, 5, 7

2. Hallar tres números enteros consecutivos tales que su producto sea igual a 5 veces su suma.

   Solución: Sean $x-1$, x y $x+1$ los números buscados. Luego:

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = 5\left[(x-1)+x+(x+1)\right] = 5(3x) = 15$$

   Entonces: $(x-1)\,(x+1)=15$, es decir $x^2-1=15$, o bien $x^2=16$. De donde

   $x=4$ ó $x=-4$. Si $x=4$: los números son: 3, 4, 5. Si $x=-4$: los números son: -3, -4, -5

3. El cociente de una división es los $\dfrac{3}{8}$ del divisor y el residuo 36, es la $55^{\underline{a}}$ parte del dividendo: Hallar el divisor.

   Solución: Por el algoritmo de la división, si se llama d al dividendo y x al divisor, $d=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{d}{55}$

   Como $36=\dfrac{d}{55}$, entonces $d=(36)(55)=x$. Debe tenerse que:

$$\begin{aligned}(36)(55) &= x\frac{3}{8}x+36\\ (36)(55) &= \frac{3}{8}x^2+36\\ \frac{3}{8}x^2=(36)(55)-36 \quad &\acute{o} \quad \frac{x^2}{8}=\frac{[(36)(55)-36]\times 8}{3}=5184\end{aligned}$$

   Luego: $\sqrt{x^2}=\sqrt{5184}$. Es decir, $x=72$ es el divisor.

4. Divídase 10 en dos partes cuyos cuadrados sean proporciones a 13 y a 7. Calcúlese el resultado con 0.001 de aproximación.

   Solución:

   Sean x e y las dos partes. Debe tenerse: $x + y = 10$ y $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{13}{7}$. Luego, $7x^2 = 13y^2$.

   Como $x + y = 10$ entonces $y = 10 - x$, de donde

$$\begin{aligned} 7x^2 = 13\,(10-x)^2 = 13\left(10^2 - 2\cdot 10x + x^2\right) &= 10^2\cdot 13 - 2\cdot 10\cdot 13x + 13x^2 \\ 13\left(100 - 20x + x^2\right) &= 1300 - 260x + 13x^2 \end{aligned}$$

   Así que: $6x^2 - 260x + 1300 = 0$. Es decir, $3x^2 - 130x + 650 = 0$

   Aplicando la fórmula cuadrática se obtiene que:

   $x = 5.7677, \qquad \text{y} \qquad y = 10 - x = 4.2323$

   También pueden ser: $x = 37{,}552; \qquad \text{y} \qquad y = -27{,}552$

5. La suma de los inversos de dos números consecutivos es $\dfrac{15}{56}$. ¿Cuáles son esos números?

   Solución: Sean x y $x + 1$ los números, deberá tenerse:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{15}{56}$$

   Es decir, $\dfrac{(x+1)+x}{x\,(x+1)} = \dfrac{15}{56} \qquad \text{ó} \qquad \dfrac{2x+1}{x^2+x} = \dfrac{15}{56}$

   Y por tanto

$$56\,(2x+1) \;=\; 15\left(x^2 + x\right)$$

   Que equivale a la ecuación cuadrática $15x^2 - 97x - 56 = 0$

   Cuya solución es:

$$x = \frac{97 \pm \sqrt{97^2 + 4\cdot 15\cdot 56}}{30} = \frac{97 \pm \sqrt{113}}{30}$$

   Y por lo tanto $x = 7 \qquad \text{\textit{ó}} \qquad x = -\dfrac{16}{30} = -\dfrac{8}{15}$

   Los números buscados son, entonces: 7 y 8.

6. Buscar dos números pares consecutivos, sabiendo que el producto de los dos números es 2808.

   Solución:

   Si se llama $2x$ y $2x+2$, tales números, entonces: $2x\,(2x+2) = 2808$. Es decir, $4x^2+4x-2808=0$

   O bien

   $$x^2+x-702=0$$

   Y al factorizar,

   $$(x+27)\,(x-26)=0$$

   De donde se obtiene que $x=26$ ó $x=-27$. Cuando $x=26$ los números buscados son, entonces, 52 y 54. Cuando $x=-27$, se obtienen los números -54 y -52.

7. La diferencia de dos números es 14, y su producto 1632. ¿Cuáles son éstos números?

   Solución: Sean x, e, y los números. Entonces $x-y=14$; $x\cdot y=1632$.

   Luego: $1632 = x\cdot(x-14) = x^2-14x$.

   Entonces: $x^2-14x-1632=0$

   $$x=\frac{14\pm\sqrt{14^2+4(1)(1632)}}{2}=\frac{14\pm 2\cdot 41}{2}=7\pm 41$$

   Luego: $x=48$ ó $x=-34$

   • Si $x=48$, $y=48-14=34$

   • Si $x=-34$, $y=-34-14=-48$

   Los números son 48 y 34 ó -34 y -48

8. ¿Cuánto dinero tienen dos obreros si al juntar el dinero de los dos da \$196, y el producto de lo que tiene cada uno es de 48 veces esta suma?

   Solución: Sean x e y lo que cada obrero tiene. Debe tenerse: $x+y=196$ $\quad x\cdot y=48.196$ De la segunda ecuación $y=\dfrac{48(196)}{x}$ y por lo tanto,

   $$\begin{aligned}196 &= x+\frac{48\cdot 196}{x} \qquad así\\ &\longleftrightarrow 196x = x^2+48\cdot 196\\ &\longleftrightarrow x^2-196x+48\cdot 196=-48\cdot 196\\ &\longleftrightarrow x^2-2\cdot 98x+98^2=98^2-48\cdot 196\\ &\longleftrightarrow (x-98)^2=98^2-48\cdot 2\cdot 98\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 98\,(98-48\cdot 2) = 98\cdot 2 \\ &= 14^2 \end{aligned}$$

Entonces: $x - 98 = \pm 14$; $\quad x = 98 \pm 14$

Luego: $x = 112$ ó $x = 84$

Los obreros tienen 112 y 84 pesos

9. La diferencia de precio de dos relojes es de \$9. ¿Cuáles son los precios respectivos, sabiendo que su producto equivale a 180 veces esta diferencia?

   Solución: Sean x, e y los precios. Debe tenerse: $x - y = 9$; $\quad x \cdot y = 180 \cdot 9 = 1620$.

   Luego: $\quad y = \dfrac{1620}{x}$; $\quad 9 = x - \dfrac{1620}{x} = \dfrac{x^2 - 1620}{x}$

   ó
   $$\begin{aligned} x^2 - 9x - 1620 &= 0 \\ (x-45)\,(x+36) &= 0 \end{aligned}$$

   Luego: $\quad x = 45 \quad x = -36$

   Los precios son: $\quad x = 45$, y, $\quad y = x - 9 = 45 - 9 = 36$

10. Dos jóvenes tienen, juntos, \$24, ¿Cuánto tiene cada uno, sabiendo que la suma de los cuadrados de lo que tiene cada uno, respectivamente, es de \$290, su haber respectivo es de \$290 ?

    Solución: Sean x, e y lo que tiene cada uno. Debe ser:

    $x + y = 24$, $\quad$ y, $\quad x^2 + y^2 = 290$

    Luego:

    $$290 = x^2 + (24-x)^2 = x^2 + 24^2 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$$

    Entonces:

    $$2x^2 - 48x + 286 = 0 \qquad\qquad x^2 - 24x + 143 = 0$$

    Cuya solución es:

    $$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24^2) - 4\,(1)\,(143)}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{(576-572)}}{2} = \frac{24 \pm 2}{2} = 12 \pm 1.$$

    Si $\quad x = 13$, $\quad$ entonces $\quad y = 11$,

    Si $\quad x = 11$, $\quad$ entonces $\quad y = 13$,

    Los haberes de cada uno es \$11 y \$13

11. Un número está formado por el producto de 3 números consecutivos. Si se divide dicho producto, por cada número, la suma de los cocientes es 47. Hallar el número.

Solución: Sea $n = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$ el número. Debe tenerse:

$$\frac{(x-1)\,x\,(x+1)}{x-1} + \frac{(x-1)\,x\,(x+1)}{x} + \frac{(x-1)\,x\,(x+1)}{x+1} = 47$$

Luego:

$$\begin{aligned} x\,(x+1) + (x-1)\,(x+1) + (x-1)\,x &= 47 \\ x^2 + xx^2 - 1 + x^2 - x &= 47 \\ 3x^2 &= 48 \\ x^2 &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Si $x = 4$: $n = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Si $x = -4$ $n = (-5)\,(-4)\,(-3) = -60$

12. Buscar dos números cuya diferencia es 8, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 274.

Solución: Sean x, e y los números. Debe tenerse:
$x - y = 8$ y, $x^2 + y^2 = 274$
Luego:

$$\begin{aligned} x^2 + (x-8)^2 &= 274 \\ 2x^2 - 16x - 210 &= 0 \\ x^2 - 8x - 105 &= 0 \\ (x-15)\,(x+7) &= 0 \end{aligned}$$

Luego: $x = 15$ ó $x = -7$

Si $x = 15$, entonces $y = 15 - 8 = 7$

Si $x = -7$, entonces $y = -7 - 8 = -15$

Los números son 15 y 7 ó -7 -15.

13. La edad de un niño será, dentro de 3 años, un cuadrado perfecto, y hace 3 años que su edad era precisamente la raíz de éste mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene aquel niño?

Solución: Sea x la edad actual del niño.

Entonces: $x + 3$ representa la edad dentro de 3 años.

$x - 3$ es la edad hace 3 años.

Deberá tenerse: $x+3=y^2$, y, $x-3=y$

Luego: $(x+3) = (x-3)^2 \longleftrightarrow x^2-6x+9 = x+3 \longleftrightarrow x^2-7x+6 = 0$; $(x-6)(x-1)=0$

Así que: $x=6$ ó $x=1$.

Si $x=6$, la edad del niño, dentro de 3 años, será de 9 y la edad que tenía hace tres años era 3, lo cuál cumple con la condición del problema.

Si $x=1$, se tene que la edad del niño, dentro de 3 años, será 4 y la edad que tenía hace 3 años es -2, lo cual no tiene sentido.

Se concluye, entonces, que el niño tiene 6 años.

14. ¿Cuál es el número que disminuida 5 veces su raíz cuadrada dá como resultado 500?

    Solución: Sea x, el número, debe tenerse: $x-5\sqrt{x}=500$

    Luego: $5\sqrt{x}=x-500$

    $\longleftrightarrow 25x=(x-500)^2$

    $\longleftrightarrow x^2-1000x+500^2$

    $\longleftrightarrow x^2-1025x+500^2=0$

    Resolviendo esta ecuación:

$$x = \frac{1025 \pm \sqrt{1025^2-4\left(500\right)^2}}{2} = \frac{1025 \pm 25\sqrt{1681-1600}}{2} = \frac{1025 \pm 225}{2}$$

    Luego: $x=625$ ó $x=400$. De éstos dos valores sólo 625 cumple con las condiciones.

15. ¿Cuál es el número que aumentada 6, veces su raíz cuadrada dá como resultado 135?

    Solución: Sea x, el número, por las condiciones dadas, $x+6\sqrt{x}=135$

    Luego:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{x} &= 135-x \\ \longleftrightarrow 36x &= (135-x)^2 \\ \longleftrightarrow &= 135^2-270x+x^2 \end{aligned}$$

    Entonces:

$$x^2-306x+135^2=0$$

Luego:

$$x = \frac{306 \pm \sqrt{(306)^2 - 4\,(135)^2}}{2} = x = \frac{306 \pm 18\sqrt{17^2 - 5^2 \cdot 3^2}}{2} = 153 \pm 9 \cdot 8 = 153 \pm 72$$

Luego: $x = 225$ ó $x = 81$

De los dos valores de x, únicamente 81, satisface las condiciones del problema.

16. Descomponer el número 20 en dos partes cuyo producto sea 96.

Solución: Sean x, e y las partes. Entonces:

$$x + y = 20, \qquad \text{y}, \qquad x \cdot y = 96$$

Luego: $96 = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$, o sea:

$$x^2 - 20x + 96 = 0$$

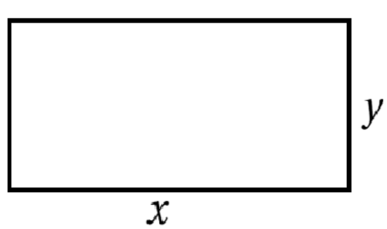
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 96}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2} = 10 \pm 2.$$

En consecuencia: $x = 12$, ó $x = 8$. Si $x = 12$; $y = 8$, y si $x = 8$, $y = 12$. Los números son 12 y 8.

Aplicaciones de las Ecuaciones de Segundo Grado a la Geometría

1. El área de un rectángulo es equivalente al área de un cuadrado de $96m$ de lado. Calcular las dimensiones del rectángulo si la altura de este es de $\frac{9}{16}$ de la base.

Solución:



Sean: x : largo del rectángulo.
y : ancho.

Debe tenerse: $x \cdot y = 96^2$

$y = \frac{9}{16}x$

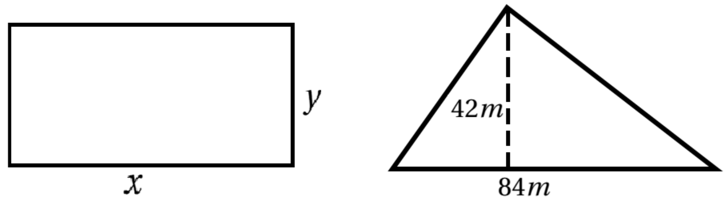
Luego: $96^2 = x \cdot \frac{9}{16}x = \frac{9}{16}x^2$

Entonces: $x^2 = \frac{96^2 \cdot 16}{9}$, $\qquad x = \pm\frac{96 \cdot 4}{3} = \pm 128.$

El largo del rectángulo es de $128m$. El ancho, o la altura es de $y = \frac{9}{16} \cdot 128 = 72m$.

2. las dimensiones de un rectángulo están en la relación de 4 a 9. Búsquense estas dimensiones, sabiendo que el área del rectángulo es equivalente al área de un triángulo de $84m$ de base y $42m$ de altura.

   Solución:

   Debe tenerse: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{9}$, y $x \cdot y = \dfrac{84 \cdot 42}{2} = 1764$

   De la primera ecuación, $9x = 4y$, o bien, $y = \dfrac{1764}{x}$. Reemplazando en la segunda ecuación se obtiene:

   $$9x = 4 \cdot \frac{1764}{x}, \text{ es decir } x^2 = \frac{4 \cdot 1764}{9}$$

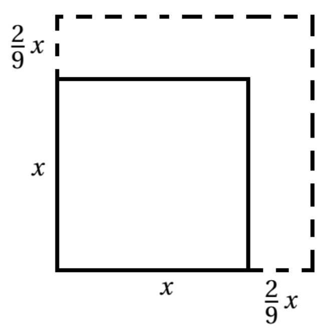
   Entonces: $x^2 = 4 \cdot 196 = 2^2 \cdot 14^2$, de donde $x = \pm 2 \cdot 14 = \pm 28$

   El ancho del rectángulo mide $28m$.

   El largo mide $y = \dfrac{1764}{28} = 63m$.

3. Se ha aplanado una chapa cuadrada de plomo y su lado se ha extendido hasta $\dfrac{2}{9}$ más. Búsquese la longitud inicial, si la superficie del nuevo cuadrado es de $1089cm^2$.

   Solución:

   Sea x el lado del cuadrado inicial, debe tenerse:

   $$\left(x + \tfrac{2}{9}x\right)^2 = 1089$$

   O sea,

   $$\left(\frac{11x}{9}\right)^2$$

$$\longleftrightarrow \quad \frac{11^2x^2}{9^2} = 33^2$$

$$\longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{33^2 \cdot 9^2}{11^2}$$

$$\longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{33^2 \cdot 9^2}{11^2}}$$

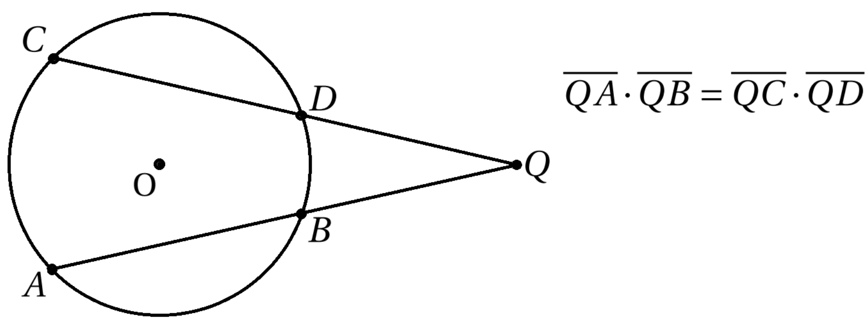
$$\longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{33 \cdot 9}{11}$$

Luego $x = \pm\frac{9 \cdot 33}{11} = \pm 27$. La longitud del lado del cuadrado inicial es de $27cm$.

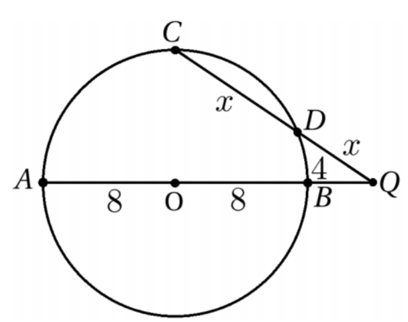
4. Desde un punto situado a $12m$ del centro de un círculo de $8m$ de radio se traza una secante que se divide en dos partes iguales por la circunferencia: ¿Cuál es la longitud de esta secante?

   Solución: Para resolver el problema se utiliza el Teorema de las secantes de una circunferencia:

   Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan en dos secantes, el producto de la longitud de la secante por su segmento externo es igual al producto de la longitud de la otra secante por su segmento externo.



Gráfica Ilustración del Teorema.



Gráfica Ilustración del problema.

Sea x la longitud de la cuerda $\overline{CD}$. Entonces $\overline{DQ} = x$.

Se tiene el resultado:

$\overline{QA} \cdot \overline{QB} = \overline{QC} \cdot \overline{QD}$

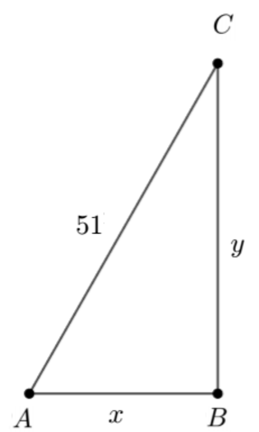
Luego: $20 \cdot 4 = 2x \cdot x$

O sea: $2x^2 = 80$, o bien, $x^2 = 40$. Es decir

$x = \pm\sqrt{40} = \pm 2\sqrt{10}$. La longitud de la secante es: $\overline{QC} = 2x = 4\sqrt{10}$

5. Calcular las dimensiones de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide $51m$ y los catetos estan en relación 8 a 15.

Solución:



Se sabe que: $x^2 + y^2 = 51^2$, y, $\dfrac{y}{15} = \dfrac{x}{8}$

Luego: $8y = 15x$

$$y = \frac{15x}{8}$$

$$x^2 + \frac{15^2 \cdot x^2}{8^2} = 51^2 \quad \left(\frac{8^2 + 15^2}{8^2}\right) x^2 = 51^2$$

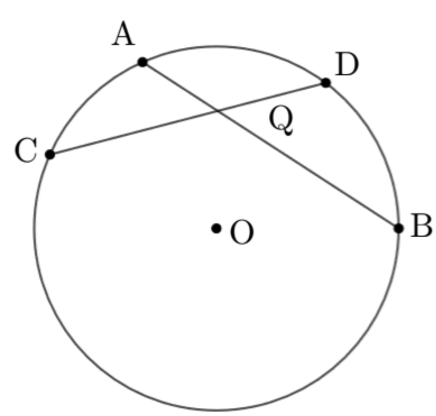
Entonces $x^2 = \dfrac{8^2 \cdot 51^2}{8^2 + 15^2}$

O sea: $x^2 = \dfrac{8^2 \cdot 51^2}{289} = 576$, de donde $x = 24$.

Los catetos miden $x = 24m \qquad y = \dfrac{15}{8} \cdot 24 = 45m$

TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los dos segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los dos segmentos determinados en la otra. En símbolos:



$$\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = \overline{CQ} \cdot \overline{QD}$$

Figura: Ilustración del Teorema.

6. En una circunferencia de $12cm$ de radio se intersectan 2 cuerdas que tienen $80cm$ por producto de sus segmentos respectivos: ¿A qué distancia del centro de la circunferencia se halla el punto de intersección?

Solución:

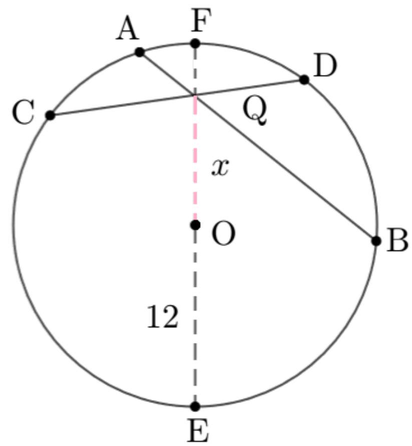


Figura: Ilustración del Problema.

Se sabe que: $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = \overline{CQ} \cdot \overline{QD} = 80$

Se traza el diámetro que pasa por Q y se hace: $\overline{OQ} = x$; $\quad \overline{FQ} = 12 - x$

Considerando las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{FE}$ se pude escribir:

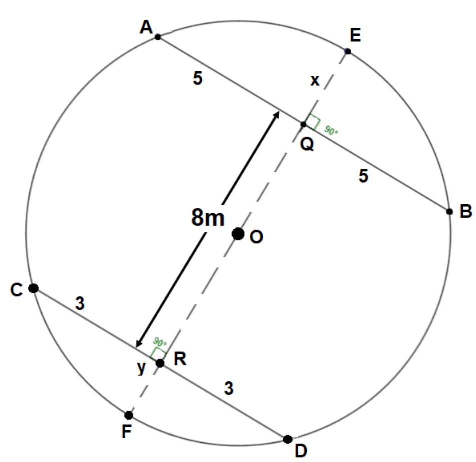
$$\begin{aligned} \overline{CD} \cdot \overline{QD} &= \overline{FQ} \cdot \overline{QE} \\ 80 &= (12 - x)(12 + x) \\ 80 = 12^2 - x^2 \quad &ó \quad x^2 = 144 - 80 = 64 \end{aligned}$$

Luego: $x = \pm 8$

El punto de intersección está a $8cm$ del centro.

7. Dos cuerdas paralelas que pasan a uno y otro lado del centro de una circunferencia tienen, respectivamente, $6m$ y $10m$ de longitud, y la distancia que media entre ellos es de $8m$: ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

   Solución:



Se traza la cuerda EF, perpendicular a las cuerdas dadas, pasando por el centro del círculo. Observando las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, por el teorema de las cuerdas $\overline{BQ} \cdot \overline{QA} = \overline{FQ} \cdot \overline{QE}$ se tiene

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5 &= (8+y) \cdot x \\ 25 &= 8x + xy \qquad (1) \end{aligned}$$

Para las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, nuevamente aplicando el teorema de las cuerdas se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{DR} \cdot \overline{RC} &= \overline{FR} \cdot \overline{RE} \qquad \text{ó} \\ \text{Es decir, } 9 &= y \cdot (8+x) \qquad (2) \end{aligned}$$

Se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x + xy &= 25 \qquad (1) \\ 8y + xy &= 9 \qquad (2) \end{aligned}$$

Restando (2) de (1) se obtiene: $y = x - 2$.

Reemplazando este valor de y, en $9 = y \cdot (8+x)$, se llega a

$9 = (8+x)(x-2)$ ó $x^2 + 6x - 25 = 0$

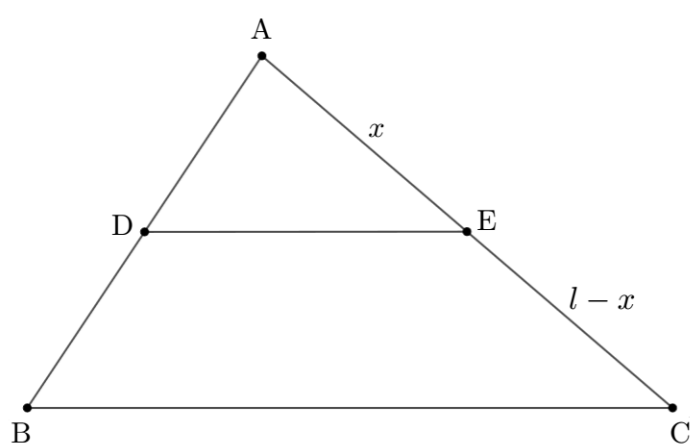
Luego: $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 25}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{34}}{2} = -3 \pm \sqrt{34}$

Entonces: $x = \sqrt{34} - 3$; $y = \sqrt{34} - 5$

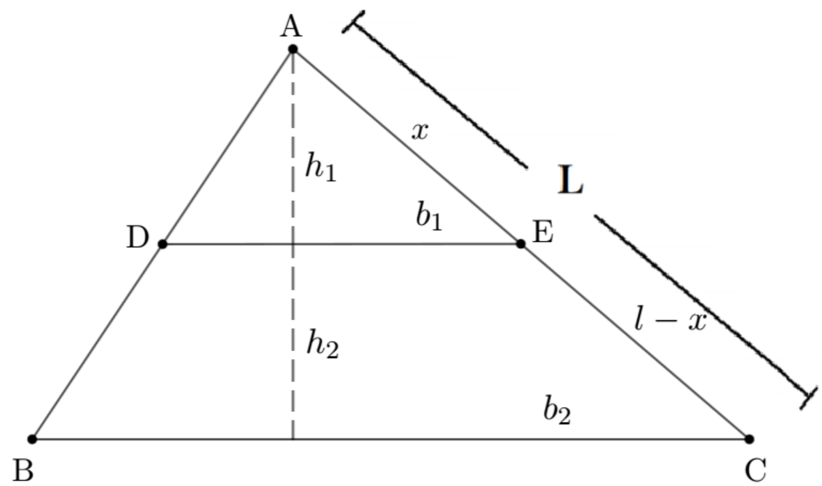
El radio de la circunferencia es: $r = \dfrac{x+y+8}{2} = \dfrac{2\sqrt{34}}{2} = \sqrt{34}$

8. ¿A qué distancia del vértice A de un triángulo, tomada en uno de los lados, hay que trazar una paralela a la base para dividir este triángulo: primero, en dos partes equivalentes; segundo, en tres partes equivalentes si el lado tiene 15 metros?

Solución:



Sea l la longitud del lado escogido para marcar la distancia llamada x. La paralela $\overline{DE}$ divide el triángulo ABC en dos partes: el triángulo ADE y el trapecio $DECB$: esta dos figuras deben tener la misma área (ser equivalentes).



El área del triángulo ADE es: $\dfrac{b_1 + b_2}{2}$

El área del trapecio $DBCE$ es: $\dfrac{b_1 + b_2}{2} \cdot h_2$.

Debe ser: $\dfrac{b_1 h_1}{2} = \dfrac{b_1 + b_2}{2} \cdot h_2$

O sea, $b_1 h_1 = (b_1 + b_2) \cdot h_2$

Por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{x}{b_1} = \frac{l}{b_2}, \qquad \text{y,} \qquad \frac{x}{h_1} = \frac{l}{h_1 + h_2}$$

Luego: $b_2 = \dfrac{b_1 l}{x}$, y, $h_1 + h_2 = \dfrac{h_1 l}{x}$

Así que:

$$b_1 h_1 = (b_1 + b_2) h_2 \Rightarrow \frac{b_1 h_1}{h_2} = b_1 + b_2 = b_1 + \frac{b_1 l}{x} = b_1 \left(1 + \frac{l}{x}\right)$$

Luego: $\dfrac{h_1}{h_2} = 1 + \dfrac{l}{x}$ ó $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{l + x}{x}$

Además: $h_1 + h_2 = \dfrac{h_1 l}{x}$, luego:

$$\frac{h_1 + h_2}{h_1} = \frac{l}{x} \qquad \text{ó} \qquad 1 + \frac{h_2}{h_1} = \frac{l}{x}$$

En consecuencia: $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{l}{x} - 1 = \dfrac{l-x}{x}$, ó, $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{x}{l-x}$

Esto equivale a $\dfrac{l+x}{x} = \dfrac{x}{l-x}$, ó, $l^2 - x^2 = x^2$

Luego: $2x^2 = l^2$; $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}l = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$

La recta hay que trazarla a $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}l$ unidades del vértice A.

Si la recta debe dividir el triángulo en tres partes equivalentes, deberá exigirse que el área del trapecio sea el doble del triángulo, o sea:

$$\frac{b_1+b_2}{2} \cdot h_2 = 2 \cdot \frac{b_1 h_1}{2} \qquad \text{ó} \qquad (b_1+b_2)h_2 = 2b_1h_1$$

Con un proceso similar al anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{l+x}{x} &= \frac{2x}{l-x} \quad \acute{o} \\ x^2 &= \frac{1}{3}l^2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}l$, y si $l = 15m$ entonces: $x = 5\sqrt{3}$

Este capítulo expuso los diferentes métodos para resolver ecuaciones de segundo grado y hallar sus raíces, algunas de las cuales son reales y otras complejas (raíces negativas), lo que abre el camino hacia el sistema numérico de los números complejos, la recopilación del carácter de las raíces y la relación entre los coeficientes de la ecuación, brindando, además, herramientas para el análisis de estas ecuaciones.

A continuación, se plasmarán las operaciones básicas y el conjugado del sistema numérico de los números complejos, además de representarse, geométricamente, con la ayuda del software Geogebra.

CAPÍTULO 3

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

3.1. SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS

Para realizar las operaciones con los números complejos no es necesario aprender de memoria las definiciones de adición y multiplicación, en lugar de ello, se pueden tratar todos los símbolos como si tuvieran propiedades de números reales.

Suma:

Al sumar números complejos resulta importante la propiedad asociativa de los números reales (agrupación de términos semejantes). Explícitamente, para sumar complejos $(a+bi)$, y $(c+di)$ se obtiene el número complejo $(a+c)+i(b+d)$

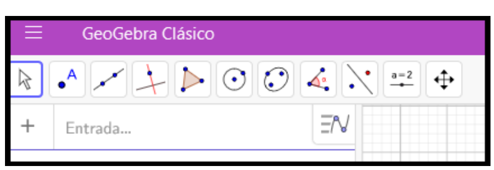
Ejemplo:

$$(-8+3i)+(7+4i)=(-8+7)+(3+4)i=-1+7i$$

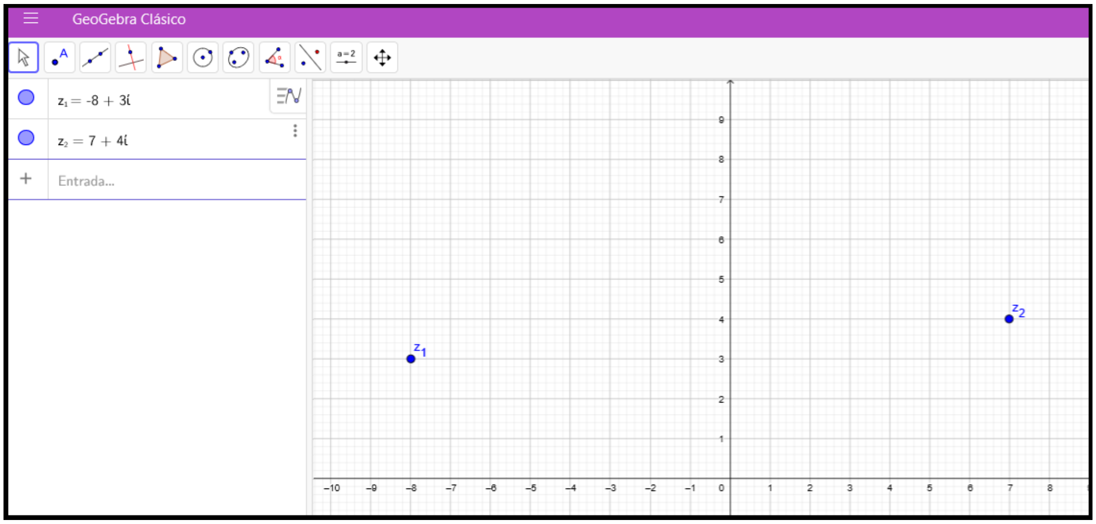
Al sumar números complejos también, es de gran ayuda el software Geogebra. Para realizar la operación los números complejos se manipulan como vectores, tomando la cola del vector como el origen del plano imaginario y la cabeza las coordenadas del número $(a+bi)$.

Cómo graficar en Geogebra:

Para graficar en Geogebra se tomará el ejemplo anterior, con los números: $(-8+3i)+(7-4i)$, los cuales se graficarán como vectores. Para ello, se ingresa en la opción entrada



y se digita $Z_1=-8+3i$, se da click en enter y se ingresa el otro número $Z_2=7+4i$, se da nuevamente click en enter, luego, aparecen en el plano los puntos de las coordenadas como z_1 y Z_2:



Posteriormente, se da click en la opción "vector"para trazar desde el punto de origen $(0, 0)$ hasta el punto de la coordenada z_1 y se repite el paso para trazar el vector de z_2. (ver figuras 1)

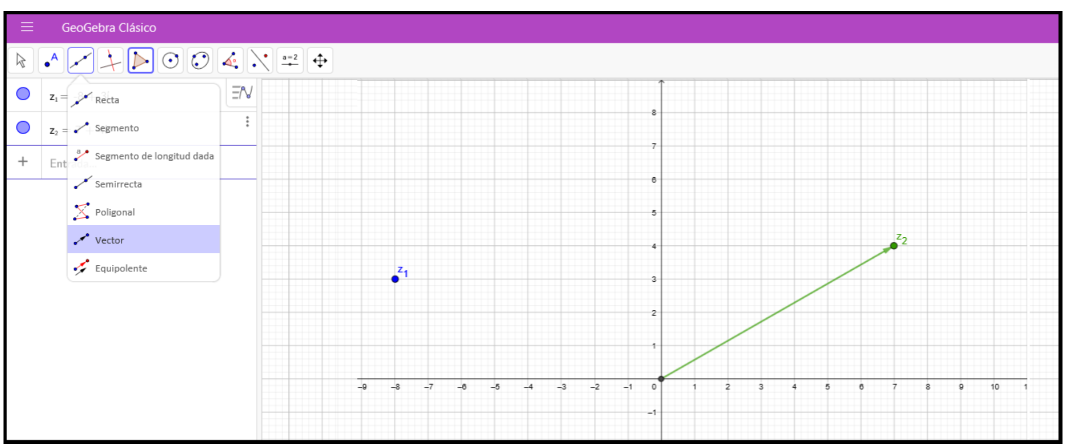


Figura 1

Para nombrar las coordenadas z_1 y z_2 se da click derecho sobre cada coordenada; luego se va a la opción configuración. (ver figura 1.1)

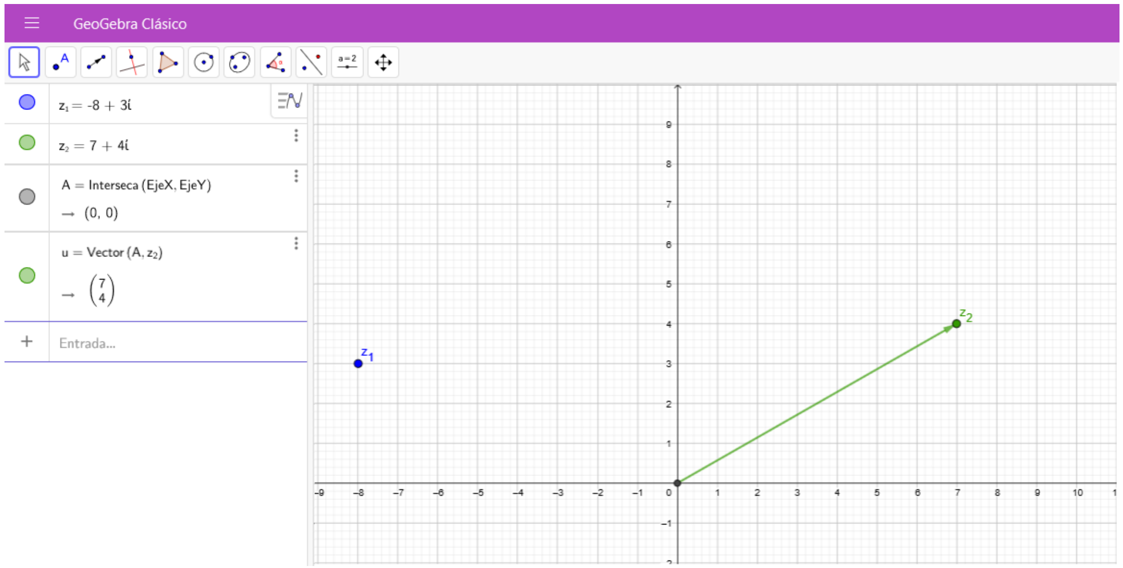


Figura 1.1

Al dar click sale, al lado izquierdo, una ventana, se da click en la "opción etiqueta visible" y se escoge la etiqueta de "nombre y valor", donde aparecen el nombre y el valor de cada coordenada.(ver figura 1.1.1)

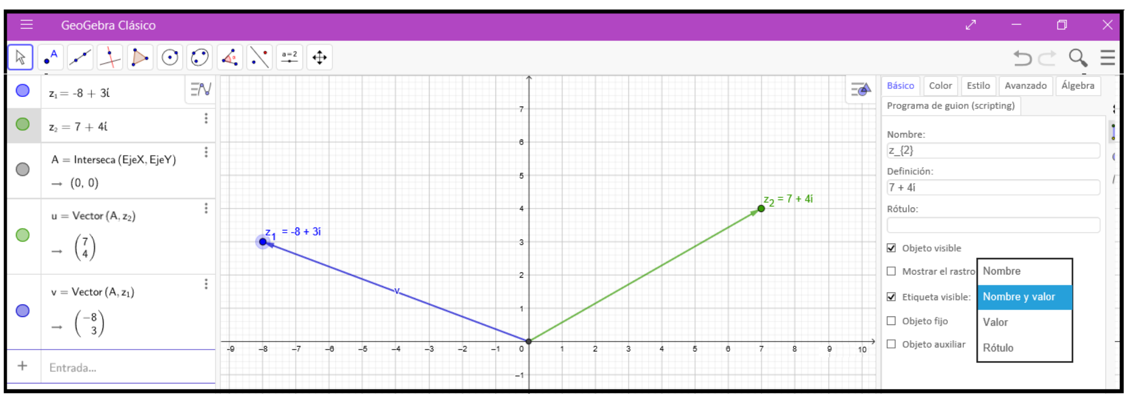


Figura 1.1.1

A continuación, se trasladan las longitudes de los vectores Z_1 y Z_2, paralelas a los vectores iniciales, las cuales empiezan en las coordenadas de Z_2 y Z_1 respectivamente. El punto de intersección entre las longitudes, es $Z_3 = -1 + 7i$, que coinciden con la suma de los vectores hallado anteriormente en la representación algebraica. Lo dicho anteriormente corresponde a la ley del paralelogramo. Por último, se traza un vector desde el origén hasta Z_3.

Para este ejemplo se realizó una animación en el software Geo-Gebra que se encuentra en el siguiente link: *https : //www.geogebra.org/m/zmtu4tec*

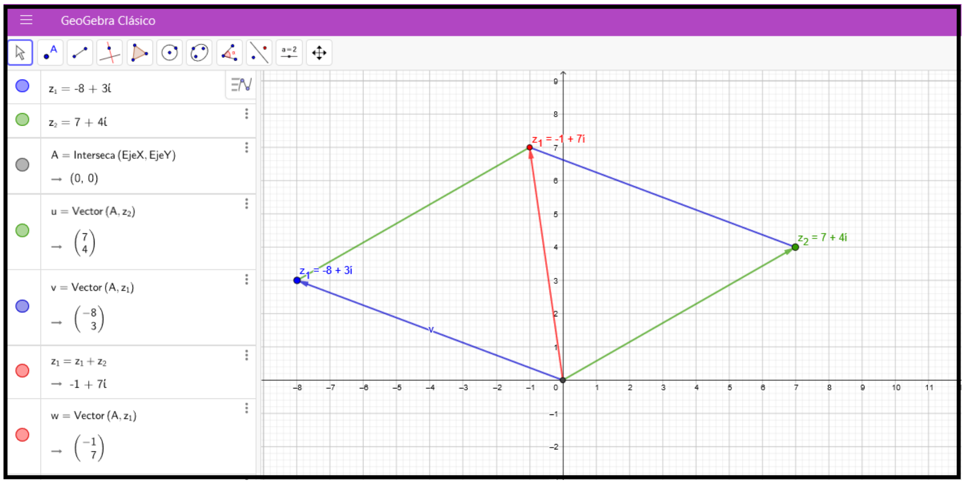


Figura 2

Otra forma de encontrar coordenadas del vector Z_3 es en la opción de entrada, digítando la suma de los dos vectores que se graficaron, en ese caso $Z_1 + Z_2$, resultando un tercer vector que forma un paralelogramo.

Resta:

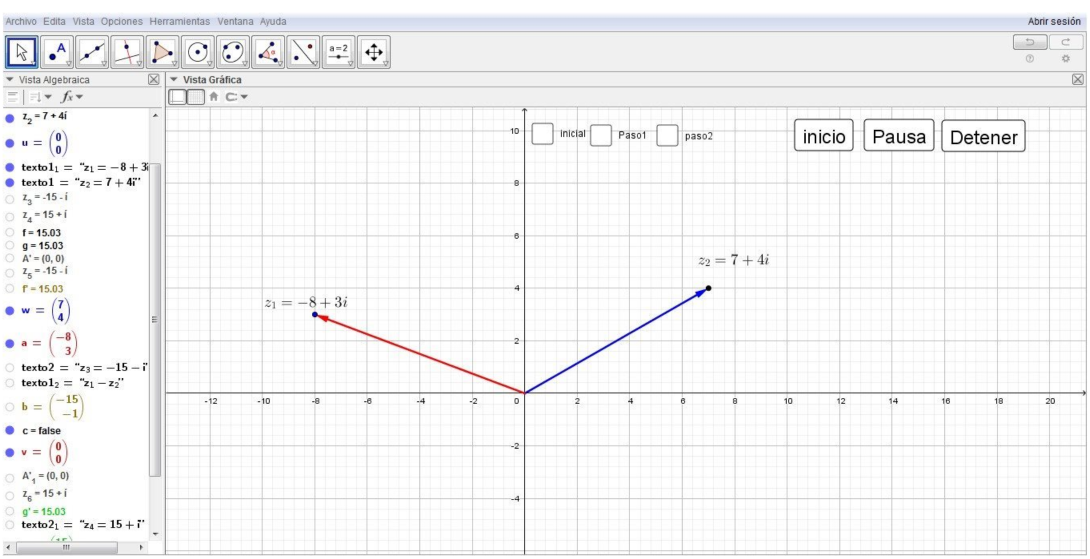
La resta, o diferencia de dos números complejos, se realiza restando cada parte por separado. Si se resta $(a + bi)$, con $(c + di)$ entonces obtenemos otro número complejo de la siguiente manera:

$$(a - c) + i(b - d)$$

Ejemplo: $(-8 + 3i) - (7 + 4i) = -8 + 3i - 7 - 4i = (-8 - 7) + (3i - 4i) = -15 - i$

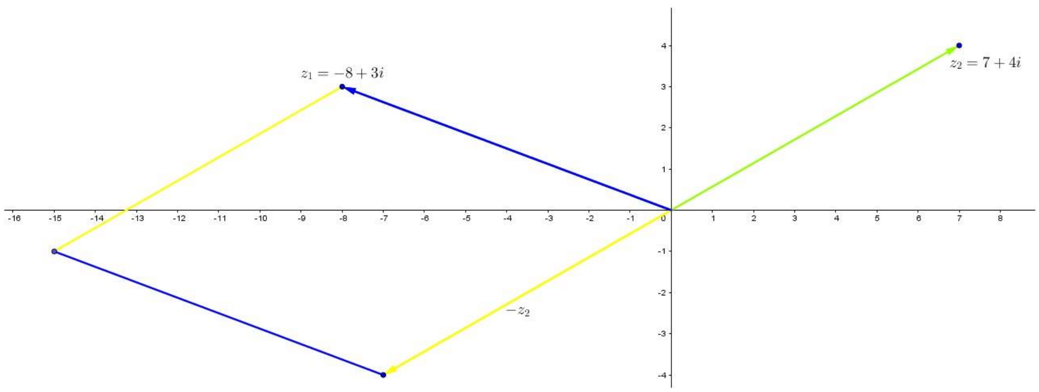
Al restar números complejos la forma geometríca es de gran ayuda, ya que la resta de números complejos se puede escribir como una suma de números complejos. Explícitamente, $Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$. Nuevamente se utilizará el software Geo-Gebra.

Se toman los vectores $Z_1 = -8 + 3i$ y $Z_2 = 7 + 4i$ del ejemplo y se grafican como se hizo anteriormente en la suma de números complejos.



Se calcula $-Z_2$, para ello, se multiplica el vector por el escalar -1, luego, se trasladan las longitudes de los vectores Z_1 y Z_2, paralelas a los vectores iniciales, las cuales empiezan en las coordenadas de $-Z_2$ y Z_1, respectivamente. El punto de intersección entre las longitudes es $Z_3 = -15 - i$, que coinciden con la resta de los vectores, hallada anteriormente en la representación algebraica. Lo dicho anteriormente corresponde a la ley del paralelogramo. Por último, se traza un vector desde el origén hasta $Z_3 = -15 - i$.

Para este ejemplo, se realizó una animación en el software Geo-Gebra que se encuentra en el siguiente link: $https://www.geogebra.org/m/cfyhpvz4$.



Multiplicación:

Al multiplicar números complejos se utilizan propiedades de números reales teniendo en cuenta que $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$. Así, por ejemplo, utilizando la propiedad distributiva en la multipicación $(a + bi)(c + di)$ se obtiene:

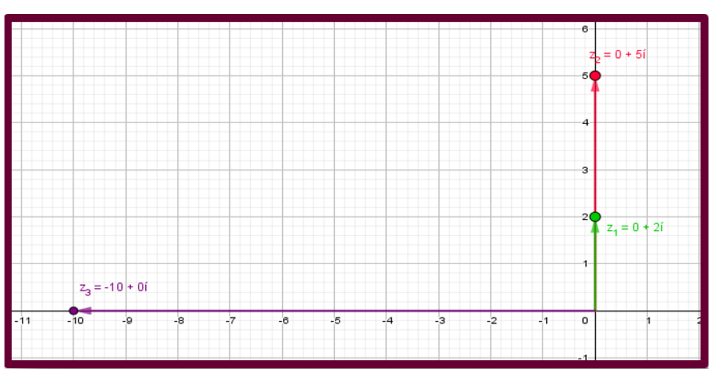
$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad)i + (bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo: En el caso de los imaginarios puros: $Z_1 = 2i$ y $Z_2 = 5i$, tenemos:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2i)(5i) = 10i^2 = 10(-1) = -10$$

Como se puede observar, el producto de dos números imaginarios puros es un número ¡real! sólo si la potencia de i es par.

Se verifica, entonces, los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de la multiplicación de números complejos en el software GeoGebra.

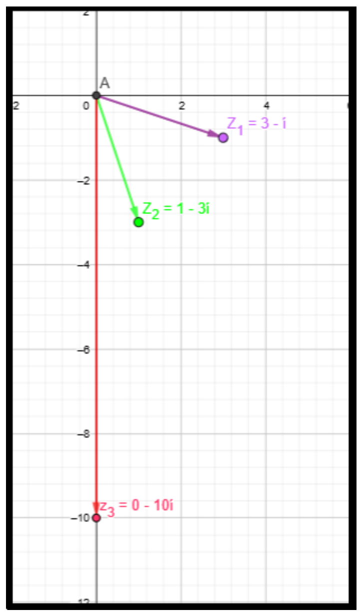


También se puede observar que la gráfica no es un paralelogramo.

Ejemplo: Multiplicar $(3-i)(1-3i)$

Solución: $(3-i)(1-3i) = 3(1-3i) - i(1-3i) = 3 - 9i - i + 3i^2 = 3 - 10i + 3i^2 = 3 - 10i + 3(-1) = 3 - 10i - 3 = -10i$
Respuesta: $(3-i)(1-3i) = -10i$

Se gráfica con software GeoGebra la multiplicación anterior, verificando los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de la multiplicación de números complejos.



3.2. CONJUGADO DE UN COMPLEJO

El conjugado del complejo $Z = a + ib$ es $\overline{Z} = a - ib$. Se llaman conjugados complejos porque tienen términos que son iguales, exceptuando la operación entre ellos (una es suma y la otra es resta). Es claro que, los términos que tienen la unidad imaginaria i sumarán 0.

Ejemplo 1: Multiplicar el complejo $(2+3i)$ por su complejo conjugado.

Solución:

Llamando $z = 2 + 3i$, entonces $\overline{z} = 2 - 3i$ nótese que $z + \overline{z} = (2+3i) + (2-3i) = 4$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (2+3i) \cdot (2-3i) \\ &= 4 - 6i + 6i - 9i^2 \\ &= 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

El software Geogebra posibilita realizar construcciones geométricas para visualizar algunas operaciones de los números complejos, además, motiva el interés de los estudiantes y permite evalúar su trabajo por competencias.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

4.1. Conclusiones

En el presente trabajo se recopilan diferentes maneras de comprender la naturaleza de los números complejos, a partir de la construcción intuitiva de los conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$), ($\mathbb{Z}$), ($\mathbb{Q}$) y ($\mathbb{R}/\mathbb{Q}$) y las operaciones que son permitidas en ellos. Por lo anterior, se concluye lo siguiente:

- Al analizar los resultados de algunas ecuaciones, de segundo y tercer grado, se encuentran resoluciones que los números reales no explican.
- Del estudio de la evolución histórica de los sistemas numéricos se deduce que la creación de cada conjunto numérico surgió de problematicas que requerían la introducción de nuevas propiedades, dando paso a la creación de nuevos conjuntos numéricos.
- A través de la historia surgieron problemas, de la matemática, que no podían solucionarse por medio de los números reales. Uno de ellos, por ejemplo, es el planteado por el matemático Diofanto de Alejandría.
- El software Geo-Gebra permite ilustrar las operaciones básicas (suma y resta) de los números complejos, facilitando el proceso constructivo del objeto geométrico.

4.2. Sugerencias

La autora del presente trabajo de grado, con base en los resultados obtenidos del presente trabajo, propone las siguientes sugerencias:

- Discutir en el aula los problemas planteados a través de la historia de los números complejos, de modo que se motive y complemente el estudio de la ecuación cuadrática en estudiantes del grado noveno.
- Implementar la utilización del software Geo-Gebra, con estudiantes de grado noveno, para visualizar la suma$https://www.geogebra.org/m/zmtu4tec$ y resta $https://www.geogebra.org/m/cfyhpvz4$ de los números complejos utilizando vectores.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aaboe, A. (1964). *Episodios Históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.* Cali, Colombia: Norma.

[2] Baldor, A. (1941). *Álgebra de Baldor.* Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria.

[3] Courant, R., y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid, España: Aguilar.

[4] Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas II.* Ciudad de México, México: Siglo XXI editores.

[5] González, C. D., y Nieto, D. (2012). *Solución de problemas aritméticos* (tesis de pregrado). Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia.

[6] Hawking, S. (2007). *Dios creó los Números.* Barcelona, España: Editorial Crítica.

[7] Martínez, I. C. (2011-2012). *La enseñanza de los Números Complejos en el Bachillerato.* Recuperado de https://matematicasiesoja.ï¬*les.wordpress.com*/2014/02/*ivc*3*a*1*ncanalmartc*3*adnez.pdf*

[8] Mendoza, F. R. (2016). *Matemática Cuántica y Conciente. Números complejos y su utilidad.* Recuperado de https://matematicacuanticayconsciente.wordpress.com/2016/10/10/numeros-complejos-y-su-utilidad/

[9] Mendoza, F. R. (2001). *Una Introducción a los Números Complejos.* Recuperado de https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/08/01a.-INTRODUCCION-A-LOS-NUMEROS-COMPLEJOS.pdf Mérida, Venezuela: Universidad de los Andes.

[10] Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa . (marzo de 2001). Obtenido de file:///C:/Users/yanit/Desktop/revista%20numeros%20complejos.pdf

[11] Swokowski, E. W. (2011). *Álgebra y Trigonométria Con Geométria Analítica* (págs. 580-589). México D.F.: CENGAGE Learning.

[12] Virtual, T. P. (Dirección). (2016). *Números Complejos. Evolución de los Imaginarios* [cinta cinematográfica].

[13] Virtual, L. (Dirección). (2015). *Los Números Complejos, con GeoGebra* [cinta cinematográfica].