



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 22 de septiembre de 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Astrid Juliana Ortiz Meñaca, con C.C. No. 1075284823,

María Alejandra Cabrera García, con C.C. No. 1075286382,

autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o _____

titulado Análisis de pruebas de presión en condiciones de flujo trilineal en pozos horizontales

presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de Ingeniero de petróleos ;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

Firma



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Análisis de pruebas de presión en condiciones de flujo trilineal en pozos horizontales

AUTOR O AUTORES:

| Primero y Segundo Apellido | Primero y Segundo Nombre |
|----------------------------|--------------------------|
| Ortiz Meñaca | Astrid Juliana |
| Cabrera García | María Alejandra |

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

| Primero y Segundo Apellido | Primero y Segundo Nombre |
|----------------------------|--------------------------|
| Escobar Macualo | Freddy Humberto |

ASESOR (ES):

| Primero y Segundo Apellido | Primero y Segundo Nombre |
|----------------------------|--------------------------|
|----------------------------|--------------------------|

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Ingeniero de petróleos

FACULTAD: Ingeniería

PROGRAMA O POSGRADO: Ingeniería de petróleos

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2017

NÚMERO DE PÁGINAS: 84

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Vigilada mieducación



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

| | | | | | | | |
|---------------|---------------------|----------------|----------|-----------------|-------------|---------------|---------------|
| CÓDIGO | AP-BIB-FO-07 | VERSIÓN | 1 | VIGENCIA | 2014 | PÁGINA | 2 de 4 |
|---------------|---------------------|----------------|----------|-----------------|-------------|---------------|---------------|

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español

Inglés

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| 1. Yacimientos no convencionales | Unconventional reservoirs |
| 2. Fracturas hidráulicas | Hydraulic fractures |
| 3. Pruebas de presión | Pressure test |
| 4. Modelo de flujo trilineal | Trilineal flow model |
| 5. Metodología TDS | TDS methodology |
| 6. Conductividad de fractura | Fracture conductivity |
| 7. Longitud media de fractura | Mean fracture length |

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Los yacimientos no convencionales aparecen como una solución al agotamiento de reservas, sin embargo, su baja permeabilidad, requiere la creación de fracturas hidráulicas que ayudan a mejorar la convergencia de los fluidos al pozo. El diseño y la ejecución de estas fracturas es complejo, así como conocer las propiedades del yacimiento, de gran importancia en la optimización de costos y mejoramiento de la vida de producción.

Este estudio presenta el análisis de pruebas de presión, a partir de un modelo analítico conocido como modelo de flujo trilineal, que describe un sistema compuesto de un pozo horizontal con fracturas múltiples en yacimientos de permeabilidades muy bajas. Aplicando la metodología TDS se crearon nuevas ecuaciones, las cuales permiten determinar características importantes de yacimiento tales como: conductividad de la fractura hidráulica



(k_{FWF}), longitud media de fractura (x_F), permeabilidad de la matriz (k_m) y permeabilidad del yacimiento interno (k_i), a partir de datos de la derivada de presión y puntos de intersección de los flujos presentados en tres diferentes casos, identificados en las pruebas de presión.

Finalmente, se simularon pruebas de presión a partir de datos obtenidos de la literatura, tanto para yacimientos de aceite como para yacimientos de gas, con la finalidad de verificar la confiabilidad de las ecuaciones, encontrando que los valores calculados poseen un alto grado de tolerancia.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Unconventional reservoirs appear as a solution to the depletion of reserves, however, their low permeability, requires the creation of hydraulic fractures that help to improve the convergence of fluids to the well. The design and the execution of these fractures is complex, as well as knowing the properties of the deposit, it is of great importance in the optimization of costs and improvement of the life of production.

This study presents the pressure test analysis, based on an analytical model known as the trilinear flow model, which describes a system composed of a horizontal well with multiple fractures in very low permeability reservoirs. Using the TDS methodology, new equations were created to determine important reservoir characteristics such as hydraulic fracture conductivity (k_{FWF}), mean fracture length (x_F), matrix permeability (k_m) and permeability of the internal reservoir (k_i), from data of the pressure derivative and points of intersection of the flows presented in three different cases, identified in the pressure tests.

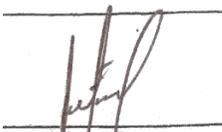
Finally, pressure tests were simulated from data obtained from the literature, both for oil reservoirs and for gas fields, in order to verify the reliability of the equations, finding that the calculated values have a high degree of tolerance.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: Jairo Antonio Sepúlveda Gaona

Firma: 



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

| | | | | | | | |
|---------------|---------------------|----------------|----------|-----------------|-------------|---------------|---------------|
| CÓDIGO | AP-BIB-FO-07 | VERSIÓN | 1 | VIGENCIA | 2014 | PÁGINA | 4 de 4 |
|---------------|---------------------|----------------|----------|-----------------|-------------|---------------|---------------|

Nombre Jurado: Javier Andrés Martínez Pérez

Firma: *Javier A. Martínez P.*

**ANÁLISIS DE PRUEBAS DE PRESIÓN EN CONDICIONES DE FLUJO
TRILINEAL EN POZOS HORIZONTALES**



PRESENTADO POR:

**ASTRID JULIANA ORTIZ MEÑACA
MARIA ALEJANDRA CABRERA GARCIA**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN PRUEBAS DE POZOS
2017**

**ANÁLISIS DE PRUEBAS DE PRESIÓN EN CONDICIONES DE FLUJO
TRILINEAL EN POZOS HORIZONTALES**



**ASTRID JULIANA ORTIZ MEÑACA
MARIA ALEJANDRA CABRERA GARCIA**

**Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero de Petróleos**

**Director: FREDDY HUMBERTO ESCOBAR MACUALO
Doctor en Ingeniería de Petróleos**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN PRUEBAS DE POZOS
2017**

Nota de Aceptación

Director del proyecto

Firma del jurado

Firma del jurado

Neiva, Julio de 2017

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a Dios y a la bendición más grande de mi vida, mis padres Julio Cesar Ortiz y Laura Meñaca, quienes han sido mi apoyo incondicional, guía y fortaleza en cada uno de mis pasos y quienes con su esfuerzo, trabajo y consejos me han permitido llegar hasta aquí. A mi abuelita María Oliva y toda mi familia, por creer en mí y ponerme en cada una de sus oraciones.

A Andrés Alarcón, por su amor, apoyo y compañía en estos años de grandes esfuerzos y a mi amiga y compañera de tesis María Alejandra Cabrera, por su valiosa amistad y entrega con este proyecto que hoy con mucho orgullo les presentamos.

Finalmente, dedico este trabajo de tesis a mi director Freddy Humberto Escobar por brindarnos la oportunidad de realizar este proyecto de su mano, bajo sus enseñanzas y lecciones.

Astrid Juliana Ortiz Meñaca

Quiero agradecer a Dios por ser siempre mi guía, por darme la fuerza y sabiduría que requiero para llevar a cabo mis metas, por la libertad, mi familia y su justicia.

Dedico este trabajo a mis padres, Jaime Cabrera y Elcy García, a quienes amo con todo mi corazón, por el apoyo incondicional, por cada sacrificio y por tanto cariño, por enseñarme a seguir adelante a pesar de los problemas; a mi hermana, Mariana Cabrera, por recordarme que con amor, constancia y disciplina, se puede llegar lejos; y a mis mascotas, Juana, Lucas y Camila, por su compañía y ternura.

A Juan Pablo Falla, por ser el ángel que llegó a mi vida cuando más lo necesitaba, por brindarme su apoyo y comprensión, por cada palabra de ánimo y su verdadero amor, a mi compañera de tesis y amiga, Astrid Juliana Ortiz, por su gran corazón y su inigualable amistad, por el compromiso y responsabilidad en este trabajo de grado.

Por último, agradezco a mi director Freddy Humberto Escobar por permitirnos trabajar de su lado, por la paciencia y enseñanzas; al profesor Jairo Antonio Sepúlveda, por cada lección y aporte en mi proceso de formación.

Un de mes rêves a été réalisé, Dieu merci
María Alejandra Cabrera García

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|-----------|
| RESUMEN | 13 |
| ABSTRACT | 14 |
| INTRODUCCIÓN | 15 |
| OBJETIVO | 17 |
| 1. MARCO TEÓRICO..... | 18 |
| 1.1. Especificaciones para el modelo de flujo trilineal | 18 |
| 1.2. Modelo matemático..... | 19 |
| 2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA DERIVADA EN FUNCIÓN DE TIEMPO ADIMENSIONAL EN CONDICIONES DE FLUJO TRILINEAL EN POZOS HORIZONTALES | 22 |
| 2.1. Generación de los datos de la prueba | 22 |
| 2.2. Flujos característicos | 23 |
| 2.2.1. Ecuaciones de flujo en yacimientos de aceite | 28 |
| 2.2.1.1. Análisis flujo bilineal..... | 28 |
| 2.2.1.2. Análisis primer flujo lineal | 31 |
| 2.2.1.3. Análisis primer estado pseudoestable | 33 |
| 2.2.1.4. Análisis segundo flujo lineal..... | 35 |
| 2.2.1.5. Análisis segundo estado pseudoestable | 38 |
| 2.2.2. Ecuaciones de flujo en yacimientos de gas | 40 |
| 2.2.2.1. Análisis flujo bilineal..... | 40 |
| 2.2.2.2. Análisis primer flujo lineal | 41 |
| 2.2.2.3. Análisis primer estado pseudoestable | 43 |
| 2.2.2.4. Análisis segundo flujo lineal..... | 43 |
| 2.2.2.5. Análisis segundo estado pseudoestable | 45 |
| 2.2.3. Puntos de Intersección | 45 |
| 2.2.3.1. Intersección primer pseudoestable-bilineal..... | 46 |
| 2.2.3.2. Intersección primer pseudoestable-primer lineal | 46 |
| 2.2.3.3. Intersección bilineal-primer lineal | 48 |
| 2.2.3.4. Intersección segundo pseudoestable-bilineal..... | 49 |
| 2.2.3.5. Intersección segundo pseudoestable-segundo lineal..... | 49 |
| 2.2.3.6. Intersección bilineal-segundo lineal | 50 |
| 2.2.3.7. Intersección segundo pseudoestable-primer lineal | 51 |
| 2.2.3.8. Intersección segundo lineal-primer pseudoestable | 51 |
| 3. APLICACIONES MODELO DE FLUJO TRILINEAL | 52 |
| 3.1. Ejercicio de aplicación 1 para un yacimiento de aceite | 52 |
| 3.2. Ejercicio de aplicación 2 para un yacimiento de gas | 58 |
| RECOMENDACIONES | 67 |
| BIBLIOGRAFIA | 68 |
| ANEXOS | 70 |
| Apéndice A: Data de pruebas de presión para ejercicios de aplicación | 70 |
| 1. Prueba de presión para un yacimiento de aceite, ejercicio 1 | 70 |
| 2. Prueba de presión para un yacimiento de gas, ejercicio 2 | 71 |
| Apéndice B: Verificación del caso | 72 |

| | |
|---|----|
| Apéndice C: Ecuaciones de flujo con función pseudotiempo en yacimientos de gas | 73 |
| Apéndice D: Modelo matemático y solución analítica | 75 |
| 1. Ecuaciones generales | 75 |
| 2. Solución analítica yacimiento externo | 77 |
| 3. Solución analítica yacimiento interno | 78 |
| 4. Solución analítica fractura hidráulica | 81 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1. Esquema del modelo de flujo trilineal que representa tres regiones de flujo contiguas para un pozo horizontal con fracturas múltiples..... | 18 |
| Figura 2. Esquema 3D del modelo de flujo trilineal que representa tres regiones de flujo contiguas para un pozo horizontal con fracturas múltiples..... | 19 |
| Figura 3. Datos de entrada programa Trilinear Model. | 22 |
| Figura 4. Casos presentados en el modelo de flujo trilineal: Caso uno, caso dos y caso tres..... | 24 |
| Figura 5. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 1. | 25 |
| Figura 6. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 2. | 26 |
| Figura 7. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 3. | 27 |
| Figura 8. Análisis del flujo bilineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal | 29 |
| Figura 9. Análisis del primer flujo lineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal. | 32 |
| Figura 10. Análisis primer estado pseudoestable para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal..... | 34 |
| Figura 11. Análisis del segundo flujo lineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal. | 36 |
| Figura 12. Análisis del segundo estado pseudoestable para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal. | 39 |
| Figura 13. Puntos de intersección característicos entre los principales régimen de flujo que se presentan en un yacimiento naturalmente fracturado, en condiciones de flujo trilineal. | 47 |
| Figura 14. Presión y derivada de presión vs. Tiempo en un gráfico log-log para el ejercicio 1 (yacimiento de aceite). | 53 |
| Figura 15. Verificación de los regímenes de flujo para el ejercicio 1 (yacimiento de aceite). | 54 |
| Figura 16. Pseudopresión y derivada de Pseudopresión vs. Tiempo en un gráfico log-log para el ejercicio 2 (yacimiento de gas). | 60 |
| Figura 17. Verificación de los regímenes de flujo para el ejercicio 2 (yacimiento de gas). | 61 |

Lista de Tablas

| | |
|--|----|
| Tabla 1. Datos de entrada para ejercicio de aplicación 1 en un yacimiento de aceite. | 52 |
| Tabla 2. Puntos característicos de los regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 1. | 55 |
| Tabla 3. Tiempo de intersección entre regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 1. | 55 |
| Tabla 4. Comparación de resultados, ejercicio de aplicación 1. | 58 |
| Tabla 5. Datos de entrada para ejercicio de aplicación 2 en un yacimiento de gas. | 59 |
| Tabla 6. Puntos característicos de los regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 2. | 62 |
| Tabla 7. Tiempo de intersección entre regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 2. | 62 |
| Tabla 8. Comparación de resultados, ejercicio de aplicación 2. | 65 |

NOMENCLATURA

| | |
|---------------|---|
| A | Área del yacimiento, ft ² |
| B_O | Factor de volumen de formación del aceite, rbbbl/STB |
| B_g | Factor de volumen de formación del gas, ft ³ /SCF |
| C | Coefficiente de almacenamiento, rbbbl/psi |
| C_A | Factor de forma |
| C_D | Coefficiente de almacenamiento, adimensional |
| C_{RD} | Conductividad de fractura hidráulica, adimensional |
| C_t | Compresibilidad total, 1/psi |
| \tilde{C} | Compresibilidad total, 1/psi |
| d_F | Distancia entre dos fracturas hidráulicas adyacentes, ft |
| h | Espesor del yacimiento, ft |
| h_f | Espesor de fracturas naturales, ft |
| h_{ft} | Espesor total de fracturas naturales, ft |
| h_m | Espesor de matriz, ft |
| \bar{K} | Tensor de permeabilidad, md |
| k | Permeabilidad, md |
| k_I | Permeabilidad del yacimiento interno, md |
| k_f | Permeabilidad fractura natural, md |
| \tilde{k}_f | Permeabilidad total de fractura natural, md |
| k_F | Permeabilidad fractura hidráulica, md |
| k_O | Permeabilidad yacimiento externo, md |
| k_m | Permeabilidad matriz, md |
| L | Longitud, ft |
| $m(P)$ | Pseudopresión, psi ² /cp |
| n_F | Número de fracturas hidráulicas |
| n_f | Número de fracturas naturales |
| P | Presión, psia |
| P_D | Presión adimensional |
| P_i | Presión inicial del yacimiento, psi |
| q | Rata de flujo, STB/d |
| $q_{F,sc}$ | Rata de flujo por fractura hidráulica, aceite STB/d, gas Mscf/d |
| r_w | Radio del pozo, ft |
| S | Parámetro de laplace |

| | |
|-------------------|---|
| s | Daño (skin factor) |
| s_c | Daño horizontal del pozo |
| t | Tiempo, hr |
| T | Temperatura de yacimiento, °R |
| t_D | Tiempo adimensional |
| t_{Da} | Pseudotiempo adimensional |
| $t_D * P_D'$ | Derivada de presión adimensional |
| $t_D * m(P)'_D$ | Derivada de pseudopresión adimensional |
| $t * \Delta m(P)$ | Derivada de pseudopresión, d/Mscf |
| $t_a(P)$ | Pseudotiempo, (hr)(psi)/cp |
| w_F | Ancho de fractura hidráulica, ft |
| x_e | Tamaño de yacimiento, en dirección x, ft |
| x_F | Longitud media de fractura hidráulica, ft |
| y_e | Tamaño de yacimiento, en dirección y, ft |

Griego

| | |
|----------------|--|
| α | Parámetro definido en el modelo de flujo trilinear |
| β | Parámetro definido en el modelo de flujo trilinear |
| Δ | Cambio |
| ϕ | Porosidad, fracción |
| $\tilde{\phi}$ | Porosidad total, fracción |
| η | Difusividad, ft ² /hr |
| λ | Transmisibilidad |
| μ | Viscosidad, cp |
| π | Constante Pi |
| ρ | Densidad, lbm/ft ³ |
| σ | Factor de forma, ft ² |
| ξ | Tipo de medio: I,F,O |
| ω | Almacenamiento |

Sufijos

| | |
|-----|------------------|
| D | Adimensional |
| e | Frontera externa |
| f | Fractura natural |

| | |
|-------------|-----------------------|
| <i>F</i> | Fractura hidráulica |
| <i>i</i> | Inicial |
| <i>I</i> | Yacimiento interno |
| <i>m</i> | Matriz |
| <i>O</i> | Yacimiento externo |
| <i>R</i> | Yacimiento |
| <i>sc</i> | Condiciones estandar |
| <i>t</i> | Total |
| <i>BL</i> | Bilineal |
| <i>L1</i> | Primer Lineal |
| <i>pss1</i> | Primer Pseudoestable |
| <i>L2</i> | Segundo Lineal |
| <i>pss2</i> | Segundo Pseudoestable |

RESUMEN

Los yacimientos no convencionales aparecen como una solución al agotamiento de reservas, sin embargo, su baja permeabilidad, requiere la creación de fracturas hidráulicas que ayudan a mejorar la convergencia de los fluidos al pozo. El diseño y la ejecución de estas fracturas es complejo, así como conocer las propiedades del yacimiento, de gran importancia en la optimización de costos y mejoramiento de la vida de producción.

Este estudio presenta el análisis de pruebas de presión, a partir de un modelo analítico conocido como modelo de flujo trilineal, que describe un sistema compuesto de un pozo horizontal con fracturas múltiples en yacimientos de permeabilidades muy bajas. Aplicando la metodología TDS se crearon nuevas ecuaciones, las cuales permiten determinar características importantes de yacimiento tales como: conductividad de la fractura hidráulica (k_{FWF}), longitud media de fractura (x_F), permeabilidad de la matriz (k_m) y permeabilidad del yacimiento interno (k_I), a partir de datos de la derivada de presión y puntos de intersección de los flujos presentados en tres diferentes casos, identificados en las pruebas de presión.

Finalmente, se simuló pruebas de presión a partir de datos obtenidos de la literatura, tanto para yacimientos de aceite como para yacimientos de gas, con la finalidad de verificar la confiabilidad de las ecuaciones, encontrando que los valores calculados poseen un alto grado de tolerancia.

ABSTRACT

Unconventional reservoirs appear as a solution to the depletion of reserves, however, their low permeability, requires the creation of hydraulic fractures that help to improve the convergence of fluids to the well. The design and the execution of these fractures is complex, as well as knowing the properties of the deposit, it is of great importance in the optimization of costs and improvement of the life of production.

This study presents the pressure test analysis, based on an analytical model known as the trilinear flow model, which describes a system composed of a horizontal well with multiple fractures in very low permeability reservoirs. Using the TDS methodology, new equations were created to determine important reservoir characteristics such as hydraulic fracture conductivity (k_{FWF}), mean fracture length (x_F), matrix permeability (k_m) and permeability of the internal reservoir (k_I), from data of the pressure derivative and points of intersection of the flows presented in three different cases, identified in the pressure tests.

Finally, pressure tests were simulated from data obtained from the literature, both for oil reservoirs and for gas fields, in order to verify the reliability of the equations, finding that the calculated values have a high degree of tolerance.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el mundo ha puesto su mirada en los yacimientos no convencionales, en la búsqueda continua de aumentar la producción de hidrocarburos ante una alta demanda energética global. Lo que hace a un yacimiento de carácter no convencional, es su baja permeabilidad, que puede oscilar entre 10^{-6} y 10^{-12} Darcy, pero que generalmente se haya en el orden de los nanodarcys (10^{-9} Darcy) y, pequeños diámetros de poro que oscilan entre 1 y 10 mm, explicando el por qué se consideran comúnmente impermeables. La explotación de éste tipo de yacimientos requiere de largos pozos horizontales y la implementación de un buen fracturamiento hidráulico, con el firme propósito de crear extensas redes de fracturas artificiales, para incrementar el índice de productividad de un pozo y lograr optimizar la recuperación de reservas.

El comportamiento de fluidos dentro de un yacimiento compuesto por matriz estrecha, fracturas hidráulicas y fracturas naturales (usualmente inducidas en el momento del fracturamiento hidráulico), en un pozo horizontal, se pueden interpretar a partir de un modelo analítico conocido como modelo de flujo trilineal, formulado y verificado por Brown (2009) y Brown et al. (2009). Como su nombre lo indica, el modelo de flujo trilineal supone flujo lineal durante la vida productiva del pozo y, la interpretación de sus autores se basó en una serie de trabajos previos del comportamiento de fluidos en medios porosos, así como en pozos verticales y horizontales en yacimientos naturalmente y/o hidráulicamente fracturados.

Prats (1961) y Prats et al. (1962), iniciaron el estudio indagando acerca del efecto de las fracturas verticales en el comportamiento de los yacimientos; posteriormente Gringarten et al (1974) presentaron una solución para una fractura vertical de conductividad infinita que interceptaba un pozo vertical, basados en lo anterior, Cinco Ley et al. (1978) lo hicieron de igual manera para una fractura de conductividad finita. Cinco-Ley y Sameniago (1981), analizaron el comportamiento de presión transitoria y encontraron un régimen de flujo bilineal; pero fueron Camacho-V. (1984), Bennett et al. (1985), Camacho-V. Et al. (1987), quienes obtuvieron soluciones analíticas de presión transitoria para pozos verticales interceptados por fracturas verticales de conductividad finita en yacimientos naturalmente fracturados, extendiendo este trabajo a sistemas de porosidad dual gracias a Cinco y Meng (1988).

El modelo de flujo trilineal divide el yacimiento en tres zonas con propiedades promedio: yacimiento interno, yacimiento externo y fracturas hidráulicas. Las soluciones de las ecuaciones de difusividad, se derivaron en el dominio de Laplace separadamente para cada zona y los resultados calculados en el dominio de Laplace fueron invertidos de nuevo en el dominio del tiempo utilizando el algoritmo de Stehfest (1970). Para dar solución analítica a los casos de depósitos gasíferos, Al-Hussainy y Ramey (1966) y Al-Hussainy et al. (1966) introdujeron la idea de la pseudopresión real del gas. Debido a que el yacimiento interno es un medio naturalmente fracturado, el modelo de porosidad dual de Kazemi (1969), de De-Swaan-O (1976) y Serra et al. (1983), es punto referente del modelo de flujo trilineal;

además, el modelo asume que del volumen que se haya entre las fracturas hidráulicas, depende la vida productiva de un pozo horizontal fracturado (Raghavan et al., 1997).

Esta investigación presenta la aplicación de la metodología TDS (Tiab's Direct Synthesis) desarrollada por Tiab (1995) para pruebas de presión, a partir del modelo de flujo trilineal, con la cual se crearon nuevas ecuaciones que permiten caracterizar yacimientos con múltiples fracturas en pozos horizontales, tanto para yacimientos de aceite como de gas. Las ecuaciones han sido formuladas para tres diferentes casos, identificados por la presencia de flujos característicos propios de cada caso durante una prueba de presión.

OBJETIVO

OBJETIVO GENERAL

- Formular ecuaciones analíticas que permitan interpretar pruebas de presión bajo condiciones de flujo trilineal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

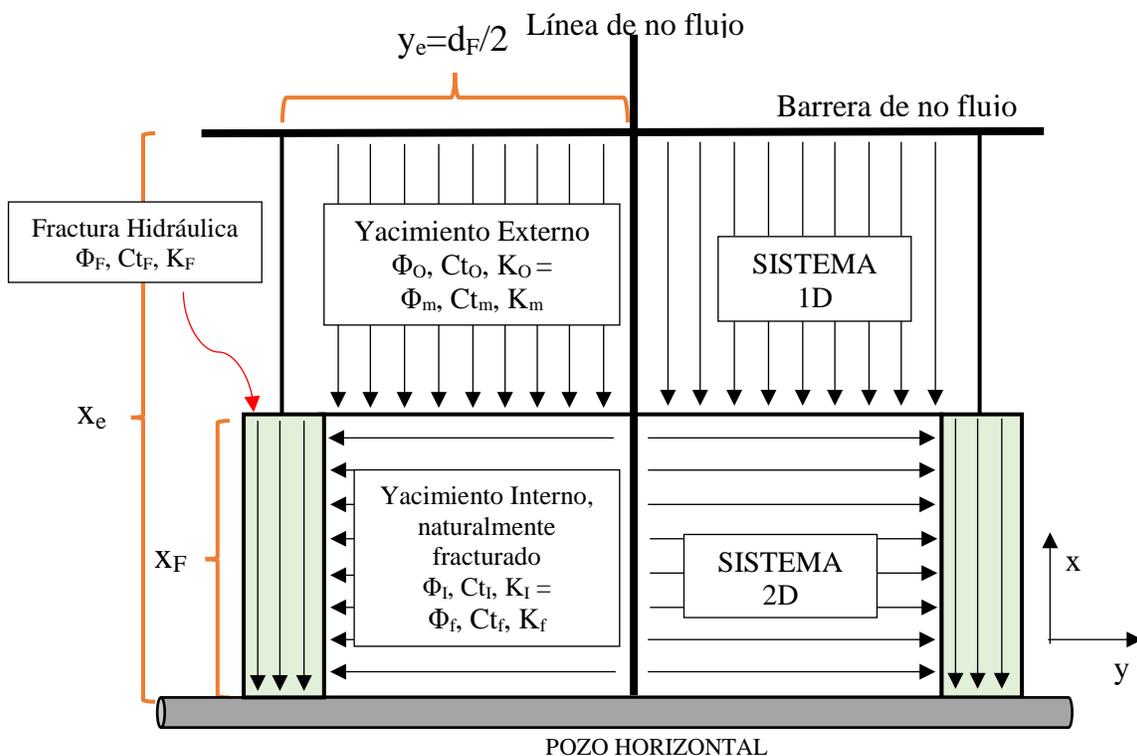
- Diseñar un simulador analítico a partir del modelo de flujo trilineal que genere datos de presión adimensional y su derivada contra tiempo adimensional.
- Generar curvas de presión adimensional y su derivada contra tiempo adimensional, variando los parámetros influyentes en el modelo de flujo trilineal, buscando observar un comportamiento que permita unificar los graficados obtenidos.
- Determinar las soluciones analíticas a partir del análisis gráfico e información reportada en la literatura.
- Verificar y aplicar las ecuaciones obtenidas mediante su implementación en pruebas generadas a partir de simuladores y reales si es posible.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. Especificaciones para el modelo de flujo trilineal

El modelo de flujo trilineal es aplicable a un pozo horizontal multifracturado en un yacimiento con permeabilidad de matriz muy baja. Según Brown (2009), La base de este modelo es la premisa de que la vida productiva de un pozo horizontal en una formación de esquisto está dominada por regímenes de flujo lineal, los cuales se presentan en tres secciones específicas del yacimiento (Figura 1 y Figura 2): el yacimiento externo, más allá de la parte superior de las fracturas hidráulicas, donde predomina la matriz (denotado por el subíndice O), el yacimiento interno, entre fracturas hidráulicas (denotado por el subíndice I) el cual debe ser naturalmente fracturado, y la fractura hidráulica con conductividad finita, (denotado por el subíndice F).

Figura 1. Esquema del modelo de flujo trilineal que representa tres regiones de flujo contiguas para un pozo horizontal con fracturas múltiples.



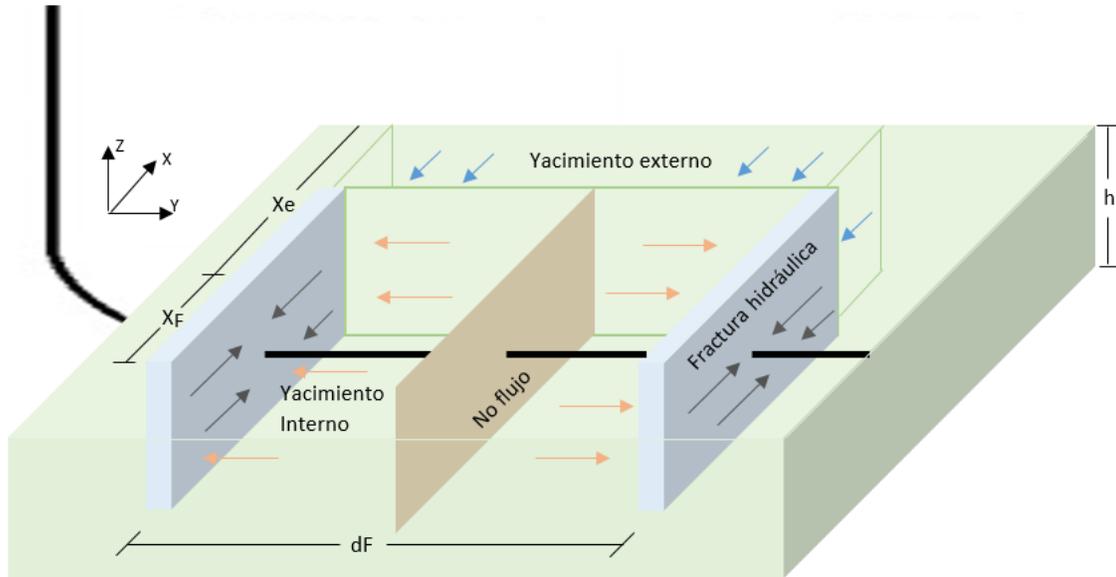
Fuente: Brown, M. 2009. Analytical Trilinear Pressure Transient Model for Multiply Fractured Horizontal Wells in Tight Shale Reservoirs.

El modelo de flujo trilineal, supone:

- Flujo lineal en las tres zonas del yacimiento.

- El yacimiento interno es naturalmente fracturado y es simulado con el modelo transitorio de doble porosidad (Kazemi, 1969, de Swaan-O, 1976, and Serra et al., 1983).
- Cada zona del yacimiento puede tener propiedades diferentes, pero éstas deben ser iguales internamente.
- Las fracturas hidráulicas dominan la producción y el aporte de fluidos de la matriz al pozo es insignificante.
- Las fracturas hidráulicas poseen propiedades idénticas y están igualmente espaciadas por una distancia, d_F .
- Las fracturas hidráulicas son consideradas medios porosos de conductividad finita.
- La línea media entre dos fracturas hidráulicas es un límite de no flujo.
- El volumen de drenaje se limita al volumen del yacimiento entre las fracturas hidráulicas, Raghavan et al., 1997.

Figura 2. Esquema 3D del modelo de flujo trilineal que representa tres regiones de flujo contiguas para un pozo horizontal con fracturas múltiples.



1.2. Modelo matemático

La derivación y verificación del modelo trilineal están dadas por Brown (2009) y Brown et al. (2009). El desarrollo completo de las expresiones analíticas finales se presentan en el Apéndice D.

A continuación se muestran algunas definiciones presentadas por Ozkan et al. 2011: El término $q_{F,sc}$ denota el caudal de cada fractura hidráulica tal que $q_{F,sc} = q_{sc} / n_F$, donde q_{sc} es el caudal total del pozo horizontal y n_F es el número de fracturas hidráulicas a lo largo de la longitud del pozo. Para el yacimiento interno, el cual es naturalmente fracturado, se hace uso de las propiedades intrínsecas de las fracturas naturales, y para el yacimiento externo, es decir, más allá de la parte superior de las fracturas hidráulicas, las propiedades intrínsecas de la matriz. Específicamente para las ecuaciones 11 y 16, $k_{th} = k_f h_f$, donde k_f

es la permeabilidad intrínseca de las fracturas naturales y h_{ft} es el espesor total de las fracturas naturales que intersectan la altura de la fractura hidráulica h_F (h_F es igual al espesor del yacimiento h). Si n_f es el recuento de las fracturas naturales que intersectan la altura de la fractura hidráulica y h_f es la abertura de las fracturas naturales, tenemos que $h_{ft} = n_f h_f$. También se introduce la densidad de fracturas naturales, $\rho_f = n_f / h$, en unidades del número de fracturas naturales por pie (f/ft).

Por conveniencia, la solución de flujo trilineal se deriva en términos de unidades consistentes y variables adimensionales formuladas y ajustadas al modelo de flujo trilineal, las cuales permiten convertir los valores adimensionales en dimensionales.

$$P_D = \frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (P_i - P_{wf}) \quad (1)$$

$$t_D * P_D' = \frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t * \Delta P') \quad (2)$$

Para aceite, y

$$m(P)_D = \frac{k_I h}{1422 q_{F,Msc} T} [m(P_i) - m(P_{wf})] \quad (3)$$

$$t_D * m(P)_D' = \frac{k_I h}{1422.52 q_{F,Msc} T} (t * \Delta m(P)') \quad (4)$$

Para flujo de gas, donde $m(P)$ denota pseudopresión de un gas (Al-Hussainy et al. 1966; Al-Hussainy and Ramey 1966),

$$m(P) = 2 \int_{P_b}^P \frac{P'}{\mu z} dP' \quad (5)$$

El tiempo adimensional es definido por:

$$t_D = \frac{0.0002637 k_I t}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \quad (6)$$

Donde t está en horas y $(\phi c_t)_I = (\phi c_t)_f$. Las variables adimensionales de la geometría del yacimiento y las fracturas, están definidas por:

$$x_D = \frac{x_e}{x_F} \quad (7)$$

$$y_D = \frac{y_e}{x_F} \quad (8)$$

$$w_D = \frac{w_F}{x_F} \quad (9)$$

La solución adimensional del flujo trilineal para un pozo horizontal en un yacimiento multifracturado, es dada en el dominio de la transformada de Laplace.

$$\bar{P}_D = (\bar{P}_{FD})_{x_D=0} = \frac{\pi}{s C_{FD} \sqrt{\alpha_F} \tanh(\sqrt{\alpha_F})} \quad (10)$$

Donde S es el parámetro de la transformada de Laplace con respecto al tiempo adimensional, td .

$$C_{FD} = \frac{k_F w_F}{k_I x_F} \quad (11)$$

$$\alpha_F = \frac{2\beta_F}{C_{FD}} + \frac{S}{\eta_{FD}} \quad (12)$$

$$\eta_{FD} = \frac{\eta_F}{\eta_I} \quad (13)$$

$$\beta_F = \sqrt{\alpha_R} \tanh \left[\sqrt{\alpha_R} \left(y_{eD} - \frac{w_{FD}}{2} \right) \right] \quad (14)$$

$$\alpha_R = \frac{\beta_R}{C_{RD} y_{eD}} + u \quad (15)$$

$$C_{RD} = \frac{k_I x_F}{k_O y_e} \quad (16)$$

$$\beta_R = \sqrt{\frac{S}{\eta_{RD}}} \tanh \left[\sqrt{\frac{S}{\eta_{RD}}} (x_{eD} - 1) \right] \quad (17)$$

$$\eta_{RD} = \frac{\eta_O}{\eta_I} \quad (18)$$

En las ecuaciones 13 y 18 $\xi = I, F, O$.

$$\eta_\xi = \frac{k_\xi}{(\phi c_i)_\xi \mu} \quad (19)$$

En la ecuación 15

$$u = sf(S)$$

Donde

$$f(S) = 1$$

Para yacimientos homogéneos

$$f(S) = 1 + \sqrt{\frac{\lambda \omega}{3S}} \tanh \left(\sqrt{\frac{3S\omega}{\lambda}} \right) \quad (20)$$

Para un yacimiento interno naturalmente fracturado, los parámetros de porosidad dual son definidos por:

$$\omega = \frac{(\phi c_i h)_m}{(\phi c_i h)_f} \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{12x_F^2 k_m}{h_m h_f k_f} \quad (22)$$

2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA DERIVADA EN FUNCIÓN DE TIEMPO ADIMENSIONAL EN CONDICIONES DE FLUJO TRILINEAL EN POZOS HORIZONTALES

Para el análisis de la derivada de presión en función del tiempo adimensional de yacimientos no convencionales, se diseñó un programa (Figura 3) que simulara mediante un modelo matemático el comportamiento de un yacimiento en condiciones de flujo trilineal.

2.1. Generación de los datos de la prueba

Figura 3. Datos de entrada programa Trilinear Model.

The screenshot shows the 'Trilinear Model' software interface. It features a menu bar with options: 'Execute', 'See Input data', 'Reset zoom', 'Read Pnts', 'Copy Chart', and 'Exit'. Below the menu is the 'Input data' section, which contains numerous input fields for parameters, each with a numerical value and a unit. The parameters are arranged in a grid-like fashion. A 'Heterogeneous' checkbox is checked, and 'Set sC = 0' is also checked. An 'Emphasis' section has radio buttons for 'Oil' (selected) and 'Gas'. The 'qFg.sc' field has a value of 100 and is highlighted in orange.

| Parameter | Value | Unit |
|---------------|-------------------------------------|------|
| Omega | 0.00333333 | |
| LamdaF | 2.0758E-10 | |
| (tD)ini | 0.0001 | |
| tD(max) | 1E7 | |
| Ndata | 300 | |
| Filename | misDatos | |
| Steph | 8 | |
| Xe, ft | 7500 | |
| Ye, ft | 108.5 | |
| xf, ft | 93 | |
| wf, ft | 0.01 | |
| CD | 0 | |
| phiF | 0.38 | |
| phil | 0.7 | |
| phiD | 0.07 | |
| Heterogeneous | <input checked="" type="checkbox"/> | |
| Set sC = 0 | <input checked="" type="checkbox"/> | |
| kF, md | 25100 | |
| kl, md | 50 | |
| kD, md | 5E-16 | |
| ctF | 1E-5 | |
| ctI | 6E-3 | |
| ctD | 1E-6 | |
| etaF | 5806026.316 | |
| Etal | 10.464 | |
| etaD | 6.27857142857143 | |
| h, ft | 380 | |
| rw, ft | 0.3 | |
| dF, ft | 217 | |
| qFo.sc | 34.83 | |
| T, R | 600 | |
| Mu | 0.3 | |
| Mui | 0.3 | |
| Bo | 1.35 | |
| rhof | 1 | |
| hf | 0.005 | |
| nf | 380 | |
| hit | 1.9 | |
| xi | 0.25 | |
| qFg.sc | 100 | |

Para que el programa permitiera extraer data sintética del comportamiento de este tipo de yacimientos, se utilizó el modelo matemático propuesto por Brown (2009) y Brown et al. (2009), el cual requiere como datos de entrada los parámetros principales de permeabilidad (k), extensión del yacimiento (y_e y x_e), compresibilidad ($C_{t\xi}$), porosidad ($phi_{i\xi}$), propiedades del fluido (μ_f y B_f), entre otros. Para realizar el análisis de las pruebas de presión, se caracterizaron los flujos vistos en gráficos log-log de derivada de presión adimensional versus tiempo adimensional.

2.2. Flujos característicos

En el análisis de pruebas de presión para yacimientos en condiciones de flujo trilineal se presentaron tres posibles casos (Figura 4), los cuales fueron nombrados como caso uno, caso dos y caso tres. Para identificar de cuál caso se trata, se ha establecido un procedimiento general mostrado en el Apéndice B o se describen algunos factores característicos a continuación:

- Caso uno

Para este caso se presentan tres flujos característicos (Figura 5): A tiempos tempranos, se observa un flujo bilineal, el cual ocurre una vez la onda de presión detecta flujo lineal simultáneo en la fractura y el yacimiento interno. Un segundo flujo, lineal (primer lineal) en respuesta al paso de fluidos de las fracturas naturales a las fracturas hidráulicas, y por último, el estado pseudoestable (primer pseudoestable), que se identifica en la prueba de presión porque el cambio de presión respecto al tiempo es constante debido a que la matriz no aporta fluidos a las fracturas naturales.

Generalmente, se puede observar el primer flujo lineal a $t_d < 0$ y cuando λ por Ω es menor o igual a uno, o simplemente cuando λ y Ω toman valores muy pequeños, lo cual ratifica la incapacidad de flujo de matriz a fractura natural. Debido a que λ es dependiente de la permeabilidad de la matriz, éste caso habitualmente ocurre cuando dicho valor de permeabilidad es lo suficientemente bajo ($< 1E-9$) para que la presión en la prueba cambie linealmente con el tiempo.

- Caso dos

Se presentan cinco regímenes de flujo (Figura 6): Bilineal, primer lineal y primer pseudoestable, mencionados en el caso 1; a continuación un segundo flujo lineal y un segundo estado pseudoestable.

Seguido al primer flujo pseudoestable y después de un tiempo considerable de respuesta, el cambio de presión respecto al tiempo es nuevamente variable y el segundo flujo lineal se puede observar; una vez la onda de presión alcanza el límite de las fracturas hidráulicas o frontera del yacimiento interno, se forma finalmente el segundo estado pseudoestable. Existe cierta relación entre λ - Ω y el segundo flujo lineal. Frecuentemente, cuando se tienen Ω de valores grandes, el segundo flujo lineal se hace visible en la gráfica de derivada de presión versus tiempo adimensional; cuando Ω crece, la duración del segundo flujo lineal también lo hace, y éste, a su vez ocurre tardíamente, a medida que λ se hace pequeño.

- Caso tres

Es posible diferenciar tres regímenes de flujo (Figura 7): a tiempos tempranos, se observa un flujo bilineal, posteriormente un flujo lineal, el mismo que hemos llamado segundo flujo lineal en el caso dos, seguido de un estado pseudoestable o segundo pseudoestable. El caso 3 es dado debido al movimiento simultáneo de fluidos de matriz a fractura natural y de fractura natural a fractura hidráulica; bajo condiciones de λ y Ω grandes, el caso 3 es normalmente presentado.

Figura 4. Casos presentados en el modelo de flujo trilineal: Caso uno, caso dos y caso tres.

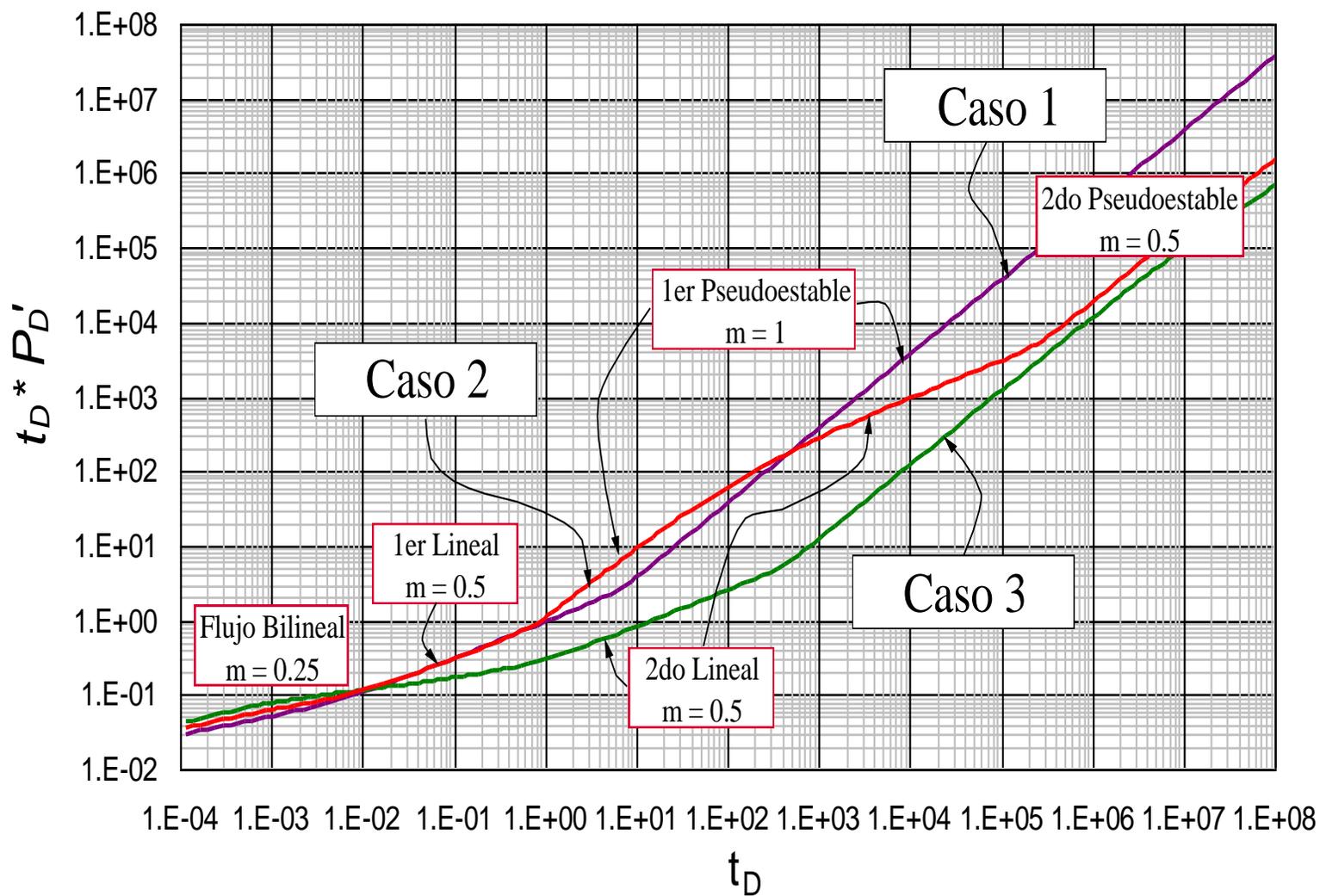


Figura 5. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 1.

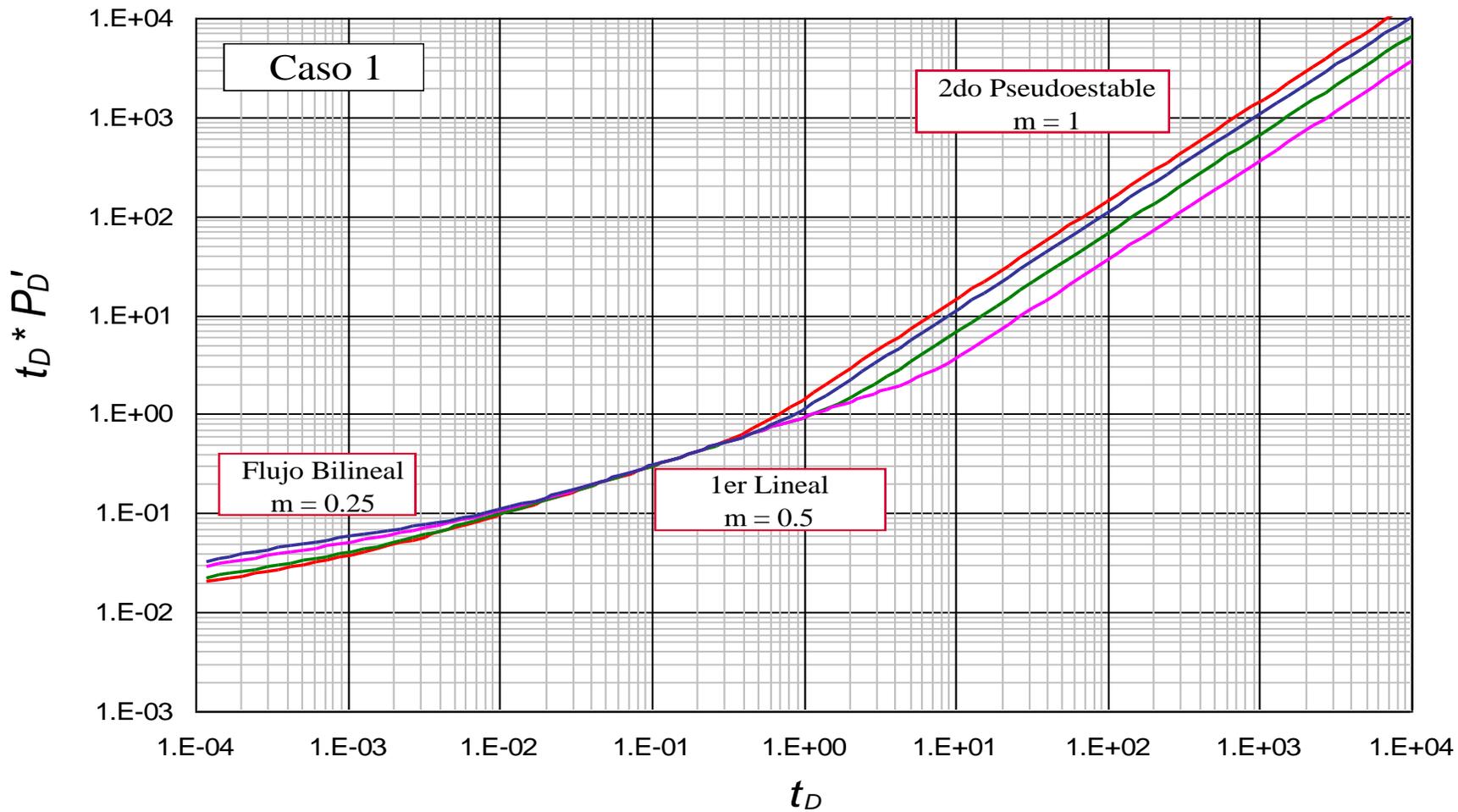


Figura 6. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 2.

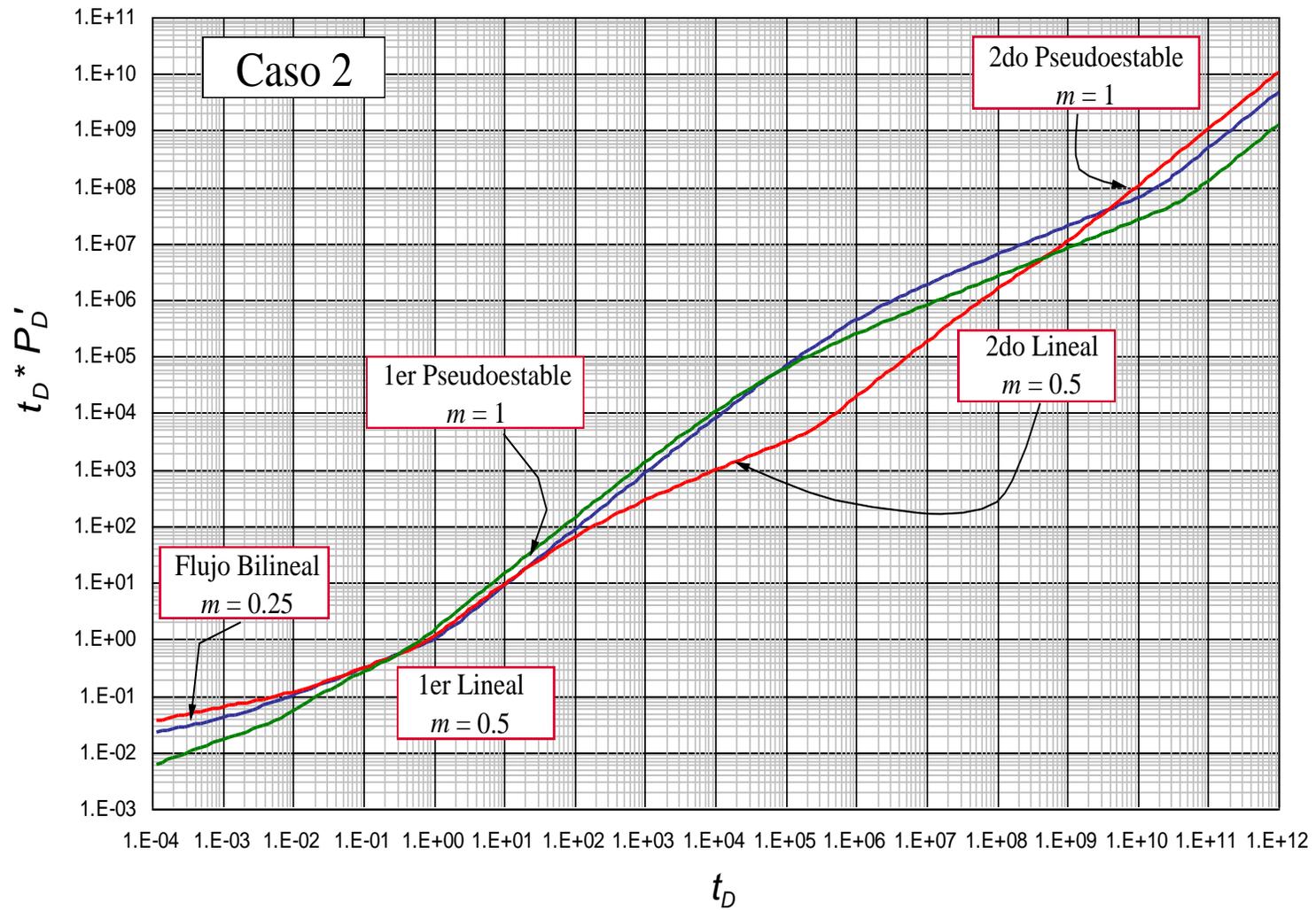
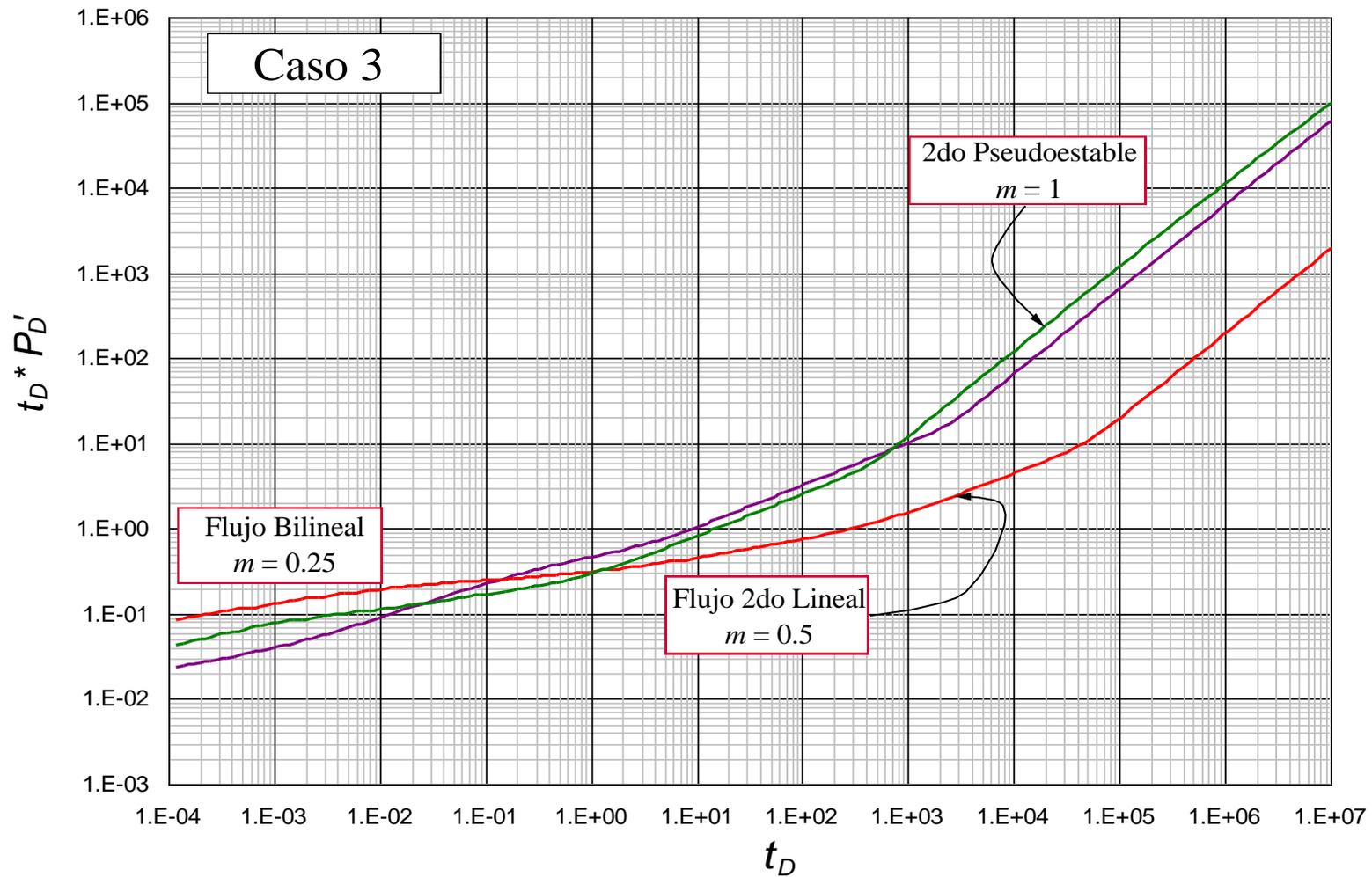


Figura 7. Comportamiento de pruebas de presión para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal, caso 3.



2.2.1. Ecuaciones de flujo en yacimientos de aceite

2.2.1.1. Análisis flujo bilineal

La ocurrencia del flujo bilineal se caracteriza por una pendiente de 1/4 en un gráfico log-log de presión y su derivada.

El término bilineal se refiere a dos flujos lineales simultáneos que ocurren en direcciones normales, un régimen de flujo lineal incompresible de la fractura (conductividad finita), y otro régimen de flujo lineal compresible en la formación (Escobar, 2014).

A continuación, se presenta la ecuación gobernante para el régimen de flujo bilineal (Figura 8) en el modelo trilineal:

$$(t_D * P'_D)_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \quad (23)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (2) y (6):

$$\frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t * \Delta P')_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.25} \quad (24)$$

$$(t * \Delta P')_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left(\frac{141.2 q_{F,sc} B \mu}{k_I h} \right) \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.25} \quad (25)$$

$$(t * \Delta P')_{BL} = 11.0461 \frac{q_{F,sc} B \mu^{0.75}}{h} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{t_{BL}}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.25} \quad (26)$$

Despejando conductividad de fractura hidráulica, se obtiene la siguiente ecuación:

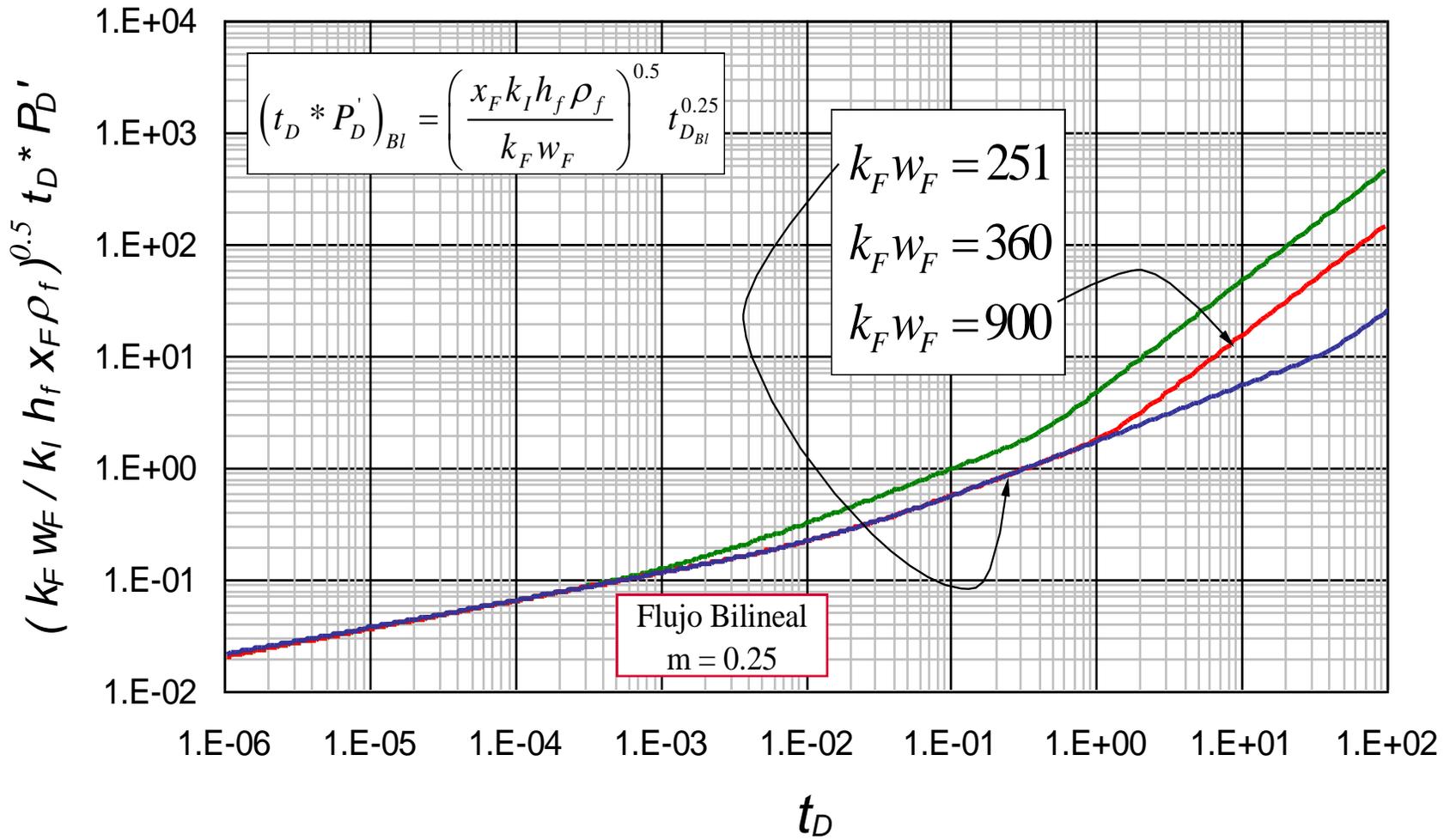
$$(k_F w_F)^{0.5} = 11.0461 (h_f \rho_f)^{0.5} \frac{q_{F,sc} B \mu^{0.75}}{h (t * \Delta P')_{BL}} \left[\frac{t_{BL}}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.25} \quad (27)$$

$$k_F w_F = 122.0157 (h_f \rho_f) \left[\frac{q_{F,sc} B \mu^{0.75}}{h (t * \Delta P')_{BL}} \right]^2 \left[\frac{t_{BL}}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \quad (28)$$

Simplificando términos y ordenando la ecuación, resulta:

$$k_F w_F = 122.0157 h_f \rho_f \mu^{1.5} \left[\frac{t_{BL}}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{q_{F,sc} B}{h (t * \Delta P')_{BL}} \right]^2 \quad (29)$$

Figura 8. Análisis del flujo bilineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal



- Daño

La ecuación para determinar el daño a partir del flujo bilineal, viene dada por el siguiente procedimiento:

Recordando Ec. (23):

$$\left(t_D * P'_D\right)_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \quad (23)$$

Dividiendo por el tiempo adimensional e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$P'_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{t_{D_{BL}}} \quad (30)$$

$$P'_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{-0.75} \quad (31)$$

$$\int P'_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \int (t_{D_{BL}}^{-0.75}) \quad (32)$$

$$P_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{0.25} + s_{BL} \quad (33)$$

Dividiendo Ec. (33) en Ec. (23):

$$\frac{P_{D_{BL}}}{\left(t_D * P'_D\right)_{BL}} = \frac{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{0.25}}{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25}} + \frac{s_{BL}}{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25}} \quad (34)$$

Despejando daño:

$$s_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \left[\frac{P_{D_{BL}}}{\left(t_D * P'_D\right)_{BL}} - 4 \right] \quad (35)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (1), (2) y (6) en la Ec. (35):

$$s_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.25} \left[\frac{\Delta P_{BL}}{\left(t * \Delta P'\right)_{BL}} - 4 \right] \quad (36)$$

Simplificando y ordenando términos, se obtiene la ecuación general de daño mediante el régimen de flujo bilineal:

$$s_{BL} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{k_I^3 t_{BL}}{\mu (\phi c_t)_I} \right]^{0.25} \left[\frac{\Delta P_{BL}}{(t^* \Delta P')_{BL}} - 4 \right] \quad (37)$$

2.2.1.2. Análisis primer flujo lineal

El régimen de flujo lineal se caracteriza por una pendiente de 1/2 en un gráfico log-log de presión y su derivada, usualmente se da, porque la longitud del pozo horizontal es mucho mayor que el espesor del yacimiento (Escobar, 2014).

La ecuación gobernante para el régimen de flujo lineal (Figura 9), es presentada a continuación:

$$(t_D^* P'_D)_{L1} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \quad (38)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (2) y (6):

$$\frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t^* \Delta P')_{L1} = \frac{1}{1.1360} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \quad (39)$$

$$(t^* \Delta P')_{L1} = \frac{141.2 q_{F,sc} B \mu}{1.1360 k_I h} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \quad (40)$$

Simplificando términos y ordenando la ecuación, resulta:

$$(t^* \Delta P')_{L1} = 2.0184 \frac{q_{F,sc} B}{x_F h} \left[\frac{t_{L1} \mu}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \quad (41)$$

Del flujo lineal es posible determinar la permeabilidad del yacimiento interno mediante la siguiente ecuación:

$$k_I = 4.0739 \frac{t_{L1} \mu}{(\phi c_t)_I} \left[\frac{q_{F,sc} B}{x_F h (t^* \Delta P')_{L1}} \right]^2 \quad (42)$$

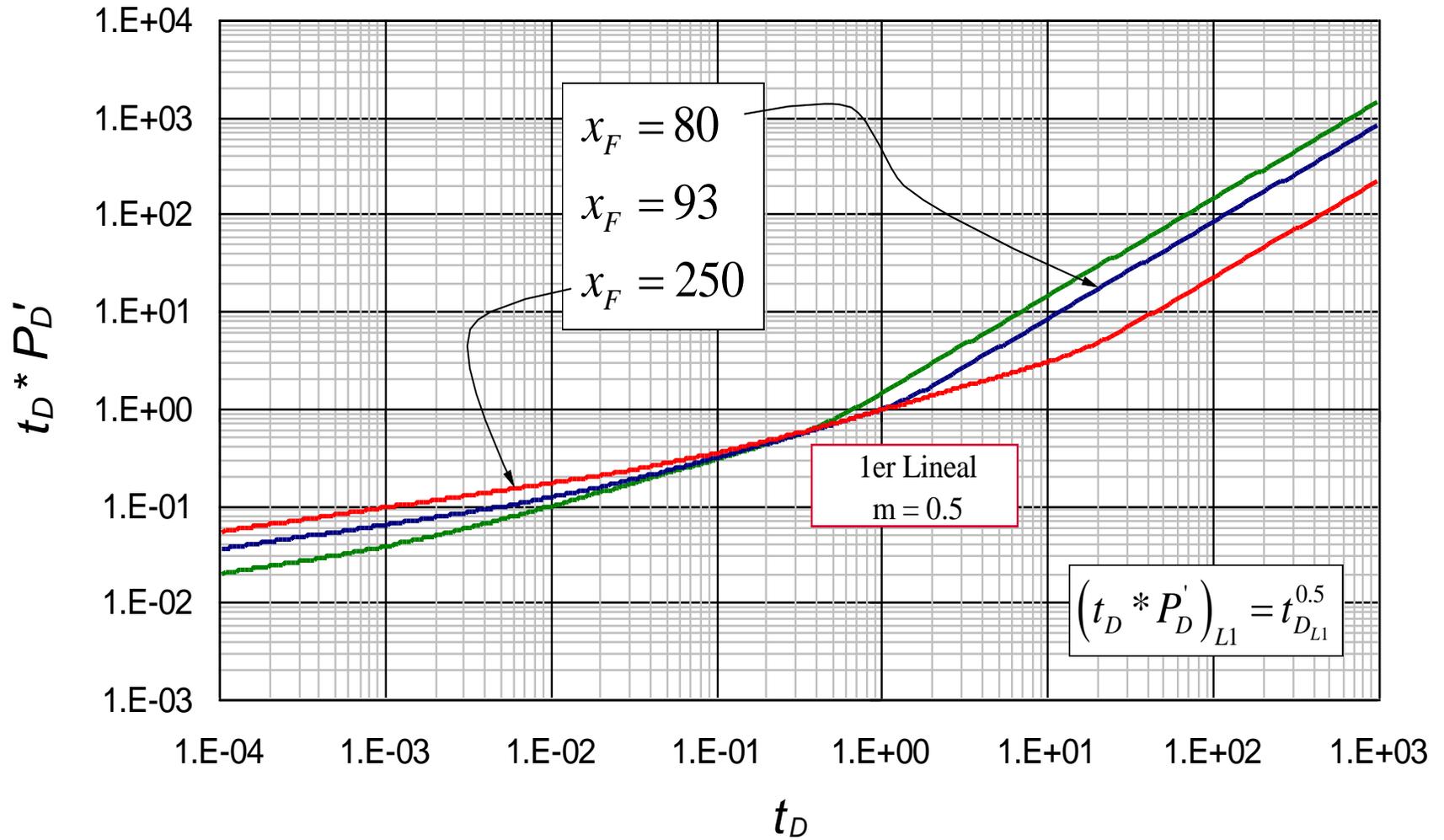
- Daño

La ecuación para determinar el daño a partir del flujo lineal, viene dada por el siguiente procedimiento:

Recordando Ec. (38):

$$(t_D^* P'_D)_{L1} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \quad (38)$$

Figura 9. Análisis del primer flujo lineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal.



Dividiendo por tiempo adimensional e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$P'_{D_{L1}} = \frac{1}{1.1360} \frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{t_{D_{L1}}} \quad (43)$$

$$P'_{D_{L1}} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{-0.5} \quad (44)$$

$$\int P'_{D_{L1}} = \frac{1}{1.1360} \int t_{D_{L1}}^{-0.5} \quad (45)$$

$$P_{D_{L1}} = 1.7605 t_{D_{L1}}^{0.5} + s_{L1} \quad (46)$$

Dividiendo Ec. (46) en Ec. (38):

$$\frac{P_{D_{L1}}}{(t_D * P'_D)_{L1}} = \frac{1.7605 t_{D_{L1}}^{0.5}}{\frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{1.1360}} + \frac{s_{L1}}{\frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{1.1360}} \quad (47)$$

Despejando daño:

$$s_{L1} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \left[\frac{P_{D_{L1}}}{(t_D * P'_D)_{L1}} - 2 \right] \quad (48)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (1), (2) y (6) en la Ec. (48):

$$s_{L1} = \frac{1}{1.1360} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L1}}{(\phi c_I)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta P_{L1}}{(t * \Delta P')_{L1}} - 2 \right] \quad (49)$$

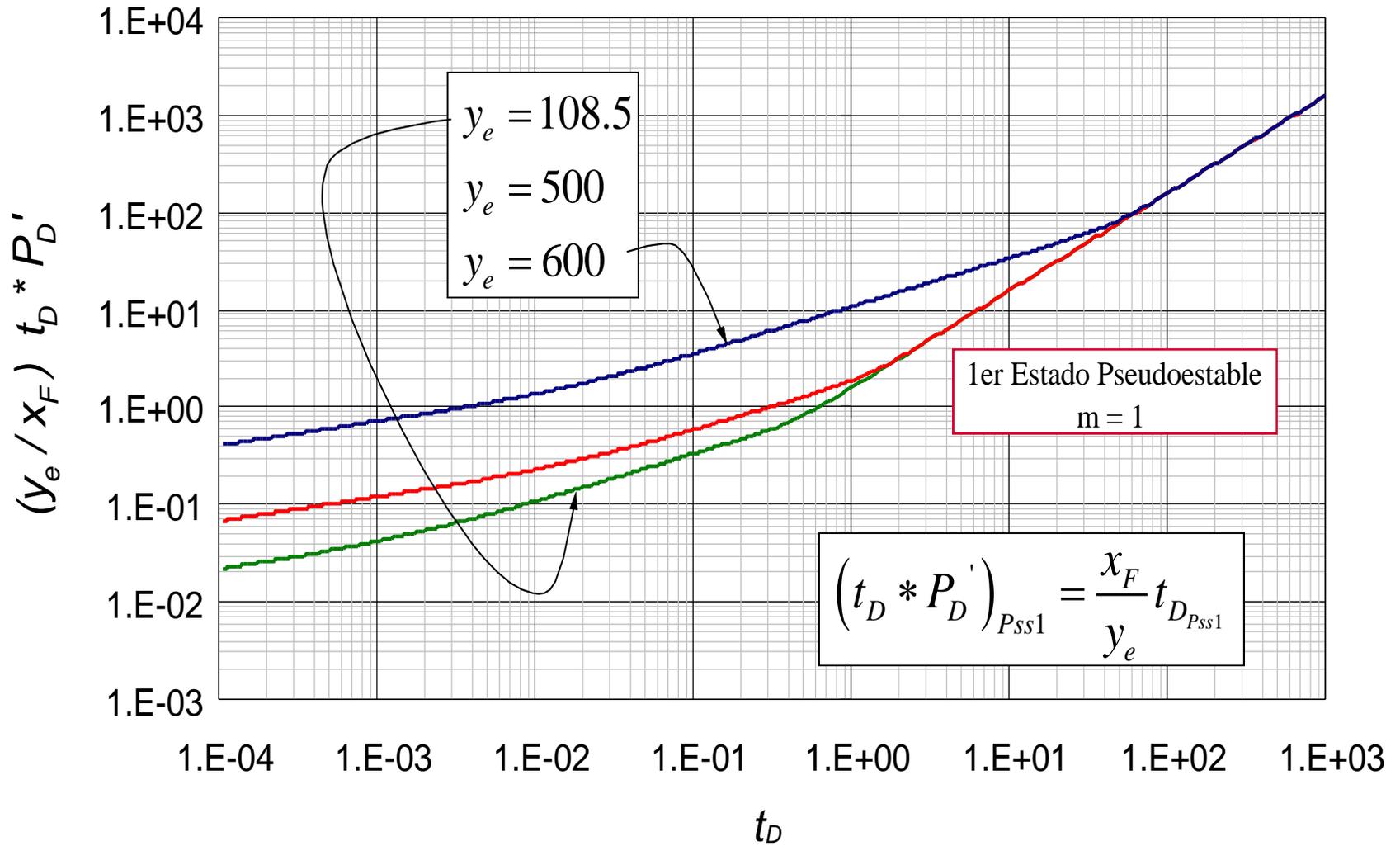
Simplificando y ordenando términos, se obtiene la ecuación general de daño mediante el régimen de flujo lineal:

$$s_{L1} = \frac{1}{69.9564} \left[\frac{k_I t_{L1}}{\mu x_F^2 (\phi c_I)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta P_{L1}}{(t * \Delta P')_{L1}} - 2 \right] \quad (50)$$

2.2.1.3. Análisis primer estado pseudoestable

Una vez finaliza el régimen de flujo lineal, una pendiente unitaria aparece cuando el cambio de presión con el tiempo es constante en todos los puntos del yacimiento, esto contribuye a la formación del estado pseudoestable (Figura 10). La ecuación general que describe el comportamiento del estado pseudoestable es la siguiente:

Figura 10. Análisis primer estado pseudoestable para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal.



$$\left(t_D * P_D'\right)_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} t_{D_{pss1}} \quad (51)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (2) y (6), se puede obtener una ecuación general para determinar la longitud media de la fractura hidráulica, x_F :

$$\frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t * \Delta P')_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} \frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \quad (52)$$

$$(t * \Delta P')_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} \left(\frac{141.2 q_{F,sc} B \mu}{k_I h} \right) \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right] \quad (53)$$

$$(t * \Delta P')_{pss1} = \frac{1}{17.0966} \frac{q_{F,sc} B t_{pss1}}{y_e (\phi c_t)_I h x_F} \quad (54)$$

Despejando longitud media de fractura hidráulica, resulta:

$$x_F = \frac{1}{1.6971} \frac{q_{F,sc} T t_{pss1}}{\mu y_e h (\phi c_t)_I (t * \Delta m(P)')_{pss1}} \quad (55)$$

2.2.1.4. Análisis segundo flujo lineal

La ecuación gobernante para el segundo flujo lineal (Figura 11), es presentada a continuación:

$$\left(t_D * P_D'\right)_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \quad (56)$$

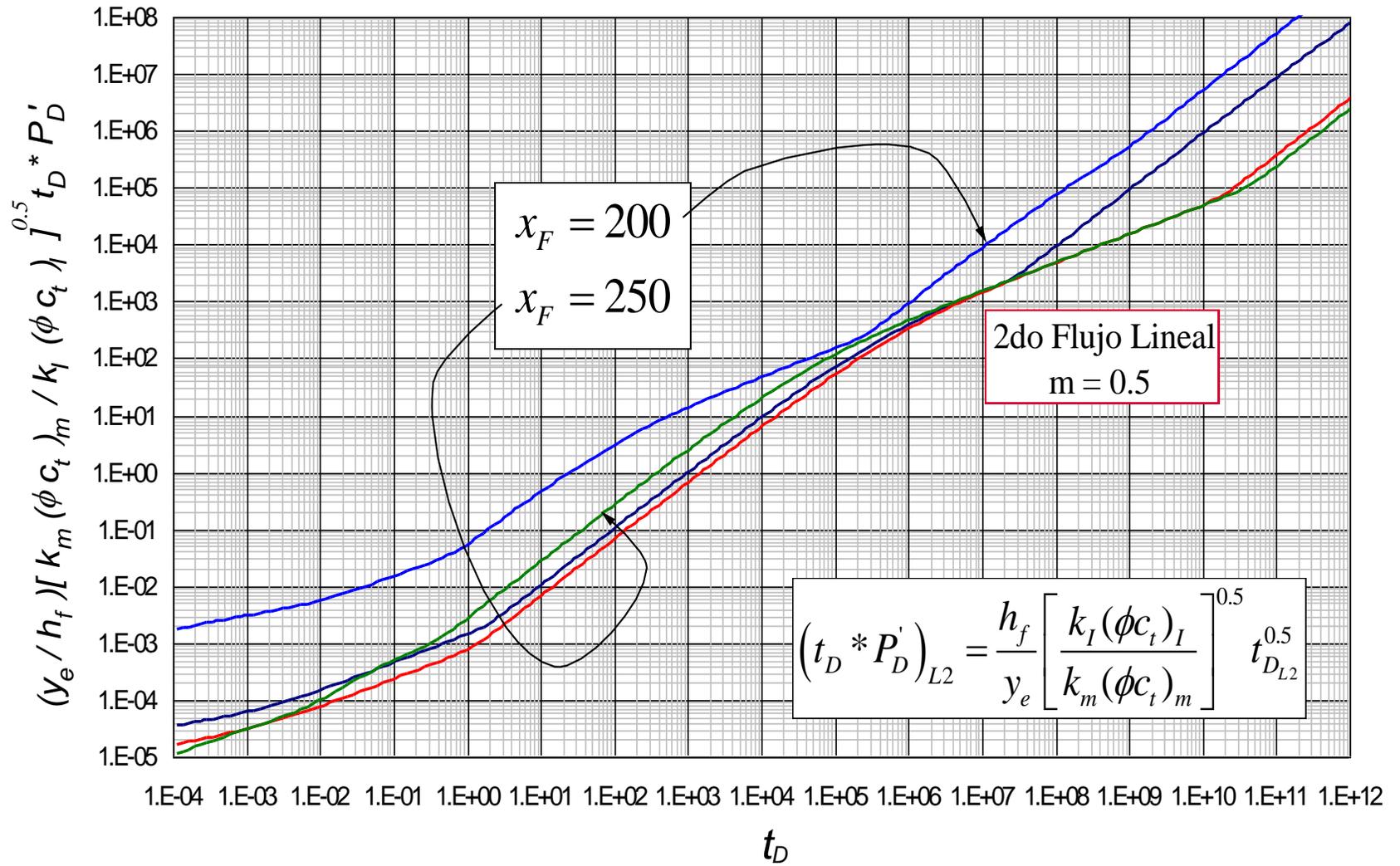
Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (2) y (6), se puede obtener una ecuación para determinar la permeabilidad de la matriz, k_m :

$$\frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t * \Delta P')_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \quad (57)$$

$$(t * \Delta P')_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \left(\frac{141.2 q_{F,sc} B \mu}{k_I h} \right) \quad (58)$$

$$(t * \Delta P')_{L2} = 1.0064 \frac{q_{F,sc} B h_f}{y_e x_F h} \left[\frac{t_{L2} \mu}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \quad (59)$$

Figura 11. Análisis del segundo flujo lineal para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal.



Despejando permeabilidad de la matriz, k_m :

$$k_m = 1.0128 \frac{t_{L2} \mu}{(\phi c_t)_m} \left[\frac{q_{F,sc} B h_f}{x_F y_e h(t * \Delta P')_{L2}} \right]^2 \quad (60)$$

- Daño

El procedimiento para determinar el daño a partir del segundo flujo lineal es el siguiente:

Recordando Ec. (56):

$$\left(t_D * P'_D \right)_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \quad (56)$$

Dividiendo por tiempo adimensional e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$P'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \frac{t_{D_{L2}}^{0.5}}{t_{D_{L2}}} \quad (61)$$

$$P'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{-0.5} \quad (62)$$

$$\int P'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \int t_{D_{L2}}^{-0.5} \quad (63)$$

$$P_{D_{L2}} = \frac{1}{1.1391} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} + s_{L2} \quad (64)$$

Dividiendo Ec.(64) en Ec. (56):

$$\frac{P_{D_{L2}}}{\left(t_D * P'_D \right)_{L2}} = \frac{\frac{1}{1.1391} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}}{\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}} + \frac{s_{L2}}{\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}} \quad (65)$$

Simplificando términos y despejando daño, se obtiene:

$$s_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \left[\frac{P_{D_{L2}}}{\left(t_D * P'_D \right)_{L2}} - 2 \right] \quad (66)$$

Reemplazando variables adimensionales Ecs. (1), (2) y (6), resulta la ecuación general para determinar daño por medio del segundo flujo lineal:

$$s_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi_{c_t})_I}{k_m(\phi_{c_t})_m} \right]^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta P_{L2}}{(t^* \Delta P')_{L2}} - 2 \right] \quad (67)$$

$$s_{L2} = \frac{1}{140.2994} \frac{h_f k_I}{y_e x_F} \left[\frac{t_{L2}}{k_m \mu (\phi_{c_t})_m} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta P_{L2}}{(t^* \Delta P')_{L2}} - 2 \right] \quad (68)$$

2.2.1.5. Análisis segundo estado pseudoestable

La ecuación general que caracteriza el segundo estado pseudoestable (Figura 12) es presentada a continuación:

$$(t_D^* P_D')_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} t_{D_{pss2}} \quad (69)$$

Reemplazando variables adimensionales Ecs. (2) y (6), resulta:

$$\frac{k_I h}{141.2 q_{F,sc} B \mu} (t^* \Delta P')_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} \frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} \quad (70)$$

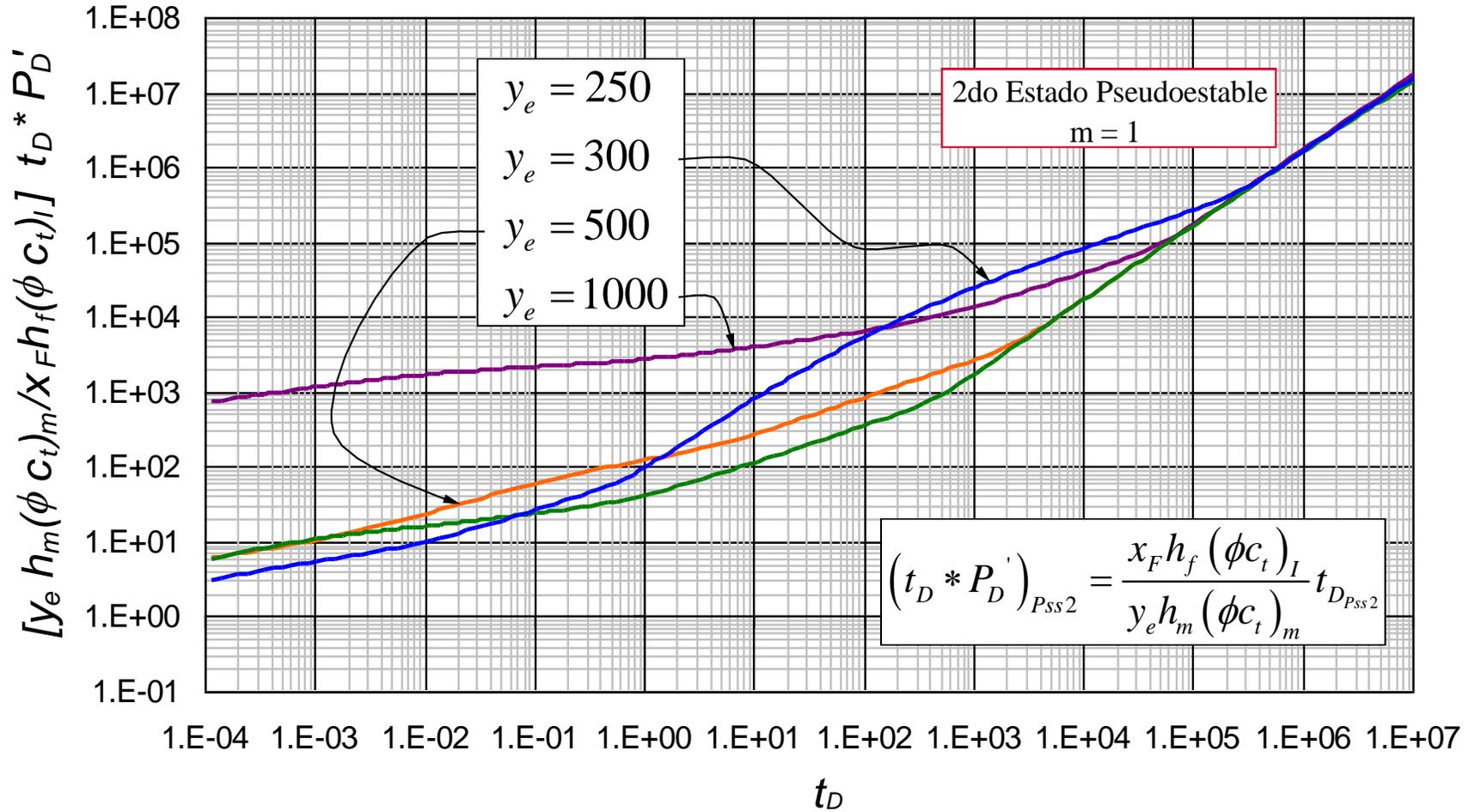
$$(t^* \Delta P')_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} \left(\frac{141.2 q_{F,sc} B \mu}{k_I h} \right) \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} \right] \quad (71)$$

$$(t^* \Delta P')_{pss2} = \frac{1}{17.3145} \frac{q_{F,sc} B h_f t_{pss2}}{y_e x_F h_m h(\phi_{c_t})_m} \quad (72)$$

Se obtiene una ecuación adicional para determinar la longitud media de fractura hidráulica, x_F :

$$x_F = \frac{1}{17.3145} \frac{q_{F,sc} B h_f t_{pss2}}{y_e h_m h(\phi_{c_t})_m (t^* \Delta P')_{pss2}} \quad (73)$$

Figura 12. Análisis del segundo estado pseudoestable para un yacimiento en condiciones de flujo trilineal.



2.2.2. Ecuaciones de flujo en yacimientos de gas

Los flujos presentados en un yacimiento de gas son los mismos analizados en las ecuaciones de flujo para un yacimiento de aceite; en este caso se trabajará con el concepto de pseudopresión (Al-Hussainy et al., 1996), el cual describe muy bien el comportamiento del producto viscosidad-factor de compresibilidad del gas (μc_i) en todos los rangos de presión.

2.2.2.1. Análisis flujo bilineal

La ecuación general que describe este régimen de flujo en términos adimensionales es:

$$(t_D * m(P)_D)'_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \quad (74)$$

Convirtiendo a términos dimensionales de acuerdo a las ecuaciones Ecs. (4) y (6):

$$\frac{k_I h}{1422.52 q_{F,Msc} T} (t * \Delta m(P))'_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL}}{(\phi c_i)_I \mu x_F^2} \right]^{0.25} \quad (75)$$

$$(t * \Delta m(P))'_{BL} = 111.2837 \frac{q_{F,Msc} T}{h} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{t_{BL}}{\mu k_I (\phi c_i)_I} \right]^{0.25} \quad (76)$$

A partir de la cual se despeja la variable deseada:

$$(k_F w_F)^{0.5} = 111.2837 (h_f \rho_f)^{0.5} \frac{q_{F,Msc} T}{h (t * \Delta m(P))'_{BL}} \left[\frac{t_{BL}}{\mu k_I (\phi c_i)_I} \right]^{0.25} \quad (77)$$

Elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado y simplificando términos, se obtiene:

$$k_F w_F = 12384.0667 h_f \rho_f \left[\frac{t_{BL}}{\mu k_I (\phi c_i)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{q_{F,Msc} T}{h (t * \Delta m(P))'_{BL}} \right]^2 \quad (78)$$

- Daño

Recordando Ec. (74):

$$(t_D * m(P)_D)'_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \quad (74)$$

Dividiendo por tiempo adimensional e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$m(P)'_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{t_{D_{BL}}} \quad (79)$$

$$m(P)_{D_{BL}}' = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{-0.75} \quad (80)$$

$$\int m(P)_{D_{BL}}' = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \int (t_{D_{BL}}^{-0.75}) \quad (81)$$

$$m(P)_{D_{BL}} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{0.25} + s_{BL} \quad (82)$$

Dividiendo Ec. (82) en Ec. (74):

$$\frac{m(P)_{D_{BL}}}{(t_D * m(P)_{D'})_{BL}} = \frac{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \frac{t_{D_{BL}}^{0.25}}{0.25}}{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25}} + \frac{s_{BL}}{\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25}} \quad (83)$$

La ecuación general para determinar daño en términos adimensional es:

$$s_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} \left[\frac{m(P)_{D_{BL}}}{(t_D * m(P)_{D'})_{BL}} - 4 \right] \quad (84)$$

Convirtiendo a términos dimensionales mediante Ecs. (3), (4) y (6), resulta:

$$s_{BL} = \frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.25} \left[\frac{\Delta m(P)_{BL}}{(t * \Delta m(P)')_{BL}} - 4 \right] \quad (85)$$

Simplificando y ordenando términos, la ecuación general para determinar el daño en términos dimensionales es:

$$s_{BL} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left(\frac{k_I^3 t_{BL}}{\mu (\phi c_t)_I} \right)^{0.25} \left(\frac{\Delta m(P)_{BL}}{(t * \Delta m(P)')_{BL}} - 4 \right) \quad (86)$$

2.2.2.2. Análisis primer flujo lineal

En términos adimensionales, la ecuación que gobierna el primer flujo lineal se presenta a continuación:

$$(t_D * m(P)_{D'})_{LI} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{LI}}^{0.5} \quad (87)$$

Convirtiendo a términos dimensionales mediante Ecs. (4) y (6), es posible despejar cualquier variable, quedando:

$$\frac{k_I h}{1422.52 q_{F,Msc} T} (t^* \Delta m(P)')_{L1} = \frac{1}{1.1360} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L1}}{(\phi c_i)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \quad (88)$$

$$(t^* \Delta m(P)')_{L1} = 20.3344 \frac{q_{F,Msc} T}{x_F h} \left[\frac{t_{L1}}{k_I \mu (\phi c_i)_I} \right]^{0.5} \quad (89)$$

Despejando permeabilidad del yacimiento interno, resulta:

$$k_I = 413.4878 \frac{t_{L1}}{\mu (\phi c_i)_I} \left[\frac{q_{F,Msc} T}{x_F h (t^* \Delta m(P)')_{L1}} \right]^2 \quad (90)$$

- Daño

Recordando Ec. 87:

$$(t_D^* m(P)_D')_{L1} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \quad (87)$$

Dividiendo por tiempo adimensional e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$m(P)_{D_{L1}}' = \frac{1}{1.1360} \frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{t_{D_{L1}}} \quad (91)$$

$$m(P)_{D_{L1}}' = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{-0.5} \quad (92)$$

$$\int m(P)_{D_{L1}}' = \frac{1}{1.1360} \int t_{D_{L1}}^{-0.5} \quad (93)$$

$$m(P)_{D_{L1}} = 1.7605 t_{D_{L1}}^{0.5} + s_{L1} \quad (94)$$

Dividiendo Ec. (94) en Ec. (87), se puede obtener el daño en función de pseudopresión adimensional y su derivada a partir del primer flujo lineal:

$$\frac{m(P)_{D_{L1}}}{(t_D^* m(P)_D')_{L1}} = \frac{1.7605 t_{D_{L1}}^{0.5}}{\frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{1.1360}} + \frac{s_{L1}}{\frac{t_{D_{L1}}^{0.5}}{1.1360}} \quad (95)$$

$$s_{L1} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \left[\frac{m(P)_{D_{L1}}}{(t_D^* m(P)_D')_{L1}} - 2 \right] \quad (96)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (3), (4) y (6):

$$s_{L1} = \frac{1}{1.1360} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_{L1}}{(t^* \Delta m(P))'_{L1}} - 2 \right] \quad (97)$$

Simplificando y ordenando términos, resulta:

$$s_{L1} = \frac{1}{69.9564} \left[\frac{k_I t_{L1}}{\mu x_F^2 (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_{L1}}{(t^* \Delta m(P))'_{L1}} - 2 \right] \quad (98)$$

Con la ecuación anterior se puede determinar el daño en términos de pseudopresión y su derivada para el primer flujo lineal.

2.2.2.3. Análisis primer estado pseudoestable

La ecuación general que rige el primer estado pseudoestable es:

$$(t_D^* m(P)_D)'_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} t_{D_{pss1}} \quad (99)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ecs. (4) y (6):

$$\frac{k_I h}{1422.52 q_{F,Msc} T} (t^* \Delta m(P))'_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} \frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \quad (100)$$

$$(t^* \Delta m(P))'_{pss1} = \frac{\pi x_F}{2 y_e} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right] \left(\frac{1422.52 q_{F,Msc} T}{k_I h} \right) \quad (101)$$

Simplificando términos, se obtiene una ecuación general para determinar la longitud media de la fractura hidráulica, a partir del primer estado pseudoestable:

$$x_F = \frac{1}{1.6971} \frac{q_{F,Msc} T t_{pss1}}{\mu y_e h (\phi c_t)_I (t^* \Delta m(P))'_{pss1}} \quad (102)$$

2.2.2.4. Análisis segundo flujo lineal

Para un yacimiento de gas, en términos de derivada de pseudopresión adimensional y tiempo adimensional, la ecuación que rige el segundo flujo lineal es:

$$(t_D^* m(P)_D)'_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \quad (103)$$

Convirtiendo a términos dimensionales utilizando Ecs. (4) y (6), se tiene:

$$\frac{k_I h}{1422.52 q_{F, Msc} T} (t^* \Delta m(P))'_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \quad (104)$$

$$(t^* \Delta m(P))'_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} \right]^{0.5} \left(\frac{1422.52 q_{F, Msc} T}{k_I h} \right) \quad (105)$$

$$(t^* \Delta m(P))'_{L2} = 10.1392 \frac{q_{F, Msc} T h_f}{y_e x_F h} \left[\frac{t_{L2}}{k_m \mu (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \quad (106)$$

Despejando permeabilidad de la matriz, k_m :

$$k_m = 102.8034 \frac{t_{L2}}{\mu (\phi c_t)_m} \left[\frac{q_{F, Msc} T h_f}{x_F y_e h (t^* \Delta m(P))'_{L2}} \right]^2 \quad (107)$$

- Daño

Recordando Ec. (103)

$$(t_D^* m(P)_D)'_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \quad (103)$$

Se realiza un procedimiento similar al visto en el primer flujo lineal, primero se divide por t_D y posteriormente se integra ambos lados de la ecuación:

$$m(P)'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \frac{t_{D_{L2}}^{0.5}}{t_{D_{L2}}} \quad (108)$$

$$m(P)'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{-0.5} \quad (109)$$

$$\int m(P)'_{D_{L2}} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \int t_{D_{L2}}^{-0.5} \quad (110)$$

$$m(P)_{D_{L2}} = \frac{1}{1.1391} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} + s_{L2} \quad (111)$$

Dividiendo Ec. (111) en Ec. (103):

$$\frac{m(P)_{D_{L2}}}{(t_D^* m(P)_D)'_{L2}} = \frac{\frac{1}{1.1391} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}}{\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}} + \frac{s_{L2}}{\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5}} \quad (112)$$

Finalmente, se obtiene una ecuación para determinar daño en términos adimensionales:

$$s_{L2} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi_{c_t})_I}{k_m(\phi_{c_t})_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \left[\frac{m(P)_{D_{L2}}}{(t_D * m(P))'_{L2}} - 2 \right] \quad (113)$$

Convirtiendo a términos dimensionales mediante Ecs. (3), (4) y (6), y simplificando términos, se obtiene:

$$s_{L2} = \frac{1}{140.2994} \frac{h_f k_I}{y_e x_F} \left[\frac{t_{L2}}{k_m \mu(\phi_{c_t})_m} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_{L2}}{(t * \Delta m(P))'_{L2}} - 2 \right] \quad (114)$$

2.2.2.5. Análisis segundo estado pseudoestable

La ecuación que gobierna el segundo estado pseudoestable para un yacimiento de gas, es:

$$(t_D * m(P))'_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} t_{D_{pss2}} \quad (115)$$

Convirtiendo a términos dimensionales, reemplazando Ecs. (4) y (6) en Ec. (115):

$$\frac{k_I h}{1422.52 q_{F,Msc} T} (t * \Delta m(P))'_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} \right] \quad (116)$$

$$(t * \Delta m(P))'_{pss2} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} \left[\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} \right] \left(\frac{1422.52 q_{F,Msc} T}{k_I h} \right) \quad (117)$$

Simplificando y ordenando términos, resulta una ecuación adicional para determinar la longitud media de la fractura hidráulica:

$$x_F = \frac{1}{1.7187} \frac{q_{F,Msc} T h_f t_{pss2}}{y_e h_m \mu (\phi_{c_t})_m (t * \Delta m(P))'_{pss2}} \quad (118)$$

2.2.3. Puntos de Intersección

Los puntos de intersección entre los distintos regímenes de flujo permiten obtener ecuaciones adicionales para determinar parámetros importantes del yacimiento, tales como permeabilidad del yacimiento interno (k_I), permeabilidad de la matriz (k_m), tamaño del yacimiento en dirección y (y_e), conductividad de fractura hidráulica (k_{FWF}), y longitud media de fractura hidr (x_F), esto se hace con el fin de establecer comparaciones en el valor que se obtendrían si dichos parámetros fueran calculados por las ecuaciones del flujo independiente. En la Figura 13 se observan los puntos de intersección principales entre los regímenes de flujo tanto para un yacimiento de aceite como de gas. El procedimiento para determinar el punto de intersección ya sea para un yacimiento de aceite o para un yacimiento de gas, es el mismo. Una vez se obtiene el punto donde cortan dos flujos y se

quiere despejar algún parámetro, la ecuación general debe estar en términos de tiempo o pseudotiempo (Apéndice C) para yacimientos de gas, y en términos de tiempo dimensional para yacimientos de aceite.

2.2.3.1. Intersección primer pseudoestable-bilineal

Recordando Ec. (23) y Ec. (51), e igualando:

$$\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} = \frac{\pi}{2} \frac{x_F}{y_e} t_{D_{ps1}} \quad (119)$$

La línea de flujo bilineal y la línea de estado pseudoestable interceptan en:

$$t_{D_{ps1-BLi}} = \frac{\pi}{11} y_e^{\frac{4}{3}} \left(\frac{k_I h_f \rho_f}{k_F w_F x_F} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (120)$$

Remplazando variables adimensionales, Ec. (6) en Ec. (120), se determina la longitud media de la fractura hidráulica, x_f :

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{ps1-BLi}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{\pi}{11} y_e^{\frac{4}{3}} \left(\frac{k_I h_f \rho_f}{k_F w_F x_F} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (121)$$

$$x_F^{\frac{4}{3}} = \frac{11}{\pi} \frac{1}{y_e^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{k_F w_F}{k_I h_f \rho_f} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{ps1-BLi}}{(\phi c_t)_I \mu} \quad (122)$$

$$x_F = \frac{1}{188.7927} \frac{k_I^{\frac{1}{4}}}{y_e} \left(\frac{k_F w_F}{h_f \rho_f} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{t_{ps1-BLi}}{(\phi c_t)_I \mu} \right]^{\frac{3}{4}} \quad (123)$$

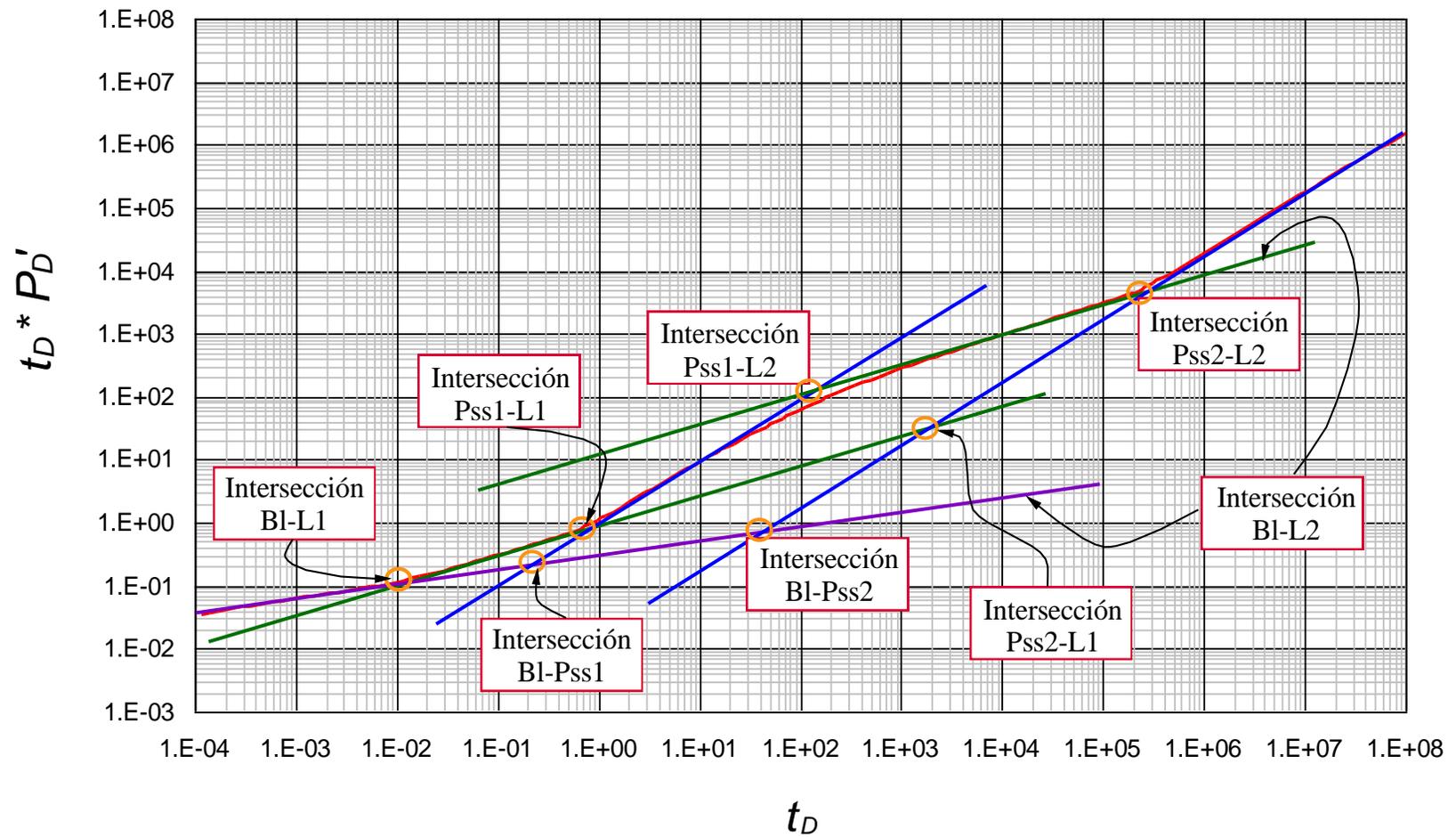
2.2.3.2. Intersección primer pseudoestable-primer lineal

Con el punto de intersección entre el primer flujo lineal y el primer estado pseudoestable, se puede determinar la permeabilidad del yacimiento interno, así:

Igualando Ec. (38) y Ec. (51):

$$\frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} = \frac{\pi}{2} \frac{x_F}{y_e} t_{D_{ps1}} \quad (124)$$

Figura 13. Puntos de intersección característicos entre los principales régimen de flujo que se presentan en un yacimiento naturalmente fracturado, en condiciones de flujo trilineal.



$$t_{D_{pss1-Li}} = \frac{\pi}{10} \left(\frac{y_e}{x_F} \right)^2 \quad (125)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ec. (6) en Ec. (125):

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss1-Li}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{\pi}{10} \left(\frac{y_e}{x_F} \right)^2 \quad (126)$$

Despejando permeabilidad del yacimiento interno, k_I :

$$k_I = \frac{\pi}{10} \left(\frac{y_e}{x_F} \right)^2 \frac{(\phi c_t)_I \mu x_F^2}{2.637 \times 10^{-4} t_{pss1-Li}} \quad (127)$$

Simplificando términos y organizando, finalmente se obtiene una ecuación para determinar la permeabilidad del yacimiento interno, k_I :

$$k_I = 1191.3510 \frac{(\phi c_t)_I \mu y_e^2}{t_{pss1-Li}} \quad (128)$$

2.2.3.3. Intersección bilineal-primer lineal

A partir de las pendientes de un medio y un cuarto, es posible obtener la conductividad de fractura mediante el punto de intersección entre estas líneas.

Igualando Ec. (23) y Ec. (38):

$$\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \quad (129)$$

El punto de intersección entre el flujo Bilineal y lineal es:

$$t_{D_{BL-Li}} = \frac{1}{4.2275} \left(\frac{k_I h_f x_F \rho_f}{k_F w_F} \right)^2 \quad (130)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ec. (6) en Ec. (130):

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL-Li}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{1}{4.2275} \left(\frac{k_I h_f x_F \rho_f}{k_F w_F} \right)^2 \quad (131)$$

Despejando $k_F w_F$, resulta:

$$(k_F w_F)^2 = \frac{1}{4.2275} \left(k_I h_f x_F \rho_f \right)^2 \frac{(\phi c_t)_I \mu x_F^2}{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL-Li}} \quad (132)$$

Elevando ambos lados de la ecuación a la 0.5 y simplificando, se obtiene la ecuación general para determinar la conductividad de fractura a partir del tiempo de intercepción entre el flujo bilineal y primer lineal:

$$k_F w_F = 29.9503 x_F^2 h_f \rho_f \left[\frac{\mu(\phi_{c_t})_I k_I}{t_{BL-Li}} \right]^{0.5} \quad (133)$$

2.2.3.4. Intersección segundo pseudoestable-bilineal

Con el punto de intersección entre el segundo flujo pseudoestable y el flujo bilineal, se puede determinar la permeabilidad del yacimiento interno, así:

Igualando Ec. (23) y Ec. (69):

$$\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi_{c_t})_I}{y_e h_m (\phi_{c_t})_m} t_{D_{pss2}} \quad (134)$$

El tiempo de intersección tanto para un yacimiento de gas como para uno de aceite, se halla a partir de la siguiente ecuación:

$$t_{D_{pss2-BLi}} = \frac{1}{3.4412} \left[\frac{y_e h_m (\phi_{c_t})_m}{(\phi_{c_t})_I} \right]^{\frac{4}{3}} \left(\frac{k_I \rho_f}{k_F w_F h_f x_F} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (135)$$

Reemplazando variables adimensionales, Ec. (6) en Ec. (135):

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2-BLi}}{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2} = \frac{1}{3.4412} \left[\frac{y_e h_m (\phi_{c_t})_m}{(\phi_{c_t})_I} \right]^{\frac{4}{3}} \left(\frac{k_I \rho_f}{k_F w_F h_f x_F} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (136)$$

Despejando k_I , resulta:

$$\frac{k_I}{k_I^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3.4412} \left[\frac{y_e h_m (\phi_{c_t})_m}{(\phi_{c_t})_I} \right]^{\frac{4}{3}} \left[\frac{(\phi_{c_t})_I \mu x_F^2}{2.637 \times 10^{-4} t_{pss2-BLi}} \right] \left(\frac{\rho_f}{k_F w_F h_f x_F} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (137)$$

$$k_I = 1.34 * 10^9 \frac{[y_e h_m (\phi_{c_t})_m x_F]^4}{(\phi_{c_t})_I} \left(\frac{\rho_f}{k_F w_F h_f} \right)^2 \left(\frac{\mu}{t_{pss2-BLi}} \right)^3 \quad (138)$$

2.2.3.5. Intersección segundo pseudoestable-segundo lineal

Con el punto de intersección entre el segundo flujo lineal y la línea del segundo estado pseudoestable, se puede determinar la permeabilidad de la matriz, km:

Igualando Ec. (56) y Ec. (56):

$$\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} = 1.5511 \frac{x_F h_f (\phi c_t)_I}{y_e h_m (\phi c_t)_m} t_{D_{pss2}} \quad (139)$$

$$t_{D_{pss2-L2i}} = \frac{1}{12.4884} \frac{k_I(\phi c_t)_m}{k_m(\phi c_t)_I} \left(\frac{h_m}{x_F} \right)^2 \quad (140)$$

La anterior es la ecuación para determinar el punto de corte entre el segundo pseudoestable y segundo lineal, en un yacimiento de gas y aceite. Convirtiendo a términos dimensionales mediante Ec. (6):

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{pss2-L2i}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{1}{12.4884} \frac{k_I(\phi c_t)_m}{k_m(\phi c_t)_I} \left(\frac{h_m}{x_F} \right)^2 \quad (141)$$

Despejando k_m , en términos de tiempo real:

$$k_m = 303.6558 \frac{\mu h_m^2 (\phi c_t)_m}{t_{pss2-L2i}} \quad (142)$$

2.2.3.6. Intersección bilineal-segundo lineal

Igualando Ec. (23) y Ec. (56):

$$\frac{1}{1.6289} \left(\frac{x_F k_I h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} t_{D_{BL}}^{0.25} = \frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I(\phi c_t)_I}{k_m(\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} \quad (143)$$

Despejando el tiempo de intersección adimensional:

$$t_{D_{BL-L2i}} = 3.8271 y_e^4 \left[\frac{k_m x_F \rho_f (\phi c_t)_m}{k_F w_F h_f (\phi c_t)_I} \right]^2 \quad (144)$$

Reemplazando variables adimensional Ec. (6) en Ec. (144), resulta:

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL-L2i}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = 3.8271 y_e^4 \left[\frac{k_m x_F \rho_f (\phi c_t)_m}{k_F w_F h_f (\phi c_t)_I} \right]^2 \quad (145)$$

Despejando $k_F w_F$:

$$(k_F w_F)^2 = 3.8271 y_e^4 \left[\frac{k_m x_F \rho_f (\phi c_t)_m}{h_f (\phi c_t)_I} \right]^2 \frac{(\phi c_t)_I \mu x_F^2}{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{BL-L2i}} \quad (146)$$

$$k_F w_F = 120.4702 \frac{y_e^2 x_F^2 k_m \rho_f (\phi c_t)_m}{h_f} \left[\frac{\mu}{(\phi c_t)_I k_I t_{BL-L2i}} \right]^{0.5} \quad (147)$$

2.2.3.7. Intersección segundo pseudoestable-primer lineal

Igualando Ec. (69) y Ec. (38):

$$1.5511 \frac{x_F h_f (\phi c_t)_I}{y_e h_m (\phi c_t)_m} t_{D_{Pss2}} = \frac{1}{1.1360} t_{D_{L1}}^{0.5} \quad (148)$$

Despejando el tiempo de intersección adimensional:

$$t_{D_{Pss2-L1}} = \frac{1}{3.1048} \left[\frac{y_e h_m (\phi c_t)_m}{x_F h_f (\phi c_t)_I} \right]^2 \quad (149)$$

Reemplazando variables adimensional Ec. (6) en Ec. (149), resulta:

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{Pss2-L1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{1}{3.1048} \left[\frac{y_e h_m (\phi c_t)_m}{x_F h_f (\phi c_t)_I} \right]^2 \quad (150)$$

Despejando permeabilidad del yacimiento interno, k_I :

$$k_I = 1221.3953 \frac{\mu}{(\phi c_t)_I t_{Pss2-L1}} \left[\frac{y_e h_m (\phi c_t)_m}{h_f} \right]^2 \quad (151)$$

2.2.3.8. Intersección segundo lineal-primer pseudoestable

Igualando Ec. (56) y Ec. (51):

$$\frac{1}{2.2783} \frac{h_f}{y_e} \left[\frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} t_{D_{L2}}^{0.5} = \frac{\pi}{2} \frac{x_F}{y_e} t_{D_{Pss1}} \quad (152)$$

Despejando el tiempo de intersección adimensional:

$$t_{D_{L2-Pss1}} = \frac{1}{12.8074} \frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \left[\frac{h_f}{x_F} \right]^2 \quad (153)$$

Reemplazando variables adimensional Ec. (6) en Ec. (153), y despejando k_m resulta:

$$\frac{2.637 \times 10^{-4} k_I t_{L2-Pss1}}{(\phi c_t)_I \mu x_F^2} = \frac{1}{12.8074} \frac{k_I (\phi c_t)_I}{k_m (\phi c_t)_m} \left[\frac{h_f}{x_F} \right]^2 \quad (154)$$

$$k_m = 296.0935 \frac{\mu}{(\phi c_t)_m t_{L2-Pss1}} \left[h_f (\phi c_t)_I \right]^2 \quad (155)$$

3. APLICACIONES MODELO DE FLUJO TRILINEAL

Para dar aplicabilidad a las ecuaciones de la sección 2, se simularon dos pruebas de presión en el programa TRILINEAR MODEL, a partir de data obtenida de Brown (2009). Se identificó el caso presentado en cada prueba, tal como se describe en el apéndice B y finalmente se calcularon los diferentes parámetros mediante las ecuaciones presentadas, los cuales fueron comparados con la data existente.

3.1. Ejercicio de aplicación 1 para un yacimiento de aceite

Se simuló una prueba de presión para un yacimiento homogéneo de crudo, con un pozo horizontal fracturado hidráulicamente (Figura 14) y se identificó el caso presentado (Figura 15). Los datos de entrada se muestran en la tabla 1:

| PRUEBA 1 | |
|------------------|--------------|
| Parámetro | Valor |
| h | 380 |
| r_w | 0.3 |
| y_e | 108.5 |
| x_e | 7500 |
| μ | 0.3 |
| k_m | 5E-16 |
| ϕ_m | 0.07 |
| c_{tm} | 0.000001 |
| h_m | 1 |
| k_f | 50 |
| ϕ_f | 0.7 |
| c_{if} | 0.006 |
| h_f | 0.005 |
| ϕ_F | 0.38 |
| k_F | 25100 |
| c_{iF} | 0.00001 |
| w_F | 0.01 |
| x_F | 93 |
| q_F | 34.83 |
| B_O | 1.35 |
| ρ_f | 1 |
| $T(R)$ | 600 |

Tabla 1. Datos de entrada para ejercicio de aplicación 1 en un yacimiento de aceite.

Figura 14. Presión y derivada de presión vs. Tiempo en un gráfico log-log para el ejercicio 1 (yacimiento de aceite).

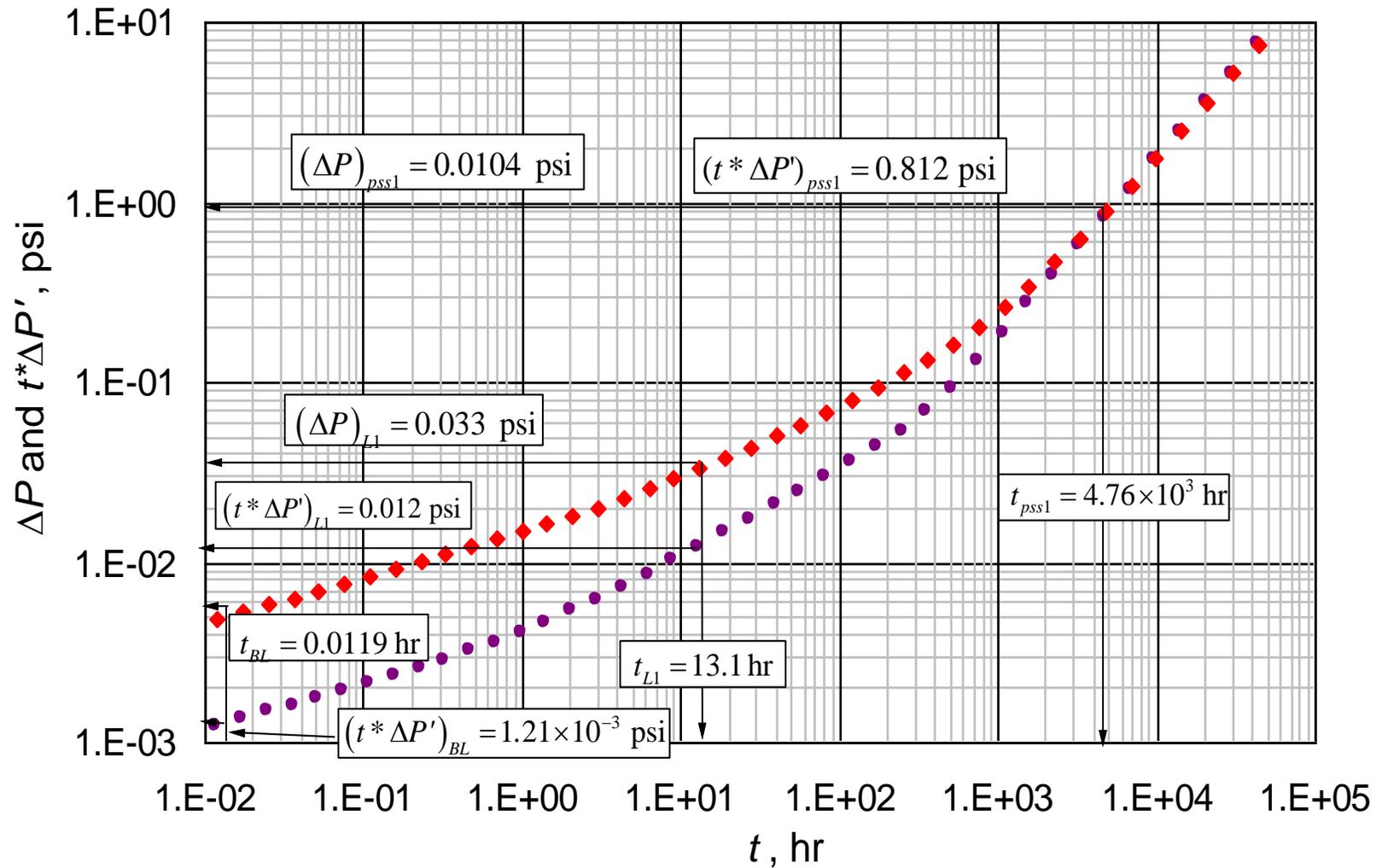
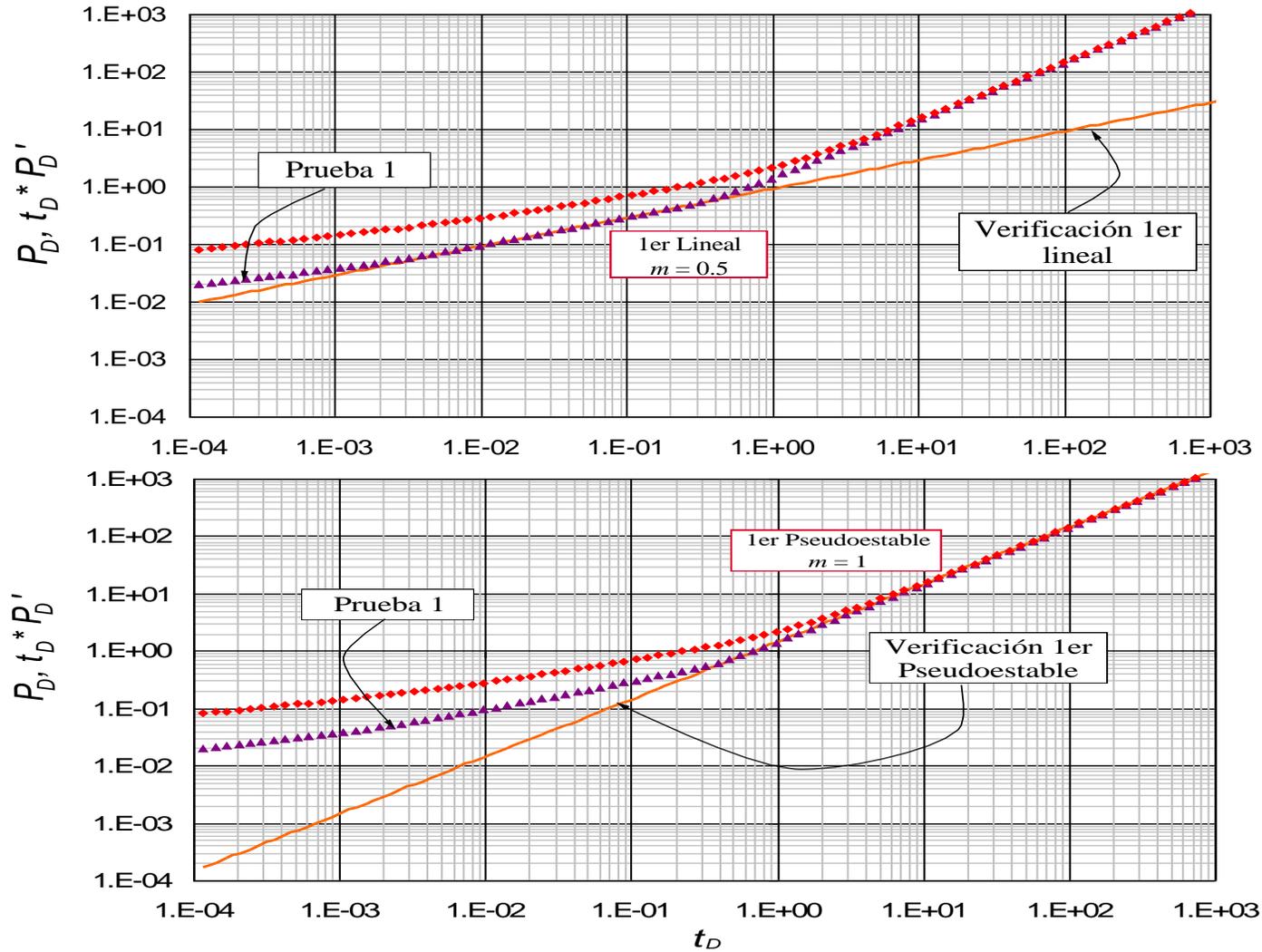


Figura 15. Verificación de los regímenes de flujo para el ejercicio 1 (yacimiento de aceite).



Los datos de la prueba de presión se muestran en el Apéndice A.

Calcular y comparar: permeabilidad del yacimiento interno (k_I), conductividad de fractura hidráulica (k_{FWF}) y longitud media fractura hidráulica (x_F).

Solución:

- I. Haciendo uso de las Ecs. (19), (21) y (22), Se realizan los siguientes cálculos:

| Cálculos | |
|-----------|------------|
| λ | 2.0758E-10 |
| ω | 0.00333333 |
| η_O | 6.2786E-12 |
| η_I | 10.4642857 |
| η_F | 5806026.32 |

- II. Generar una curva de ΔP y $t^*\Delta P'$ vs t con los datos de presión (**Apéndice A**) Utilizando el programa *Trilinear Model*. (Figura 14).
- III. Identificar los diferentes regímenes de flujo en la gráfica. Verificar si se presenta caso uno, caso dos o caso tres (Figura 15). Para el ejercicio de aplicación, se observan los siguientes regímenes de flujo: Bilineal, primer lineal y primer pseudoestable (caso 1).
- IV. Leer de la gráfica (Figura 14) ΔP y $t^*\Delta P'$ vs t , los diferentes valores de los puntos característicos:

| Tiempo (hr) | | Delta de presión (psi) | | Derivada de presión (psi) | |
|-------------|----------|------------------------|----------|---------------------------|----------|
| t_{Bl} | 1.19E-02 | Δp_{Bl} | 4.82E-03 | $(t^*\Delta p')_{Bl}$ | 1.21E-03 |
| t_L | 1.31E+01 | Δp_L | 3.30E-02 | $(t^*\Delta p')_L$ | 1.20E-02 |
| t_{Pss} | 4.76E+03 | Δp_{Pss} | 8.87E-01 | $(t^*\Delta p')_{Pss}$ | 8.12E-01 |

Tabla 2. Puntos característicos de los regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 1.

| Intersección | t_{real} leído |
|--------------|------------------|
| $Bl - L1$ | 1.62E+00 |
| $Pss1 - Bl$ | 6.08E+01 |
| $Pss1 - L1$ | 3.61E+02 |

Tabla 3. Tiempo de intersección entre regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 1.

- V. Determinar los distintos parámetros, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2:

- Flujo bilineal, con pendiente de 0.25, se puede obtener la conductividad de fractura hidráulica reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (29) y los puntos leídos (Tabla 2).

$$k_F w_F = 122.0157 h_f \rho_f \mu^{1.5} \left[\frac{t_{Bl}}{k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{q_{F,sc} B}{h(t^* \Delta P')_{Bl}} \right]^2$$

$$k_F w_F = 122.0157 (0.005 * 1 * 0.3^{1.5}) \left[\frac{1.19E-02}{50 * (0.7 * 0.006)} \right]^{0.5} \left[\frac{34.83 * 1.35}{380 * 1.21E-03} \right]^2$$

$$k_F w_F = 251.4665 \text{ md} - \text{ft}$$

- Flujo lineal, con pendiente de 0.5, se puede obtener la permeabilidad del yacimiento interno, reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (42) y los puntos leídos (Tabla 2).

$$k_I = 4.0739 \frac{t_{L1} \mu}{(\phi c_t)_I} \left[\frac{q_{F,sc} B}{x_F h(t^* \Delta P')_{L1}} \right]^2$$

$$k_I = 4.0739 \frac{1.31E+01 * 0.3}{(0.7 * 0.006)} \left[\frac{34.83 * 1.35}{93 * 380 * 1.20E-02} \right]^2$$

$$k_I = 46.8675 \text{ md}$$

- Flujo pseudoestable, con pendiente unitaria, se puede obtener la longitud media de fractura hidráulica, reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (55) y los puntos leídos (Tabla 2).

$$x_F = \frac{1}{1.6971} \frac{q_{F,Msc} T t_{pss1}}{\mu y_e h(\phi c_t)_I (t^* \Delta m(P)')_{pss1}}$$

$$x_F = \frac{1}{17.0966} \frac{34.83 * 1.35 * 4.76E+03}{108.5 * 380 * 0.7 * 0.006 * 8.12E-01}$$

$$x_F = 93.1035 \text{ ft}$$

VI. Determinar los distintos parámetros, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2, a partir de las intersecciones entre los regímenes de flujo y los puntos leídos (Tabla 3):

- Intersección primer pseudoestable-primer lineal, ecuación (128):

$$k_I = 1191.3510 \frac{(\phi c_t)_I \mu y_e^2}{t_{pss1-Li}}$$

$$k_I = 1191.3510 \frac{(0.7 * 0.006) * 0.3 * 108.5^2}{3.61E+02}$$

$$k_I = 48.9650 \text{ md}$$

- Intersección primer pseudoestable-bilineal, ecuación (123):

$$x_F = \frac{1}{188.7927} \frac{k_I^{\frac{1}{4}}}{y_e} \left(\frac{k_F w_F}{h_f \rho_f} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{t_{pss1-BLi}}{(\phi c_i)_I \mu} \right]^{\frac{3}{4}}$$

$$x_F = \frac{1}{188.7927} \frac{50^4}{108.5} \left(\frac{25100 * 0.01}{0.005 * 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{6.08E + 01}{(0.7 * 0.006) * 0.3} \right]^{\frac{3}{4}}$$

$$x_F = 94.6986 \text{ ft}$$

- Intersección bilineal-primer lineal, ecuación (133):

$$k_F w_F = 29.9503 x_F^2 h_f \rho_f \left[\frac{\mu (\phi c_i)_I k_I}{t_{Bl-L1}} \right]^{0.5}$$

$$k_F w_F = 29.9503 * 93^2 * 0.005 * 1 * \left[\frac{0.3(0.7 * 0.006) * 50}{1.62E + 00} \right]^{0.5}$$

$$k_F w_F = 255.1012 \text{ md} - \text{ft}$$

VII. Determinar los daños, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2 y los datos de la tabla 1 y 2.

- Bilineal, ecuación (37):

$$s_{Bl} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left[\frac{k_I^3 t_{Bl}}{\mu (\phi c_i)_I} \right]^{0.25} \left[\frac{\Delta P_{Bl}}{(t * \Delta P')_{Bl}} - 4 \right]$$

$$s_{Bl} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{0.005 * 1}{251} \right)^{0.5} \left[\frac{50^3 * 1.19E - 02}{0.3 * (0.7 * 0.006)} \right]^{0.25} \left[\frac{4.82E - 03}{1.21E - 03} - 4 \right]$$

$$s_{Bl} = -1.9023E - 4$$

- Lineal, ecuación (50):

$$s_{L1} = \frac{1}{69.9564} \left[\frac{k_I t_{L1}}{\mu x_F^2 (\phi c_i)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta P_{L1}}{(t * \Delta P')_{L1}} - 2 \right]$$

$$s_{L1} = \frac{1}{69.9564} \left[\frac{50 * 1.31E + 01}{0.3 * 93^2 * (0.7 * 0.006)} \right]^{0.5} \left[\frac{3.30E - 02}{1.20E - 02} - 2 \right]$$

$$s_{L1} = 0.0831$$

VIII. Comparar resultados obtenidos con respecto a la data dada.

| Ecuación | Parámetro Obtenido | Dato de entrada | Valor obtenido modelo trilineal | Unidad | Porcentaje de error (%) |
|----------|--------------------|-----------------|---------------------------------|--------|-------------------------|
| (29) | $k_F w_F$ | 251 | 251.4665 | md-ft | 0.18 |
| (42) | k_I | 50 | 46.8573 | md | 6.28 |
| (55) | x_F | 93 | 93.1035 | ft | 0.11 |
| (123) | x_F | 93 | 94.6986 | ft | 1.82 |
| (128) | k_I | 50 | 48.9650 | md | 2.07 |
| (133) | $k_F w_F$ | 251 | 255.1012 | md-ft | 1.63 |
| (37) | s_{Bl} | - | $-1.9023E-4$ | - | - |
| (50) | s_{L1} | - | 0.08311 | - | - |

Tabla 4. Comparación de resultados, ejercicio de aplicación 1.

3.2. Ejercicio de aplicación 2 para un yacimiento de gas

Se tiene un yacimiento de gas homogéneo, con un pozo horizontal fracturado hidráulicamente. Se simuló una prueba de presión con los datos de entrada presentados en la tabla 5.

- Determinar los parámetros definidos en la sección 3 para cada régimen de flujo encontrado a partir de la prueba de presión (Figura 16).
- Realizar verificación de régimen de flujo para saber si se trata de caso uno, caso dos o caso tres (Figura 17).
- Comparar los valores calculados con la data dada.

Los datos de entrada se muestran a continuación:

Solución:

-Tomando como base el modelo trasiente de doble porosidad, se pueden calcular algunos parámetros tales como:

$$\rho_f = \frac{n_f}{h}$$

$$n_f = 0.8 * 250 = 200 \text{ fracturas}$$

$$h_{ft} = n_f * h_f$$

$$h_{ft} = 200 * 0.001 = 0.2 \text{ ft}$$

| PRUEBA 2 | |
|-------------------------------|--------------|
| Parámetro | Valor |
| h (ft) | 250 |
| r_w | 0.3 |
| y_e (ft) | 250 |
| x_e (ft) | 500 |
| μ (cp) | 0.0184 |
| k_m (md) | 1E-06 |
| ϕ_m (fracción) | 0.05 |
| c_{im} (psi ⁻¹) | 1E-05 |
| h_m (ft) | 1.25 |
| k_f (md) | 2000 |
| ϕ_f (fracción) | 0.45 |
| c_{if} (psi ⁻¹) | 1E-05 |
| h_f (ft) | 0.001 |
| ϕ_F (fracción) | 0.38 |
| k_F (md) | 1E05 |
| c_{iF} (psi ⁻¹) | 1E-05 |
| w_F | 0.01 |
| x_F (ft) | 250 |
| q_F (scf/día) | 100000 |
| B_o | 1.35 |
| ρ (f/ft) | 0.8 |
| SG | 0.55 |
| P (psia) | 4000 |
| $T(R)$ | 610.67 |

Tabla 5. Datos de entrada para ejercicio de aplicación 2 en un yacimiento de gas.

Los datos de la prueba de presión se muestran en el apéndice A.

Figura 16. Pseudopresión y derivada de Pseudopresión vs. Tiempo en un gráfico log-log para el ejercicio 2 (yacimiento de gas).

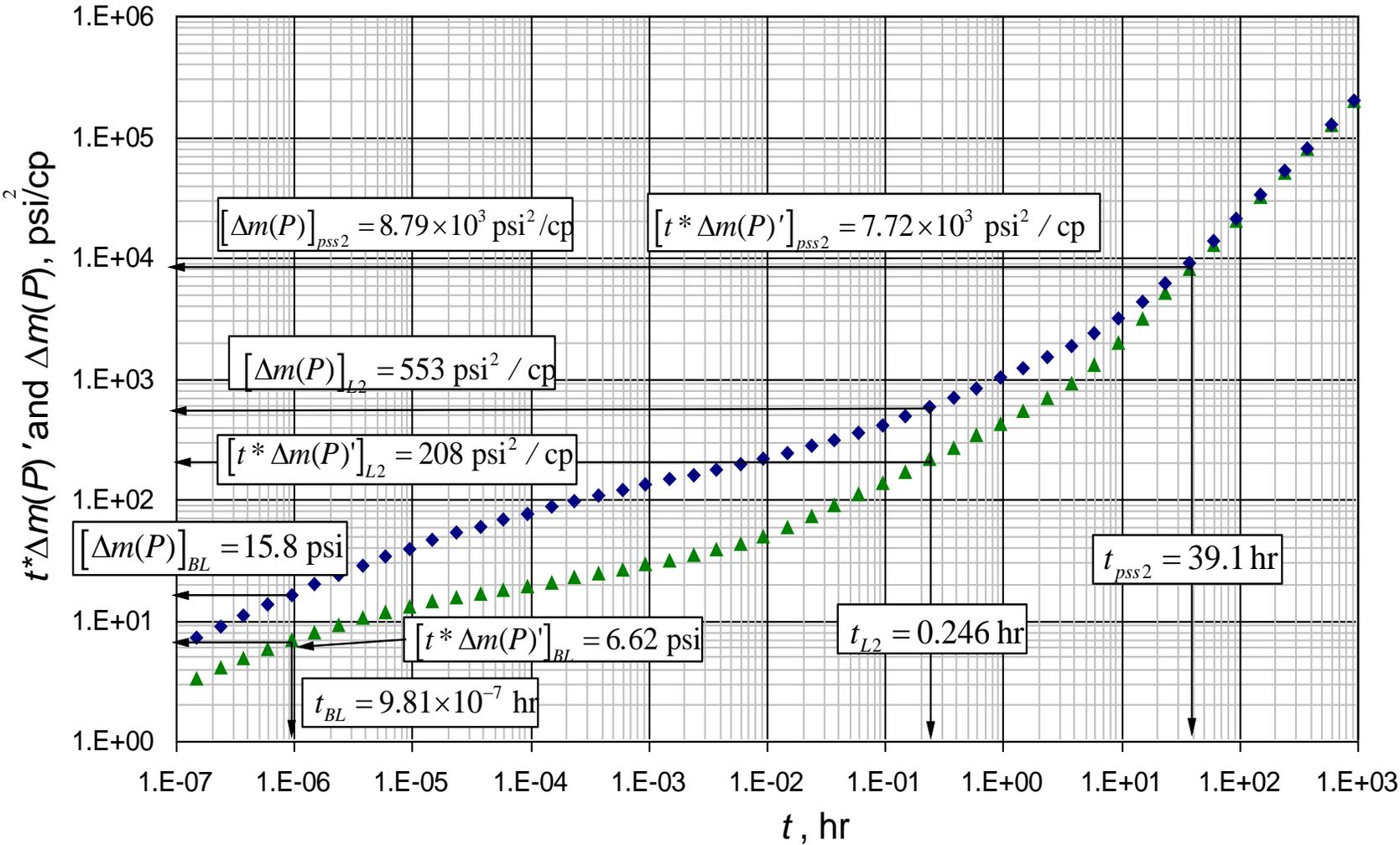
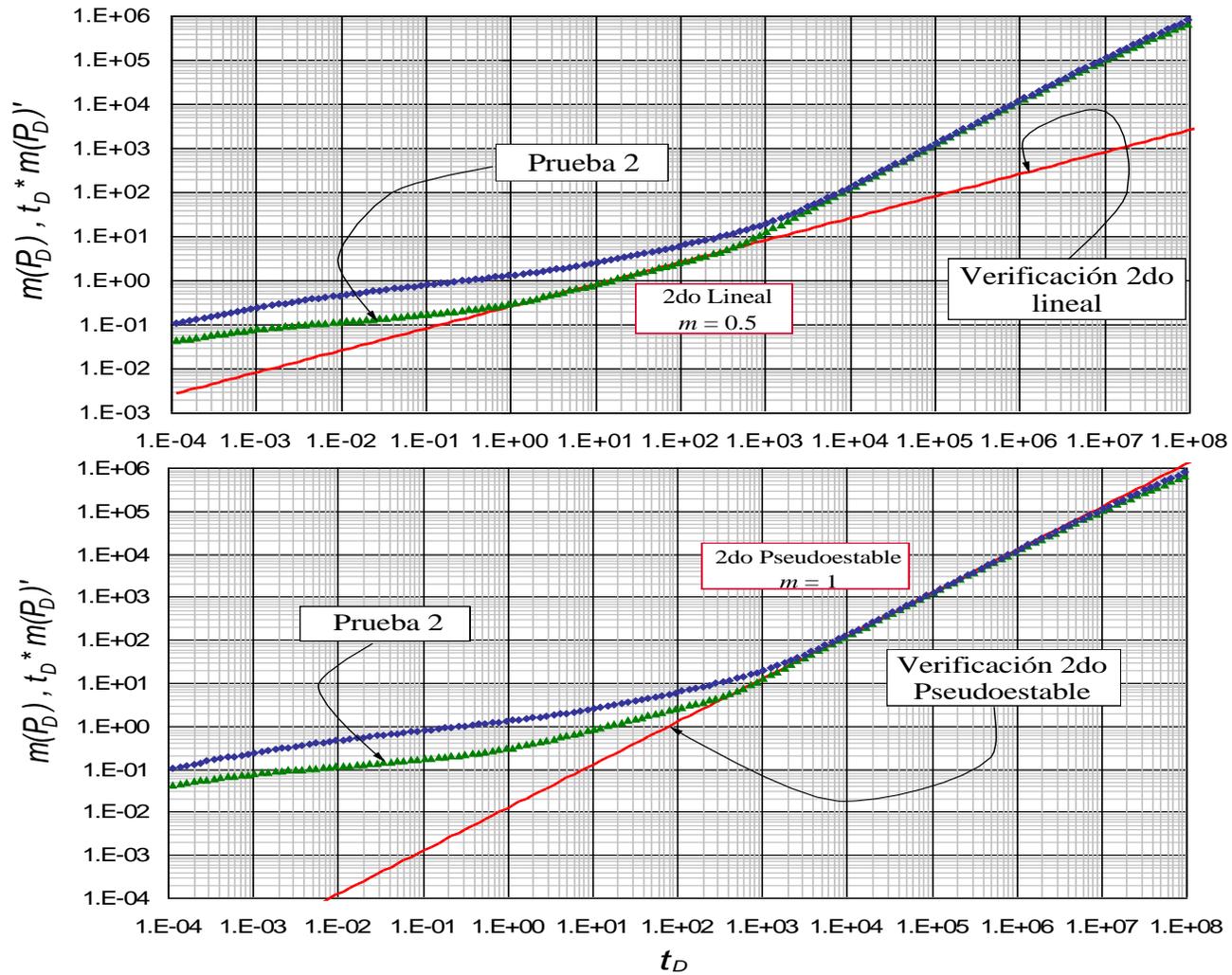


Figura 17. Verificación de los regímenes de flujo para el ejercicio 2 (yacimiento de gas).



I. Haciendo uso de las Ecs. (19), (21) y (22), se realizan los siguientes cálculos:

| Cálculos | |
|-----------|------------|
| λ | 0.3 |
| ω | 138.8889 |
| η_O | 0.0287 |
| η_I | 6369565.22 |
| η_F | 377145309 |

- I. Generar una curva de $t^*\Delta P'$ vs t con los datos de presión (**Apéndice A**) Utilizando el programa *Trilinear Model*. (Figura 16).
- II. Identificar los diferentes regímenes de flujo en la gráfica. Verificar si se presenta caso uno, caso dos o caso tres (Figura 17). Para el ejercicio de aplicación, se observan los siguientes regímenes de flujo: Bilineal, 2do Lineal y 2do pseudoestable (caso 3).
- III. Leer de la gráfica (Figura 16) $t^*\Delta P'$ vs t , los valores de los puntos característicos en cada régimen de flujo:

| Tiempo (hr) | | Delta de pseudopresión (psi ² /cp) | | Derivada de pseudopresión (psi ² /cp) | |
|-------------|----------|---|-----------|--|-----------|
| t_{Bl} | 9.81E-07 | $\Delta m(p)_{Bl}$ | 1.58E+01 | $t^* \Delta m(p)'_{Bl}$ | 6.62 E+00 |
| t_L | 2.46E-01 | $\Delta m(p)_L$ | 5.53 E+02 | $t^* \Delta m(p)'_L$ | 2.08 E+02 |
| t_{Pss} | 3.91E+01 | $\Delta m(p)_{Pss}$ | 8.79 E+03 | $t^* \Delta m(p)'_{Pss}$ | 7.72 E+03 |

Tabla 6. Puntos característicos de los regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 2.

| Intersección | t_{real} leído |
|--------------|------------------|
| $Pss2 - L2$ | 4.28E+00 |
| $Pss2 - Bl$ | 1.1 E+00 |
| $Bl - L2$ | 7.44E-02 |

Tabla 7. Tiempo de intersección entre regímenes de flujo, ejercicio de aplicación 2.

IV. Determinar los parámetros, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2:

- Flujo bilineal, con pendiente de 0.25, se puede obtener la conductividad de fractura hidráulica reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (78) y los puntos leídos (Tabla 6).

$$k_F w_F = 12384.0667 h_f \rho_f \left[\frac{t_{Bl}}{\mu k_I (\phi c_t)_I} \right]^{0.5} \left[\frac{q_{F,Msc} T}{h (t^* \Delta m(P))'_{Bl}} \right]^2$$

$$k_F w_F = 12384.0667(0.001*0.8) \left[\frac{9.81E-7}{0.0184*2000*(0.45*0.00001)} \right]^{0.5} \left[\frac{100*610.67}{250*6.62E+00} \right]^2$$

$$k_F w_F = 1002.8847 \text{ md} - \text{ft}$$

- Segundo lineal, con pendiente de 0.5, se puede obtener la permeabilidad de la matriz k_m , reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (107) y los puntos leídos (Tabla 6).

$$k_m = 102.8034 \frac{t_{L2}}{\mu(\phi_{c_t})_m} \left[\frac{q_{F,Msc} Th_f}{x_F y_e h(t * \Delta m(P)')_{L2}} \right]^2$$

$$k_m = 102.8034 \frac{2.46E-01}{0.0184*(0.05*0.00001)} \left[\frac{100*610.67*0.001}{250*250*250*2.08E+02} \right]^2$$

$$k_m = 9.7051E-7 \text{ md}$$

- Segundo pseudoestable, con pendiente unitaria, se puede obtener la longitud media de fractura hidráulica, reemplazando los parámetros conocidos en la ecuación (118) y los puntos leídos (Tabla 6).

$$x_F = \frac{1}{1.7187} \frac{q_{F,Msc} Th_f t_{pss2}}{y_e h_m h \mu(\phi_{c_t})_m (t * \Delta m(P)')_{pss2}}$$

$$x_F = \frac{1}{1.7187} \frac{100*610.67*0.001*3.91E+01}{250*1.25*250*0.0184*(0.05*0.00001)*7.72E+03}$$

$$x_F = 250.3733 \text{ ft}$$

- V. Determinar los distintos parámetros, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2, a partir de las intersecciones entre los regímenes de flujo y los puntos leídos (Tabla 7):

- Intersección segundo pseudoestable-segundo lineal, ecuación (142).

$$k_m = 303.6558 \frac{\mu h_m^2 (\phi_{c_t})_m}{t_{Pss2-L2}}$$

$$k_m = 303.6558 \frac{0.0184*1.25^2(0.05*0.00001)}{4.28E+00}$$

$$k_m = 1.02E-06 \text{ md}$$

- Intersección segundo pseudoestable-bilineal, ecuación (138).

$$k_I = 1.34*10^9 \frac{[y_e h_m (\phi_{c_t})_m x_F]^4}{(\phi_{c_t})_I} \left(\frac{\rho_f}{k_F w_F h_f} \right)^2 \left(\frac{\mu}{t_{Pss2-BI}} \right)^3$$

$$k_I = 1.34 * 10^9 \frac{(250 * 1.25 * 0.05 * 0.00001 * 250)^4}{0.45 * 0.00001} \left(\frac{0.8}{100000 * 0.001 * 0.01} \right)^2 \left[\frac{0.0184}{1.1E + 00} \right]^3$$

$$k_I = 2076.7672 \text{ md}$$

- Intersección bilineal-segundo lineal, ecuación (147).

$$k_F w_F = 120.4702 \frac{y_e^2 x_F^2 k_m \rho_f (\phi c_t)_m}{h_f} \left[\frac{\mu}{(\phi c_t)_I k_I t_{Bl-L2}} \right]^{0.5}$$

$$k_F w_F = 120.4702 * \left(\frac{250^2 * 250^2 * 0.000001 * 0.8 * 0.05 * 0.00001}{0.001} \right) \left[\frac{0.0184}{0.45 * 0.00001 * 2000 * 7.44E - 02} \right]^{0.5}$$

$$k_F w_F = 986.5116 \text{ md} - \text{ft}$$

- VI. Determinar los daños, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 2 y los datos en la tabla 6.

- Bilineal, ecuación (86).

$$s_{Bl} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left(\frac{k_I^3 t_{Bl}}{\mu (\phi c_t)_I} \right)^{0.25} \left(\frac{\Delta m(P)_{Bl}}{(t * \Delta m(P))_{Bl}} - 4 \right)$$

$$s_{Bl} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{0.001 * 0.8}{1000} \right)^{0.5} \left[\frac{2000^3 * 9.81E - 07}{0.0184 * (0.45 * 0.00001)} \right]^{0.25} \left[\frac{1.58E + 01}{6.62 E + 00} - 4 \right]$$

$$s_{Bl} = -0.0626$$

- Lineal, ecuación (114).

$$s_{L2} = \frac{1}{140.2994} \frac{h_f k_I}{y_e x_F} \left[\frac{t_{L2}}{k_m \mu (\phi c_t)_m} \right]^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_{L2}}{(t * \Delta m(P))_{L2}} - 2 \right]$$

$$s_{L2} = \frac{0.001 * 2000}{140.2994 * 250 * 250} \left(\frac{2.46E - 01}{0.000001 * 0.0184 * 0.05 * 0.00001} \right)^{0.5} \left[\frac{5.53E + 02}{2.08E + 02} - 2 \right]$$

$$s_{L2} = 0.7768$$

- VII. Comparar resultados obtenidos con data dada.

| Ecuación | Parámetro Obtenido | Dato de entrada | Valor obtenido modelo trilineal | Unidad | Porcentaje de error (%) |
|----------|--------------------|-----------------|---------------------------------|--------|-------------------------|
| (78) | $k_F w_F$ | 1000 | 1002.8847 | md-ft | 0.29 |
| (107) | k_m | 1E-06 | 9.7051E-07 | md | 2.05 |
| (118) | x_F | 250 | 250.3733 | ft | 0.15 |
| (138) | k_I | 2000 | 2076.7672 | md | 3.84 |
| (142) | k_m | 1E-06 | 1.02E-06 | md | 2.00 |
| (147) | $k_F w_F$ | 1000 | 986.5116 | md-ft | 1.35 |
| (86) | s_{Bl} | - | -0.0626 | - | - |
| (114) | s_{L2} | - | 0.7768 | - | - |

Tabla 8. Comparación de resultados, ejercicio de aplicación 2.

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de este trabajo se presentan nuevas ecuaciones para caracterizar yacimientos no convencionales bajo condiciones de flujo trilineal, a partir de pruebas de presión mediante la metodología TDS, de modo que sea posible estimar parámetros como permeabilidad del yacimiento interno o fractura natural (k_I), permeabilidad de matriz (k_m), tamaño del yacimiento en dirección y (y_e), conductividad de la fractura hidráulica (k_{FWF}) y longitud media de fractura hidráulica (x_F).

Se identificaron tres posibles casos que se pueden presentar en este tipo de yacimientos, a partir de la observación de propiedades importantes como la permeabilidad de la matriz (k_m) y los valores resultantes del parámetro de flujo interporoso (λ) y capacidad de almacenamiento (ω). En el caso uno, se presenta flujo bilineal, primer lineal y por último el estado pseudoestable; para el caso dos, flujo bilineal, primer lineal, primer pseudoestable, segundo lineal y segundo pseudoestable; finalmente, para el caso tres se presenta de igual forma el flujo bilineal, seguido de un flujo lineal y estado pseudoestable, los mismos llamados en el caso dos como segundo lineal y segundo estado pseudoestable.

En los ejercicios de aplicación se encontró que las ecuaciones dadas a partir de cada flujo son más precisas debido a que las obtenidas en los puntos de intersección están sujetas a la lectura y el número de datos con los que se trabaje; por ende las ecuaciones más acertadas son las del régimen de flujo por sí solo, tal como se muestra en los resultados obtenidos.

RECOMENDACIONES

1. Para la aplicación correcta de las ecuaciones aquí presentadas, se debe identificar con claridad, cuál de los tres casos explicados es el que se representa, teniendo en cuenta las premisas expuestas en la sección 2.2 “flujos característicos” o el apéndice B, con la finalidad de aplicar las fórmulas en los flujos correctos, lo cual permitirá realizar la caracterización del yacimiento obteniendo valores con un alto nivel de tolerancia.
2. Tener presente cual parámetro debe ser calculado primero para luego ser usado en el cálculo de posteriores: que para el caso uno, calcule a partir del primer estado pseudoestable el valor de x_F ; con x_F es posible determinar k_I mediante el flujo lineal y con k_I el flujo bilineal sirve para el cálculo de k_{FWF} . Las ecuaciones de intersección permiten rectificar los parámetros calculados. Para el caso dos, se puede proceder como se describió anteriormente y calcular k_m con el segundo flujo lineal y nuevamente x_F con el segundo estado pseudoestable. Para el caso tres, además de las fórmulas de cada flujo, es necesario recurrir a las fórmulas de intersecciones para obtener mayor información.
3. Para el cálculo de parámetros mediante la aplicación de las ecuaciones dimensionales correspondientes, se recomienda ser muy exactos en la lectura de la derivada y el tiempo, así como tomar dichos valores al inicio de cada uno de los flujos, evitando incurrir en posibles errores por periodos cortos de duración de los mismos.
4. Aplicar de forma correcta las propiedades conocidas, teniendo en cuenta que para el yacimiento interno, se hace uso de las propiedades intrínsecas de las fracturas naturales, y para el yacimiento externo, es decir, más allá de la parte superior de las fracturas hidráulicas, las propiedades intrínsecas de la matriz.
5. Preferiblemente hacer uso de las ecuaciones que requieren lectura de la derivada y el tiempo, puesto que las lecturas de puntos de intersección están expuestas en mayor medida a error humano.
6. Hacer uso de las ecuaciones de daño, para cuestiones de verificación mas no para su cálculo, ya que no se pudo corroborar su veracidad en el momento de la formulación.

BIBLIOGRAFIA

- Agarwal, R. G. (1979, January 1). "Real Gas Pseudo-Time" - A New Function For Pressure Buildup Analysis Of MHF Gas Wells. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/8279-MS
- Al-Hussainy, R., & Ramey, H. J. (1966, May 1). Application of Real Gas Flow Theory to Well Testing and Deliverability Forecasting. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/1243-B-PA.
- Al-Hussainy, R., Ramey, H. J., & Crawford, P. B. (1966, May 1). The Flow of Real Gases Through Porous Media. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/1243-A-PA.
- Bennett, C. O., Camacho-V., R. G., Reynolds, A. C., & Raghavan, R. (1985, October 1). Approximate Solutions for Fractured Wells Producing Layered Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/11599-PA.
- Brown, M. (2009). Analytical Trilinear Pressure Transient Model for Multiply Fractured Horizontal Wells in Tight Reservoirs. MS thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, USA.
- Brown, M. L., Ozkan, E., Raghavan, R. S., & Kazemi, H. (2009, January 1). Practical Solutions for Pressure Transient Responses of Fractured Horizontal Wells in Unconventional Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/125043-MS.
- Camacho-V., R. G. 1984. Response of Wells Producing Commingled Reservoirs: Unequal Fracture Length. MSc Thesis. University of Tulsa. Tulsa, OK.
- Camacho-V., R. G., Raghavan, R., & Reynolds, A. C. (1987, March 1). Response of Wells Producing Layered Reservoirs: Unequal Fracture Length. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/12844-PA
- Cinco L., H., Samaniego V., F., & Dominguez A., N. (1978, August 1). Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/6014-PA.
- Cinco-Ley, H., & Samaniego-V., F. (1981, September 1). Transient Pressure Analysis for Fractured Wells. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/7490-PA
- Cinco-Ley, H., & Meng, H.-Z. (1988, January 1). Pressure Transient Analysis of Wells With Finite Conductivity Vertical Fractures in Double Porosity Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/18172-MS
- De Swaan O., A. (1976, June 1). Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/5346-PA.
- Escobar, F.H. Recent Advances in Practical Applied Well Test Analysis. (2015). Nova publishers New York. Published by Nova Science Publishers, Inc. † New York. 415p. Nov. 2015.

- Gringarten, A. C., Ramey, H. J., & Raghavan, R. (1974, August 1). Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/4051-PA
- Kazemi, H. (1969, December 1). Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/2156-A.
- Ozkan, E., Brown, M. L., Raghavan, R., & Kazemi, H. (2011, April 1). Comparison of Fractured-Horizontal-Well Performance in Tight Sand and Shale Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/121290-PA.
- Prats, M. (1961, June 1). Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/1575-G.
- Prats, M., Hazebroek, P., & Strickler, W. R. (1962, June 1). Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior--Compressible-Fluid Case. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/98-PA.
- Raghavan, R. S., Chen, C.-C., & Agarwal, B. (1997, September 1). An Analysis of Horizontal Wells Intercepted by Multiple Fractures. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/27652-PA.
- Serra, K., Reynolds, A. C., & Raghavan, R. (1983, December 1). New Pressure Transient Analysis Methods for Naturally Fractured Reservoirs(includes associated papers 12940 and 13014). Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/10780-PA.
- Stehfest, H. 1970. Numerical Inversion of Laplace Transforms. Communications. ACM 13 (1). 47–49.
- Tiab, D. (1995). Analysis of Pressure and Pressure Derivative without Type-Curve Matching: 1- Skin and Wellbore Storage. Journal of Petroleum Science and Engineering, Vol. 12, pp. 171-181.

ANEXOS

Apéndice A: Data de pruebas de presión para ejercicios de aplicación

1. Prueba de presión para un yacimiento de aceite, ejercicio 1

| TD | PD | TD*PD' | t | m(P) | t*m(P)' | dP | t*dp' |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1.45E-05 | 4.59E-02 | 1.15E-02 | 1.19E-02 | 7.19E+01 | 1.80E+01 | 4.82E-03 | 1.21E-03 |
| 2.09E-05 | 5.04E-02 | 1.26E-02 | 1.73E-02 | 7.88E+01 | 1.97E+01 | 5.28E-03 | 1.32E-03 |
| 3.02E-05 | 5.53E-02 | 1.38E-02 | 2.50E-02 | 8.64E+01 | 2.16E+01 | 5.79E-03 | 1.45E-03 |
| 4.37E-05 | 6.06E-02 | 1.52E-02 | 3.61E-02 | 9.48E+01 | 2.37E+01 | 6.35E-03 | 1.59E-03 |
| 6.31E-05 | 6.64E-02 | 1.66E-02 | 5.22E-02 | 1.04E+02 | 2.60E+01 | 6.97E-03 | 1.74E-03 |
| 9.12E-05 | 7.29E-02 | 1.82E-02 | 7.54E-02 | 1.14E+02 | 2.85E+01 | 7.64E-03 | 1.91E-03 |
| 1.32E-04 | 7.99E-02 | 2.00E-02 | 1.09E-01 | 1.25E+02 | 3.13E+01 | 8.38E-03 | 2.10E-03 |
| 1.91E-04 | 8.77E-02 | 2.20E-02 | 1.57E-01 | 1.37E+02 | 3.44E+01 | 9.19E-03 | 2.31E-03 |
| 2.75E-04 | 9.62E-02 | 2.43E-02 | 2.28E-01 | 1.50E+02 | 3.80E+01 | 1.01E-02 | 2.55E-03 |
| 3.98E-04 | 1.06E-01 | 2.69E-02 | 3.29E-01 | 1.65E+02 | 4.20E+01 | 1.11E-02 | 2.82E-03 |
| 5.75E-04 | 1.16E-01 | 2.99E-02 | 4.76E-01 | 1.81E+02 | 4.68E+01 | 1.22E-02 | 3.14E-03 |
| 8.32E-04 | 1.28E-01 | 3.36E-02 | 6.87E-01 | 2.00E+02 | 5.25E+01 | 1.34E-02 | 3.52E-03 |
| 1.20E-03 | 1.41E-01 | 3.80E-02 | 9.94E-01 | 2.20E+02 | 5.95E+01 | 1.48E-02 | 3.99E-03 |
| 1.74E-03 | 1.56E-01 | 4.35E-02 | 1.44E+00 | 2.44E+02 | 6.80E+01 | 1.63E-02 | 4.56E-03 |
| 2.51E-03 | 1.73E-01 | 5.02E-02 | 2.08E+00 | 2.71E+02 | 7.85E+01 | 1.81E-02 | 5.26E-03 |
| 3.63E-03 | 1.93E-01 | 5.84E-02 | 3.00E+00 | 3.02E+02 | 9.13E+01 | 2.02E-02 | 6.12E-03 |
| 5.25E-03 | 2.16E-01 | 6.85E-02 | 4.34E+00 | 3.38E+02 | 1.07E+02 | 2.27E-02 | 7.18E-03 |
| 7.59E-03 | 2.44E-01 | 8.08E-02 | 6.27E+00 | 3.81E+02 | 1.26E+02 | 2.56E-02 | 8.48E-03 |
| 1.10E-02 | 2.76E-01 | 9.59E-02 | 9.06E+00 | 4.32E+02 | 1.50E+02 | 2.90E-02 | 1.01E-02 |
| 1.58E-02 | 3.15E-01 | 1.14E-01 | 1.31E+01 | 4.92E+02 | 1.79E+02 | 3.30E-02 | 1.20E-02 |
| 2.29E-02 | 3.61E-01 | 1.36E-01 | 1.89E+01 | 5.64E+02 | 2.13E+02 | 3.78E-02 | 1.43E-02 |
| 3.31E-02 | 4.16E-01 | 1.63E-01 | 2.74E+01 | 6.50E+02 | 2.55E+02 | 4.36E-02 | 1.71E-02 |
| 4.79E-02 | 4.82E-01 | 1.95E-01 | 3.96E+01 | 7.53E+02 | 3.06E+02 | 5.05E-02 | 2.05E-02 |
| 6.92E-02 | 5.61E-01 | 2.34E-01 | 5.72E+01 | 8.77E+02 | 3.67E+02 | 5.88E-02 | 2.46E-02 |
| 1.00E-01 | 6.55E-01 | 2.81E-01 | 8.27E+01 | 1.03E+03 | 4.40E+02 | 6.87E-02 | 2.95E-02 |
| 1.45E-01 | 7.69E-01 | 3.38E-01 | 1.19E+02 | 1.20E+03 | 5.28E+02 | 8.06E-02 | 3.54E-02 |
| 2.09E-01 | 9.06E-01 | 4.07E-01 | 1.73E+02 | 1.42E+03 | 6.36E+02 | 9.50E-02 | 4.26E-02 |
| 3.02E-01 | 1.07E+00 | 4.99E-01 | 2.50E+02 | 1.68E+03 | 7.80E+02 | 1.12E-01 | 5.23E-02 |
| 4.37E-01 | 1.28E+00 | 6.40E-01 | 3.61E+02 | 2.00E+03 | 1.00E+03 | 1.34E-01 | 6.71E-02 |
| 6.31E-01 | 1.55E+00 | 8.69E-01 | 5.22E+02 | 2.43E+03 | 1.36E+03 | 1.63E-01 | 9.11E-02 |
| 9.12E-01 | 1.94E+00 | 1.23E+00 | 7.54E+02 | 3.03E+03 | 1.92E+03 | 2.03E-01 | 1.29E-01 |
| 1.32E+00 | 2.48E+00 | 1.77E+00 | 1.09E+03 | 3.88E+03 | 2.77E+03 | 2.60E-01 | 1.86E-01 |
| 1.91E+00 | 3.27E+00 | 2.56E+00 | 1.57E+03 | 5.12E+03 | 4.01E+03 | 3.43E-01 | 2.69E-01 |
| 2.75E+00 | 4.42E+00 | 3.71E+00 | 2.28E+03 | 6.91E+03 | 5.80E+03 | 4.63E-01 | 3.89E-01 |
| 3.98E+00 | 6.07E+00 | 5.36E+00 | 3.29E+03 | 9.49E+03 | 8.39E+03 | 6.36E-01 | 5.62E-01 |

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 5.75E+00 | 8.46E+00 | 7.75E+00 | 4.76E+03 | 1.32E+04 | 1.21E+04 | 8.87E-01 | 8.12E-01 |
| 8.32E+00 | 1.19E+01 | 1.12E+01 | 6.87E+03 | 1.86E+04 | 1.75E+04 | 1.25E+00 | 1.17E+00 |
| 1.20E+01 | 1.69E+01 | 1.62E+01 | 9.94E+03 | 2.64E+04 | 2.53E+04 | 1.77E+00 | 1.70E+00 |
| 1.74E+01 | 2.41E+01 | 2.34E+01 | 1.44E+04 | 3.77E+04 | 3.66E+04 | 2.53E+00 | 2.45E+00 |
| 2.51E+01 | 3.45E+01 | 3.38E+01 | 2.08E+04 | 5.40E+04 | 5.29E+04 | 3.62E+00 | 3.55E+00 |
| 3.63E+01 | 4.96E+01 | 4.89E+01 | 3.00E+04 | 7.76E+04 | 7.65E+04 | 5.20E+00 | 5.12E+00 |
| 5.25E+01 | 7.14E+01 | 7.07E+01 | 4.34E+04 | 1.12E+05 | 1.11E+05 | 7.48E+00 | 7.41E+00 |
| 7.59E+01 | 1.03E+02 | 1.02E+02 | 6.27E+04 | 1.61E+05 | 1.60E+05 | 1.08E+01 | 1.07E+01 |
| 1.10E+02 | 1.48E+02 | 1.48E+02 | 9.06E+04 | 2.32E+05 | 2.31E+05 | 1.56E+01 | 1.55E+01 |
| 1.58E+02 | 2.14E+02 | 2.13E+02 | 1.31E+05 | 3.35E+05 | 3.34E+05 | 2.24E+01 | 2.24E+01 |
| 2.29E+02 | 3.09E+02 | 3.08E+02 | 1.89E+05 | 4.84E+05 | 4.82E+05 | 3.24E+01 | 3.23E+01 |
| 3.31E+02 | 4.47E+02 | 4.46E+02 | 2.74E+05 | 6.99E+05 | 6.97E+05 | 4.68E+01 | 4.67E+01 |
| 4.79E+02 | 6.45E+02 | 6.44E+02 | 3.96E+05 | 1.01E+06 | 1.01E+06 | 6.76E+01 | 6.76E+01 |
| 6.92E+02 | 9.32E+02 | 9.32E+02 | 5.72E+05 | 1.46E+06 | 1.46E+06 | 9.77E+01 | 9.77E+01 |
| 1.00E+03 | 1.35E+03 | 1.35E+03 | 8.27E+05 | 2.11E+06 | 2.11E+06 | 1.41E+02 | 1.41E+02 |

2. Prueba de presión para un yacimiento de gas, ejercicio 2

| TD | PD | TD*PD' | t | m(P) | t*m(P)' | dP | t*dP' |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1.58E-05 | 4.01E-02 | 1.86E-02 | 1.56E-07 | 6.97E+00 | 3.23E+00 | 2.82E-02 | 1.30E-02 |
| 2.51E-05 | 4.96E-02 | 2.25E-02 | 2.46E-07 | 8.61E+00 | 3.91E+00 | 3.48E-02 | 1.58E-02 |
| 3.98E-05 | 6.10E-02 | 2.71E-02 | 3.91E-07 | 1.06E+01 | 4.71E+00 | 4.28E-02 | 1.90E-02 |
| 6.31E-05 | 7.46E-02 | 3.23E-02 | 6.19E-07 | 1.30E+01 | 5.61E+00 | 5.24E-02 | 2.27E-02 |
| 1.00E-04 | 9.08E-02 | 3.81E-02 | 9.81E-07 | 1.58E+01 | 6.62E+00 | 6.37E-02 | 2.67E-02 |
| 1.58E-04 | 1.10E-01 | 4.45E-02 | 1.56E-06 | 1.91E+01 | 7.73E+00 | 7.70E-02 | 3.12E-02 |
| 2.51E-04 | 1.32E-01 | 5.13E-02 | 2.46E-06 | 2.29E+01 | 8.90E+00 | 9.25E-02 | 3.60E-02 |
| 3.98E-04 | 1.57E-01 | 5.83E-02 | 3.91E-06 | 2.73E+01 | 1.01E+01 | 1.10E-01 | 4.09E-02 |
| 6.31E-04 | 1.86E-01 | 6.56E-02 | 6.19E-06 | 3.22E+01 | 1.14E+01 | 1.30E-01 | 4.60E-02 |
| 1.00E-03 | 2.17E-01 | 7.28E-02 | 9.81E-06 | 3.78E+01 | 1.26E+01 | 1.53E-01 | 5.11E-02 |
| 1.58E-03 | 2.53E-01 | 8.00E-02 | 1.56E-05 | 4.39E+01 | 1.39E+01 | 1.77E-01 | 5.61E-02 |
| 2.51E-03 | 2.91E-01 | 8.71E-02 | 2.46E-05 | 5.06E+01 | 1.51E+01 | 2.04E-01 | 6.11E-02 |
| 3.98E-03 | 3.33E-01 | 9.40E-02 | 3.91E-05 | 5.78E+01 | 1.63E+01 | 2.33E-01 | 6.59E-02 |
| 6.31E-03 | 3.78E-01 | 1.01E-01 | 6.19E-05 | 6.56E+01 | 1.75E+01 | 2.65E-01 | 7.07E-02 |
| 1.00E-02 | 4.26E-01 | 1.08E-01 | 9.81E-05 | 7.39E+01 | 1.88E+01 | 2.99E-01 | 7.57E-02 |
| 1.58E-02 | 4.77E-01 | 1.16E-01 | 1.56E-04 | 8.29E+01 | 2.01E+01 | 3.35E-01 | 8.13E-02 |
| 2.51E-02 | 5.33E-01 | 1.25E-01 | 2.46E-04 | 9.25E+01 | 2.17E+01 | 3.74E-01 | 8.77E-02 |
| 3.98E-02 | 5.93E-01 | 1.36E-01 | 3.91E-04 | 1.03E+02 | 2.36E+01 | 4.16E-01 | 9.51E-02 |
| 6.31E-02 | 6.58E-01 | 1.48E-01 | 6.19E-04 | 1.14E+02 | 2.56E+01 | 4.61E-01 | 1.04E-01 |
| 1.00E-01 | 7.29E-01 | 1.61E-01 | 9.81E-04 | 1.27E+02 | 2.80E+01 | 5.11E-01 | 1.13E-01 |
| 1.58E-01 | 8.06E-01 | 1.76E-01 | 1.56E-03 | 1.40E+02 | 3.05E+01 | 5.66E-01 | 1.23E-01 |
| 2.51E-01 | 8.91E-01 | 1.92E-01 | 2.46E-03 | 1.55E+02 | 3.34E+01 | 6.25E-01 | 1.35E-01 |
| 3.98E-01 | 9.84E-01 | 2.13E-01 | 3.91E-03 | 1.71E+02 | 3.70E+01 | 6.90E-01 | 1.49E-01 |

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 6.31E-01 | 1.09E+00 | 2.41E-01 | 6.19E-03 | 1.89E+02 | 4.18E+01 | 7.63E-01 | 1.69E-01 |
| 1.00E+00 | 1.21E+00 | 2.80E-01 | 9.81E-03 | 2.10E+02 | 4.86E+01 | 8.47E-01 | 1.96E-01 |
| 1.58E+00 | 1.35E+00 | 3.33E-01 | 1.56E-02 | 2.34E+02 | 5.79E+01 | 9.46E-01 | 2.34E-01 |
| 2.51E+00 | 1.52E+00 | 4.04E-01 | 2.46E-02 | 2.64E+02 | 7.02E+01 | 1.06E+00 | 2.84E-01 |
| 3.98E+00 | 1.72E+00 | 4.97E-01 | 3.91E-02 | 2.99E+02 | 8.62E+01 | 1.21E+00 | 3.48E-01 |
| 6.31E+00 | 1.98E+00 | 6.15E-01 | 6.19E-02 | 3.44E+02 | 1.07E+02 | 1.39E+00 | 4.31E-01 |
| 1.00E+01 | 2.30E+00 | 7.66E-01 | 9.81E-02 | 3.99E+02 | 1.33E+02 | 1.61E+00 | 5.37E-01 |
| 1.58E+01 | 2.69E+00 | 9.57E-01 | 1.56E-01 | 4.67E+02 | 1.66E+02 | 1.89E+00 | 6.71E-01 |
| 2.51E+01 | 3.18E+00 | 1.20E+00 | 2.46E-01 | 5.53E+02 | 2.08E+02 | 2.23E+00 | 8.41E-01 |
| 3.98E+01 | 3.80E+00 | 1.51E+00 | 3.91E-01 | 6.61E+02 | 2.61E+02 | 2.67E+00 | 1.06E+00 |
| 6.31E+01 | 4.58E+00 | 1.89E+00 | 6.19E-01 | 7.96E+02 | 3.28E+02 | 3.21E+00 | 1.33E+00 |
| 1.00E+02 | 5.56E+00 | 2.38E+00 | 9.81E-01 | 9.66E+02 | 4.13E+02 | 3.90E+00 | 1.67E+00 |
| 1.58E+02 | 6.79E+00 | 2.99E+00 | 1.56E+00 | 1.18E+03 | 5.19E+02 | 4.77E+00 | 2.10E+00 |
| 2.51E+02 | 8.34E+00 | 3.79E+00 | 2.46E+00 | 1.45E+03 | 6.58E+02 | 5.85E+00 | 2.66E+00 |
| 3.98E+02 | 1.03E+01 | 5.02E+00 | 3.91E+00 | 1.80E+03 | 8.73E+02 | 7.25E+00 | 3.52E+00 |
| 6.31E+02 | 1.31E+01 | 7.25E+00 | 6.19E+00 | 2.28E+03 | 1.26E+03 | 9.20E+00 | 5.09E+00 |
| 1.00E+03 | 1.73E+01 | 1.12E+01 | 9.81E+00 | 3.00E+03 | 1.94E+03 | 1.21E+01 | 7.85E+00 |
| 1.58E+03 | 2.38E+01 | 1.77E+01 | 1.56E+01 | 4.14E+03 | 3.08E+03 | 1.67E+01 | 1.24E+01 |
| 2.51E+03 | 3.42E+01 | 2.81E+01 | 2.46E+01 | 5.94E+03 | 4.88E+03 | 2.40E+01 | 1.97E+01 |
| 3.98E+03 | 5.06E+01 | 4.45E+01 | 3.91E+01 | 8.79E+03 | 7.72E+03 | 3.55E+01 | 3.12E+01 |
| 6.31E+03 | 7.66E+01 | 7.04E+01 | 6.19E+01 | 1.33E+04 | 1.22E+04 | 5.37E+01 | 4.94E+01 |
| 1.00E+04 | 1.18E+02 | 1.11E+02 | 9.81E+01 | 2.05E+04 | 1.93E+04 | 8.26E+01 | 7.81E+01 |
| 1.58E+04 | 1.83E+02 | 1.76E+02 | 1.56E+02 | 3.18E+04 | 3.06E+04 | 1.28E+02 | 1.24E+02 |
| 2.51E+04 | 2.86E+02 | 2.79E+02 | 2.46E+02 | 4.96E+04 | 4.84E+04 | 2.00E+02 | 1.95E+02 |
| 3.98E+04 | 4.49E+02 | 4.40E+02 | 3.91E+02 | 7.79E+04 | 7.65E+04 | 3.15E+02 | 3.09E+02 |
| 6.31E+04 | 7.06E+02 | 6.95E+02 | 6.19E+02 | 1.23E+05 | 1.21E+05 | 4.95E+02 | 4.88E+02 |
| 1.00E+05 | 1.11E+03 | 1.10E+03 | 9.81E+02 | 1.93E+05 | 1.90E+05 | 7.80E+02 | 7.69E+02 |

Apéndice B: Verificación del caso

Tres posibles casos son presentados con sus respectivos flujos:

- Caso uno: flujo bilineal, primer flujo lineal y primer estado pseudoestable.
- Caso dos: flujo bilineal, primer flujo lineal, primer estado pseudoestable, segundo flujo lineal y segundo estado pseudoestable.
- Caso tres: flujo bilineal, segundo flujo lineal y segundo estado pseudoestable.

Identificar el caso dos resulta sencillo, puesto que es el único caso que presenta cinco flujos seguidos; sin embargo conocer si el caso presentado es el caso uno o el caso tres, puede generar confusión, debido a que sus flujos son aparentemente iguales. En la sección 2.2, se describen algunas observaciones que se pueden tener en cuenta si se posee información suficiente, sin embargo de no ser así, a continuación se presenta un procedimiento sencillo para tener mayor seguridad en la identificación de los diferentes flujos:

1. Se grafica los datos de $td \cdot Pd'$ vs. td en un gráfico Log-Log, tomados de la prueba de presión.
2. Tomando los valores de td de la prueba de presión, se hace uso de la ecuación gobernante del flujo que se desea verificar y se calculan los datos de $td \cdot Pd'$; sobre el mismo gráfico Log-Log se pone los datos calculados de $td \cdot Pd'$ vs. td y se observa que éstos deben coincidir con el flujo de la prueba de presión, tal como se muestra en la figura 15 y 17.

Recordemos que las ecuaciones gobernantes para cada flujo son: (23) y (74) para el flujo bilineal, (38) y (87) para el primer flujo lineal, (51) y (99) para el primer estado pseudoestable, (56) y (103) para el segundo flujo lineal y (69) y (115) para el segundo estado pseudoestable, aceite y gas respectivamente.

Es recomendable verificar el primer flujo lineal, puesto que su ecuación gobernante no requiere ningún dato adicional al de td ; conociéndose si es o no el primer flujo lineal, se puede intuir fácilmente si el caso presentado es el uno o el tres.

3. Identificar el caso y calcular los parámetros, haciendo uso de las ecuaciones correctas.

Apéndice C: Ecuaciones de flujo con función pseudotiempo en yacimientos de gas

Para una interpretación adicional de pruebas de presión en yacimientos gasíferos, se introducirá la función pseudotiempo (Agarwal, 1979), para tener en cuenta la dependencia con respecto al tiempo de la viscosidad del gas y de la compresibilidad total del sistema.

La ecuación de pseudotiempo definida como función de la presión dada en $hr \text{ psi}/cp$, es:

$$t_a(P) = \int_{p_o}^P \frac{(dt/dP)}{\mu(p)c_i(P)} dP \quad (C.1)$$

Las siguientes ecuaciones incluyen la función pseudotiempo y permiten determinar parámetros importantes de un yacimiento gasífero, a partir de los diferentes flujos identificados en una prueba de presión según sea el caso (caso 1, caso 2 o caso 3).

- Flujo bilineal

$$k_F w_F = 12384.0667 h_f \rho_f \left(\frac{t_a(P)_{Bl}}{k_I \phi_I} \right)^{0.5} \left[\frac{q_{F,sc} T}{h (t^* \Delta m(P))_{Bl}} \right]^2 \quad (C.2)$$

- Daño

$$s_{Bl} = \frac{1}{12.7828} \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^{0.5} \left(\frac{k_I^3 t_a(P)_{Bl}}{\phi_I} \right)^{0.25} \left(\frac{\Delta m(P)_{Bl}}{(t^* \Delta m(P))_{Bl}} - 4 \right) \quad (C.3)$$

- Primer flujo lineal

$$x_F = 20.3344 \frac{q_{F,sc} T}{h \left(t^* \Delta m(P) \right)'_L} \left(\frac{t_a(P)_L}{k_I \phi_I} \right)^{0.5} \quad (C.4)$$

- Daño

$$s_L = \frac{1}{69.9564} \left(\frac{k_I t_a(P)_L}{\phi_I x_F^2} \right)^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_L}{\left(t^* \Delta m(P) \right)'_L} - 2 \right] \quad (C.5)$$

- Primer estado pseudoestable

$$x_F = \frac{1}{1.6970} \frac{q_{F,sc} T}{\phi_I h y_e \left(t^* \Delta m(P) \right)'_{P_{ss}}} t_a(P)_{P_{ss}} \quad (C.6)$$

- Segundo flujo lineal

$$x_F = 10.1392 \frac{q_{F,Msc} h_f T}{y_e h \left(t^* \Delta m(P) \right)'_L} \left[\frac{(c_t)_I t_a(P)_L}{k_m (\phi c_t)_m} \right]^{-0.5} \quad (C.7)$$

- Daño

$$s_L = \frac{1}{140.2994} \frac{h_f k_I}{y_e x_F} \left(\frac{(c_t)_I t_a(P)_L}{k_m (\phi c_t)_m} \right)^{0.5} \left[\frac{\Delta m(P)_L}{\left(t^* \Delta m(P) \right)'_L} - 2 \right] \quad (C.8)$$

- Segundo estado pseudoestable

$$y_e = \frac{1}{1.7187} \frac{q_{F,Msc} T h_f (c_t)_I}{x_F h h_m (\phi c_t)_m \left(t^* \Delta m(P) \right)'_{P_{ss}}} t_a(P)_{P_{ss}} \quad (C.9)$$

-Intersecciones:

- Primer pseudoestable-bilineal

$$k_I = 1.2719 * 10^9 (x_F y_e)^4 \left(\frac{h_f \rho_f}{k_F w_F} \right)^2 \left(\frac{\phi_I}{t_a(P)_{P_{ss}-Bl}} \right)^3 \quad (C.10)$$

- Primer pseudoestable-primer lineal

$$y_e = \frac{1}{34.5077} \left(\frac{k_I t_a(P)_{P_{ss}-L}}{\phi_I} \right)^{0.5} \quad (C.11)$$

- Bilineal-primer lineal

$$k_F w_F = 29.9503 x^2 h_f \rho_f \left(\frac{\phi_I k_I}{t_a(P)_{Bl-L}} \right)^{0.5} \quad (C.12)$$

- Segundo pseudoestable-bilineal

$$k_I = 2.2223 * 10^{12} \left[\frac{y_e h_m (\phi c_t)_m x_F}{(c_t)_I} \right]^4 \left(\frac{\rho_f}{k_F w_F h_f} \right)^2 \left(\frac{1}{t_a(P)_{Pss-Bl}} \right)^3 \quad (C.13)$$

- Segundo pseudoestable-Segundo lineal

$$k_m = 303.6558 \frac{h_m^2 (\phi c_t)_m}{(c_t)_I t_a(P)_{Pss-L}} \quad (C.14)$$

- Bilineal-segundo lineal

$$k_F w_F = 120.4702 (y_e x_F)^2 \left[\frac{k_m \rho_f (\phi c_t)_m}{h_f (c_t)_I} \right] \left(\frac{1}{\phi_I k_I t_a(P)_{Bl-L}} \right)^{0.5} \quad (C.15)$$

Apéndice D: Modelo matemático y solución analítica

A continuación se presenta el modelo matemático y la solución analítica dado por Brown (2009).

El flujo de fluido en medios porosos se rige por la ecuación de difusividad. Para un fluido ligeramente compresible en un medio homogéneo y anisotrópico, se tiene que:

$$\bar{K} * \nabla^2 p = \phi c_t \mu \frac{\partial p}{\partial t} \quad (B.1)$$

Para el flujo en coordenadas cartesianas tridimensionales, el tensor de permeabilidad, viene dado por:

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

La ecuación de difusividad puede entonces ser escrita de la siguiente manera:

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \phi c_t \mu \frac{\partial p}{\partial t} \quad (B.3)$$

1. Ecuaciones generales

Por conveniencia, la solución de flujo trilineal se deriva en términos de unidades consistentes y variables adimensionales.

- ✓ Presión y tiempo adimensional

$$P_D = \frac{2\pi k_I h}{qB\mu} \Delta P = \frac{2\pi k_I h}{qB\mu} (P_i - P) \quad (\text{B.4})$$

$$P_D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_I h}{141.2qB\mu} (P_i - P) \\ \frac{k_I h}{1422qT} (m(P)_i - m(P)) \end{array} \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$t_D = \frac{\eta_I}{x_F^2} t \quad (\text{B.6})$$

$$\eta_I = \frac{k_I}{(\phi c_t)_I \mu} \quad (\text{B.7})$$

✓ Distancia adimensional en la dirección “x” y “y”

$$x_D = \frac{x}{x_F} \quad (\text{B.8})$$

$$y_D = \frac{y}{x_F} \quad (\text{B.9})$$

✓ Espesor adimensional de la fractura hidráulica

$$w_D = \frac{w_F}{x_F} \quad (\text{B.10})$$

✓ Conductividad adimensional de fractura y de yacimiento

$$C_{FD} = \frac{k_F w_F}{k_I x_F} \quad (\text{B.11})$$

$$C_{RD} = \frac{k_I x_F}{k_O y_e} \quad (\text{B.12})$$

✓ Relaciones de difusividad

$$\eta_{FD} = \frac{\eta_F}{\eta_I} \quad (\text{B.13})$$

$$\eta_{OD} = \frac{\eta_O}{\eta_I} \quad (\text{B.14})$$

Donde:

$$\eta_F = \frac{k_F}{(\phi c_t)_F \mu} \quad (\text{B.15})$$

$$\eta_o = \frac{k_o}{(\phi c_t)_o \mu} \quad (\text{B.16})$$

$$\eta_I = \frac{k_I}{(\phi c_t)_I \mu} \quad (\text{B.17})$$

Como aproximación, las propiedades del yacimiento externo deben tomarse como las propiedades de la matriz.

✓ Otras

$$\eta_I = \eta_f \quad (\text{B.18})$$

$$h_{fi} = n_f h_f \quad (\text{B.19})$$

$$\rho_f = \frac{n_f}{h} \quad (\text{B.20})$$

$$\omega = \frac{(\phi c_t h)_m}{(\phi c_t h)_f} \quad (\text{B.21})$$

$$\lambda = \frac{12 x_F^2 k_m}{h_m h_f k_f} \quad (\text{B.22})$$

✓ Daño

$$s_c = \frac{k_I h}{k_F w_F} \left[\ln \left(\frac{h}{2r_w} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{B.23})$$

2. Solución analítica yacimiento externo

Por conveniencia, en este trabajo se utiliza el algoritmo de Stehfest para derivar numéricamente las ecuaciones en el dominio de la transformada de Laplace.

Partiendo de la ecuación B.1, para el yacimiento externo se tiene que:

$$k_o \nabla^2 p_o = \phi_o c_{to} \mu \frac{\partial p_o}{\partial t} \quad (\text{B.24})$$

Reescribiendo la ecuación B.24 en una dimensión

$$k_o \frac{\partial^2 \Delta p_o}{\partial x^2} = \phi_o c_{to} \mu \frac{\partial p_o}{\partial t} \quad (\text{B.25})$$

Convirtiendo en forma adimensional y aplicando la transformada de Laplace

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{OD}}{\partial x_D^2} - \frac{S}{\eta_{OD}} \bar{p}_{OD} = 0 \quad (\text{B.26})$$

La barra encima de cada variable indica su transformada de Laplace respecto al tiempo adimensional y S, es el parámetro de la transformada de Laplace.

La solución general para la ecuación B.26 está dada por:

$$\bar{p}_{OD} = A \exp\left(-\sqrt{S_o} x_D\right) + B \exp\left(\sqrt{S_o} x_D\right) \quad (\text{B.27})$$

Donde

$$S_o = \sqrt{\frac{S}{\eta_{OD}}} \quad (\text{B.28})$$

Condición de frontera externa

$$\left(\frac{\partial \bar{p}_{OD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=x_{eD}} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Reemplazando condición de frontera externa en ecuación B.27

$$\left(\frac{\partial \bar{p}_{OD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=x_{eD}} = -\sqrt{S_o} A \exp(-\sqrt{S_o} x_{eD}) + \sqrt{S_o} B \exp(\sqrt{S_o} x_{eD}) = 0 \quad (\text{B.30})$$

Despejando B

$$B = A \exp(-2\sqrt{S_o} x_{eD}) \quad (\text{B.31})$$

Reemplazando ecuación B.31 en ecuación B.27

$$\bar{p}_{OD} = A \exp(-\sqrt{S_o} x_{eD}) \left\{ \exp[\sqrt{S_o} (x_{eD} - x_D)] + \exp[-\sqrt{S_o} (x_{eD} - x_D)] \right\} \quad (\text{B.32})$$

Condición de frontera interna

$$(\bar{p}_{OD})_{x_D=1} = (\bar{p}_{ID})_{x_D=1} \quad (\text{B.33})$$

Tomando condición de frontera interna en ecuación B.32 y despejando parámetro A se obtiene:

$$A = \frac{(\bar{p}_{ID})_{x_D=1}}{\exp(-\sqrt{S_o} x_{eD}) \left\{ \exp[\sqrt{S_o} (x_{eD} - 1)] + \exp[-\sqrt{S_o} (x_{eD} - 1)] \right\}} \quad (\text{B.34})$$

Sustituyendo ecuación B.34 en B.32, se obtiene finalmente la siguiente solución para el yacimiento externo:

$$(\bar{p}_{OD})_{x_D=1} = (\bar{p}_{ID})_{x_D=1} \frac{\cosh(\sqrt{S_o} (x_{eD} - x_D))}{\cosh(\sqrt{S_o} (x_{eD} - 1))} = (\bar{p}_{ID})_{x_D=1} = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{S}{\eta_{OD}}} (x_{eD} - x_D)\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{S}{\eta_{OD}}} (x_{eD} - 1)\right)} \quad (\text{B.35})$$

3. Solución analítica yacimiento interno

Partiendo de la ecuación B.1, para el yacimiento interno se tiene que:

$$k_I \nabla^2 p_I = \phi_I c_{II} \mu \frac{\partial \Delta p_I}{\partial t} \quad (\text{B.36})$$

De acuerdo a la figura 1, la ecuación para yacimiento interno debe ser reescrita en 2 dimensiones debido a que el flujo desde el yacimiento externo al interno es lineal en la dirección x , y el flujo desde el yacimiento interno a la fractura hidráulica es también asumido lineal, pero en la dirección y .

$$\frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial y^2} = \frac{\phi_I c_{II} \mu}{k_I} \frac{\partial \Delta p_I}{\partial t} \quad (\text{B.37})$$

Integrando:

$$\int_0^{x_F} \frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial x^2} \partial x + \int_0^{x_F} \frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial y^2} \partial x = \frac{\phi_I c_{II} \mu}{k_I} \int_0^{x_F} \frac{\partial \Delta p_I}{\partial t} \partial x \quad (\text{B.38})$$

Conforme a las siguiente asunciones

$$\frac{\partial p_I}{\partial y} \neq f(x) \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial t} \neq f(x) \quad (\text{B.40})$$

Resulta en:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{x_F} \right) \frac{\partial p_I}{\partial x} = \frac{\phi_I c_{II} \mu}{k_I} \frac{\partial \Delta p_I}{\partial t} \quad (\text{B.41})$$

Condición de flujo en la frontera entre el yacimiento externo e interno

$$k_I h \left(\frac{\partial \Delta p_I}{\partial x} \right)_{x=x_F} = k_O h \left(\frac{\partial \Delta p_O}{\partial x} \right)_{x=x_F} \quad (\text{B.42})$$

Tomando condición de frontera en ecuación B.41, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_I}{\partial y^2} + \left(\frac{k_O}{k_I x_F} \right) \left(\frac{\partial \Delta p_O}{\partial x} \right)_{x=x_F} = \frac{\phi_I c_{II} \mu}{k_I} \frac{\partial \Delta p_I}{\partial t} \quad (\text{B.43})$$

Convirtiendo a forma adimensional

$$\frac{\partial^2 p_{ID}}{\partial y_D^2} + \left(\frac{k_O x_F}{k_I x_F} \right) \left(\frac{\partial p_{OD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = \frac{\partial p_{ID}}{\partial t_D} \quad (\text{B.44})$$

Usualmente, en ingeniería de petróleos, la conductividad de yacimiento adimensional (ecuación B.12) es similar a la conductividad de fractura hidráulica, para lograr esto, la longitud horizontal del yacimiento en dirección y, ye, debe ser incluida:

$$\frac{\partial^2 p_{ID}}{\partial y_D^2} + \frac{k_O x_F}{k_I x_F} \left(\frac{y_e}{y_e} \right) \left(\frac{\partial p_{OD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = \frac{\partial p_{ID}}{\partial t_D} \quad (\text{B.45})$$

Acomodando términos y simplificando:

$$\frac{\partial^2 p_{ID}}{\partial y_D^2} + \frac{1}{C_{RD} y_{eD}} \left(\frac{\partial p_{OD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} - \frac{\partial p_{ID}}{\partial t_D} = 0 \quad (\text{B.46})$$

Aplicando transformada de Laplace

$$\frac{d^2 \bar{p}_{ID}}{dy_D^2} + \frac{1}{C_{RD} y_{eD}} \left(\frac{d\bar{p}_{OD}}{dx_D} \right)_{x_D=1} - u \bar{p}_{ID} = 0 \quad (\text{B.47})$$

Donde $u=s$ para un yacimiento homogéneo, y $u=f(s)$ para el yacimiento interno naturalmente fracturado, en el cual, $f(s)$ es el parámetro definido de doble porosidad en el modelo transitorio.

Recordando la ecuación B.35, el término de \bar{p}_{OD} puede expresarse en términos de \bar{p}_{ID} en la frontera entre el yacimiento externo-interno, de esta manera se tiene que:

$$\frac{d\bar{p}_{OD}}{dx_D} = (-\bar{p}_{ID})_{x_D=1} \sqrt{S/\eta_{OD}} \frac{\sinh\left(\sqrt{S/\eta_{OD}}(x_{eD} - x_D)\right)}{\cosh\left(\sqrt{S/\eta_{OD}}(x_{eD} - 1)\right)} \quad (\text{B.48})$$

Simplificando

$$\left(\frac{d\bar{p}_{OD}}{dx_D}\right)_{x_D=1} = (-\bar{p}_{ID})_{x_D=1} \sqrt{S/\eta_{OD}} \tanh\left[\sqrt{S/\eta_{OD}}(x_{eD} - 1)\right] \quad (\text{B.49})$$

Definiendo el siguiente parámetro y acomodando la ecuación B.49, se obtiene:

$$\beta_O = \sqrt{S/\eta_{OD}} \tanh\left[\sqrt{S/\eta_{OD}}(x_{eD} - 1)\right] \quad (\text{B.50})$$

$$\left(\frac{d\bar{p}_{OD}}{dx_D}\right)_{x_D=1} = \beta_O (-\bar{p}_{OD})_{x_D=1} \quad (\text{B.51})$$

Sustituyendo ecuación B.51 en ecuación B.47:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{OD}}{dy_D^2} - \frac{\beta_O}{C_{RD} y_{eD}} (-\bar{p}_{ID})_{x_D=1} - u \bar{p}_{ID} = 0 \quad (\text{B.52})$$

Utilizando la suposición de pseudofunción para indicar que la presión del depósito interno no es una función de la distancia en la dirección x ($\bar{p}_{ID} \neq f(x_D)$), la ecuación B.52 puede simplificarse a:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{ID}}{dy_D^2} - \bar{p}_{ID} \left[\frac{\beta_O}{C_{RD} y_{eD}} + u \right] = 0 \quad (\text{B.53})$$

Donde

$$\alpha_O = \frac{\beta_O}{C_{RD} y_{eD}} + u \quad (\text{B.54})$$

Entonces, la ecuación B.53 se reduce a:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{ID}}{dy_D^2} - \alpha_O \bar{p}_{ID} = 0 \quad (\text{B.55})$$

La solución general está dada por:

$$\bar{p}_{ID} = A \exp\left(-\sqrt{\alpha_O} y_D\right) + B \exp\left(\sqrt{\alpha_O} y_D\right) \quad (\text{B.56})$$

Condición de frontera externa

$$\left(\frac{d\bar{p}_{ID}}{dy_D}\right)_{y_D=y_{eD}} = 0 \quad (\text{B.57})$$

Derivando la ecuación B.56 y utilizando la condición de frontera externa, resulta:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{ID}}{dy_D}\right)_{y_D=y_{eD}} = -\sqrt{\alpha_O} A \exp\left(-\sqrt{\alpha_O} y_{eD}\right) + \sqrt{\alpha_O} B \exp\left(\sqrt{\alpha_O} y_{eD}\right) = 0 \quad (\text{B.58})$$

Despejando B :

$$B = A \exp\left(-2\sqrt{\alpha_O} y_{eD}\right) \quad (\text{B.59})$$

Sustituyendo ecuación B.59 en B.56, se obtiene

$$\bar{p}_{ID} = A \exp\left(-\sqrt{\alpha_O} y_{eD}\right) \left\{ \exp\left[\sqrt{\alpha_O} (y_{eD} - y_D)\right] + \exp\left[-\sqrt{\alpha_O} (y_{eD} - y_D)\right] \right\} \quad (\text{B.60})$$

Condición de frontera interna

La presión en la frontera entre el depósito interno y la fractura hidráulica debe ser igual:

$$(\bar{p}_{ID})_{y_D=w_D/2} = (\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} \quad (\text{B.61})$$

Sustituyendo ecuación B.60 en ecuación B.61

$$(\bar{p}_{ID})_{y_D=w_D/2} = A \exp(-\sqrt{\alpha_O} y_{eD}) \left\{ \exp[\sqrt{\alpha_O} (y_{eD} - y_D)] + \exp[-\sqrt{\alpha_O} (y_{eD} - y_D)] \right\} = (\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} \quad (\text{B.62})$$

Despejando A

$$A = \frac{(\bar{p}_{ID})_{y_D=w_D/2}}{\exp(-\sqrt{\alpha_O} y_{eD}) \left\{ \exp\left[\sqrt{\alpha_O} \left(y_{eD} - \frac{w_D}{2}\right)\right] + \exp\left[-\sqrt{\alpha_O} \left(y_{eD} - \frac{w_D}{2}\right)\right] \right\}} \quad (\text{B.63})$$

Finalmente, sustituyendo A en ecuación B.60, resulta:

$$(\bar{p}_{ID})_{y_D=w_D/2} = (\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} \frac{\cosh\left[\sqrt{\alpha_O} (y_{eD} - y_D)\right]}{\cosh\left[\sqrt{\alpha_O} \left(y_{eD} - \frac{w_D}{2}\right)\right]} \quad (\text{B.64})$$

4. Solución analítica fractura hidráulica

Partiendo de la ecuación B.1, para la fractura hidráulica se tiene que:

$$k_F \nabla^2 p_F = \phi_F c_{tF} \mu \frac{\partial \Delta p_F}{\partial t} \quad (\text{B.65})$$

De acuerdo a la figura 1, el flujo desde el yacimiento interno a la fractura hidráulica, es asumido lineal en la dirección y y el flujo desde la fractura hidráulica al pozo, también se asume lineal, pero en la dirección x , por tanto, la ecuación B.65 debe ser reescrita en 2 dimensiones:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial y^2} = \frac{\phi_F c_{tF} \mu}{k_F} \frac{\partial \Delta p_F}{\partial t} \quad (\text{B.66})$$

Integrando

$$\int_0^{w_F/2} \frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial x^2} \partial y + \int_0^{w_F/2} \frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial y^2} \partial y = \frac{\phi_F c_{tF} \mu}{k_F} \int_0^{w_F/2} \frac{\partial \Delta p_F}{\partial t} \partial y \quad (\text{B.67})$$

Utilizando las siguientes asunciones de pseudofunción:

$$\frac{\partial p_F}{\partial x} \neq f(y) \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{\partial p_F}{\partial t} \neq f(y) \quad (\text{B.69})$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial x^2} + \frac{2}{w_F} \left(\frac{\partial \Delta p_F}{\partial y} \right)_{y=w_F/2} = \frac{\phi_F c_{tF} \mu}{k_F} \frac{\partial \Delta p_F}{\partial t} \quad (\text{B.70})$$

Condición de flujo en la frontera de fractura hidráulica y yacimiento interno

$$k_F h \left(\frac{\partial \Delta p_F}{\partial y} \right)_{y=w_F/2} = k_I h \left(\frac{\partial \Delta p_I}{\partial y} \right)_{y=w_F/2} \quad (\text{B.71})$$

La ecuación 59 puede modificarse a:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_F}{\partial x^2} + \frac{2}{w_F} \frac{k_I}{k_F} \left(\frac{\partial \Delta p_I}{\partial y} \right)_{y=w_F/2} = \frac{\phi_F c_{IF} \mu}{k_F} \frac{\partial \Delta p_F}{\partial t} \quad (\text{B.72})$$

Convirtiendo en términos adimensionales:

$$\frac{\partial \Delta p_{FD}}{\partial x_D^2} + \frac{2k_I x_F}{k_F w_F} \left(\frac{\partial p_I}{\partial y_D} \right)_{y_D=w_D/2} = \frac{\phi_F c_{IF} \mu k_I}{\phi_I c_{II} \mu k_F} \frac{\partial p_{FD}}{\partial t_D} \quad (\text{B.73})$$

Recordando las definiciones de C_{FD} y η_{FD} , y aplicando la transformada de Laplace, resulta:

$$\frac{d\bar{p}_{FD}}{dx_D^2} + \frac{2}{C_{FD}} \left(\frac{d\bar{p}_{ID}}{dy_D} \right)_{y_D=w_D/2} - \frac{S}{\eta_{FD}} \bar{p}_{FD} = 0 \quad (\text{B.74})$$

Recordando la ecuación B.64 que relaciona la presión en la frontera entre la fractura hidráulica y el yacimiento interno, y tomando la derivada del depósito interno, se tiene:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{ID}}{dy_D} \right)_{y_D=w_D/2} = -(\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} \sqrt{\alpha_O} \tanh \left[\sqrt{\alpha_O} \left(y_{eD} - \frac{w_D}{2} \right) \right] \quad (\text{B.75})$$

Definiendo el siguiente parámetro:

$$\beta_F = \sqrt{\alpha_O} \tanh \left[\sqrt{\alpha_O} \left(y_{eD} - \frac{w_D}{2} \right) \right] \quad (\text{B.76})$$

Resulta en:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{ID}}{dy_D} \right)_{y_D=w_D/2} = -\beta_F (\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} \quad (\text{B.77})$$

Sustituyendo ecuación B.77 en ecuación B.74, resulta:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{FD}}{dx_D^2} + \frac{2\beta_F}{C_{FD}} (\bar{p}_{FD})_{y_D=w_D/2} - \frac{S}{\eta_{FD}} \bar{p}_{FD} = 0 \quad (\text{B.78})$$

Utilizando la suposición de pseudofunción para afirmar que la presión de la fractura hidráulica no es una función de la distancia en la dirección y , se obtiene:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{FD}}{dx_D^2} - \bar{p}_{FD} \left[\frac{2\beta_F}{C_{FD}} - \frac{S}{\eta_{FD}} \right] = 0 \quad (\text{B.79})$$

Donde:

$$\alpha_F = \frac{2\beta_F}{C_{FD}} - \frac{S}{\eta_{FD}} \quad (\text{B.80})$$

Entonces:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{FD}}{dx_D^2} - \alpha_F \bar{p}_{FD} = 0 \quad (\text{B.81})$$

La solución general para la ecuación 70 está dada por:

$$\bar{p}_{FD} = A \exp(-\sqrt{\alpha_F} x_D) + B \exp(\sqrt{\alpha_F} x_D) \quad (\text{B.82})$$

Condición de frontera externa (fractura hidráulica-yacimiento)

La frontera externa de la fractura hidráulica es el tope de la fractura donde no hay flujo a través de la punta de esta, por lo tanto se tiene que:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{FD}}{dx_D}\right)_{x_D=1} = 0 \quad (\text{B.83})$$

Reemplazando condición de frontera externa en ecuación B.82, resulta:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{FD}}{dx_D}\right)_{x_D=1} = -\sqrt{\alpha_F} A \exp(-\sqrt{\alpha_F}) + \sqrt{\alpha_F} B \exp(\sqrt{\alpha_F}) \quad (\text{B.84})$$

Despejando A

$$A = B \exp(2\sqrt{\alpha_F}) \quad (\text{B.85})$$

Reemplazando A en ecuación B.82:

$$\bar{p}_{FD} = B \exp\left[\sqrt{\alpha_F}(2-x_D)\right] + B \exp(\sqrt{\alpha_F} x_D) \quad (\text{B.86})$$

Condición de frontera interna (fractura hidráulica-pozo)

Para el flujo de fluido desde la fractura hidráulica al pozo se utiliza la ley de Darcy:

$$v = \frac{k_F}{\mu} \nabla p_F \quad (\text{B.87})$$

De acuerdo a la figura 1, se considera flujo lineal desde la fractura hidráulica al pozo en la dirección x , por lo tanto:

$$v_x = -\frac{k_F}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta p_F}{\partial x}\right)_{x=0} \quad (\text{B.88})$$

Obsérvese que en la superficie del pozo, el límite interno de la fractura hidráulica, está representada por un plano rectangular en $x_D=1$, con dimensiones iguales a la anchura y altura de la fractura. El caudal que pasa a través de la superficie del pozo puede calcularse evaluando la integral de la ecuación B.88, como sigue:

$$\int_0^{w_F/2} \int_0^{w_F/2} v_x \partial z \partial y = -\frac{k_F}{\mu} \int_0^{w_F/2} \int_0^{w_F/2} \left(\frac{\partial \Delta p_F}{\partial x}\right)_{x=0} \partial z \partial y \quad (\text{B.89})$$

Debido a que el caudal total que cruza la superficie del pozo es la suma de los flujos procedentes de ambos lados del plano rectangular que representa el pozo y sólo se modela un cuarto de la fractura, debido a la simetría, la ecuación B.89 puede relacionarse con la rata de flujo de fractura, así:

$$\frac{q_F}{8} = -\frac{k_F}{\mu} \frac{w_F}{2} \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \Delta p_F}{\partial x}\right)_{x=0} \quad (\text{B.90})$$

Como premisa importante, para determinar la rata de flujo individual de fractura, es importante aclarar que existe una distribución uniforme de cierta cantidad n_F de idénticas fracturas a lo largo del pozo horizontal, de esta manera $q_F = q/n_F$.

Convirtiendo ecuación B.90 a forma adimensional:

$$1 = -\frac{k_F w_F B}{\pi k_I x_F} \left(\frac{\partial p_{FD}}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} \quad (\text{B.91})$$

Recordando definición de conductividad de fractura adimensional, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial p_{FD}}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} = -\frac{\pi}{C_{FD}} \quad (\text{B.92})$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{FD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=0} = -\frac{\pi}{SC_{FD}} \quad (\text{B.93})$$

Sustituyendo ecuación B.86 en B.93, resulta:

$$\left(\frac{d\bar{p}_{FD}}{\partial x_D} \right)_{x_D=0} = -\sqrt{\alpha_F} B \exp(2\sqrt{\alpha_F}) + \sqrt{\alpha_F} B = -\frac{\pi}{SC_{FD}} \quad (\text{B.94})$$

Despejando B :

$$B = \frac{\pi}{SC_{FD} \sqrt{\alpha_F} [1 - \exp(2\sqrt{\alpha_F})]} \quad (\text{B.95})$$

Finalmente, sustituyendo B en ecuación B.86, se obtiene:

$$\bar{p}_{FD} = -\frac{\pi}{SC_{FD} \sqrt{\alpha_F}} \frac{\cosh[\sqrt{\alpha_F}(1-x_D)]}{\sinh(\sqrt{\alpha_F})} \quad (\text{B.96})$$

Debido a la continuidad de la presión en la interface entre la fractura hidráulica y el pozo, la presión adimensional del pozo se escribe fácilmente a partir de la ecuación B.96 como sigue:

$$\bar{p}_{wD} = (\bar{p}_{FD})_{x_D=0} = -\frac{\pi}{SC_{FD} \sqrt{\alpha_F} \tanh(\sqrt{\alpha_F})} \quad (\text{B.97})$$