



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 288 de marzo del 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El suscrito:

Jhonnathan Daniel Beltrán Galindo, con C.C. No. 1.075.308.119. Autor de la tesis y/o trabajo de grado titulado Complejidad en la dinámica de un modelo depredador-presa, tipo Leslie con respuesta funcional no monótona, efecto Allee en las presas y alimento alternativo para los depredadores. Presentado y aprobado en el año 2022 como requisito para optar al título de Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Jhonnathan Daniel Beltrán Galindo

Firma: _____

Jhonathan Beltran

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Complejidad en la dinámica de un modelo depredador-presa, tipo Leslie con respuesta funcional no monótona, efecto Allee en las presas y alimento alternativo para los depredadores.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Beltrán Galindo	Jhonnathan Daniel

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cortes Garcia	Christian Camilo

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2022 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 107



TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas___ Fotografías x Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros x

SOFTWARE:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Complejidad	Complexity	6. Sistema dinámico	Dynamic system
2. Sistema complejo	Complex system	7. Modelo matemático	Mathematical model
3. Tiempo	Time	8. Dinámica poblacional	Population dynamics
4. Estabilidad	Stability	9. Interdisciplinariedad	Interdisciplinarity
5. Depredación	Predation	10. No linealidad	<u>Nonlinearity</u>

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se realiza un análisis dinámico a un modelo depredador-presa de tipo Leslie-Gower, el cual es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas y no lineales, con respuesta funcional de los depredadores tipo Holling IV, con efecto Allee para las presas y alimento alternativo para los depredadores.

En primera instancia, el análisis es realizado al considerar el efecto Allee fuerte contrastado con el efecto Allee débil el cual tiene incidencia en la estabilidad y cantidad de equilibrios en el sistema. Al realizar alteraciones en los parámetros en ambos modelos se determina el efecto Allee fuerte provoca una extinción de las presas, a diferencia del efecto Allee débil.



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work, a dynamic analysis is carried out on a predator-prey model of the Leslie-Gower type, which is described by a system of ordinary, autonomous and non-linear differential equations, with functional response of Holling IV predators, with Allee effect for prey and alternative food for predators.

In the first instance, the analysis is performed by considering the strong Allee effect contrasted with the weak Allee effect which has an impact on the stability and number of equilibria in the system. By making alterations in the parameters in both models, the strong Allee effect causes an extension of the dams is determined, unlike the weak Allee effect.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: Jasmidt Vera C.

Firma: *Jasmidt Vera C*

Nombre Jurado: Edinson Oswaldo Delgado Rivas

Firma: *Edinson Oswaldo Delgado Rivas*

Universidad Surcolombiana

Complejidad en la dinámica de un modelo
depredador-presa, tipo Leslie con respuesta funcional no
monótona, efecto Allee en las presas y alimento alternativo
para los depredadores.

TESIS DE MAESTRÍA

Jhonnathan Daniel Beltran Galindo

ASESOR:

MSc. Christian Camilo Cortes Garcia

Universidad Surcolombiana.

Facultad De Ciencias Exactas y Naturales.

Maestría En Estudios Interdisciplinarios De La Complejidad

Neiva, Huila

2021

Universidad Surcolombiana

Complejidad en la dinámica de un modelo depredador-presa, tipo Leslie con respuesta funcional no monótona, efecto Allee en las presas y alimento alternativo para los depredadores.

TESIS DE MAESTRÍA

Jhonnathan Daniel Beltran Galindo

Código: 20201190003

Disertación presentada para optar por el título de
Magister en Estudios Interdisciplinarios de la
Complejidad

ASESOR:

MSc. Christian Camilo Cortes Garcia

Universidad Surcolombiana.

Facultad De Ciencias Exactas y Naturales.

Programa Maestria En Estudios Interdisciplinarios De
La Complejidad

Neiva, Huila

2021

AGRADECIMIENTOS

Primero a Dios, por las múltiples bendiciones que me ha concedido a lo largo de mi vida. Mi madre Maria Enith Galindo y mi padre José Orlando Beltran, por sus constantes motivaciones, por su esfuerzos para darme educación y por esos valores inculcados. También, agradecer a mi tía Diana Quiza, por el apoyo brindado y sus buenos consejos. Mis hermanos y familia, que son mi motivación para seguir estudiando.

Quiero agradecer al profesor Francisco Javier Reyes, por la paciencia y la ayuda brindada para que este proyecto tuviera un desarrollo optimo, pues creo que este proyecto tiene sentido por sus recomendaciones. A mi asesor, Christian Cortez y a todos los profesores que hacen parte de esta hermosa maestría.

Agradecer a todos mis amigos y las personas que aportaron en mi formación como persona y profesional. Por ultimo, agradecer a la Universidad Surcolombiana por la beca que me ofrecieron para poder lograr este titulo, pues, para nadie es un secreto que nuestro bello país Colombia, los estudios de posgrado son costosos y de difícil acceso.

RESUMEN

En este trabajo se realiza un análisis dinámico a un modelo depredador-presa de tipo Leslie-Gower, el cual es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas y no lineales, con respuesta funcional de los depredadores tipo Holling IV, con efecto Allee para las presas y alimento alternativo para los depredadores.

En primera instancia, el análisis es realizado al considerar el efecto Allee fuerte contrastado con el efecto Allee débil el cual tiene incidencia en la estabilidad y cantidad de equilibrios en el sistema. Al realizar alteraciones en los parámetros en ambos modelos se determina el efecto Allee fuerte provoca una extinción de las presas, a diferencia del efecto Allee débil.

Palabras claves: Complejidad, sistema complejo, sistema dinámico, modelo matemático, dinámica poblacional, interdisciplinariedad, tiempo, estabilidad, no linealidad y depredación.

ABSTRACT

In this work, a dynamic analysis is carried out on a predator-prey model of the Leslie-Gower type, which is described by a system of ordinary, autonomous and non-linear differential equations, with functional response of Holling IV predators, with Allee effect for prey and alternative food for predators.

In the first instance, the analysis is performed by considering the strong Allee effect contrasted with the weak Allee effect which has an impact on the stability and number of equilibria in the system. By making alterations in the parameters in both models, the strong Allee effect causes an extension of the dams is determined, unlike the weak Allee effect.

Keywords: complexity, complex system, dynamic system, mathematical model, population dynamics, interdisciplinarity, time, stability, nonlinearity and predation.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	11
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	13
2.1. Descripción del problema	13
2.2. Sistematización del problema	14
2.3. Enunciado del problema	15
3. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN	17
3.1. Antecedentes	17
3.1.1. Antecedentes nacionales.	17
3.1.2. Antecedentes internacionales	18
3.2. Justificación	21
4. FUNDAMENTO TEÓRICO	23
4.1. Ciencias de la Complejidad	23
4.2. Sistemas dinámicos complejos	26
4.3. PRELIMINARES EN SISTEMAS DINÁMICOS	27
4.3.1. Operador de evolución	28
4.3.2. Definición de un sistema dinámico	28
4.3.3. Existencia y unicidad	30
4.3.4. Equivalencia topológica	31
4.3.5. Estabilidad	32
4.3.6. Variedades estables e inestables	33
4.3.7. Método del Blowing - Up en \mathbb{R}^2	35
4.3.8. La esfera de Poincaré y el comportamiento en el infinito	37
4.4. DINÁMICA DE POBLACIONES	41

4.4.1.	Modelos poblacionales no lineales continuos	41
4.4.2.	El efecto Allee	43
4.4.3.	Modelos depredador-presa	46
4.4.4.	Repuesta funcional de los depredadores	48
4.4.5.	Modelo de tipo Leslie-Gower	52
5.	OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN	55
5.1.	Objetivo general:	55
5.2.	Objetivos específicos:	55
6.	METODOLOGÍA	57
6.1.	Enfoque y tipo de investigación	57
6.2.	Estrategias metodológicas	58
6.3.	Herramientas de investigación	59
7.	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	61
7.1.	Modelo uno (Efecto Allee fuerte)	61
7.1.1.	El modelo a estudiar	61
7.1.2.	Resultados principales	65
7.1.3.	Naturaleza de los puntos de equilibrio	68
7.1.4.	Algunas simulaciones.	72
7.2.	Modelo uno (Efecto Allee débil)	79
7.2.1.	Modelo a estudiar	79
7.2.2.	Resultados principales	81
7.2.3.	Naturaleza de los puntos de equilibrio	83
7.2.4.	Algunas simulaciones	89
8.	CONCLUSIONES	97
9.	RECOMENDACIONES	99
	BIBLIOGRAFÍA	99
	ANEXOS	106

Índice de figuras

4.1. Esquema actual de las ciencias de la complejidad.	24
4.2. Lógicas no clásicas.	26
4.3. Las variedades estables, inestables y central de un punto de equilibrio. . .	35
4.4. Blowing-Up y Blowing-Down.	37
4.5. Proyección central del hemisferio superior de S^2 sobre el plano (x, y)	38
4.6. Corte transversal de la proyección central del hemisferio superior.	39
4.7. Crecimiento exponencial	42
4.8. Crecimiento logístico	43
4.9. Función descompensada o comportamiento Allee	46
4.10. Comportamiento cualitativo de las soluciones	47
4.11. Repuesta funcional de tipo Holling I	49
4.12. Repuesta funcional de tipo Holling II	50
4.13. Repuesta funcional de tipo Holling III	51
4.14. Repuesta funcional de tipo Holling IV	52
7.1. La región de invarianza Λ (Efecto Allee fuerte).	66
7.2. Simulación con dos singularidades	73
7.3. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay dos singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee fuerte).	74
7.4. Simulación con una singularidades	75
7.5. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay una singularidad dentro de la región de invarianza(Efecto Allee fuerte).	76
7.6. Simulación sin singularidad	77

7.7. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando no hay singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee fuerte).	78
7.8. La región de Invarianza Λ (Efecto Allee débil)	81
7.9. Simulación con tres singularidades	90
7.10. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay tres singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee débil).	91
7.11. Simulación con dos singularidades	92
7.12. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay dos singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee débil).	93
7.13. Simulación con una singularidad	94
7.14. Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay una singularidad dentro de la región de invarianza(Efecto Allee débil).	95

Índice de cuadros

3.1. Antecedente nacional	17
3.2. Antecedente Internacional uno	18
3.3. Antecedente Internacional dos	19
6.1. Herramientas telemáticas utilizadas.	59

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Unas de las preocupaciones de por los ecologistas es describir matemáticamente la interacción entre presas y depredadores, que viven en un mismo entorno para determinar condiciones que eviten la extinción de las presas frente a su consumo por parte de los depredadores. Es por ello, que a lo largo del tiempo se han propuesto diferentes alternativas para modelar estas interacciones.

Por tanto, en este trabajo de investigación se analiza un modelo depredador- presa que esta descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas no-lineales, teniendo en cuenta las siguientes características:

1. La función de crecimiento de los depredadores es de tipo logístico [23] [44].
2. La respuesta funcional o tasa de consumo de los depredadores es de tipo Holling IV generalizado [2] [20] [39] .
3. Los depredadores tienen una comida alternativa, cuando escasea su presa favorita o cuando la presa pone resistencia a ser consumida [3] [6] .
4. El crecimiento de las presas es afectada por el efecto Allee.

Los modelos tipo Leslie-Gower [23] [35] tienen la característica de que la ecuación del tamaño de la población de depredadores es de tipo logístico, la capacidad de carga del ambiente es una función que depende de la cantidad de presas disponibles, es decir, la capacidad de carga es proporcional a la abundancia de presas [3].

La respuesta funcional de los depredadores o función de la tasa de consumo, describe la cantidad de presas que puede consumir un depredador en una unidad de tiempo [8] [5]. Una cuestión de interés en el ámbito de la dinámica poblacional y en varios modelos depredador-presa considerados en ecología matemática, es que la respuesta funcional de los depredadores a la densidad de presas se supone que es monótona creciente [39] [3]. En esta investigación, la respuesta funcional es no-monótona, que corresponde a Holling tipo IV [2] y esta descrita por la función

$$h(x) = \frac{qx^2}{x^2 - bx + a}$$

La función $h(x)$ representa una respuesta funcional no-monótona que describe un comportamiento antidepredador o también denominado formación de grupos de defensa. Los grupos de defensa es un término usado para describir el fenómeno por el cual los depredadores disminuyen, o incluso se evitan por completo, debido a la mayor capacidad de la presa para defenderse mejor o cubrir a los más débiles cuando su número es lo suficientemente grande.

En este trabajo, consideramos que la capacidad de carga del medio ambiente del depredador es representada por la función $K_y = nx$, pero no obstante, en caso de escasez crítica, en algunas especies de depredadores pueden cambiar a otras comidas disponibles. Esta habilidad se puede modelar agregando una constante positiva K_y , siendo descrito ahora por $K_y = nx + c$ [3] [6]. Implicando que el depredador es generalista, ya que busca un alimento alternativo en ausencia de su presa favorita.

El efecto alle en ciencias ecológicas [14] [15] [29], se puede describir por diversas expresiones matemáticas [11]. Este se refiere a una disminución en la condición física por individuo cuando el tamaño de la población aumenta a niveles muy bajos [39] [11].

El problema estudio es describir el comportamiento del modelo y establecer si las especies se extinguen o no. Estos resultados son bastante significativos para el análisis de la mayoría de los modelos ecológicos complejos, facilitando así la comprensión de muchos fenómenos del mundo real en la naturaleza.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1. Descripción del problema

Cuando la incertidumbre amenaza la vida, el modelamiento matemático es capaz de proporcionar suficiente información para disminuir significativamente los niveles de incertidumbre y consecuentemente generar inteligencia de datos que orienten adecuadamente a nivel de tomar decisiones, de tal forma que el proceso de generar acciones pertinentes sean argumentadas, sustentadas y oportunas.

Es por esto que muchos fenómenos en la actualidad intentan ser modelados para prevenir ciertas amenazas que atentan contra la vida, un claro ejemplo es el mas reciente cambio que se empezó a gestar de manera imperceptible en diciembre del 2019, cuando fue identificado en la ciudad de Wuhan (provincia de Hubei,China) un brote de neumonía que no respondía a tratamientos convencionales y que alarmantemente llevaba a la muerte a un alto porcentajes de enfermos. A raíz de este brote identificado como SARS-Cov-2, una nueva cepa del corona-virus, se empezaron a realizar modelamientos matemáticos para prevenir la propagación y tomar decisiones asertivas para el control de este virus (ver [36]).

Es claro aclarar que las ciencias de la complejidad no son simplemente ciencias de sistema matemáticos o modelamiento matemáticos. Pues la dinámica hace parte de la mecánica clásica y es un caso particular de la teoría de la relatividad y de la mecánica

cuántica. Por el contrario, el tipo de fenómenos, sistemas y comportamientos que interesan y que son parte de las ciencias de la complejidad son aquellos que se caracterizan por ser de complejidad creciente (Maldonado,2008). Esto es exactamente el caso de las matemáticas de la complejidad.

Puntualmente Maldonado dice, que las matemáticas de la complejidad responden en realidad a una simple ecuación [28]:

$$\textit{Matematica} + \textit{tiempo} = \textit{Complejidad}$$

Basándonos en esta ecuación, podemos ver que los modelos presa-depredador son modelos de alta validez biológica y de complejidad creciente. Pues con el paso del tiempo ha logrado adquirir mayor complejidad debido a algunas modificaciones que buscan hacerlo mas realista, es por ello, que esta investigación se involucro un nueva modificación la cual es el alimento alternativo para los depredadores y una respuesta funcional Holling tipo IV. El objetivo es analizar el comportamiento de estas dos especies a lo largo del tiempo con las modificaciones realizadas y poder predecir ciertos comportamientos dado unas condiciones iniciales. Además, realizar acciones pertinentes en la conservación de ambas especies y así logrando la no extinción de estas.

2.2. Sistematización del problema

El principal problema en la relación de depredadores y presas, es la existencia de ambas especies a lo largo del tiempo, es por ello, que se realizaron las siguientes preguntas:

- ¿ Cuales deben ser las condiciones iniciales para que las especies existan, dado unos parámetros?
- ¿ Cual es el comportamiento del sistema cuando el efecto Allee en las presas es débil?
- ¿ Puede sobrevivir los depredadores a lo largo del tiempo cuando cuentan con un alimento alternativo aparte de su presa favorita?
- ¿ Como contribuir en una población de depredadores-presa para que ambas especies puedan coexistir, sin importar si el efecto Allee es fuerte o débil en las presas?

- ¿ Cual es la metodología apropiada para el estudio de este modelo?
- ¿ Como realizar un aporte al estudio de modelos depredador-presa?

2.3. Enunciado del problema

Dado que existen especies que están interrelacionadas de forma depredador-presa en los diferentes ecosistemas, es decir, una sirve de alimento para la otra. Estas interacciones son importantes estudiar para conocer posibles comportamientos de las especies, pues bien, en esta investigación nos enfocaremos en una población de presas que son afectadas por un efecto Allee y ademas, los depredadores cuentan con un alimento alternativo cuando su presa favorita escasea. Por todo lo anterior, se formula una pregunta de investigación para conocer los distintos comportamientos de estas dos especies, una es el depredador y la otra la presa.

- ¿Cuál es el comportamiento de un modelo depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional Holling no monótona, efecto Allee en las presas y alimento alternativo para los depredadores ?

Capítulo 3

ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

3.1. Antecedentes

Para el análisis del modelo a estudiar existen diversas investigaciones relacionadas y de gran proximidad, que nos aportaron al desarrollo de nuestra investigación. A continuación, se presentan algunas investigaciones que nos ayudaron a contextualizar el problema.

3.1.1. Antecedentes nacionales.

Autor(es): Reyes Bahamón, F. (2017). Sobre la dinámica de algunos modelos depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona y efecto Allee en las presas [38].

Cuadro 3.1: Antecedente nacional

Modelo estudiado	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right), \end{cases}$
Descripción	Este trabajo de investigación es de gran vitalidad para llevar a cabo el análisis del modelo a estudiar, ya que aporta de forma significativa al desarrollo de este, aquí podemos evidenciar un gran parecido al modelo a estudiar, la diferencia es que en este trabajo realizado no involucra el parámetro c , el cual representa el tamaño de alimento alternativo para los depredadores.

fuentes: Elaboración propia (2022)

3.1.2. Antecedentes internacionales

1. Autor(es):Tintinago-Ruiz, P. C., Gallego-Berrío, L. M., y González-Olivares, E. (2019).Una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y alimento alternativo para los depredadores. Seleccionaciones Matemáticas, 6(02), 204-216.

Cuadro 3.2: Antecedente Internacional uno

Modelo estudiado	{	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qyx}{x^2 + bx + a}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right). \end{cases}$
------------------	---	--

Descripción

En este trabajo, se analiza un modelo de depredador-presa del tipo Leslie-Gower, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) considerando dos aspectos: la presa se defiende de la depredación, formando grupo de defensa, y los depredadores disponen un alimento alternativo, cuando su alimento favorito escasea. Por lo tanto, se asume una respuesta funcional racional de Holling tipo IV y una modificación de la capacidad de carga de los depredadores para describir estos fenómenos. Determinamos las condiciones en el espacio de parámetros para la existencia de los equilibrios y la naturaleza de cada uno de ellos.

fuelle: Elaboración propia (2022)

2. Autor(es):González-Olivares, E., Valenzuela-Figueroa, S., y Rojas-Palma, A. (2021). Influencia del efecto Allee débil en las presas en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea. Revista De Matemática: Teoría Y Aplicaciones, 29(1), 105-138.

Cuadro 3.3: Antecedente Internacional dos

Modelo estudiado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qx^2y}{x^2 + a^2}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right), \end{cases}$$

Descripción

Este trabajo hay una gran familiarización con el modelo a analizar en la investigación, la única diferencia es la respuesta funcional Holling , pues en la investigación que voy abordar es también de respuesta funcional Holling tipo IV pero modificada, involucrando el parámetro b, quien es la tasa de saturación de depredadores, es decir, la cantidad de presas es tan alta que los depredadores no pueden consumirlas todas.

fuente: Elaboración propia (2022)

3. Autor(es):Palma, A. M. (2009). Control óptimo aplicado a modelos continuos para el manejo de recursos renovables. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Descripción: En este trabajo podemos encontrar una introducción general a la modelización matemática en Ecología de poblaciones y a la Teoría de Control Óptimo aplicada al manejo de recursos naturales, en particular de pesquerías. En este, se ha dividido el trabajo en tres partes, las cuales están relacionadas en función de otorgar al lector las herramientas matemáticas necesarias para el estudio de problemáticas Bio-económicas.

La primera parte se enfoca al estudio sobre Sistemas dinámicos, Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias y los conceptos básicos de la Teoría de bifurcaciones para luego centrarse en la Teoría de control óptimo, teniendo el problema

de optimización y los conceptos de Control, Observación y el Principio Bang-Bang.

La segunda parte entrega una introducción general a la Modelación Dinámica con Ecuaciones Diferenciales y Modelos no lineales de Interacción de Poblaciones. Luego, se describe el fenómeno biológico conocido como Efecto Allee y se analizan distintas propuestas sobre su modelación.

La parte final de este escrito presenta tres modelos de pesquerías de acceso abierto, en los cuales se realiza un completo análisis de estabilidad. A partir de los resultados, se plantean distintos problemas de control óptimo en cada caso, con el fin de determinar estrategias óptimas de manejo en cada pesquería, entregando ejemplos numéricos y simulaciones.

3.2. Justificación

El presente trabajo de investigación propone un modelo complejo de depredador-presa que contiene unas características nuevas a los modelos estudiados anteriormente por otros autores, pues este modelo incorpora un nuevo parámetro el cual es el alimento alternativo para los depredadores y una respuesta funcional Holling tipo IV. Sé sabe, que el fin de realizar modelamientos es llegar aproximaciones de la realidad, es por ello que este modelo al involucrar estas nuevas características se aproxima mas a la realidad de un ecosistema, puesto que se puede estudiar problemas de control de especies, la cual una sea el alimento para la otra , es decir, caso de depredación contra presas.

La importancia de trabajar sobre modelos de este tipo es que se pueden llegar a varias soluciones, pues Maldonado y Gómez (2010) han dicho que las ciencias e ingenierías de los sistemas complejos, tratan de construir un modelo del problema, tan preciso como sea posible, para no obtener una si no varias soluciones, y es lo que se busco lograr aquí, pues bien, dependiendo de la variación de los parámetros podemos llegar a varias conclusiones.

Por ello, esta propuesta de investigación centra su estudio en analizar el comportamiento de dos especies la cual una es depredador y la otra presa, y que cumplan las características de este modelo, para encontrar posibles acciones futuras para que coexistan las dos especies.

Finalmente, el presente trabajo de investigación denominado “ Complejidad en la dinámica de un modelo depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona, efecto allee en las presas y alimento alternativo para los depredadores.” permitirá ser insumo a futuros trabajos de investigación de pregrado y posgrado en el campo de las ciencias de la complejidad y biología matemática.

Capítulo 4

FUNDAMENTO TEÓRICO

4.1. Ciencias de la Complejidad

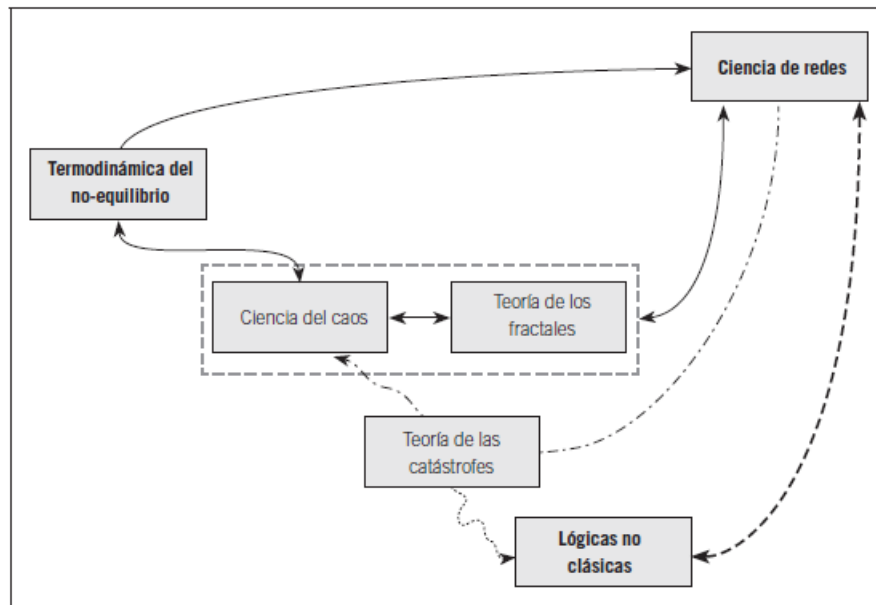
Las ciencias de la complejidad se ocupan mediante argumentos, experimentos, demostraciones, lógicas, modelaciones y simulaciones de las transiciones del orden/desorden y de como las relaciones y las dinámicas interiores de un sistema generan caos, inestabilidades, fluctuaciones e incertidumbres permitiendo el surgimiento de un nuevo orden (Maldonado y Gómez,2010).

Parte en primer lugar de la premisa que los sistemas complejos son todos aquellos sistemas abiertos que están en constante interacción con su entorno y lo cual le atribuye información, materia y energía (Maldonado y Gómez,2010).

También, los sistemas complejos son aquellos que no pueden ser explicados o comprendidos por vía deductiva ni tampoco con el recurso a cualquier clase de estadística. Sino por el estudio de las relaciones entre los elementos que por su diversidad e inestabilidad pueden generar vacíos y ruidos al interior de la estructura pero que de ninguna manera detienen su proceso evolutivo no lineal. Lo que nos lleva a decir que los sistemas complejos son, en rigor, fenómenos, sistemas o comportamientos de complejidad creciente, es decir, son dinámicos, variables, no lineales y totalmente impredecibles al responder de manera constante a turbulencias y caos de su entorno (Maldonado y Gómez,2010).

En las ciencias de la complejidad se trabaja a partir de conceptos de emergencia como

elementos dinamizador por encima de la casualidad que es propio de los enfoques sistemáticos, dado que el pensamiento sistémico plantea un cruce o una integración entre disciplinas y ciencias diferentes, y esta integración se daría justamente en el marco de la teoría general de sistemas o de las aproximaciones sistémicas. Así mismo y cronológicamente, las ciencias de la complejidad son:



fuentes: tomada de (Maldonado y Gómez,2010)

Figura 4.1: Esquema actual de las ciencias de la complejidad.

La termodinámica del no equilibrio según Maldonado (2005), los sistemas alejados del equilibrio son altamente sensibles a las novedades o a las innovaciones, a los eventos de azar, y procesos irreversibles, pues son estas novedades las que generan dinámicas no lineales en dicho sistema. En si, La termodinámica del no equilibrio nos ofrece la visión de un mundo diverso, abierto y pluralista.

La teoría del caos, históricamente, primero teoría y luego ciencia, fue desarrollada por E. Lorenz en los años 1962-1964 (Maldonado y Gómez, 2010), inicialmente, el caos permanece como una teoría de sistema deterministas y luego, su interés se vuelca hacia el caos indeterminista o subcuántico. “ Los sistemas caóticos son altamente sensibles a las condiciones iniciales y responden a la presencia de un atractor. Los tipos de atractores que suelen identificar en el estudio del caos son atractores fijos, el periódico y el atractor extraño” (Maldonado, 2005), en este sentido, la mas mínima fluctuación en el sistema

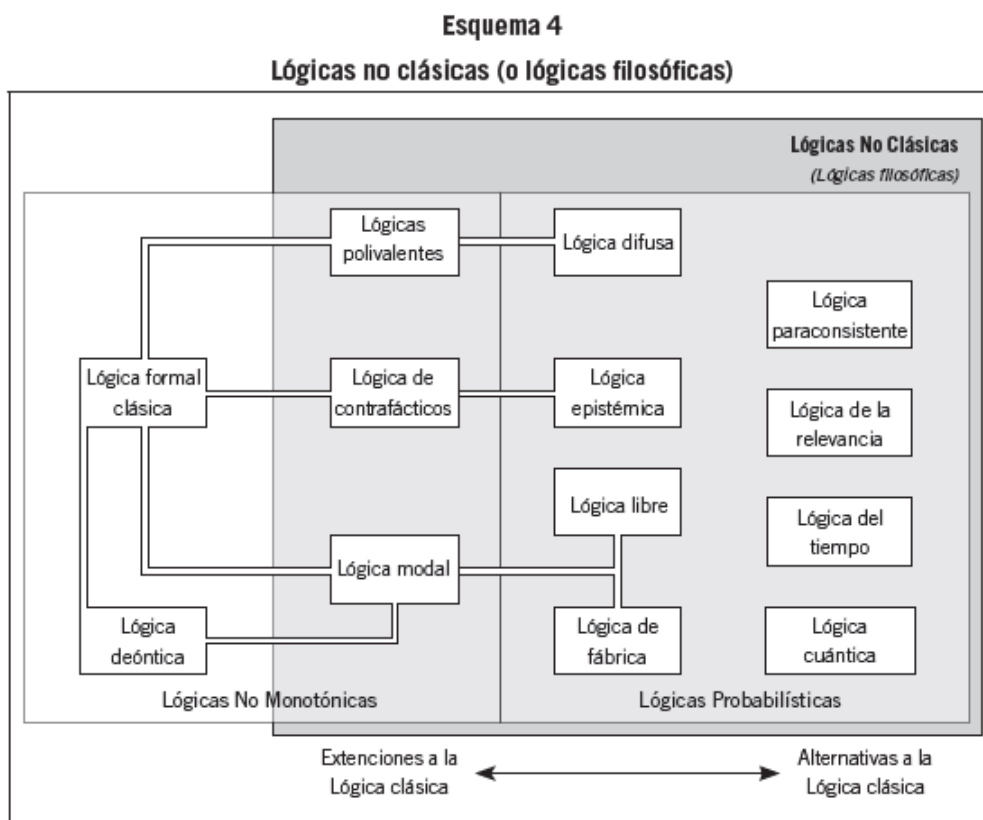
podría provocar un nuevo sistema.

La tercera ciencia de la complejidad, es la geometría fractal, Existe una fuerte implicación recíproca entre el caos y fractales. La razón es que todo atractor extraño tiene en su base una dimensión fractal. Los fractales han resultado de inmensa ayuda en la medición de numerosos sistemas y comportamientos en las diferentes disciplinas. Según Maldonado “ la geometría de fractales consiste en una aplicación de lo infinitesimal a lo finito, y así, la invariancia resultante nos revela un universo pletórico de formas y estructuras, todas sólidamente conectadas entre si, a pesar de su irregularidad y movilidad ” (Maldonado, 2005).

Maldonado explica que sobre la teoría de catástrofes: contra la idea de tipo fiscalista según la cual lo primero es el espacio-tiempo, R. Thom resalta que la entidad primitiva es el fenómeno visto por un observador. Pero, dado que existe o puede existir varios (o muchos) observadores sobre un mismo fenómeno, el problema consiste, en sintetizar las diversas versiones que tenga cada observador. Esta labor de síntesis es la teoría de catástrofes (Maldonado, 2005). Esta ciencia trata de descubrir los cambios de estado que pueden ocurrir en un sistema definido. Algo curioso, es que la teoría de catástrofes desaparece como una teoría matemática.

La ciencia de redes complejas, desarrollada originariamente por D. Watts, L. Barabasi y S. Strogatz entre los años 2001 y 2003, constituye la quinta de las ciencias de la complejidad. Las redes complejas “ redes que presentan ciertas características estadísticas y topológicas” (Martínez, 2018) donde no cualquier respuesta es posible o aceptada, ya que permite ver mas allá de planos generales y poder enfocarse en detalles mas finos.

Por ultimo, las lógicas no clásicas “ En ocasiones debido a que la lógica formal clásica es demasiado rígida, en otras, porque sucede todo lo contrario, y no aporta el rigor suficiente en la comprensión y en la elucidación de las estructuras y modos de racionalidad de la ciencia, de la vida y del mundo en general” (Maldonado, 2012). Por lo tanto, resultan altamente relevantes en el estudio de los sistemas complejos no-lineales. Estan son algunas de las lógicas no clásicas:



fuelle: tomada de (Maldonado y Gómez,2010)

Figura 4.2: Lógicas no clásicas.

4.2. Sistemas dinámicos complejos

Un sistema dinámico complejo es una porción de la realidad seleccionada a partir de la intencionalidad de un observador y que se caracteriza por ser una unidad en donde se identifican elementos y sus interacciones (García, 2006); es un sistema abierto, sin límites claramente definidos, con vínculos e interacciones entre los diferentes elementos que lo conforman integrando una estructura flexible que funciona de acuerdo a su sistema de reconfiguración que es único e irrepetible y que está en constante relación con perturbaciones endógenas y exógenas de diversa escala a partir de las cuales determina su proceso de cambio (García, 2006).

El sistema complejo reacciona a las fluctuaciones bien sea de manera reguladora de tal manera que pueda absorber la fluctuación sin alterar su estructura o puede ante una

fluctuación fuerte reorganizar su estructura e incluso romperse cuando pierde la capacidad de realizar aquello que lo define como sistema. En todo caso el proceso no depende de la fluctuación en sí misma sino de las condiciones de estabilidad particulares del sistema (López y Sánchez, 2000).

Estos sistemas que se denominan complejos suelen tener estructuras disipativa, pues bien, para (Prigogine, 1983) los sistemas que presentan estructura disipativas son aquellos que están próximos al equilibrio y la desorganización, pero mas allá del umbral de inestabilidad la norma es la autoorganización, esto quiere decir, las estructuras disipativas constituyen la aparición de estructuras coherentes, autoorganizadas en sistemas alejados del equilibrio. Aun que la estabilidad de un sistema puede peligrar de varias maneras, por ejemplo, cuando hay mutaciones o intrusos, al principio cuando son pocos, suelen ser eliminados del sistema y se mantendrá su funcionamiento, pero en tal caso, en vez de ser eliminados se reproducen, el sistema adoptara un nuevo modo de funcionamiento a costa de los individuos que no juegan un papel importante. Un claro caso es la dinámica de evolución de una población de depredadores y presas, la aparición de una presa mas hábil en la fuga, habrá un depredador mas eficaz en la captura, constituyen factores de inestabilidad estructural pero a lo largo del tiempo habrá autoorganización.

4.3. PRELIMINARES EN SISTEMAS DINÁMICOS

En esta sección esta destinada a mostrar definiciones y herramientas necesarias de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que sera de importancia para el estudio de los capítulos posteriores, donde se mostrara el estudio del modelo con efecto allee fuerte y efecto allee débil.

También se muestran algunos conceptos de la teoría de los Sistemas Dinámicos Continuos. Las definiciones que se tratan en este apartado al igual que los teoremas que se presentan, están basados en los libros *Ordinary Differential Equations with Applications* de Carmen Chicone [4], *Elements of applied bifurcation theory* de Yuri Kuznetsov [32] y *Differential Equations and Dynamical Systems* de Lawrence Perko [25]. La investigación se centrara en el espacio planar \mathbb{R}^2 .

4.3.1. Operador de evolución

El componente de un sistema dinámico es una ley de evolución que determina el estado de x_t del sistema en el tiempo t , siempre que el estado inicial x_0 sea conocido [42]. La forma más general de especificar la evolución es asumir que para un $t \in T$ un mapa ϕ^t se define en el espacio de estado X .

$$\phi : X \rightarrow X,$$

que transforma un estado inicial $x_0 \in X$ en algún estado $x_t \in X$ en el tiempo t :

$$x_t = \phi^t x_0$$

El mapa ϕ^t es llamado operador de evolución del sistema dinámico. En el caso del tiempo continuo, la familia $\{\phi^t\}_{t \in T}$ de los operadores de evolución se denomina flujo.

Definición 4.3.1 *La función $\phi^t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama un **flujo** del sistema dinámico si $\phi^0 = id$ y $\phi^{t+s} = \phi^t(\phi^s x)$, cuando ambos lados de la ecuación están definidos.*

4.3.2. Definición de un sistema dinámico

Un sistema dinámico se puede definir como la evolución en el tiempo de algún sistema físico, biológico, económico, etc. Usualmente se busca conocer el comportamiento del sistema en el tiempo. En muchos sistemas se puede conocer la evolución, puesto que el movimiento del sistema converge a un equilibrio.

Sin embargo, muchos sistemas interesantes no son regulares. De hecho, en muchos sistemas, condiciones iniciales cercanas pueden tener distintos destinos en un corto tiempo. Ahora bien, daremos una definición formal de un sistema dinámico.

Definición 4.3.2 *Un **sistema dinámico** es una tripleta $\{T, X, \phi^t\}$, donde T es el conjunto del tiempo, X es el espacio de estados, y $\phi^t : X \rightarrow X$, es una familia de operadores de evolución parametrizada por $t \in T$ y satisfaciendo las propiedades.*

1. $\phi^0 : X \rightarrow X$ es la función identidad;
2. $\phi^{t+s} = \phi^t(\phi^s x)$, para todo $t, s \in T$.

Si $T = \mathbb{N}$ o $T = \mathbb{Z}$, el sistema dinámico es discreto, por otro lado, si $T = \mathbb{R}^+$ o $T = \mathbb{R}$, entonces es un sistema dinámico continuo.

Sean $J \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ subconjuntos abiertos, y supongamos que $f : J \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. Una *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) es una ecuación de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad (4.1)$$

Donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota la diferenciación con respecto a la variable independiente t (generalmente una medida de tiempo). La variable dependiente $x = x(t)$ es el vector de estado y λ es el vector de parámetros. Para una terminología conveniente, especialmente cuando nos ocupamos de los componentes de una ecuación diferencial vectorial, diremos que la ecuación 4.1 es un *sistema de ecuaciones diferenciales* de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Si $\lambda \in \Lambda$ es fijo, entonces una solución de la ecuación diferencial 4.1 es una función $\phi^t : J_0 \rightarrow U$, dado por $t \rightarrow \phi^t$, donde J_0 es un subconjunto abierto de J , tal que

$$\frac{d\phi^t}{dt} = f(t, \phi^t, \lambda) \quad (4.3)$$

para todo $t \in J_0$

Definición 4.3.3 Una ecuación diferencial autónoma viene dada por:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k \quad (4.4)$$

es decir, la función f no depende explícitamente de la variable independiente. Si la función f depende explícitamente de t , entonces la ecuación diferencial correspondiente se llama no autónoma

Definición 4.3.4 *Las soluciones de la ecuación diferencial 4.1 se llama trayectorias, curvas de fase o curvas integrales.*

Los objetos geométricos básicos asociados a un sistema dinámico $\{T, X, \phi^t\}$ son sus órbitas en el espacio de estado y el *retrato de fase* compuesto por estas órbitas

Definición 4.3.5 *Una órbita que comienza en x_0 es un subconjunto ordenado del espacio del estado X ,*

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \phi^t x_0, \text{ para todo } t \in T, \text{ tal que } \phi^t x_0 \text{ se define}\}$$

Cuando se utiliza una ecuación diferencial para modelar la evolución de la variable de estado para un proceso físico o biológico, un problema trascendental es determinar los valores futuros de la variable de estado desde su valor inicial. El modelo matemático viene dado por un par de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Donde la segunda ecuación se denomina condición inicial. Si la ecuación diferencial se define como la ecuación 4.1 y $(t_0, x_0) \in J \times U$, entonces el par de ecuaciones se denominan problema de valor inicial (P.V.I.). Por lo tanto, una solución a este problema de valor inicial es sólo una solución ϕ^t de la ecuación diferencial tal que $\phi^{t_0} = x_0$.

Las cuestiones fundamentales de la teoría general de las ecuaciones diferenciales son la existencia y la unicidad con respecto a los parámetros de soluciones de problema de valor inicial. Con relación a esto, tenemos el siguiente resultado:

4.3.3. Existencia y unicidad

Teorema 1 (*Existencia y Unicidad*) *Si $J \subseteq \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ son conjuntos abiertos, $f : J \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable y $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J \times U \times \Lambda$, entonces existen subconjuntos abiertos $J_0 \subseteq J, U_0 \subseteq U, \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ con $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$ y una función $\phi^t : J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(t, s, x, \lambda) \mapsto \phi(t, s, x, \lambda)$ tal que para cada punto $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$, la función $t \mapsto \phi(t, x_1, \lambda_1)$ es la única solución definida en J_0 para el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial 4.1 y la condición inicial $x(t_1) = x_1$.*

Las soluciones de una ecuación diferencial pueden no existir para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, por simplicidad, supongamos que cada solución existe para todo tiempo, en cuyo caso una solución se llama *completa*, y el hecho de que ϕ define un grupo uniparamétrico se expresa mediante la siguiente propiedad adictiva.

$$\phi^{t+s} = \phi^t(\phi^s x)$$

Si la solución comienza en el tiempo cero en el punto x se continua hasta el tiempo s , cuando llegue al punto $\phi^s x$, y si una nueva solución en este punto con tiempo inicial cero se continua hasta el tiempo t , entonces esta nueva solución alcanzará el mismo punto que habría sido alcanzado si la solución original, que comenzó en el tiempo cero en el punto x , se continúa hasta el tiempo $t + s$.

Si $\phi^t : X \rightarrow X$ es un sistema dinámico y $x \in X$, sea $x(t) = \phi^t x$ supongamos que $f : X \rightarrow X$ esta definida por.

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi^t x \right|_{t=0}$$

La igualdad anterior se puede reescribir como $\dot{x} = f(x)$, y así, $x(t)$ o $\phi^t x$ es la curva de solución que satisface la condición inicial $x(0) = x$.

4.3.4. Equivalencia topológica

La equivalencia topológica entre sistemas dinámicos, es un concepto que permite analizar la dinámica de un sistema por medio de otro, cuyo análisis sea mas sencillo, similar al papel que juega las matrices semejantes. Cuando dos sistemas dinámicos son topológicamente equivalentes, la estructura cualitativa de ambos sistemas es la misma. Es por ello, que tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3.6 *Un sistema dinámico $\{T, X, \phi^t\}$ es llamado topológicamente equivalente a un sistema $\{T, X, \psi^t\}$ si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que transforma órbitas del primer sistema en órbitas del segundo sistema, preservando la dirección del tiempo.*

Un homeomorfismo es una biyección tal que tanto el mapa como su inverso son continuos [42]. Los retratos de fase de sistemas topológicamente equivalentes con frecuencia también se llaman topológicamente equivalentes.

4.3.5. Estabilidad

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Donde cada f_i son funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^n . El sistema 4.6 define un campo vectorial

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Definición 4.3.7 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es escrito en términos de sus componentes como en 4.7, y además, que la primeras derivadas parciales de cada función su componente existe. Es decir, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe para $1 \leq i, j \leq n$. La **matriz Jacobiana** de f en un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ es:

$$Jf(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Juega un papel importante en el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico.

En las siguientes definiciones $x^* \in \mathbb{R}$.

Definición 4.3.8 Un punto x^* es un **punto de equilibrio** de un sistema $\dot{x} = f(x)$ definido en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, también llamado **singularidad** del campo vectorial f , si y sólo si, satisface la ecuación $f_i(x^*) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Definición 4.3.9 Un punto de equilibrio x^* de un sistema $\dot{x} = f(x)$ es **hiperbólico**, si y sólo si, todos los valores propios de la matriz Jacobiana asociada al sistema evaluado en x^* , $Jf(x^*)$, tienen parte real no nula.

Definición 4.3.10 Un punto de equilibrio x^* de un sistema $\dot{x} = f(x)$ definido en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, es llamado **estable** si para cualquier vecindad dada U de x^* existe otra vecindad V de x^* , $V \subseteq U$ tal que cualquier solución con condición inicial en V permanece en U para todo $t \geq 0$, es decir, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - x^*\| < \delta \rightarrow \|\phi^t x - x^*\| < \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } x \in U$$

Definición 4.3.11 Un punto de equilibrio x^* de un sistema $\dot{x} = f(x)$, es llamado **asintóticamente estable** si es estable y si existe una vecindad V en U tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi^t x - x^*\| = 0 \text{ para todo } x \in U$$

Definición 4.3.12 Un punto de equilibrio x^* de un sistema $\dot{x} = f(x)$, es llamado **inestable** si no es estable.

La estabilidad de un punto se puede interpretar geoméricamente así: las trayectorias con condiciones iniciales próximas al punto se mantienen cerca de él para $t \geq 0$. La estabilidad asintótica es mas exigente, no sólo es suficiente estar cerca del punto si no que exige que se aproxime a él cuando $t \geq 0$ [37].

4.3.6. Variedades estables e inestables

En esta sección vamos a definir el concepto de una variedad como una generalización de un subespacio lineal de \mathbb{R}^n . Se analiza la importancia de las variedades estables e inestables dentro de un sistema dinámico.

Consideremos la ecuación diferencial.

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{4.9}$$

Con flujo ϕ^t , y sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n que es la unión de órbitas de este flujo. Si una solución tiene condición inicial en S , entonces, la correspondiente órbita permanece en S para todo tiempo. El concepto de un conjunto que es la unión de órbitas de una ecuación diferencial se formaliza en la siguiente definición.

Definición 4.3.13 Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina conjunto invariante para la ecuación diferencial 4.9, si para cada $x \in S$, la solución $t \rightarrow \phi^t(x)$, definida en su intervalo maximal de existencia, tiene su imagen en S . Además, S se dice variedad invariante, si S es una variedad [4].

La noción de variedad invariante para sistema de ecuaciones diferenciales autónomos puede ser descrita por un importante ejemplo: las variedades estables, inestables y centro de un punto de equilibrio.

Definición 4.3.14 Las variedades estables e inestables de un punto de equilibrio x^* , $W^s(x^*)$ y $W^u(x^*)$, respectivamente, es el conjunto de todos los puntos en el dominio de definición del flujo del sistema que converge exponencialmente a x^* cuando $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$, respectivamente, esto es:

$$W^s(x^*) = \{x \in U : \sup_{t \geq 0} e^{\beta t} |\phi^t x - x^*| < \infty \text{ para algún } \beta > 0\}$$

y

$$W^u(x^*) = \{x \in U : \sup_{t \leq 0} e^{-\beta t} |\phi^t x - x^*| < \infty \text{ para algún } \beta > 0\}$$

Teorema 2 (Teorema de la Variedad Estable) Supongamos que x^* es un punto de equilibrio hiperbólico y que $Jf(x^*)$ tiene $n - k$ autovalores con parte real negativa y k autovalores con parte real positiva.

Sean E^s el subespacio generado por los vectores propios de $Jf(x^*)$ cuya parte real es negativa y E^u el subespacio generado por los vectores propios de $Jf(x^*)$ parte real es positiva.

Entonces, existe una variedad estable (inestable) r -diferenciable en un entorno de x^* de dimensión $n - k$ que es tangente en x^* a $E^s(E^u)$.

Si los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio x^* , tienen parte real nula, entonces, dan origen a la **variedad central**, que derivan de todas las órbitas cuyo comportamiento no es controlado ni por la variedad estable, ni por la inestable [37].

Teorema 3 (Teorema de la Variedad Central) Sea x^* es un punto de equilibrio y supongamos que $Jf(x^*)$ tiene $n - k - m$ autovalores con parte real negativa, m autovalores con parte real nula y k autovalores con parte real positiva.

Sean E^s y E^u definidos como en el Teorema 2, y E^c el subespacio generado por los vectores propios de $Jf(x^*)$ cuya parte real es nula.

Entonces, existe una única variedad estable (inestable) r -diferenciable en un entorno de x^* de dimensión $n - k - m$ que es tangente en x^* a $E^s(E^u)$, y además, existe W^c , variedad central, $(r - 1)$ -diferenciable en un entorno de x^* , de dimensión m y que es tangente en x^* a E^c .

La existencia de las variedades estables, inestables y central es de gran importancia para el conocimiento de las características de un sistema dinámico. La existencia de las variedades proporcionan una base teórica para determinar las propiedades analíticas del flujo del sistema dinámico dentro de una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico [39], y también son útiles para encontrar regiones invariantes en el plano de fase [37].

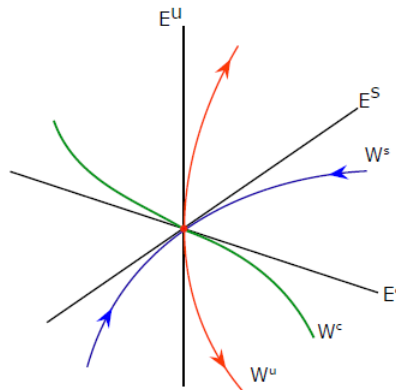


Imagen tomada de [38]

Figura 4.3: Las variedades estables, inestables y central de un punto de equilibrio.

4.3.7. Método del Blowing - Up en \mathbb{R}^2

En un campo vectorial f donde x^* es un punto de equilibrio hiperbólico, se puede utilizar el Teorema de Hartmann-Grobman [42], para determinar localmente el retrato de fase. Si $Jf(x^*)$ tiene algún valor propio con parte real nula, decimos que el campo es **parcialmente hiperbólico** en x^* , y tenemos el Teorema de Variedad Central [37]. Si la matriz del sistema para la linealización en el punto de equilibrio x^* desaparece (matriz nula), entonces la linealización no proporciona información sobre el retrato de fase del sistema cerca del punto. Es decir, todos los valores propios tienen parte real igual a cero, y este caso lo analizamos a continuación.

Definición 4.3.15 Una singularidad x^* es **no-hiperbólica** si todos los valores propios de $Jf(x^*)$ tienen parte real igual a cero.

En el caso planar existen tres posibilidades para una singularidad no-hiperbólica:

1. $Jf(x^*)$ tiene autovalores imaginarios puros, es decir, $\text{traza}(Jf(x^*)) = 0$ y $\det Jf(x^*) > 0$.
2. Ambos valores propios son cero, pero $Jf(x^*)$ no es la matriz nula, es decir, $\text{traza}(Jf(x^*)) = \det Jf(x^*) = 0$, pero $Jf(x^*) \neq 0$.
3. $Jf(x^*) = 0$.

El Blowing-Up involucra cambios de coordenadas que expanden una singularidad no-hiperbólica a toda una curva en la cual vive una cantidad de otras singularidades. Los cambios de coordenadas usados son singulares en el punto de equilibrio, pues mapean una curva en un punto; fuera de este punto, son difeomorfismo [37].

Consideremos el cambio de coordenadas $(u, v) \rightarrow (x, y)$ dado por:

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } \Psi(u, v) = (u, uv) = (x, y)$$

Al restringir $u > 0$, tenemos un difeomorfismo hacia el semiplano $x > 0$. El Blowing-Up anterior se conoce como Blowing-Up en la dirección de x o Blowing-Up horizontal y nos entrega información sobre las separatrices de 0 tangente al eje x .

En las coordenadas (u, v) , el nuevo campo $\hat{f} = \Psi \circ f$ queda de la forma

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \hat{f}_1 \frac{d}{du} + \hat{f}_2 \frac{d}{dv} \\ &= f_1(u, uv) \frac{d}{du} + \frac{1}{u} (f_2(u, uv) - v f_1(u, uv)) \frac{d}{dv}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio en la escala del tiempo $t \rightarrow tu$ podemos estudiar las separatrices transversales a la recta $u = 0$.

Es posible desarrollar una transformación similar para obtener un Blowing-Up en la dirección o Blowing-up vertical [37]. El cambio de coordenada es:

$$\bar{\Psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } \bar{\Psi}(u, v) = (uv, v) = (x, y)$$

y el campo transformado viene dado por:

$$\bar{f}(u, v) = \frac{1}{v}(f_1(uv, v) - uf_2(uv, v))\frac{d}{du} + f_2(uv, v)\frac{d}{dv}$$

En nuestra investigación, para efectos de cálculos utilizaremos Blowing-Up direccionales para abrir singularidades, particularmente debido a que tendremos que aplicar sucesivos Blow-ups sobre una misma singularidad.

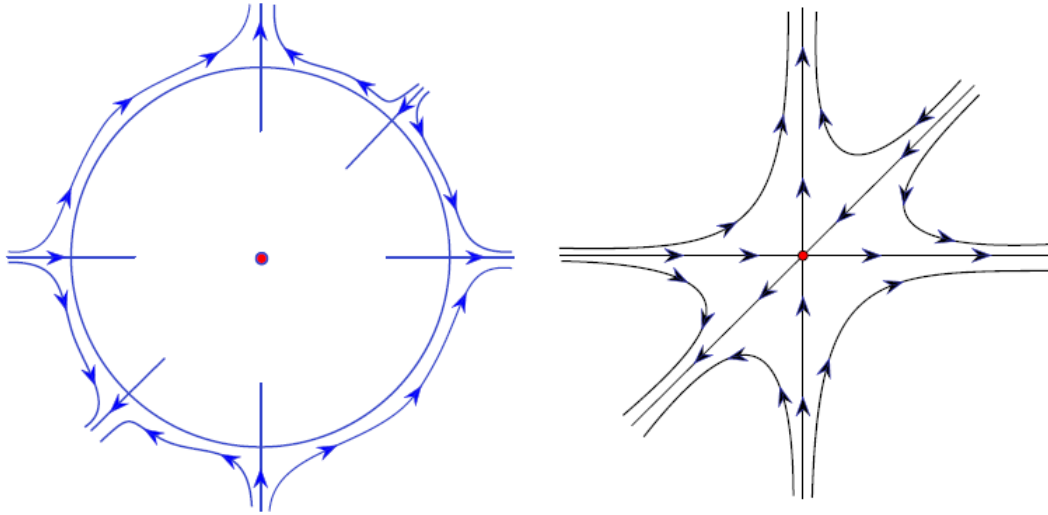


Imagen tomada de [38]

Figura 4.4: Blowing-Up y Blowing-Down.

4.3.8. La esfera de Poincaré y el comportamiento en el infinito

El estudio de las soluciones que tienden al infinito, ha sido una herramienta importante para entender el panorama global de un sistema dinámico en \mathbb{R}^n . El método de compactificación consiste en escribir las ecuaciones del movimiento como un campo vectorial y luego, aplicar la compactificación de Poincaré, que es un método para extender analíticamente el campo vectorial a una variedad compacta, de hecho a una esfera. Esta herramienta o método es muy importante para analizar la dinámica del flujo infinito o en la parte ilimitada [41].

La idea principal de este método es identificar \mathbb{R}^n con hemisferio norte y sur a través de simples proyecciones, entonces el campo vectorial X en \mathbb{R}^n puede extenderse a un campo vectorial \hat{X} sobre S^n ; este método se llama compactificación de Poincaré.

Poincaré comenzó el estudio de campos vectoriales polinómicos en el plano \mathbb{R}^2 , mediante la proyección central de los recorridos sobre una esfera S^2 , tangente al plano en el origen. Así, él proporciono los medios para estudiar el comportamiento del campo en una vecindad del infinito, que es representado por el ecuador, S^1 [41].

4.3.8.1. método de compactificación de Poincaré y una interpretación geométrica.

Con el fin de estudiar el comportamiento de las trayectorias de un sistema planar cerca del infinito, el lector debe conocer el significado de proyección estereográfica (la esfera en un plano). En este caso, el comportamiento de trayectorias lejos del origen podría ser estudiado considerando el comportamiento de trayectorias cerca del "punto en el infinito", es decir, cerca del *polo norte* de la esfera unitaria.

Un mejor enfoque para estudiar el comportamiento de las trayectorias en el infinito, es utilizar la llamada esfera de Poincaré, donde proyectamos desde el centro de la esfera unidad $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 | X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ sobre el plano (x, y) tangente a el polo norte o sur.

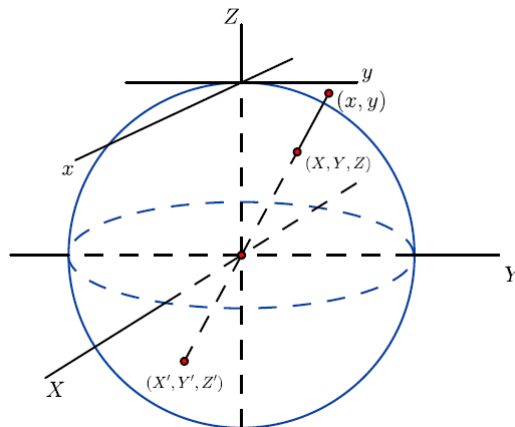


Imagen tomada de [38]

Figura 4.5: Proyección central del hemisferio superior de S^2 sobre el plano (x, y) .

Este tipo de proyección central fue introducido por Poincaré en el año 1891, y tiene la ventaja de que los puntos críticos en el infinito, se extienden a lo largo del ecuador de la esfera Poincaré, y por lo tanto, son de una naturaleza más simple que el punto crítico en

el infinito en la esfera de Bendixson [25]. Sin embargo, algunos de los puntos críticos en el infinito en la esfera de Poincaré pueden todavía ser muy complicados en naturaleza.

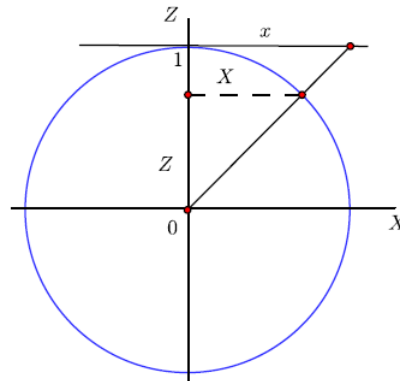


Imagen tomada de [38]

Figura 4.6: Corte transversal de la proyección central del hemisferio superior.

Si proyectamos el hemisferio superior de S^2 sobre el plano (x, y) , entonces se deduce de los triángulos semejantes representados en la Figura 4.6, que las ecuaciones que definen (x, y) en términos de (X, Y, Z) están dadas por :

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z} \quad (4.10)$$

De manera similar, las ecuaciones que definen (X, Y, Z) en términos de (x, y) están dadas por:

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad (4.11)$$

Estas ecuaciones definen una correspondencia uno a uno entre los puntos (X, Y, Z) del hemisferio superior de S^2 con $Z > 0$ y puntos (x, y) en el plano. El origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ corresponde al polo norte $(0, 0, 1) \in S^2$; punto en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ corresponden a puntos en el círculo $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}, Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en S^2 ; y puntos en el ecuador S^2 corresponden al círculo en el infinito.º "punto al infinito" de \mathbb{R}^2 .

Dos puntos antipodales (X, Y, Z) con (X', Y', Z') en S^2 , pero no en el ecuador S^2 , corresponden al mismo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ver Figura 4.5). Por lo tanto, es natural considerar dos puntos antipodales en el ecuador S^2 como pertenecientes al mismo punto en

el infinito. El hemisferio con los puntos antípodas del ecuador identificado, es un modelo para el plano proyectivo. Sin embargo, en lugar de tratar de visualizar el flujo en el plano proyectivo inducido por un sistema dinámico en \mathbb{R}^2 , se visualizará el flujo en la esfera de Poincaré inducido por un sistema dinámico en \mathbb{R}^2 [25].

4.4. DINÁMICA DE POBLACIONES

En este apartado se presentan algunas nociones básicas sobre dinámica de poblaciones que es de suma importancia para entender capítulos posteriores, además, mostraremos la construcción del modelo a estudiar.

4.4.1. Modelos poblacionales no lineales continuos

En el año 1798, el economista británico Thomas Robert Malthus, publicó la obra *Ensayo sobre el principio de la población*, en la cual habla sobre modelos poblacionales.

Definición 4.4.1 Sea $x = x(t)$ una función que representa la variación de la población de una especie en el instante t , entonces su tasa de cambio es una ecuación de conservación para la población.

$$\frac{dx}{dt} = \text{nacimiento} - \text{muertes} + \text{migración}$$

Los términos del lado derecho de la igualdad anterior dependen del fenómeno en particular que se está modelando. El modelo poblacional más simple nace de considerar los nacimientos y muertes proporcionales a la población e ignorar la migración (ver [34]). Esto implica

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx \tag{4.12}$$

donde n es una constante conocida como tasa de *natalidad* y m es una constante conocida como tasa de *mortalidad natural* de la población. Reescribiendo la ecuación 4.12 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= nx - mx \\ &= (n - m)x \\ &= rx \end{aligned}$$

donde la constante r es conocida como *tasa de crecimiento intrínseco* de la población, la cual representa la diferencia entre la tasa de natalidad y mortalidad de la población. Este modelo es llamado *maltusiano* puesto que fue introducido por Thomas Robert Malthus. Consideramos una condición inicial $x(0) = x_0$, la solución del problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

es dada por

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

La solución predice un crecimiento exponencial de la población en el caso en que $r > 0$, extinción de la población en el caso en que $r < 0$ y no predice cambios en el tiempo cuando $r = 0$.

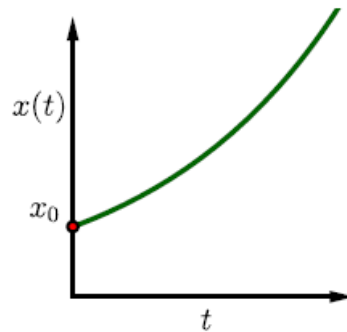


Figura 4.7: Crecimiento exponencial

Tamaños poblacionales que crecen exponencialmente son comúnmente observados en la naturaleza. Sin embargo, esta tasa de crecimiento usualmente tienden a decrecer cuando el tamaño de la población aumenta. Esto implica que las dinámicas poblacionales pueden ser aproximadas mediante este modelo lineal solamente para cortos períodos de tiempo. La hipótesis lineal de que la tasa de crecimiento es una proporción de su tamaño es usualmente poco realista para largas escalas de tiempo. Este hecho en particular lleva a considerar una tasa de crecimiento en función del tamaño de la población.

El modelo poblacional mas simple en el cual la tasa de crecimiento es una función decreciente del tamaño poblacional es la llamada *ecuación diferencial logística*.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (4.13)$$

Que fue introducida por el biólogo y matemático P. Verhulst en (1838), y modifico el modelo Malthus. Consideró que algunos recursos sólo están disponibles en cantidades limitadas, cada población crece a un nivel de saturación K en el que no puede crecer más y debe competir por dichos recursos, este nivel se conoce como *capacidad de carga del medio ambiente*.

La ecuación 4.13 se conoce como la ecuación logística, donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población, en cada tiempo $t > 0$, r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y K es la capacidad de carga del medio ambiente. La solución a la ecuación 4.13 es :

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}},$$

Nota: Esta solución se obtuvo mediante el método de separación de variables

Donde $x(0) = x_0 > 0$, es el tamaño de la población en el tiempo inicial. Si la población inicial x_0 es menor que K , el crecimiento de la población aumenta asintóticamente hasta K . Por otro lado, si la población inicial x_0 es mayor que K , entonces el crecimiento de la población empieza a disminuir asintóticamente hasta K (Como lo muestra la siguiente gráfica).

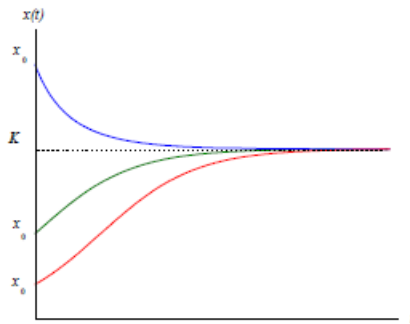


Figura 4.8: Crecimiento logístico

El modelo logístico predice un rápido crecimiento inicial para $0 < x_0 < K$, entonces un decrecimiento en la tasa de crecimiento en el tiempo provoca que el tamaño de la población se aproxime a su límite. Este comportamiento concuerda con la dinámica observada de muchas poblaciones y por esta razón, el modelo logístico es usado a menudo como un medio para describir el tamaño poblacional.

4.4.2. El efecto Allee

El efecto Allee describe una situación en el cual especies con bajas densidades poblacionales son afectadas por una relación positiva entre la tasa de crecimiento poblacional y su densidad, lo cual incrementa sus posibilidades de extinción (ver [32] [37]).

En 1931, Warder Clyde Allee propuso que la competencia intraespecífica podría llevar a una *denso-dependencia inversa*. Esta idea fue extendida luego en su libro sobre Ecología animal en 1949. Allee observó que muchas especies animales y plantas exhiben un decrecimiento en su tasa de crecimiento per cápita a bajas densidades de población. Bajo estas condiciones, la tasa de crecimiento de la población puede anularse y hasta tomar valores negativos. Esto se debe a una reducción de la reproducción y la supervivencia cuando los individuos conespecíficos no son numerosos. La baja población, así como la superpoblación, puede ser una limitación. Uno de los colaboradores de Allee, E.P. Odum, se refirió a este proceso como el principio de Allee, sin embargo, es conocida generalmente como el efecto Allee.

Las poblaciones pueden exhibir dinámicas del efecto Allee debido a un amplio rango de fenómenos biológicos que incluyen: el éxito (o dificultades) de apareamiento, termorregulación social, reducida defensa antidepredadora, alimentación menos eficiente a bajas densidades, reducida eficacia de la vigilancia antidepredadora, etc.

Para todos estos fenómenos y otros, la mayor consecuencia del efecto Allee es la existencia de un nivel de densidad crítico en el cual la unidad de agregación considerada (es decir, colonia, población o grupo social) puede tender a la extinción. Esta existe en muchos sistemas ecológicos.

El efecto Allee es un importante e interesante fenómeno tanto en sentido matemático como ecológico. Desde un punto de vista ecológico, es una situación que se produce en bajas densidades poblacionales donde la tasa de crecimiento individual es una función creciente de la densidad, la importancia de este fenómeno ha sido enfatizado por los recientes desarrollos en algunas áreas de la ecología y la conservación de especies pudiendo ser considerado como la base de la sociabilidad animal.

El efecto Allee puede ser *débil o fuerte*, pero usualmente los ecólogos consideran que todos los efectos Allee son efectos Allee fuertes. Los efectos débiles de Allee se utilizan para describir casos en los que la tasa de crecimiento de la población se ve afectada negativamente por los bajos tamaños de la población, pero donde la tasa de crecimiento de la

población per cápita no puede ir por debajo de cero (por lo que las poblaciones crecerán en tamaños de población bajos), mientras, el efecto Allee fuerte se usa donde la tasa de crecimiento de la población per cápita puede volverse negativa, lo que significa que hay un punto crítico en el tamaño de la población, por debajo del cual la población tenderá a la extinción.

La prevención de colapsos poblacionales es también prioridad en conservación biológica. Donde es extensamente conocido que poblaciones con baja densidad poblacional tienen un gran riesgo de extinción. Sin embargo, muchos programas de conservación, incluyendo la reinscripción de especies, se concentran en los riesgos de extinción encontrados en muy pequeñas poblaciones y la existencia de un mínimo tamaño poblacional del cual estas especies no se pueden recuperar, el efecto Allee ha sido muy poco tomado en cuenta en esta área. Otras áreas de investigación donde el efecto Allee juega un rol crítico es la invasión de ecosistemas y el control biológico.

En fin, las mayores consecuencias directas del efecto Allee para la conservación de una especie son visibles a través de los cambios en la dinámica de la población, particularmente a bajas densidades. El problema de la eventual extinción de una especie es recurrente en una industria pesquera. Idealmente lo que se busca es la conservación ante la explotación y/o pérdida de hábitats, o los impactos causados por muertes, depredadores o competidores. Especies sujetas a fuertes efectos Allee tienen una mayor tendencia a ser menos hábiles para sobrellevar estas causas adicionales de mortalidad, más lentos para recuperarse, y más inclinados a la extinción que otras especies.

Un modelo matemático que representa al *Efecto Allee* está dado por la ecuación diferencial no lineal, donde esta ecuación es una modificación de la función de crecimiento natural, introduciendo un nuevo factor en la función de crecimiento logístico, esta es:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m) \quad (4.14)$$

Donde $x(t)$ es el tamaño de la población de presas en cualquier tiempo t , mayor o igual que cero, $m > 0$ es el tamaño mínimo viable de la población (o umbral de extinción). $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y $K > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente [7].

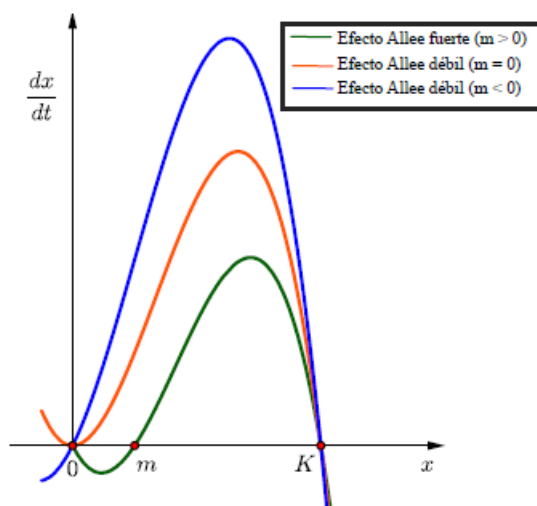


Imagen tomada de [38]

Figura 4.9: Función descompensada o comportamiento Allee

Si $m > 0$, la ecuación diferencial representa el *efecto Allee fuerte* [37], donde la tasa de crecimiento en el límite de baja densidad es negativa. Si $0 < x < m$, la tasa de crecimiento es negativa(ver Figura 4.9), es decir, $\frac{dx}{dt} < 0$ lo que implica que la población se extingue. Es decir, la población debe superar este umbral para poder crecer.

Si $m \leq 0$, la ecuación diferencial representa el *efecto Allee débil* o una descompensación pura, donde la tasa de crecimiento es positiva en la densidad cero y no tiene un umbral de crecimiento.

Otra grafica donde pueden corroborar lo dicho anteriormente es la siguiente:

4.4.3. Modelos depredador-presa

Definición 4.4.2 *Un lugar ecológicamente y geográficamente distinguible y bien definido, donde habitan una o mas poblaciones recibe el nombre de hábitat*

En un hábitat pueden existir distintas poblaciones. Se puede elegir dos de ellas, las que se consideran las más importantes, omitiendo el efecto del resto de las especies, con el objeto de profundizar en su interacción . Aunque los resultados obtenidos de esta manera son abstractos y pueden ser erróneos, puede ayudar en nuestro conocimiento de

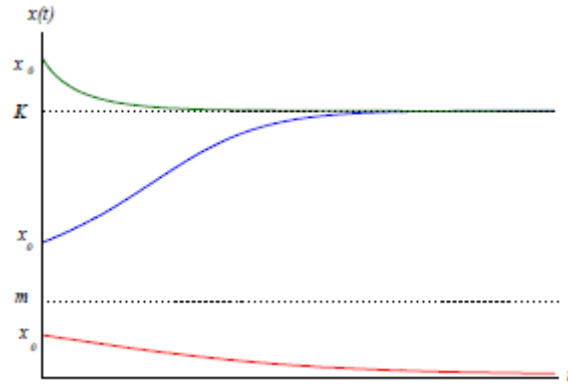


Figura 4.10: Comportamiento cualitativo de las soluciones

la dinámica. Cuando las especies interactúan, la dinámica poblacional de cada especie se ve afectada. Existen tres tipos principales de interacción entre especies:

1. Si una especie sirve de alimento de la otra, se habla de una interacción *depredador-presa*.
2. Si ambas especies compiten por el mismo recurso, se habla de una *competencia*.
3. Si ambas especies se ayudan, se habla de *cooperación, simbiosis o mutualismo*.

Recordar que nos interesa es la primera interacción, por ello, en términos de las tasas de crecimiento de ambas poblaciones, en el primer tipo de interacción, la tasa de crecimiento de una población crece mientras que la tasa de crecimiento de la otra especie decrece.

Nos concentraremos en el primer tipo de interacción, la depredación. Volterra (1926) propuso un modelo depredador-presa simple para explicar la dinámica oscilatoria de cierta población pesquera capturada en el Mar Adriático. Si $x(t)$ representa la cantidad poblacional de presas en el tiempo e $y(t)$ representa la cantidad poblacional de los depredadores en el tiempo, entonces el modelo es dado por:

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy. \end{cases} \quad (4.15)$$

Los parámetros del modelo tienen los siguientes significados biológicos

- a : Es la tasa intrínseca de crecimiento de las presas.

- b: Tasa de depredación
- c: Tasa de conversión
- d: Tasa de mortalidad intrínseca del depredador.

Este fue el primer modelo propuesto de modelamiento depredador-presa.

4.4.4. Repuesta funcional de los depredadores

Definición 4.4.3 *El cambio en la densidad de las presas atacadas por el depredador por unidad de tiempo es conocida como respuesta funcional del depredador.*

La interacción depredador-presa puede ser estudiada en términos de la respuesta funcional del depredador a los cambios en la densidad de la población de presas [2], considerada en primera instancia por Solomon (1949). La respuesta funcional determina como el número de presas atacadas por el depredador cambia en relación a la densidad poblacional de ambas especies. Estas respuestas funcionales fueron propuestas e investigadas en detalle por C.S Holling en 1959, el cual las clasifico en tres tipos, en función de identificar los componentes particulares, es decir, las características de ambas especies, que determinan la forma de estas relaciones. En el año 1984, Taylor describe un cuarto tipo llamado Holling tipo IV o repuesta funcional no monótona. A continuación se presentan estos cuatro tipos de respuesta funcional (ver [2] [8]).

4.4.4.1. Repuesta funcional Holling Tipo I

El número de presas atacadas por depredador aumenta en forma lineal mientras la densidad de presas aumenta [2] y luego se estabiliza repentinamente en alguna cota. Ésta es una forma de respuesta característica especies que se alimentan por filtración. A bajas densidades de presas, el número de presas consumidas por depredador es determinado por la tasa de filtrado, el tiempo de exposición (es decir, el tiempo ocupado en consumir la presa) y la densidad de la población de presas. Holling consideró que el tiempo requerido para ingerir la comida es equivalente a un componente llamado *tiempo de manejo*, el cuál, en este caso, ejerce su efecto solamente en altas densidades de presas. Holling concluyó que había tres componentes básicos que determinan la forma de la respuesta funcional: el *tiempo de exposición* (la duración de las actividades de alimentación) y la *tasa de*

búsqueda (en este caso, la tasa de filtrado) las cuales operan a bajas densidades de presas, y en densidades de presas más altas se adhiere el tercer componente, el *tiempo de manejo* [37].

La función que representa esta respuesta es dada por:

$$h(x) : \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < c, \\ ac & \text{si } c \leq x \end{cases} . \quad (4.16)$$

Donde a es una constante, c representa la saturación y $x(t)$ es la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$.

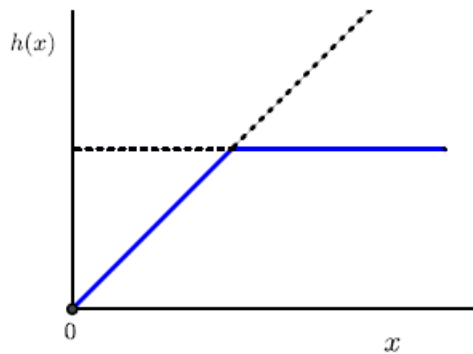


Imagen tomada de [38]

Figura 4.11: Respuesta funcional de tipo Holling I

4.4.4.2. Respuesta funcional Holling Tipo II

Cuando aumenta la densidad de presas, el número de presas atacadas por depredador aumenta cada vez más lento hasta que se estabiliza. Ésta es una forma muy común de respuesta funcional, la cuál también es condicionada por tres componentes básicos; el tiempo de exposición, la tasa de búsqueda y el tiempo de manejo. Los primeros dos componentes son definidos en una manera similar como en la respuesta de tipo I. Sin embargo, el tiempo de manejo incluye el tiempo de perseguir, dominar y comer a cada presa, como también el tiempo que el depredador toma para prepararse e ir a buscar más presas. Cuando la densidad de presas aumenta, más presas son consumidas y mayor tiempo de exposición es considerado por el tiempo de manejo, hasta que a altas densidades

de presas, el depredador gasta todo su tiempo en el manejo de la presa. En la mayoría de los casos, sin embargo, la función se estabiliza puesto que el depredador se satura.

La función que representa esta respuesta es (ver [3]):

$$h(x) = \frac{qx}{x+a}. \quad (4.17)$$

Donde $x(t)$ representa la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$, q es la tasa máxima de consumo per cápita y a es la tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo.

Se puede observar en la Figura 4.12 que si $x \rightarrow \infty$, entonces, $h(x) \rightarrow q$, es decir, q es el valor máximo de la tasa de depredación de $h(x)$.

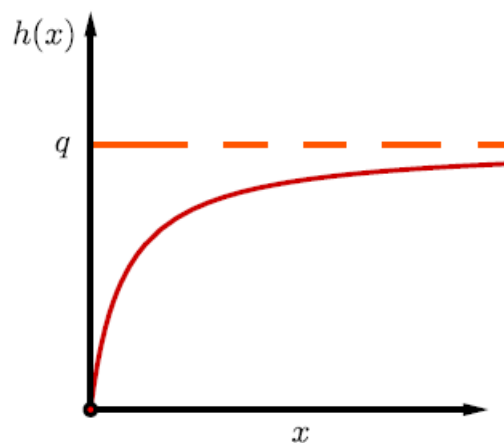


Imagen tomada de [38]

Figura 4.12: Respuesta funcional de tipo Holling II

4.4.4.3. Respuesta funcional Holling Tipo III

Esta respuesta expresa una curva de crecimiento sigmoidea, donde la cantidad de presas atacadas por depredador aumenta lentamente a bajos niveles de población de presas, luego disminuye a altas densidades hasta que se estabiliza. Aquí, la cantidad de presas consumidas se acelera con el aumento de la densidad de presas hasta que el tiempo de manipulación comienza a limitar su consumo.

La función que representa esta respuesta es dada por (ver [3]).

$$h(x) = \frac{qx^2}{x^2 + a^2}. \quad (4.18)$$

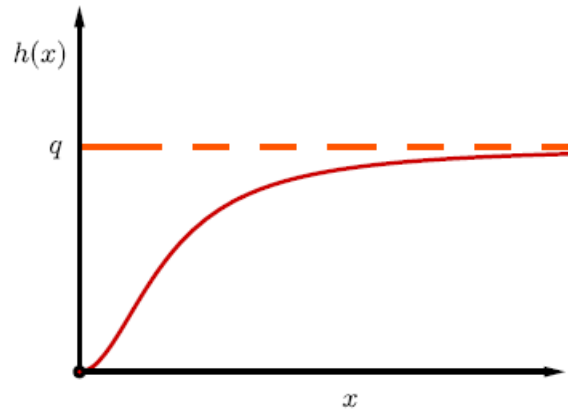


Imagen tomada de [38]

Figura 4.13: Repuesta funcional de tipo Holling III

Donde $x(t)$ representa la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$, q es la tasa máxima de consumo per cápita y a es la tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo.

4.4.4.4. Repuesta funcional Holling Tipo IV o no-monótona

Esta respuesta es utilizada para modelar comportamientos antidepredatorios (APB), llamado formación de grupos de defensa [2] y el fenómeno de agregación [37], el cual es empleado por las presas para evitar la depredación.

La primera parte de la curva (ver Figura 4.14), puede corresponder a cualquiera de los tipos previos de respuestas funcionales, por lo tanto, el foco de atención surge por la disminución de la cantidad de presas consumidas que algunas veces se observa en altas densidades de presas. Existen tres posibles causas de esta reducción. Primero, los depredadores se concentran menos en una presa individual cuando existen muchas presas para escoger. Segundo, algunas presas pueden cooperar, compartiendo la carga de vigilar la presencia de depredadores e informar a otros de la presencia. Tercero, algunas presas

podrían intimidar e incluso defenderse contra el ataque de los depredadores.

Las funciones que representa esta respuesta Holling tipo IV, vienen dada por (ver [42] [2] [44]):

- $h(x) = \frac{qx}{x^2 + a^2}$.
- $h(x) = \frac{qx^2}{x^2 - bx + a}$.
- $h(x) = \frac{qx^m}{x^n + a^n}$, con $1 \leq m \leq n$.

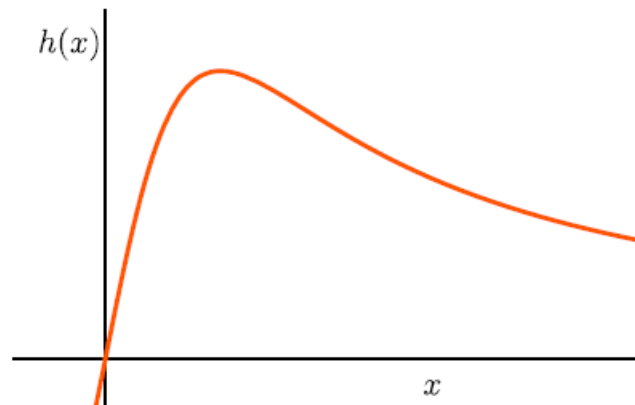


Imagen tomada de [38]

Figura 4.14: Respuesta funcional de tipo Holling IV

4.4.5. Modelo de tipo Leslie-Gower

El primer modelo de Leslie-Gower, propuesto por P.H. Leslie en 1948, se caracteriza por que la ecuación de crecimiento de la población de depredadores es de tipo logístico, donde la capacidad de carga del medio ambiente de los depredadores K_y es una función que depende de la cantidad de presas disponibles, es decir, $K_y = nx$ donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población de presas y n es una medida de la calidad de la presa como fuente alimenticia para el depredador [1] [13]. La respuesta funcional es lineal, de la forma $h(x) = qx$.

El modelo de Leslie-Gower se representa mediante un sistema de ecuación diferenciales no lineales de la forma:

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy, \\ \frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{nx}\right). \end{cases} \quad (4.19)$$

donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ indican el tamaño de la población de presas y depredadores, respectivamente.

Nota: A partir de modelo de Leslie-Gower, se derivan otros modelos, considerado otros tipos de respuestas funcionales, o bien, asumiendo que los depredadores tienen una fuente alternativa de alimento. (Revisar el capítulo de ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN).

Capítulo 5

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

5.1. Objetivo general:

Determinar las condiciones a un modelo depredador-presa de tipo Leslie con respuesta funcional Holling tipo IV modificado y efecto Allee en las presas, para una posible extinción o preservación de las especies interrelacionadas.

5.2. Objetivos específicos:

1. Identificar dinámicas no lineales de los modelos depredador- presa con distintas respuestas funcionales de depredación y efecto Allee en las presas.
2. Analizar el comportamiento dinámico de los depredadores – presa, cuando los depredadores disponen un alimento alternativo distinto a las presas.
3. Describir los diferentes comportamientos de las especies interrelacionadas a través de la relación de depredación cuando el efecto Allee es fuerte y débil.

Capítulo 6

METODOLOGÍA

6.1. Enfoque y tipo de investigación

Kuhn expresa “que el uso de un lenguaje diferente conlleva la generación de significados diferentes” (Kuhn,2008), se propone el empleo de la complejidad como enfoque metodológico.

El uso de la complejidad como enfoque metodológico hace indispensable que la presente investigación no se debe enmarcar en un enfoque de tipo de investigación tradicional, según L. Kuhn(2008) a clara que realizar una investigación sobre comportamiento de seres vivos, exige la conciencia de estar frente a un fenómeno complejo.

Esta investigación se enmarca en el campo de la biología-matemática, además, esta investigación presenta características de un enfoque mixto, que según Samperini(2018) la ruta de investigación mixta se enmarca como la integración que implica combinar los métodos cuantitativos y los cualitativos en un mismo estudio, puesto que presenta las características de un estudio cualitativo por que tiene la característica de explorar y describir. De este modo, las variables a estudiar son la cantidad de depredadores y presas con sus respectivos parámetros que describen un cierto comportamiento de depredación.

El tipo de investigación de este trabajo se enmarca en una investigación básica o también denominada investigación pura, teórica o dogmática. Pues el objetivo de este trabajo es incrementar modelos que se aproximen más al modelamiento matemático y

biológico de depredadores y presas.

6.2. Estrategias metodológicas

El método científico que empleamos para el desarrollo de este trabajo esta dividida en cuatro etapas:

Etapa 1: Realización del estado del arte sobre estos modelos.

1. Indagar sobre trabajos realizados de este tema a nivel regional, nacional e internacional.
2. Revisión de los parámetros del modelo.

Etapa 2: Análisis del modelo.

1. Buscar una equivalencia topológica al modelo a estudiar. Este proceso se realiza con el fin de reducir la cantidad de parámetros y que los cálculos sean mas sencillos al momento de realizar el estudio del modelo (Ver la sección 4.3.4).
2. Realización de la matriz Jacobiana. Esto se hizo con el fin de encontrar los comportamiento de los diferente puntos de equilibrio.
3. Encontrar la región de invarianza. Esta región se encuentra para evidenciar que las soluciones del sistema están dentro de una región positiva.
4. Mostrar que el sistema es acotado. Se realizo con el objetivo de ver la validez del sistema y poder evidenciar que sin importan que las presas se extingan los depredadores no van a crecer infinitamente.
5. Comportamiento de los puntos de equilibrio del sistema.

Etapa 3:Realización de simulaciones numéricas.

1. Uso del paquete pplane8 que pertenece a Matlab, con el fin de realizar las simulaciones numéricas con sus respectivas gráficas.
2. Análisis de la sensibilidad del sistema a las variaciones de los parámetros, con el propósito de evidenciar los resultados que se obtuvieron en los procesos matemáticos.

Etapa 4:Conclusiones.

6.3. Herramientas de investigación

En esta investigación se usaron las siguientes herramientas tecnológicas:

Cuadro 6.1: Herramientas telemáticas utilizadas.

No.	HERRAMIENTA	APLICACIÓN
1	Matlab	En este programa se realizaron las simulaciones numéricas de los dos modelos estudiados en esta investigación, además, se usó una librería de este programa llamada Pplane8, la cual contribuyó a las gráficas de las simulaciones.
2	Geogebra	En este aplicativo se realizaron las regiones de invarianza de los dos modelos estudiados. Geogebra en sus orígenes funcionaba como calculadora para trabajar el álgebra y la geometría, pero al pasar del tiempo han ido realizando actualizaciones que aportan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para casi todos los niveles de la educación. Combina dinámicamente la geometría, álgebra, cálculo, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo como potente .
3	Symbolab	Esta herramienta contribuyó en los procesos de operaciones algebraicas para poder encontrar la equivalencia topológica, las matrices jacobianas, entre otros procesos. Pues bien, Symbolab es una herramienta avanzada de educación matemática que permite a los educandos aprender, practicar y descubrir temas matemáticos. Además, proporciona soluciones automatizadas paso a paso para los temas de algebraicos, trigonométricos y de cálculo que abarcan diferentes niveles de rigurosidad.

fuelle: Elaboración propia (2022)

Capítulo 7

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se analizará dos modelos de tipo Leslie-Gower, uno considerando que la población de presas es afectada por el efecto Allee fuerte y otro con el efecto Allee débil, además, estos modelos tendrán una respuesta funcional tipo IV y un alimento alternativo para los depredadores. Hacemos énfasis que el modelo uno es con efecto Allee fuerte, es decir, cuando $m > 0$, y analizamos la estabilidad local de los puntos de equilibrio que se encuentran sobre los ejes coordenados y los que se encuentran al interior de la región de invarianza. Se realizarán algunas simulaciones en Matlab con el fin de evidenciar y precisar sus comportamientos con los resultados obtenidos en el análisis. El modelo dos es con efecto Allee débil, es decir, cuando $m = 0$ y realizamos los respectivos análisis que se hicieron en el modelo uno para comparar los posibles comportamientos de las especies.

7.1. Modelo uno (Efecto Allee fuerte)

7.1.1. El modelo a estudiar

El modelo a estudiar se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas no-lineales de tipo Kolmogorov, dado por:

$$X_{\mu} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right). \end{cases} \quad (7.1)$$

Donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ indican el tamaño de la población de presas y depredador respectivamente en cada tiempo $t \geq 0$ (medido como biomasa, el número de individuos o densidad por unidad de superficie o volumen)

Aquí $\mu = \{(r, K, m, q, a, b, s, n, c) \in \mathbb{R}_+^9 / 0 \leq m < K\}$; donde, todos los parámetros son positivos, todos tienen diferentes significados ecológicos.

Los parámetros r, K, q, a, b, s, n y c , se definen la siguiente manera:

- r : Tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas.
- K : Capacidad de carga del medio ambiente de las presas.
- q : Tasa máxima de consumo per cápita (número de presas consumidas por cada depredador en una unidad de tiempo).
- m Constante del efecto Allee o el umbral de población viable, cuando $m > 0$
- a : Tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo
- b : Tasa de saturación de depredadores, es decir, la cantidad de presas es tan alta que los depredadores no pueden consumirlas todas.
- s : Tasa de crecimiento intrínseco de la población de depredadores.
- n : Medida de calidad de presas como fuente alimenticia para el depredador.
- c : Es el tamaño de alimento alternativo para los depredadores.

Notemos que el sistema 7.1 no está definido en el eje y , particularmente en el punto $(0, 0)$, pero ambas isoclinicas pasan a través de este punto [8] y para nuestro modelo, es un punto de especial importancia como mostraremos más adelante.

El sistema 7.1 está definido en el conjunto:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

Con el fin de obtener un sistema topológicamente equivalente al sistema 7.1, realizaremos un cambio de variable y un cambio en la escala del tiempo. Para simplificar los cálculos hacemos los siguientes cambios de variable [8, 20].

$$x = Ku, \quad y = nKv \quad \text{and} \quad \tau = \frac{rK}{\left(u + \frac{c}{nk}\right) \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)} t,$$

que dan lugar a la función $\varphi : \Omega_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$

$$\text{definida por: } \varphi(u, v, \tau) = \left(Ku, nKv, \frac{\left(u + \frac{c}{nk}\right) \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)}{rK} \tau \right) = (x, y, t),$$

donde $\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\}$.

Podemos ver que $\det J\varphi(u, v, \tau) = \frac{nk}{r} u \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right) > 0$, si $b > 2\sqrt{a}$

Esto quiere decir que φ es un difeomorfismo que mantiene la orientación del tiempo [2]; y por lo tanto, el cambio de variable transforma el sistema 7.1 en uno topológicamente equivalente [8, 25, 42] $Z_\eta = \varphi \circ X_\mu$, donde $Z_\eta(u, v) = P(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$.

Lema 1 *El sistema 7.1 es topológicamente equivalente al siguiente modelo de tipo Kolmogorov*

$$Z_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(u + D)[(1 - u)(u - M)(Au^2 - Bu + 1) - Nuv], \\ \frac{dv}{d\tau} = Wv(u - v + D)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \quad (7.2)$$

Donde $\eta = (M, N, W, A, B, D) \in \mathbb{R}_6^+$ y $B > 2\sqrt{A}$.

Demostración: Si $x = Ku$, $y = nKv$, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = K \frac{du}{dt}, \quad y, \quad \frac{dy}{dt} = nK \frac{dv}{dt}. \text{Reemplazando en el sistema 7.1 se tiene.}$$

$$\begin{cases} K \frac{du}{dt} = \left[r(1 - u)(Ku - m) - \frac{qnK^2uv}{K^2u^2 - bKu + a} \right] Ku, \\ nK \frac{dv}{dt} = snKv \left(1 - \frac{nKv}{nKu + c} \right). \end{cases}$$

Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = rKu \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) - \frac{qnK}{ra} \frac{uv}{\left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bKu}{a} + 1\right)} \right], \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(1 - \frac{nKv}{nK\left(u + \frac{c}{nK}\right)} \right). \end{array} \right.$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = rKu \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) - \frac{qnK}{ra} \frac{uv}{\left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bKu}{a} + 1\right)} \right], \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(\frac{u + \frac{c}{nK} - v}{u + \frac{c}{nK}} \right). \end{array} \right.$$

Haciendo el cambio en la escala del tiempo $\tau = \frac{rK}{\left(u + \frac{c}{nK}\right) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)} t$, y utili-

zando la regla de la cadena $\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$, con $Z = (u, v)$, se tiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\tau} \frac{rK}{\left(u + \frac{c}{nK}\right) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)} = rKu \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) - \frac{qnK}{ra} \frac{uv}{\left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bKu}{a} + 1\right)} \right], \\ \frac{dv}{d\tau} \frac{rK}{\left(u + \frac{c}{nK}\right) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)} = sv \left(\frac{u + \frac{c}{nK} - v}{u + \frac{c}{nK}} \right). \end{array} \right.$$

que es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\tau} = u\left(u + \frac{c}{nK}\right) \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right) - \frac{qnK}{ra} uv \right], \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{s}{rK} v\left(u - v + \frac{c}{nK}\right) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right). \end{array} \right.$$

Haciendo algunas sustituciones $M = \frac{m}{K} < 1$, con $0 < M < 1$, $N = \frac{qnK}{ra}$, $W = \frac{s}{rK}$,

$A = \frac{K^2}{a}$, $B = \frac{bK}{a}$ y $D = \frac{c}{nK}$, se obtiene el siguiente sistema polinomial con seis parámetros que será el que vamos a analizar:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(u + D) [(1 - u)(u - M) (Au^2 - Bu + 1) - Nuv], \\ \frac{dv}{d\tau} = Wv(u - v + D) (Au^2 - Bu + 1). \end{cases}$$

El sistema 7.2 está definido en el primer cuadrante, es decir:

$$\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

. La matriz Jacobiana del sistema 7.2 es:

$$JZ_\eta(u, v) = \begin{pmatrix} J11 & -u^2N(u + D) \\ J21 & W(u - 2v + D)(Au^2 - Bu + 1) \end{pmatrix},$$

Donde

$$\begin{aligned} J11 &= -6Au^5 + 5(A - DA + B + AM)u^4 + 4(-B + AD + BD - AM - BM + \\ &\quad ADM - 1)u^3 + 3(-DB - D + BM + M - ADM - BDM - Nv + 1)u^2 + \\ &\quad 2(D - M + BDM + DM - NDv)u - DM \\ J21 &= Wv[3Au^2 + 2(-B - Av + 2AD)u + Bv - BD + 1] \end{aligned}$$

El nuevo sistema 7.2 tiene el origen $(0, 0)$ del plano $u - v$ como punto de equilibrio y aunque en el sistema 7.1 no se consideraba $x = 0$, en el plano $u - v$ sí se considera debido al cambio de coordenadas y escalamiento de tiempo establecidos. La dinámica en una vecindad del punto $(0, 0)$ en el plano $x - y$ queda entonces reflejada por la dinámica en una vecindad del punto $(0, 0)$ en el plano $u - v$.

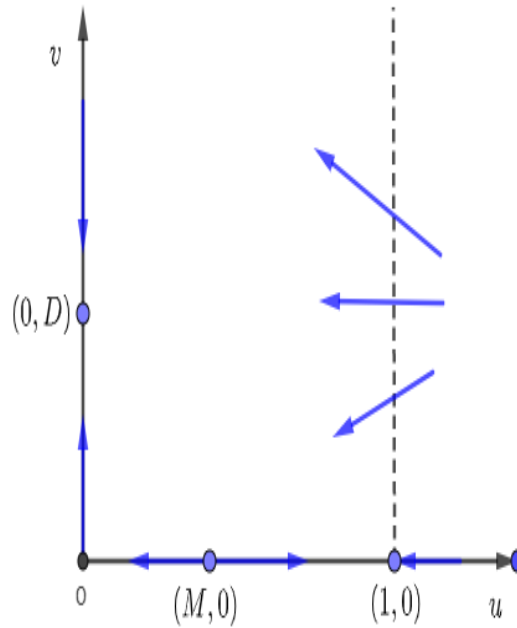
7.1.2. Resultados principales

Lema 2 *El conjunto $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$, es una región de invarianza.*

Demostración: Para el sistema 7.2, se tiene:

- Si $u = 0$, entonces $\frac{du}{d\tau} = 0$, y, $\frac{dv}{d\tau} = -Wv(v - D) < 0$ y es equivalente decir, que las trayectorias permanecen sobre el eje v , ahora, si $v < D$ entonces tienden a ser positivas, ahora bien, si $v > D$ entonces tienden a ser negativas. y es equivalente decir, que las trayectorias permanecen sobre el eje v .

- Si $v = 0$, entonces $\frac{dv}{d\tau} = 0$, y, $\frac{du}{d\tau} = -u(u + D)[(u - 1)(u - M)(Au^2 - Bu + 1)] < 0$ y las trayectorias permanecen sobre el eje u , ahora, $u < M$ entonces tienden a ser negativas, y, $u > M$ entonces tienden a ser positivas, luego, si $u > 1$ Entonces tiende a ser negativa.
- Si $u = 1$, tenemos que $\frac{du}{d\tau} = -Nv(1 + D) < 0$, y por cualquier signo de $\frac{dv}{d\tau} = -Wv(-1 + v - D)(A - B + 1) < 0$, las trayectorias ingresan a la región Λ .



fuentes: Elaboración propia (2022)

Figura 7.1: La región de invarianza Λ (Efecto Allee fuerte).

Lema 3 Las soluciones del sistema 7.2 son acotadas.

Demostración: Con el objetivo de demostrar que las trayectorias están acotadas, se analiza su comportamiento en el infinito mediante la compactificación de Poincaré [8, 23, 35, 37]. para esto se introduce las variables :

$$X = \frac{u}{v}, \quad y, \quad Y = \frac{1}{v}$$

entonces

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{d\tau} - u \frac{dv}{d\tau} \right], \quad y, \quad \frac{dY}{d\tau} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\tau}$$

Después de algunas simplificaciones algebraicas, el nuevo sistema viene dado por:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{Y^5} [X(X + DY)[(Y - X)(X - MY)(AX^2 - BXY + Y^2) - NXY^2] \\ \quad + WXY^2(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2), \\ \frac{dY}{d\tau} = \frac{1}{Y^2} [W(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2)]. \end{cases}$$

Si hacemos el cambio en la escala de tiempo $T = \frac{1}{y^5}\tau$, se obtiene el siguiente sistema

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{dT} = X(X + DY)[(Y - X)(X - MY)(AX^2 - BXY + Y^2) - NXY^2] \\ \quad + WXY^2(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2), \\ \frac{dY}{dT} = WY^3(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2). \end{cases}$$

Por lo tanto

$$J\hat{Z}_\eta(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el método del *blowing-up* (ver [8, 24]), con el objetivo de desingularizar el origen en el campo vectorial $\hat{Z}_\eta(X, Y)$, hacemos los cambios de variable:

$$X = r, \quad y = Y = r^2s. \quad \text{entonces} \quad \frac{dX}{dT} = \frac{dr}{dT}, \quad y, \quad \frac{ds}{dT} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs \frac{dr}{dT} \right).$$

Por lo tanto, el sistema anterior se transforma en el sistema.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= r^6 [(1 + Drs)[(rs - 1)(1 - Mrs)(A - Brs + r^2s^2) - Nrs^2] \\ &\quad + Wrs^2(1 - r - Dr^2s)(A - Brs + r^2s^2)], \\ \frac{ds}{dT} &= r^5s [Wrs^2(1 - r - Dr^2s)(A - Brs + r^2s^2) - 2[(1 + Drs)[(rs - 1)(1 - Mrs)(A - Brs + r^2s^2) \\ &\quad - 2Nrs^2]] - 2Wrs^2(1 - r - Dr^2s)(A - Brs + r^2s^2)]. \end{aligned}$$

Consideramos el cambio en la escala del tiempo $\zeta = r^5T$. Obtenemos:

$$\widetilde{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{dr}{d\zeta} = r[(1 + Drs)[(rs - 1)(1 - Mrs)(A - Brs + r^2s^2) - Nrs^2] \\ \quad + Wrs^2(1 - r - Dr^2s)(A - Brs + r^2s^2)], \\ \frac{ds}{d\zeta} = s[-Wrs^2(1 - r - Dr^2s)(A - Brs + r^2s^2) - 2[(1 + Drs)[(rs - 1)(1 - Mrs) \\ \quad (A - Brs + r^2s^2) - 2Nrs^2]]. \end{cases}$$

que tiene matriz Jacobiana en el punto $(0, 0)$

$$J\widetilde{Z}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\det J\widetilde{Z}_\eta(0, 0) = -2A^2 < 0,$$

Se tiene que $(0, 0)$ es un punto de silla de los campos vectoriales \widetilde{Z}_η y \hat{Z}_η y por lo tanto, el punto $(0, \infty)$ es un punto de silla del campo vectorial compactificado. Es decir, las soluciones 7.2 son acotadas [8].

7.1.3. Naturaleza de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema 7.2 son: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (M, 0)$ y $P_3 = (0, D)$. El punto de equilibrio que se encuentra en el interior es $P_4 = (u, v)$, con $v = u + D$ y u satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=0}^4 A_i u^i = 0, \quad (7.3)$$

Donde se le dan los coeficientes A_i :

$$A_4 = A, \quad A_3 = -(A+B+AM), \quad A_2 = B+AM+BM+N+1, \quad A_1 = -(1+BM+M-ND), \\ A_0 = M.$$

Esta ecuación cuártica tiene en general dos raíces:

7.1.3.1. Condición de al menos una raíz positiva de la ecuación 7.3

Aquí encontramos condiciones suficientes para la existencia de una raíz positiva de la ecuación 7.3.

Suponiendo que habrá una raíz compleja γ y también su conjugada γ^* de modo que este par de raíces complejas construyan la cuadrática con discriminante negativo $u^2 + bu + d = (u - \gamma)(u - \gamma^*) = u^2 - 2\text{Re}(\gamma)u + |\gamma|^2$ donde b y d son constantes reales con $|\gamma|^2 > 0$.

Ecuación 7.3 entonces tendrá la siguiente factorización.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^4 A_i u^i &= A_4(u^2 + bu + d)(u^2 + pu + q) \\ &= A_4[u^4 + (p+b)u^3 + (q+bp+d)u^2 + (bq+dp)u + dq],\end{aligned}$$

Donde p y q son determinantes. Al igualar el coeficiente de potencia similares de u a la izquierda y a la derecha, obtenemos:

$$p + b = \frac{A_3}{A_4}, \quad q + bp + d = \frac{A_2}{A_4}, \quad bq + dp = \frac{A_1}{A_4}, \quad dq = \frac{A_0}{A_4},$$

por lo tanto

$$q = \frac{A_0}{A_4 d} = \frac{A_0}{A_4 |\gamma|^2}, \quad \text{and, } p = \frac{A_3}{A_4} - b = \frac{A_3}{A_4} + 2\text{Re}(\gamma).$$

Las otras dos raíces de la ecuación se encuentran así:

$$u_3^{(1)} = \frac{[-p + \sqrt{p^2 - 4q}]}{2}, \quad u_3^{(2)} = \frac{[-p - \sqrt{p^2 - 4q}]}{2}$$

Aplicando las condiciones $q < 0$, $p > 0$, obtenemos $u_3^{(1)} > 0$, que asegura la singularidad y viabilidad del punto de equilibrio en el interior.

7.1.3.2. Puntos de equilibrio sobre los ejes.

En esta sección analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio que se encuentran sobre los ejes coordenados, es decir, sobre el eje u y v .

Lema 4 *Para todo (A, B, N, W, D) el punto $P_0 = (0, 0)$ es un punto silla hiperbólico.*

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana del sistema 7.2 en el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ es:

$$JZ_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} -DM & 0 \\ 0 & WD \end{pmatrix}.$$

Como

$\det JZ_\eta(0, 0) = -WMD^2 < 0$, por que $0 < M < 1$ y $W > 0$. la singularidad $(0, 0)$ es un punto de silla hiperbólico. [25].

Lema 5 *Para todo (A, B, M, N, W) , $P_1 = (1, 0)$ es un punto de silla hiperbólico.*

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana del sistema 7.2 en el punto de equilibrio

$P_1 = (1, 0)$ es:

$$JZ_\eta(1, 0) = \begin{pmatrix} (M-1)(D+1)(A-B+1) & -N(D+1) \\ 0 & W(D+1)(A-B+1) \end{pmatrix}.$$

donde

$\det JZ_\eta(1, 0) = W(M-1)(D+1)^2(A-B+1)^2 < 0$, por que $M < 1$ y $W > 0$. Luego, la singularidad $(1, 0)$ es un punto de silla hiperbólico [25].

Lema 6 Para todo (A, B, M, N, W) , $P_2 = (M, 0)$ es un punto repulsor .

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana del sistema 7.2 en el punto de equilibrio

$P_2 = (M, 0)$ es:

$$JZ_\eta(M, 0) = \begin{pmatrix} M(1-M)(M+D)(AM^2 - BM + 1) & -NM^2(M+D) \\ 0 & W(M+D)(AM^2 - BM + 1) \end{pmatrix},$$

Donde

$\det JZ_\eta(M, 0) = WM(1-M)(M+D)^2(AM^2 - BM + 1)^2 > 0$, con $M < 1$

y

$\text{tra}(JZ_\eta(M, 0)) = (AM^2 - BM + 1)(M+D)[M(1-M) + W] > 0$,

entonces, $P_2 = (M, 0)$ es un punto repulsor . [25].

Lema 7 Para todo (A, B, M, N, W) , $P_3 = (0, D)$ es un punto hiperbólico atractor.

Demostración: Evaluando la matriz Jacobiana del sistema 7.2 en el punto de equilibrio

$P_3 = (0, D)$ es:

$$JZ_\eta(0, D) = \begin{pmatrix} -DM & 0 \\ WD & -WD \end{pmatrix},$$

Donde

$\det JZ_\eta(0, D) = WMD^2 > 0$,

y

$\text{tra}(JZ_\eta(0, D)) = -DM - WD < 0$,

entonces, $P_3 = (0, D)$ es un punto hiperbólico atractor. [25].

Nota: Si $D = 0$, esta singularidad colapsa con $(0, 0)$ [24].

7.1.3.3. Comportamiento del sistema alrededor de $P_4 = (u, u + D) = (H, H + D)$

Para el análisis del punto de equilibrio interior, es importante evaluar el punto en la matriz Jacobiana del sistema 7.2, tenemos:

$$JZ_\eta(H, H + D) = \begin{pmatrix} J_{11} & -H^2N(H + D) \\ J_{21} & -W(H + D)(AH^2 - BH + 1) \end{pmatrix},$$

Donde,

$$J_{11} = -6AH^5 + 5(A - DA + B + AM)H^4 + (-4B + 4AD + 4BD - 4AM - 4BM + 4ADM - 4 - 3N)H^3 + (-3DB - 3D + 3BM + 3M - 3ADM - 3BDM - 5ND + 3)H^2 + 2(D - M + BDM + DM - ND^2)H - DM$$

$$J_{21} = W(H + D)[AH^2 + (-B + 2AD)H + 1]$$

Luego, realizando varios procedimientos algebraicos obtenemos la siguiente traza:

$$\begin{aligned} \text{tra}JZ_\eta(H, H + D) &= -6AH^5 + 5(A - DA + B + AM)H^4 + (-4B + 4AD + 4BD - 4AM - 4BM + 4ADM - 4 - 3N - WA)H^3 + (-3DB - 3D + 3BM + 3M - 3ADM - 3BDM - 5ND + 3 + WB - ADW)H^2 \\ &+ (2D - 2M + 2BDM + 2DM - 2ND^2 - W + BWD)H - D(M + W) \end{aligned}$$

Nosotros podemos concluir que el determinante de la matriz Jacobiana es:

$$\det JZ_\eta(H, H + D) = J_{11} * J_{22} - J_{12} * J_{21}$$

Sustituyendo cierto valores, obtenemos:

$$P = -6A$$

$$Q = 5(A - DA + B + AM)$$

$$O = (-4B + 4AD + 4BD - 4AM - 4BM + 4ADM - 4 - 3N - WA)$$

$$R = (-3DB - 3D + 3BM + 3M - 3ADM - 3BDM - 5ND + 3 + WB - ADW)$$

$$S = (2D - 2M + 2BDM + 2DM - 2ND^2 - W + BWD)$$

reemplazando en la traza tenemos:

$$\text{tra}JZ_\eta(H, H + D) = PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2SH - D(M + W)$$

Es importante, para este análisis asumir que $\det JZ_\eta(H, H + D) > 0$, lo que significa que la naturaleza de los puntos dependen del signo de la traza.

$$T = PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2SH - D(M + W)$$

Denotaremos por $E = (\text{tr} JZ(H, H + D))^2 - 4\det JZ(H, H + D)$, para poder determinar que el punto positivo es nodo o foco.

Teorema 4 *Naturaleza del punto de equilibrio positivo.*

1. *Supongamos que $v_s > v_u$, entonces,*

a) *Es un atractor hiperbólico, si y sólo si, $D > \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(M + W)}$.*

1) *Es un nodo atractor, si y sólo si, $E > 0$.*

2) *Es un foco atractor, si y sólo si, $E < 0$.*

b) *Es un repulsor hiperbólico, si y sólo si, $D < \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(M + W)}$.*

1) *Es un nodo repulsor, si y sólo si, $E > 0$.*

2) *Es un foco repulsor, si y sólo si, $E < 0$.*

c) *Es un foco débil (equilibrio no-hiperbólico), si y sólo si:*

$$D = \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(M + W)}$$

2. *Supongamos que $v_s < v_u$, entonces, $(H, H + D)$ es un nodo o foco repulsor hiperbólico.*

Prueba: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(H, H + D)$ y asumiendo que T es negativo, positivo o cero, y considerando las posiciones relativas de la variedad estable del punto $(H, H + D)$ y la variedad inestable del punto $(1, 0)$.

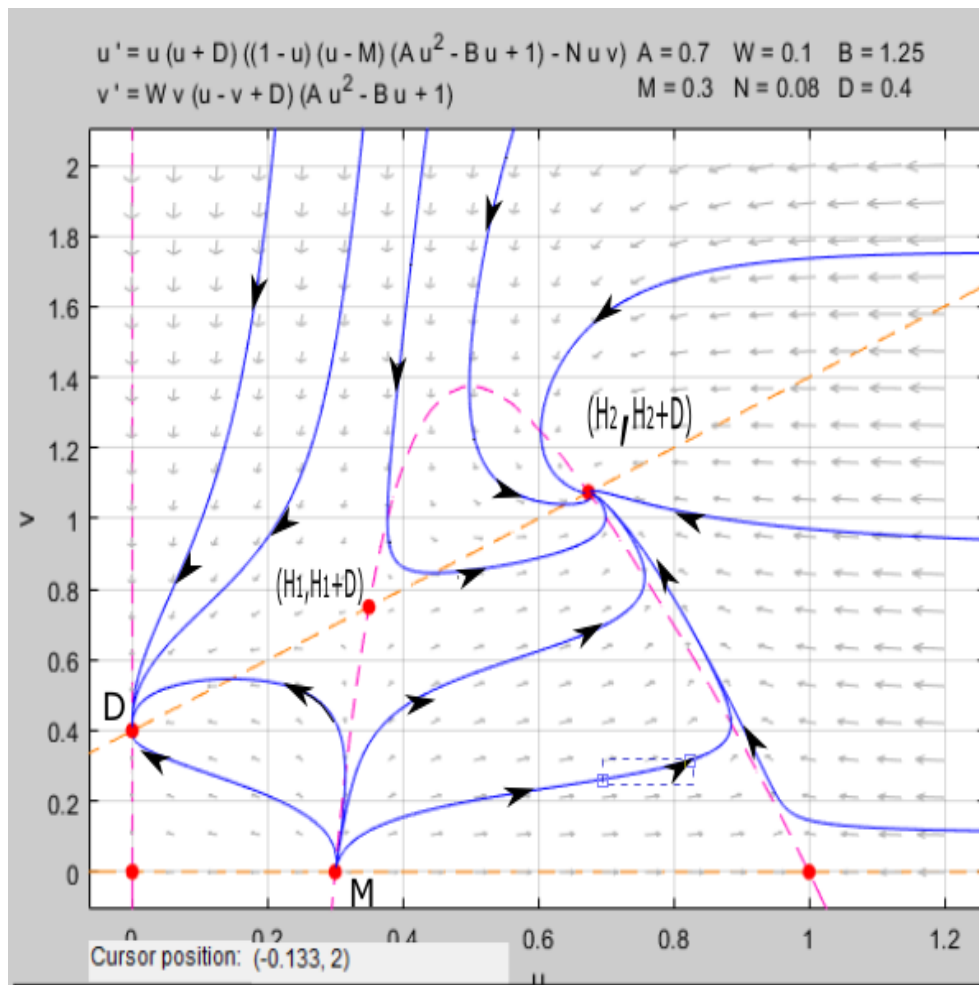
7.1.4. Algunas simulaciones.

En esta sección se realizan simulaciones del sistema adimensional en u y v , con el objetivo de ilustrar los resultados de los lemas anteriores. Se puede observar en las simulaciones que independientemente los valores que tomen los parámetros A, B, N, W, M , y $D \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

El punto $(0, 0)$ es un punto de silla, el punto $(M, 0)$ es un punto repulsor, el punto $(1, 0)$ es un punto de silla y el punto $(0, D)$ es un punto hiperbolico atractor.

7.1.4.1. Dos singularidades

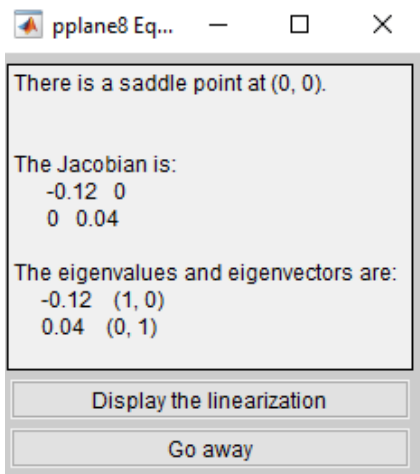
En esta simulación le proporcionamos los siguientes valores a los parámetros: $A = 0.7$, $B = 1.25$, $N = 0.08$, $W = 0.1$, $M = 0.3$ y $D = 0.4$.



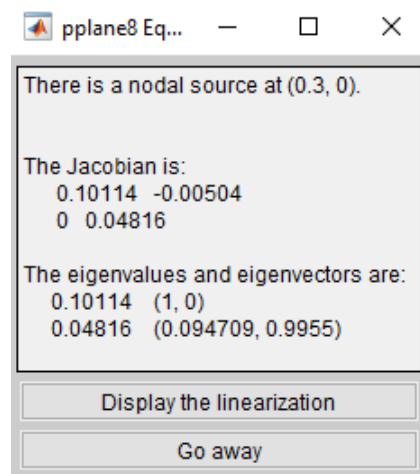
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.2: Simulación con dos singularidades

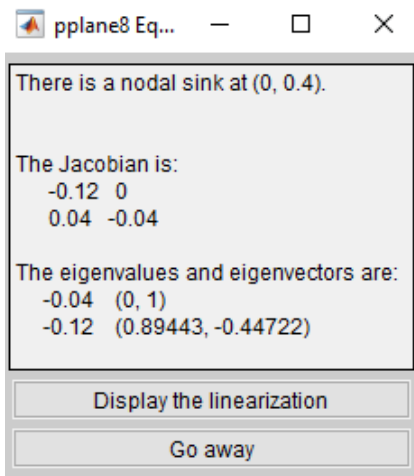
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



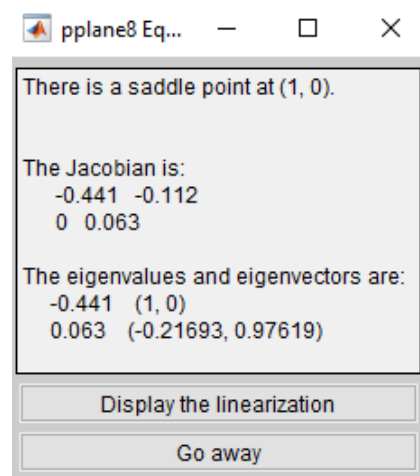
(a) El punto de equilibrio $(0, 0)$



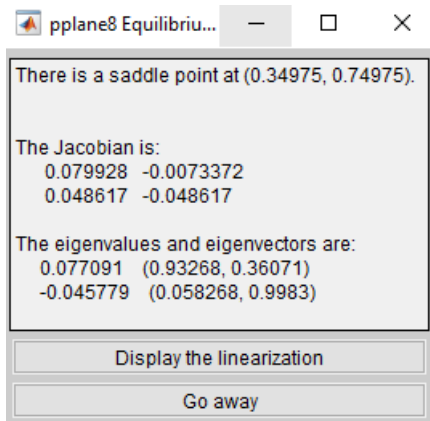
(b) El punto de equilibrio $(M, 0)$



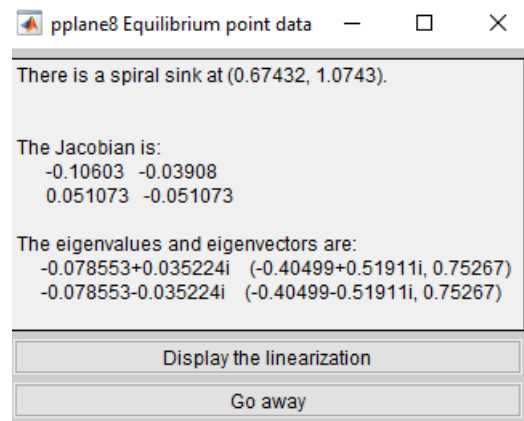
(c) El punto de equilibrio $(0, D)$



(d) El punto de equilibrio $(1, 0)$



(e) El punto de equilibrio $(H_1, H_1 + D)$



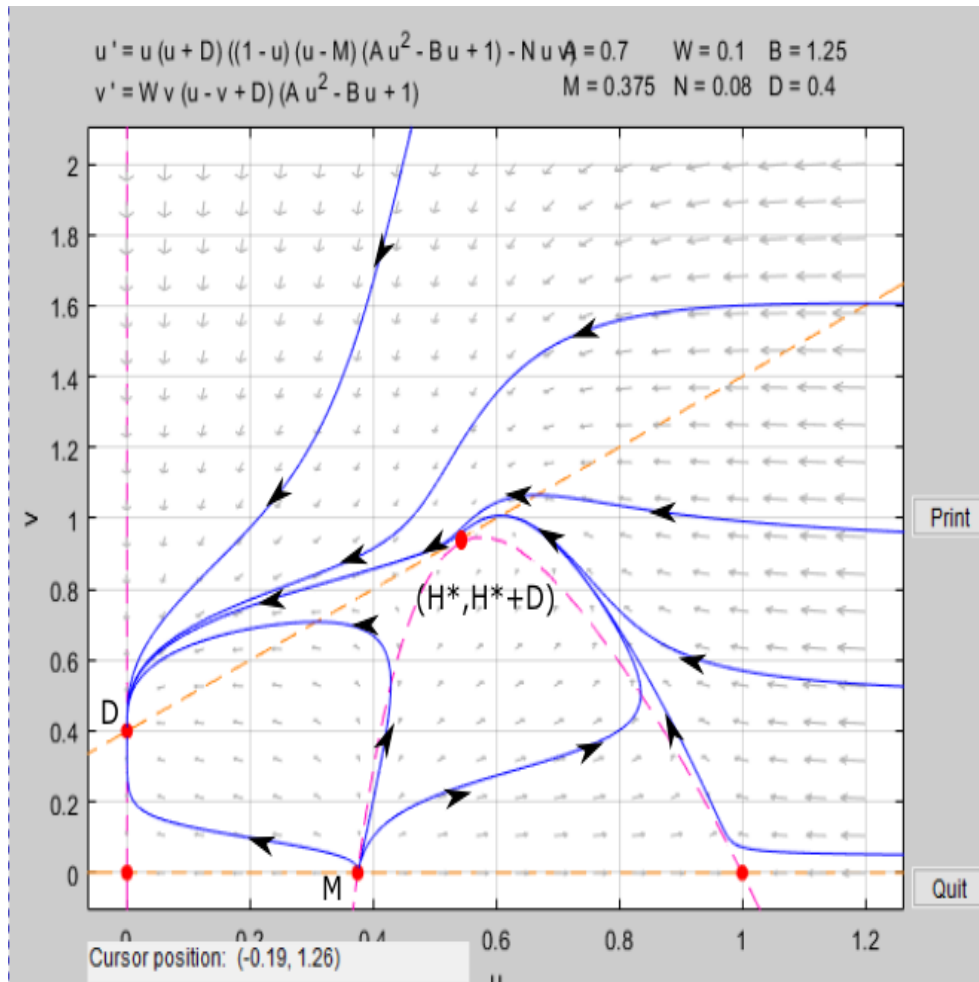
(f) El punto de equilibrio $(H_2, H_2 + D)$

Figura 7.3: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay dos singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee fuerte).

fuelle: Elaboración propia (2022)

7.1.4.2. Una singularidad

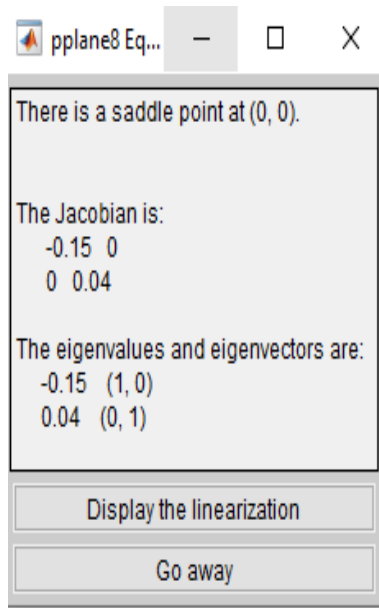
En esta simulación dimos los siguientes valores a los parámetros: $A = 0.7$, $B = 1.25$, $N = 0.08$, $W = 0.1$, $M = 0.375$ y $D = 0.4$.



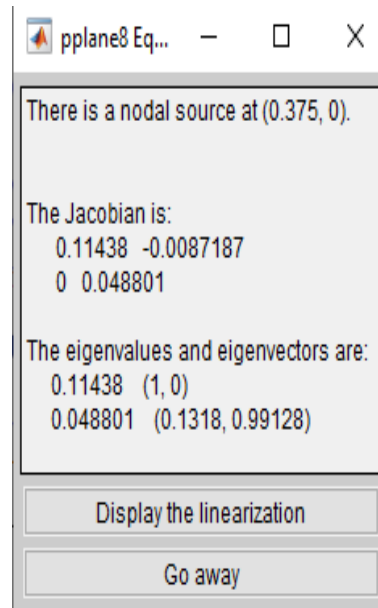
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.4: Simulación con una singularidades

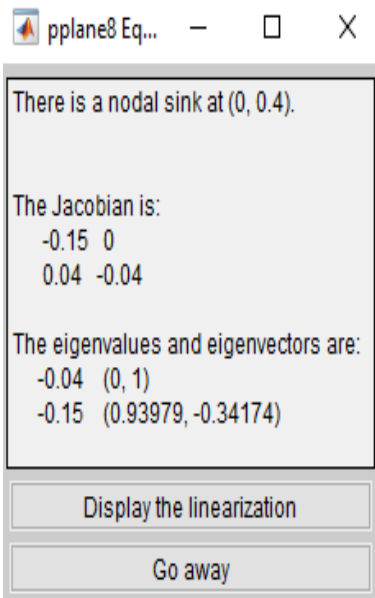
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



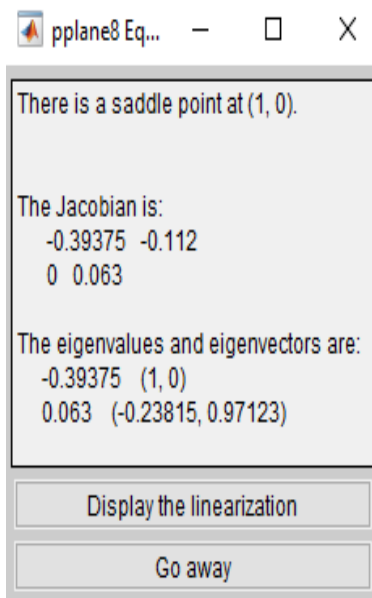
(a) El punto de equilibrio (0, 0)



(b) El punto de equilibrio (M, 0)



(c) El punto de equilibrio (0, D)



(d) El punto de equilibrio (1, 0)

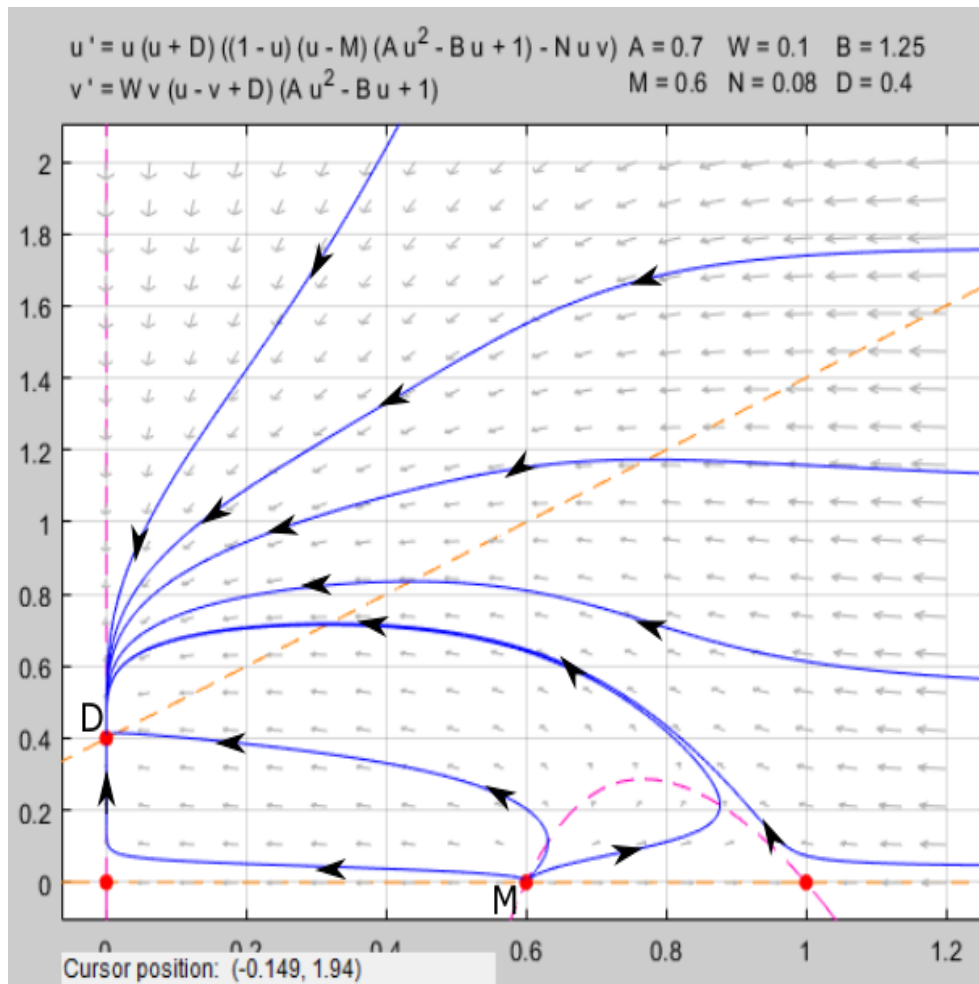
Figura 7.5: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay una singularidad dentro de la región de invarianza (Efecto Allee fuerte).

fuelle: Elaboración propia (2022)

Nota: El punto $(H^*, H^* + D)$, no arroja resultados de su comportamiento en el aplicativo matlab. Pero analizando la Figura 7.4, podemos deducir que es un punto cúspide.

7.1.4.3. Ninguna singularidad en el primer cuadrante.

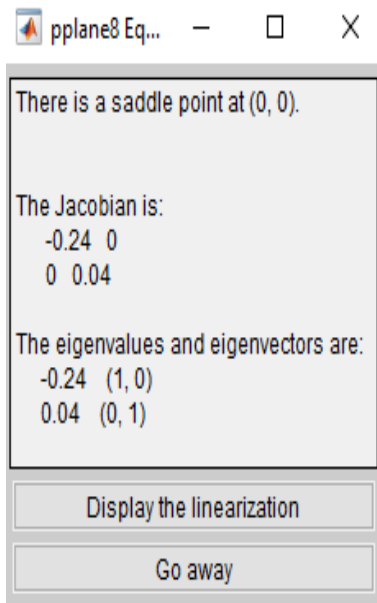
En esta simulación dimos los siguientes valores a los parámetros: $A = 0.7$, $B = 1.25$, $N = 0.08$, $W = 0.1$, $M = 0.6$ y $D = 0.4$.



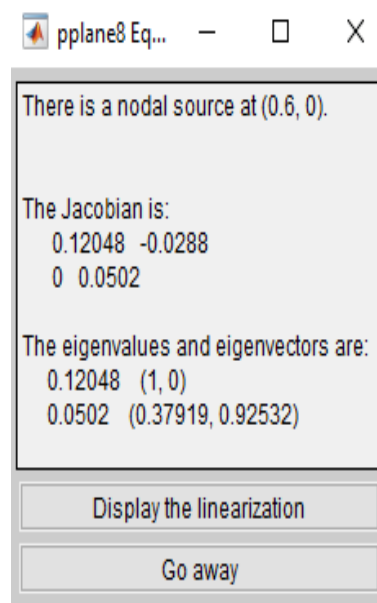
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.6: Simulación sin singularidad

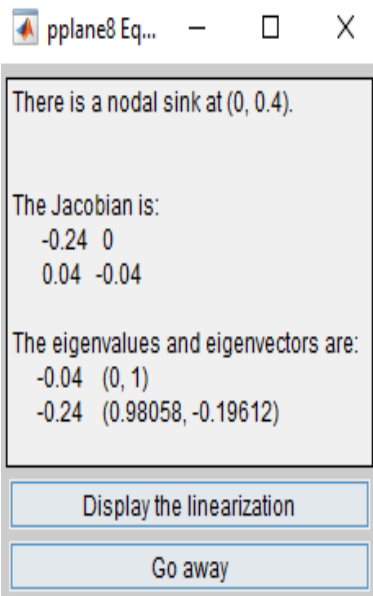
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



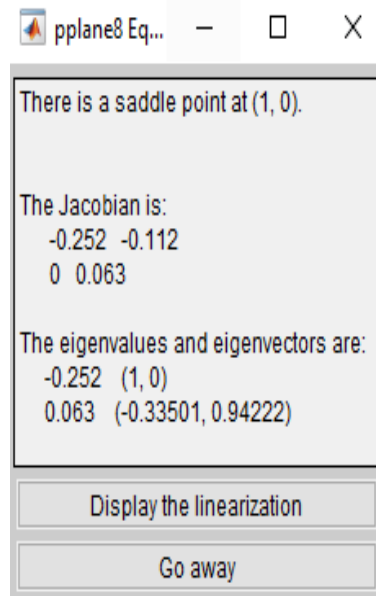
(a) El punto de equilibrio (0, 0)



(b) El punto de equilibrio (M, 0)



(c) El punto de equilibrio (0, D)



(d) El punto de equilibrio (1, 0)

Figura 7.7: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando no hay singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee fuerte).

fuelle: Elaboración propia (2022)

7.2. Modelo uno (Efecto Allee débil)

7.2.1. Modelo a estudiar

En lo que sigue el trabajo de investigación vamos a considerar el efecto Allee débil, es decir, cuando $m = 0$. El modelo a estudiar se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas no-lineales de tipo Kolmogorov, dado por:

$$X_\gamma : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx^2 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right). \end{cases} \quad (7.4)$$

Donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ indican el tamaño de la población de presas y depredador respectivamente en cada tiempo $t \geq 0$ (medido como biomasa, el número de individuos o densidad por unidad de superficie o volumen)

Aquí $\gamma = \{(r, K, q, a, b, s, n, c) \in \mathbb{R}_+^8\}$, donde, todos los parámetros son positivos, todos tienen diferentes significados ecológicos.

Los parámetros r, K, q, a, b, s, n, c , se definen la siguiente manera:

- r : Tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas.
- K : Capacidad de carga del medio ambiente de las presas.
- q : Tasa máxima de consumo per cápita (número de presas consumidas por cada depredador en una unidad de tiempo).
- a : Tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo
- b : Tasa de saturación de depredadores, es decir, la cantidad de presas es tan alta que los depredadores no pueden consumirlas todas.
- s : Tasa de crecimiento intrínseco de la población de depredadores.
- n : Medida de calidad de presas como fuente alimenticia para el depredador.
- c : Es el tamaño de alimento alternativo para los depredadores.

Debido a la gran cantidad de parámetros que tiene el sistema 7.4, realizaremos un cambio de variable y un cambio en la escala del tiempo. Para simplificar los cálculos haremos los siguientes cambios de variable (ver [8], [20])

$$x = Ku, \quad y = nKv \quad y \quad \tau = \frac{rK}{\left(u + \frac{c}{nk}\right) \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)} t$$

que dan lugar a la función $\varphi : \Omega_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$

$$\text{definida por } \varphi(u, v, \tau) = \left(Ku, nKv, \frac{\left(u + \frac{c}{nk}\right) \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right)}{rK} \tau \right) = (x, y, t)$$

donde $\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\}$.

Podemos ver que:

$$\det D\varphi(u, v, \tau) = \frac{nk}{r} u \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1\right) > 0.$$

Esto quiere decir que φ es un difeomorfismo que mantiene la orientación del tiempo [?] y por lo tanto el cambio de variable transforma el sistema 7.4 en uno topológicamente equivalente (ver [25] [42]) con campo vectorial $Z_\eta = \varphi \circ X_\mu$ [8], donde $Z_\eta(u, v) = P(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$, descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales de cinco parámetros del tipo de Kolmogorov:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2(u + D)[(1 - u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv], \\ \frac{dv}{d\tau} = Wv(u - v + D)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \quad (7.5)$$

donde $\eta = \{(N, W, A, B, D) \in \mathbb{R}_5^+\}$ con $N = \frac{qnK}{ra}$, $W = \frac{s}{rK}$, $A = \frac{K^2}{a}$, $B = \frac{bK}{a}$ y $D = \frac{c}{nK}$

La matriz Jacobiana del sistema 7.5 es:

$$J\hat{Z}_\eta(u, v) = \begin{pmatrix} J11 & -Nu^2(u + D) \\ J21 & W(u - 2v + D)(Au^2 - Bu + 1) \end{pmatrix},$$

donde

$$J11 = u[-6Au^4 + 5(A + B - AD)u^3 + 4(-B + AD + BD - 1)u^2 + 3(-BD - D - Nv + 1)u + 2(D - NDv)]$$

$$J21 = Wv[3Au^2 + 2(-B - Av + 2AD)u + Bv - BD + 1]$$

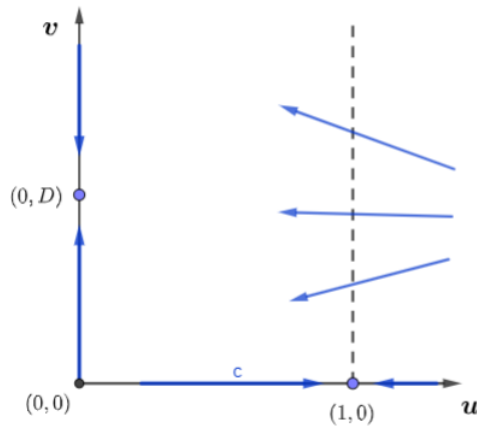
7.2.2. Resultados principales

En este apartado mostraremos la región de invarianza del sistema 7.5.

Lema 8 *El conjunto $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$, es una región de invarianza del sistema 7.5.*

Demostración: Para el sistema 7.5, se tiene:

- Si $u = 0$, entonces $\frac{du}{d\tau} = 0$, and, $\frac{dv}{d\tau} = -Wv(v - D) < 0$ y las trayectorias permanecen sobre el eje v , ahora bien, si $v < D$ entonces tiende a ser positivo, ahora, si $v > D$ entonces tiende a ser negativo. y es equivalente decir, que las trayectorias permanecen en el eje v .
- Si $v = 0$, entonces $\frac{dv}{d\tau} = 0$, and, $\frac{du}{d\tau} = -u^2(u + D)(u - 1)(Au^2 - Bu + 1) < 0$ y las trayectorias permanecen sobre el eje u
- Si $u = 1$, tenemos que $\frac{du}{d\tau} = -Nv(1 + D) < 0$, y para cualquier signo de $\frac{dv}{d\tau} = -Wv(-1 + v - D)(A - B + 1) < 0$, las trayectorias apuntan hacia el interior de Λ .



fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.8: La región de Invarianza Λ (Efecto Allee débil)

Lema 9 *Las soluciones del sistema 7.5 son acotadas.*

Demostración: Con el objetivo de comprobar su comportamiento en el infinito mediante la Compactificación de Poincaré [8, 23, 35, 37] para esto se introducen las variables $X = \frac{u}{v}$, y, $Y = \frac{1}{v}$. entonces,

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{d\tau} - u \frac{dv}{d\tau} \right] \quad \text{and} \quad \frac{dY}{d\tau} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\tau}.$$

Después de algunas manipulación algebraicas, nosotros obtenemos:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{Y^5} [X^2(X + DY)[(Y - X)(AX^2 - BXY + Y^2) - NY^2] \\ \quad + WXY^2(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2)], \\ \frac{dY}{d\tau} = \frac{1}{Y^2} [W(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2)]. \end{cases}$$

y realizando el cambio en la escala de tiempo $T = \frac{1}{y^5} \tau$, nosotros obtenemos el siguiente sistema:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{dT} = X^2(X + DY)[(Y - X)(AX^2 - BXY + Y^2) - NY^2] \\ \quad + WXY^2(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2), \\ \frac{dY}{dT} = WY^3(1 - X - DY)(AX^2 - BXY + Y^2). \end{cases}$$

Entonces,

$$J\hat{Z}_\eta(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se utiliza el metodo del blowing-up [8, 24], con el objetivo de desingularizar el origen en el campo vectorial $\hat{Z}_\eta(X, Y)$, haciendo los cambios de variable.

$$X = r, \quad y, \quad Y = r^2 s. \quad \text{entonces} \quad \frac{dX}{dT} = \frac{dr}{dT}, \quad y, \quad \frac{ds}{dT} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs \frac{dr}{dT} \right).$$

Por lo tanto, el sistema anterior se transforma en el sistema

$$\widetilde{Z}_{\eta 2} : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = r^6 [(1 + Drs)[(rs - 1)(A - Brs + r^2 s^2) - Nrs^2] \\ \quad + Wrs^2(1 - r - Dr^2 s)(A - Brs + r^2 s^2)], \\ \frac{ds}{dT} = r^5 s [-Wrs^2(1 - r - Dr^2 s)(A - Brs + r^2 s^2) - 2[(1 + Drs)[(rs - 1)(A - Brs + r^2 s^2) \\ \quad - Nrs^2]]]. \end{cases}$$

y realizando el cambio en la escala de tiempo $\zeta = r^5 T$. Nosotros obtenemos:

$$\widetilde{Z}_{\eta 3} : \begin{cases} \frac{dr}{d\zeta} = r [(1 + Drs)[(rs - 1)(A - Brs + r^2 s^2) - Nrs^2] \\ \quad + Wrs^2(1 - r - Dr^2 s)(A - Brs + r^2 s^2)], \\ \frac{ds}{d\zeta} = s [-Wrs^2(1 - r - Dr^2 s)(A - Brs + r^2 s^2) - 2[(1 + Drs)[(rs - 1)(A - Brs + r^2 s^2) \\ \quad - Nrs^2]]]. \end{cases}$$

cuya matriz Jacobiana en el punto $(0, 0)$ es:

$$J\widetilde{Z}_{\eta^3}(0, 0) = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}.$$

Donde $\det J\widetilde{Z}_{\eta}(0, 0) = -2A^2 < 0$,

Entonces, se tiene que $(0, 0)$ es un punto de silla de los campos vectoriales \widetilde{Z}_{η} y \widetilde{Z}_{η^3} . Por lo tanto, el punto $(0, \infty)$ es un punto de silla del campo vectorial compactificado. Es decir, las órbitas del sistema son acotadas para cualquier valor de los parámetros [8].

7.2.3. Naturaleza de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema 7.5, o singularidades del campo vectorial \hat{Z}_{η} , son $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (0, D)$. Y los puntos que se encuentran en la intersección de las curvas isoclinas:

$$(1 - u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv = 0 \quad \text{y} \quad u - v + D = 0.$$

Estas últimas singularidades $(u, u+D)$ satisfacen $v = u+D$ y por lo tanto u debe satisfacer la ecuación.

$$(1 - u)(Au^2 - Bu + 1) - N(u + D) = 0$$

es decir, u debe ser la raíz del polinomio

$$p(u) = Au^3 - (B + A)u^2 + (1 + B + N)u - (1 - ND). \quad (7.6)$$

Usando la regla de signos de Descartes obtenemos que $p(u)$ tiene tres raíces reales positivas y no tiene raíces negativas.

- Si $p(u) = Au^3 - (B + A)u^2 + (1 + B + N)u - (1 - ND)$, hay tres raíces reales positivas.
- Si $p(-u) = -Au^3 - (B + A)u^2 - (1 + B + N)u - (1 - ND)$, no hay raíces reales negativas.

Analizando los resultados de la regla de signos de Descartes.

Cantidad de raíces	3	3
\mathbb{R}^+	3	1
\mathbb{R}^-	0	0
\mathbb{C}^+	0	2

El polinomio $p(u)$ tiene tres raíces reales positivas, dos (una simple y una de multiplicidad dos) o una raíz real positiva. En cualquier situación se puede asegurar la existencia de por lo menos una raíz positiva que denotaremos por H . Dividiendo $p(u)$ entre $u - H$ y se obtiene un trinomio de segundo grado que nos permitirá conocer la existencia de otras raíces del polinomio $p(u)$ y obtener condiciones algebraicas sobre el valor de los parámetros [37]. Por lo tanto,

$$p(u) = (u - H) (Au^2 - (B + A - AH)u + 1 + B + N - H(B + A - AH)).$$

Teniendo en cuenta que el residuo de la división es cero, obtenemos:

$$N = \frac{1}{D + H} (1 - H)(AH^2 - BH + 1). \quad (7.7)$$

Además, se tiene que necesariamente $H < 1$, ya que $N > 0$ y $B > 2\sqrt{A}$. Al sustituir N , el factor cuadrático de $p(u)$, tiene la forma:

$$q(u) = \left(Au^2 - (B + A(1 - H))u + \frac{AH^2D - HBD - AHD + DB + D + 1}{H + D} \right).$$

Utilizando nuevamente la regla de signos de Descartes, es claro que si $(B + A(1 - H)) \leq 0$, entonces el polinomio $q(u)$ no tiene raíces reales positivas. En caso contrario, si $(B + A(1 - H)) > 0$ entonces el polinomio $q(u)$ posee a lo más dos raíces reales positivas.

Definamos:

$$a_0 = A; \quad a_1 = -(B + A(1 - H)); \quad a_2 = \frac{AH^2D - HBD - AHD + DB + D + 1}{H + D} \text{ y ;}$$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = (B + A(1 - H))^2 - \frac{4A[AH^2D - HBD - AHD + DB + D + 1]}{H + D}.$$

Lema 10 Para $q(u)$ se tiene que:

1. Asumiendo $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$; entonces

a) existen dos soluciones reales positivas, si y sólo si, $\Delta > 0$, las cuales son:

$$u_1 = \frac{1}{2a_0}(a_1 - \sqrt{\Delta}) \text{ y } u_2 = \frac{1}{2a_0}(a_1 + \sqrt{\Delta}),$$

tales que $u_1 < u_2$.

b) Existe una solución real positiva de multiplicidad 2, si y sólo si, $\Delta = 0$.

Esta solución es $u^* = \frac{1}{2A}(B + A(1 - H))$

c) No tiene raíces reales positivas, si y sólo si, $\Delta < 0$

2. No existen raíces reales positivas, si y sólo si,

a) $a_1 = 0$ y $a_2 > 0$, o

b) $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$.

Supongamos que $1 - ND = 0$. La ecuación (7.6) se reduce a:

$$p_0(u) = (Au^2 - (B + A)u + (1 + B + N))u. \quad (7.8)$$

Ahora bien, sean $b_0 = A$, $b_1 = -(B + A)$, $b_2 = (1 + B + N)$ y $\Delta_0 = (B + A)^2 - 4A(1 + B + N)$.

Notamos que cuando $u = 0$, uno de los puntos de equilibrio positivo coincide con el punto $(0, D)$.

Lema 11 *Para la ecuación (7.8), se tiene que:*

1. Asumiendo $b_1 = -(B + A) < 0$ y $b_2 = 1 + B + N > 0$; entonces existe.

a) Dos soluciones reales positivas, si y sólo si, $\Delta_0 > 0$.

$$u_{10} = \frac{1}{2b_0}(b_1 - \sqrt{\Delta_0}) \text{ y } u_{20} = \frac{1}{2b_0}(b_1 + \sqrt{\Delta_0}),$$

b) Una solución real positiva de multiplicidad 2, si y sólo si, $\Delta_0 = 0$. Esta solución es

$$u^{**} = \frac{1}{2b_0}(B + A)$$

c) No tiene raíces reales positivas, si y sólo si, $\Delta_0 < 0$.

2. No existen raíces reales positivas, si y sólo si:

a) $b_1 = 0$ y $b_2 > 0$.

7.2.3.1. Puntos críticos sobre los ejes

Se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio que se encuentran en los ejes u y v . Determinamos la existencia de una curva separatriz en el plano de fase que divide el comportamiento de las trayectorias.

Lema 12 *Para todo (A, B, N, W, D) el punto $P_0 = (0, 0)$ es un punto silla semi-hiperbólico.*

Demostración: La matriz Jacobiana del sistema 7.5 evaluada en el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ es:

$$J\hat{Z}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & WD \end{pmatrix}.$$

Como $\det J\hat{Z}_\eta(0, 0) = 0$, y $\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(0, 0)) > 0$ entonces el punto $P_0 = (0, 0)$ es un punto silla semi-hiperbólico.

Lema 13 *Para todo (A, B, N, W, D) el punto $P_1 = (1, 0)$ es un punto silla.*

Demostración: La matriz Jacobiana del sistema 7.5 evaluada en el punto de equilibrio $P_1 = (1, 0)$ es:

$$J\hat{Z}_\eta(1, 0) = \begin{pmatrix} -(D+1)(A-B+1) & -N(1+D) \\ 0 & W(1+D)(A-B+1) \end{pmatrix}.$$

Como $\det J\hat{Z}_\eta(1, 0) = -W(D+1)^2(A-B+1)^2 < 0$, $P_1 = (1, 0)$ es un punto silla.

Lema 14 *Para todo (A, B, N, W, D) el punto $P_2 = (0, D)$ es un punto silla no-hiperbólica.*

Demostración: La matriz Jacobiana del sistema 7.5 evaluada en el punto de equilibrio $P_2 = (0, D)$ es:

$$J\hat{Z}_\eta(0, D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ WD & -WD \end{pmatrix}.$$

Como $\det J\hat{Z}_\eta(0, D) = 0$, y el $P_2 = (0, D)$ es un punto silla no-hiperbólica(usando el teorema de variedad central [16]).

Teorema 5 *Existencia de una curva homoclinica y bifurcación homoclinica.*

Como el elemento J_{11} de la matriz Jacobiana evaluada en $J\hat{Z}_\eta(0, D) = 0$ y el punto de silla de $P_3 = (u_3, u_3 + D)$ [12], coincide con el nodo atractor de $(0, D)$, obteniendo un atractor nodo de silla (Un equilibrio no-hiperbólico)

1. En el espacio de parametros, hay condiciones para que exista una curva homoclinica determinada por las variedad central e inestable del nodo silla del atractor $(0, D)$
2. Existe un ciclo limite no infinitesimal que se bifurca desde la homoclinica [12] que rodea el punto $P_4(u_4, u_4 + D)$

Demostración: Sean $W_D^s(0, D)$ las variedades estables y $W_{\nearrow}^s(0, D)$ inestables del punto de silla no hiperbolico, respectivamente.

1. Las trayectorias determinada por la variedades inestables $W_{\nearrow}^s(0, D)$ no pueden cruzar la linea recta $u = 1$ hacia la derecha desde Λ , es decir la región de invarianza. Esta órbita no puede cortar ni cruzar la trayectoria determinada por el colector central $W_D^s(0, D)$, por el teorema de existencia y unicidad. Además, el $\omega - \limite$ de las variedades inestables $W_{\nearrow}^s(0, D)$ debe ser:
 - a) El punto $P_4 = (u_4, u_4 + D)$, cuando este es un atractor.
 - b) Un ciclo limite estable, Si P_4 es repelente o si P_4 es un local atractor, rodeado por dos ciclos limites.

Por otra parte, el $\alpha - \limite$ de la $W_D^s(0, D)$ puede ser el punto de silla $(1, 0)$, o reposa en el infinito en dirección del eje de las u , o en el punto P_4 es repulsor, o en un ciclo limite inestable.

Luego, hay un subconjunto en el espacio de parámetros para el cual $W_D^s(0, D)$ intersecta con $W_{\nearrow}^s(0, D)$. $W_D^s(0, D) \cap W_{\nearrow}^s(0, D)$ es no vacia, y se obtiene una curva homoclinica. En este caso, el mismo puntos $(0, D)$ es de α y de $\omega - \limite$ de la variedades inestables $W_{\nearrow}^s(0, D)$.

2. La ruptura de la curva homoclinica determinada por la intersección de $W_D^s(0, D)$ y $W_{\nearrow}^s(0, D)$, generan un ciclo limite no infinitesimal (Existiendo una bifurcación homoclínica) [12], rodeando el punto $P_4 = (u_4, u_4 + D)$

7.2.3.2. Puntos de equilibrio positivos

La naturaleza del punto de equilibrio $(H, H + D)$ depende de la relación entre v_s, v_u , las ordenadas de los puntos $(u, v_s) \in W_c^s(0, D)$ y $(u, v_s) \in W_{\nearrow}^u(0, D)$, respectivamente y

además, la matriz Jacobiana en el punto $(u, u + D)$, esta dada por:

$$J\hat{Z}_\eta(u, u + D) = \begin{pmatrix} J_{11} & -Nu^2(u + D) \\ J_{21} & W(-u - D)(Au^2 - Bu + 1) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} J_{11} &= u[-6Au^4 + 5(A + B - AD)u^3 + (-4B + 4AD + 4BD - 4 - 3N)u^2 + \\ &\quad (-3BD - 3D - 5ND + 3)u + 2D(1 - ND)] \\ J_{21} &= W(u + D)[Au^2 + (-B + 2AD)u + 1] \end{aligned}$$

Cabe resaltar que hacemos una sustitución de $u = H$. Luego, el determinante de la matriz Jacobiana viene dado por :

$$\det J\hat{Z}_\eta(H, H + D) = J_{11} * J_{22} - J_{12} * J_{21}.$$

Mientras la traza esta dada por :

$$\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H + D)) = H[-6AH^4 + 5(A + B - AD)H^3 + (-4B + 4AD + 4BD - 4 - 3N)H^2 + (-3BD - 3D - 5ND + 3)H + 2D(1 - ND)] - W(H + D)(AH^2 - BH + 1)$$

Sustituyendo ciertos valores, obtenemos:

$$P = -6A$$

$$Q = 5(A + B - AD)$$

$$O = (-4B + 4AD + 4BD - 4 - 3N)$$

$$R = (-3BD - 3D - 5ND + 3)$$

$$S = 2D(1 - ND)$$

Reemplazando, tenemos:

$$\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H + D)) = H[PH^4 + QH^3 + OH^2 + RH + S] - W(H + D)(AH^2 - BH + 1)$$

Asumiremos $\det J\hat{Z}_\eta(H, H + D) > 0$, lo que significa que la naturaleza de los puntos dependen del signo de la traza, es decir, depende del factor:

$$T = H[PH^4 + QH^3 + OH^2 + RH + S] - W(H + D)(AH^2 - BH + 1)$$

La denotaremos por $E = (\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H + D)))^2 - 4\det J\hat{Z}_\eta(H, H + D)$, para poder determinar que el punto positivo es nodo o foco.

Para el análisis de la naturaleza de todos los puntos de equilibrio que se encuentran en el interior de Λ , se procede según lo enunciado en el Lema 10, para uno, dos o tres puntos de equilibrio positivos.

7.2.3.3. Existencia de un único punto de equilibrio positivo.

Supongamos que existe un único punto de equilibrio llamado $P_H = (H, H + D)$ en el interior de λ , es decir, satisface:

Teorema 6 *Naturaleza del punto de equilibrio positivo.*

1. Supongamos que $v_s > v_u$, entonces,

a) Es un atractor hiperbólico, si y sólo si, $W > \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(H + D)(AH^2 - BH + 1)}$.

1) Es un nodo atractor, si y sólo si, $E > 0$.

2) Es un foco atractor, si y sólo si, $E < 0$.

b) Es un repulsor hiperbólico, si y sólo si, $W < \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(H + D)(AH^2 - BH + 1)}$.

1) Es un nodo repulsor, si y sólo si, $E > 0$.

2) Es un foco repulsor, si y sólo si, $E < 0$.

c) Es un foco débil (equilibrio no-hiperbólico), si y sólo si:

$$W = \frac{PH^5 + QH^4 + OH^3 + RH^2 + SH}{(H + D)(AH^2 - BH + 1)}$$

2. Supongamos que $v_s < v_u$, entonces, $(H, H + D)$ es un nodo o foco repulsor hiperbólico.

Prueba: Evaluando la matriz Jacobiana en el punto $(H, H + D)$ y asumiendo que T es negativo, positivo o cero, y considerando las posiciones relativas de la variedad estable del punto $(H, H + D)$ y la variedad inestable del punto $(1, 0)$.

Note: La demostración de 1 es inmediata usando la matriz jacobiana.

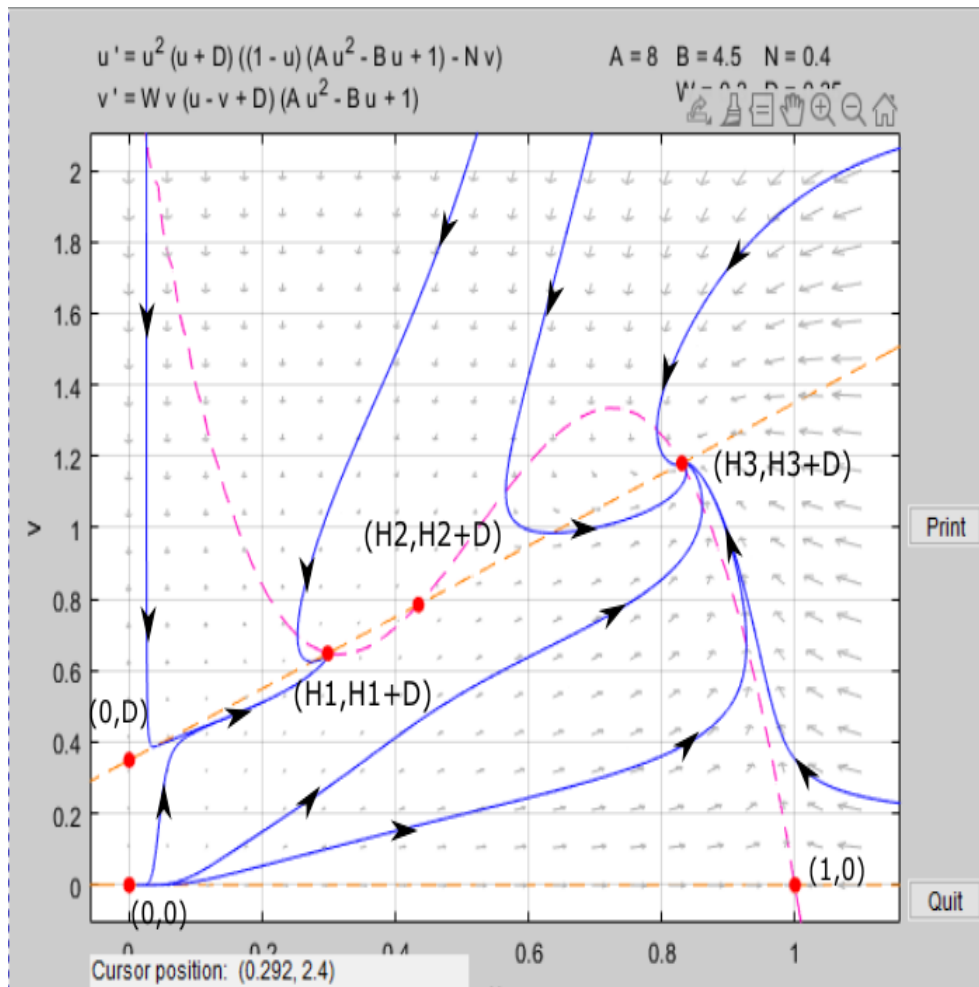
7.2.4. Algunas simulaciones

En esta sección se realizan simulaciones del sistema adimensional en u y v , con el objetivo de ilustrar los resultados de los lemas anteriores. Se puede observar en las simulaciones que independientemente los valores que tomen los parámetros A, B, N, W , y $D \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

El punto $(0, 0)$ es un punto de silla semi-hiperbólico, el punto $(1, 0)$ es un punto de silla y el punto $(0, D)$ es un punto silla no-hiperbólica.

7.2.4.1. tres singularidades

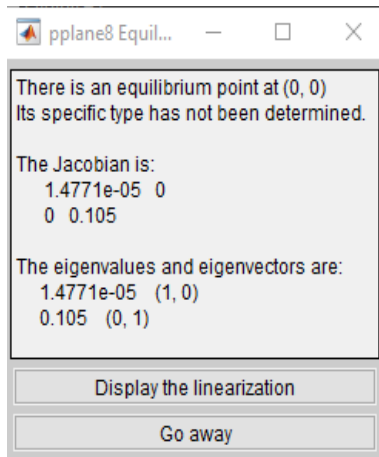
En esta simulación le proporcionamos los siguientes valores a los parámetros: $A = 8$, $B = 4.5$, $N = 0.4$, $W = 0.3$ y $D = 0.35$. Cabe resaltar que existen tres singularidades aproximadamente cuando $0.3 < D < 0.64$.



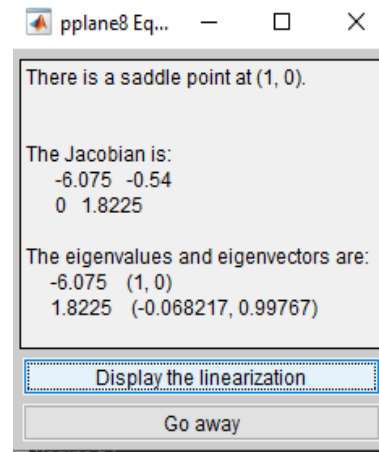
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.9: Simulación con tres singularidades

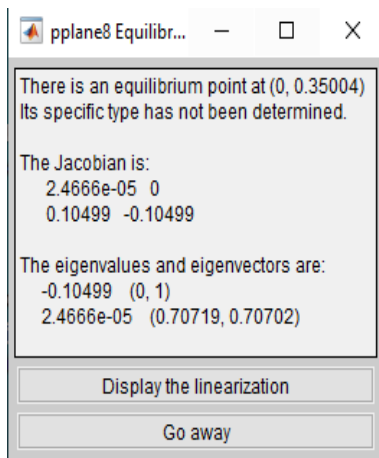
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



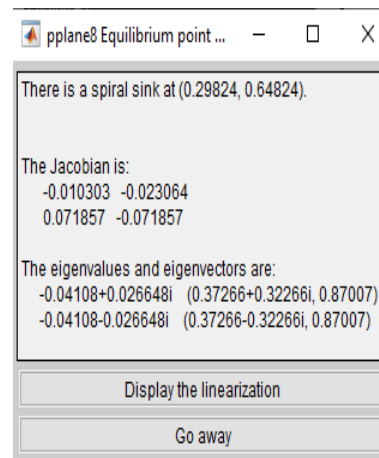
(a) El punto de equilibrio (0, 0)



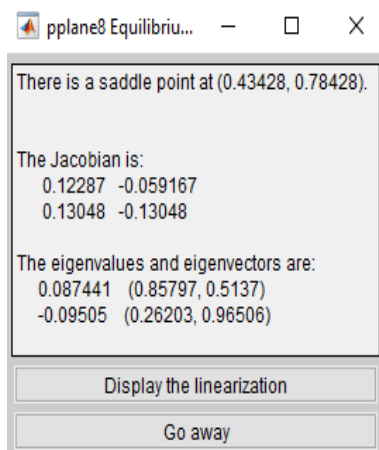
(b) El punto de equilibrio (1, 0)



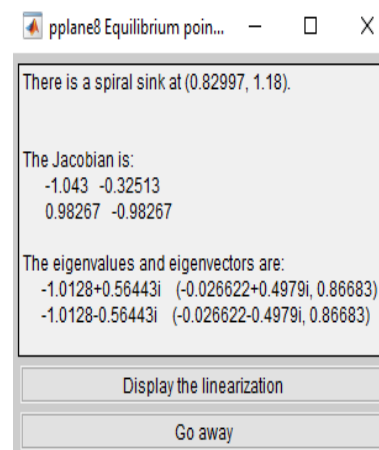
(c) El punto de equilibrio (0, D)



(d) El punto de equilibrio ($H_1, H_1 + D$)



(e) El punto de equilibrio ($H_2, H_2 + D$)



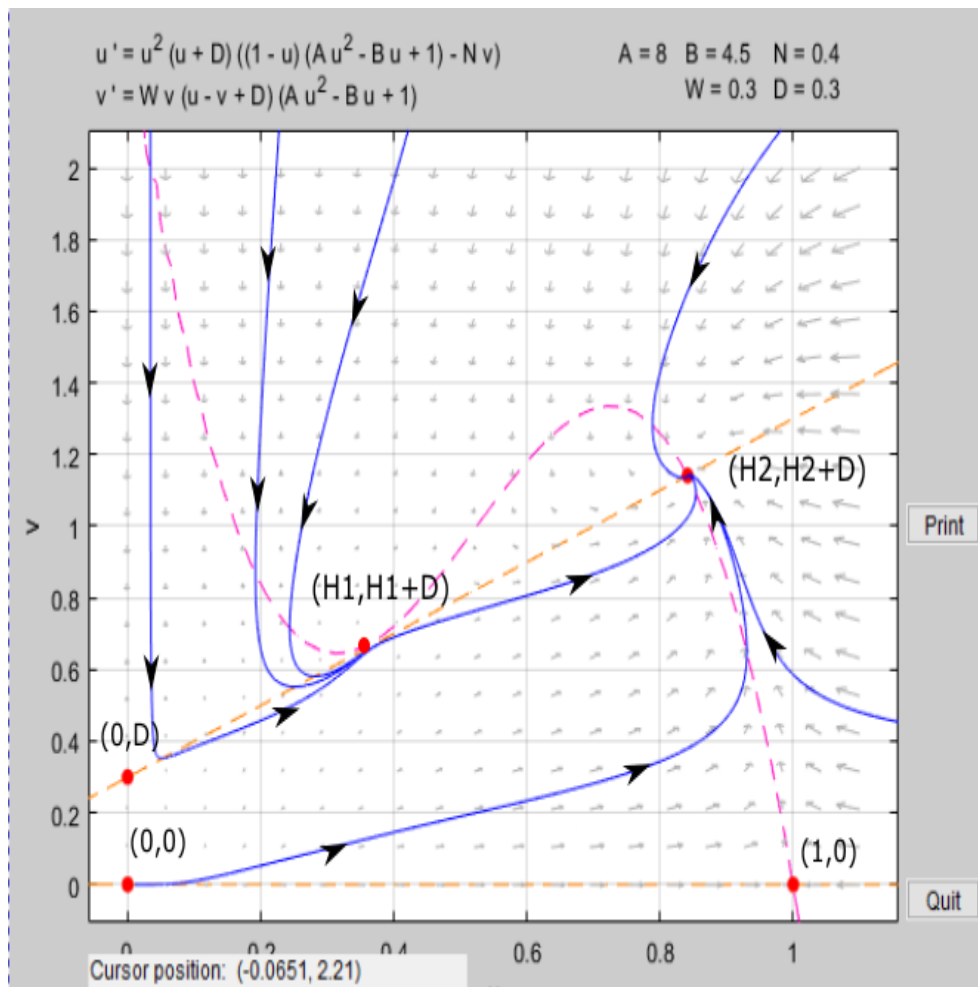
(f) El punto de equilibrio ($H_3, H_3 + D$)

Figura 7.10: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay tres singularidades dentro de la región de invarianza(Efecto Allee débil).

fuelle: Elaboración propia (2022)

7.2.4.2. dos singularidades

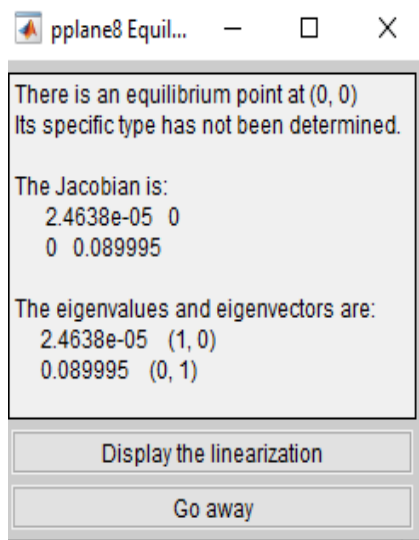
En esta simulación le proporcionamos los siguientes valores a los parámetros: $A = 8$, $B = 4.5$, $N = 0.4$, $W = 0.3$ y $D = 0.3$. Cabe resaltar que existen dos singularidades aproximadamente cuando $D = 0.3$ o $D = 0.64$. En esta simulación escogeremos $D = 0.3$.



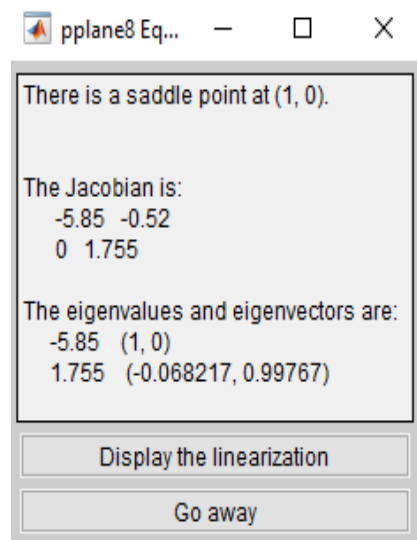
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.11: Simulación con dos singularidades

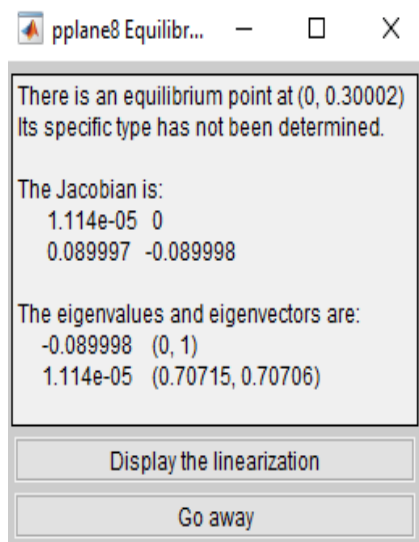
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



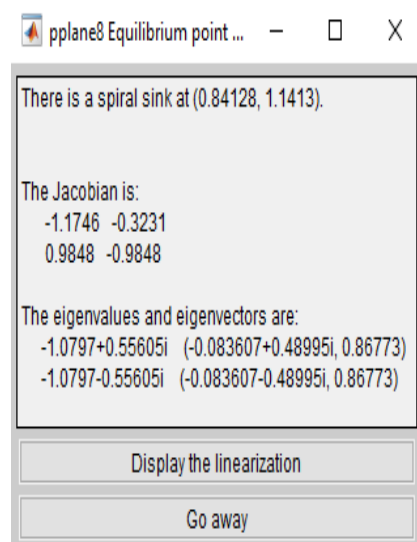
(a) El punto de equilibrio $(0, 0)$



(b) El punto de equilibrio $(1, 0)$



(c) El punto de equilibrio $(0, D)$



(d) El punto de equilibrio $(H_2, H_2 + D)$

Figura 7.12: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay dos singularidades dentro de la región de invarianza (Efecto Allee débil).

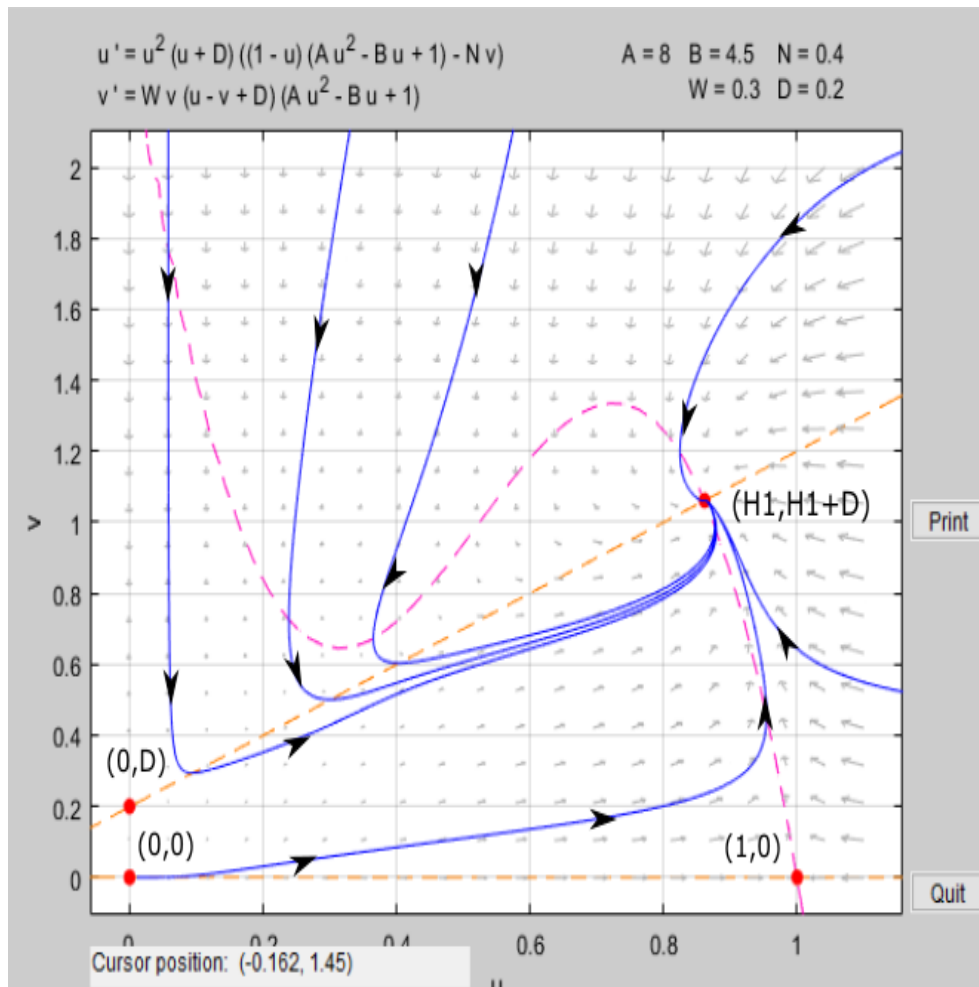
fuelle: Elaboración propia (2022)

Nota:

1. El punto $(H_1, H_1 + D)$, no arroja resultados de su comportamiento en el aplicativo matlab. Pero analizando la Figura 7.11, podemos deducir que es un punto cúspide.
2. Cuando se realiza la simulación cuando $D = 0.64$, los puntos $(H, H + D)$ mantiene el mismo comportamiento, es decir, un punto cúspide y el otro punto atractor.

7.2.4.3. Una singularidad

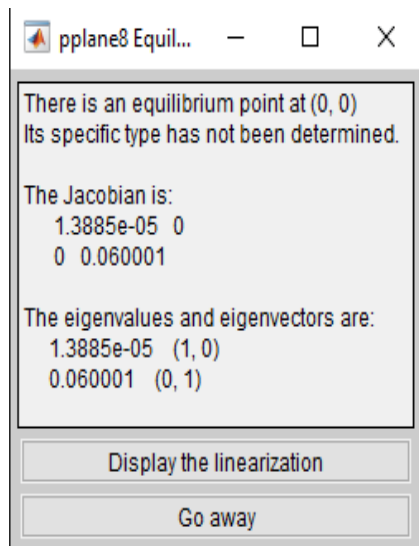
En esta simulación le proporcionamos los siguientes valores a los parámetros: $A = 8$, $B = 4.5$, $N = 0.4$, $W = 0.3$ y $D = 0.2$. Cabe resaltar que existe una singularidad cuando $D < 0.3$ o $D > 0.64$. En esta simulación escogeremos $D = 0.2$.



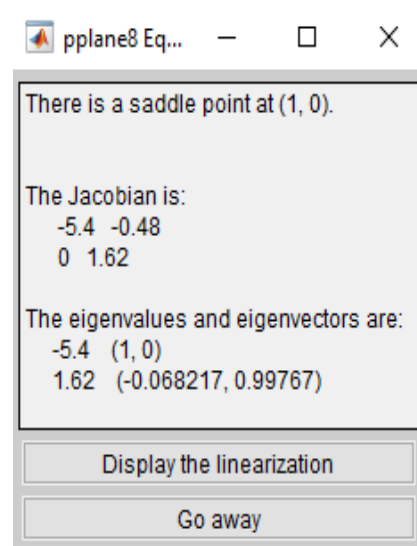
fuelle: Elaboración propia (2022)

Figura 7.13: Simulación con una singularidad

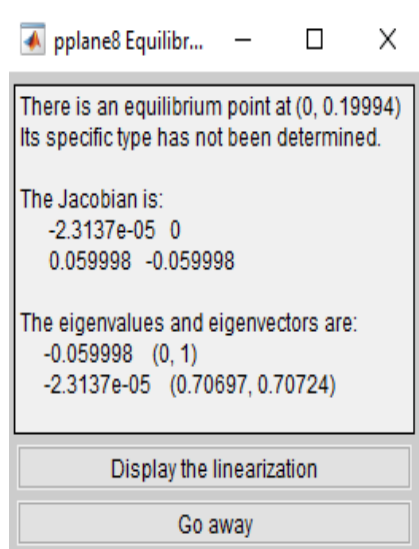
Para estos valores de los parámetros, el programa matlab arroja unos ciertos resultados prediciendo el comportamiento de los puntos de estabilidad, los cuales concuerdan con los análisis realizados en los lemas anteriores. En la tabla siguiente se mostrara el comportamiento de los puntos:



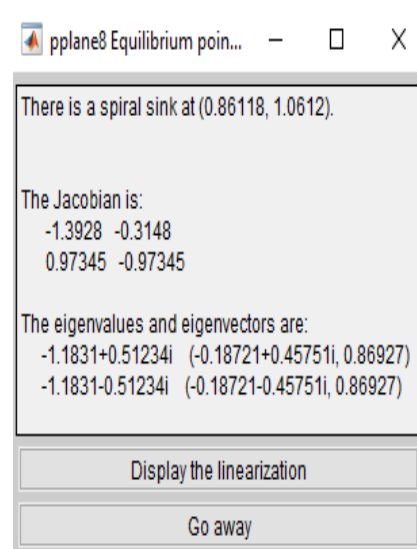
(a) El punto de equilibrio $(0, 0)$



(b) El punto de equilibrio $(1, 0)$



(c) El punto de equilibrio $(0, D)$



(d) El punto de equilibrio $(H_1, H_1 + D)$

Figura 7.14: Resultados de matlab sobre el comportamiento de los puntos de estabilidad, cuando hay una singularidad dentro de la región de invarianza (Efecto Allee débil).

fuelle: Elaboración propia (2022)

Nota: Siempre que exista una singularidad en el efecto Allee débil, esta singularidad es un punto atractor.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

Motivado por los diversos trabajos realizados, en esta investigación se propuso y se realizó un estudio cualitativo sobre modelos de tipo Leslie-Gower, considerando que los depredadores tienen un alimento alternativo, cuando su presa favorita se escasea, efecto Allee en las presas y que la acción de los depredadores es descrita por una respuesta funcional Holling tipo IV. Para determinar posibles dinámicas en la interacción de las presas y depredadores, cuando los parámetros sobre el modelo son alterados, Lo cual se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- En vista que la condición inicial esta relacionada a la cantidad de presas y depredadores, antes de relacionarse entre si y con el ecosistema, independientemente al modelo a tomar, se determina que las condiciones iniciales son importantes para mostrar la convergencia sobre las dos especies, lo que podría conllevar a la extinción de las presas en caso de considerar efecto Allee fuerte. Sin embargo, en ninguno de los dos modelos muestra una extinción de ambas especies o una extinción total de los depredadores debido al alimento alterno que presentan esta especie y a la no captura de la misma.
- Es importante aclarar, que el uso del efecto Allee fuerte o débil dependerá de la población que estemos analizando. Recordar que el efecto Allee débil, se utiliza para describir poblaciones que crecerán en tamaño de poblaciones bajos, mientras el efecto Allee fuerte se usa cuando la tasa de crecimiento poblacional per cápita puede volverse negativo, es decir, que al pasar del tiempo el numero de individuos disminuye lo que conllevaría a una posible extinción de la especie.

- Se ha evidenciado que alto consumo de parte de los depredadores es contraproducente, ya que pueden sobre explotar a las presas y estas tienden a la extinción cuando el efecto Allee es fuerte, porque el punto $(0, D)$ es atractor para toda condición de parámetros, además implica que los depredadores crecerán hasta su máxima capacidad de carga del ambiente.
- Para el caso de considerar un efecto Allee débil sobre las presas, podría tener como mucho tres equilibrios interiores y como mínimo uno, por lo que las alteraciones sobre la condición inicial muestra diferentes convergencias en caso del sistema presente tres equilibrios interiores, diferencia cuando presentan un único equilibrio.
- Si se considera efecto Allee fuerte en las presas, el modelo asociado podría no tener equilibrios interiores por lo que las presas pueden llegar a una extinción independientemente de la condición inicial, a diferencia de considerar efecto Allee débil en las presas.
- Sin importar el efecto Allee en las presas, se puede evidenciar que los depredadores por el nuevo parámetro que se añadió de alimento alternativo, no se extinguen, lo que conlleva a estabilizarse a lo largo del tiempo o presentar soluciones periódicas.
- Para el caso efecto Allee fuerte, existen evidencias para mostrar que existen dos bifurcaciones sobre el modelo. La bifurcación silla-nodo caracterizada por colisión, posterior desaparición, de los dos equilibrios sobre el sistema, uno de ellos es punto de silla. La bifurcación de Hopf asociada por la colisión de un ciclo límite respecto al equilibrio interior cuya estabilidad local no es un punto de silla y que posteriormente desaparece el ciclo límite y la estabilidad del equilibrio cambia.
- El caso de efecto Allee débil, se podría garantizar como mínimo cuatro bifurcaciones: Dos sillanodos, una de Hopf y homoclínica cuando existe un único equilibrio en el interior del sistema.
- En el modelo de efecto Allee fuerte no presentaría homoclínica debido a la estabilidad local presentada sobre el punto de equilibrio $(0, D)$.
- Por último, nuestros resultados también confirman el hecho de que si la población de los depredadores es generalista, es decir, tienen un alimento alternativo. La extinción de cada especie se puede evitar, para ciertas condiciones iniciales.

Capítulo 9

RECOMENDACIONES

Al finalizar este trabajo de investigación se tiene las siguiente sugerencias:

- Realizando el análisis del modelo estudiado, se sugiere que a este modelo se le agregue el parámetro de captura, lo que conlleva un control sobre las especies y así permitiendo la no extinción de estas.
- Para investigaciones futuras, se podrían centrar en el comportamiento de las estabildades positivas del efecto Allee fuerte y débil. Así, evidenciar las diferentes bifurcaciones que tienen dentro del sistema.
- Dado el caso que esta investigación es de tipo básica, se podrían realizar investigaciones futuras aplicadas a un ecosistema, el cual contengan por lo menos dos especies, en la que una sea depredador y la otra la presa. Luego, con las condiciones iniciales y con sus respectivos valores numéricos de los parámetros, realizar el análisis del comportamiento de estas y por ultimo contrastar los resultados obtenido con esta investigación.

Bibliografía

- [1] A. Korobeinikov.(2001), *A Lyapunov function for Leslie-Gower predator-prey models*, Applied Mathematics Letters, vol. 14, pag. 697-699.
- [2] A. Rojas-Palma and E. González-Olivares (2014), *Gause type predator-prey model with a generalized rational non-monotonic functional response*, Proceedings of the 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, vol. 2, pag. 1092-1103.
- [3] C. Arancibia-Ibarra and E. González-Olivares (2011), *A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey*, In BIOMAT 2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, Mondaini R (ed). World Scientific Co. Pte. Ltd.: Singapore, pag. 146 - 162.
- [4] C. Chicone (2006), *Ordinary Differential Equations with Applications (2nd edition)*,V.34 Text in Applied Mathematics, Springer .
- [5] E. Almanza-Vásquez (2007), *Dinámicas de modelos de depredación, considerado una función con saturación para el uso de refugio por parte de las presas*. Tesis de Maestría, Maestría en Biomatemática, Universidad del Quindío.
- [6] E. González-Olivares, E., Arancibia-Ibarra, C., Rojas-Palma, A. and González-Yañez (2019), *Bifurcations and multistability on the May-Holling-Tanner predation model considering alternative food for the predators*, Mathematical Biosciences and Engineering;16(5):4274-4298.
- [7] E. González-Olivares and A. Rojas-Palma (2013), *Allee Effect in Gause Type Predator-Prey Models: Existence of Multiple Attractors, Limit cycles and Separatrix Curves*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, vol. 8, pag. 143-164.

- [8] E. González-Olivares and J. Mena-Lorca and A. Rojas-Palma and J.D. Flores (2011), *Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey*, Applied Mathematical Modelling, vol. 35, pag. 366-381.
- [9] E. González-Olivares and R. Ramos-Jiliberto (2003), *Dynamic consequences of prey refuges in a simple model system: more prey, fewer predators and enhanced stability*. Ecological Modelling 166 135-146.
- [10] E. González-Olivares and H. Meneses-Alcay and B. González and J. Mena-Lorca and A. Rojas-Palma and R. Ramos-Jiliberto (2011), *Multiple stability and uniqueness of limit cycles in a Gause type predator-prey model with Allee effect on prey*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 12, pag. 2931-2942.
- [11] E. González-Olivares and B. González and J. Mena-Lorca and R. Ramos-Jiliberto (2007), *Modelling the Allee effect: Are the different mathematical forms proposed equivalents?*, Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology BIOMAT 2006, E-papers Serviços Editoriais Ltda., pag. 53-71.
- [12] E. González-Olivares. and C. Arancibia-Ibarra and A. Rojas-Palma and B. González-Yañez (2019) ,*Dynamics of a modified Leslie-Gower predation model considering a generalist predator and the hyperbolic functional response*, Mathematical Biosciences and Engineering .
- [13] E. Saez and E. González-Olivares (1999), *Dynamics of a Predator-Prey Model*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 59, pag. 1867-1878.
- [14] F. Courchamp and T. Clutton-Brock and B. Grenfell (1999), *Inverse density dependence and the Allee effect*, Trends in Ecology and Evolution, vol. 14, pag. 405-410.
- [15] F. Courchamp and L. Berec and J. Gascoigne(2008), *Allee Effects in Ecology and Conservation*,Oxford University Press.
- [16] Guckenheimer J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*,Springer-Verlag.
- [17] González-Olivares, E., Valenzuela-Figueroa, S., y Rojas-Palma, A. (2021)., *Influencia del efecto Allee débil en las presas en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower*

con respuesta funcional sigmoidea. Revista De Matemática: Teoría Y Aplicaciones, 29(1), 105-138.

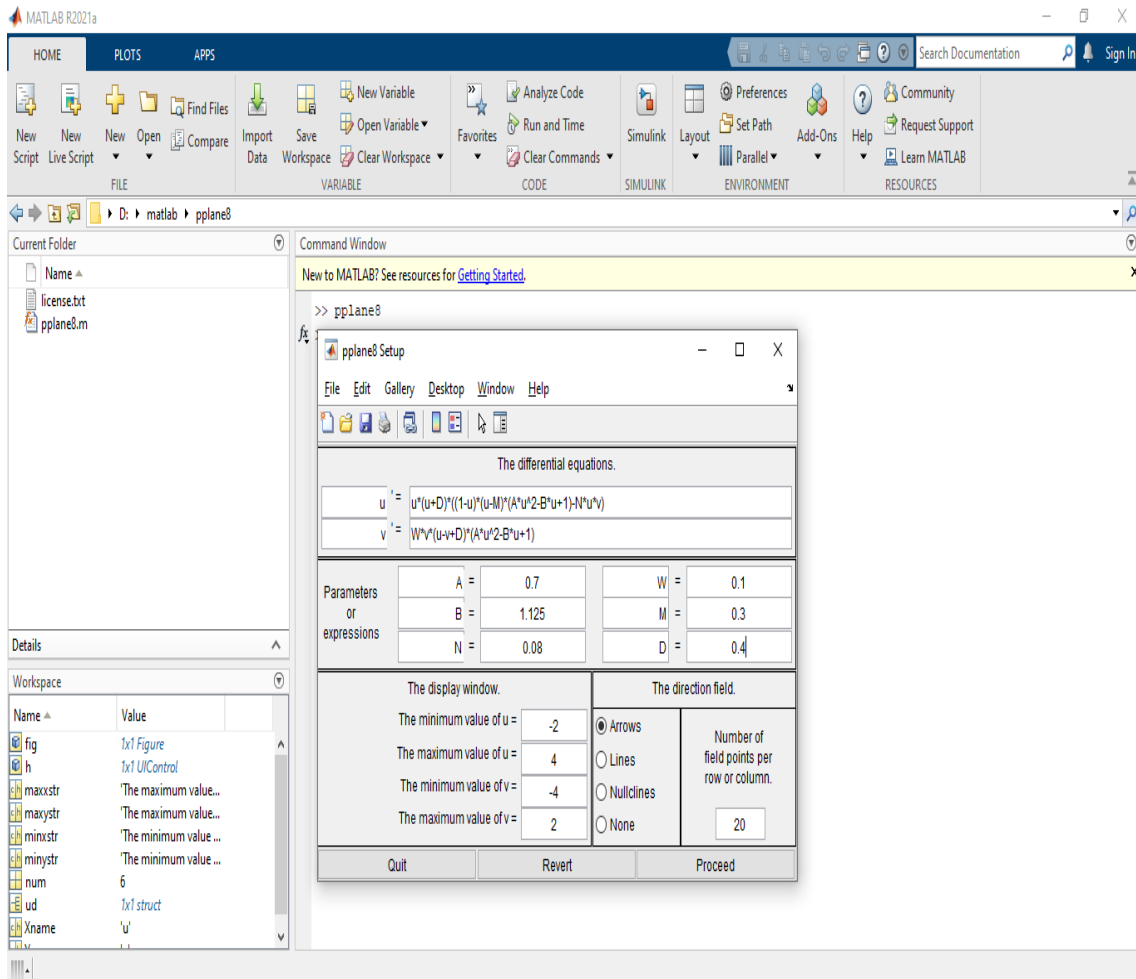
- [18] García, R. (2006). *Sistemas Complejos*. (1st ed.). Barcelona: Editorial Gedisa.
- [19] H. Broer, and K. Saleh, and V. Naudot, and R. Roussarie (2007), *ADynamics of a predator-prey model with nonmonotonic response function*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 18, pag. 221-251.
- [20] H. Yin and J. Zhoy and X. Xiao and X. Wen (2014), *Analysis of a diffusive Leslie-Gower predator-prey model with nonmonotonic functional response*, Chaos, Solitons Fractals, vol. 65, pag. 51-61.
- [21] Kuhn, L. (2008). *Complexity and Educational Research: A critical reflection*. In M. Mason (Ed.), *Complexity Theory and the Philosophy of Education* (1st ed., pp. 169–181). Chichester UK: Wiley - Blackwell.
- [22] López, J., y Sánchez, M. (2000). *Acerca del cambio en los sistemas complejos*. Universidad de Sevilla.
- [23] L.M. Gallego-Berrio (2004), *Consecuencia del Efecto Alle en el modelo de depredación de May-Holling-Tanner*. Tesis de Maestría, Maestría en Biomatemática, Universidad del Quindío.
- [24] L.M. Gallego-Berrió and E. González-Olivares (2014), *The Holling-Tanner predation model with a special weak Allee effect on prey*, Proceedings of the 2014 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE, vol. 2, pag. 585-5961.
- [25] L. Perko (2013), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer 7.
- [26] Maldonado, C., y Gómez, N. (2010). *El mundo de las ciencias de la complejidad: un estado del arte*. Documento de Investigación, 76, 1–95.
- [27] Maldonado, C. (2005). *Ciencias de la Complejidad: Ciencias de los Cambios Súbitos*. Odeon, 48.

- [28] Maldonado, Carlos E. (2008). *Complejidad y ciencias sociales desde el aporte de las matemáticas cualitativas*. Cinta de moebio, (33), 153-170. <https://dx.doi.org/10.4067/S0717-554X2008000300001>.
- [29] M. Liermann and R. Hilborn (2001), *Depensation: evidence, models and implications*, Fish Fisheries, vol. 2, pag. 33-58.
- [30] Martínez Moncaleano, C. J. (2018). *Teoría del Caos y Estrategia Empresarial*. Tendencias, 19(1), 204. <https://doi.org/10.22267/rtend.181901.94>
- [31] P.A. Stephen and W.J. Sutherland (1999), *Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation*, Trends Ecologics, vol. 14, pag. 401-405.
- [32] P. A. Stephens, and W. J. Sutherland and R. P. Freckleton (1999), *What is the Allee effect?*, Source: Oikos, vol. 87, pag. 185-190.
- [33] P. A. Stephens and W. J. Sutherland (1999), *Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation*, Trends Ecol, Evol. 14 (10) 401–405.
- [34] P. Blanchard and R.L. Devaney and G.R. Hall (2012), *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, TAcademic press.
- [35] P.C. Tintinago-Ruiz (2012), *Dinámicas de modelos depredador-presa del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea*. Tesis de Maestría, Maestría en Biomatemática, Universidad del Quindío.
- [36] Pino Romero, N., Soto-Becerra, P., y Quispe Mendizábal, R. A. (2020). *Un Modelo Matemático SIR-D Segmentado para la Dinámica de Propagación del Coronavirus (COVID-19) en el Perú*. Selecciones Matemáticas, 7(01), 162-171.
- [37] R.A. Becerra-Klix (2013), *Modelos de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea y efecto Allee múltiple en las presas*, Tesis de Magister en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- [38] Reyes Bahamón, F. (2017), *Sobre la dinámica de algunos modelos depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona y efecto Allee en las presas*.

- [39] Rojas-Palma and E. González-Olivares (2012), *Optimal harvesting in a predator-prey model with Allee effect and sigmoid functional response*, Applied Mathematical Modelling 36 1864-1874.
- [40] T, Malthus (1798), *An essay on the Principle of population*, published anonymously.
- [41] Vidal, Claudio and Gómez, Pedro (2003), *An extension of the poincaré compactification and a geometric interpretation*, Proyecciones (Antofagasta) [online]. , vol.22, n.3, pp.161-180.
- [42] Y. Kuznetsov (2013), *Elements of applied bifurcation theory*, Springer Applied Mathematics Science 112.
- [43] Y. Lamontagne and C. Coutu and C. Rousseau (2008), *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Generalised Holling Type III Functional Response*, Journal of Dynamics and Differential Equations, vol. 20, pag. 535-571.
- [44] Y. Li and D. Xiao (2007), *Bifurcations of a predator-prey system of Holling and Leslie types*, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 34, pag. 606 - 620.

ANEXOS

Anexo 1: Plantilla de pplane8 en Matlab, para la realización de simulaciones numéricas.



Anexo 2: Realización de la región de invarianza del efecto allee débil.

