Neiva, Huila 25 de enero de 2021

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Jemberson Bedoya Tique, con C.C. No. 1.075.293.533,

Yeraldin Pascuas Parra, con C.C. No. 1075261016,

María Jennifer Sánchez Rojas, con C.C. No.1.075.284.206,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o ____

titulado "La geometría fractal de las plantas como estrategia didáctica interdisciplinar para el fortalecimiento de los aprendizajes significativos"

presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de Magister en estudios interdisciplinarios de la complejidad;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: ____________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: ____________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: ____________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Bedoya Tique	Jemberson
Pascuas Parra	Yeraldin
Sánchez Rojas	Maria Jennifer

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Martinez Moncaleano	Carlos Javier

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Martinez Moncaleano	Carlos Javier

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Magister en estudios interdisciplinarios de la complejidad

FACULTAD: Ciencias exactas y naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Maestría en estudios interdisciplinarios de la complejidad

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2020 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 205

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas_X_ Fotografías_X_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas_X_ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO: Cronograma de la investigación y de la etapa de aplicación de guías didácticas, Consentimiento rector, Consentimiento de los padres de familia, Correspondencia curricular y guías.

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Geometría fractal	Fractal geometry
2. Aprendizaje significativo	Significant learning
3. Motivación	Motivation
4. Simulación computacional	Computer simulation
5. Interdisciplinariedad	Interdisciplinarity
6. Complejidad	Complexity
7. Educación	Education

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El propósito de este artículo es dar a conocer una estrategia didáctica interdisciplinar que vincula la geometría fractal y simulación computacional, en pro de fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes del grado noveno. El estudio fue realizado en la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia, se dividió en tres etapas: determinación de los estilos de aprendizaje de los educandos, diseño y aplicación de guías con metodología interdisciplinaria que integraron las asignaturas de matemáticas, ciencias naturales, artes y tecnología, teniendo en cuenta el contexto. Finalmente, el diseñó de una propuesta de simulación computacional que vinculó la geometría fractal con el crecimiento de las plantas.

El análisis de los resultados obtenidos demuestra el potencial de la estrategia didáctica implementada, incrementando la motivación de los estudiantes y el fortalecimiento de los aprendizajes significativos, reconociendo la importancia de utilizar elementos de las ciencias de la complejidad y de las nuevas tecnologías en la educación, en un mundo de complejidad

creciente que requiere diferentes perspectivas, formas y herramientas para tratar de comprenderlo.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The purpose of this article is to present an interdisciplinary teaching strategy that links fractal geometry and computer simulation, in order to strengthen the significant learning of ninth grade students. The study was carried out at the Educational Institution Nuestra Señora del Carmen sede the Australia, was divided into three stages: determination of the learning styles of the students, design and application of guides with interdisciplinary methodology that integrated the subjects of mathematics, natural sciences, arts and technology, taking into account the context. Finally, he designed a proposal of computer simulation that linked fractal geometry with plant growth.

The analysis of the obtained results demonstrates the potential of the implemented didactic strategy, increasing students' motivation and strengthening significant learning, recognizing the importance of using elements of complexity sciences and new technologies in education, in a world of increasing complexity that requires different perspectives, forms and tools to try to understand it.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Carlos Eduardo Maldonado Castañeda

Firma:

Nombre Jurado: Jasmidt Vera Cuenca

Firma: Jasmidt Vera C

LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LAS PLANTAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR PARA EL FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS

JEMBERSON BEDOYA
20191175713
YERALDIN PASCUAS
20191177772
MARIA JENNIFER SANCHEZ
20191177769

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

NEIVA
2020

LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LAS PLANTAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR PARA EL FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS

Trabajo de Investigación presentado como requisito para la obtención del Título de Magíster en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad

JEMBERSON BEDOYA
20191175713
YERALDIN PASCUAS
20191177772
MARIA JENNIFER SANCHEZ
20191177769

Asesor:
Mag. CARLOS JAVIER MARTINEZ MONCALEANO

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

NEIVA
2020

AGRADECIMIENTOS

En la culminación de esta etapa de nuestras vidas, damos gracias a Dios por permitirnos llevar a cabo nuestras metas y propósitos. A nuestros padres por el esfuerzo y tenacidad que han tenido y por el gran amor que han demostrado. A nuestros hermanos por ser parte fundamental en nuestras vidas y por acompañarnos en este largo camino que hemos recorrido. A los docentes y especialmente a nuestro asesor por la paciencia y el gran compromiso en la realización del presente trabajo de investigación y en general a la maestría en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad, a la facultad de Ciencias Exactas y a la Universidad Surcolombiana por acogernos y encargarse de potenciar nuestro perfil como docentes e investigadores.

RESUMEN

El propósito de este artículo es dar a conocer una estrategia didáctica interdisciplinar que vincula la geometría fractal y simulación computacional, en pro de fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes del grado noveno. El estudio fue realizado en la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia, se dividió en tres etapas: determinación de los estilos de aprendizaje de los educandos, diseño y aplicación de guías con metodología interdisciplinaria que integraron las asignaturas de matemáticas, ciencias naturales, artes y tecnología, teniendo en cuenta el contexto. Finalmente, el diseñó de una propuesta de simulación computacional que vinculó la geometría fractal con el crecimiento de las plantas.

El análisis de los resultados obtenidos demuestra el potencial de la estrategia didáctica implementada, incrementando la motivación de los estudiantes y el fortalecimiento de los aprendizajes significativos, reconociendo la importancia de utilizar elementos de las ciencias de la complejidad y de las nuevas tecnologías en la educación, en un mundo de complejidad creciente que requiere diferentes perspectivas, formas y herramientas para tratar de comprenderlo.

Palabras claves: Geometría fractal, aprendizaje significativo, motivación, simulación computacional, interdisciplinariedad, complejidad, educación.

ABSTRACT

The purpose of this article is to present an interdisciplinary teaching strategy that links fractal geometry and computer simulation, in order to strengthen the significant learning of ninth grade students. The study was carried out at the Educational Institution Nuestra Señora del Carmen sede the Australia, was divided into three stages: determination of the learning styles of the students, design and application of guides with interdisciplinary methodology that integrated the subjects of mathematics, natural sciences, arts and technology, taking into account the context. Finally, he designed a proposal of computer simulation that linked fractal geometry with plant growth.

The analysis of the obtained results demonstrates the potential of the implemented didactic strategy, increasing students' motivation and strengthening significant learning, recognizing the importance of using elements of complexity sciences and new technologies in education, in a world of increasing complexity that requires different perspectives, forms and tools to try to understand it.

Keywords: Fractal geometry, significant learning, motivation, computer simulation, interdisciplinarity, complexity, Education.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1.INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se propone una estrategia didáctica innovadora para re-pensar y transformar las prácticas pedagógicas, modificando la concepción tradicional educativa y abriendo nuevas alternativas de enseñanza en una comunidad rural como es la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede La Australia del municipio de Guadalupe del departamento del Huila. Utilizando como principal recurso el conocimiento de los estudiantes de su entorno, las plantas y la naturaleza, como material concreto de aprendizaje. Teniendo en cuenta que "la didáctica tiene como objetivo la instrucción y preparación a través de métodos eficaces y adecuados en la formación integral del educando, para lo cual se preocupa de estudiar el trabajo docente, congruente con el método de aprendizaje" (Bravo y Varguillas, 2015).

El desarrollo de esta propuesta tiene como eje fundamental la geometría fractal y la simulación computacional, las cuales en sus caracteres interdisciplinarios permiten el estudio de las ciencias naturales, las matemáticas, las artes y la tecnología. Vinculando de esta manera el currículo con procesos científicos, tecnológicos y del contexto, para orientar el desarrollo de competencias en la formación científica y el fortalecimiento de los aprendizajes significativos en la población del grado noveno.

Llevando a cabo un proceso de reflexión y análisis en las diferentes asignaturas vinculadas, a partir del estudio de las formas de las plantas, algunos elementos de naturaleza y de las relaciones entre variables asociadas a éstas, mediado por nociones de geometría fractal y simulación computacional. Se diseñaron 13 guías, denominadas *"fractividades"* teniendo en cuenta los estilos de aprendizaje predominantes en la población, el entorno, la comunicación asincrónica debido a la coyuntura causada por el COVID-19 y los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Este trabajo se encuentra estructurado en siete capítulos: El primer capítulo corresponde al planteamiento y formulación del problema de investigación en consecuencia de la situación que presentan la comunidad estudiantil de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia. En el segundo capítulo denominado antecedentes, se analizan investigaciones relacionadas con la enseñanza de la geometría fractal tomando como referencia estudios de nivel de maestría e incluyendo investigaciones escritas en otros idiomas.

El tercer capítulo llamado fundamentos teóricos incluye referentes contextuales, institucionales y teóricos. El siguiente capítulo hace alusión a los objetivos de la investigación, donde se propone desarrollar una estrategia didáctica interdisciplinar con estudiantes de grado noveno. En el capítulo quinto se establece la metodología de la investigación: tipo y enfoque, universo de estudio, población y muestra, y estrategias metodológicas. En el sexto capítulo se analizan los resultados obtenidos al aplicar los instrumentos y finalmente el último capítulo plantea las conclusiones y las recomendaciones que se debe tener en cuenta al implementar la estrategia didáctica.

2 JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo de investigación propone una estrategia didáctica interdisciplinar por medio de la geometría fractal de las plantas y herramientas computacionales para fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes. Ya que las metodologías utilizadas normalmente por los docentes son lineales, repetitivas y desmotivantes, lo que causa un alto índice de reprobación y deserción estudiantil (6,9% y 3,2% DANE, 2018), que incrementa significativamente en el sector rural.

En consecuencia, el presente trabajo permitirá potenciar la motivación de los educandos, el fortalecimiento de aprendizajes significativos y la vinculación de los conocimientos con el contexto. Además de presentar una forma de relacionar diferentes disciplinas entorno a la geometría fractal y su relación con la naturaleza. Lo que puede ser tomado como referencia para innovaciones en el aula, pues en un contexto educativo de creciente complejidad se hace necesario el cambio de paradigma de enseñanza, las metodologías y estrategias utilizadas por los docentes.

Además, destaca utilizar la geometría fractal presente en las plantas y la naturaleza, como estrategia interdisciplinar que vincule las áreas de ciencias naturales, matemáticas, artes y tecnología, así como la contextualización de los contenidos a trabajar. Pues se considera que las investigaciones previas se han limitado en la utilización de las bondades de esta geometría, realizando usos superficiales de la misma.

Teniendo en cuenta los sobresalientes beneficios que tiene utilizar herramientas computacionales en el aula y que, "en los últimos años, las TIC, y en particular las tecnologías computacionales, han tenido gran impacto en el ámbito educativo y se han convertido en un importante campo de interés para la investigación en enseñanza de las ciencias" (González, Capuano & Zalazar, 2009), se propone la utilización de la geometría fractal utilizando un ambiente de simulación computacional al aula para favorecer el aprendizaje.

Finalmente, los docentes y futuros egresados de la Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad deben generar cambios favorables en las comunidades educativas que busquen superar "los programas y currículos, siempre eminentemente secuenciales y lineales y que no permiten ni admiten sorpresas, es decir, aprendizaje" (Maldonado,2014, p.17). Por lo que propuestas como la presentada en esta investigación son un paso adelante al cambio que se debe generar en las aulas y que responda a la complejidad en sí del proceso educativo.

3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

3.1 Descripción del problema

La institución educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia, es un colegio de enseñanza de primaria y básica secundaria el cual recibe cerca de 150 niños y jóvenes procedentes de tres veredas cercanas como los son los Pinos, la Australia y el Recreo del municipio de Guadalupe del departamento del Huila. Esta es una zona mayormente dedicada al cultivo del café, razón por la cual los estudiantes se ven inmersos en el tema de la agricultura, teniendo gran dominio en todo lo relacionado con este tema. Se tiene que gran parte de ellos cursan hasta el grado noveno y posteriormente se dedican totalmente a labores relacionadas al campo, siendo una minoría aquellos que continúan sus estudios en la media académica y en la educación superior.

Teniendo en cuenta lo anterior, se ha observado en las diferentes áreas que se orientan que los jóvenes presentan mayor motivación cuando se relacionan las temáticas con su contexto, siendo aún más beneficioso cuando se hacen trabajos de campo en los cuales deben interactuar con plantas, costos de producción, delimitación de tierras entre otros. Verificando que son mayores los conocimientos previos con los que se cuentan y es más fácil introducir las temáticas nuevas, logrando que los estudiantes presenten aprendizajes significativos y desarrollen competencias propias de las diferentes áreas de una manera distinta a la enseñanza tradicional.

A pesar de los múltiples beneficios que se pueden alcanzar, no se ha logrado consolidar una estrategia que involucre a los educandos de manera constante y que permita transversalizar las diferentes áreas que se orientan. Estas iniciativas se han llevado a cabo de forma esporádica y al final de la jornada escolar terminan siendo aisladas del proceso educativo, por lo tanto, no motivan al estudiante y no generan el interés necesario para que asista a la jornada escolar con la necesidad de aprender.

Por tanto, es necesario proponer una estrategia que tenga en cuenta la impredecibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje y los diferentes aspectos involucrados, permitiendo trabajar de manera interdisciplinaria las diferentes asignaturas. Teniendo en cuenta la complejidad que subyace a las relaciones entre los agentes involucrados. Entendiendo la complejidad como (Maldonado, 2016) “los fenómenos que son impredecibles, incontrolables, no parametrizables, y que no se explican en términos de causalidad” (p.41). De la misma forma Maldonado (2013) afirma que:

> Se dice que es complejo en la medida misma en que no puede ser reducido –física, matemática, biológica, metodológicamente, o en cualquier otro sentido– a uno sólo de sus rasgos y atributos y, por el contrario, se requiere del aporte de varias ciencias y disciplinas para entenderlo y explicarlo (p .27)

Con base a lo anterior es posible clasificar el problema de la enseñanza de la educación pública en el contexto colombiano (más específicamente el rural) como un problema de complejidad organizada. Concordando con lo expuesto por Weaver (1948):

> Todos estos son problemas complejos, pero no son problemas de complejidad desorganizada que los métodos estadísticos puedan resolver sino son problemas que implican tratar simultáneamente con un número importante de factores que están interrelacionados en un todo orgánico. Todos ellos son problemas de complejidad organizada (p. 539)

Pues durante las últimas décadas la educación en nuestro país ha sido abordada desde disciplinas aisladas y con relaciones muy superficiales. Causando desmotivación y falta de interés en los estudiantes. Es por esto que se hace necesario una propuesta que incentive el cruce de disciplinas y el uso de tecnología para su solución.

En este contexto Edgar Morín propone en su obra, *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*, una revolución educativa en el marco de la Complejidad que implica una enseñanza comprensiva de un conocimiento en múltiples dimensiones, que considera un aprendizaje enfocado al abordaje de problemas, gestor de la integración de saberes y la interdisciplinariedad, reconociendo la incertidumbre, el error, la ilusión y la comprensión de realidad desde la diversidad. “El método como actividad pensante y consciente (…) La forma de pensar compleja que se prolonga en forma de actuar compleja” (Morín, 1984, p.368). Méndez, Martínez y De Jesús (2007) sostienen que

> El enfoque de la Complejidad, desde la perspectiva de la educación comprende una visión acerca del proceso de formación del conocimiento que parte de la eliminación de un conocimiento determinado y que determina, acrítico, objetivo, lineal y estructurado, para hacer emerger un conocimiento multidimensional, significativo, que interacciona con la realidad exterior, que se acerca a una realidad comprensiva de nociones antagónicas, que se encuentran para converger y encontrar el consenso dentro de la diversidad(p.2)

Ahora bien, al estar en un contexto rural con una relación cotidiana con las formas de la naturaleza, su irregularidad y sus estructuras aparentemente desordenadas. Se tiene que una forma de utilizar las ciencias de la complejidad para propiciar aprendizajes significativos y motivar a los estudiantes, es por medio de la geometría fractal. La cual es una ciencia relativamente reciente, desarrollada en 1977 por el matemático francés Benoit Mandelbrot y publicado través de su obra *La geometría fractal de la naturaleza. “*Concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean… identificando una serie de formas que llamo fractales” (Mandelbrot, 1997, p.15).

Las aplicaciones de los fractales son extensas en diferentes disciplinas tales como la medicina, biología, física, ingeniería, química, geología, artes, cine y tecnología de comunicaciones. etc. Hecho que convierte esta ciencia de la complejidad en una potente herramienta para propiciar aprendizajes significativos en jóvenes de secundaria. Pues posee características que pueden permitir el logro de experiencias significativas y motivantes en el aula y fuera de ella. Posibilitando realizar una enseñanza interdisciplinaria en la cual se logre traspasar las fronteras de las disciplinas instauradas por tradición en los planteles educativos del país. Tal y como se muestran en diferentes trabajos de investigación tales como Cardona (2017) en *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica,* Agudelo y Escobar (2016) con su *Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito y* (Cabezas, 2015) en *Una introducción a la geometría fractal integrando geometría dinámica.* En los cuales se presentan adelantos en la enseñanza de la geometría en relación a contenidos y metodologías, aunque se evidencia en investigaciones y propuestas educativas, y no como una inmersión integral de contenidos y su vinculación con los currículos establecidos. Por lo que se hace necesario de una propuesta innovadora que no esté aislada de los lineamientos proporcionados por el ministerio de educación nacional.

En conclusión, para realizar un cambio trascendente en la consolidación de aprendizajes significativos de los estudiantes de grado noveno de la institución se hace necesario la utilización de una estrategia interdisciplinaria como la geometría fractal, que se vincule estrechamente con el contexto rural en el que se desenvuelven los educandos. Permitiendo de esta manera la adquisición de aprendizajes para la vida que motiven al estudiante a asistir al colegio independientemente si continúa o no sus estudios después de terminar su educación básica obligatoria. Contribuyendo de esta manera en el mejoramiento de la calidad educativa dentro de la institución y el municipio.

3.2 Sistematización del problema

¿Cuál es el estado del arte de los fractales y el paradigma de la complejidad en el contexto educativo?

¿Cuáles son los estilos de aprendizaje de los estudiantes del grado Noveno (9°) de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia del municipio de Guadalupe?

¿Cómo contribuir al desarrollo de aprendizajes significativos en los estudiantes del grado noveno, usando una estrategia interdisciplinar enmarcada en el paradigma de la complejidad?

¿Cómo fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes, mediante la aplicación de la geometría fractal basada en el uso de simulación computacional?

3.3 Enunciación del problema

¿Cómo generar una estrategia didáctica interdisciplinar por medio de la geometría fractal de las plantas y herramientas computacionales para fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes del grado noveno la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede La Australia del municipio de Guadalupe del departamento del Huila?

4. ANTECEDENTES

4.1 Internacionales

En 2014 Reda Abu-Elwan en su investigación *The effect of teaching "chaos theory and fractal geometry" on geometric reasoning skills of secondary students,* presenta un estudio de los efectos de la enseñanza de la teoría del caos y la geometría fractal en el razonamiento geométrico y la adquisición de competencias en geometría de treinta jovenes del grado decimo de educación básica. La metodología de trabajo planteó en un primer momento un pretest que midió las habilidades de Razonamiento geométrico. Después se plantearon actividades para la enseñanza de las propiedades de la geometría fractal y ejemplos que se centraron sus aplicaciones. Finalmente, al terminar las unidades didácticas se midió nuevamente la habilidad de los estudiantes en el razonamiento geométrico. La investigación examinó la efectividad que el estudio de la teoría del caos y las actividades de geometría fractal tuvieron en el rendimiento estudiantil y sus habilidades de razonamiento geométrico.

Matsumoto (2015**)** trabajó la tesis titulada “Fractales y algunas aplicaciones a la enseñanza”. El problema que plantea este autor es encontrar una forma para explicar la naturaleza desde la geometría discreta, ya que en la educación escolar la geometría se enseña a partir de formas regulares.

El objetivo de este trabajo es presentar lo que es la Geometría Fractal y la relevancia cuando se trabaja en la Educación Básica. En su metodología propone tres actividades con sus correspondientes secuencias didácticas. La primera se dirige a la Enseñanza Media y el tema abordado es una probabilidad geométrica. La segunda y tercera actividades son dirigidas a la Enseñanza Fundamental, abordando los temas potenciación y cálculo de área y perímetro de figuras fractales.

Esta investigación arrojó como resultado que el uso de la Geometría Fractal en la educación básica es enfrentado por los investigadores del área como una importante herramienta de enseñanza debido a su fácil adaptación a diversos contenidos de la propia matemática, así como de otras ciencias.

Este autor nos brinda herramientas para el fortalecimiento del aprendizaje significativo de los estudiantes a través de secuencias didácticas y la forma como se aborda este conocimiento para realizar una empatía entre las dos clases de geometría la Euclidiana y la Fractal.

A nivel internacional sobresalen los aportes del trabajo de modelación de crecimiento y desarrollo de plantas, existen hoy dos corrientes desde las cuales se aborda esta labor: modelación estructural de plantas (modelación de leyes fundamentales que comandan la formación de la estructura de una planta, su organogénesis, reacciones estructurales ante el ambiente, entre otros) y modelos fisiológicos de plantas (modelos de fotosíntesis, respiración, etc.). La importancia de estos modelos radica en que permiten crear “laboratorios virtuales” del comportamiento de las plantas a partir de los cuales se pueden hacer estudios en sus distintas ramificaciones temáticas.

Una de las formas como se aborda la modelación de estructuras complejas como lo son las plantas, es mediante el uso de la teoría fractal:

> "Teoría fractal en la modelación estructural de plantas: Corresponde a una teoría matemática nacida en los años 70, presentada formalmente por el investigador Benoit Mandelbrot y Peitgen et al., que en forma sencilla define que existen estructuras (matemáticas y no matemáticas) que cumplen con la característica de estar compuestas, a su vez, de estructuras de menor tamaño, que mantienen una cierta similaridad con la estructura completa, recibiendo, por lo tanto, el nombre de estructuras autosimilares" (pág. 72 Estado del arte en modelación funcional-estructural de plantas)

La teoría fractal tiene en cuenta que una estructura compleja puede contener subestructuras con unas características morfológicas y funcionales similares a la estructura mayor, la cual a su vez contendrá subestructuras con una reiteración similar que se jerarquiza hacia adentro en cuestión de tamaños, pero que se mantiene fidedigna en forma y función, como una especie de re-escritura de las leyes fundamentales de dicha estructura. Bajo esa idea, la teoría fractal podría ser un instrumento para modelar y cuantificar estructuras complejas –por ejemplo, estructuras biológicas: plantas- a partir de aplicaciones geométricas.

En 2015, Nadia Martin en el *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico?* diseña e implementa una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para el estudio de fractales en el último año de la escuela secundaria, a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? describiendo el proceso de estudio llevado a cabo a partir de la implementación de la AEI. La cual se realizó en un curso de sexto año del nivel secundario con orientación Economía y Gestión, durante seis sesiones de clase de Matemática del Ciclo Superior. En esta tesis, además, se construye y describe un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) cuya pregunta generatriz ¿Cómo se puede construir un fractal?

En 2019, Nadia Belén y Verónica Parra, *Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria,* este trabajo describe una experiencia de aula realizada en un curso de Matemática del último año del nivel secundario argentino. El estudio se llevó a cabo en la institución en la que se realizó la experiencia es una escuela de gestión pública ubicada en una zona rural de la provincia de Buenos Aires, Argentina. La experiencia aborda la enseñanza de fractales mediante la implementación de una actividad de estudio e investigación (AEI), generada a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? El referente teórico es la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). La descripción realizada indica que es posible involucrar a los estudiantes en un proceso de estudio proponiendo la formulación de preguntas y la búsqueda de respuesta a partir de un trabajo colectivo.

4.2 Nacionales

Realizando una búsqueda de la enseñanza de la geometría fractal aplicada en la educación matemática del país, se encontraron resultados positivos, en relación a contenidos y metodologías, aunque la enseñanza solamente se evidencia en investigaciones y propuestas educativas, y no como una inmersión integral de contenidos y su vinculación con los currículos establecidos. A continuación, se presentan algunas de estas investigaciones, que en su totalidad son estudios para optar a títulos universitarios.

Publio Suárez en 2009 presenta en su investigación *Atractores de Sistemas Iterados de Funciones (IFS's) (Una Estrategia de Aprendizaje)*, una propuesta didáctica para representar y modelar en el plano y el espacio tridimensional, de manera aproximada, los atractores de fractales autosemejantes y sus familias, que sintetizan (falsean) representaciones de objetos de la naturaleza, usando los ambientes de geometría dinámica y modelación 3D, proporcionado principalmente por aplicaciones como Xfrog, Lsystem 4, Fractal Visión, Ultrafractal, Winfract, VistaPro y Cabri Geometry II Plus y Cabri 3D. Se describe una estrategia didáctica, desarrollando de manera gradual, las etapas de exploración del medio, de visualización, en donde se trabajan diversos sistemas semióticos de representación, de manera especial la representación-modelación en computador, la construcción formal en estructuras algebraicas principalmente y la etapa estudio de aplicaciones.

De este trabajo se puede resaltar la importante de acercar al estudiante con su realidad próxima, constituye un factor de motivación que le permite vivenciar experiencias relacionadas con su pensamiento creativo y el desarrollo de su imaginación, además de sentir admiración y potenciar su capacidad de asombro por los creadores de ésta teoría, al contemplar su obra; así mismo, es el motor que los impulsa por descubrir los secretos de la naturaleza, muchas veces desapercibidos.

En 2013, Jose Francisco Puerto Monterroza propone *El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software cabrí "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional,* como con el uso del cabrí, y la construcción de algunos fractales (conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Von Koch) se pueden identificar patrones numéricos y/o geométricos. Permitiendo fundamentar teóricamente el diseño de una secuencia de situaciones didácticas para el tratamiento de la autosemejanza o autosimilitud en el aprendizaje del estudiante desde la visualización en el contexto de la geometría fractal utilizando un ambiente de geometría dinámica.

Un trabajo similar es *Una introducción a la geometría fractal integrando geometría dinámica*, realizado por María Cristina Cabezas en el año 2015, en donde se propone fundamentar teóricamente el diseño de una secuencia de situaciones didácticas para el tratamiento de la autosemejanza o autosimilitud en el aprendizaje del estudiante desde la visualización en el contexto de la geometría fractal utilizando un ambiente de geometría dinámica como Geogebra.

En 2017, Luz Adriana Cardona presenta *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica* *del C.E. Bachillerato en Bienestar Rural Sede Ciato en el municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza.* Cuyo objetivo es enseñar los conceptos básicos de la geometría fractal como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento geométrico basados en una nueva estrategia metodológica (geometría fractal) a partir de algunos elementos de la naturaleza. Utilizando como metodología la Transposición didáctica de Guy Brousseau (basado en el constructivismo del aprendizaje de Piaget), en el que el estudiante aprende adaptándose a situaciones (Interacción con problemas).

Por otro lado, en el año 2014, en el trabajo *la geometría de las plantas: Una experiencia de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos* de Fabio Nelson Zapata Grajales, se describe la manera en que los estudiantes construyeron los conceptos matemáticos a partir de la modelación matemática en geometría; donde se muestra el diseño y la validación de una propuesta didáctica en la que se usó la modelación matemática en la geometría como método de enseñanza. La metodología se dividió en dos partes con la implementación de 11 fases que explican el proceso propuesto para modelar la forma y el crecimiento de las plantas (relación de magnitudes geométricas). Este trabajo permitió a los educandos entender las matemáticas como una herramienta útil y aplicable y que puede aproximarse a la explicación de fenómenos de la naturaleza como es en éste caso la forma y crecimiento de las plantas, además de reflejar en cierto modo que estos tomaron consciencia hacia el respeto por la naturaleza y protección del medio ambiente; mejorando su calidad de vida y ayudando a hacer una sociedad con responsabilidad social y ambiental, uno de los fines de los planes de desarrollo nacional departamental y municipal.

A nivel nacional sobresale el trabajo de Iturriago, Morales, Bedoya & Hernández (2012) con su trabajo de investigación: La Geometría de las Plantas de la Ciudadela Educativa La Vida del municipio de Copacabana propone desde la visualización de patrones en la naturaleza a partir de los fractales, por medio de tres momentos los cuales son esbozo de los primeros patrones que dieron origen a esta geometría tratando las características, el segundo momento los fractales se relacionan con los árboles y plantas, simulándolos a partir de los sistemas iterados de funciones (IFS) y los sistemas Lindenmayer (L system) y en el tercer momento, se presenta una descripción de las actividades experimentales a través de una propuesta didáctica que pretende estimular el trabajo de los estudiantes con lageometría.

4.3 Regional

Hernández y Vidal (2019), en *fractalidad, caos y el lenguaje netlogo como agentes integradores del currículo de las matemáticas escolares*, diseñaron un curricular que posibilite la introducción de la fractalidad y el caos, como ejes integradores del currículo de matemáticas del grado 9° de Educación Básica Secundaria, de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, a partir de una metodología apoyada en el uso de la tecnología y la Modelación Basada en Agentes (lenguaje de programación computacional NetLogo®) y que permita concebir el currículo de matemáticas como un sistema complejo, interconectado con otras áreas del conocimiento.

Se plantean siete secuencias didácticas para desarrollar: (1) Concepto de fractalidad, (2) Nociones básicas de NetLogo®, (3) Análisis aritmético y algebraico de fractalidad, (4) Fractalidad matemática y su dimensión, (5) Concepto de caos, (6) Fractalidad, caos e interdisciplinariedad y (7) Fractalidad con NetLogo®.

Se concluye que el currículo de matemática actual puede ser abordado por los temas propios de la Complejidad en donde se desarrollan las mismas secuencias pero dando unos valores agregados sustanciales como: matemática pertinente que va de la mano con la naturaleza, creación de códigos de software mostrando lógica computacional, abordaje de nuevos conceptos desconocidos pero apropiados concebidos de manera personal con base en el trabajo secuencial ejecutado, cambio de actitud en torno a la aceptación de la matemática siendo más atractiva en su estudio, diversidad de roles proyectando una persona que muestra una actitud solidaria y de reconocimiento, integración de varias disciplinas rompiendo paradigmas establecidos de singularidad concibiendo el sentido y significado de la interdisciplinariedad, trabajo que sale del aula de clase y se ilustra en diversos estados y lugares, énfasis en las capacidades articulando el conocimiento con la práctica y los valores, el despertar la curiosidad lo cual arroja una ayuda importante al cumplimiento de objetivos propuestos.

Por otro lado, Vargas y Sánchez (2018), didáctica en la enseñanza de la “fractalidad” en educación básica desde un modelo interdisciplinar MACTA (matemáticas, ciencias, tecnología y artes). Dan a conocer los principios básicos de la Geometría Fractal, donde se adelantan aplicaciones con el fin de desarrollar una secuencia didáctica interdisciplinar para fortalecer el pensamiento geométrico- métrico en los cursos de básica secundaria, especialmente en el grado noveno, se desarrolló la secuencia didáctica en tres momentos estructurados por situaciones problemas, cada situación problema es de carácter interdisciplinar abarcando diferentes áreas del conocimiento (Matemáticas, Ciencias y Artes), con el fin de reforzar el aprendizaje de cada competencia (comunicación, razonamiento y resolución) propuesta en la matriz de referencia del área de matemáticas grado 9.

Antes de iniciar con secuencia didáctica se realizó una encuesta de tipo diagnóstico a los docentes, sobre el estado del conocimiento y aplicación de la teoría fractal, sobre la enseñanza de las matemáticas, realizado a los administrativos de la I.E, percepción del mejoramiento en la enseñanza de las matemáticas…, del análisis de estas encuestas surge la idea de cultivar el concepto de fractal, lo que permitió el desarrollo y aplicación de la secuencia didáctica donde se tuvo en cuenta dos instrumentos, uno consistente en la planificación de clase y otro los diarios de campo. Este último permite analizar y sacar conclusiones de la propuesta.

Este trabajo es importante porque permitió a los estudiantes comprender temáticas relacionadas del componente métrico geométrico (áreas, perímetros) y explicar la emergencia de aprendizajes pertenecientes al componente numérico variacional (sucesiones y series), a través de conceptos propios de la teoría fractal (similitud, infinitud y autosimilitud). Este tipo de estrategia permite al estudiante desarrollar su creatividad mediante modelos fractales representados en un software matemático (GeoGebra), estos bocetos se plasmaron en el arte, mediante la técnica conocida como hiloramas.

4.4 Investigaciones referentes a la enseñanza de la geometría

Referente a investigaciones que han contribuido en la enseñanza de la geometría y el mejoramiento en el proceso educativo. Se tiene a (Suarez, 2019) con su investigación *Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica.* Donde muestran como el trabajo grupal y el uso de la geometría dinámica inciden positivamente en el proceso de resolución y favorecen aspectos de orden metacognitivo. A su vez (León, 2017) en su trabajo *El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades,* utiliza el apoyo del trabajo experimental con el uso de software GeoGebra permitiendo a los estudiantes desarrollen competencias relacionadas con el aprendizaje asistido por el computador. Proporcionando la posibilidad de analizar gráficamente la covariación de algunas magnitudes definidas por la necesidad de resolver problemas de la cotidianidad.

Por su parte (Rincón y Uribe,2012) en *El Tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación),* presentan un marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que se desarrollan al aprovechar el videojuego como mediador visual y dan cuenta de un estudio investigativo a partir del cual ilustran los efectos del uso del Tetris en la resolución de tareas desarrolladas por tres individuos con necesidades particulares de aprendizaje del Gimnasio Los Robles (Bogotá).

(Boero, 2012) en *Del análisis y la representación de situaciones espaciales hacia el pensamiento teórico en geometría: una ruta de tercero a noveno grado.* A partir de ejemplos provenientes de un proyecto que inició a finales de los años 1970, y que ha sido ampliamente experimentado en la escuela primaria y los primeros cursos de secundaria, ilustró cómo es posible moverse desde la construcción argumentativa de conceptos geométricos en campos de experiencia adecuados (en particular, en el campo de experiencia de las sombras solares) hacia el desarrollo de las competencias argumentativas necesarias para validar conjeturas en geometría y para aproximarse a teoremas de la geometría tridimensional.

(Arteaga,2012) desarrolla una relación entre la geometría y el álgebra, escogiendo como ilustración el plano proyectivo. Está inscrito dentro del dominio teórico de la geometría y aporta elementos para profundizar en la geometría como disciplina formal. Por su parte, en la investigación realizada (Hilden, Montecinos, Tejada y Toro, 2012) utilizan la relación entre la geometría y el arte. Los autores discuten las reglas que se usan para producir diseños simétricos planos a partir de teselados, presentan el concepto de orbifold (orbificie o calidoscopio generalizado) y algunos artefactos usados en diseños simétricos, ilustrándolos con algunas de las obras de Escher.

(Sánchez y Fonseca , 2012) describen un estudio investigativo centrado en la importancia que tienen los algoritmos en la resolución de algunos problemas de geometría, específicamente sobre transformaciones en el plano. Discuten algunas formas útiles de usar algoritmos, relacionadas con la obtención de nueva información y sugieren una ampliación de las descripciones usuales sobre su uso. Así, el texto pretende ser un aporte a la investigación sobre la enseñanza de la geometría, en relación con la resolución de problemas.

Finalmente (Gutiérrez y Jaime, 2012) hacen un aporte al conocimiento didáctico en geometría, mediante el planteamiento de algunos modelos didácticos de la enseñanza de la geometría para los diversos niveles educativos. Sintetizan los modelos de Van Hiele y Vinner, y reflexionan sobre la necesidad de que los profesores tengan en cuenta las representaciones físicas y mentales en la enseñanza, por el importante papel que cumple la visualización en el aprendizaje de la geometría.
Las anteriores son algunas investigaciones que se tuvieron en cuenta como base para el planteamiento y consolidación de la presente investigación, no obstante, no representa el total del estudio bibliográfico que se realizó, por tanto, se realiza la siguiente tabla para realizar un resumen de las investigaciones utilizadas.

Tabla 1 *Estado del arte de la geometría fractal y la enseñanza.*

AÑO, AUTOR Y NOMBRE DE LA INVESTIGACIÓN	OBJETO
Hernández y Vidal (2019), fractalidad, caos y el lenguaje NetLogo como agentes integradores del currículo de las matemáticas escolares.	Diseño curricular que posibilite la introducción de la fractalidad y el caos, como ejes integradores del currículo de matemáticas del grado 9° de Educación Básica Secundaria, de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra.
Boero (2012).Del análisis y la representación de situaciones espaciales hacia el pensamiento teórico en geometría: una ruta de tercero a noveno grado.	Ilustración de la producción de hipótesis y justificaciones deductivas que hacen estudiantes de grado octavo, relacionadas con situaciones tridimensionales de sombras producidas por el sol.
Morales, Bedoya & Hernández (2012). La Geometría de las Plantas de la Ciudadela Educativa La Vida del municipio de Copacabana.	Determinar las diferentes relaciones que pueden existir entre conceptos geométricos ligados a los fractales, y la filotaxis de las plantas.
Vargas y Sánchez (2018). Didáctica en la enseñanza de la “fractalidad” en educación básica desde un modelo interdisciplinar MACTA (matemáticas, ciencias, tecnología y artes).	Secuencia didáctica interdisciplinar para fortalecer el pensamiento geométrico- métrico en los cursos de básica secundaria.
Fabio Nelson Zapata Grajales (2014).Una experiencia de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos.	Implementación de un aula abierta donde los estudiantes puedan encontrar sentido y significado a los conceptos matemáticos.

Flórez, C. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica.	Reducir a conocimiento matemático las acciones en elementos por aspectos metacognitivos (control, regulación y evaluación).
León, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra®: herramientas para la explicación científica de algunas realidades.	Consolidar un escenario que fomente el trabajo en grupo para lograr una construcción social del conocimiento.
Aya, O., Echeverry, A. & Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica.	Identificar el conocimiento faltante de los objetos geométricos y sus propiedades formales en el cuerpo docente.
Acevedo, J. & Camargo, L. (2012). El Tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación).	Marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que se desarrollan al aprovechar el videojuego como mediador visual.
Arteaga, J. (2012). Una relación entre la geometría y el álgebra (programa de Erlangen).	Aporte de elementos para profundizar en la geometría y el álgebra.
Matsumoto (2015).Fractales y algunas aplicaciones a la enseñanza.	Forma para explicar la naturaleza desde la geometría discreta.
Suárez S.(2011) La representación en educación matemática: Atractores de Sistemas Iterados de Funciones (IFS's) (Una Estrategia de Aprendizaje)	Uso de la geometría fractal en el modelamiento de las formas de la naturaleza.
Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria.	Reflexión de representaciones físicas y mentales en la enseñanza.
Hilden, H., Montesinos, J. Tejada, D. & Toro, M. (2012). Impresión de diseños simétricos en la obra de Escher.	Discusión de reglas de producción de diseños simétricos planos a partir de teselados y algunos artefactos usados en diseños simétricos.
Molina, O. J., Gil, C. & Orjuela, M. H. (2012). Figuras de ancho constante: un tema por explorar.	Generación de la definición de triángulo de Reuleaux y las curvas de Euler y Zindler.
Samper, C., Perry, P., Camargo, L. & Molina, Ó. (2012). Un ejemplo de articulación de la lógica y	Enseñanza de algunos temas de lógica matemática, en un curso de

la geometría dinámica en un curso de geometría plana.	geometría para aprender a demostrar.
Sánchez, C,. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides.	Reflexión del papel de Euclides en el desarrollo de la geometría, el álgebra y la teoría de números (paradigma de razonamiento matemático).
Sánchez, B. & Fonseca, J. (2012). Algoritmos como la herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano	Descripción de un estudio investigativo centrado en la importancia que tienen los algoritmos sobre transformaciones en el plano.
Acosta, M. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri® en clase de geometría.	Validación de la legitimidad didáctica de Cabri®, en consecuencia, de su legitimidad matemática en la institución.
Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, Ó. & Echeverry, A. (2010). Uso de la función de arrastre para generar experiencias de aprendizaje de la demostración en geometría.	Identificación de la evolución de la participación de los estudiantes en la producción y justificación de enunciados.
Cardona, L (2017). Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica.	Enseñar a los educandos los conceptos básicos de la geometría fractal como estrategia didáctica para que desarrollen el pensamiento geométrico basados en una nueva estrategia metodológica (geometría fractal) a partir de algunos elementos de la naturaleza.
Cabezas, C. (2015). Una introducción a la geometría fractal integrando geometría dinámica.	Fundamentar teóricamente el diseño de una secuencia de situaciones didácticas para el tratamiento de la autosemejanza o autosimilitud en el aprendizaje del estudiante desde la visualización en el contexto de la geometría fractal utilizando un ambiente de geometría dinámica.
Puerto, J. (2013). El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabrí®. Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional.	Propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias (relaciones, conexiones, predicciones, generalizaciones, modelado y formalización de leyes) desarrollo del razonamiento inductivo deductivo.

Tomado y adaptado de (Cristancho, 2019) recuperado de https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/handle/10654/32071/ZamoraCristanchoSammyHamir2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Fecha de consulta: 04/05/2020

5. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

5.1 Ciencias de la complejidad.

La realidad contemporánea (hablando de los dominios políticos, económicos, sociales etc.) ha venido presentando cambios trascendentales. Donde la percepción natural tanto individual, grupal y medios masivos de la comunicación, indican que el país y el mundo hoy por hoy, se encuentra en condiciones paupérrimas; en muchos casos dramáticas y en otras trágicas, en el campo de conocimiento escolar evoca a una forma magnánima. Esta forma magnánima se expresa en la ciencia de punta y, notablemente, en las ciencias de la complejidad.

De ahí que, las ciencias de la complejidad son el resultado de una creación no siempre directa, consciente y deliberada, y que más bien "incorpora también buenas coincidencias, la capacidad de ver relaciones y tipos de relaciones donde no las había, en fin, de innovación en toda la línea de la palabra". (Maldonado y Gómez, 2010)

Este trabajo de investigación propone buscar una estrategia didáctica innovadora para transformar el quehacer de las prácticas pedagógicas, modificando en sí las concepciones tradicionales que ha permeado por décadas el discurso de maestras y maestros en la enseñanza de las matemáticas. Brindando nuevas alternativas de enseñanza en una comunidad rural como es la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede La Australia del municipio de Guadalupe del departamento del Huila.

Tomando como principal recurso los conocimientos que tienen los estudiantes de su entorno como, material concreto para su aprendizaje. Teniendo en cuenta que "la didáctica tiene como objetivo la instrucción y preparación a través de métodos eficaces y adecuados en la formación integral del educando, para lo cual se preocupa de estudiar el trabajo docente, congruente con el método de aprendizaje" (Bravo y Varguillas, 2015)

Por ello, ésta propuesta centra su estudio y tiene como eje fundamental la geometría fractal y la simulación computacional, las cuales en sus caracteres multidisciplinarios permiten el estudio de las ciencias naturales, las matemáticas, las ciencias sociales y la tecnología. Brindando de esta manera la vinculación de cierta parte del currículo con procesos científicos, tecnológicos y pedagógicos para orientar el desarrollo de competencias en la formación científica, fundamentándose en ámbitos conceptuales del grado noveno.

Llevando a cabo un proceso de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, a partir del análisis geométrico de las formas de las plantas y de las relaciones entre variables geométricas asociadas a éstas, mediado por nociones de geometría fractal y simulación computacional.

Asimismo, cronológicamente, las ciencias de la complejidad son:

La termodinámica del no equilibrio según Maldonado 2005, los sistemas alejados del equilibrio son altamente sensibles a las novedades o a las innovaciones, a los eventos, o al azar, y procesos irreversibles, pues son estas novedades las que generan dinámicas no-lineales en dichos sistemas. Además de tener en cuenta I. Prigonine menciona que: Procesos irreversibles son tan reales como los reversibles; que juegan un papel constructivo fundamental en el mundo físico y una irreversibilidad unida a la dinámica. Frente a esta forma de abordar la realidad, la termodinámica del no equilibrio nos ofrece la visión de un mundo diverso, abierto y pluralista.

La teoría del caos, “los sistemas caóticos son altamente sensibles a las condiciones iniciales y responden a la presencia de un atractor. Los tipos de atractores que se suelen identificar en el estudio del caos son el atractor fijo, el periódico y el atractor extraño” (Maldonado, 2005a), en este sentido la más mínima variación en ellas puede provocar que el sistema evolucione en forma completamente diferente como un efecto mariposa.

La geometría fractal según Maldonado, 2005 “la geometría de fractales consiste en una aplicación de lo infinitesimal a lo finito, y así, la invariancia resultante nos revela un universo pletórico de formas y estructuras, todas sólidamente conectadas entre sí, a pesar de su irregularidad y movilidad” (Maldonado, 2005a) y para Martínez, 2018 son figuras autosemejantes de dimensión no entera. La teoría fractal tiende a completar y relacionar la matemáticas clásicas, ya que estas se acercan a los fenómenos reales y tratan de predecir de una forma aproximada el comportamiento de estos.

Maldonado explica que sobre la teoría de catástrofes:

Contra la idea de tipo fisicalista según la cual lo primero es el espacio-tiempo, Thom resalta que la entidad primitiva es el fenómeno visto por un observador. Pero, dado que existen o pueden existir varios (o muchos) observadores sobre un mismo fenómeno, el problema consiste, entonces, en sintetizar las diversas versiones que tenga cada observador. Esta labor de síntesis es la teoría de catástrofes (2005a). Esta ciencia trata de descubrir los cambios de estado que pueden ocurrir en un sistema definido.

Ahora las lógicas no clásicas “En ocasiones, debido a que la lógica formal clásica es demasiado rígida; en otras, porque sucede todo lo contrario, y no aporta el rigor suficiente en la comprensión y en la elucidación de las estructuras y modos de racionalidad de la ciencia, de la vida y del mundo en general” (Maldonado, 2012). Por lo tanto, resultan altamente relevantes en el estudio de los sistemas complejos no-lineales.

Por último, se tiene la ciencia de redes complejas “Redes que presentan ciertas características estadísticas y topológicas “Martínez, 2018. donde cualquier no cualquier respuesta es posible o aceptada, ya que permite ver más allá de planos generales y poder enfocarse en detalles más finos.

Tabla 2 *Ciencias de la Complejidad*

Ciencias De La Complejidad	Área De Estudio	Clasificación	Autores Destacados	Condiciones
Termodinámica del no-equilibrio.	Los sistemas alejados del equilibrio son altamente sensibles a las novedades o a las innovaciones, a los eventos, o al azar, y procesos irreversibles. (Maldonado, 2005. Pág. 10.)	Real Constructivo Dinámico.	I. Prigonine	Procesos irreversibles son tan reales como los reversibles. Los Procesos irreversibles juegan un papel constructivo fundamental en el mundo físico. Irreversibilidad unida a la dinámica. (I. Prigonine. 1980 libro de tesis)
Ciencia del caos	Los sistemas complejos sensibles a condiciones iniciales. (Martínez, 2018)	La búsqueda e identificación de atractores extraños.	E. Lorenz y D. Ruelle	Condiciones iniciales. La más mínima variación en ellas puede provocar que el sistema evolucione en forma completamente diferente. (efecto mariposa)
Geometría fractal	Los fractales. Figuras autosemejantes de dimensión no entera.	Fractales escalantes o autosemejantes	Mandelbrot	Tiene detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.

	(Martínez, 2018)	y fractales en tiempo de escape.		Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales. Son auto - similares. Su dimensión no es entera. Puede ser definido recursivamente.
Teoría de las Catástrofes	Cambios súbitos e irreversibles en sistemas estructuralmente estables. (Martínez, 2018)	Catástrofe de pliegue, catástrofe en cúspide, catástrofe en cola de milano, catástrofe en mariposa, catástrofe umbílica hiperbólica, catástrofe umbílica elíptica y catástrofe umbílica parabólica.	R. Thom	Cambios de estado.
Lógicas no clásicas	Las lógicas no-clásicas resultan altamente relevantes en el estudio de los	Entre las lógicas no-clásicas se destacan: la	Jean Louis Gardes Lofti Zadeh Francisco	No lógica clásica

	sistemas complejos no-lineales. (Martínez, 2018)	lógica para consistente, la lógica de la relevancia, la lógica del tiempo, la lógica difusa, la lógica polivalente, la lógica modal, la lógica cuántica, la lógica epistémica, la lógica libre y la lógica intuicionista	Miró	
Redes complejas	Redes que presentan ciertas características estadísticas y topológicas. (Martínez, 2018)	Procesos dinámicos entre un sistema y con el entorno	L. Barabasi, S. Strogantz, D. Watts	Cualquier respuesta sea posible o aceptada.

Fuente: Tomado y adaptado de Maldonado y Gómez (2010) y Martínez (2018). Fecha de consulta: 25/02/2020

5.2 Disciplinariedad vs interdisciplinariedad.

Desde una consideración histórica la disciplinariedad constituye un resultado de la fecundidad del desarrollo científico, ya que delimita un dominio de competencia sin el cual el conocimiento se volvería fluido y vago. (Morín, 2003). Pero también se tiene: Una disciplina está formada por un corpus de conocimientos teóricos, por procedimientos de investigación y por una práctica profesional acumulada, con un componente institucional y socio histórico, así como por una comunidad, redes de conocimiento y comunicación, una tradición, estructura conceptual, modos de investigación y cuerpos profesionales especializados en la producción sistemática de nuevos conocimientos (Bolívar, 2008), por lo tanto la disciplinas en su proceso de desarrollo se aislaron una de otras, brindando una información fragmentada y alejada de la realidad.

En cambio, se presentan diferentes autores y su argumentación que apoyan la interdisciplinariedad trata de dar solución a los problemas reales a través de la unificación o apoyo entre las diferentes ciencias lo que permite la reorganización y reestructuración del conocimiento.

La interdisciplinariedad es el establecimiento de nexos recíprocos, interacciones, intercambios múltiples y cooperación entre dos o más ciencias particulares que tienen un común objeto de estudio desde perspectivas diferentes, o que se aproximan a las propiedades y relaciones específicas de ese objeto con distintos aparatos teóricos y metodológicos para desentrañar los diversos aspectos de su esencia, con el propósito de lograr un conocimiento cada más integral del mismo y de las leyes que rigen su existencia y desarrollo (Castro, 2000).

(Nicolescu ,1996) señala que la interdisciplinariedad se encarga de la transferencia de métodos de una disciplina a otra. Además, destaca que pueden distinguirse tres grados de interdisciplinariedad:

> Un grado de aplicación. Por ejemplo, los métodos de la física nuclear transferidos a la medicina conducen a la aparición de nuevos tratamientos del cáncer; un grado epistemológico. Por ejemplo, la transferencia de los métodos de la lógica formal en el campo del derecho genera análisis interesantes en la epistemología del derecho; un grado de engendramiento de nuevas disciplinas. Por ejemplo, la transferencia de métodos de las matemáticas al campo de la física ha engendrado la física matemática, de la física de las partículas a la astrofísica –la cosmología cuántica, de la matemática a los fenómenos meteorológicos o a los de la bolsa –la teoría del caos, de la informática en el arte- el arte informático. Como la pluridisciplinariedad, la interdisciplinariedad desborda las disciplinas, pero su finalidad permanece también inscrita en la investigación disciplinaria. (p.35)

Morín (2002) destaca que la interdisciplinariedad es un proceso complejo e inacabado, una filosofía de trabajo que se nutre de un tejido de eventos, acciones, interacciones, determinaciones y azares que constituyen nuestro mundo fenoménico. Como puede apreciarse, se plantea un proceso pluralista en el que las disciplinas van dando paso para sentar las bases de otro paradigma, menos rígido y más respetuoso de la complejidad y la interdependencia entre los seres vivos que componen la sociedad; de esa interdependencia entre las partes emergen nuevos elementos que no se perciben en forma aislada.

Aznar y Angels (2009) aportan como criterio básico para el desarrollo sostenible el criterio interdisciplinar, ya que la docencia universitaria debe orientarse hacia la interdisciplinariedad, al estar integrado el claustro por docentes e investigadores procedentes de áreas académicas diferentes que aportan enfoques y culturas académicas diversas, que facilitan el desarrollo de diálogos interdisciplinares desde la lógica de los planteamientos disciplinares.

La interdisciplinariedad es una exigencia de la ciencia y la educación actual; nace como una reacción al tratamiento lineal y sectorial de la educación tradicional, que segmenta la educación en pequeñas bahías donde se recarga el conocimiento por asignaturas, sin contexto y sin buenos resultados (Gutiérrez, 2011); por el contrario, el conocimiento es sistemático y, por lo tanto, puede abarcar todos los campos del aprendizaje en las diferentes disciplinas del saber.

Tabla 3 *Interdisciplinariedad vs Disciplinariedad*

Interdisciplinariedad	**Disciplinariedad**
Va más allá de relacionar las diferentes disciplinas, trata de integrarlas de manera contextualizada y sistémicamente. Se produce una interacción y cruzamiento entre diferentes disciplinas en orden a la comunicación de conocimientos. (Castro, 2000).	Consiste en un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas organizados a partir de una lógica interna, representada en ideas ejes en una progresión sistemática de contenidos teóricos y actividades prácticas de transferencia.
La creatividad alta y vas allá de los dominios del conocimiento.	La creatividad va al límite al dominio del conocimiento.
Alto posible impacto, desafiando caminos existentes	Limitado, relativamente a lo existente
Integrando conocimientos y métodos de diferentes disciplinas, utilizando una verdadera síntesis de enfoques. Centrado en la formulación y resolución de problemas desde perspectivas disciplinarias	No coopera con otras disciplinas. Se basa en el paradigma fragmentado del conocimiento, creando disciplinas parce lisadas.

Hay una común comprensión sobre enfoques metodológicos epistemológica y perspectivas ontológicas	Desarrollo de nuevas disciplinas detalladas.
Trabaja problemas de realidades globales.	Trabaja problemas desvinculados de la realidad (de la cual es abstraído) y de sus relaciones con otros objetos.
Requiere de estímulo, estructura y exploración de los campos o expertos específicos de cada uno aportando valor al objeto de estudio.	Autonomía de las ciencias en cuanto a delimitación de su campo, lenguaje, técnicas y teorías a que la orientan.

Fuente: Travé González, G. y Pozuelos Estrada, F.J. (1999), Duque Hoyos, R. (2015) y Andrea Mónica López.

5.3 Geometría y complejidad

5.3.1 Geometría.

La geometría se ocupa de las medidas, propiedades y relaciones de puntos, líneas, planos y sólidos en un espacio de un número dado de dimensiones y de un tipo dado. (Baldor, 2004) “La palabra geometría se deriva de dos palabras griegas: geo (tierra) y metria (medida)”. “La geometría surge a partir de la observación de cosas simples y relaciones comunes” (Clemens et al, 1998).

El primer uso conocido de la geometría se remonta a los antiguos egipcios y babilonios. Los egipcios aplicaron el concepto de proporciones y triángulos similares en la construcción de las pirámides, y el concepto de áreas para medir parcelas de tierras con fines fiscales. Desde la antigua Babilonia, se encontraron registros, que datan de aproximadamente 3000 a.c, que se ocupan de la medición del cuadrilátero. Además, los babilonios aproximaron el valor de π a 3.125, y estaban familiarizados con el Teorema de Pitágoras antes de que el matemático griego Pitágoras (570 - 490 a.c) lo descubriera.

De los egipcios y los babilonios, este cuerpo de conocimiento pasó luego a los griegos. Posteriormente, alrededor del 300 a. c., el matemático griego Euclides (325-265 a. c.), a menudo referido como el "Padre de la Geometría", combinó el conocimiento geométrico con un sistema más lógico, un tratado llamado Elementos que constaba de trece libros. La historia de la geometría de los últimos dos milenios se centró más o menos en los Elementos de Euclides hasta el descubrimiento de geometrías no euclidianas.

Una división entre la geometría antigua y la moderna se puede enmarcar de diferentes maneras, la más útil puede ser la consideración del espacio en sí mismo como un objeto de investigación geométrica. Las matemáticas griegas entendieron la geometría como un estudio de líneas rectas, ángulos, círculos y planos, o en términos más generales como una ciencia de figuras concebidas contra un espacio de fondo amorfo cuya definición se encuentra fuera de los límites de la teoría. Esta comprensión fue reemplazada por una concepción del espacio (y espacios, ahora en plural por primera vez) dotados de propiedades geométricas.

Bishop (1983) menciona que, la Geometría es la Matemática del espacio. Por su parte García, Franco, & Garzón (2006), afirman que:

> […] La matemática es la forma de expresar y explicar el resultado de una experiencia, de la confrontación de objetos en el meso mundo: mundo cotidiano. Asumir la creación matemática como un acto humano y no de índole divino, ha de marcar formas especiales de ver la clase de matemáticas. (p.9)

Con ello, se plantea que el proceso de enseñanza -aprendizaje de la geometría, debe ser adaptado al contexto de los sujetos en formación; con el objetivo de potenciar el desarrollo de capacidades de modelización, interpretación y visualización, debido a que estas no se desarrollan mediante la transcripción de epistemologías en el cuaderno. De hecho, el Ministerio de Educación Nacional (2006), aclara que:

> La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones

> problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional. (p.17)

Bressan (2000) brindan una visión actual de las utilidades de la geometría como:

> • La ciencia del espacio, vista esta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y fenómenos del mundo real.
>
> • Un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización.
>
> • Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo, gráficas y teoría de gráficas, histogramas, entre otros.
>
> • Un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos.
>
> • Una manera de pensar y entender.
>
> • Parte de nuestro lenguaje cotidiano
>
> • Un modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
>
> • Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como, por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones. (p.21)

Del mismo modo Gamboa y Ballestero (2010) parafraseando a autores como Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) señalan que:

> El desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas; situación que puede utilizarse para justificar un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría, la cual, a diferencia de la percepción disjunta que

> concibe su evolución de forma enajenada de la dinámica social, se oriente a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano, así como a incentivar en los estudiantes y las estudiantes el desarrollo de ciertas habilidades, entre ellas, razonamiento y justificación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)(p.126)

5.4 Geometría fractal.

5.4.1 Concepto: El término fractal proviene del vocablo latino fractus que significa "quebrado, fragmentado, etc" y fue introducido por el francés Benoit Mandelbrot, que estudió una geometría que se acercara a los fenómenos irregulares de la naturaleza en contraste a la geometría euclidiana que simplifican la realidad en formas sencillas y exactas. Al respecto escribe: Concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean…identificando una serie de formas que llamó fractales (Mandelbrot, 1997, p.15).

La geometría fractal también es llamada geometría de la naturaleza, en palabras de Braña (2003):

> Es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como características fundamentales las propiedades de autosimilitud y la de convivir con extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias (p. 8).

Formalmente un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica (Mandelbrot, 1997, p.32).

Cabe aclarar que existe una diferencia entre un "conjunto fractal" y un "fractal natural". Al conjunto fractal se puede definir como un objeto matemático, cuyas características pueden definirse rigurosamente (como figuras creadas), mientras que el fractal natural se representa a través de objetos que pertenecen a la naturaleza y tienen ciertas regularidades (que pueden ser nubes, estructura de árboles, copos de nieve, etc.).

5.4.2 Características

Entre las características fundamentales de los fractales se encuentran la auto similitud, la dimensión y las iteraciones.

Auto similitud

Se puede decir que está formada por partes más pequeñas que se parecen. Esta similitud puede ser geométricamente estricta o bien puede ser solamente aproximada o estadística.

Se tienen como ejemplos de *autosimilitud estricta* el Polvo de Cantor y la Curva de Koch y en la *autosimilitud aproximada* o estadística son los fractales naturales como los contornos de las nubes, costas, las ramificaciones de los árboles, entre otras.

Dimensión

En la geometría fractal es frecuente hablar de distintas dimensiones, para ello a continuación se introduce de manera precisa estos conceptos. Así se presentarán lo relativo a la dimensión euclídea, topológica, de Hausdorff-Besicovitch y fractal.

Dimensión Euclídea

Es el número de coordenadas requeridas para especificar un objeto.

Ejemplos: Un punto dimensión uno, un plano dimensión dos y el espacio dimensión tres.

Dimensión Topológica

> La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disyuntos. La dimensión topológica uno describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos con sólo una intersección entre adyacentes pares de ellos.
>
> Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces... La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea. *(*Rivera, 2011, p.270)

Entonces:

$$D_T = -1 , \quad El\, Vacio$$

$$D_T = 0 , \quad Un\, punto$$

$$D_T = 1 , \quad Un\, segmento$$

$$D_T = 2 , \quad Un\, cuadrado$$

$$D_T = 3 , \quad Un\, cubo$$

Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Dimensión de Contenido o Dimensión de Hausdorff- Besicovitch:

> Se define como un contenido lineal se calcula sumando pasos r elevados al exponente uno, que es la dimensión de la línea recta. Un contenido de superficie se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cuadrados que compone la superficie) elevados al exponente dos, que es la dimensión del plano. Un contenido de volumen se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cubos que componen el volumen) elevados al exponente tres, que es la dimensión del espacio. (Rivera, 2011, p.270).

La Dimensión de Hausdorff - Besicovitch, está dada por la fórmula:

$$D = \frac{log\ (N)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Donde, N es el número de copias de sí mismo, D es la dimensión de Hausdorff y r es la razón de homotecia (razón de similitud).Usando la función inversa del logaritmo en ambos lados de la igualdad, obtiene lo siguiente:

$$1 = N_r^D$$
$$contenido = N_r^D$$

Iteraciones. De acuerdo con Al-Majdalawi (2005) las iteraciones consisten en repetir n veces la misma figura o patrón. En los fractales lo que se itera son las fórmulas, ecuaciones o el patrón generador dependiendo del fractal (p.12). En los inicios de la geometría fractal existía el problema de realizar la iteración n-veces de esas ecuaciones, teniendo en cuenta que tenían números complejos, pero finalmente con ayuda de los computadores se logró encontrar la solución. Esta es una razón técnica por la cual la geometría fractal es una ciencia joven, con poco más de 40 años. Para la construcción de cualquier fractal es imprescindible hacer una iteración un número n veces.

5.4.3 Desarrollo histórico de la teoría de fractales.

Los orígenes de la geometría fractal se remontan a fines del siglo XVIII y durante el siglo XIX, cuando los matemáticos y científicos iniciaron a poner en tela de juicio los principios de

Euclides para el estudio de estructuras y formas que no podían modelarse por medio de la geometría Euclidiana y el cálculo Newtoniano.

> Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daban muy frecuentemente este tipo de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Los primeros que comenzaron a demostrar teóricamente esta problemática fueron Cantor (con su famoso conjunto de Cantor) y Peano. Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henrí Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde por dos matemáticos también franceses, Gastón Juliá y Pierre Fatuo, hacia 1918. Los trabajos realizados en este campo quedaron detenidos en los años 20.(Al-Majdalawi,2005, p.6)

Diferentes personajes realizaron las primeras aproximaciones al concepto conocido actualmente como Geometría Fractal y se cree que de alguna manera aportaron a la teoría finalmente formalizada por Mandelbrot. A continuación, se presentan algunos de estos estudios como una forma de dar a conocer los antecedentes de la teoría fractal previos a Mandelbrot.

Jean Baptiste Perrin (1870-1942)

Científico que observó y público con respecto a objetos familiares de forma irregular, en el prólogo de su obra cumbre, Les *Atomes* (Perrin 2014) expresa:

> (…) si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción, o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantes, pero particulares. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquellas personas que se les habla de curvas sin tangente o funciones sin derivada piensan que la naturaleza no presenta tales complicaciones y que no nos sugiere esas ideas.
>
> En la realidad experimental si miramos a través de un microscopio, observamos el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido y queremos una tangente a su trayectoria, tendríamos que encontrar un límite,

> por lo menos aproximado, a la dirección de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permita llegar la experiencia, esta dirección varía localmente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes (…). (citado en Rodriguez, 1995, p.7)

Norbert Wiener (1894-1964)

Tomo como referencia las ideas propuestas por Perrin, viéndose influenciado para la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano.

> Wiener tenía afición para denominar una forma extrema del desorden natural. Él lo denominaba con la palabra "caos", y nos permite apreciar que Perrin hizo dos observaciones distintas. Por una parte, que la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo newtoniano.
>
> Por otra parte, que dicha geometría evoca la complicación de las matemáticas creadas hacia 1900. Fue la obra de Wiener la principal fuente de inspiración para la creación de los objetos fractales. El dominio fractal había emergido (sin nombre) cuando se estudiaron fenómenos reales (tales como la longitud de una costa) por medio de teoría matemática avanzada, que surgieron en estudios donde el azar estaba involucrado. (Rodriguez, 1995, p.8)

Lewis Fry Richardson (1881-1953)

Estudió de forma empírica la longitud aproximada de las fronteras entre dos países o costas de un país en específico. Sus ideas fueron adelantadas para su época, pues no obtuvo el reconocimiento que merecía, hasta el punto de tacharlo de “excéntrico”.

> Rehuía los formalismos sin vacilar, empleaba conceptos finos y precisos allí donde él los creía útiles. Entre los papeles que dejó a su muerte se han encontrado las gráficas reproducidas en las figuras 17 y 18, que inducen a concluir que la longitud de una costa o frontera L es proporcional al factor de escala empleado en la medición ε elevado a

> una potencia α. El valor de dicha potencia depende de la costa elegida, y distintos tramos de la misma costa, considerados separadamente, dan a menudo distintos valores de la potencia. A los ojos de Richardson, dicha potencia, era un mero exponente, sin ningún significado particular. Pero su valor parece ser independiente del método elegido para estimar la longitud y, por lo tanto, el parámetro merece ser considerado con detenimiento. (Rodríguez, 1995, p.8)

Influenciando con este trabajo que involucraba escalas no tradicionales a Mandelbrot quien en 1967 demostró que la medida de la longitud de la costa de Inglaterra en diferentes escalas indicaba que las líneas costeras eran fractales cuya longitud aumentaba al incrementar el grado de detalle medible.

Estudio además la turbulencia, mostrando como se puede analizar la difusión del viento sin tener que hablar de velocidad. Aunque aparentemente Richardson no contaba con un elemento propio de la fractalidad, su razonamiento se ajusta fácilmente a la visión “fractal” de la turbulencia.

Benoit B. Mandelbrot

Es considerado como el padre de la geometría fractal, pero se puede pensar que algunos de los fractales y su análisis provienen de matemáticas clásicas, y que algunos matemáticos desarrollaron algoritmos para su creación, como: G. Cantor (1872), G. Peano (1890), D. Hilbert (1891), H. von Koch (1904), W. Sierpinski (1916), G. Julia (1918), F. Hausdorff (1919), etc.

> En la obra de B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* 1982, se citan 84 referencias debidas a él mismo que de una u otra forma influyeron para desarrollar el concepto de fractal. Dichas publicaciones datan de 1951 a 1986. Es verdad que aquella matemática jugó un papel importante en los conceptos de Mandelbrot para la creación de la nueva geometría. Pero también es verdad que aquellos matemáticos no pensaron que de dichos algoritmos se pudiese generar conceptos para una nueva geometría de la naturaleza. Dichos algoritmos que generaban objetos matemáticos "raros" fueron relegados como objetos excepcionales o "monstruos matemáticos” (Rodriguez, 1995, p.8)

Algunos conceptos que son eje fundamental de la geometría fractal actual como la autosimilitud, no aparecieron instantáneamente en los trabajos de Mandelbrot . Como toda teoría fueron evolucionado, en este caso, en la medida que aplicaba las herramientas matemáticas en áreas termodinámica, sistemas de comunicación, teoría de la información, economía, psicología, climatología, cosmografía, mecánica de fluidos e ingeniería de materiales. Solo hasta la década de los 60's se habla por primera vez de *auto similitud*. Sin embargo, en 1967 maduro bien el concepto logrando cuantificarlo.

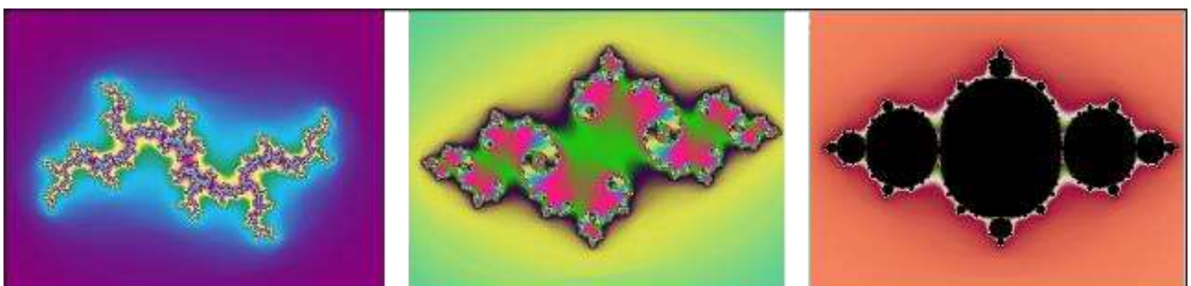
En 1980, la publicación de su libro *La Geometría Fractal de la Naturaleza* popularizó la geometría fractal a nivel mundial.

5.4.4 Tipos de fractales.

Fractales Lineales
Son aquellos que se construyen con un simple cambio de escala, como lo son los conjuntos fractales creados por el hombre con figuras sencillas (rectas, triángulos, etc.) y la mezcla de ellas. Los ejemplos clásicos de fractales lineales son el Conjunto de Cantor, Curva de Von Koch, Triangulo de Sierpinski, entre otras.

Fractales no lineales
Son aquellos que están formados por los números complejos, debido a esto se les designa el término de caóticos. Estos fractales son generados por computadoras y creados por el hombre, como lo son el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, entre otros.

Figura 1 *Iteración de la función f(z)= z^2+c*



Conjunto de Julia para c = 0 + 0.8i | Conjunto de Julia para c = -0.8 - 0.25i | Conjunto de Julia para c = -0.8 +0i

(Edición del original: Al-Majdalawi, 2005, p. 24).

5.4.5 Monstruos matemáticos.

Vicente Talanquer en su obra *Fractal, fractal, fractal de laberintos y espejos*, expone los "monstruos" matemáticos" como estructuras geométricas irregulares con propiedades particulares que hacen que sea difícil establecer un mecanismo sistemático para compararlos y clasificarlos (Talanquera, 2002). Los monstruos más populares y que se ilustran en el libro mencionado, son los que se muestran a continuación.

Polvo de Cantor

El Conjunto de Cantor o Polvo de Cantor, fue ideado por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor en 1883, considerado un fractal por excelencia, además de ser el primero conocido. El Polvo de Cantor está formado por una recta, imagine que tiene una recta de intervalo $[0,1]$ equivalente a C (recta original), se debe dividir la recta en tres segmentos iguales, los cuales

serán lo intervalos [0,1/3], (1/3 ,2/3), [2/3,1]. Luego eliminar el intervalo abierto intermedio, es decir, se elimina el segmento (1/3,2/3). Entonces
nuestro C_1 será la unión de los dos intervalos:

$$C_1 = [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$$

Ahora, se toma cada intervalo y se realiza el mismo procedimiento anterior, dividir cada segmento en tres intervalos iguales y el intervalo abierto, o sea, el segmento intermedio, eliminarlo. Con ese proceso nuestro C_2 estará compuesto así:

$$C_2 = [0; 1 = 9] \cup [2 = 9; 3 = 9] \cup [6 = 9; 7 = 9] \cup [8 = 9; 1]$$

Este proceso se repite indefinidamente. Es decir, para obtener a Cn se debe conocer $Cn + 1$. Como se puede observar en la imagen, su construcción se obtiene después de infinitas iteraciones de un algoritmo o patrón geométrico sencillo.

Figura 2 *Polvos de Cantor.*

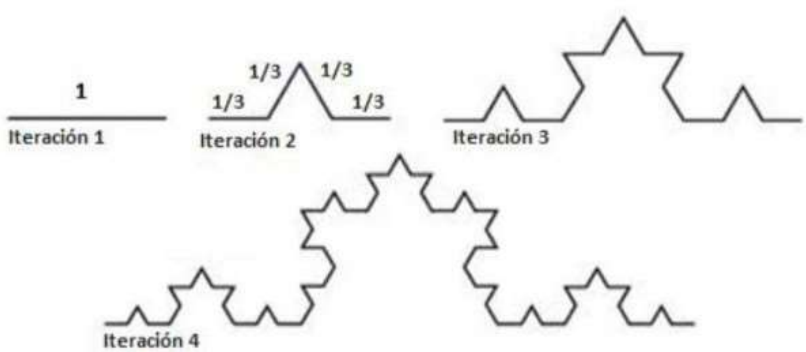
Recuperado de: https://www.researchgate.net/figure/Construccion-del-denominado-Polvo-de-Cantor-Conjunto-fractal-con-dimension_fig1_292994808

Curva de Koch

La Curva de Koch fue creada por Niels Fabián Helge Von Koch, en el año 1904. Diferencie dos figuras: el Triángulo de Koch [Figura 9], forma tríadica o también llamada copo de nieve, de la Curva de Koch.

Este fractal parte de un triángulo equilátero de 1 unidad; luego se divide cada segmento en tres partes iguales de 1/3 y el segmento del medio se elimina, lo mismo que sucedía en el Polvo de Cantor. Teniendo que agregar un triángulo equilátero en el segmento eliminado (1/3) en cada lado del triángulo; finalmente este proceso se tiene que repetir infinitas veces en cada uno de los segmentos que tiene la nueva figura [Figura 3]

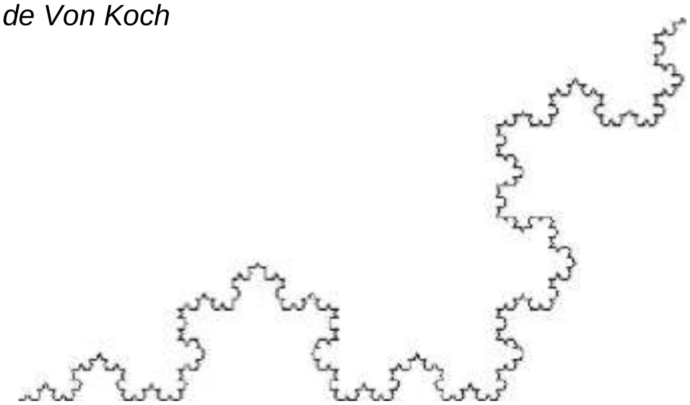
Figura 3 *Progresión infinita de la curva de Koch.*



Edición del original. Recuperado de:https://www.estalmat.unican.es/documentos/actividades_2008_09/enero/EstalmatMJ_hojasAlumnosparte2.pdf

Para construir la Curva de Koch, se evidenciar que la curva es la iteración de solo un lado del Triángulo de Koch, iterado infinitas veces como nos muestra la [Figura 4].

Figura 4 *Curva de Von Koch*

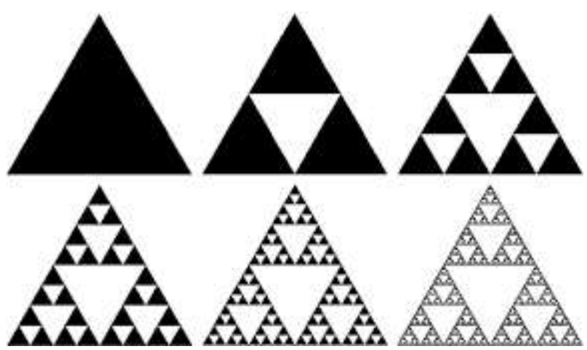


Tomado de Rivera, 2009.

Triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclav Sierpinski en 1919 creo el triángulo de Sierpinski , el cual se construye de la siguiente manera:
Construir un triángulo equilátero de lado 1 (no necesariamente equilátero). Ahora, a cada lado se debe encontrar sus puntos. medios y se deben unir formando 4 triángulos internos(equiláteros) de lado 1/2 cada uno, pero el triángulo del medio se elimina, luego con los 3 triángulos restantes se tiene que hacer lo mismo, luego con los 9 y así sucesivamente como muestra la [Figura 11].

Figura 5 *Secuencia del Triángulo de Sierpinski, hasta la iteración 4.*



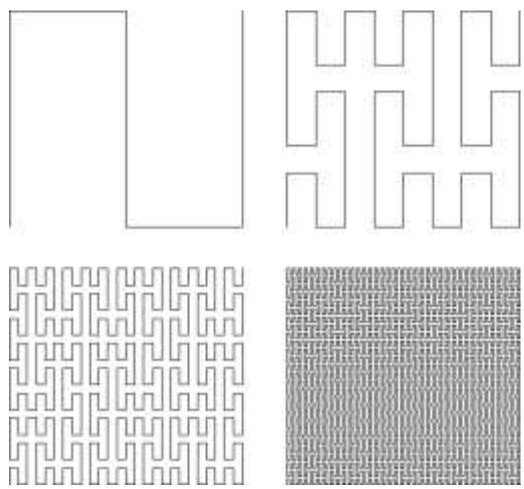
Tomado de Valdez, 2016

Curva de Peano

En 1890 Giuseppe Peano (1858-1932), discute las curvas que se encuentran en un plano y bajo ciertas reglas iterativas llegan a llenar completamente dicho plano, dramáticamente demuestran que la idea con respecto a las curvas es bastante limitada.

Para la construcción de la curva de Peano, se inicia con una línea recta simple, luego se sustituye el segmento por una curva generadora. Aparentemente el generador tiene dos puntos de auto-intersección, más precisamente, la curva se toca a sí misma en dos puntos. Observamos que la curva generadora se ajusta bien dentro de un cuadrado, que se muestra por las líneas punteadas. Tomamos cada pedazo de la línea recta y la reemplazamos por un generador con una adecuada escala. El factor de escala es tres. Hay un total de 32 puntos de auto-intersección en la curva. Después repetimos, en los siguientes pasos el mismo procedimiento, así cada segmento de línea tiene un factor de tres, por lo tanto, en el paso n-ésimo el segmento de línea tiene una longitud de 1/3n y este número rápidamente decrece. (Rodríguez, 1995, p.8)

Figura 6 *Iteraciones Curva de Peano*

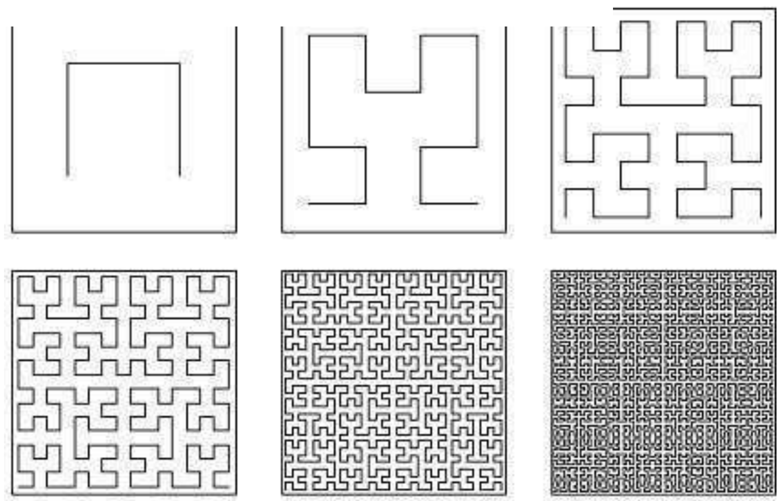


Tomado de Valdez, 2016.

Curva de Hilbert

David Hilbert proporciono una explicación de la construcción de la curva de Peano basándose en un proceso parecido al de Peano. Con este nuevo algoritmo se construye lo que hoy se conoce como curva de Hilbert. En la siguiente se presenta la regla generadora de la curva de Hilbert.

Figura 7 *Iteraciones Curva de Hilbert*



Tomado de Valdez , 2016.

5.4.6 Aplicaciones.

Las aplicaciones de los fractales son múltiples en diversas disciplinas, debido a la necesidad de un tipo de matemática necesaria para modelar y estudiar formas inusuales en la naturaleza, que por medio de otras geometrías estaban siendo limitadas.

Al respecto Capra (1996) afirma

> La gran fascinación ejercida por la teoría del caos y la geometría fractal en personas de todas las disciplinas -desde científicos hasta a empresarios y artistas – puede constituir efectivamente una señal esperanzadora de que el aislamiento de las matemáticas está tocando a su fin.
>
> Las nuevas matemáticas de la complejidad están haciendo que cada vez más personas se den cuenta de que las matemáticas son mucho más que frías formulas, que la compresión del patrón es crucial para el entendimiento del mundo vivo que nos rodea y que todas las cuestiones de patrón, orden y complejidad son esencialmente matemáticas. (p.52)

Los fractales tienen diversas aplicaciones en la vida real. Por ejemplo, en el arte La imagen creada por un fractal es compleja pero sorprendente, y ha intrigado a los artistas durante mucho tiempo. De hecho, el arte fractal se considera un verdadero arte. Artistas como Jackson Pollock y Max Ernst, han usado patrones fractales para crear formas aparentemente caóticas pero definidas. Además, algunos artistas se inspiran en imágenes fractales al crear sus propias formas de arte. Inclusive, las imágenes fractales se han utilizado para crear efectos especiales. Utilizados en programas como Star Trek y Star Wars y por estudios como Pixar en sus largometrajes y cortometrajes, para recrear paisajes, y aspectos físicos que de otra manera serían imposibles con la tecnología convencional.

Figura 8 *Blue poles', de Jackson Pollock (1952).*

Recuperado de https://elpais.com/elpais/2019/05/08/ciencia/1557309166_840974.html

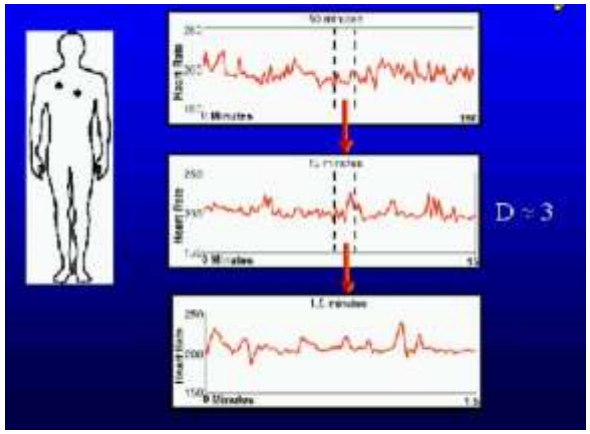
Por otro lado, los fractales son una parte muy importante en los estudios biológicos. Muchos objetos en la naturaleza están compuestos de figuras complejas que de otro modo no podrían definirse mediante formas euclidianas.

La mayoría de los objetos naturales, como las nubes y las estructuras orgánicas, guardan estructuras fractales. Se han detectado este tipo de patrones en las montañas, las coníferas, los sauces, corales marinas, etc. Se puede observar conductas fractales en la propagación de un incendio forestal en una plantación ordenada de árboles y la trayectoria de las nubes de la lluvia ácida. Como tal, los fractales pueden usarse para capturar imágenes de estas estructuras complejas. Además, se utilizan para predecir o analizar diversos procesos o fenómenos biológicos, como el patrón de crecimiento de las bacterias, el patrón de situaciones como las dendritas nerviosas, Las redes de vasos sanguíneos, redes nerviosas y los conductos biliares.

Dentro de la medicina, esta ciencia de la complejidad ha sido utilizada para el diagnóstico de enfermedades. El Grupo Insight de Investigación de la Universidad Militar Nueva Granada (2014), en Bogotá, Colombia, desarrollo un algoritmo de diagnóstico basado en geometría fractal para evaluar células de cuello uterino, utilizando el concepto de Armonía Matemática Intrínseca (AMI®) y variedad celular, proporcionando una solución social en el país. De forma similar Científicos austriacos han hecho avances en la detección de tumores a través de fractales pues aparentemente evolucionan de manera similar. Siendo un estudio de gran importancia para profundizar en el conocimiento de la enfermedad, la formulación de diagnósticos y en la elaboración de terapias.

Por otro lado, en la Universidad de Falavoro en la Argentina, el Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ingeniería, han utilizado técnicas fractales para crear sistemas de detección de enfermedades cardiovasculares.

Figura 9 *Estructura fractal de la actividad cardiaca.*



Editado a partir de Al-Majdalawi, 2005, p. 32.

En la tecnología de las comunicaciones se utiliza la técnica fractal, como una técnica de comprensión de datos, la cual consiste en optimizar los recursos, implicando menores espacios de almacenamiento y mayor velocidad.

En los sistemas móviles de comunicaciones se han venido utilizando antenas en forma de fractal que reducen en gran medida el tamaño y el peso de estas. Los beneficios dependen del fractal aplicado, la frecuencia de interés, etc. En general, las partes fractales producen 'carga fractal' y hacen que la antena sea más pequeña para una frecuencia de uso dada.

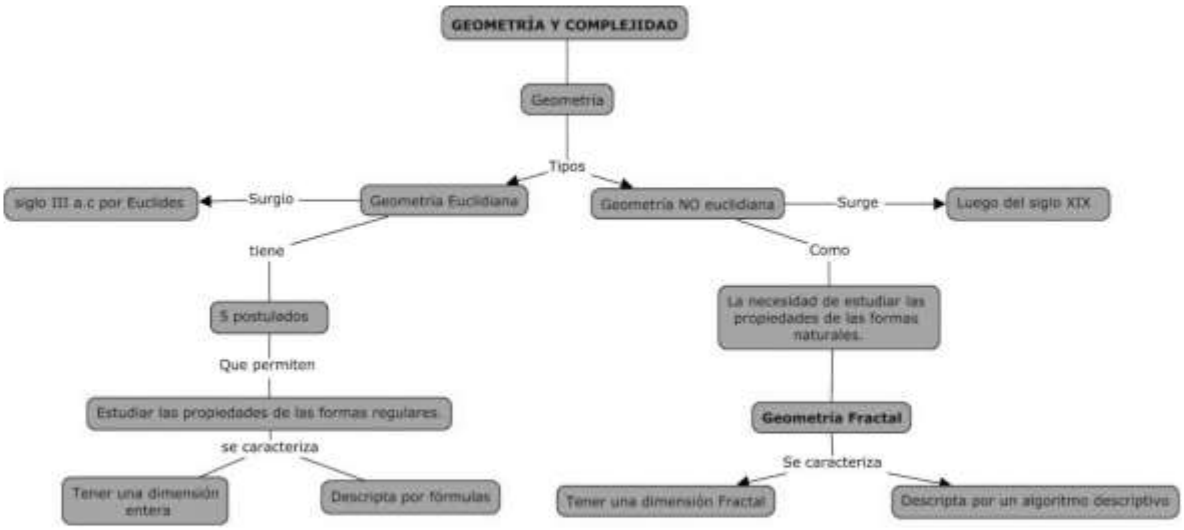
Figura 10 *Antenas fractales.*

Edición de originales recuperados de: https://www.ure.es/foros/tecnico/antena-looppara-80-160-mt/

En física se conocen aplicaciones en el modelamiento de la distribución en el universo de algunos astros (cometas, meteoritos, asteroides, etc.); la representación de la interacción gravitacional y electromagnética que hay entre los cuerpos en el universo; el modelamiento de la curvatura del espacio-tiempo predicha de Albert Einstein y, en general, avances en el conocimiento de lo que ocurre en el mundo cuántico.

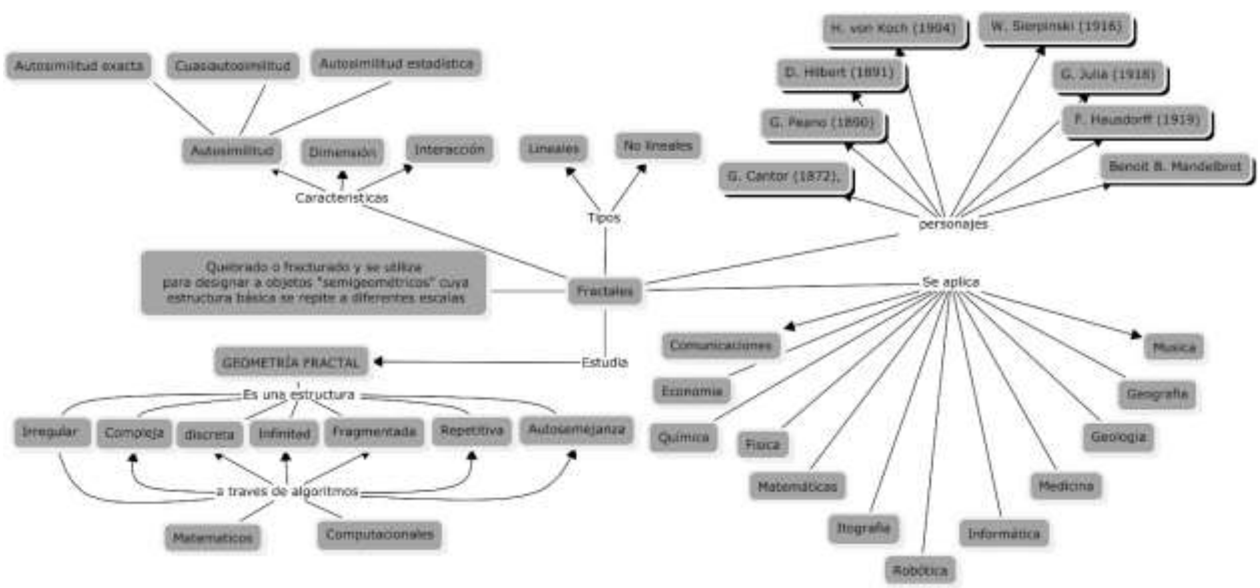
En Geología Se utilizan técnicas de fractales en la geología para localizar con mayor precisión yacimientos minerales de difícil distribución, microestructuras y redes de fractura. También se adelantan avances, simulando patrones fractales, en áreas problemáticas y desconcertantes como el estudio de fallas, fenómenos de erosión, morfología fluvial (deltas, canales, etc.), hidrología subterránea, sismo-tectónica y topografía terrestre.

Figura 11 *Geometría y complejidad.*



Elaboración propia

Figura 12 *Mapa conceptual sobre Geometría Fractal*



Elaboración propia, Fuentes: Braña, J. (2003), Capra, F. (1996), Mandelbrot, Benoit B. (1997), Rivera, E y Lopez, R.(2011), Talanquer, V. (1996), Al-Majadalawi. (2005), Zamora, S. (2019), Vazques,V.(2016), Rodriguez, R. (1995).

5.5 La geometría fractal de la naturaleza.

Los fractales se pueden observar en los fenómenos naturales más pequeños, hasta las explosiones más apoteósicas en el universo. Por ejemplo, en la forma en que se distribuyen las bacterias y hongos en un espacio. Aunque a simple vista no se percibe nada especial, a nivel microscópico se revelan unos patrones asimilares.

En un nivel real se destacan fractales en plantas como los helechos, donde se destacan características de las hojas que se repiten a diferentes escalas. Se observan patrones fractales en los girasoles, ya que esos patrones que contienen sus semillas son fractales en sí mismos. También se pueden observar patrones fractales en un vegetal híbrido entre coliflor y brócoli. Los fenómenos atmosféricos como los rayos o los vórtices de nubes, también demuestran seguir modelos auto similares.

Figura 13 *Ejemplo de Fractales en la naturaleza. Se observan patrones.*

Obtenido de https://fractales-cristales.wikispaces.com/Fractales

En plano macro, las radiaciones emitidas por explosiones de cuerpos celestes arrojan figuras que en cada uno de sus rincones poseen patrones fractales. Un ejemplo más claro de estos tal vez sean los anillos del planeta Saturno, que se desarrollan de forma gradual siguiendo el mismo patrón solo que a diferentes escalas.

Como se ha mencionado en los ejemplos, los fractales sean de origen natural o creados matemáticamente, ofrecen un alto grado de auto semejanza. Que significa que se repiten formaciones a diferentes niveles de tamaño. En los fractales naturales, la cantidad de niveles autosemejantes de estructuras es limitada y a menudo se sitúa entre 3-5. Ejemplos de esto pueden ser árboles, plantas, nubes, líneas costeras, rocas, arena, copos de nieve e incluso nuestro universo como conjunto, que muestra estructuras fractales de súper-galaxias. El mismo Benoit Mandelbrot habla de la “geometría fractal de la naturaleza”. (Fernández, 2005), explica:

> Mandelbrot plantea que muchas formas en la naturaleza cumplen con estas características, entre las cuales están las estructuras vegetales. La teoría fractal indica que en la construcción de muchas formas de este tipo se opera a través de *re- escritura* de leyes fundamentales de formación. Una estructura (por ejemplo, biológica) podría tener una cierta ley de división celular y, a su vez, sus subpartes cumplir con la misma ley de división. Dada una cierta secuencia de iteraciones o *re-escrituras*, se obtiene una forma compleja, cuyas partes son similares entre ellas y similares con el todo. Este principio es el fundamento básico de desarrollo de las plantas. El concepto de

> reescritura se transformó en una herramienta de gran apoyo para modelación de entes ramificados. (p.72)

5.6 Geometría fractal y plantas.

Como se ha mencionado anteriormente la geometría fractal ha llamado la atención de investigadores en múltiples disciplinas. Este es el caso de biólogos e investigadores afines, que utilizan la teoría fractal como un canal para llevar a cabo la modelización y cuantificación de estructuras complejas, comunes en la naturaleza. En el campo de la modelación de plantas han surgido varias propuestas utilizando la geometría fractal. Ya que las plantas son estructuras que cumplen medianamente el principio de auto similitud. Según (Veliz y León , 2017)

> La geometría fractal permite describir aspectos como: el ramaje de un arbusto, la superficie rugosa de una roca, o el perfil de una montaña. Fractales es el conjunto de formas generadas normalmente por procesos matemáticos repetitivos y que se caracterizan por: tener el mismo aspecto a cualquier escala de observación, tener longitud infinita, no ser diferenciables y tener dimensión fraccional o fractal.
>
> Actualmente, aunque se mantienen las cuatro características mencionadas su acepción es: formas geométricas que pueden ser separadas en partes, cada una de las cuales es una versión reducida del todo (p.71).

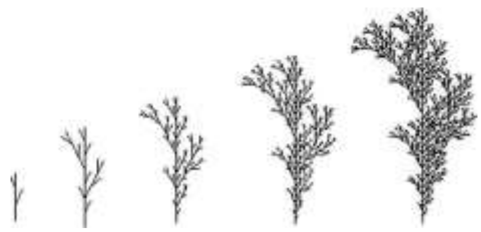
(Quiroga, 2005) menciona que (Zeide, 1993), (Zeide y Gresham , 1991), (López, 1993) , (Chen, 1994), son ejemplos del uso de la dimensión fractal y la teoría de la geometría fractal en la medición de la rugosidad de la copa de los árboles, y relacionar este parámetro con condiciones de sanidad del árbol, posición sociológica dentro del rodal, estado de desarrollo, en la modelación de fenómenos de la copa, donde se hace necesario medir su rugosidad, tales como la intercepción de la luz, entre otros. (p.71)

En la teoría fractal se utilizan dos conceptos de un relevante valor en la modelación actual de las plantas: auto similitud y re-escritura. Estos conceptos y el de autómata celular son la base de muchos modelos actuales. En la década de los 70 se generó el concepto de Autómatas Celulares, que deriva del hecho de que las células poseen un conjunto de reglas de comportamiento, y reproducción, crecimiento y funcionamiento, etc., dependen de estas leyes fundamentales y de las condiciones del contexto. Este concepto en modelación está más ligado a las bases biológicas de comportamiento de las plantas y su relación con el concepto de re-escritura da origen a procesos o estructuras más complejas. Utilizando este concepto en 1968, el biólogo Aristid Lindenmayer creó un lenguaje matemático para la modelación de entes biológicos llamado Sistema L (de Lindenmayer).

> Este lenguaje se basa en los conceptos de autómata celular y de re-escritura,

considerando unidades básicas con leyes establecidas de comportamiento, que se van re-escribiendo de acuerdo a las condiciones ambientales y a su programación interna. En un Sistema L, las producciones o reglas de reescritura son aplicadas simultáneamente en todos los puntos del objeto donde sea necesario, manteniendo así una característica propia de los seres vivos que es la ocurrencia paralela de procesos en el organismo. El organismo se podría ver entonces como un sistema compuesto por subsistemas trabajando en paralelo. (Quiroga, 2005, p.72)

Figura 14 The first five growth steps of a plant-like L-System



Tomado de Bornhofen, Stefan & Gardeux, Vincent & Machizaud, Andréa. (2012). From Swarm Art Toward Ecosystem Art. International Journal of Swarm Intelligence Research (IJSIR). 3. 1-18. 10.4018/jsir.2

A continuación, se realiza un cuadro en el cual se representa cronológicamente los principales desarrollos en la modelación de plantas.

Tabla 4 *A timeline of the major developments in FSPM*

Año	**Innovación**
1968	Aristid Lindenmayer proposes a theoretical framework for describing the development of multicellular organisms. Largely used by computer scientists who develop the mathematical theory of L-systems.
1970 - 1973	First simulation program (CELIA) based on L-systems.
1971	Modelling the form of trees using geometric approaches.
1974	Hormonal control of branching systems modelled using L-systems, however, branching was captured externally to the program
1979	Branching internalised using symbols.
1984	Examples of high quality computer graphic of plants were generated by

1986	LOGO-style graphics (turtle graphics)
1988	Plant modelling papers published at Siggraph
1989	pfg introduced (plant fractal generator) by Hanan and Prusinkiewicz
1990	Publication of the Algorithmic Beauty of Plants
1992	Introduction of cpfg; AMAP ; Floradig program developed to allow digitisation in 3D.
1994 - present	GroGra - growth grammar interpreter. Now a Java-based platform for developing FSPMs (see http://www.grogra.de).
1996	Environmental impacts are modelled allowing for pruning, competition. These models exchange information to provide interaction between the plant and its environment .
1996 - present	LIGNUM. Developed in Finland this approach to FSPM uses processbased models and canopy architecture to model tree growth on a year time step. L-systems are not used as the computational overhead in a parallel system make application to trees time-consuming .
1997	AMAPmod - a modelling and analysis package for plants. The concep of multiscale tree graphs is introduced as a way of documenting plant structure.
2000 - present	GreenLab - a collaboration between Chinese and French researchers. While somewhat similar to traditional crop modelling approaches, it is an FSPM style of programming using SciLab and a set of rules that describe plant growth and morphogenesis of plant organs. Central to GreenLab is the concept of source-sink dynamics .
2002 - 2004	ALEA - a system for analysis and modelling. This takes over from AMAPmod.
2006 - present	OpenAlea - a platform for plant modelling and analysis. Written largely in python it provides a suite of tools as python packages. Visualea provides a GUI.
2007	GRAAL-CN - a model of Growth, Architecture, ALlocation for Carbon and Nitrogen. A source-sink model that incorporates roots as well as shoots.
1997 - 2008	AmapSim - the model is fixed, but also modular, different species are defined through parameters
2009	Introduction of self-organising tree algorithm

Tomado de: White, Neil & Hanan, Jim. (2012). Use of Functional-Structural Plant Modelling in Horticulture.

5.7 Modelización matemática.

Según Greca y Moreira (1997, p. 109) todos tenemos modelos mentales, por lo cual siempre algún sujeto posee la idea de algo, para Barquero (1995) los modelos son una representación del conocimiento procedente de la experiencia, aunque incompleto, sirve para manipular, predecir e interpretar el mundo, por medio de la modelización se pueden explicar diversos fenómenos naturales.

Por otro lado, Barbosa (2009, p. 70), expresa que la palabra modelo tiene diversidad de conceptos (prototipo, una maqueta, un tipo ideal, un icono, una idea abstracta o la representación de un sistema) el cual define a partir de los aportes de D'Ambrósio (1996) como: un modelo es una representación simplificada, mental en el cual los seres humanos realizan sobre la realidad y se le llama modelar al proceso de producción de un modelo.

Además, Barbosa, Armatte expresa que la palabra modelización proviene de Modulus (medida para determinar las relaciones de proporción de una obra arquitectónica). En la edad media se transformó a Moule palabra francesa, mould en inglés, model en alemán, módulo en español. Finalmente, en el renacimiento la palabra evoluciona al español modelo, derivada del Italiano modello. La palabra modelo, aunque al principio tenía un significado distinto al que se considera desde las ciencias como la biología, la física, la química...etc., en las que las matemáticas tienen aplicación. La modelización fue parte fundamental en prácticas científicas.

Según Hein (2006, p8) los modelos se pueden clasificar según:

- ✓ Su naturaleza (concretos [físicos o geométricos] y abstractos [Matemáticos, lógicos y esquemáticos])
- ✓ Sus propiedades (icónicos, analógicos y simbólico)

Según Hein y Biembengut (2006, p. 2), define un modelo matemático como: "un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías". Por su parte se tiene que Bassanezi (1999, p. 12) define modelo matemático, como el intento de explicar, entender o modificar, a través de argumentos y parámetros una realidad y además Bunge (1994) explica que para ello es necesario haber actuado o pensado en parte de la realidad. Estos autores muestran que una forma de estudio es a través de un modelo matemático.

Además, Bassanezi (2002), Hein y Biembengut (2006) expresan que es importante para la realización de un modelo matemático tener un lenguaje conciso, para proporcionar resultados (teoremas) y así proporcionen datos computacionales, para calcular soluciones.

De otra manera Bassanezi y Biembengut (1997, p. 13) afirman el aprendizaje de la modelación debe hacerse referentes a los modelos clásicos y las ideas esenciales.

En resumen, el concepto de modelo está relacionado directamente con la modelación matemática, pues son muchas las ciencias donde las matemáticas están inmersas. Igualmente, un modelo permite que interpreten, describan o solucione un fenómeno del contexto y la construcción avance del conocimiento, a través del contexto, es por ese motivo que la escuela debe implementar la modelización.

La educación matemática debe estar ligada desde el contexto del estudiante, puesto que de lo contrario el estudiante no le vería sentido ni aplicación a lo aprendido, por lo cual es importante modelizar fenómenos o realidades de su cotidianidad. Tal como expresa Alsina (2008) para modelar una realidad, se debe tener en cuenta el entorno natural, social y cultural donde se desenvuelve el estudiante, para que su aprendizaje sea significativo. Por otro lado, este autor propone una crítica de realidades a través de la clasificación de realidades:

- ✓ Realidad falseada y manipulada: Son problemas o situaciones que poseen palabras y datos de la cotidianidad pero que, involucran un algoritmo y se vuelven simples ejercicios rutinarios. Es decir, se camufla el algoritmo con una situación.

- ✓ Realidades inusuales: Son problemas o situaciones que parecen cotidianas, pero que son escasas de ocurrir o poco probable de que se den.
- ✓ Realidades Caducadas: Son problemas o situaciones que pudieron haber existido en un pasado, pero que hoy ya no tienen aplicabilidad.
- ✓ Realidades lejanas: Son problemas o situaciones que son alejadas del contexto actual donde se desenvuelven los estudiantes.
- ✓ Realidades Ocultas: Se trata de hechos o aplicaciones que no pueden ser comprobados ni asociados a modelos actuales, ni su modelo puede ser comprobado.
- ✓ Realidades no adecuadas: Son situaciones que no son pertinentes por su carácter ofensivo o no son acordes con la edad de los educandos.
- ✓ Realidades inventadas: Son situaciones o problemas imaginados o artificiales que no pueden tener aplicación real y que parten de supuestos que al final dejan errores conceptuales.

Por todo lo anterior se puede decir que la realidad es el camino, para que se pueda modelizar unos fenómenos y construir el conocimiento, donde el estudiante tenga una participación activa por medio de la observación, la toma de datos y la manipulación de variables, entre otros.

En la actualidad una de las preocupaciones en la educación matemática, obedece a la forma de enseñar, puesto que se enfocan en enseñar fórmulas, algoritmos y definiciones, por esa razón los estudiantes no le encuentran sentido al papel que desempeña las matemáticas en la sociedad, ya que muchos de los contenidos son desligados del mundo real.

Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio & Ocampo (2008) advierte la problemática citada, donde afirma que:

> (…) Sigue predominando una visión de las matemáticas como un área formal y abstracta constituida por definiciones, axiomas e ideas comprimidas y “exactas” cuya aplicación se encuentra en un conjunto reducido de situaciones artificiales que, en algunos casos, poco o nada tiene que ver con la realidad. (p.41)

A pesar de que existan autores que comparten orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares, para apoyar el proceso de enseñanza, aún hay un muro que no permite que las prácticas educativas sean adecuadas.

A razón de esto la educación matemática, debe desarrollar en los jovenes el pensamiento lógico, por medio de herramientas como es la modelización, pues esta permite aprender y resolver problemas de la vida cotidiana y aplicar los conocimientos para dar solución, así como se pretende ligar los conocimientos con la realidad.

En Colombia existen grupos que muestran la modelización como una estrategia de aprendizaje estas son:

- ✓ ICTMA (International Community on the Teaching of Mathematical Modelling and

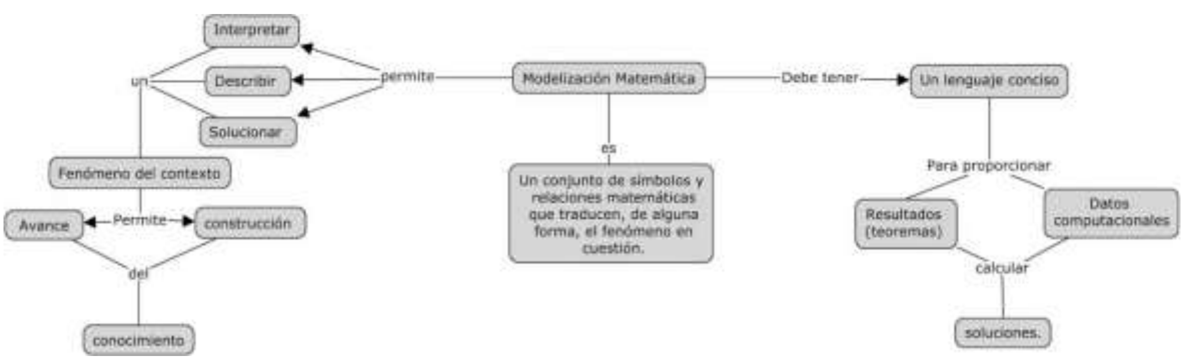
Aplications) o Comunidad Internacional sobre la Enseñanza de Modelización y aplicaciones matemáticas. Ésta es una organización que existe para promover aplicaciones y modelación en todos los ámbitos de la educación matemática. Escuelas primarias y secundarias, colegios y universidades de la Comunidad, a través de sus miembros, la investigación y otras actividades.

- ✓ En RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa). Se crea el grupo de Modelación y Tecnología. Quienes promueven la modelación como una estrategia de enseñanza.

- ✓ En ASOCOLME (Asociación Colombiana de Matemática Educativa). Se crea en 2008 el grupo RECOMEN (Red colombiana de modelación en educación matemática) cuyo objetivo es dar aportes a la consolidación de la modelación como un dominio de investigación en Colombia.

La modelación matemática es un proceso que permite construir y validar un modelo matemático, donde representa aspectos relacionados con la realidad, para ello trae múltiples conceptos y permite enriquecer el proceso. Este proceso en su estructura trae múltiples relaciones conceptuales y son justamente estas relaciones las que enriquecen este proceso.

Figura 15 *Mapa conceptual modelación Matemática*



Elaboración propia.

5.8 Lineamientos curriculares y estándares básicos de competencia.

El plan decenal del gobierno nacional establece como meta a Colombia la más educada en el 2025 en América Latina, esto con el fin de que los estudiantes sean ciudadanos competentes y mejoren la calidad de la educación colombiana, esto se ha difundido a través de diferentes documentos del Ministerio de Educación 50 Nacional, entre estos los que se enfocan en los lineamientos que se refieren a nuevas concepciones sobre el currículo, los contenidos y la evaluación. En esta investigación se tendrán en cuenta los estándares de calidad para el grado 9°, apoyado en la Constitución Política de Colombia (1991) en el Artículo 67, que consagra la educación como un derecho fundamental y más aún una educación de calidad según el artículo 28 de la ley 1098 de 2006. “Los fines de la educación se establecen en la Ley 115 de

1994, se dan los objetivos para cada nivel y ciclo de educación formal, y la matemática está dentro de las áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento, además se habla de cómo Proyecto Educativo Institucional PEI es de la autonomía de las instituciones educativas; complementando el decreto 1860 de Agosto 3 de 1994, en aspectos pedagógicos y sus desarrollos complementarios que permiten a los docentes conformar comunidades educativas de investigación que diseñan el currículo, hagan seguimiento, evaluación y retroalimentación del mismo como parte del PEI" (Cano & Girando,2017).

Estándares de calidad del área de matemáticas

Las matemáticas son fundamentales en el desarrollo de los estudiantes y es conocida como un área que en forma especial ayuda a aprender a aprender y a aprender a pensar. Además, dan al estudiante competencias básicas e indispensables para incorporarse en el mercado laboral. Es muy importante lograr que la comunidad educativa entienda que las matemáticas son accesibles y aun agradables si su enseñanza se da mediante una adecuada orientación que implique una permanente interacción entre el maestro y sus alumnos y entre éstos y sus compañeros, de modo que sean capaces, a través de la exploración, de la abstracción, de clasificaciones, mediciones y estimaciones, de llegar a resultados que les permitan comunicarse, hacer interpretaciones y representaciones; en fin, descubrir que las matemáticas están íntimamente relacionadas con la realidad y con las situaciones que los rodean, no solamente en su institución educativa, sino también en la vida fuera de ella. Es indudable que las matemáticas se relacionan con el desarrollo del pensamiento racional (razonamiento lógico, abstracción, rigor y precisión) y es esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, pero, además -y esto no siempre ha sido reconocido-, puede contribuir a la formación de ciudadanos responsables y diligentes frente a las situaciones y decisiones de orden nacional o local y, por tanto, al sostenimiento o consolidación de estructuras sociales democráticas.

Estándares Básicos de Calidad

Los fines de la educación matemática no pueden dejar de lado las funciones políticas, sociales y culturales que cumple el proyecto educativo y por lo tanto deben considerar la sociedad a la que éste se orienta. En el caso colombiano es muy importante adquirir el compromiso de formar para la construcción y desarrollo de la tecnología, con un fuerte acento hacia el logro de valores sociales y al establecimiento de nexos con el mundo exterior. El compromiso con los ideales democráticos se alcanza si en el aula se trabaja en un ambiente donde es posible la discusión y la argumentación sobre las diferentes ideas. Lo cual favorece el desarrollo individual de la confianza en la razón, como medio de autonomía intelectual, al tomar conciencia del proceso constructivo de las matemáticas para intervenir en la realidad. En cuanto a los nexos con el mundo externo, es importante trabajar con miras a preparar ciudadanos que puedan desempeñarse en la sociedad, y que sean aptos para la invención y aplicación de la tecnología. Organización de los estándares de matemáticas Los estándares que se describirán a continuación tienen en cuenta tres aspectos que deben estar presentes en la actividad matemática:

- ✓ Planteamiento y resolución de problemas
- ✓ Razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración)
- ✓ Comunicación matemática. Consolidación de la manera de pensar (coherente, clara,

precisa)

Los estándares están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: cada uno de estos pensamientos apuntan a orientar los procesos curriculares y específicamente en las implicaciones pedagógicas que como docentes se deben analizar para mejorar las prácticas pedagógicas y correlacionar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas con la resolución de situaciones de la vida cotidiana. De la misma manera hay que tener en cuenta que los estudiantes deben manejar unos conocimientos básicos-previos (medidas, símbolos, conocimientos algebraicos) que deben colocar en marcha para ayudar a dar solución a los planteamientos de situaciones reales.

Pensamiento espacial

Es el conjunto de procesos cognitivos en la cual se construye y manipula representaciones mentales de objetos del espacio por medio de transformaciones y relaciones.

El pensamiento espacial pareciera haber sido tratado tradicionalmente como una habilidad carente de conocimiento o difícilmente asociable al mismo. En tal sentido, la tradición pedagógica ha perpetuado un error que de no haberse cometido podría significar que el estadío tecnológico actual fuese muy distinto. Este pensamiento comprende el estudio geometría, los estudiantes aprenden acerca de las formas geométricas y sus estructuras y como analizar sus características y relaciones.

Pensamiento métrico

El sistema geométrico y de medidas tiene como objetivo formalizar y potenciar el conocimiento intuitivo que tiene el estudiante de su realidad espacio- temporal, por medio de la identificación de formas y medida de sólidos.

El tratamiento de la noción de medida favorece la interpretación numérica de la realidad, estimando de manera objetiva las características físicas de distintos elementos y situaciones en su contexto.

Este sistema posibilita el desarrollo de destrezas y habilidades desarrolladas con la comprensión y el manejo de entes matemáticos distintos de los numéricos, mediante el contacto con formas y cuerpos tomados de su entorno.

5.9 Aprendizaje significativo.

El aprendizaje significativo se alude a la teoría de David Ausubel (Nueva York, 25 de octubre de 1918-9 de julio de 2008), quien fue psicólogo y pedagogo estadounidense, esta se encuentra dentro de la corriente constructivista, la cual se basa que a partir de una estructura cognitiva de información o conocimientos previos que posee el individuo asocia los nuevos conocimientos y construye su nueva realidad.

Esta teoría se basa en que la estructura cognitiva de la información ya existente condiciona las experiencias y conocimientos nuevos, es decir, el aprendizaje significativo conecta la nueva información con algún concepto importante ya asimilado en la estructura cognitiva. Según el propio Ausubel, este tipo de aprendizaje es la forma más completa de aprender, ya que engloba la dimensión motivacional, cognitiva y emocional.

El individuo recoge la nueva información, la selecciona, la organiza y finalmente crea relaciones con el conocimiento que ya posee. Aquí es cuando se da este tipo de aprendizaje, relacionando los nuevos conocimientos con las experiencias ya vividas y el resto de conocimientos obtenidos con el tiempo. Como cada persona tiene una historia vital propia y distinta a los demás, el aprendizaje significativo va a hacer que se gestione la nueva información de un modo diferente.

Según el Doctor Ausubel se clasifica este aprendizaje en 4 categorías diferentes:

- ✓ Intrapersonal: Es la categoría que se refiere a componentes internos de la persona.
- ✓ Situacional: Se refiere a componentes situacionales de la persona.
- ✓ Cognoscitiva: Se refiere a componentes cognitivos de la persona.
- ✓ Afectivo-social: Es la categoría que se refiere a componentes social-afectivos de la persona.

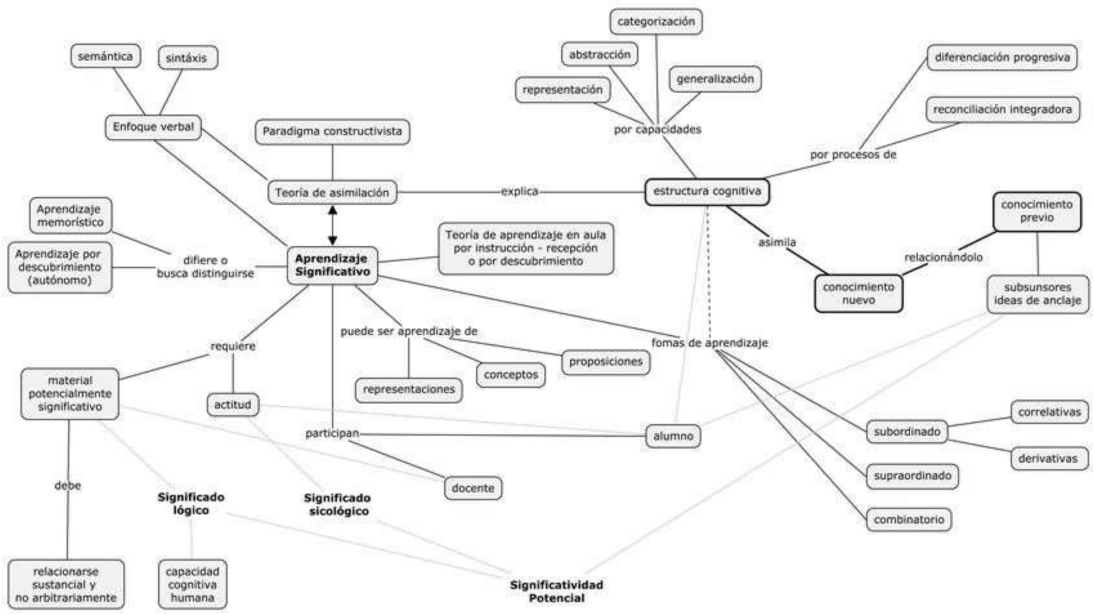
Ausubel clasifica el aprendizaje significativo en 3 tipos distintos:

- ✓ Representaciones: Se refiere a la obtención del vocabulario, previo a la formación de los conceptos. Este aprendizaje de representaciones se da cuando símbolos arbitrarios se emparejan en significado con sus referentes, denotando para el alumno del significado al que sus relativos aludan.
- ✓ Conceptos: El aprendizaje significativo de conceptos se refiere a la adquisición de ideas genéricas, o categorías que se ven representadas por símbolos.
- ✓ Proposiciones: El aprendizaje significativo de proposiciones se consigue a partir de los conceptos ya existentes, en los que ya existe una diferenciación progresiva (concepto subordinado), una integración jerárquica (concepto supraordinado) y una combinación (concepto en el mismo nivel de jerarquía).

Teniendo en cuenta la teoría de Ausubel, el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante pre-existente en la estructura cognitiva, lo que conlleva que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otros saberes estén adecuadamente claros y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionan como un punto de anclaje a las primeras.

Trenas (2009) señala que el aprendizaje significativo se desarrolla a partir de dos ejes elementales: la actividad constructiva y la interacción con los otros. El proceso mediante el cual se produce el aprendizaje significativo requiere una intensa actividad por parte del sujeto. Esta actividad consiste en establecer relaciones entre el nuevo contenido y sus esquemas de conocimiento. Se construyen significados cada vez que se es capaz de establecer relaciones “sustantivas” y no arbitrarias entre lo que se aprende y lo que ya se conoce (p.21)

Figura 16 *Mapa conceptual sobre Teoría de Aprendizaje Significativo.*



Tomado de Bermúdez Macías, Edward. (2016). Conceptos tecnológicos como contenido en la enseñanza del diseño. 10.13140/RG.2.2.20710.42569.

5.10 Estilos de aprendizaje.

Los estilos de aprendizaje son la forma en la que los estudiantes responden a los estímulos del aprendizaje por parte del docente, es decir, son también las condiciones bajo las cuales un estudiante se le facilita aprender teniendo en cuenta sus gustos y habilidades innatas. Por lo que, los estilos de aprendizaje se concentran especialmente en cómo ellos y cada uno prefiere aprender y se les hace más fácil entender. Por lo tanto, los estilos de aprendizaje son una articulación de factores cognitivos, afectivos, físicos y psicológicos de cada ser humano, los cuales sirven como señales de cómo el estudiante siente, percibe, interactúa y responde al entorno de aprendizaje.

Por lo que en este trabajo se tendrán en cuenta cuatro estilos de aprendizaje basados en el teórico; David Kolb, los cuales nos llevarán a identificar las formas o estilos que una persona tiene para aprender y disfrutar a la vez de acuerdo a la realidad en que se encuentra y a la vez le ayude a procesar y asimilar más rápido ese conocimiento que desea aprender, para ello plantea el primero que es *Adaptadores o los "hacedores"*. En este estilo de aprendizaje los educandos aprenden por el ensayo, acumulan experiencia; por lo que difícilmente leerán un manual o guía, son el resultado de la acción, por lo que son activos, inquietos, empáticos y sociables por lo que prefieren trabajar en equipo y buscan conseguir los recursos necesarios entre todos para alcanzar resultados, a la vez les gusta asumir riesgos y por ello sabe adaptarse a las circunstancias y retos que se les presenten, en este estilo de aprendizaje se implantan soluciones a los problemas por medio de la praxis ensayo y error.

Además de este, se encuentra otro tipo de estilo de aprendizaje que es, *el divergente*, El cual se caracteriza por ser creativo a través de la experiencia y la observación reflexiva, en este tipo de aprendizaje se tienden a observar situaciones desde diferentes puntos de vista antes de actuar, por lo que les gusta generar lluvia de ideas ya que son muy creativos y críticos, por eso disfrutan analizando los problemas en su conjunto, tienden a ser emocionales y ocurrentes, por lo que los que tienden a sentir un gusto por la música o la pintura se podrían incluir en este estilo de aprendizaje..

No obstante hay otro estilo de aprendizaje que es el *asimilador*, en donde desde el pensamiento se formulan teorías en una especie de modelo jerárquico en donde se prevén unas fases las cuales se establecen en un orden para llegar a definir y dar solución a un problema, por lo que en este tipo de aprendizaje se combina la conceptualización abstracta con la observación reflexiva, por lo que las personas acá tienden a ser muy organizados y hábiles, puesto que utilizan la lógica de forma muy eficaz, utilizando técnicas de estudio como la planeación pero todos acompañados del desarrollo de teorías y conceptos que sirvan para solucionar problemas, se pueden incluir aquí los matemáticos en el caso de las operaciones abstractas utilizando un teorema para poder solucionar esa operación.

Por último, se tiene el estilo de aprendizaje *convergente*, en este las personas articulan la parte de la experimentación activa con la conceptualización puesto que poseen la habilidad de encontrar la utilidad de la práctica para solucionar problemas y a la vez resultan análisis concretos que les pueden servir para el entorno que viven, por ello se puede decir que los ingenieros y todas sus especialidades utilizan este estilo de aprendizaje.

Pero en si lo importante es tener un poco de cada uno de los cuatro, aunque por lo general se identifique más con uno.

Por esto, en conclusión, todos estos estilos de aprendizaje sirven para desarrollar seres humanos y profesionales en todos los ámbitos de la vida, para que los estudiantes y las personas del entorno, logren un aprendizaje significativo y útil para la realidad en la que se encuentran en el día a día.

Figura 17 *Dimensiones aprendizaje Kolb*

Tomado de https://www.actualidadenpsicologia.com/la-teoria-de-los-estilos-de-aprendizaje-de-kolb/

6. OBJETIVOS

6.1 Objetivo General.

Generar una estrategia didáctica interdisciplinar por medio de la geometría fractal de las plantas y herramientas computacionales para fortalecer los aprendizajes significativos en los estudiantes del grado noveno.

6.2 Objetivos específicos

- ✓ Establecer un estado del arte sobre el uso de la geometría fractal y el paradigma de la complejidad en educación.
- ✓ Caracterizar los estilos de aprendizaje de la población de la investigación.
- ✓ Diseñar un módulo fractal en el contexto educativo.
- ✓ Proponer la simulación computacional basada en fractales como potenciador del proceso de aprendizaje matemático en los estudiantes de grado noveno.

7. METODOLOGÍA

7.1 Tipo y enfoque.

Según Sampieri (2014, Pág.92), un estudio aplicado *busca la obtención de un nuevo conocimiento técnico con aplicación inmediata a un problema determinado*. La presente investigación se considera aplicada, pues propone una solución a la desmotivación estudiantil, la deserción escolar y las practicas educativas tradicionales.

Por otro, una investigación de alcance descriptivo *busca especificar propiedades y características importantes de cualquier fenómeno que se analice. Describe tendencias de un grupo o población.* Sampieri (2014, Pág.92). En este sentido, la presente es descriptiva, en cuanto permite investigar los factores que potencian la adquisición de aprendizajes significativos e incrementar la motivación de los jóvenes en las diferentes asignaturas mediante la inclusión de elementos de geometría fractal y simulación computacional.

Esta investigación es de modalidad mixta, pues según Sampieri (2014, pág.30*). es un enfoque relativamente nuevo que implica combinar los métodos cuantitativo y cualitativo en un mismo estudio.* Las variables son la percepción estudiantil y motivación en el aula, el aprendizaje significativo de la geometría, el trabajo colaborativo y los estilos de aprendizaje predominantes en la población de estudio.

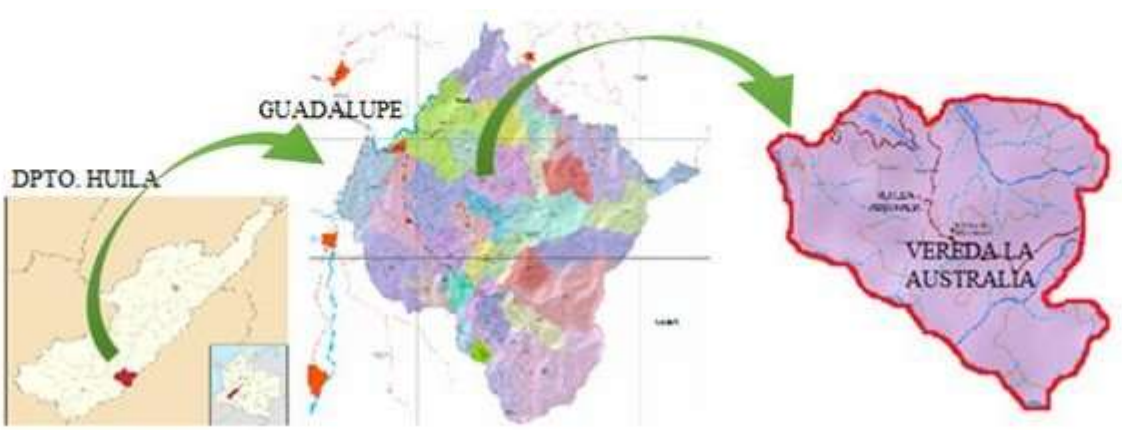
Se tiene un enfoque pre-experimental longitudinal, pues como explica Sampieri (2014) *son los estudios que recaban datos en diferentes puntos del tiempo, para realizar inferencias acerca de la evolución del problema de investigación o fenómeno, sus causas y sus efectos*. De la misma forma Sampieri (2014) afirma que *un diseño pre experimental es un diseño de un solo grupo cuyo grado de control es mínimo. Generalmente es útil como un primer acercamiento al problema de investigación en la realidad.* Lo que se ajusta a esta investigación, pues se evaluará el proceso de evolución de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede La Australia del municipio de Guadalupe del departamento del Huila (donde el grupo de control y el de investigación es el mismo) durante la aplicación de las guías realizadas mediante un estudio diagnóstico y un análisis de resultados.

7.2 Referente contextual.

El municipio de Guadalupe está ubicado en la zona subcentro del departamento del Huila, el municipio limita al norte con el municipio de Garzón por la quebrada La Pescada, al oriente con el departamento del Caquetá, divisoria de aguas Cordillera Oriental desde nacimiento de la quebrada La Pescada hasta la Quebrada La Perica, al occidente con el municipio de Altamira por el Río Suaza y al sur con el municipio de Suaza, partiendo del zanjón El Lindero, pasando por los cerros de San Calixto y Pablico hasta encontrar el nacimiento de la quebrada La Perica. El territorio del municipio está formado por filos que se disyuntan de la cordillera Oriental y van perdiendo altura hasta confundirse con las fértiles vegas del río Suaza y la quebrada de la Viciosa. El municipio de Guadalupe tiene un número de habitantes 18.986 en total y como actividad económica tiene principalmente la agricultura, ganadería, pequeña industria artesanal y comercio. El municipio de Guadalupe, cuenta con 48 veredas y 10 barrios en la parte urbana, ahora se menciona la vereda la Australia limita al norte con la vereda el Divino y la vereda los Pinos, al oriente la vereda los Pinos, al sur con la vereda Coroza y la vereda Sinaí, al occidente la vereda Sartenejal.

En la vereda la Australia la mayoría de la comunidad, se dedica a la recolección de las diferentes cosechas que ellos mismos cultivan, otros trabajan a jornal, las mujeres se dedican a las labores del hogar y algunas de ellas ayudan a sus familias en el trabajo de recolección de la cosecha. La comunidad australiana pertenece a una clase social media/baja o estratos socioeconómicos 1 y 2.

Figura 18 *Contexto geográfico.*



Modificado por Bedoya, Pascuas y Sánchez, 2020.

7.2.1 Universo de estudio, población y muestra.

La población de la presente investigación es el grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede La Australia del municipio de Guadalupe del departamento del Huila. Compuesto por 10 jóvenes del género masculino y 6 del género femenino, con edades que oscilan entre los 13 y 15 años. Residentes de la zona rural del municipio de Guadalupe, específicamente de las veredas la Australia y los Pinos.

7.3 Variables.

Según Porto & Gardey, 2008 una variable es cualquier elemento, condición o factor que se puede controlar, variar o medir dentro de una investigación. Por lo anterior, las variables propuestas se realizan a partir de las causas y consecuencias del problema de investigación.

- ✓ Geometría Fractal
- ✓ Ciencia de la complejidad
- ✓ Estilos de aprendizaje
- ✓ Aprendizaje significativo
- ✓ Contextos educativos

- ✓ Simulación computacional
- ✓ Motivación estudiantil
- ✓ Inteligencia espacial

7.4 Fases de la metodología

Tabla 5 *Fases de la investigación*

Fase	Objetivo	Actividades
1. Estado del arte de geometría fractal y su aplicación en educación.	Establecer un estado del arte sobre el uso de la geometría fractal y el paradigma de la complejidad en educación.	1.1 Establecer los elementos teóricos que sustentan la construcción del estado del arte 1.2. Realizar estructura del marco teórico. 1.3 Realizar la revisión bibliográfica sobre temas afines. 1.4 Organizar material bibliográfico. 1.5 Realizar síntesis del cuerpo epistemológico. 1.6 Analizar los documentos de manera integrada por área temática. 1.7 Construcción del documento que contiene el estado del arte.

2.Caracterización	Identificar y caracterizar estilos de aprendizaje predominantes y metodologías que potencien el proceso de enseñanza aprendizaje de la población.	2.1 Revisión de instrumentos diagnósticos que permitan establecer los estilos de aprendizajes de los estudiantes. 2.2 Análisis y selección del instrumento que mejor se adapte al contexto de investigación. 2.3 Preparación de formato de test Honey - Alonso (formato digital o físico) 2.4 Aplicación de test Honey - Alonso. 2.5 Tabulación de los resultados de test de Honey - Alonso en Excel. 2.6 Limpieza de datos 2.7 Minería de datos utilizando el software escogido (Weka) 2.7 Interpretación y análisis de resultados.

3.Diseño e implementación Guías de aprendizaje	Diseñar las guías didácticas para el estudio de la geometría fractal y su vinculación con las áreas de ciencias, matemáticas, artes y tecnología. orientadas al fortalecimiento de aprendizajes significativos.	3.1 Revisión de los resultados sobre los estilos de aprendizaje de la población. 3.2 Estudio y análisis de los estándares básicos de competencias y Derechos básicos de aprendizaje del grado noveno en elárea de matemáticas. 3.3 Elección de las temáticas a utilizar y trabajar en el área de matemáticas que se puedan desarrollar utilizando la geometría fractal. 3.4 Elaboración de secuencias didácticas teniendo en cuenta los estilos de aprendizajes predominantes en la población y propiciando el fortalecimiento de los aprendizajes significativos. 3.5 Planificación de actividades teniendo en cuenta la interdisciplinariedad y el contexto como pilar del aprendizaje. 3.6 Selección y elaboración de mecanismo de evaluación del aprendizaje. 3.7 Ajustes de diseño y presentación de la secuencia didáctica.

4.Aplicación	Aplicar las guías didácticas para el estudio de la geometría fractal orientadas al fortalecimiento de aprendizajes significativos.	4.1 Envió de guías didácticas mensualmente. 4.2 Desarrollo semanal del contenido de una guía. 4.3 Acompañamiento y retroalimentación docente por medio de WhatsApp, Mensajes, llamadas. 4.4 valoración de la motivación del estudiante con relación a las guías, entrevista a padres de familia o acudientes. 4.4 Recolección de evidencias de trabajo
5. Simulación computacional	Proponer la simulación computacional basada en fractales como potenciador del proceso de aprendizaje matemático en los estudiantes de grado noveno.	5.1. Revisión y selección de software simulación de fractales de la naturaleza que mejor se adapte a la modelación de plantas. 5.2 Elaboración de guía sobre el uso del Software escogido para modelar el comportamiento fractal de las plantas.

6. Evaluación y Análisis de los resultados obtenidos	Evaluar la motivación y los aprendizajes obtenidos desde las estrategias utilizadas en las guías didácticas al grupo de intervención.	6.1 Evaluar el desempeño académico y los cambios conceptuales logrado por los estudiantes utilizando la estrategia didáctica. 6.2 Evaluar la motivación, participación activa y aplicación de conceptos a otros ámbitos. **6.3** Análisis de los resultados obtenidos**.**

7.5 Técnicas e instrumentos de investigación.

7.5.1 Instrumentos computacionales.

WEKA (Entorno Waikato para el Análisis del Conocimiento)

De acuerdo con lo señalado por Locualo (2012), WEKA es un entorno para experimentación de análisis de datos que permite aplicar, analizar y evaluar las técnicas más relevantes de análisis de datos, principalmente las provenientes del aprendizaje automático, sobre cualquier conjunto de datos del usuario. Para ello, únicamente se requiere que los datos a analizar se almacenen con un cierto formato, conocido como ARFF (Attribute-Relation File Format).

WEKA es un software de libre distribución desarrollado en Java. Está conformado por un conjunto de paquetes de código abierto con diferentes técnicas de pre-procesamiento de datos, agrupamiento, clasificación, regresión, visualización y visualización, así como facilidades para su aplicación y análisis de prestaciones cuando son aplicadas a los datos de entrada seleccionados. Su interfaz gráfico nos facilita el acceso a sus múltiples funcionalidades.

Se utilizó esta herramienta para el análisis y determinación de los estilos de aprendizaje predominantes en la población de la investigación. Ya que se aplicará el análisis de clustering, con el fin de identificar grupos homogéneos dentro de los estudiantes encuestados. Para la técnica antes mencionada se utilizará el algoritmo K-Means.

R (R Development Core Team)

Según (Avello y Seisedo, 2017) Es un programa estadístico y un lenguaje de programación de uso libre, de distribución gratuita y código abierto, desarrollado a partir de un proyecto colaborativo voluntario de investigadores y estadísticos de diversos países y disciplinas. Es un programa basado en comandos, que permite acceder a todos los procedimientos y opciones a través de una sintaxis textual. Fue oficialmente presentado en 1997 bajo Licencia General Pública de la Fundación de Software Libre.

Se utilizará para llevar a cabo el análisis estadístico descriptivo de las encuestas aplicadas y del test de estilos de aprendizajes. Representando las medidas de tendencia central por medio de paquetes como ggplot2 y rgl.

L-System (Sistema De Lindenmayer)

Según Campos (2011), Un sistema-L es un lenguaje, una gramática formal de derivación paralela, un conjunto de reglas y símbolos principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas, aunque también puede modelar la morfología de una gran variedad de organismos.

El concepto central de los sistemas-L es el de re-escritura de cadenas, una técnica para definir objetos complejos reemplazando sucesivamente “partes” de un objeto inicial simple (el axioma), mediante un conjunto de reglas de reescritura o de producción.

Según Arellano-Pimentel, Nieva-García y Algredo-Badillo (2013), se tienen dos clases de LSystems:

DOL-Systems: Esta clase son los más simples, se trata de sistemas deterministas e independientes del contexto. La interpretación de las cadenas o secuencias de caracteres generadas se basan en comandos gráficos al estilo del lenguaje de programación LOGO usado ampliamente con propósitos didácticos. Estos gráficos son conocidos popularmente como gráficos de tortuga donde los símbolos (letras y operadores) son interpretados como líneas rectas y ángulos de giro.

OL-Systems: Esta clase se utiliza para modelar el desarrollo de estructuras ramificadas. La interpretación en gráficos de tortuga implica las siguientes acciones: ante un operador [se introduce a la pila el estado actual de la tortuga dado por su posición y orientación vigente, con un operador] se saca del tope de la pila el estado previo convirtiéndose en el estado actual.

Esta herramienta es de gran utilidad para nuestro trabajo, primero es muy sencillo y fácil de manipular por lo que permite establecer múltiples opciones de la gramática y generar diversos tipos de gráficos en diferentes entornos educativo, también de poder describir procesos como simulación y optimización de procesos.

HOUDINI

Houdini es especialmente adecuado para visualizar una formación técnica en 3D. Proporciona todas las herramientas de edición que se esperan en el software SideFX 3D, que inició en 1987, Su primer software se llamó PRISMS, y fue un programa de gráficos en 3D basado en la generación de procedimientos. Este software sentó las bases para Houdini, que se lanzó en 1996 y se actualiza regularmente.

A diferencia de otro software, permite crear, a través de procedimiento, puede crear un modelo y luego tener un sistema para controlar aspectos de ese modelo. Esto es especialmente útil para una simulación. En lugar de tener que reiniciar desde cero si decide hacer una simulación de manera diferente, Houdini usa nodos que le permiten editar solo un aspecto de la simulación. Estos nodos le permiten aplicar su efecto a tantos otros nodos como desee.

Ahí es donde entra el "sistema". Con esta arquitectura basada en nodos, todos sus proyectos funcionan como una sola máquina. Esto difiere de otros programas que pueden mantener un registro de los cambios que ha realizado, pero ese historial generalmente se almacena temporalmente. El historial y los nodos en Houdini se convierten en parte de su flujo de trabajo y permiten una producción flexible.

7.5.2 Instrumentos no computacionales.

Estilos de aprendizaje y cuestionario de Honey - Alonso (CHAE)

Los estilos de aprendizaje son rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que indican cómo los estudiantes perciben e interactúan en un ambiente de aprendizaje. (Alonso, Gallego y Honey ,2002)

> Desde nuestro punto de vista, una de las definiciones más claras y ajustadas es la que propone Keefe (1988) y que hacemos nuestra, los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje. (p. 48)

Este concepto cada día toma mayor relevancia en la preparación de las clases, previendo que el estudiante obtenga mejor rendimiento académico cuando se diseñan actividades teniendo en cuenta sus características y estilos en el proceso de adquisición de conocimientos.

Una forma de identificar dichas características en el estudiante es mediante la aplicación del Cuestionario Honey - Alonso de Estilos de Aprendizaje ya que es el instrumento más usado, este cuestionario consta de ochenta preguntas divididas en cuatro secciones correspondientes a cada estilo, la respuesta no es acertada ó fallida, simplemente, si se está de acuerdo con la pregunta, se escoge el signo (+), y si no se está de acuerdo se escoge el signo (-). Una vez se tienen las respuestas se realiza la sumatoria de (+) que tenga en el estilo activo (I), reflexivo (II), teórico (III) y Pragmático (IV) para finalmente graficar los totales de cada estilo e identificar la preferencia del estudiante.

Se escogió específicamente este cuestionario porque es de fácil lectura, sus preguntas están formuladas de forma sencilla y permiten fácilmente identificar el estilo de aprendizaje predominante para un posterior análisis. Según (Hernández, 2010)

> La idoneidad del CHAEA como instrumento de evaluación de los Estilos de aprendizaje está avalado por un riguroso respaldo empírico que asegura su validez y fiabilidad y nos facilita una rica muestra de contraste con alumnado de un nivel académico posterior al analizado en este estudio. (p.28)

Además, después de una revisión bibliográfica, se logró determinar que este cuestionario fue utilizado con éxito en tesis de un corte similar al nuestro obteniendo resultados destacables. Superando varios análisis psicométricos que aprueban la validez del instrumento, como es el caso de (Escuarra, 2011) con su Análisis psicométrico del Cuestionario de Honey y Alonso de Estilos de Aprendizaje (Chaea) con los modelos de la Teoría Clásica de los Tests y de Rasch.

Guías didácticas

Según García Aretio (2014), la guía didáctica es "…el documento que orienta el estudio, acercando a los procesos cognitivos del alumno el material didáctico, con el fin de que pueda trabajarlos de manera autónoma"; para este autor la guía didáctica adquiere gran importancia:
…en realidad una guía didáctica bien elaborada y al servicio del estudiante, debería ser un elemento motivador de primer orden para despertar el interés por la materia o asignatura correspondiente. Debe ser instrumento idóneo para guiar y facilitar el aprendizaje, ayuda a comprender, y en su caso, aplicar los diferentes conocimientos, así como para integrar todos los medios y recursos que se presentan al estudiante como apoyo para su aprendizaje.

8. RESULTADOS

Nuestro capítulo de resultados, que corresponde a la solución del problema planteado, está organizado en cuatro apartados que dan cuenta del logro de los objetivos específicos y general de nuestra investigación: Los resultados del estado del arte de Geometría Fractal y Educación, los resultados de la determinación de los estilos de aprendizaje predominantes en la población de estudio y su aplicación en la elaboración de las guías, y finalmente los resultados de la producción física de la unidad didáctica.

8.1 Estado del arte geometría fractal y educación

Se realizó una revisión de investigaciones a nivel internacional, nacional y regional, relacionadas con la geometría fractal y su aplicación en el aula (remitirse al capítulo de antecedentes), especificando sobre propuestas interdisciplinares que vincularan diferentes disciplinas en torno a la geometría fractal, temática que fue de nuestro estudio. Otras investigaciones consultadas fueron sobre la enseñanza de la geometría. En ellas se identificaron sus objetivos, la metodología desarrollada y sus principales resultados; para esto, se realizó una búsqueda en bases de datos especializadas como Scielo y Redalyc y directamente en repositorios de las universidades de mayor prestigio del país. Finalmente, el estado del arte permitió entender la importancia de llevar a cabo la investigación propuesta ya que en esencia es novedosa en cuando a los contenidos planteados y las herramientas utilizadas.

Como datos interesantes se tiene que los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría fractal se han enfocado frecuentemente en actividades sobre los fractales y su implementación mediante softwares de geometría dinámica (Suarez, 2009; Puerto,2013; cabezas, 2015; Zapata, 2014; Vargas y Sánchez, 2018; Hernández y Vidal,2019). Otros estudios describen las experiencias con fractales en las aulas y su vinculación con elementos de la naturaleza (Zapata, 2014; Cardona, 2017; Iturriago, Morales, Bedoya & Hernández).

8.2 Resultado de los estilos de aprendizaje

Para diagnosticar el estilo de aprendizaje de un estudiante, de acuerdo al modelo de KOLB, se emplea el Cuestionario sobre el Índice de Estilos de Aprendizaje de Honey y Alonso (1994), que consta de 20 preguntas para cada dimensión (Activo, Reflexivo, Pragmático y Teórico). Las respuestas positivas a cada pregunta (De acuerdo), determinan el valor de cada dimensión, siendo la predominante la que tenga mayor cantidad de respuestas afirmativas. El cuestionario se diligencio de forma virtual por cada uno de los jóvenes utilizando la herramienta de Google (Google Forms) propicia para este fin. Toda vez que se aplicó el Cuestionario sobre el Índice de Estilos de Aprendizaje de Honey y Alonso (1994) a los estudiantes del grado Noveno; siendo la población de 16 individuos, se obtuvo un banco de datos que fue cargado en una planilla de Excel, a partir del cual se generó un archivo .CSV, como se muestra en la Figura 19.

Figura 19 *Banco de datos*

APELLIDO	NOMBRE	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT	PREGUNT
[illegible]	ALBEIR	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	B	A	B	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B
BUITRAGO	KEINER	B	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A
DIAZ	EIDER	A	A	B	A	A	A	A	B	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B
FARFAN	ANGELK	B	A	B	B	A	B	A	A	A	B	B	B	A	A	B	A	B	A	B	A	B	A	A
GALINDO	NELSON	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	B	A	A	A	A	B	A	A	B	A	A	A	A
GUTIERREZ	DIEGO	A	A	A	B	A	A	A	A	B	A	A	A	B	B	A	B	A	B	A	A	A	A	A
NARVAEZ	JHOAN	A	A	B	A	B	A	B	A	A	A	A	A	B	B	B	B	A	A	B	A	A	A	B
PEREZ	FRANK	A	A	B	A	B	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B
POLANCO	FABER	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	A	A	B	B	A	A	B	A	B	A	A
RAMIREZ	YOHNEI	A	A	A	A	B	A	A	A	A	A	B	A	B	A	B	B	A	A	A	A	A	A	B
RAMOS	CARLOS	A	A	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
RAMOS	KAREN	B	A	B	A	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	A	A	B	A	A
SANTOFIMI	EMANUE	A	A	A	A	B	A	B	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	B	B	A	A	A
VALENCIA	SHARICI	A	A	B	A	B	A	A	B	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	B	A	A	A	B
VARGAS	LAURA	A	A	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
VERGARA	NASLY	B	A	B	A	A	B	A	A	A	A	B	A	B	A	B	B	A	A	A	A	A	B	B

Con estos datos, se procedió a cargar la data de la encuesta en el software WEKA, para poder efectuar tareas de minería de datos, que incluyen las de tipo descriptivo, como las que soportan el presente trabajo. En este caso particular se aplicó análisis de clúster (Witter y Frank, 1999) específicamente el Algoritmo Fartherfast para identificar los subgrupos homogéneos de la población encuestada. Como puede apreciarse en los resultados (Figura 22), para detectar los estilos de aprendizaje dominantes se definió en dos el número de clúster a generar.

Se decidió trabajar con el conjunto de datos resultante de la primera etapa (Pre procesamiento) del Proceso de Extracción del Conocimiento, porque estos atributos son los más relevantes para lograr descubrir un grupo dominante en la población, según el estilo de aprendizaje encontrado. Se utilizaron los atributos: Nombre apellido, para identificación de los estudiantes y 81 preguntas con sus dos tipos de respuestas “ACUERDO(A)” y “DESACUERDO(B)”, test propuesto por Honey Alonso. La técnica descriptiva de minería de datos es la más adecuada, por cuanto se aplicó el análisis de clustering, con el fin de identificar grupos homogéneos dentro de los encuestados. Para este estudio se utilizó Weka, software libre y de código abierto, que implementa una variedad de algoritmos y herramientas útiles para tareas de minería de datos.

Se utilizó cluster con su algoritmo FarthestFirst, porque al tratarse de un problema de k centros (grupos), se pretende obtener la máxima distancia entre una tupla (estudiante) y su centroide sea la mínima Chaudhuri, Garg y Ravi (1998). De modo, que, para descubrir el estilo de aprendizaje dominante en el grado noveno, se decidió generar dos clusters. Como se puede apreciar a continuación los resultados, no se necesita ampliar el número de clusters, porque el mayor número de tuplas (11 o el 69%) están incluidas en el primer cluster.

Figura 20 *Resultado análisis cluster*

```
FarthestFirst
==============

Cluster centroids:

Cluster 0
        B A B A B A A A A A A A A A B A A A A A B A A A A A A A A B B A A A A B A A B A A A B A A A B B B B A A A A A A A A A A A A A B
Cluster 1
        A A A A B A B A A A A A A A B A A A B B A A A A B A A B A A A A A A A B A B B A A A A A B B A A B A A A A A A A A B A B B B A B A B B


Time taken to build model (full training data) : 0.02 seconds

=== Model and evaluation on training set ===

Clustered Instances

0      11 ( 69%)
1       5 ( 31%)
```

Vigilada Mineducación

Tomado de Software Weka algoritmo Cluster

A partir de las características definidas por Honey y Alonso, es posible determinar las correspondencias entre los estilos de aprendizaje y las posibles respuestas del test; las cuales se ilustran en la siguiente tabla.

Tabla 6 *Estilos de aprendizaje*

Estilo De Aprendizajes	Código	Correspondencia Con Respuestas
Activo	AC	3(A) , 5(A) , 7(A) , 9(A) , 13(A) ,20(A) , 26(A) ,27(A) , 35(A) , 37(A), 41(A) , 43(A), 46(A), 48(A), 51(A) , 61(A) ,67(A) , 74(A) ,75(A) ,77(A)
Reflexivo	RE	10(A), 16(A), 18(A) ,19(A), 28(A) ,31(A), 32(A) ,34(A) ,36(A), 39(A) ,42(A) ,44(A), 49(A), 55(A) ,58(A) 63(A), 65(A), 69(A) ,70(A), 79(A)
Teórico	TE	2(A) ,4(A) ,6(A), 11(A) , 15(A), 17(A) ,21(A), 23(A), 25(A) , 29(A) ,33(A) ,45(A) ,50(A) ,54(A) ,60(A) 64(A) ,66(A) ,71(A) ,78(A) ,80(A)
Pragmático	PR	1(A) , 8(A) , 12(A) , 14(A), 22(A) , 24(A) ,30(A) , 38(A) ,40(A) , 47(A) ,52(A) ,53(A) ,56(A) ,57(A) ,59(A) , 62(A) ,68(A) ,72(A) ,73(A) ,76(A)

A partir de este conocimiento, se procedió a reemplazar cada uno de los atributos incluidos en los dos clústeres por el código del estilo de aprendizaje con que se vincula. Una vez que se hizo la sustitución, los clústeres quedaron como se muestra a continuación. Se definió la nomenclatura para cada estilo como sigue: AC=activo, RE=reflexivo; TE=teórico, PR=pragmático.

CENTROIDE HORMIGAS (CLUSTER 0):

TE	TE	TE	AC	PR	AC	RE	TE	PR	AC	PR	RE
TE	RE	RE	AC	PR	TE	PR	TE	AC	AC	RE	TE
RE	TE	RE	AC	AC	PR	PR	AC	RE	RE	TE	AC
PR	PR	TE	RE	PR	PR	RE	PR	TE	AC	PR	RE
TE	AC	PR	RE	RE	TE	PR	PR	AC	AC	AC	TE
RE	TE										

CENTROIDE BUHOS (CLUSTER 1):

PR	TE	AC	TE	TE	PR	AC	RE	TE	PR	AC	PR
RE	TE	RE	TE	PR	TE	PR	AC	AC	TE	PR	RE
RE	TE	RE	RE	RE	PR	AC	RE	AC	AC	PR	RE
TE	AC	PR	PR	TE	RE		PR	AC	RE	RE	RE
AC	PR	TE									

A fin de dilucidar la combinación de estilos de aprendizaje representada por cada clúster, se procedió a contar la cantidad de ocurrencia de cada estilo, con lo cual resultan las combinaciones que muestra la siguiente tabla.

Tabla 7 *Clusters y estilos de aprendizaje*

Centroide	AC	TE	PR	RE
CLUSTER 0=Hormigas	15	16	16	15
CLUSTER 1=Búhos	11	12	13	14

Analizando la tabla anteriormente mostrada, pueden definirse los patrones de estilos de aprendizaje descubiertos combinando el Cuestionario sobre el Índice de Estilos de Aprendizaje de Honey y Alonso y la minería de datos. De este modo, puede inferirse que las hormigas (clúster 0), que representa al 69% de la población, tiene una combinación predominante de estilo de aprendizaje que corresponde a las dimensiones Teórico-Pragmático. Los búhos (clúster 1) por su parte, agrupan una combinación Reflexivo-Pragmático.

La minería de datos aplicada a la educación de esta población ofrece una alternativa de análisis que permite estudiar versátilmente ciertos aspectos del hecho educativo. En este caso particular, la aplicación de la técnica de análisis por clustering permite identificar que los estilos de aprendizajes (modelo de KOLB) predominantes son Teórico (TE) - Pragmático (PR) - Reflexivo (RE), pues tienen un alto grado de homogeneidad en los estudiantes del grado 9°, por lo que las actividades propuestas en las guías se enfocan en:

- ✓ Presentar a través de contexto rural actividades que permitan un acercamiento a las plantas y su aplicación en la geometría fractal, de esta manera se les dará oportunidad de que a partir de sus experiencias pueden dar su punto de vista.
- ✓ Los planteamientos asociados a la actividad didáctica, deben hacerse en base a la exploración, experimentación apoyada en la naturaleza y conceptos previos, donde las actividades se presente como un desafío.
- ✓ Actividades prácticas como la elaboración de planes de acción o la puesta a prueba de técnicas o procedimientos.
- ✓ Generar productos que analicen cuidadosamente una situación o problema.
- ✓ tener un propósito claro y preciso para las actividades.

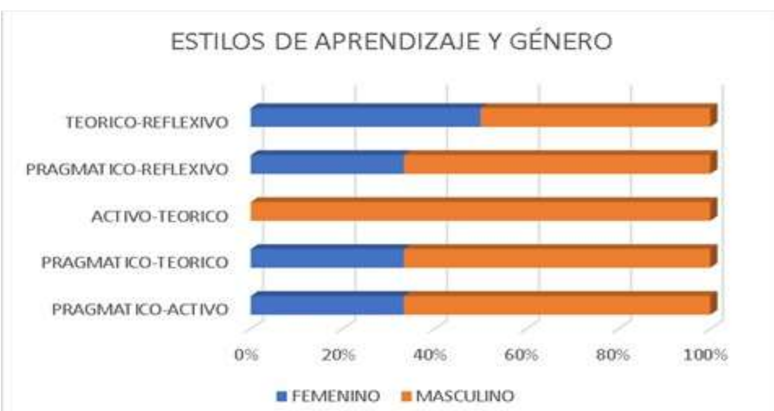
En este sentido, en la metodología del trabajo de campo se va a respetar el estilo de aprendizaje predominante, distinguiendo las diferencias individuales que presentan los educandos de tal manera que lo vean como un proceso de desarrollo de sus capacidades.

De forma descriptiva, se establece que el 37,5% de los individuos presenta un estilo de aprendizaje pragmático-reflexivo, 18, 75% pragmático teórico, con el mismo porcentaje pragmático- activo y finalmente 12,5% de la población presenta un estilo de aprendizaje activo-teórica, igualando al estilo teórico-reflexivo.

Figura 21 *Diagrama circular Estilos de aprendizaje*

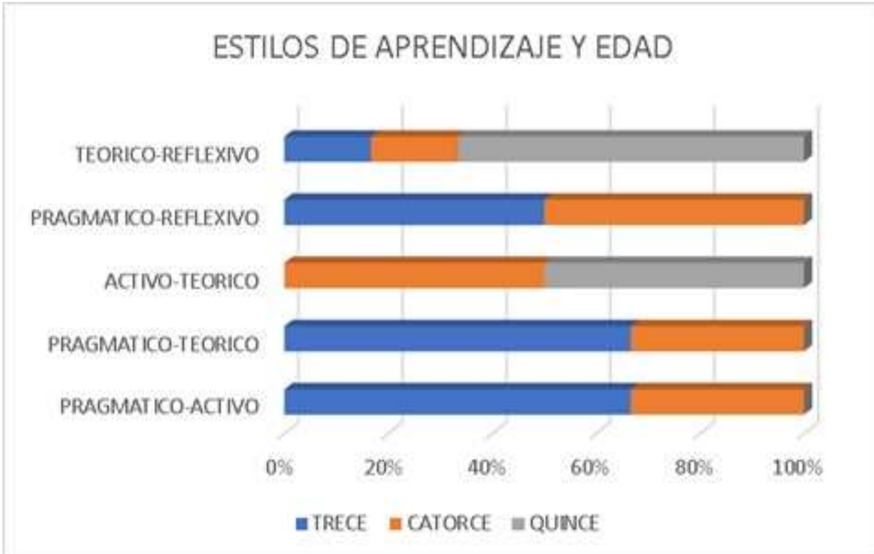
Por otro lado, se realiza la relación de estilo de aprendizaje dependiendo del género de los encuestados, encontrándose los siguientes resultados. El 100 % de los estudiantes que presentan un estilo de aprendizaje activo-teórico son de género masculino. Los jóvenes con un estilo de aprendizaje pragmático-reflexivo se distribuyen equitativamente según su género (50%). Finalmente, con una relación 1/3 se encuentran relacionados con un estilo de aprendizaje pragmático reflexivo, pragmático-teórico y pragmático-activo.

Figura 22 *Estilos de aprendizaje y genero*



Vigilada Mineducación

Figura 23 *Estilos de aprendizaje y edad*



En cuanto a la relación estilos de aprendizaje y edad, se logró establecer que los estudiantes de quince (15) años, presentan en su mayoría un estilo de aprendizaje teórico-reflexivo y activo teórico. Los educandos de catorce (14) años presentan en su mayoría un estilo activo-reflexivo y pragmático reflexivo. Finalmente, en los individuos de trece (13) años predomina los estilos de aprendizaje pragmático teórico y pragmático activo.

8.3 Guías de aprendizaje

Se elaboraron 13 guías (ver anexo) para el acercamiento al concepto de fractal, las primeras cinco guías abordan de forma practica la teoría, se introducen las utilidades de los fractales y se pone en práctica lo aprendido por medio de manualidades. La segunda parte es la fase exploratoria en donde el estudiante vincula elementos de su entorno con el estudio de fractales llevando a cabo un proceso investigativo por medio de actividades de campo.

Cada una de estas guías fue diseñada teniendo en cuenta los estilos de aprendizaje predominantes en la población, vinculando las temáticas de las asignaturas de ciencias naturales, matemáticas, artes y tecnología, en pro de fortalecer los aprendizajes significativos de los estudiantes y motivarlos a la adquisición de nuevos aprendizajes. Para la vinculación de estas guías con el currículo se realizó previamente la correspondencia curricular entre cada una de las guías, el estándar básico de competencias y las metas planteadas (ver anexo correspondencia curricular).

Para las actividades se utilizaron: talleres prácticos y herramientas computacionales con el propósito de desarrollar competencias relacionadas con la geometría fractal, utilizando la pedagogía o aprendizaje por indagación, buscando en los educandos el interés por entender el mundo natural que los rodea, desarrollando su capacidad de asombro ante la realidad, el análisis y la reflexión. Estas condiciones permiten facilitar la participación activa de los estudiantes en la adquisición del conocimiento y ayudan a desarrollar el pensamiento crítico, la capacidad para resolver problemas, la motivación, entre otros.

A continuación, se explica el contenido de cada guía, mencionando la metodología utilizada y la forma de valorar los aprendizajes.

Guía 1: Un Acercamiento a la Fractalidad

En esta guía, se pretende que los educandos establezcan una percepción de fractal y algunas de sus aplicaciones en la vida cotidiana. Se da inicio con una lectura de contextualización sobre historia de la fractalidad, ¿qué es la fractalidad? y auto similitud, la guía termina con un taller de comprensión de lectura. Con esta guía se busca conocer y relacionar la geometría fractal, para resolver y formular problemas en contextos matemáticas y en otros contextos de diferentes áreas para poder dar solución. Se espera que con esta guía los estudiantes comiencen a ver la relación de las matemáticas en varios aspectos de su cotidianidad y de esta manera puedan generar argumentos geométricos para resolver y formular problemas tanto como en el área de matemáticas, ciencias naturales y entre otras.

Guía 2: Patrón e Iteración

En esta guía se pretende que los participantes reconozcan los conceptos de patrón e iteración. La guía Inicia con tres ejemplos en cada uno de ellos se muestra la secuencia de pasos que corresponden a la construcción de un fractal. Después de haber observado los tres ejemplos se les pide describir cómo son las iteraciones y el patrón y la relación entre esos dos conceptos. Luego se le muestra unas secuencias y Se le pide identificar cuál es el patrón y el proceso iterativo y finalmente Se le finalmente Se le pide al estudiante que en una hoja de papel milimetrado genere una figura a partir de un patrón dónde debe partir desde un segmento, un cuadrado, un triángulo o cualquier otro tipo de polígono.

Guía 3: Conociendo la Autosimilitud

Con esta guía se tiene como objetivo que los estudiantes adquieran las nociones de figura Límite autosimilitud y copias máximales. Inicialmente se dan algunos conceptos iniciales se hace la aclaración de qué es autosimilitud y qué es autosimilitud aproximada y se exponen algunos ejemplos de la vida cotidiana. Luego se propone una serie de preguntas las cuales van enfocadas a identificar la autosimilitud en un fractal, las copias maximales que está formado un fractal, además a través de algunos ejemplos de fractales como triángulo de Sierpinski, la curva de Koch y la carpeta de Sierpinski. Se pide que identifiquen las características y propiedades de estos fractales.

Guía 4: Fractales Manuales

En esta guía tiene como objetivo aplicar los fractales a través del arte, inicialmente se da una introducción del señor Waclaw Sierpinski el cual estudio las distintas formas fractales. Esta guía está formada de dos partes; en la primera parte se muestra paso a paso la construcción de un triángulo de Sierpinski dos dimensiones, utilizando materiales como marcadores, lápices, tijera, regla, transportador y la plantilla en esta guía recuerdan los conceptos de congruencia y de autosimilitud. En la segunda parte a través de una hoja Y utilizando materiales como tijeras pegamento regla cartulina por medio de doblar la hoja de recortar se construye el Triángulo de Sierpinski paso a paso en 3D.

Guía 5: Fractales y sus Aplicaciones

En esta guía se pretende identificar los fractales y algunas aplicaciones de la vida cotidiana, a través de la lectura propuesta se pueden apreciar las múltiples aplicaciones de los fractales en la vida real como en el arte, la biología, la medicina, la tecnología y la música. Finalmente, los estudiantes deben identificar en el entorno dos fractales y dibujarlos

Guía 6: Un Paseo por la Huerta

En esta guía se realiza un reconocimiento sobre las nociones y las relaciones entre las matemáticas y la naturaleza. Donde los estudiantes se encuentren (casa, finca) deberán buscar una planta que les llama la atención, captar la imagen de la planta por medio de cualquier cámara, además de dibujar y de colorear la planta. Además de identificar la morfología de la planta, deben formular preguntas sobre la planta seleccionada y que estas preguntas pueden ser planteadas a través de las matemáticas.

Está guía desea fortalecer el proceso de la observación de fenómenos específicos y los pasos del método científico en los educandos, sobre todo en la indagación ya que es fundamental para el aprendizaje en las diferentes ciencias; porque se describen objetos y fenómenos, elaboran preguntas, construyen explicaciones y dan a conocer sus ideas a otros, además de esta manera desarrollan su comprensión de la ciencia combinándola con habilidades de razonamiento y pensamiento.

Guía 7: Somos Investigadores

En esta guía, se pretende que el estudiante desarrolle competencias científicas por medio del método científico. iniciando el proceso debe realizar una lectura donde recordará los pasos del método científico y en qué consiste cada uno, luego debe formular una pregunta que permita relacionar las matemáticas con su planta seleccionada en la guía anterior. Además, se cuenta con un cuestionario que ayudará al estudiante a formular su pregunta problema de la planta seleccionada.

Mediante esta propuesta se pretende acercar las ciencias a un contexto real del estudiante, se da importancia al método científico para ver y entender el mundo que les rodea, porque trabajando la enseñanza con el método científico es una herramienta muy eficaz que permite al estudiante aprender nuevos conceptos, aumentar el interés y la motivación para el desarrollo de sus estudios y solución de problemas.

Guía 8: Plantas Fractales

En esta guía se pretende relacionar las plantas y las matemáticas, por medio de un cuestionario, que también vincula los preconceptos aprendidos y trabajados de fractalidad hasta el momento de la unidad. Con esta guía, se finaliza un proceso muy marcado del aprendizaje por medio del método científico para el desarrollo de competencias científicas.

Guía 9: Dimensión Fractal

En esta guía se realiza la estimación de la dimensión fractal de la hoja de una planta utilizando el método de box-counting (recuento de cajas), además se analiza una posible utilidad de este concepto en las plantas. La actividad se divide en dos partes continuas. En la primera, el estudiante debe realizar el conteo de cajas manualmente para comprender cómo el método es capaz de proporcionar la dimensión de Hausdorff de un objeto de cualquier forma. Seguidamente se utiliza el software Excel para realizar una estimación de este valor utilizando el método de regresión lineal. Posteriormente, el estudiante debe realizar este mismo procedimiento para calcular la dimensión fractal de la hoja de una planta de su contexto. Actividad que se utiliza para valorar la consolidación del aprendizaje obtenido.

En esta guía se buscó potenciar el estilo de aprendizaje pragmático-teórico, a través de actividades que proponen los problemas de forma vertical escalonada, cuya solución necesita de un proceso de etapas lógicas. Pero vinculando con actividades prácticas donde el estudiante debe utilizar elementos de su entorno para medir, cuantificar y analizar. Se trabajaron de manera interdisciplinaria las áreas de matemáticas, ciencias naturales y tecnología (anexo correspondencia curricular), con el propósito de estimar la dimensión fractal de una hoja y su utilidad en el análisis del comportamiento de la planta.

Guía 10: Al sendero debo regresar y el área foliar voy a determinar

En esta guía se propone determinar el área folear de la hoja de una planta y resaltar la importancia de conocer la superficie foliar de una especie en cuestión, pues presupone el estudio del crecimiento de las hojas, órganos especializados en la realización del proceso fotosintético, responsables de producir los compuestos primarios.

Se resalta que determinar la superficie foliar no resulta fácil, de no contar con el equipamiento necesario para lograrlo de una manera más sencilla, ya que generalmente se emplean métodos destructivos para estimarla. Por lo que se hace necesario un método sencillo y amigable con el medio ambiente. Es ahí donde resulta importante el método de la guía, ya que este valor puede ser obtenido por correlación entre la longitud de la hoja (L), ancho (A) o longitud por ancho (LA) con el área foliar real de dicha hoja, a través del análisis de regresión.

En esta guía se potencia el aprendizaje teorico-pragmatico por medio de actividades en las cuales el estudiante tiene posibilidad inmediata de aplicar lo aprendido, elaborar planes de acción con resultado evidente, observar el nexo entre tema y problema u oportunidad para aplicarlo y comprobar que la actividad tiene validez inmediata. Además de ambientar la guía en una situación estructurada con finalidad clara, que permitiera analizar la situación completa y proporcionar al estudiante ideas complejas que puedan interesarle.

Por otro lado, se trabajó de forma interdisciplinaria las áreas de matemáticas, ciencias y tecnología (anexo correspondencia curricular) fomentando la competencia investigativa y de conciencia ambiental, pues se orienta al estudiante a utilizar métodos y técnicas que no afecten la naturalidad del medio ambiente. Finalmente, la valoración del aprendizaje se evidencia en la medida que el estudiante aplique el método explicado en la medición de la hoja de una planta de su entorno y analice la importancia del resultado obtenido, y además encuentre su utilidad al estudiar la morfología de una planta.

Guía 11: Arboles Fractales

En esta actividad, se usa la ramificación fractal natural de un árbol para explorar cocientes, razones y proporciones de una manera sencilla y tangible. Permitiendo interactuar con conceptos como auto similitud y patrón. También se utilizan herramientas como reglas y transportadores para medir longitudes y ángulos, logrando evidenciar los rasgos matemáticos presentes en el crecimiento de un árbol fractal. Esta actividad concluye con la comprensión del crecimiento y la taxonomía de los árboles y las relaciones con la geometría fractal y en general con las matemáticas.

Para el diseño de esta guía se tuvo en cuenta la dimensión pragmática-reflexiva proponiendo actividades que vincularan el análisis por parte de los estudiantes, pero a su vez permitieran la aplicación práctica de los conceptos. Actividades como la medición de ángulos y longitudes de las ramas de los árboles y su vinculación con el crecimiento y la clasificación taxonómica de las plantas permitieron potenciar este estilo de aprendizaje predominante en la población de estudio.

En esta guía se vincularon las áreas de matemáticas y ciencias naturales de manera interdisciplinar (anexo correspondencia curricular) con el objetivo principal de encontrar un patrón de crecimiento en el árbol mostrado, y a la vez proponer un proceso para determinar cómo realizar la modelación del crecimiento de una planta desde la fractalidad. La evaluación de la guía se realizó por medio del estudio a una planta seleccionada en donde el estudiante evidencie que logra aplicar lo aprendido en la guía dentro en su contexto.

8.3.1 Resultados de la aplicación de las guías de estudiantes

Se aplicaron 11 guías de las 13 elaboradas, siguiendo el cronograma que se presenta a continuación, durante los meses de agosto, septiembre y octubre (anexo cronograma de la aplicación de las guías). Utilizando una metodología de acompañamiento asincrónica mediada por herramientas como WhatsApp, videollamadas, llamadas y mensajes de texto.

El análisis de los resultados se centra en las experiencias de los estudiantes en el proceso de implementación de las guías. Para ello, se analizan las respuestas de estos a cada una de las dinámicas evaluativas propuestas. Se buscó dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Cómo utilizan los estudiantes los materiales para el aprendizaje de los fractales?
- ✓ ¿Los estudiantes participaron activamente en la actividad?
- ✓ ¿Qué consiguieron realizar?
- ✓ ¿Qué dificultades evidenciaron en el desarrollo de la guía?
- ✓ ¿Cuáles son las situaciones que se le facilitaron en el desarrollo de la guía?
- ✓ ¿Cuál fue el nivel motivacional de los estudiantes en cada actividad?

Para el análisis del desempeño de la población en cada guía se adaptaron las categorías propuestas por Abraham, Williamson y Westbrook (1994) para analizar las preguntas abiertas. El uso de estas categorías de clasificación para las respuestas de los estudiantes en la guía brindó una oportunidad comparar las respuestas, en cada una de las actividades propuestas. Se intenta llegar a un juicio observando los productos de los individuos.

Para ello, los datos obtenidos en las actividades evaluativas fueron valorados según los indicadores de capacidad de aprendizaje de geometría fractal. En una primera etapa, las respuestas dadas por los participantes a las preguntas del examen escrito se clasificaron en 5 categorías diferentes (Exhaustiva, parcial, parcial con error, equivocada, sin participación).

En la creación de estas categorías, los indicadores de aprendizaje de geometría fractal han sido determinantes. Esta clasificación se realiza para la actividad final de cada guía. Porque cada una de estas tiene como objetivo determinar si los estudiantes han alcanzado ciertos logros.

Resultados guías 1, 2, 3

Los resultados obtenidos en las tres primeras guías se trabajan en conjunto ya que corresponden a la definición de fractal (iteración y auto similitud), se realiza la valoración teniendo en cuenta la definición común de fractal, pero también las relaciones que el estudiante logro establecer con su entorno. Las categorías utilizadas se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 8 *Categorías guías 1,2,3*

Categorías	**Criterio**	**Enfoque de las definiciones de los estudiantes**	**Ejemplo**
Definición Exhaustiva	Respuestas que incluían todos los componentes de la respuesta validada.	El estudiante expresó las características de fractales que son auto-similitud, iteración y proporción precisa y correcta.	Una forma que se construye iterando sus partes similares que se amplían o se reducen con una proporción.
Definición parcial	Respuestas que se incluyeron en al menos uno de los componentes de respuesta validada, pero no todos los componentes.	El estudiante expresó al menos una de las dos características de los fractales.	Ampliar y reducir una forma.
Definición parcial con idea especifica equivocada.	Respuestas que mostraron comprensión del concepto, pero también hicieron una declaración, que demuestran un error.	Estudiante expresó como máximo uno característica de los fractales y su definición tenía errores.	✓ Formas Regulares ✓ Formas iteradas
Idea equivocada	Respuestas que incluían información incorrecta.	El estudiante no expresó ninguna característica de un fractal y dio respuestas incorrectas	Formas grandes y pequeñas

Sin definición	Contiene información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	El estudiante dio información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	Yo no sé.

Los resultados obtenidos son:

Tabla 9 *Resultados guías 1,2,3*

GUIA 1,2,3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
EXHAUSTIVA									X		X	X				X
PARCIAL		X	X				X	X		X						
P/ EQUIVOCADA				X		X								X		
EQUIVOCADA					X								X			
SIN DEFINICION	X														X	

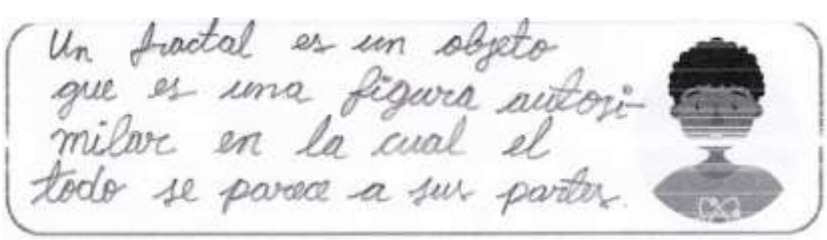
Figura 24 *Resultados de la percepción de fractal*

Después del análisis de las tres primeras guías desarrolladas por los educandos se obtuvo que el 56% explica correctamente que es un fractal, el 19% dan razón de que es, pero se equivocan en ideas concretas. El 12% de ellos no logran consolidar una idea razonable del concepto de fractal y finalmente el 13% no realizo las actividades.

De manera general, los hallazgos obtenidos muestran que los estudiantes perciben al fractal en sus características de manera parcial, y principalmente lo describen como un proceso iterativo más que recursivo, el retorno a la base queda poco consciente.

Además, definen los fractales según su apariencia y sus propiedades. Estos logran comprender que los fractales tienen repetición y auto-similaridad. Como lo plantea el estudiante 3(S3):

Figura 25 *Percepción parcial de un fractal.*

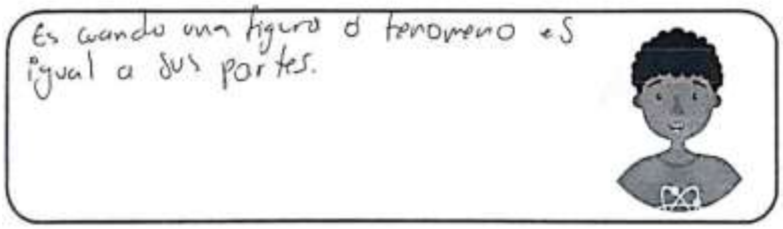


Además, consideran una o más de estas características como distintas entre sí, aunque consideran que están vinculadas en una estructura compleja e infinita.

Considerando los niveles de comprensión de la geometría planteados por Van Hiele, se puede decir que los jóvenes generalmente se encuentran en el primer nivel llamado nivel visual y el segundo nivel llamado nivel de análisis, como resultado de las tres primeras guías aplicadas.

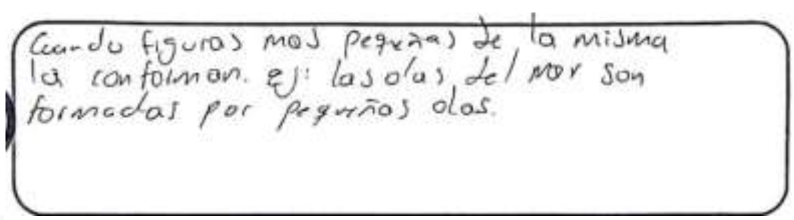
Porque muchos estudiantes identifican los fractales entre las formas dadas y expresan las propiedades de estos objetos. Sin embargo, no explican la relación de estas propiedades entre sí.

Figura 26 *Comprensión parcial con errores de un fractal.*



Además de eso, la mayoría de la población logran reconocer algunos objetos dados con los fractales (figura 28). Distinguiendo correctamente los no fractales e indicando las razones que impiden ser considerados como tal.

Figura 27 *Percepción descriptiva de un fractal.*

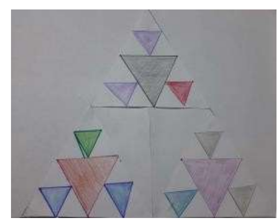


Resultados guía 4

La guía 4 al tratarse de una actividad practica de construcción de dos modelos del triángulo de Sierpinski, se evalúa teniendo en cuenta el producto final presentado por los educandos, utilizando las siguientes categorías:

Tabla 10 *Categorías guía 4*

Categorías	Criterio	Enfoque de las construcciones de los estudiantes	Ejemplo

Elaboración completa	Elabora completamente las manualidades propuestas, identificando los elementos básicos de los fractales.	El estudiante construyo completamente los dos fractales propuestos siguiendo las pautas dadas.	
Elaboración parcial	Elabora parcialmente los modelos propuestos, identificando los elementos básicos de los fractales.	El estudiante construyo completamente alguno de los dos fractales propuestos siguiendo las pautas dadas.	
Elaboración parcial con algunos errores en su construcción	Elabora los modelos propuestos, presentando algunos errores en su construcción.	El estudiante construyo los modelos completamente presentando algunos errores en la exactitud de las razones y el orden de las iteraciones.	
Elaboración con construcción errónea	Elabora los modelos propuestos, pero con errores en su construcción que no permiten relacionarlo con un fractal.	El estudiante construye su versión de los modelos, pero estos no guardan correspondencia con los propuestos en la guía.	
No realizo la actividad	Contiene información irrelevante o no construyo ningún modelo.	El estudiante dio información irrelevante o no construyo ningún modelo.	***vacío***

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 11 *Resultados guía 4*

GUIA 4	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
COMPLETA		X	X				X	X	X		X	X			X	X
PARCIAL	X					X				X			X	X		
P/ EQUIVOCADA				X	X											
EQUIVOCADA																
SIN ELABORACION																

Figura 28 *Practica manual sobre fractales*

En esta actividad la mayor parte de los participantes (81%) lograron cumplir los objetivos propuestos. Ya que realizaron el triángulo de Sierpinski, cumpliendo con las especificaciones técnicas que contempla dicho modelo fractal. Respetando las proporciones, medidas y orden en las iteraciones. Tal como se logra evidenciar en el proceso seguido por diferentes trabajos mostrados en las figuras 30 y 31.

Lo anterior puede ser consecuencia de las indicaciones puntuales que se daban en la guía para la construcción del fractal, donde paso por paso se indicaba los trazos a realizar. Permitiendo que eestudiante a partir de las pautas lograra completar la actividad con poco margen de error. Trabajando de manera indirecta conceptos como semejanza, razones, proporciones, etc.

Figura 30 *Paso a paso tapete de Sierpinski realizado por el estudiante s2*

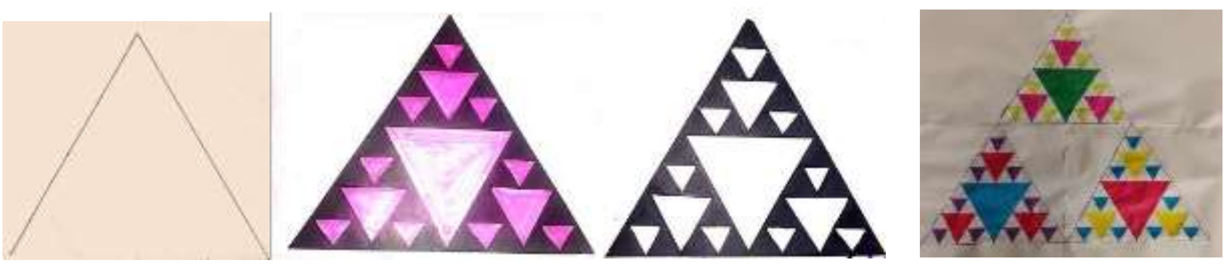
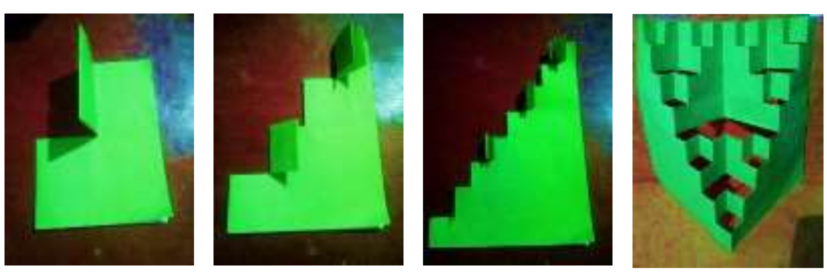
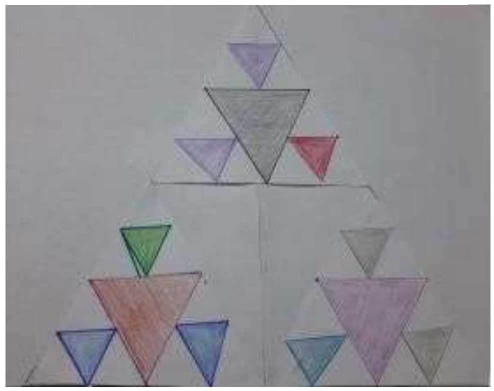


Figura 29 *Paso a paso triángulo de Sierpinski realizado por los estudiantes s 12 y s16*



No obstante 13% de los estudiantes tuvieron errores al trazar las medidas proporcionales al inicio, lo cual con lleva a que el modelo como tal pierda similitud con el original (como se observa en la figura 31, ya que cada uno de los triángulos resultantes no serán auto similares entre sí, careciendo de una propiedad fractal fundamental, hecho que sirvió como oportunidad de aprendizaje ya que permitió reconocer situaciones que impiden reconocer un objeto como fractal.

Figura 31 *Construcción errónea del triángulo de Sierpinski*

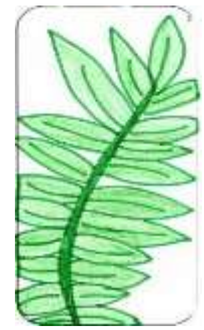


Resultados guía 5

La guía 5 al tratarse de las aplicaciones de los fractales busca que los educandos vinculen elementos de su entorno con fractales naturales y los representen a través de un dibujo. Por tanto, la valoración de esta guía se realizó teniendo en cuenta los productos entregados, categorizando el grado de relación que tienen estos con lo aprendido hasta el momento de fractales.

Tabla 12 *Categorías guía 5*

Categorías	Criterio	Enfoque de las definiciones de los estudiantes	Ejemplo
Relación Exhaustiva	Dibujo que incluye a nivel general los elementos de los fractales.	El estudiante plasmo en el dibujo las características generales de fractales que son auto-similitud e iteración.	
Relación parcial	Dibujo que incluye al menos uno de las propiedades de los fractales.	El estudiante plasmo al menos una de las propiedades de los fractales.	

Relación parcial con idea especifica equivocada.	Dibujo que incluye al menos uno de las propiedades de los fractales, pero de forma que tiene una idea equivocada de estos.	El estudiante plasmo al menos una de las propiedades de los fractales, pero equivocándose en un concepto en específico.	
Relación equivocada	Dibujo que no incluye ninguna de las propiedades de los fractales, pero sin embargo cree que tiene la razón.	El estudiante no plasmo en el dibujo ninguna de las propiedades de los fractales.	
Sin relación	Dibujo que contiene información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	El estudiante realizo un dibujo con información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	

Teniendo en cuenta las categorías anteriores se obtienen los siguientes resultados:

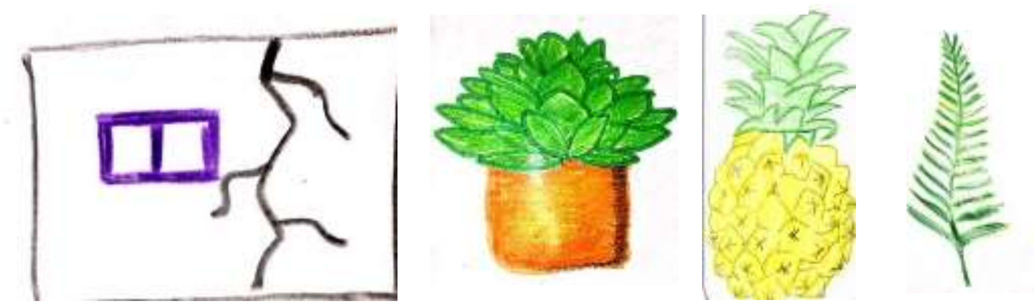
Tabla 13 *Resultados guía 5*

GUIA 5	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
COMPLETA	X	X	X		X		X	X	X		X	X			X	X
PARCIAL				X									X	X		
P/ EQUIVOCADA						X										
EQUIVOCADA										X						
SIN ELABORACION																

Figura 32 *Fractales naturales*

En los productos entregados se logró evidenciar que el 83% logro relacionar elementos de su entorno como brócolis, helechos, cilantro, piña, arboles, girasoles, suculentas, cactus, las ramificaciones de las hojas de las plantas, las grietas de una casa, con formas fractales. Lo cual indica el grado de comprensión que alcanzaron y que a pesar que no definen de manera precisa que es un fractal, logran encontrar formas que cumplan con estas propiedades. Aplicando los conceptos aprendidos en su vida diaria y su realidad inmediata.

Figura 33 *Fractales naturales propuestos por los estudiantes*



No obstante, un 12% de los estudiantes relacionó equivocadamente el concepto de fractal natural con elementos que carecen de esta naturaleza, como con un balón y el fenómeno de la lluvia. Ya que creían que, al existir la repetición de la misma figura en varias ocasiones, estaban cumpliendo el principio de auto similitud.

Figura 34 *Fractales naturales erróneos propuestos por los estudiantes*

Resultados guía 6 Y 7

El análisis de la guía 6 y 7 se realiza unificadamente, ya que las actividades son exploratorias, de trabajo de campo y están destinadas a que el estudiante examine y reflexione sobre el comportamiento y la anatomía de una planta de su entorno. Por tanto, no se utilizarán categorías que consideran errores para analizar los productos proporcionados, debido a que los aportes realizados por cada uno de estos son valiosos en cuanto corresponden a un análisis subjetivo de lo observado.

Tabla 14 *Categorías guía 6 y 7*

Categorías	Criterio	Enfoque de las definiciones de los estudiantes	Ejemplo
Exploración Completa	Selecciona, analiza y relaciona con las matemáticas la planta de su entorno.	El estudiante selecciono, analizó y relacionó con algunos conceptos matemáticos una planta de su entorno.	La planta tiene un tallo grueso, sus hojas son de tamaño mediano, el ángulo con que se dividen las hojas es de 30 en cada división crecen 4 hojas. Relaciono las plantas con figuras geométricas, con área y longitud.
Exploración parcial	Realiza dos de las tres actividades planteadas (seleccionar, analizar y relacionar con las matemáticas una planta de su entorno).	El estudiante realizó dos de las tres actividades planteadas con una planta de su entorno (seleccionar, analizar y relacionar con las matemáticas).	La planta tiene un tallo delgado, sus hojas son de tamaño pequeño, el ángulo con que se dividen las hojas es de 45 °, en cada división crecen 3 hojas.
Sin Exploración	No realiza ninguna de las actividades planteadas.	El estudiante no realizó ninguna de las actividades planteadas.	No realizó la actividad.

Tabla 15 *Resultados guía 6 y 7*

GUIA 6 Y 7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
COMPLETA	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X		X
PARCIAL										X	X				X	
SIN ELABORACION																

Figura 35 *Exploración de plantas*

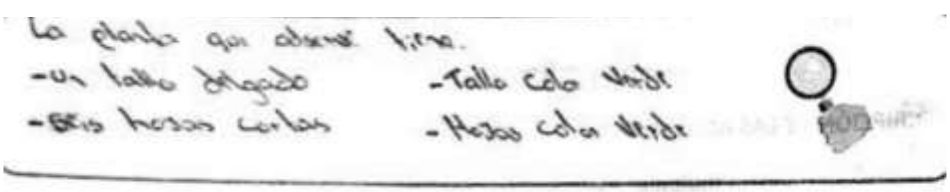
El 100% de la población escogieron una planta de su entorno, la mayoría opto por plantas medicinales, u ornamentales. Ninguno por arboles característicos de la zona como el de café, naranja o limón, lo cual llama la atención.

El 81% de la población realizo las tres actividades planteadas, llevando a cabo un proceso de reflexión en torno a la planta seleccionada y estableciendo relaciones con algunos conceptos matemáticos.

A continuación, en la figura 36 se presentan algunas de las plantas dibujadas por los jóvenes a las cuales realizaron un análisis posterior, teniendo en cuenta las partes tangibles de la misma.

Figura 36 *Plantas propuestas por estudiantes*

Figura 37 *Respuestas sin vinculación con las matemáticas*

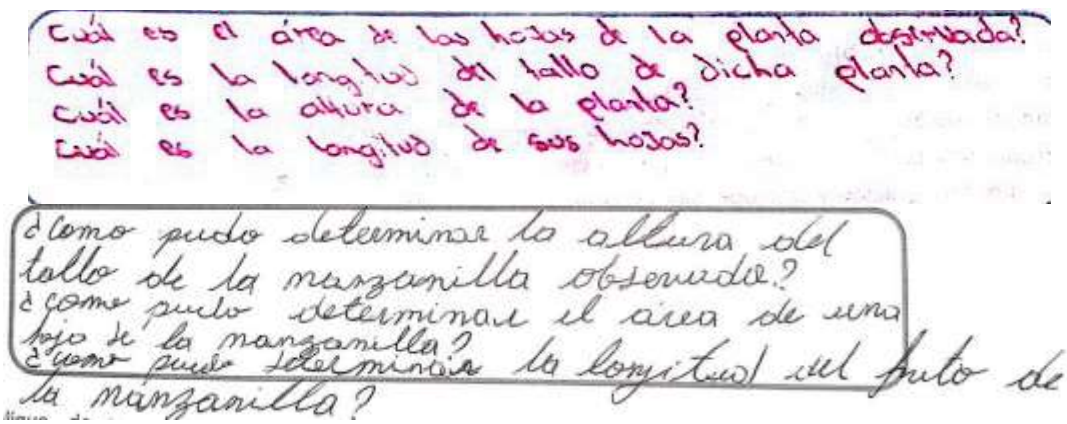


Mi planta tiene un tallo delgado, hojas grandes, las divisiones de las hojas se forman con un angulo de 60 grados y además presentan una flor naranja.

El 19 % de los participantes realizaron las dos primeras actividades, pero no vincularon su planta con las matemáticas. Mediante dialogo directo los estudiantes manifestaron que a pesar que reconocen que la matemática está presente en todo no lograron concretar esta idea en un tema puntual.

Las características que estudiaron de la planta fueron la forma en que se distribuyen las ramas y las hojas, si presenta flor o no, el color de las partes. La longitud de cada una de sus partes, el tamaño de las hojas y el tamaño máximo que alcanza.

Figura 38 *Características estudiadas de plantas*

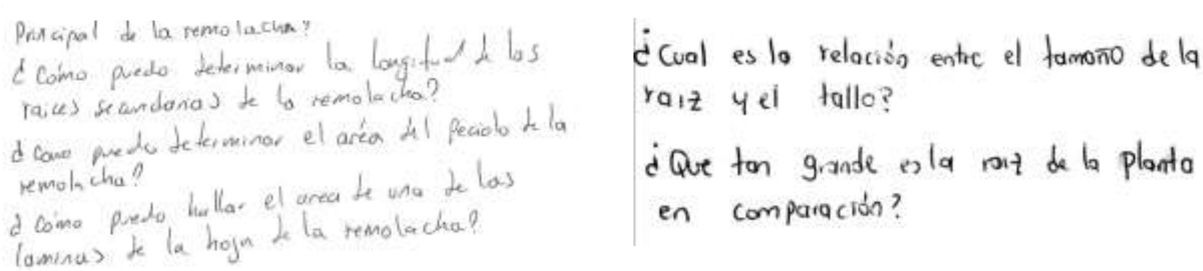


Cuál es el área de las hojas de la planta observada?
Cuál es la longitud del tallo de dicha planta?
Cuál es la altura de la planta?
Cuál es la longitud de sus hojas?

¿como pudo determinar la altura del tallo de la manzanilla observada?
¿como pudo determinar el área de una hoja de la manzanilla?
¿como pudo determinar la longitud del fruto de la manzanilla?

Algunos educandos analizaron la forma de las raíces y compararon su tamaño con el resto de planta.

Figura 39 *Estudio centrado en raíces*

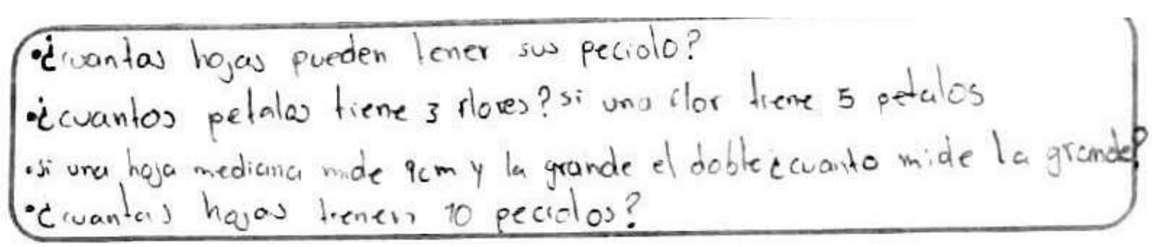


Principal de la remolacha?
¿Cómo puedo determinar la longitud de las raices secundarias de la remolacha?
¿Como puedo determinar el área del peciolo de la remolacha?
¿Cómo puedo hallar el area de una de las laminas de la hoja de la remolacha?

¿Cual es la relación entre el tamaño de la raiz y el tallo?
¿Que tan grande es la raiz de la planta en comparación?

Otros centraron su análisis en la flor de la planta escogida, fijándose en los pétalos, el tamaño y la distribución de estos.

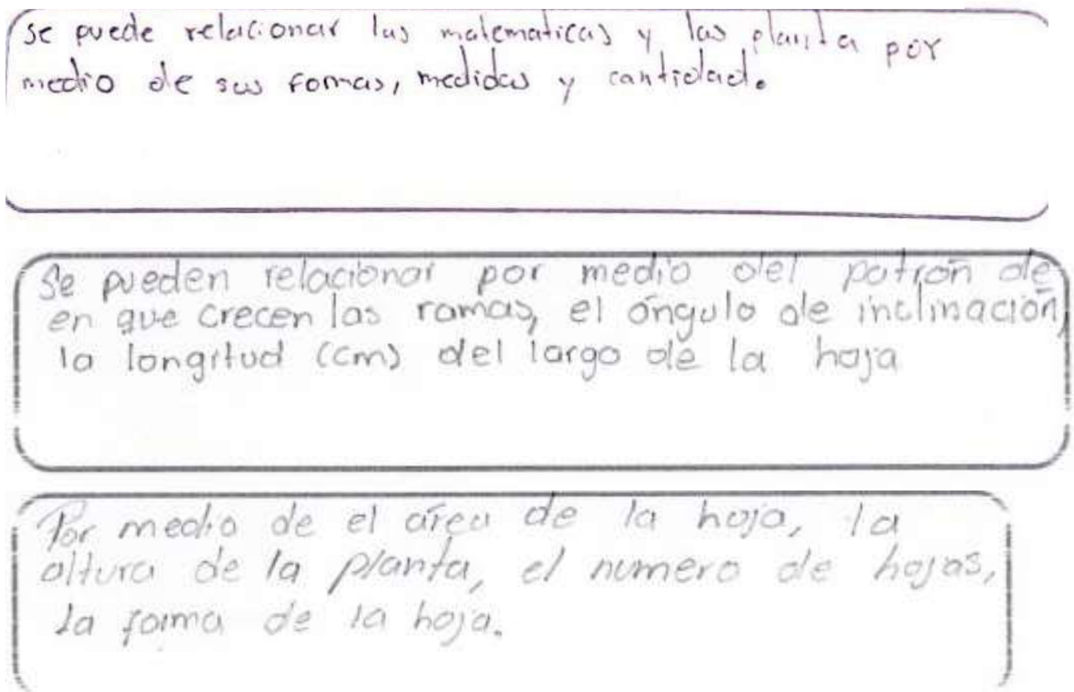
Figura 40 *Análisis centrado en las flores.*



•¿cuantas hojas pueden tener sus peciolo?
•¿cuantos petalos tiene 3 flores? si una flor tiene 5 petalos
•si una hoja mediana mide 9cm y la grande el doble ¿cuanto mide la grande?
•¿cuantas hojas tienen 10 peciolos?

En cuanto a la relación que encontraron de su planta con las matemáticas la mayoría la relaciona con la longitud del tallo, las ramas y las hojas; el área de hojas y pétalos de las flores; simetría en la distribución de flores y hojas. Además, establece una relación con las figuras geométricas y los ángulos con los que crecen las ramas.

Figura 41 *Relación con las matemáticas*


Se puede relacionar las matematicas y las planta por medio de sus fomas, medidas y cantidad.

Se pueden relacionar por medio del patron de en que crecen las ramas, el ángulo de inclinación la longitud (cm) del largo de la hoja

Por medio de el área de la hoja, la altura de la planta, el numero de hojas, la foma de la hoja.

Resultados guía 8

En esta guía se buscaba que el estudiante relacionara los conceptos aprendidos hasta el momento de fractales con el crecimiento de la planta que escogió, así que las categorías de análisis fueron diseñadas para evaluar la aproximación a esta relación.

Tabla 16 *Categorías guía 8*

Categorías	Criterio	Enfoque de las relaciones de los estudiantes	Ejemplo
Relación completa	Respuestas que incluían todos los	El estudiante se aproximó de manera precisa la	El crecimiento de mi planta está

	componentes de la respuesta validada.	relación entre el crecimiento de las plantas y la fractalidad.	relacionado con la auto similitud y la iteración.
Relación parcial	Respuestas que se incluyeron en al menos uno de los componentes de respuesta validada, pero no todos los componentes	El estudiante expresó al menos una relación de los fractales y las plantas.	El crecimiento de mi planta está relacionado con la auto similitud.
Relación parcial con idea especifica equivocada.	Respuestas que mostraron comprensión de la relación, pero también hicieron una declaración, que demuestran un error.	El Estudiante expresó como máximo una relación de los fractales y las plantas, pero su definición tenía errores.	El crecimiento de mi planta tiene que ver la repetición de la misma forma en diferentes tamaños.
Idea equivocada	Respuestas que incluían información incorrecta.	El estudiante no expresó ninguna relación entre el fractal y las plantas, dando respuestas incorrectas.	El crecimiento de mi planta está relacionado con la congruencia de figuras, ya que todas se parecen.
Sin relación	Contiene información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	El estudiante dio información irrelevante o dejó la respuesta en blanco.	No realizó la actividad.

Los resultados obtenidos son:

Tabla 17 *Resultados guía 8*

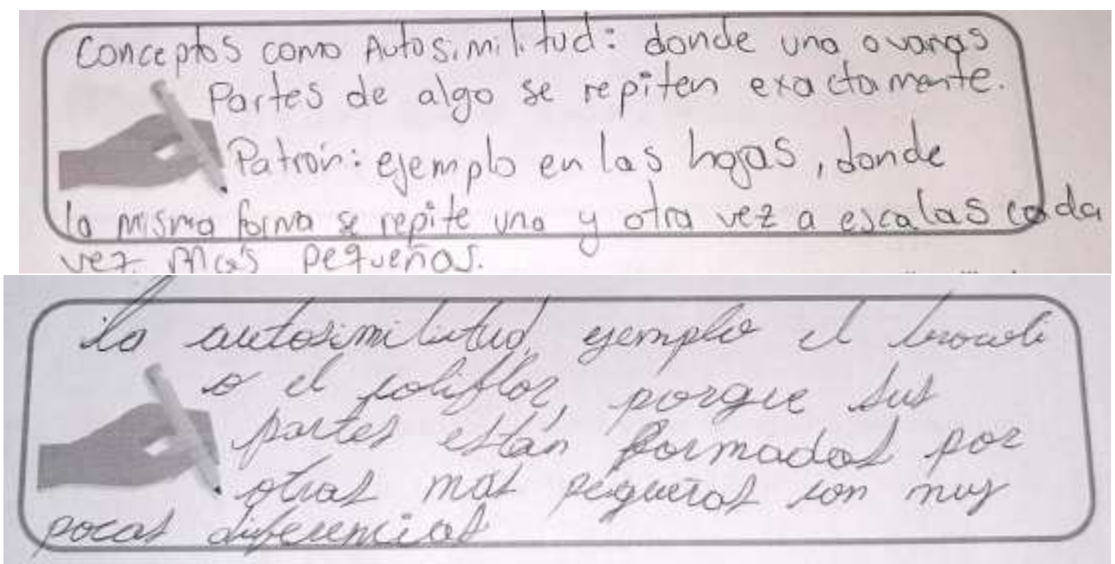
GUIA 8	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
COMPLETA	X	X			X	X	X			X	X	X	X	X		
PARCIAL		X		X				X	X						X	X
P/ EQUIVOCADA																
EQUIVOCADA																
SIN ELABORACION																

Figura 42 *Resultados plantas fractales*

El 62% de los estudiantes logro establecer una relación bien estructurada entre las plantas y los fractales. Mencionando propiedades como la auto similitud, la dimensión y la iteración. Aunque son conscientes que no todas las plantas presentan este comportamiento singular, entienden que reducir el crecimiento de estas a reglas sencillas permiten realizar una buena aproximación a su apariencia en la realidad.

Por otro lado, el 38% de la población reconoció en las plantas alguna de las propiedades de los fractales. Siendo la auto similitud una de las más mencionadas, pues reconocen que existen formas que se repiten a diferentes escalas, como la distribución de las ramas con las hojas con relación a la distribución tallo-ramas.

Figura 43 *Autosimilitud resultados*



Resultados guías 9 y 10

En esta guía se buscaba fomentar en los educandos el uso de algoritmos y el fortalecimiento de procedimientos aplicados al cálculo de la dimensión fractal de una hoja, pero además proponer una utilidad de este concepto en su cotidianidad. Por tanto, a partir de las categorías de análisis se evalúa el desenvolvimiento de los participantes al seguir procedimientos con un fin concreto.

Tabla 18 *Categorías guías 9 y 10*

Categorías	Criterio	Enfoque de las definiciones de los estudiantes
Procedimiento Completo	Aplica el método Box Counting de manera correcta, determina algoritmos y los opera según el procedimiento para calcular la dimensión fractal de su hoja.	El estudiante utiliza correctamente el método Box Counting, calcula correctamente los logaritmos y determina la dimensión fractal de su hoja.
Procedimiento parcial	Aplica el método Box Counting de manera correcta, con algunos errores procedimentales.	El estudiante utiliza correctamente el método Box Counting, pero comete pequeños errores procedimentales.
Procedimiento equivocado	Aplica de manera incorrecta el método Box Counting, además presenta errores procedimentales.	El estudiante no utiliza correctamente el método Box-Counting, además calcula y opera de forma errónea los logaritmos obtenidos.
Sin procedimiento	No realiza ningún procedimiento	No realiza ningún procedimiento

En esta guía el 56% de los estudiantes lograron determinar la dimensión fractal de la hoja que seleccionaron utilizando el método Box Counting (Figura 44). El 31% de los de la población cometió errores procedimentales relacionados con el desarrollo de algoritmos, pero sin embargo permiten determinar una aproximación de la dimensión fractal de la hoja. Finalmente, el 13% tuvieron errores en la utilización del método, realizando de forma errónea el conteo de las cajas en la cuales se encuentra parte de la silueta de la hoja. Además, se logró evidenciar que operaron de forma errónea los logaritmos resultantes del método Box- Counting (figura 45).

Figura 44 *Resultados cálculo de la dimensión fractal*

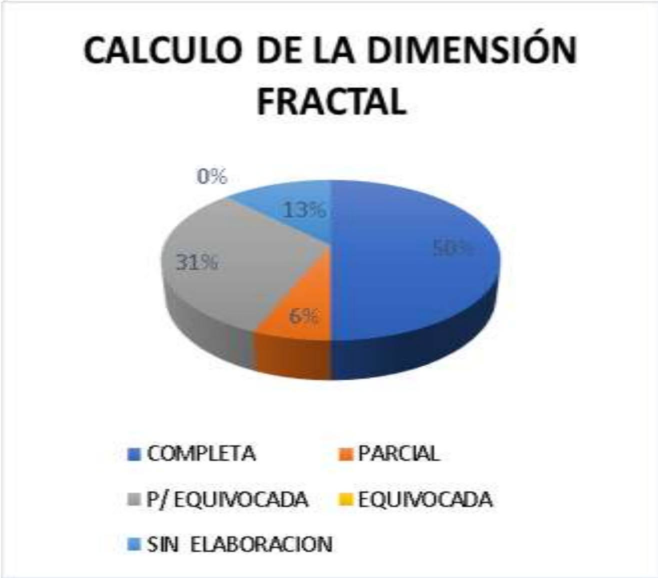


Figura 45 *Resultados dimensión fractal*

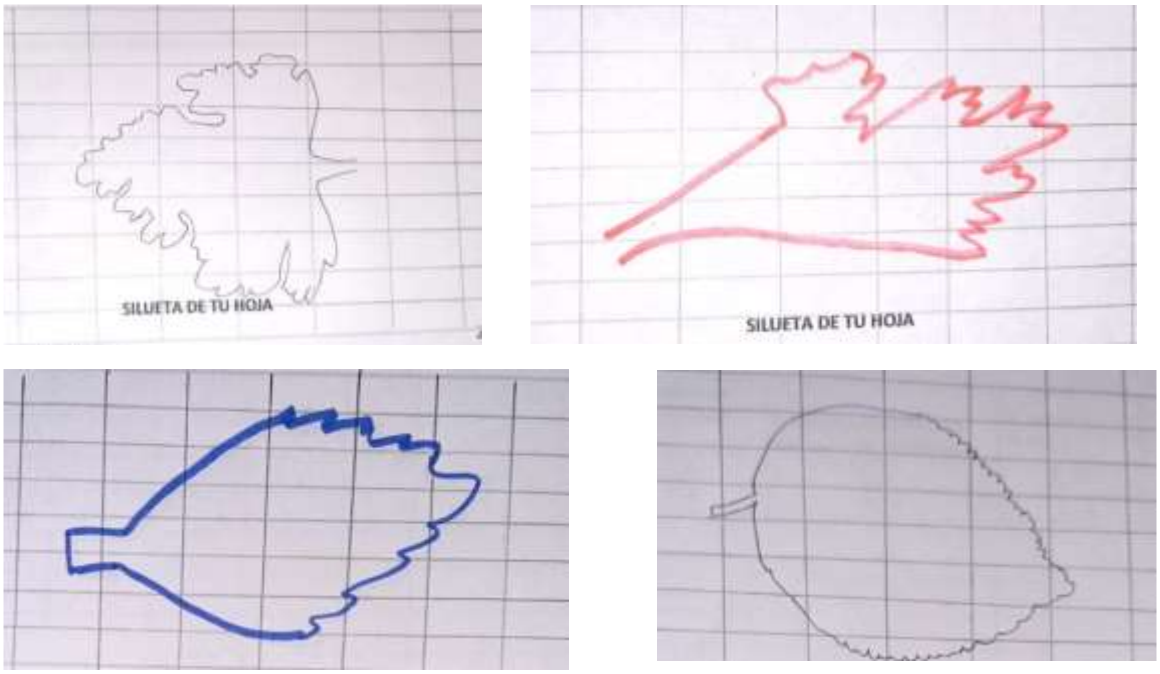


Figura 47 *Resultados erróneos al aplicar logaritmos*

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\ ln\ (N) = ln\ ln\ (\ )$	$ln\ ln\ (N) = ln\ ln\ (\ )$	
ERBABUENA	10	32	2,3	3,4	0,6
U PLANTA	10	30	2,3	3,4	0,6

EJEMPLO:

Figura 46 *Resultados dimensión fractal*

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\ ln\ (N) = ln\ ln\ (\ )$	$ln\ ln\ (N) = ln\ ln\ (\ )$	
YERBABUENA	10	25	2,3	3,2	0,7
TU PLANTA	10	27	2,3	3,2	0,7

EJEMPLO:

Figura 48 *Estudiantes calculando dimensión fractal.*

A nivel general se puede decir que los jóvenes disfrutaron contando el número de cajas cruzadas por la silueta de las hojas. Es una excelente oportunidad para que probar hipótesis utilizando hojas de plantas replicadas para buscar tendencias no lineales en la forma de las hojas a lo largo del tallo de las plantas, entre especies y bajo diferentes condiciones ambientales de crecimiento. La importancia de la forma también genera discusiones interesantes porque la discriminación de formas es muy fácil de hacer visualmente, pero en general ha escapado al análisis cuantitativo en la ciencia.

Resultados guía 11

El objetivo de esta guía era que lo estudiantes lograran determinar el patrón de crecimiento de la planta que escogieron por medio de la observación y la medición de sus partes, estableciendo auto similitud entre cada una de estas. En consecuencia, las categorías de análisis buscan evaluar la aproximación entre la planta escogida y el patrón de crecimiento elaborado.

Tabla 19 *Categorías guía 11*

Categorías	Criterio	Enfoque de las definiciones de los estudiantes	Ejemplo
Resultado Completo	Determina el patrón de crecimiento de la planta escogida, en términos de la auto similitud.	El estudiante determina un patrón para modelar el crecimiento de la planta seleccionada en términos de la auto similitud.	El perejil crece de un tallo principal del cual se desprenden 3 ramas en un ángulo de 26°. La proporción tallo ramas es 3 a 2.
	Realiza un patrón aproximado del	El estudiante realiza un acercamiento a un patrón	El romero está en proporción 1 a

Resultado parcial	crecimiento de la planta seleccionada.	de crecimiento de la planta seleccionada.	8 con relación tallo-ramas. Del tallo se desprenden 8 ramas, y en estas crecen 8 hojas con cierta distancia.
Resultado equivocado	Realiza un patrón equivocado del crecimiento de la planta seleccionada.	El estudiante realiza un acercamiento erróneo al patrón de crecimiento de la planta seleccionada.	La manzanilla tiene un tallo largo y algunas flores.
Sin resultado	No realiza la actividad.	El estudiante no realiza ninguna actividad.	No realiza la actividad.

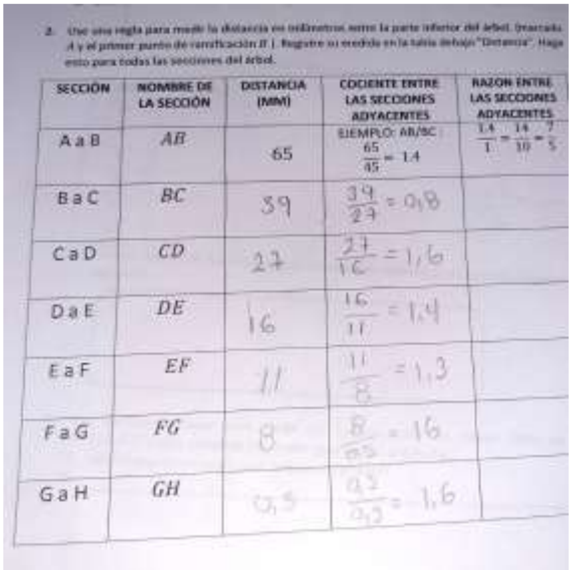
Figura 49 *Resultados crecimiento fractal*

Los resultados demuestran que el 62% de los educandos elaboraron un patrón de crecimiento que coincide con la planta que escogieron, evidenciando los ángulos de dirección de las ramas, la proporción entre cada una de las partes de las plantas y con base a esto relacionaron el concepto de auto similitud, reconociendo que después de ciertas iteraciones sería posible lograr una buena aproximación visual de la planta.

Por otra parte, el 38% de la población realizó una aproximación al patrón de crecimiento, pero tuvieron algunas fallas en sus mediciones (tallo, ramas y ángulos) lo que ocasiona que el resultado final no coincida totalmente con la planta seleccionada. Ya que visualmente la planta crece de una forma diferente a la real,

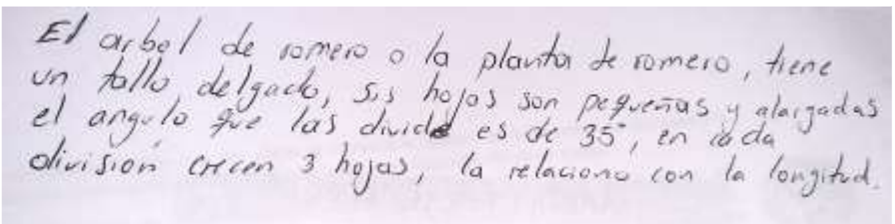
Es posible observar la facilidad de los estudiantes al establecer las razones y proporciones entre las medidas calculadas, además realizar la conversión sin ningún problema entre razón y la expresión decimal relacionada, lo que supone una excelente oportunidad para trabajar estos conceptos de manera significativa en el aula de clase.

Figura 50 *Resultados razón de crecimiento Fractal*



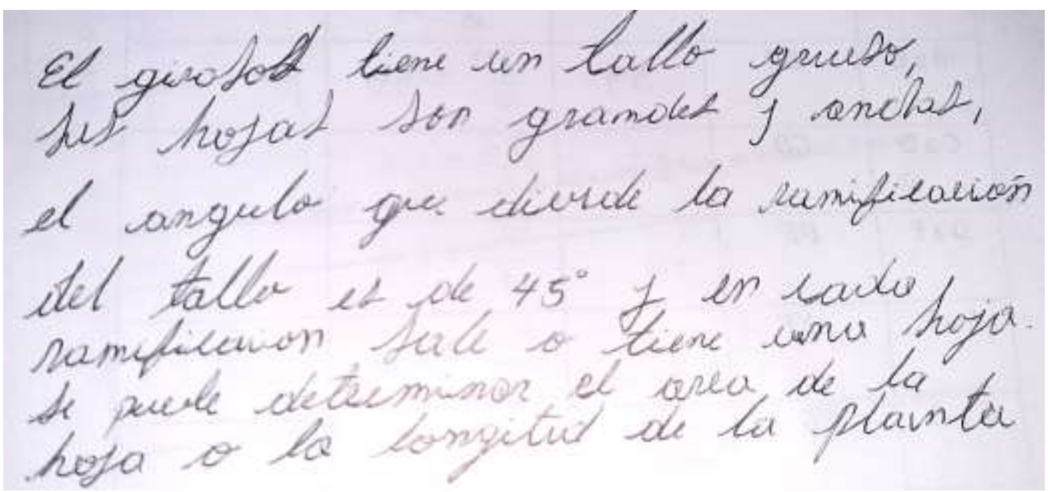
SECCIÓN	NOMBRE DE LA SECCIÓN	DISTANCIA (MM)	COCIENTE ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES	RAZON ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES
A a B	AB	65	EJEMPLO: AB/BC : $\frac{65}{45} = 1.4$	$\frac{1.4}{1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
B a C	BC	39	$\frac{39}{27} = 0,8$	
C a D	CD	27	$\frac{27}{16} = 1,6$	
D a E	DE	16	$\frac{16}{11} = 1,4$	
E a F	EF	11	$\frac{11}{8} = 1,3$	
F a G	FG	8	$\frac{8}{0,5} = 16$	
G a H	GH	0,5	$\frac{0,5}{0,3} = 1,6$	

Figura 51 *Producto de los estudiantes*



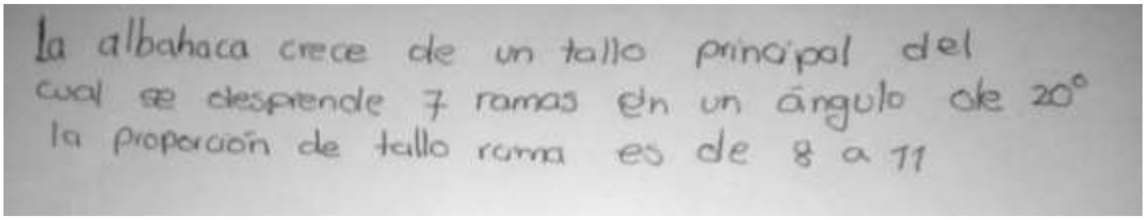
El arbol de romero o la planta de romero, tiene
un tallo delgado, sus hojas son pequeñas y alargadas
el angulo que las divide es de 35°, en cada
division crecen 3 hojas, la relaciono con la longitud.

Figura 52 *Producto de los estudiantes*



El girasol tiene un tallo grueso,
sus hojas son grandes y anchas,
el angulo que divide la ramificacion
del tallo es de 45° y en cada
ramificacion sale o tiene una hoja.
Se puede determinar el area de la
hoja o la longitud de la planta

Figura 53 *Producto parcial de estudiantes*


la albahaca crece de un tallo principal del cual se desprende 7 ramas en un ángulo de 20° la proporción de tallo rama es de 8 a 11

Resultado General. De manera general los desempeños de los participantes en el desarrollo de las 11 guías aplicadas se relacionan a continuación:

Tabla 20 *Desempeño de los estudiantes en las 11 guías*

DESEMPEÑO	G 1,2,3	G4	G5	G 6 y 7	G8	G 9 y 10	G11	PROM
SUPERIOR	25%	56%	65%	81%	62%	50%	62%	57%
ALTO	31%	31%	23%	19%	38%	6%	38%	27%
BÁSICO	19%	13%	6%	0%	0%	31%	0%	10%
POR MEJORAR	12%	0%	6%	0%	0%	0%	0%	3%
SIN PARTICIPACIÓN	13%	0%	0%	0%	0%	13%	0%	4%

En donde se logra evidenciar que en promedio el 84% de los estudiantes tuvo un desempeño SUPERIOR-ALTO, mostrando el buen desenvolvimiento de estos en cada una de las actividades y el éxito de la fractalidad como estrategia interdisciplinar. A pesar de ser un tema nuevo fue comprendido por ellos y relacionado con los elementos de su contexto. Lo que permitió superar las dificultades presentadas por la coyuntura educativa causada por el COVID-19. Además, mostraron la capacidad de experimentar, comprender las actividades planteadas, así como como la capacidad de reflexionar sobre los fenómenos relacionados con el crecimiento de las plantas.

A continuación, se presenta una síntesis de los resultados obtenidos al aplicar las 11 guías.

Tabla 21 *Síntesis de resultados*

Guía	Resultado	
	Desempeño	**Interpretación**
1, 2, 3	25% SUPERIOR 31% ALTO 19% BASICO 12% ACEPTABLE 13% BAJO	Los estudiantes perciben las características de fractales de manera parcial, y principalmente lo describen como un proceso iterativo más que recursivo. Definen los fractales según su apariencia y propiedades, logrando comprender que tienen repetición y auto-similaridad. Aunque no logran relacionar completamente estas dos propiedades.
4	56% SUPERIOR 31% ALTO 13% BASICO	Los educandos realizaron la construcción de los modelos fractales cumpliendo con las especificaciones técnicas. Respetando las proporciones, medidas y orden en las iteraciones. Aunque, algunos estudiantes tuvieron errores al trazar las medidas proporcionales al inicio, lo cual con lleva a que el modelo como tal pierda similitud con el original.
5	65% SUPERIOR 23% ALTO 6% BASICO 6% ACEPTABLE	La mayoría de la población de estudio logró relacionar elementos de su entorno con formas fractales. Lo cual indica el grado de comprensión que alcanzaron y que a pesar que no definen de manera precisa que es un fractal, logran encontrar formas que cumplan con estas propiedades. Estableciendo una relación entre elementos fractales y su cotidianidad.
6 y 7	81% SUPERIOR 19% ALTO	Gran parte de los estudiantes llevaron a cabo un proceso de reflexión en torno a la planta seleccionada, centrando su análisis en la forma y tamaño de las hojas, raíces y flores, buscando una manera de cuantificar estos elementos. Además, establecieron relaciones con diferentes conceptos matemáticos. Algunos no establecieron una relación con las matemáticas, pero reconocen que está presente en muchos fenómenos de la naturaleza.
8	62% SUPERIOR 38% ALTO	Los estudiantes establecieron una relación bien estructurada entre las plantas y los fractales. Mencionando propiedades como la auto similitud, la dimensión y la iteración. Siendo la primera la más reiterativa en sus respuestas, pues reconocen que existen formas que se repiten a diferentes escalas, como la distribución de las ramas con las hojas con relación a la distribución tallo-ramas.
9	50% SUPERIOR 6% ALTO 31% BASICO 13% BAJO	Más de la mitad de los educandos lograron determinar la dimensión fractal de la hoja que seleccionaron utilizando el método Box Counting. Aunque algunos de los participantes cometieron errores procedimentales relacionados con el desarrollo de algoritmos, y la utilización del método, realizando de forma errónea el conteo de las cajas en la cuales se encuentra parte de la silueta de la hoja. Además, fue la actividad de mayor dificultad durante su aplicación.
10 y 11	62% SUPERIOR 38% ALTO	Los estudiantes elaboraron un patrón de crecimiento que coincide con la planta que escogieron, evidenciando características que permiten la simulación de su crecimiento, reconociendo que después de ciertas iteraciones es posible lograr una buena aproximación visual. Algunos tuvieron algunas fallas en sus mediciones (tallo, ramas y ángulos) lo que ocasiona que el resultado final no coincida totalmente con la planta seleccionada.

8.3.2 Motivación de los estudiantes en cada guía

Por medio de un cuestionario de Google (Google Forms), cada estudiante evaluó su desempeño motivacional al desarrollar cada una de las guías propuesta. Teniendo en cuenta el nivel de satisfacción y la afinidad con el material proporcionado. Se implementó un cuestionario tipo LIKERT de carácter anónimo, con cinco opciones de respuesta: nada satisfecho, poco satisfecho, neutral, muy satisfecho y totalmente satisfecho. Los resultados son los siguientes:

Figura 54 *Motivación por guía*

Como se puede observar la motivación y su percepción con el trabajo realizado en cada guía es generalmente positivo, pues destaca la valoración *totalmente satisfecho* y *muy satisfecho* sobre las demás. Algunos se muestran *neutrales* en cuanto a su percepción de las clases y su respectivo estado de ánimo. Por otro lado, una cantidad mínima valoraron su satisfacción con las guías como poco o nada satisfechos, lo que puede corresponder a los educandos que no realizaron las actividades o que presentaron dificultad en su desarrollo.

A nivel general, el consolidado motivacional de los estudiantes durante el desarrollo de las 11 guías planteadas fue:

Figura 55 *Motivación de los estudiantes en las guías.*

En donde es posible observar que el 70% de la población se sintieron *satisfechos* o *muy satisfechos* en el desarrollo de cada guía. Lo cual confirma que la intención motivacional de la estrategia implementada fue exitosa en cuanto a la percepción. Por tanto, fue posible generar a través de las guías un clima propicio, de aceptación y de confianza, en el cual el educando se sintió con seguridad para participar y que, en consecuencia, contribuyo a un desenvolvimiento personal positivo.

9. CONCLUSIONES

La utilización de estrategias basadas en las ciencias de la complejidad fortalece los procesos de creatividad e innovación en los educandos y evita acudir a soluciones y desarrollos mecánicos, automatizados o descontextualizados. La complejidad obliga a superar la pereza mental y las actitudes mecánicas y repetitivas. Tal como afirma (Domingo, 2009) De algún modo, la solución para gestionar la complejidad será renunciar a los automatismos mentales y realizar una reflexión en plena práctica – la denominada práctica reflexiva – que nos ayude a resolver con acierto las situaciones concretas (p. 204)

De manera similar, el uso de estrategias interdisciplinares, holísticas y no lineales, contribuyen a que los estudiantes se ejerciten intelectualmente en procesar cognitivamente conocimientos diversos interrelacionados, teóricos y prácticos. Tal como afirma Castro, (2000).

> La interdisciplinaridad es el establecimiento de nexos recíprocos, interacciones, intercambios múltiples y cooperación entre dos o más ciencias particulares que tienen un común objeto de estudio desde perspectivas diferentes, o que se aproximan a las propiedades y relaciones específicas de ese objeto con distintos aparatos teóricos y metodológicos para desentrañar los diversos aspectos de su esencia, con el propósito de lograr un conocimiento cada más integral del mismo y de las leyes que rigen su existencia y desarrollo.

No obstante, en el aula de clase, se siguen utilizando estrategias descontextualizadas y lineales. Para mejorar esta situación deficitaria se sugiere diseñar estrategias didácticas interdisciplinarias fundamentadas en la visión constructivista de Piaget (1969), Vygotsky (1979) y Ausubel (1982), además, de aspectos funcionales mencionados en los lineamientos curriculares proporcionados por el MEN (2004). Estas al ser configuradas desde la interdisciplinariedad posibilitan el desarrollo de competencias en las diferentes asignaturas orientadas y la inmersión en un currículo no lineal.

Ahora bien, dentro de los propósitos generales de la educación en geometría, el propósito más básico es que el estudiante pueda usar está como una herramienta. Según MEN (2004), la enseñanza de la geometría en la educación básica es una herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es predominantemente geométrico (p.17). En ese sentido, la geometría de Euclides por sí sola no es suficiente para comprender y percibir muchos fenómenos de la naturaleza. Por tanto, la geometría fractal debería integrarse en las matemáticas educativas, pues provoca un cambio en la percepción de los estudiantes de que las matemáticas son una lección abstracta separada de los fenómenos naturales.

En consecuencia, de lo anterior la geometría fractal puede considerarse como un hilo conductor para impartir nuevos aprendizajes en diferentes ciencias y como un ejemplo claro que el currículo escolar debería involucrar cada vez más las ciencias de la complejidad para alcanzar una construcción del conocimiento.

Referente al cumplimiento de los objetivos propuestos se considera, que se logró diseñar una estrategia didáctica interdisciplinar que vinculara la geometría fractal presente en las plantas, el contexto de la población y la simulación computacional en pro del fortalecimiento de los aprendizajes significativos de estos. A través de las diferentes etapas ejecutadas a lo largo del presente trabajo investigativo es posible observar la consolidación de los fines planteados y establecer algunas conclusiones del trabajo desarrollado.

En primer lugar, considerando las literaturas citadas, se encontró que las propuestas educativas que vinculan la geometría fractal se han intensificado en los últimos años. Sin embargo, existen varias deficiencias teóricas y metodológicas. Regularmente tratan de integrar la geometría fractal solo desde la enseñanza de la geometría dejando fuera muchas características propias de la fractalidad. Desconociendo que está estrechamente relacionada con distintos campos de las matemáticas como el álgebra y diferentes disciplinas como las ciencias naturales, las artes y la tecnología. En este contexto, es más beneficioso abordar la geometría fractal desde un enfoque curricular interdisciplinario, para que los estudiantes la puedan comprender de una mejor manera y aprovechar sus múltiples utilidades.

En segundo lugar, al establecerse los estilos de aprendizaje individuales de los estudiantes, se logró la formulación de estrategias pedagógicas y metodológicas para favorecer el desarrollo de habilidades de pensamiento de análisis y resolución de problemas. Algunas relaciones son más fuertes que otras, así lo demuestra el análisis realizado por medio de categorías aplicadas a las actividades desarrolladas. Se puede hacer un seguimiento continuo para evaluar cuales actividades generan un mayor impacto teniendo en cuenta su diseño a partir de los estilos de aprendizaje. Por ejemplo, las actividades procedimentales y algorítmicas como la determinación de la dimensión fractal presentan un bajo impacto, pero las actividades de exploración de plantas, de elaboración de fractales manuales y de reflexión provocan cambios favorables en la motivación, el pensamiento crítico-constructivo y el fortalecimiento de los aprendizajes significativos.

Se puede determinar el grado de significatividad del aprendizaje de los participantes a través de las dimensiones del aprendizaje significativo propuestas por Ausubel, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la investigación como la motivación de la población en cada guía (Figura 54 Motivación por Guía), donde se destaca la valoración totalmente satisfecho y muy satisfecho. De igual forma, se puede constatar que los educandos lograron establecer una relación entre los conocimientos previos y los nuevos (Tabla 21 Desempeño de los estudiantes en las 11 Guías). Aplicando lo aprendido en su contexto, con temas como la morfología y el crecimiento de las plantas, la determinación de patrones y la estimación de áreas y perímetros para formas irregulares. Realizando un proceso de reflexión y análisis entorno al estudio de las plantas, su relación con las matemáticas, las ciencias naturales y la geometría fractal.

En tercer lugar, la estrategia didáctica denominada "Fractividades", articulada mediante una metodología interdisciplinaria centrada en la geometría fractal y su aplicación en las plantas y la naturaleza, la cual se desarrolló como subproducto del presente estudio, representa un espacio para el aprendizaje significativo de los jóvenes con base en la vinculación de las áreas de Ciencias Naturales, Matemáticas y Artística lo que facilita un cambio en el ejercicio docente llevado a cabo en la Institución Educativa, favoreciendo el desempeño académico y motivacional de los individuos a partir de las utilidades que proporciona la interdisciplinaridad y la aproximación a un currículo no lineal. La instrumentación de los fractales, utilizando actividades reflexivas y de análisis permite al docente desarrollar una labor eficiente, creativa y dinámica. Además, nuevas experiencias en los procesos de enseñanza- aprendizaje.

Finalmente, la propuesta de simulación computacional del crecimiento de plantas utilizando el algoritmo de L-System, incluido en el programa Houdini, puede facilitar en los individuos la validación de algunas inferencias obtenidas en las situaciones propuestas mediante la observación y la reflexión durante el desarrollo de las guías didácticas. Donde es fundamental el reconocimiento de patrones y reglas de crecimiento de las plantas, que a través de este programa son de fácil aplicación y una llamativa presentación de los resultados.

Dentro de las limitaciones que se pueden presentar en la aplicación una propuesta computacional enfocada hacia geometría de fractales, está el dominio del software que debe tener el docente para poder llevar a cabo un proceso de enseñanza propicio. Pues debe ser esté quien realice el primer acercamiento de los estudiantes al programa. Además, se deben contar con computadores o tabletas como insumo obligatorio para poder trabajar con el programa, hecho que imposibilito la aplicación práctica de la propuesta, pues su implementación coincidió con la coyuntura presentada por la pandemia del COVID-19, privándolos de acceder a estos dispositivos.

Con relación a la aplicación de las guías y la participación durante las mismas, es posible concluir lo importante que es elaborar actividades cortas y sintéticas; puesto que, si una actividad se presenta de forma dinámica y precisa, los estudiantes aumentan su grado de motivación hacia el aprendizaje. En contraste, se cansan y se sienten desmotivados cuando una actividad es demasiado extensa.

Del mismo modo, los participantes al encontrase en un contexto rural y estar inmersos en labores relacionadas con el campo, conviene que las actividades estén enfocadas a su cotidianidad. Pues permite realizar actividades que faciliten la construcción de conexiones entre el conocimiento nuevo y el previo, así como la transferencia de los nuevos conceptos a otras áreas del conocimiento.

Por otro lado, se logró establecer que la mayoría de la población de estudio de la investigación determinaron correctamente los fractales de las formas dadas y de su entorno, lo cual se evidencia en los resultados obtenidos por medio del análisis por categorías. Donde el 74% de los estudiantes en la guía 1, 2 y 3 demuestran una percepción clara de lo que es un fractal y lo expresan de manera escrita y visual. Por otro lado, en la guía 5, el 83% de los individuos identifican y proponen fractales de su entorno. Además, en la guía 11, el 100% de la población determinan patrones fractales en el crecimiento de las plantas de su contexto. Esta situación muestra que pueden reconocer las formas fractales intuitivamente como se corrobora en los estudios de Karakuş (2011; 2013) y Komorek et al (2001).

Recomendaciones

- ✓ Sería conveniente la aplicación de estudios fractales en el aula con base en la simulación computacional. Además, consultar aplicaciones de fácil manejo y que sean compatibles con dispositivos móviles. Teniendo como recurso la guía computacional propuesta en el presente trabajo.

- ✓ Para investigaciones futuras es conveniente prever diferentes escenarios educativos, para la implementación de la secuencia didáctica tomando en cuenta diversas modalidades de estudio.

- ✓ Finalmente, se propone conformar grupos interdisciplinarios de docentes, con el fin de construir y aplicar nuevas secuencias didácticas, buscando generar un involucramiento interdisciplinar que favorezca procesos de enseñanza – aprendizajes más significativos.

10. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Avello-Martínez R, Seisdedo-Losa A. El procesamiento estadístico con R en la investigación científica. Medisur [revista en Internet]. 2017 [citado 2018 Ene 17]; 15(5):[aprox. 3 p.]. Disponible en: http://medisur.sld.cu/index.php/medisur/article/view/3662

Agudelo, N y Escobar, D. (2016). *Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito actual en estudiantes de décimo. Un medio de aporte al desarrollo del pensamiento crítico en la escuela.* Tesis de grado. Universidad Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias de la Educación. Bogotá, Colombia.

Al-Majadalawi. (2005). *Fractales*

Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, *14*(2), 125-142.

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. En revista Sigma (33): 165-179. Recuperado de: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/10_geometria_realidad_33.pdf

Aznar, P. y Angels, M. (2009) La formación de competencias básicas para el desarrollo sostenible: el papel de las universidades, Madrid. REVISTA EDUCACIÓN, número extraordinario, 219-237.

Baldor, J. A. (2004). Geometría plana y del espacio y trigonometría. *Vigésima reimpresión. Publicaciones Cultural, SA de CV México, DF México*.

Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia 2: 69-85. Recuperado de: http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/jonei.pdf.

Bassanezi, R. C.; Biembengut, M.S. (1997). Modelación matemática: Una Antigua forma de investigación – un Nuevo método de enseñanza. Revista de didáctica de las matemáticas. (32):13-25. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo02.pdf

Boero, P. (2012). Del análisis y la representación de situaciones espaciales hacia el pensamiento teórico en geometría: una ruta de tercero a noveno grado. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32).

Braña, J. (2003). Introducción a la geometría fractal. Buenos Aires, Argentina.

Ana, B. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar ". Novedades Educativas. Año.

Cabezas, M. (2015). *Una introducción a la geometría fractal a través del tratamiento de la autosimilitud integrando un ambiente de geometría dinámica.* Tesis de grado. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Área de Educación Matemática. TICEM. pp. 19, 20, 30, 78, 102. Santiago de Cali, Colombia.

Campos Muñoz Daniel (2011). INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE LINDENMAYER: fractales,autómatas celulares y aplicaciones. Disponible en: http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/cellularautomata/Summer_Research_files/Arti_Ver_Inv_2011_DCM.pdf

Capra, F. (1996). *La trama de la vida*. Barcelona, España: Editorial Anagrama S.A

Capuano, V. (2008) Sobre cómo se incorporan las TICS a la práctica docente en general y a la práctica experimental en particular, en Física

Cardona, L. (2017). *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica del C.E. Bachillerato en Bienestar Rural Sede Ciato en el municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza. Tesis de maestría*. pp.13, 27. Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ciencias Básicas. Pereira, Colombia.

Castro, L. (2000) Diccionario de Ciencias de la Educación. Lima. Ceguro Editores.

Clemens, SR, O'Daffer, PG y Cooney, TJ (1998). *Geometría.* Pearson Educación.

Espinoza Freire, Enrique. (2019). Estilos de aprendizaje. Aplicación del Cuestionario Honey - Alonso en estudiantes de la Universidad Técnica de Machala. Espacios. 40. 42-51.

Flórez, C. S. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (45), 107-120.

Fernández Quiroga, M. Paulina. (2005). Estado del arte en modelación funcional- estructural de plantas. Bosque (Valdivia), 26(2), 71-79. https://dx.doi.org/10.4067/S0717-92002005000200009

García, M., Franco, F., & Garzón, D. (2006). Didáctica de la geometría euclidiana: conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacial. *Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá*.

Greca I. M. y Moreira M.A. (1997). Modelos mentales, modelos conceptuales y modelización. En Décima Reunión de Ensefianza de Ia Física (REF X), Mardei plata. Recuperado de: http://www.fsc.ufsc.br/cbef/port/15-2/artpdf/a1.pdf.

González, J. (2009). Sobre cómo evoluciona el uso de las NTICs en la Enseñanza de la Física, en los últimos 10 años. Memorias de REF XVI. Organizada por APFA y las Facultades de Ingeniería y de Filosofía, Humanidades y Artes, de la U.N. de San Juan. ISBN-13:978-950-605-600-1.

Gutiérrez Cordero, R., Cremades Begines, A., & Perea Díaz, B. (2011). La interdisciplinariedad de la música en la etapa de educación primaria. *Espacio y Tiempo, Revista de Ciencias Humanas, 25, 151-161*.

Hein, N.; Bienmbengut, M. S. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En memorias del V festival internacional de matemática de costa a costa, Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno, Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas. Brasil. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf

Hernández y Vidal (2019). Fractalidad, caos y el lenguaje netlogo como agentes integradores del currículo de las matemáticas escolares. Obtenido banco de tesis de la maestría en estudios interdisciplinarios de la complejidad, universidad surcolombiana.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación: Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Iturriago, V., Morales, S., Bedoya, J., & Hernández, Y. (2012). Geometría de las plantas y árboles de la Ciudadela Educativa: la vida del municipio de Copacabana.

Iwan, Reda. (2015). *The Effect of Teaching "Chaos Theory and Fractal Geometry" on Geometric Reasoning Skills of Secondary Students.* INTERNATIONAL JOURNAL OF RESEARCH IN EDUCATION METHODOLOGY. 6. 804-815. 10.24297/ijrem.v6i2.3876.

Karakuş, F. (2013). A Cross-age Study of Students' Understanding of Fractals. Bolema, 27,47, 829-846.

Komorek, M., Duit, R., Bücker, N., & Naujack, B. (2001). Learning process studies in the field of fractals. H.Behrendt, H. Dahncke, R. Duit, W. Groaber, M. Komorek, A. Kross, & P. Reiska (Eds.), Research in Science Education- Past, Present, and Future (pp. 95-100), Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

León-Salinas, C. E. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (42), 159-171.

Maldonado, C. E. (2005). Ciencias de la complejidad: Ciencias de los cambios súbitos. Odeon, (2).

Maldonado, C. E., & Gómez Cruz, N. A. (2010). El mundo de las ciencias de la complejidad. Editorial Universidad del Rosario.

Maldonado, C. (2012). Derivas de la complejidad: fundamentos científicos y filosóficos.

Maldonado, C. (2013). Significado e impacto social de las ciencias de la complejidad. Bogotá: Desde Abajo.

Maldonado, C. E. (2014). ¿Qué es eso de pedagogía y educación en complejidad?. Intersticios sociales, (7), 1-23.

Maldonado, C. (2016). Complejidad de las ciencias sociales. Y de otras ciencias y disciplinas. Bogotá: Ediciones desde abajo.

Maldonado, C. (2016). El evento raro. Epistemología y complejidad. Cinta de moebio.56, 187-196.

Mandelbrot, Benoit B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores, S.A. ISBN: 84:8310-549-7. pp. 9-109, 125, 159, 211, 239, 287, 303, 319, 351, 397,422, 457. España.

Martín, N. B. (2016). Actividad de estudio e investigación generada a partir de la pregunta ¿cómo se construye un fractal teórico?

Martín, N. B., Parra, V., & de los Ángeles Fanaro, M. (2019). Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales", (102), 25-34.

Matsumoto, K. (2015). Fractales y algunas aplicaciones a la enseñanza (tesis de grado). Sao Pablo. Obtenido de http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/86509/mod_resource/content/1/TCC%20Kau%C3%AA.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares en Educación Matemática. Bogotá: Magisterio, p. 60.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá, D.C: Colombia. Enlace Editores LTDA. Recuperado de http://www.slideshare.net/colsaludcoopnorte/articles-p-g-archivo.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

En MEN, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Morín, E. (1984) *Ciencia con consciencia*. Edit. Anthropos, Barcelona.

Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.

Morín, E. (2003) Articular las disciplinas: la antigua y la nueva transdisciplinariedad, ITINERARIO EDUCATIVO, No. 39-40, 189-205.

Morín, E. 2002. *La cabeza bien puesta.* Buenos Aires: Editorial Nueva Visión

Nicolescu, B. (1996). *La transdisciplinariedad: manifiesto*. Multiversidad Mundo Real Edgar Morin, AC.

Perrin, J. (2014). *Les atomes*. Cnrs.

Pimentel, J. J. A. (2018). Aprendizaje Basado en Proyectos Utilizando L-Systems en un Curso de Compiladores. Programación Matemática y Software. sequence=1&isAllowed=y

Puerto, J. F. (2013). El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software cabrí “Del pensamiento numérico al pensamiento algebraico-variacional.

Prusinkiewicz, P. y Lindenmayer, A. (2012). The algorithmic beauty of plants. Springer Science & Business Media.

Rincón, J. P. A., & Uribe, L. C. (2012). El Tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación). *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (32).

Rivera, E y Lopez, R.(2011). *Geometría fractal y transformada de Fourier*. Scientia ET Technica vol XVI núm. 48, pp 269-274. Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Rodriguez, R. (1995). *La teoría de los fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia.* Universidad Autónoma de Nuevo León. Monterrey, México.

Romero, F. (2009). "Aprendizaje significativo y constructivismo. Temas para la Educación". Revista digital para profesionales de la enseñanza, 3. Disponible en: http://www.fe.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd4981.pdf

Smith, R. (1984). *Plants, fractals, and formal languages*. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, Vol 18.

Suárez, P. (2009). La representacion en Educacion Matematica: atractores de sistemas iterados de funciones (IFS's).

Talanquer, V. (1996). Fractus, fracta, fractal. México: Fondo de Cultura Económica.

Travé González, G. y Pozuelos Estrada, F.J. (1999), Duque Hoyos, R. (2015) y Andrea Mónica López.

Trenas, F. R. (2009). APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO Y CONSTRUCTIVISMO. *Temas para la educación*, *8*.

Vargas y Sánchez (2018), didáctica en la enseñanza de la "fractalidad" en educación básica desde un modelo interdisciplinar MACTA (matemáticas, ciencias, tecnología y artes). Obtenido banco de tesis de la maestría en estudios interdisciplinarios de la complejidad, universidad surcolombiana.

Vazques,V.(2016). *Introducción a la Geometría Fractal.* Universidad del Bio-Bio. Chillan, Chile.

Veliz-Díaz, Yeniffer A., & León-Guerra, Reynolds. (2017). Modelo fractal para la representación morfológica de la planta Capsicum annuum L. en 3D. Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, 26(2), 71-79. Recuperado en 02 de abril de 2020, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2071005420170002000009&lng=es&tlng=es

Villa-Ochoa, J. A.; Bustamante, C. A.; Berrio, M.; Osorio, A.; Ocampo, A. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusion en los lineamientos curriculares colombianos. En Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Valledupar. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/936/1/4Cursos.pdf.

Weaver, W. (1948). *Science and complexity, in American Scientist*.36: 536-544.

White, N. y Hanan, J. (2012). Uso del modelado funcional y estructural de plantas en horticultura.

Zamora, S. (2019). *Estado del arte del aprendizaje de geometría fractal en educación básica en Colombia.Una exploración desde el constructivismo configuracional.* Universidad Militar, Bogota, Colombia.

Zapata Grajales, F. N. (2014). *La geometría de las plantas: una experiencia de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín)

ANEXOS

Anexo 1: Cronograma de la investigación y de la etapa de aplicación de guías didácticas

GUIA	AGOSTO				SEPTIEMBRE				OCTUBRE
	1 SEMANA	2 SEMANA	3 SEMANA	4 SEMANA	1 SEMANA	2 SEMANA	3 SEMANA	4 SEMANA	1 SEMANA
Un Acercamiento a la Fractalidad	■								
Patrón e Iteración	■								
Conociendo la Auto similitud		■							
Fractales Manuales			■						
Fractales y Sus Aplicaciones				■					
Un Paseo por La Huerta					■				
Somos Investigadores					■				
Plantas Fractales						■			
Al Sendero debo Regresar y el Área Foliar Debo Determinar							■		
Dimensión Fractal De Una Hoja								■	
Arboles Fractales									■

Item	Actividad	FECHAS																																							
		FEB				MAR				ABR				MAYO				JUN				JUL				AGO				SEP				OCT				NOV			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Introducción	X	X	X	X																																				
2	Planteamiento del problema	X	X																																						
3	Antecedentes		X	X	X	X	X	X																																	
4	Justificación																	X	X	X																					
5	Fundamentos Teóricos		X	X	X	X	X	X	X																																
6	Objetivos				X	X	X																																		
7	Elaboración metodología				X	X	X	X	X	X	X																														
8	Capacitación instrumentos a trabajar					X	X	X	X	X	X	X	X	X																											
9	Adecuación formato test								X	X	X	X	X	X	X	X																									
10	Elaboración de unidad didactica														X	X	X	X	X	X																					
11	Elaboración de modelación																X	X	X	X	X																				
12	Aplicación de test																							X	X	X															
13	Aplicación de unidad didactica																									X	X	X	X	X	X	X									
14	Evaluación los resultados obtenidos																																X	X	X						
15	Analisis de resultados																																			X	X	X			
16	Bibliografía y anexos																							X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Vigilada Mineducación

Anexo 2: Consentimiento rector

INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL CARMEN
DECRETO 1617 NOVIEMBRE DE 2002 – RES. 1776 del 06 de marzo de 2020
DANE 241319000523-01 – NIT813006290-6
MIRAFLORES – GUADALUPE
TEL: 3102069852-3102069833

NEIVA, SEPTIEMBRE 15 DE 2020

Señor
José Miller Gómez Perdomo
Rector
I.E NRA SRA DEL CARMEN

ASUNTO: SOLICITUD PERMISO RECTOR

Cordial Saludo,

El presente documento tiene como propósito solicitar su autorización para la llevar a cabo con los estudiantes del grado del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia(Anexo listado de estudiantes), el Trabajo final de Maestría titulado "LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LAS PLANTAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR PARA EL FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS". Cargo del docente Jemberson Bedoya Tique con CC 1.075.293.533 de Neiva, estudiante de la Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la complejidad.

El objetivo general de este estudio es diseñar una estrategia de aula, que fortalezca el aprendizaje significativo de los estudiantes, a través del aprendizaje de la geometría fractal y las plantas. La participación de los estudiantes en este estudio será a través del desarrollo de las guías de aprendizaje enviadas y las actividades planteadas. Los estudiantes suministrarán información relacionada con los propósitos del proyecto, la cual será registrada en diferentes formatos. En este sentido, dicha información será confidencial, sólo se usará con fines académicos, como parte del proceso de análisis de los datos y que permitirá cumplir con los objetivos planteados en la investigación.

Atentamente,

Jemberson Bedoya Tique
C.C. 1.075.293.533

INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL CARMEN
DECRETO 1617 NOVIEMBRE DE 2002 – RES. 1776 del 06 de marzo de 2020
DANE 241319000523-01 ~ NIT813006290-6
MIRAFLORES ~ GUADALUPE
TEL: 3102069852-3102069833

NOMBRE DEL ESTUDIANTE
BARRIONUEVO ALBEIRO
BUITRAGO JACANAMEJOY KEINER ESTIVEN
DIAZ ORTIGOSA EIDER LEANDRO
FARFAN SANTANILLA ANGELICA LICES
GALINDO FARFAN NELSON LEONARDO
GUTIERREZ BERNAL JUAN DIEGO
NARVAEZ VALENCIA JHOAN STIVEN
PEREEZ MUNAR FRANK SEBASTIAN
POLANCO SANCHEZ FAIBER
RAMIREZ MOLINA YOHINER JAVIER
RAMOS BERMEO CARLOS ANDRES
RAMOS RIVERA KAREN DAYANA
SANTOFIMIO GUTIERREZ JOSE EMANUEL
VALENCIA GALINDO SHARICK LIZETH
VARGAS VARGAS LAURA JIMENA
VERGARA HURTADO NASLY CAMILA

Anexo 3: Consentimiento de los padres de familia

INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL CARMEN
DECRETO 1617 NOVIEMBRE DE 2002 – RES. 1776 del 06 de marzo de 2020
DANE 241319000523-01 ~ NIT813006290-6
MIRAFLORES ~ GUADALUPE
TEL: 3102069852-3102069833

Opita de Corazón

CONSENTIMIENTO PADRES DE FAMILIA

El presente documento tiene como propósito informarle y solicitar su autorización para la participación del estudiante: _______________________________________del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen sede la Australia, en el Trabajo final de Maestría titulado "LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LAS PLANTAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR PARA EL FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS". Jemberson Bedoya Tique con CC 1.075.293.533 de Neiva, estudiante de la Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la complejidad.

El objetivo general de este estudio, diseñar una estrategia de aula, que fortalezca el aprendizaje significativo de los estudiantes, a través del aprendizaje de la geometría fractal y las plantas. La participación de los estudiantes en este estudio será a través del desarrollo de las guías de aprendizaje enviadas y las actividades planteadas. Los estudiantes suministrarán información relacionada con los propósitos del proyecto, la cual será registrada en diferentes formatos. En este sentido, dicha información será confidencial, sólo se usará con fines académicos, como parte del proceso de análisis de los datos y que permitirá cumplir con los objetivos planteados en la investigación.

Como padre de familia, acudiente o adulto responsable, es importante su autorización, para lo cual le solicitamos diligenciar los siguientes datos: Yo ____, identificado con cédula de ciudadanía No. ________________ de ____________ Colombia, en calidad de representante legal y en uso de mis plenas facultades legales autorizo, por medio del presente documento, la participación del estudiante ______________________________________ en el proceso de investigación descrito en este documento. Así mismo certifico que he sido informado de los propósitos del estudio y los fines con los que será utilizada la información recolectada mediante entrevistas y demás instrumentos planteados por el investigador. Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento.

________________________ ________________________

Firma del acudiente

Vigilada Mineducación

Anexo 4: Correspondencia curricular

GUIA Y No. PARTICIPANTES	CONTENIDOS	META	FECHA ENVIO	FECHA ENTREGA	ESTANDAR
UN ACERCAMIENTO A LA FRACTALIDAD **14 PARTICIPANTES**	✓ Concepto de fractal ✓ Aplicaciones de los fractales	Reconoce el concepto de fractal y su algunas de sus aplicaciones en la vida cotidiana.	3/8/2020	7/8/2020	✓ Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias
PATRON E ITERACION **14 PARTICIPANTES**	✓ Concepto de patrón ✓ Concepto de iteración	Deducir y aplicar los conceptos de "patrón" e "iteración", a la vez que lo identifica en un ejemplo dado.	3/8/2020	7/8/2020	✓ Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias
CONOCIENDO LA AUTOSIMILITUD **16 PARTICIPANTES**	✓ Concepto de figura limite ✓ Autosimilitud ✓ Copias maximales	Adquirir nociones de "figura Limite", "autosimilitud" y "copias maximales".	10/8/2020	14/8/2020	✓ Justifico los resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.
FRACTALES MANUALES **16 PARTICIPANTES**	✓ Concepto de Fractal ✓ Triángulos ✓ Fracciones	Aplica los conceptos de fractales a través del arte.	17/8/2020	21/8/2020	✓ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. ✓ Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
FRACTALES Y SUS APLICACIONES **16 PARTICIPANTES**	✓ Concepto de fractal ✓Aplicaciones de los fractales	Identifica fractales y alguna de sus aplicaciones en la vida cotidiana.	24/8/2020	28/8/2020	✓ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

GUIA Y No. PARTICIPANTES	CONTENIDOS	META	FECHA ENVIO	FECHA ENTREGA	ESTANDAR
UN PASEO POR LA HUERTA **16 PARTICIPANTES**	✓ Método científico	Reconocer las nociones y las relaciones entre las matemáticas y la naturaleza.	31/8/2020	4/9/2020	✓ Observo fenómenos específicos
SOMOS INVESTIGADORES **16 PARTICIPANTES**	✓ Método científico	Desarrollar competencias investigativas por medio del método científico..	31/8/2020	4/9/2020	✓ Formulo preguntas específicas sobre una observación, sobre una experiencia o sobre las aplicaciones de teorías científicas
PLANTAS FRACTALES **16 PARTICIPANTES**	✓ Método científico	Plantea las relaciones entre las plantas y los fractales.	7/8/2020	11/9/2020	✓ Formulo hipótesis, con base en el conocimiento cotidiano, teorías y modelos científicos.
AL SENDERO DEBO REGRESAR Y EL ÁREA FOLIAR VOY A DETERMINAR	✓ Área y perímetro ✓ Logaritmación ✓ Regresión lineal ✓ Morfología	Determinar y analizar algunos datos geométricos de las hojas de las plantas, como el largo de la hoja, su ancho máximo y su área foliar.	14/9/2020	18/9/2020	✓ Registro mis observaciones y resultados utilizando esquemas, gráficos y tablas. ✓ Utilizo las matemáticas como herramienta para modelar, analizar y presentar datos ✓ Clasifico organismos en grupos taxonómicos de acuerdo

16PARTICIPANTES					con las características de sus células. ✓ Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. ✓ Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación. ✓ Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados
DIMENSION FRACTAL DE UNA HOJA **16 PARTICIPANTES**	✓ Dimensión fractal ✓ Área y perímetro ✓ Logaritmación ✓ Regresión lineal ✓ Taxonomía	Calcula la dimensión fractal de una hoja e identificar la importancia de está en la posible clasificación taxonómica.	21/9/2020	25/9/2020	✓ Utilizo las matemáticas como herramienta para modelar, analizar y presentar datos ✓ Clasifico organismos en grupos taxonómicos de acuerdo con las características de sus células. ✓ Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. ✓ Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación. ✓ Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados
ÁRBOLES FRACTALES **16 PARTICIPANTES**	✓ Longitud ✓ Razón y proporción ✓ Fracción ✓ Ángulos	Identifica el patrón fractal del crecimiento de algunos árboles.	28/9/2020	2/10/2020	✓ Realizo mediciones con instrumentos adecuados a las características y magnitudes de los objetos de estudio y las expreso en las unidades correspondientes. ✓ Utilizo las matemáticas como herramienta para modelar, analizar y presentar datos. ✓ Clasifico organismos en grupos taxonómicos de acuerdo con las características de sus células. ✓ Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas. ✓ Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. ✓ Identifico represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, fi guras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas. ✓ Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.

GUIA Y No. PARTICIPANTES	CONTENIDOS	META	FECHA ENVIO	FECHA ENTREGA	ESTANDAR
L-SYSTEM Y HOUDINI **0 PARTICIPANTES**	✓ Houdini, elementos básicos ✓ Funciones básicas ✓ Interfaz ✓ Algoritmo L-System	Identifica los elementos y las funciones básicas del programa Houdini.	N/A	N/A	✓ Utilizo eficientemente la tecnología en el aprendizaje de otras disciplinas (artes, educación física, matemáticas, ciencias) ✓ Utilizo responsable y autónomamente las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para aprender, investigar y comunicarme con otros en el mundo. ✓ Desarrollo ayudas multimedia e hipermedia como apoyo a mi proceso de aprendizaje y de comunicación. ✓ Tomo decisiones argumentadas frente a la utilización de ciertos productos tecnológicos teniendo en cuenta el impacto en el medio
MODELANDO NUESTRA PLANTA EN HOUDINI **0 PARTICIPANTES**	✓ Algoritmo L-System y plantas ✓ Función importar elementos	Modelar el crecimiento de una planta utilizando el algoritmo L-SYSTEM.	N/A	N/A	✓ Utilizo eficientemente la tecnología en el aprendizaje de otras disciplinas (artes, educación física, matemáticas, ciencias) ✓ Utilizo responsable y autónomamente las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para aprender, investigar y comunicarme con otros en el mundo. ✓ Desarrollo ayudas multimedia e hipermedia como apoyo a mi proceso de aprendizaje y de comunicación. ✓ Tomo decisiones argumentadas frente a la utilización de ciertos productos tecnológicos teniendo en cuenta el impacto en el medio

Anexo 5: Guías

UN ACERCAMIENTO A LA

META: Reconoce el concepto de fractal y su algunas de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

MATERIALES: Para el desarrollo de este taller solo necesitas la presente fotocopia y realizar la lectura.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD:

LECTURA

Hace algo más de 30 años surgió una nueva geometría recursiva o "Geometria Fractal", creada por el polaco Benoit Mandelbrot. Esta geometría ha resultado ser una herramienta que además de ser muy atractiva por la belleza (a veces exótica) de las figuras que se generan, tiene muy buenas perspectivas para modelar fenómenos de la naturaleza que siempre se habían considerado fuera del alcance de las matemáticas y juega un papel importante en el desarrollo de disciplinas tan variadas y aparentemente disímiles como las matemáticas (geometría fractal), las ciencias de computación (heurística), la Pintura (fractales), la Música (ruido blanco), la Física (sistemas dinámicos) y la Biología (modelos neuronales)".

La idea filosófica subyacente a esta geometría es que los objetos de la naturaleza son recursivos. Por ejemplo, un árbol, una nube, una costa, son objetos tridimensionales que pueden ser modelados muy sencillamente en términos de ellos mismos. Esto no se puede hacer con la geometría euclidiana, ya que esta fue modelada para describir objetos rectilíneos y no objetos irregulares (de hecho, la palabra fractal quiere decir: irregular, fragmentado). "Muy posiblemente esta geometría de los objetos irregulares será la geometría del futuro. La recursión es una de las herramientas potentes tanto para la descripción de los objetos, como para la resolución de problemas". Tomado de :Shriki, Atara. (2016). Fractals in the Mathematics Classroom: The Case of Infinite Geometric Series. Learning and Teaching Mathematics. 20. 38-42.

Aunque no existe todavía una definición formal de la palabra "fractal", examinando algunos conceptos relacionados con el tema, es relativamente fácil identificar una figura o un fenómeno de naturaleza fractal. Una característica esencial de los objetos fractales es la autosimilitud. Intuitivamente un objeto o una figura es autosimilar si es igual a sus partes, salvo un factor de escala. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: La Curva de Koch

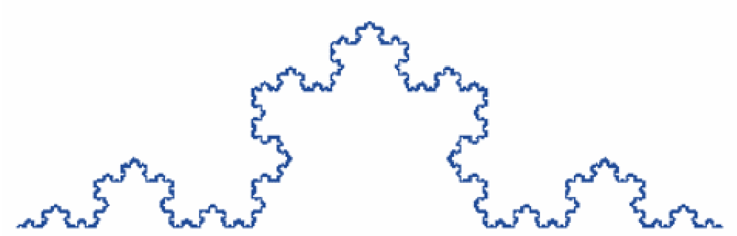
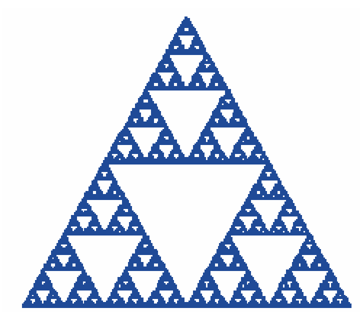


Ilustración 2. La Curva de Koch. Tomado de http://platea.pntic.mec.es/~mzapata/tutor_ma/fractal/dim_frac.htm

Podríamos decir que está formada por cuatro curvas de Koch cada una igual a la total pero reducida y colocada de diferente forma. (¡Identifica las cuatro curvas de Koch de las que aquí se habla!).

Ejemplo 2: El Triángulo de Sierpinski



Está formado por tres triángulos iguales al total solo que más pequeños (y cada uno de ellos formados por otros tres triángulos iguales, pero más pequeños, etc.)

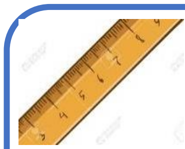
¿Estás de acuerdo con esta descripción? En realidad, los objetos fractales que se pueden obtener de esta manera son fractales determinísticos pues se forman con reglas muy precisas y exactas, sin intervención del azar, (los ejemplos clásicos de fractales son fractales determinísticos, como los citados anteriormente).

En la naturaleza también se encuentra esta ***autosimilitud*** *aunque no de manera tan determinística: las olas del mar son formadas por pequeñas olas, cada una formada por otras olitas; una hoja de helecho formada por ramitas que son como helechos más pequeños, o las ramas de un árbol se pueden ver como pequeños árboles; una cabeza de coliflor está formada por pequeñas coliflores, cada una a su vez formadas por subcoliflores, etc. Son algunos de los ejemplos que se pueden encontrar. (Busca en un diccionario el significado matemático del término "determinístico" para que te quede bien clara la idea anterior).* Tomado de :Shriki, Atara. (2016). Fractals in the Mathematics Classroom: The Case of Infinite Geometric Series. Learning and Teaching Mathematics. 20. 38-42.

Teniendo en cuenta la lectura anterior, responder:

1. ¿Quién es Benoit Mandelbrot?

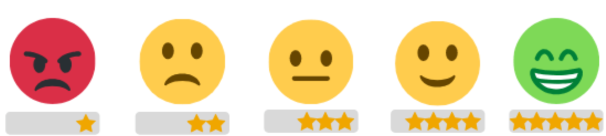
2. ¿En qué época surgió la geometría fractal?



3. ¿En qué campos de la ciencia son utilizados los fractales?

4. ¿Qué entendiste por la palabra fractal?

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



PATRON E ITERACIÓN

META: Deducir y aplicar los conceptos de "patrón" e "iteración", a la vez que lo identifica en un ejemplo dado.

MATERIALES: Para el desarrollo de este taller vas a necesitar al menos dos hojas de papel milimetrado, un lápiz, un borrador y una regla.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD:

1. A continuación encontrarás tres ejemplos y en cada uno de ellos, una secuencia de pasos que corresponde a la construcción de una figura de tipo fractal. Observa atentamente cada ejemplo:

Ejemplo 1. El Triángulo de Sierpinski:

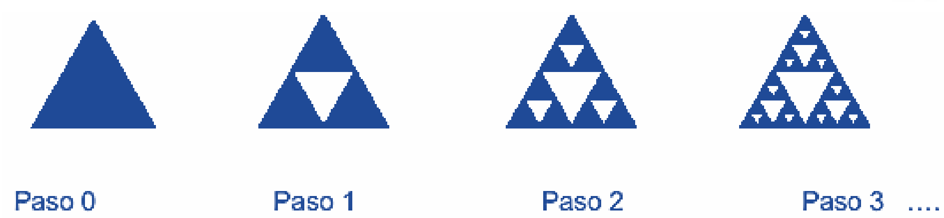


Ilustración 5. El Triángulo de Sierpinski pasos. Tomado de UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL. Página 159.

Ejemplo 2. La curva de Koch:

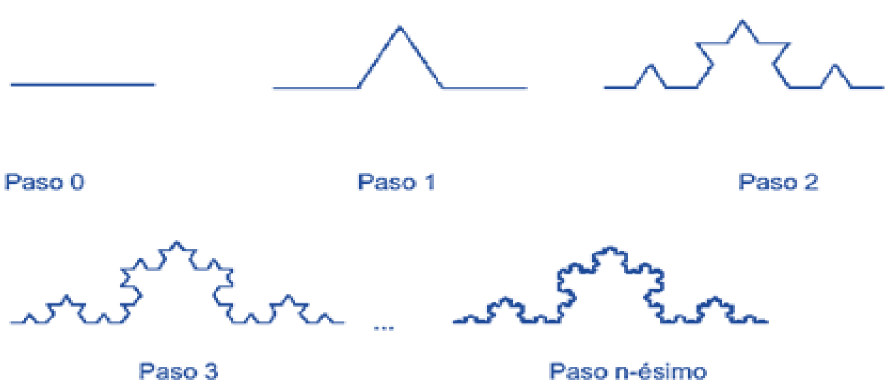


Ilustración 6. La curva de Koch. Tomado de UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL. página 158.

Ejemplo 3. “La curva del copo de nieve” o “isla de Koch”:

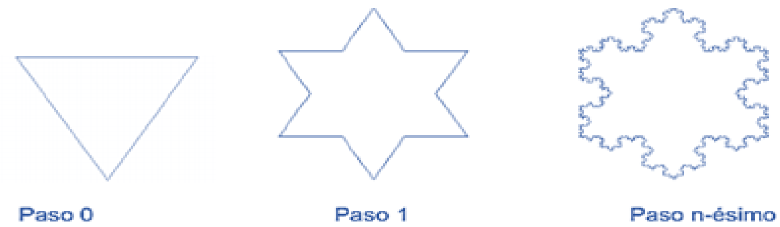


Ilustración 7. La curva del copo de nieve” o “isla de Koch. Tomado de https://www.google.com.co/imgres?imgurl=http://photos1.blogger.com/blogger/1076/1614/400/copnieve.gif&imgrefurl=http://poligonos1.blogspot.com/2005/10/los-fractales-esta-figura-es-un.html&tbnid=S-Z

2. Describe para cada ejemplo como son las iteraciones y el patrón, explica que relación(es) encuentras entre los dos conceptos y como se forma la secuencia de pasos en cada construcción.

3. Observa atentamente las siguientes secuencias e identifica en cada una de ellas cuál es el patrón en el proceso iterativo.

a. Carpeta de Sierpinski

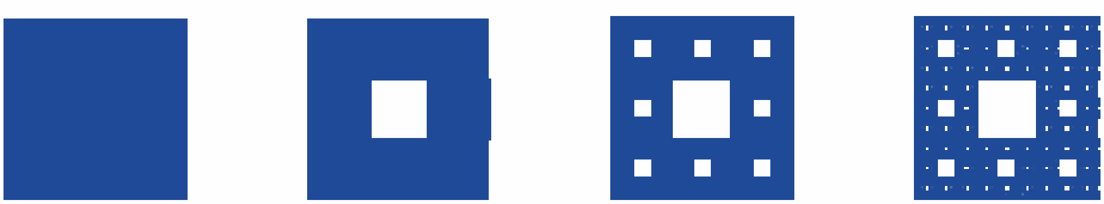


Ilustración 8. Carpeta de Sierpinski pasos. Tomado de http://www.epsilones.com/paginas/curvas/curvas-034-alfombra-sierpinski.html

b. Dragón de Sierpinski

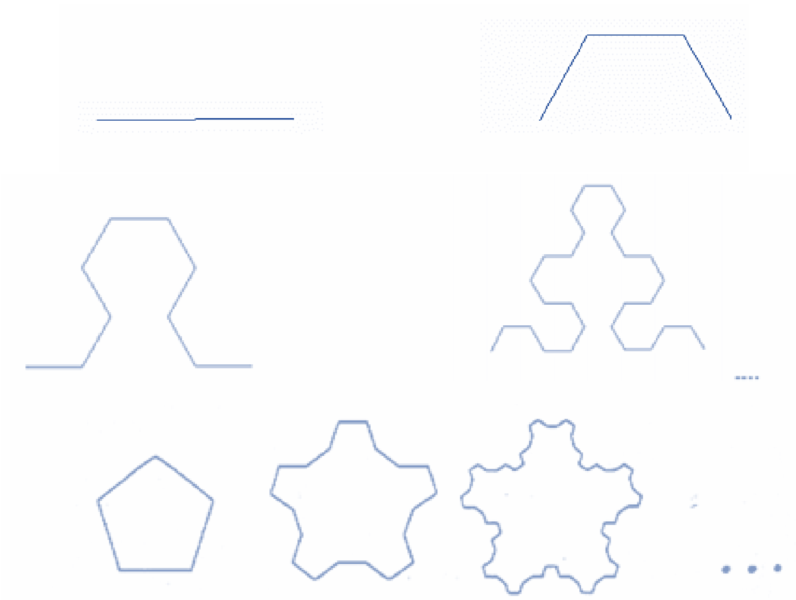
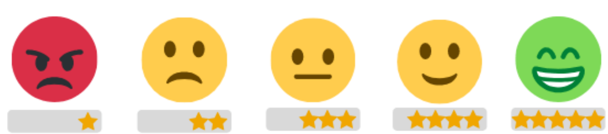


Ilustración 9. Dragón de Sierpinski. Tomado de Fractales matemáticos. página 16.

4. Ahora tú debes escoger un patrón que generen una figura (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc.) ***ojalá muy vistosa*** y la trabajas en una hoja de papel milimetrado. Usa tu creatividad e imaginación y recuerda que por ahora debes partir de una figura en el plano como un segmento, un cuadrado, un triángulo o en general cualquier polígono.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?

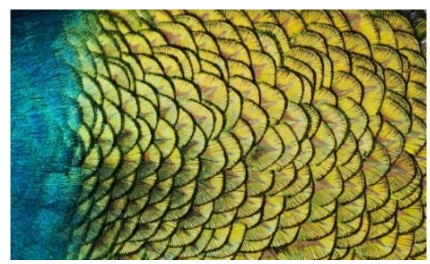


CONOCIENDO LA

META: Adquirir nociones de "figura Límite", "autosimilitud" y "copias maximales".

MATERIALES: lo primero que debes tener a la mano para trabajar este taller, es el taller 1 ya desarrollado, además necesitas lápiz, borrador y papel.

CONCEPTOS INICIALES



LA AUTOSIMILITUD: *A veces llamada autosemejanza, es la propiedad de un objeto (llamado objeto autosimilar) en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo, por ejemplo, cuando el todo tiene la misma forma que una o varias de sus partes. Muchos objetos del mundo real, como las costas marítimas, son estadísticamente autosimilares: partes de ella muestran las mismas propiedades estadísticas en diversas escalas. La autosimilitud es una propiedad de los fractales. Por ejemplo, muchos objetos del mundo real, como helechos, grietas por la sequía, las plumas de un pavo real, las costas marítimas, son estadísticamente autosimilares: partes de ella muestran las mismas propiedades estadísticas en diversas escalas.*

Tomado de: Wikipedia

AUTOSIMILITUD APROXIMADA: *También llamada cuasi-autosimilitud se encuentra frecuentemente en la naturaleza (autosimilitud natural). Por ejemplo, cuando la forma de la parte y la forma del todo presentan leves diferencias en la similitud. Generalmente solo se cumple dentro de una porción limitada de ese todo. Puede generarse artificialmente incorporando un factor de ruido aleatorio a la expresión de una autosimilitud exacta.*

Tomado de: Wikipedia

DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES:

1. En cada uno de los ejemplos trabajados en el taller 1, se parte de una figura con un patrón, que generan una secuencia o sucesión de figuras (paso 1, paso 2, paso 3...). Analiza y discuta con sus compañeros:

a. En la práctica, ¿Se pueden graficar todos los pasos de la secuencia?

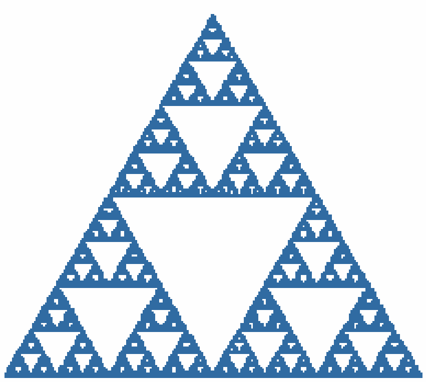
b. En la teoría, ¿Se pueden realizar todos los pasos de la secuencia?

En el ejemplo 1, la figura límite es precisamente lo que llamaremos el "triángulo de Sierpinski", en el ejemplo 2 la figura límite es "la curva de Koch", en el ejemplo 3 la figura límite es "la curva del copo de nieve" o "isla de Koch".

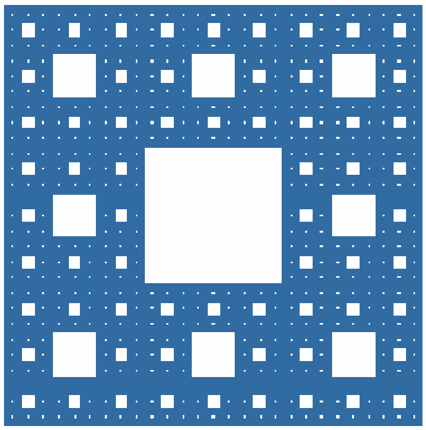
2. Basado en la observación anterior, nombra la figura de su fractal.

3. Consideremos nuevamente ejemplos clásicos de fractales; observa atentamente.

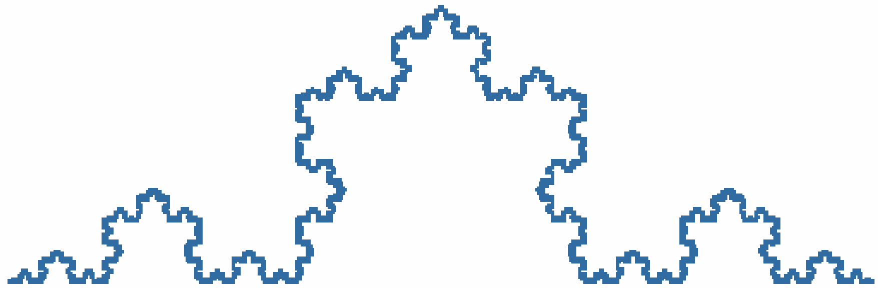
a. El triángulo de Sierpinski



b. La carpeta de Sierpinski



c. La curva de Koch



Analiza la siguiente información: el triángulo de Sierpinski está formado por muchas copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en distinta posición. Por satisfacer el triángulo de Sierpinski la característica descrita anteriormente, diremos que él es AUTOSIMILAR.

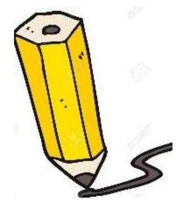
4. La característica que observa en el triángulo de Sierpinski, ¿se puede encontrar también en la curva de Koch y en la carpeta de Sierpinki? Explica tu respuesta.

Aunque en cada figura se pueden observar muchas copias reducidas de sí misma, encuentra las "copias más grandes". Las llamaremos "COPIAS MAXIMALES".

5. Analiza y responde: ¿De cuantas copias maximales están formados los siguientes fractales el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, la carpeta de Sierpinski y el fractal que construiste en el taller 1?

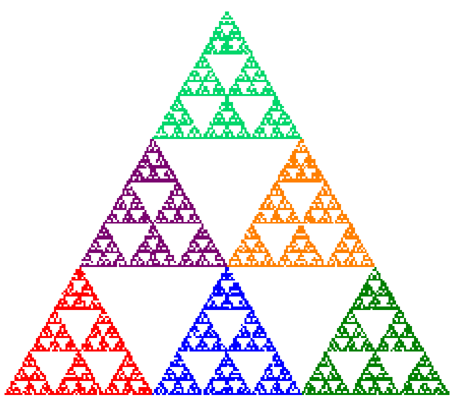
6. Escriba con sus propias palabras una definición de "Autosimilitud" o "figura autosimilar". Si necesita ayuda, recurre al taller 0 o a los conceptos iniciales de este taller y extrae de allí la idea principal.

7. Conteste: ¿Todos los objetos fractales son autosimilares?

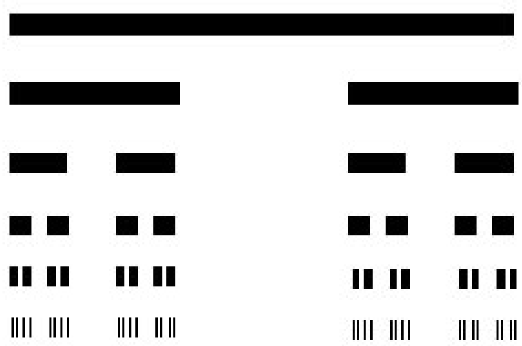


8. ¿Explica cuál cree que sería la razón para decir que las siguientes figuras presentan auto similitud?

a. Triángulo de Sierpinski



b. Conjunto de Cantor



c. Pentágono de Sierpinski

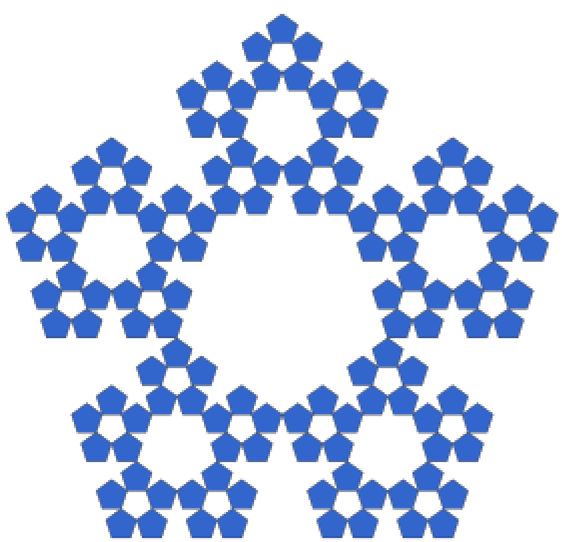
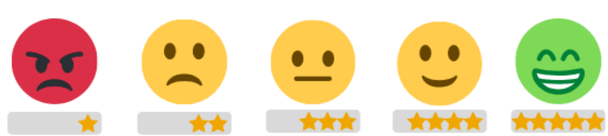


Ilustración 16. Pentágono de Sierpinski. Tomado de UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL. página 162.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



FRACTALES MANUALES

META: Aplica los conceptos de fractales a través del arte.

DURACIÓN: 2 HORAS

INTRODUCCIÓN:

Waclaw Sierpinski, *(1882- 1969) fue un importante matemático polaco que dedicó una parte de sus investigaciones al estudio de distintas formas de fractales*

El triángulo de Sierpinski se puede descomponer en tres figuras congruentes (Dos figuras geométricas son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación). Cada una de ellas con exactamente la mitad de tamaño de la original. Si doblamos el tamaño de una de las partes recuperamos el triángulo inicial. El triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosimilares de él mismo. Recordemos que autosimilitiud es la propiedad de un objeto (llamado objeto autosimilar) en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo.

Se debe aclarar que se puede construir a partir de cualquier triángulo (para los ejemplos se utilizan triángulos equiláteros, dado que las construcciones son más bellas), y que no hay un único método para hacerlo; ya que como en la mayoría de los fractales, existen varias maneras de obtener la misma figura.

Tomado de http://sabrinamatematica.blogspot.com/2013/04/triangulo-de-sierpinski.html#:~:text=El%20matem%C3%A1tico%20Waclaw%20Sierpinski%2C%20fue,una%20de%20las%20m%C3%A1s%20conocidas.

PARTE 1

Tiempo: 1 hora

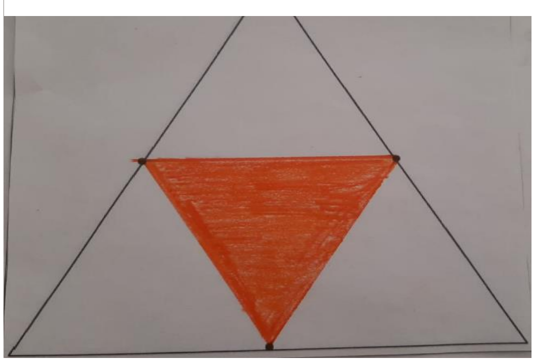
Materiales

- Marcadores
- crayones o lápices de colores
- Tijeras
- Regla y transportador
- Hoja de trabajo triangular (plantilla ver anexo)

PASOS:

A. Oriente la plantilla para que el triángulo apunte hacia arriba. Los puntos muestran los puntos medios de los bordes, a medio camino entre las esquinas. Conecte los puntos como se muestra a continuación para formar un nuevo triángulo, apuntando hacia abajo. Coloréalo.

Figura 1 Fuente: Bedoya, Sánchez y Pascuas, 2020.



B. Ahora quedan tres triángulos blancos. Encontrar los puntos medios de cada uno de estos tres triángulos, conectarlos y colorea los triángulos que apuntan hacia abajo resultantes.

C. Cada uno de los tres triángulos ahora se convierte en tres triángulos más pequeños, dejando nueve triángulos blancos pequeños.
Conectar los puntos medios de cada uno de los nueve triángulos blancos para formar 27 triángulos más pequeños que apuntan hacia abajo. Colorear los de adentro.

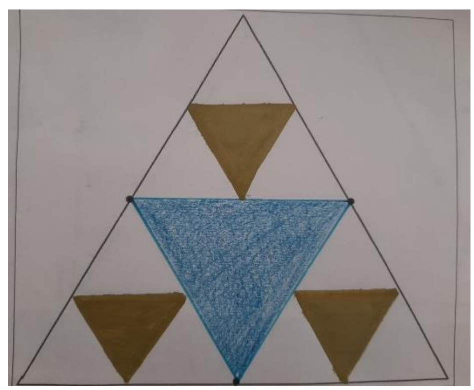
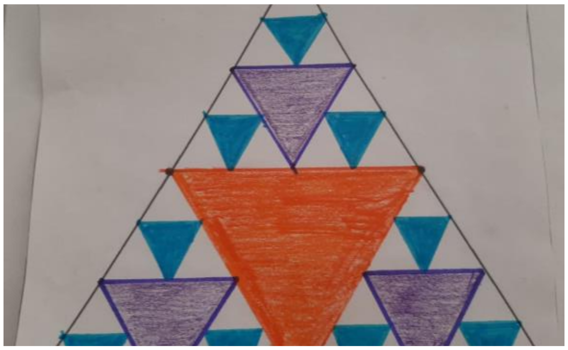
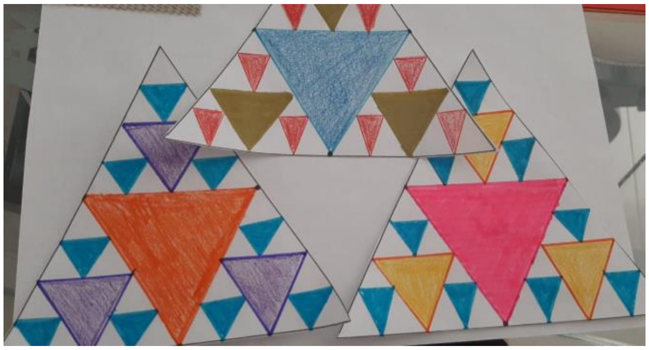


Figura 2 Fuente: Bedoya, Sánchez y Pascuas, 2020.

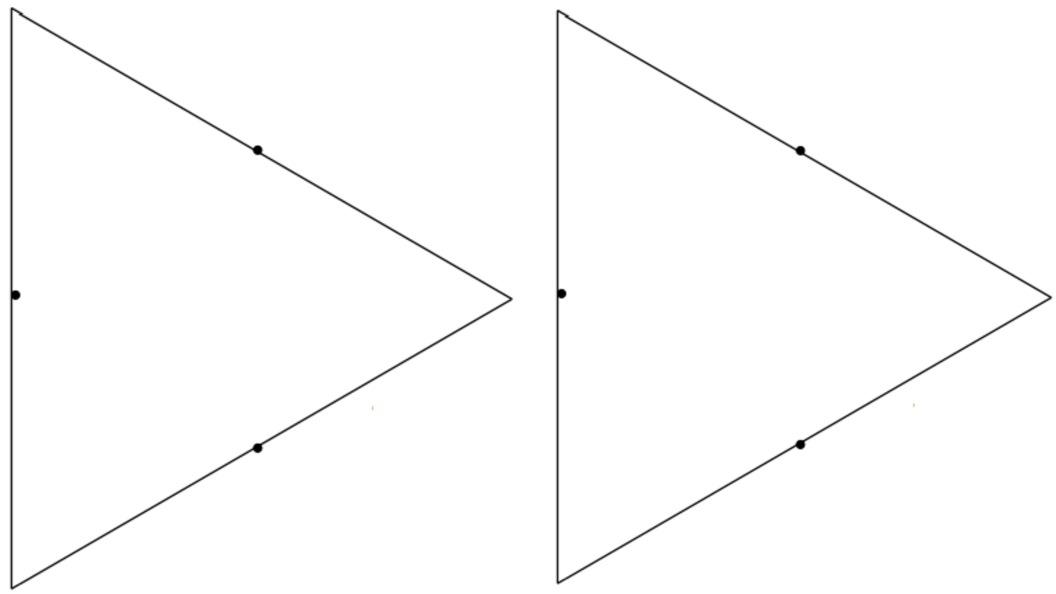


Fuente: Bedoya, Sánchez y Pascuas, 2020.

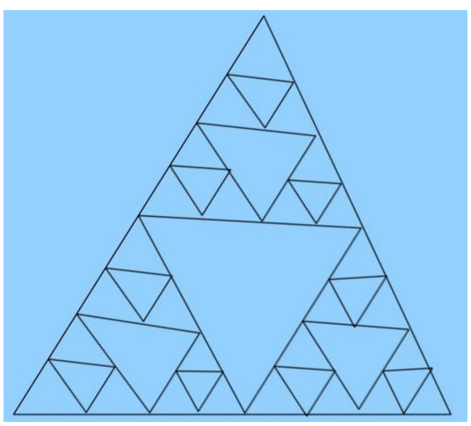
D. Repetir el proceso con las plantillas sobrantes (buscar en los anexos)



Fuente: Bedoya, Sánchez y Pascuas, 2020.



E. Cuando termines, corta los triángulos grandes. Luego, une tu triángulo fractal con otros dos triángulos fractales para formar un triángulo más grande.



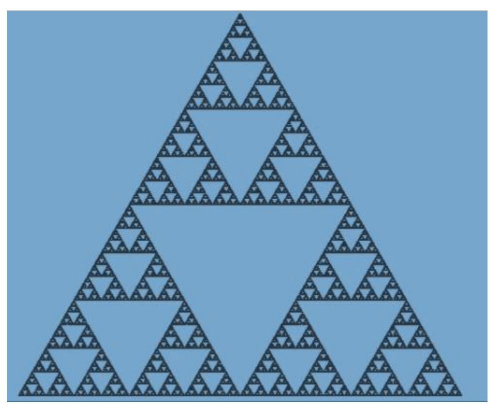
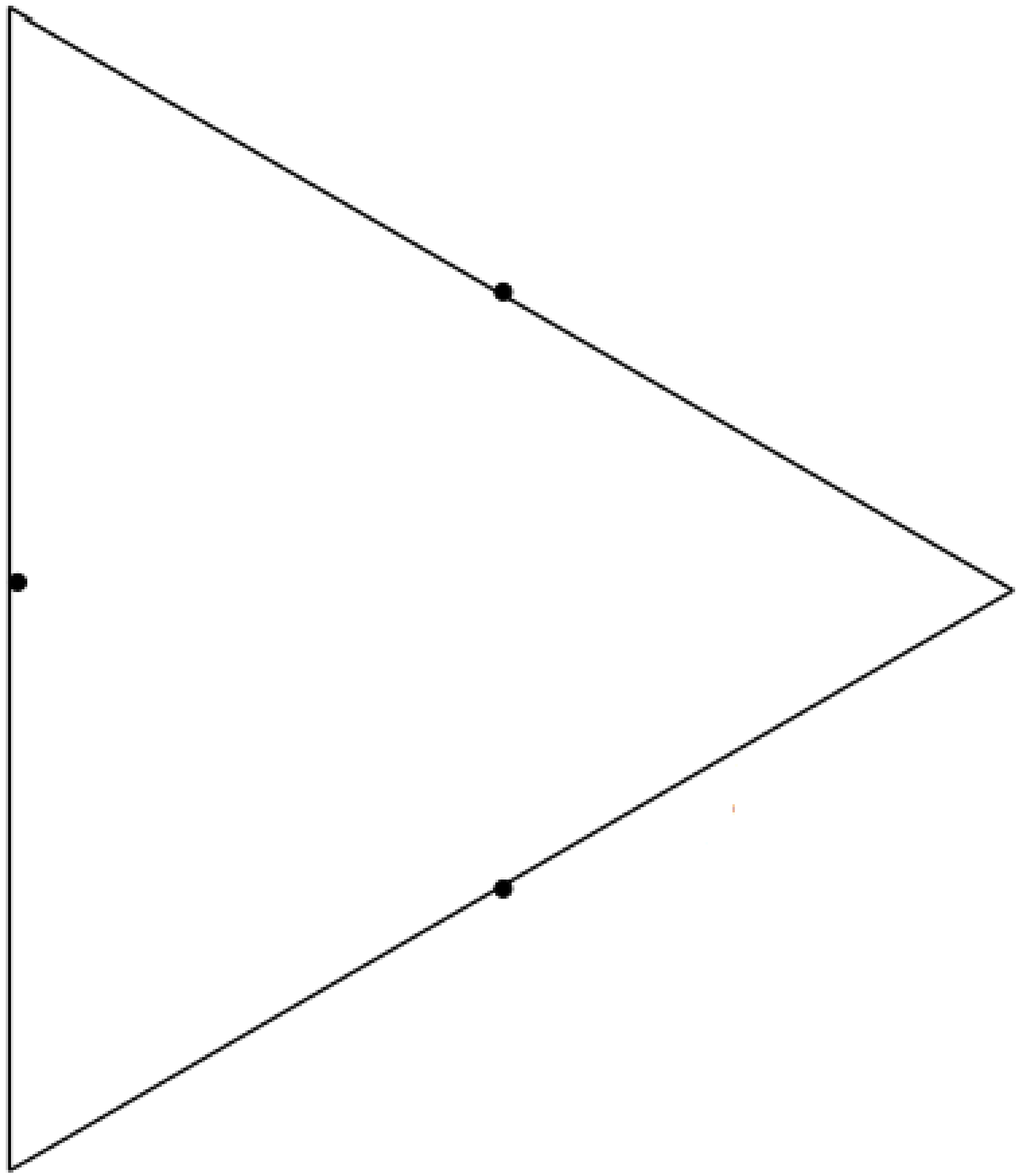


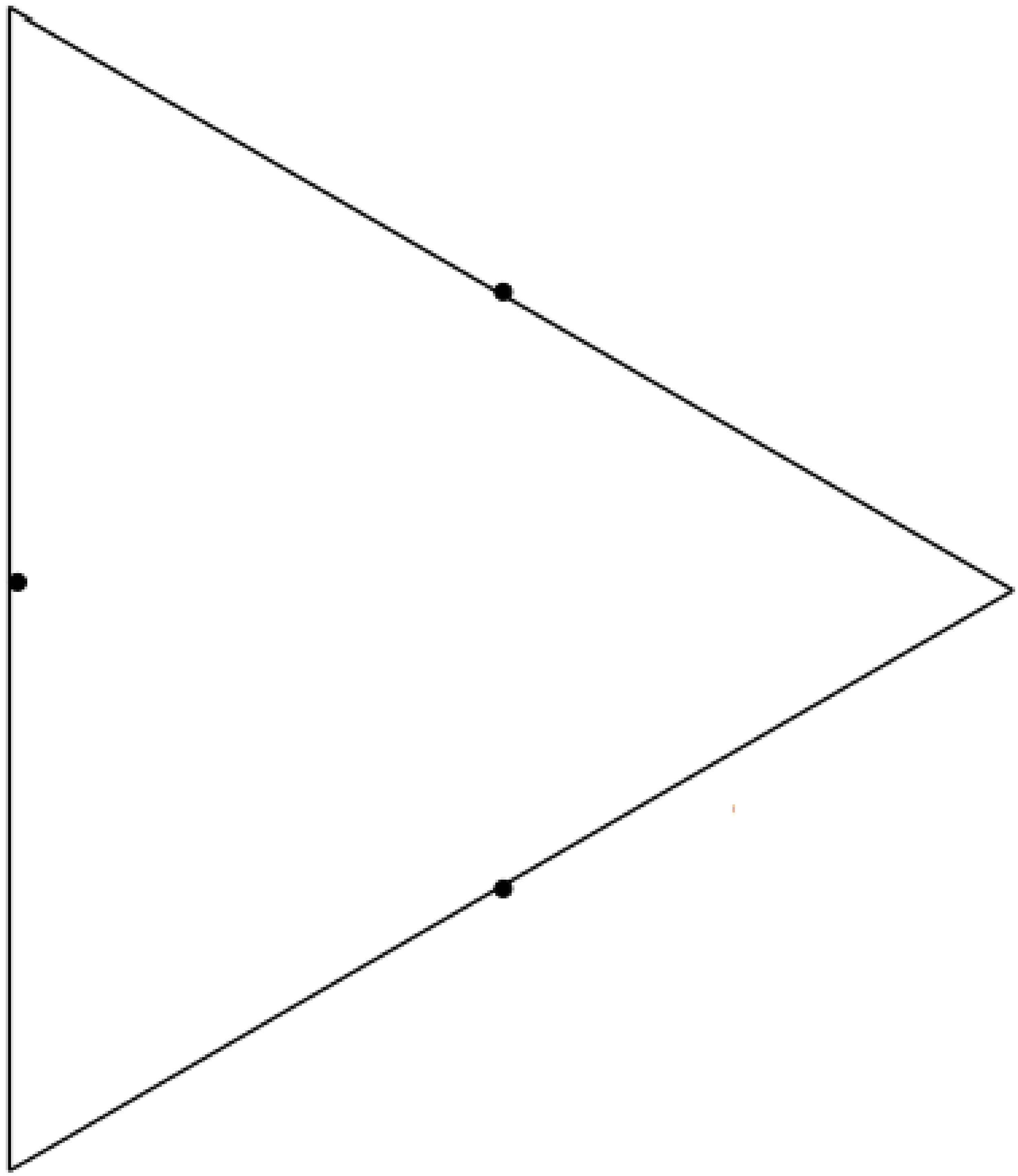
Ilustración 18. El Triángulo de Sierpinski. Tomado de https://sites.google.com/site/elperroazulscratch/fractales/triangulo-de-sierpinski-2

ANEXO

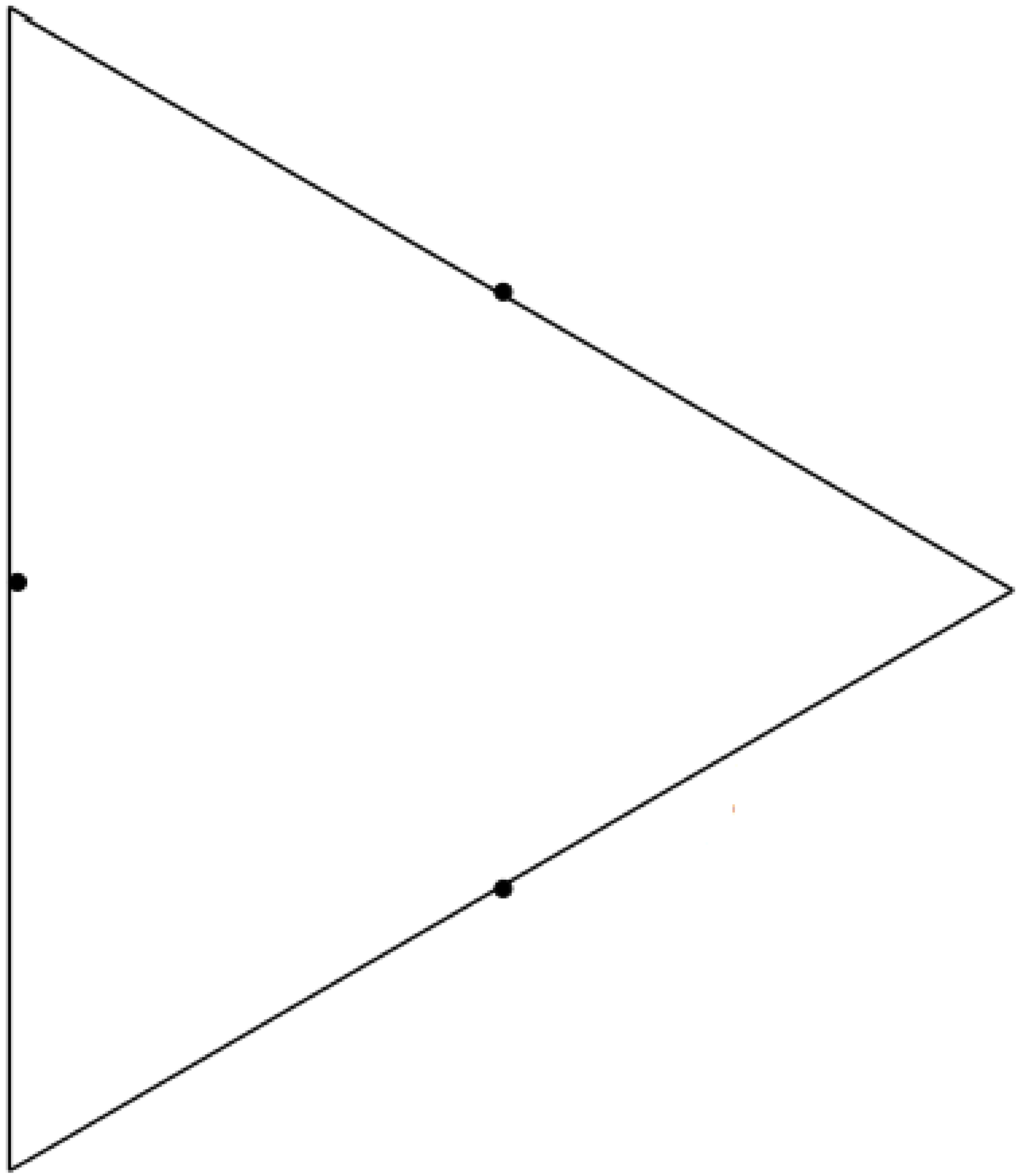
PLANTILLA 1



PLANTILLA 2



Plantilla 3



Parte 2

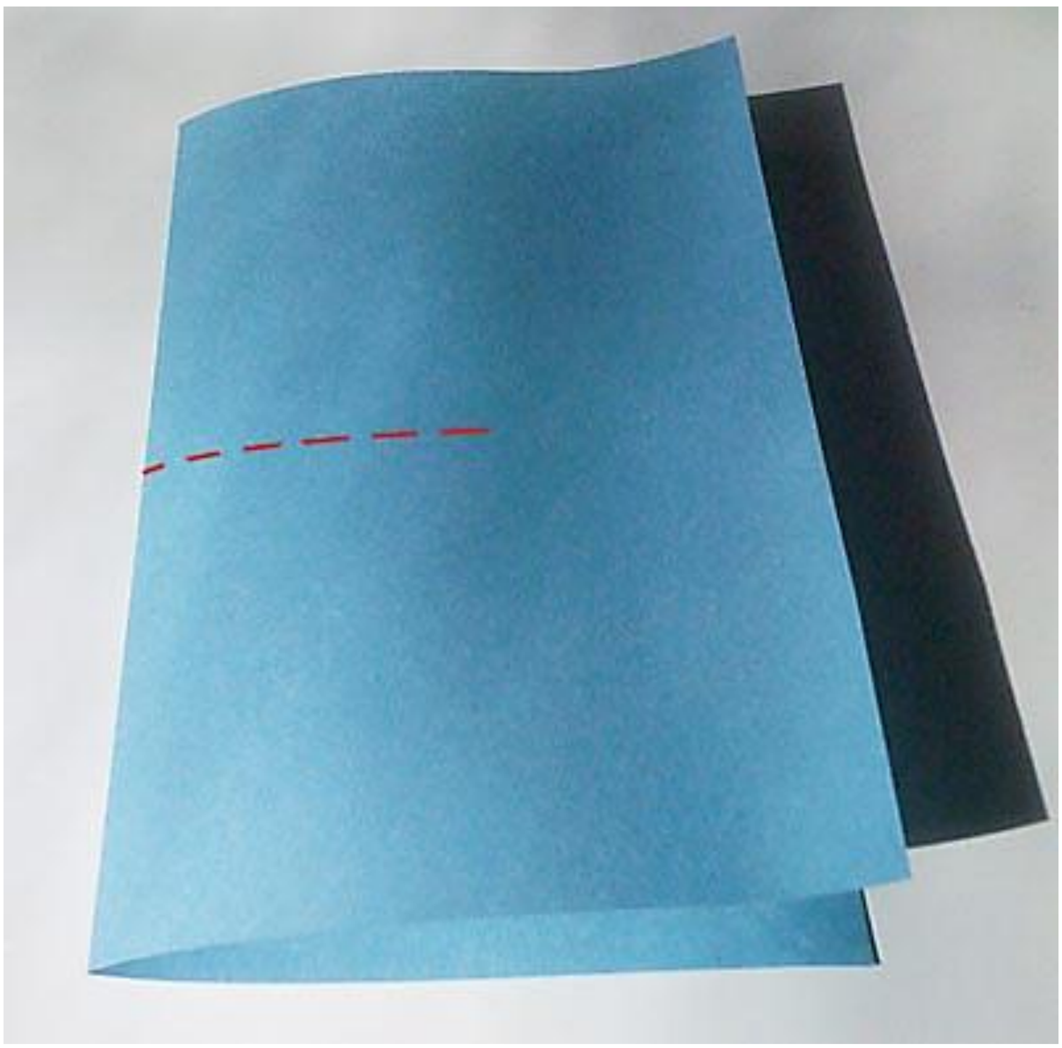
Tiempo: 1 hora

Materiales

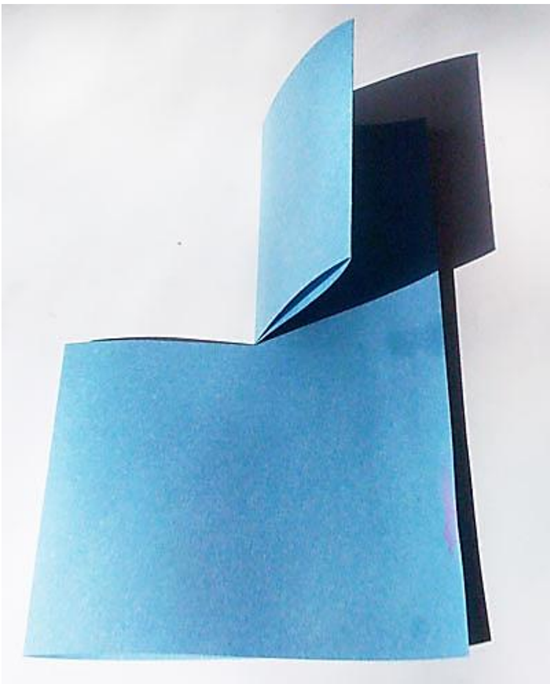
- Papel blanco de 8.5 ″ x 11
- Cartulina de 8.5 ″ x 11 ″ en color contrastante
- Tijeras
- Barra de pegamento
- Regla en centímetros
- Hoja de trabajo de tarjeta recortada

PASOS:

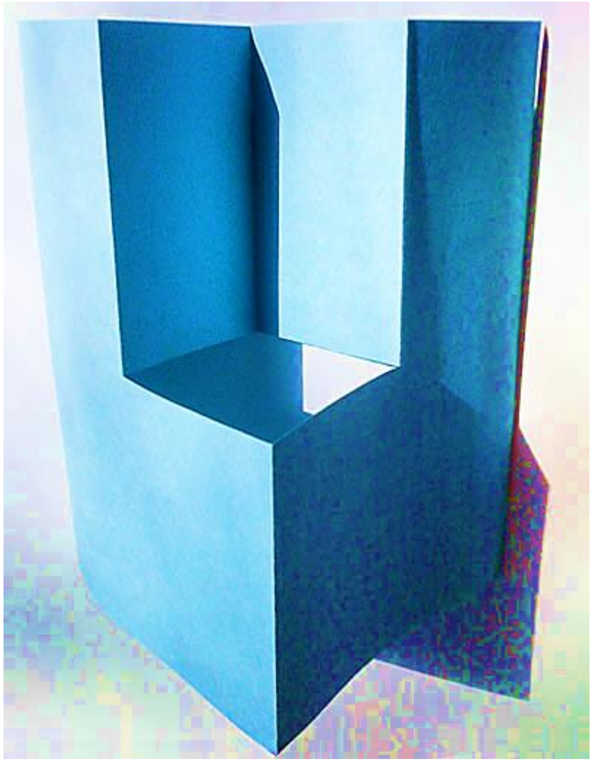
A. Tomar una hoja de papel y dóblela por la mitad, para que parezca un libro.



B. Corte a través del borde doblado a lo largo de la línea punteada arriba. El corte debe comenzar a la mitad del pliegue y avanzar a la derecha a lo largo del papel doblado. Ahora doble más de la mitad y arrugue, como se muestra.

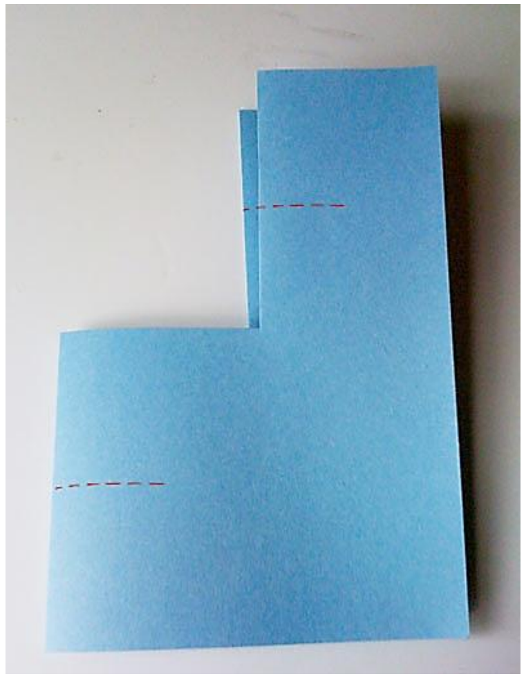


C. El siguiente paso es un poco complicado pero crítico. Abra la solapa doblada y dóblela *dentro de* sí misma. Deberías terminar con tu papel así:

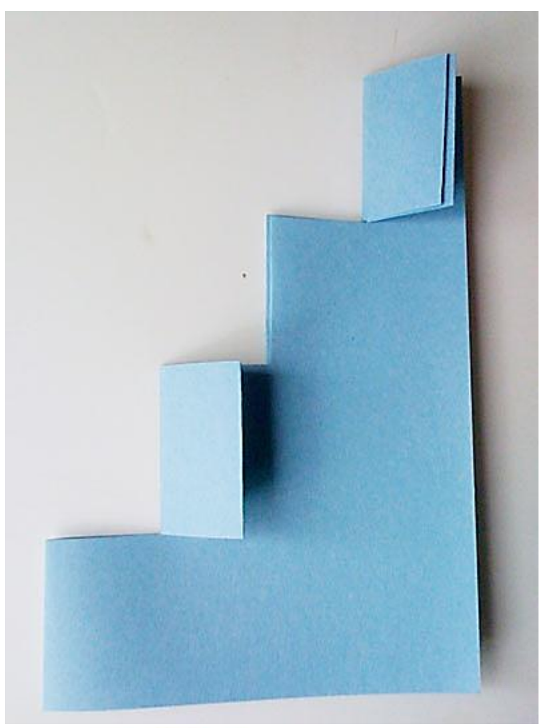


D. Ahora ha completado el paso básico para crear el recorte fractal, y todo lo que tiene que hacer ahora es seguir repitiendo este proceso una y otra vez.

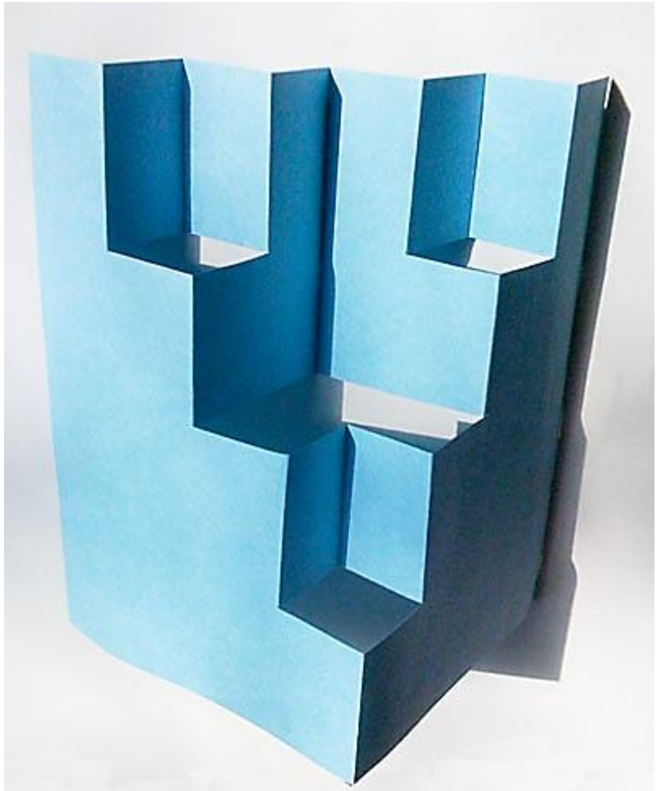
E. Ahora haga dos cortes, a la mitad de cada uno de los bordes doblados. Los cortes serán la mitad del largo, y nuevamente los cortes deben estar a mitad de camino hacia arriba y hacia abajo en cada borde y solo a la mitad de la pieza. Tenga cuidado de no cortar demasiado.



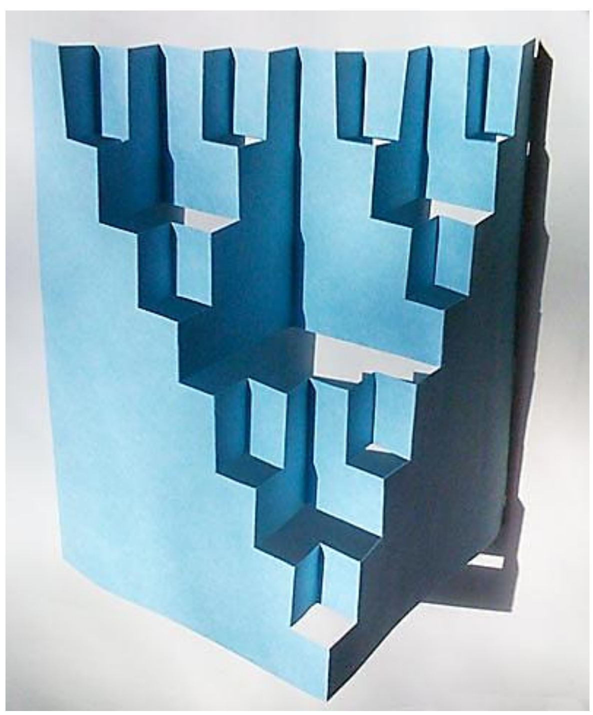
F. Una vez que hayas hecho estos cortes, dobla y pliega las solapas. ¿Cómo sabes cuáles doblar? Quieres terminar con algo que parece una escalera.



G. Después de doblar las aletas, debe recordar abrirlas y doblarlas dentro de sí mismas.

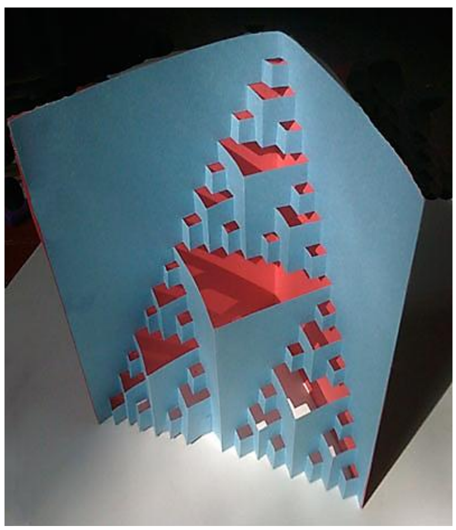


H. Así es como debería verse su trabajo ahora. Repita el mismo corte, plegado e inversión, pero esta vez necesita hacer cuatro cortes. Después de doblar y voltear las aletas dentro de sí mismas, terminarás con esto:



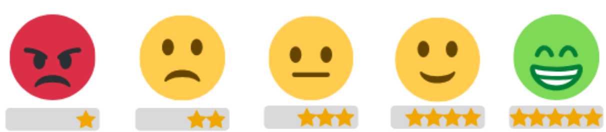
I. Si lo desea, puede repetir este proceso una vez más, haciendo ocho cortes. Después de cortar, doblar e invertir, terminas con la etapa final. Después de este punto, hay demasiadas capas para cortar fácilmente.

J. Finalmente, puedes convertir este fractal en una tarjeta emergente. Dobla tu otro pedazo de papel por la mitad. Aplique pegamento a las partes sólidas del recorte fractal y sándwich dentro del papel plegado sólido.



¡Disfruta de tu arte fractal!

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



FRACTALES Y SUS APLICACIONES

META: Identifica fractales y alguna de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

DURACIÓN: 40 minutos

MATERIALES: Para el desarrollo de este taller solo necesitas la presente un dispositivo electrónico, fotocopia y realizar la lectura.

Las aplicaciones de los fractales son múltiples en diversas disciplinas, debido a la necesidad de un tipo de matemática necesaria para modelar y estudiar formas inusuales en la naturaleza, que por medio de otras geometrías estaban siendo limitadas.

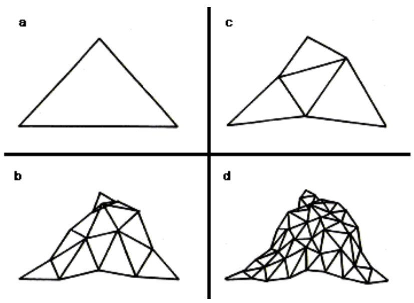
Los fractales tienen diversas aplicaciones en la vida real. Por ejemplo, en el arte La imagen creada por un fractal es compleja pero sorprendente, y ha intrigado a los artistas durante mucho tiempo. De hecho, el arte fractal se considera un verdadero arte. Artistas como Jackson Pollock y Max Ernst, han usado patrones fractales para crear formas aparentemente caóticas pero definidas. Además, algunos artistas se inspiran en imágenes fractales al crear sus propias formas de arte. Inclusive, las imágenes fractales se han utilizado para crear efectos especiales. Utilizados en programas como Star Trek y Star Wars y por estudios como Pixar en sus largometrajes y cortometrajes, para recrear paisajes, y aspectos físicos que de otra manera serían imposibles con la tecnología convencional. Tomado de (Bedoya, Pascuas y Sanchez ;2020)

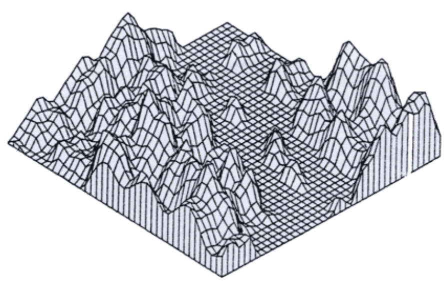
Fuente: https://eloutput.com/cine-series/reportajes/saga-star-wars-peliculas-orden/

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/La_gran_ola_de_Kanagawa

Ilustración 8 Blue poles', de Jackson Pollock (1952). Recuperado de https://elpais.com/elpais/2019/05/08/ciencia/1557309166_840974.html

Por otro lado, los fractales son una parte muy importante en los estudios biológicos. Muchos objetos en la naturaleza están compuestos de figuras complejas que de otro modo no podrían definirse mediante formas euclidianas. La mayoría de los objetos naturales, como las nubes y las estructuras orgánicas, guardan estructuras fractales. Se han detectado este tipo de patrones en las montañas, las coníferas, los sauces, corales marinas, etc. Se puede observar conductas fractales en la propagación de un incendio forestal en una plantación ordenada de árboles y la trayectoria de las nubes de la lluvia ácida. Como tal, los fractales pueden usarse para capturar imágenes de estas estructuras complejas. Además, se utilizan para predecir o analizar diversos procesos o fenómenos biológicos, como el patrón de crecimiento de las bacterias, el patrón de situaciones como las dendritas nerviosas, Las redes de vasos sanguíneos, redes nerviosas y los conductos billares. Tomado de (Bedoya, Pascuas y Sanchez ;2020)





fuente: http://camurrieta.blogspot.com/2015/10/fractal-que-se-refiere.html

Dentro de la medicina, esta ciencia de la complejidad ha sido utilizada para el diagnóstico de enfermedades. El Grupo Insight de Investigación de la Universidad Militar Nueva Granada (2014), en Bogotá, Colombia, desarrollo un algoritmo de diagnóstico basado en geometría fractal para evaluar células de cuello uterino, utilizando el concepto de Armonía Matemática Intrínseca (AMI®) y variedad celular, proporcionando una solución social en el país. De forma similar Científicos austriacos han hecho avances en la detección de tumores a través de fractales pues aparentemente evolucionan de manera similar. Siendo un estudio de gran importancia para profundizar en el conocimiento de la enfermedad, la formulación de diagnósticos y en la elaboración de terapias.

Por otro lado, en la Universidad de Falavoro en la Argentina, el Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ingeniería, han utilizado técnicas fractales para crear sistemas de detección de enfermedades cardiovasculares.

.

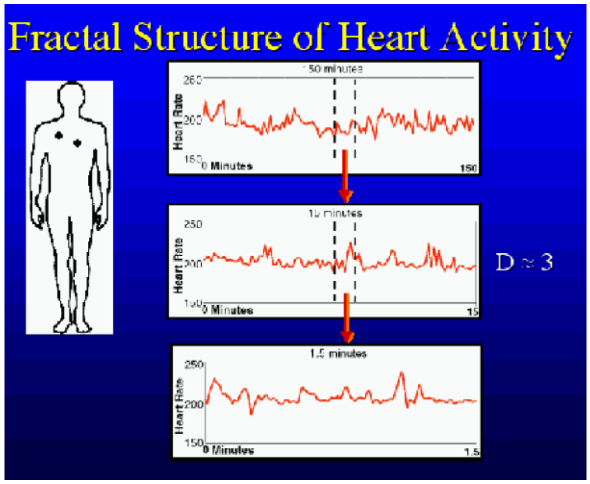


Ilustración 9 Estructura fractal de la actividad cardiaca. (Editado a partir de Al-Majdalawi, 2005, p. 32).

E*n la tecnología de las comunicaciones se utiliza la técnica fractal, como una técnica de comprensión de datos, la cual consiste en optimizar los recursos, implicando menores espacios de almacenamiento y mayor velocidad.*

En los sistemas móviles de comunicaciones se han venido utilizando antenas en forma de fractal que reducen en gran medida el tamaño y el peso de estas. Los beneficios dependen del fractal aplicado, la frecuencia de interés, etc. En general, las partes fractales producen 'carga fractal' y hacen que la antena sea más pequeña para una frecuencia de uso dada. Tomado de (Bedoya, Pascuas y Sanchez ;2020)

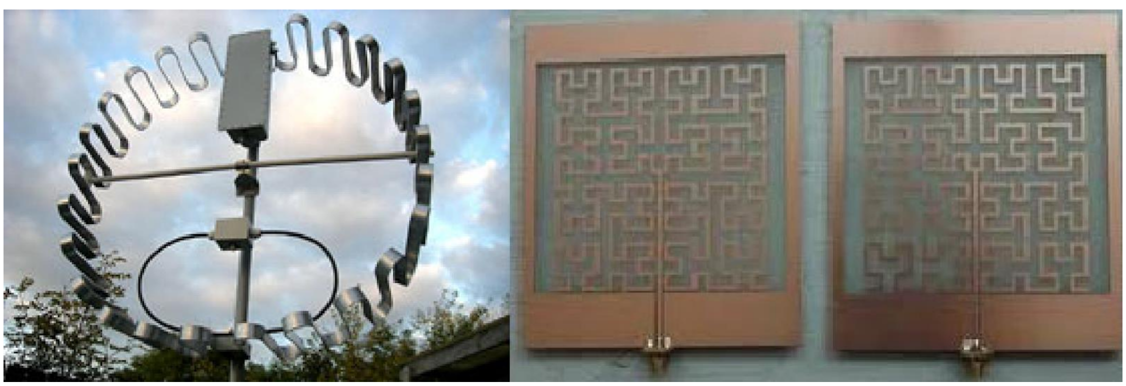


Ilustración10 Antenas fractales. (Edición de originales recuperados de: https://www.ure.es/foros/tecnico/antena-looppara-80-160-mt/)

En física se conocen aplicaciones en el modelamiento de la distribución en el universo de algunos astros (cometas, meteoritos, asteroides, etc.); la representación de la interacción gravitacional y electromagnética que hay entre los cuerpos en el universo; el modelamiento de la curvatura del espacio-tiempo predicha de Albert Einstein y, en general, avances en el conocimiento de lo que ocurre en el mundo cuántico.

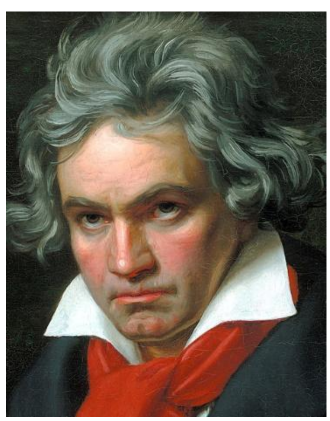
En Geología Se utilizan técnicas de fractales en la geología para localizar con mayor precisión yacimientos minerales de difícil distribución, microestructuras y redes de fractura. También se adelantan avances, simulando patrones fractales, en áreas problemáticas y desconcertantes como el estudio de fallas, fenómenos de erosión, morfología fluvial (deltas, canales, etc.), hidrología subterránea, sismo-tectónica y topografía terrestre. Tomado de (Bedoya, Pascuas y Sanchez ;2020)

FRACTALIDAD EN LA MÚSICA CLÁSICA:

Bach: La coral situada al final de “Kunst der Fuge” (1749) de Johann Sebastian Bach es un ejemplo de pieza autosemejante. En ella los mismos motivos son repetidos una y otra vez con distintas variaciones dentro de una región mayor de la pieza. Así, por ejemplo, varias voces repiten al doble de velocidad la melodía de la voz principal (un motivo se repite por disminución a escalas menores).

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Johann_Sebastian_Bach.jpg

Beethoven: Hay varios trabajos que analizan la manifestación de estructuras fractaliformes en composiciones clásicas donde se estudia la analogía entre la estructura del conjunto de Cantor y la primera “Ecossaisen” de Beethoven, así como entre el triángulo de Sierpinski y el tercer movimiento de la sonata para piano número 15, opus 28, también de Beethoven.



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Ludwig_van_Beethoven

Joseph Schillinger: En la década de los años veinte y treinta, este músico teórico ruso, desarrolló un detallado sistema de composición musical basado en principios científicos. La obra de Schillinger ha influido enormemente en la música del siglo XX, especialmente en compositores como George Gershwin, Glenn Miller o Benny Goodman, entre otros. La base *del sistema de Schillinger es geométrica y se fundamenta en las relaciones de periodicidad y repetición de las fractales. Schillinger encontró distintas formas de proyectar estas relaciones en el ritmo, pero también en áreas mucho menos obvias como el tono, la escala, los acordes, la progresión armónica e incluso, fue capaz de expresar emociones en las composiciones musicales fractales.* Tomado de https://nanopdf.com/download/fractales-musicalespdf_pdf

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Schillinger

¿CÓMO SE CREAN LOS SONIDOS FRACTALES?

El sonido de las series numéricas: Una forma sencilla de crear una melodía es partir de una secuencia de números enteros positivos e ir asignando a cada uno una determinada nota musical, por ejemplo, do para el 1, re para el 2, etc. Para obtener un buen resultado es necesario que las notas generadas no pertenezcan a octavas muy alejadas. Un ejemplo sería, la secuencia de Morse-Thue, que se genera recursivamente comenzando con un 0 y duplicando en cada paso la longitud de la secuencia al añadirle la secuencia complementaria a la actual: 0, 01, 0110, … Tomado de https://nanopdf.com/download/fractales-musicalespdf_pdf

Fuente: https://docplayer.es/52005278-Las-fractales-en-la-musica.html

Teniendo las aplicaciones mencionadas dibuje o retrate por lo menos dos fractales que encuentre en su entorno (Casa, finca, parque).

COMPRUEBA LO QUE APRENDISTE

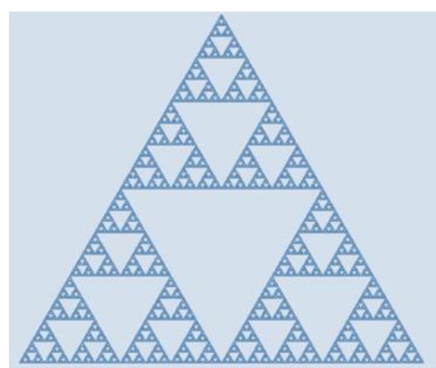
1. Los fractales se caracterizan por:
   A. Ser siempre autosemejantes a cualquier escala.
   B. La complejidad el carácter no recursivo que lo describe.
   C. Reproducirse a sí mismos.
   D. Ser autosemejantes con limitación de escalas

2. En la naturaleza los objetos fractales suelen aparecer:
   A. Solamente en las costas, especialmente en costa británica.
   B. Solamente en las plantas, especialmente en los helechos.
   C. Como fenómenos extraños y esporádicos.
   D. En relación con dos circunstancias o situaciones: Frontera y árbol. .

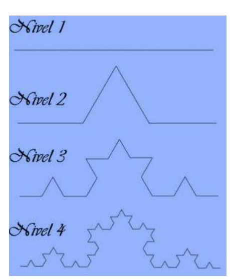
3. Los fractales se utilizan:
   A. Solamente en el campo de las matemáticas.
   B. Solamente en los campos científicos de investigación avanzada.
   C. En todos los campos de las ciencias, en el arte, en la biología, la ingeniería, la meteorología, la economía, la compresión de imágenes ...
   D. Específicamente para estudiar el caos.

4. Los fractales los podemos encontrar de una forma orgánica en:
   A. Obras de arte renacentistas
   B. Libros de geometría
   C. La naturaleza
   D. Códigos de programación

5. El fractal que se muestra es:



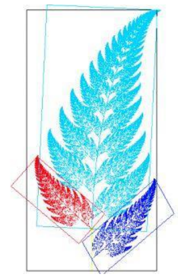
   A. El triángulo de Sierpinski
   B. El copo de nieve de Koch
   C. La alfombra de Sierpinski
   D. La función de Weierstrass



2. El nombre del fractal mostrado es
   A. Curva de Koch
   B. Isla de Koch
   C. Conjunto de Cantor
   D. Línea quebrada

3. Característica de los fractales referida a que una parte de él, se parece a toda la figura

   A. Infinitud
   B. Finitud
   C. Igualdad
   D. Autosimilaridad



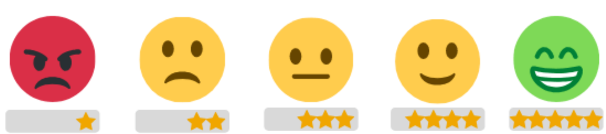
4. Teóricamente hablando, para que se genere el fractal, el proceso de generación debe realizarse

   A. Pocas veces
   B. Infinitas veces
   C. Dos veces
   D. Varias veces

5. Realizar el dibujo de un fractal natural

6. ¿Qué concepto de la fractalidad tienen en común las galaxias, las nubes, tu sistema nervioso, las cordilleras y las costas?

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



UN PASEO POR LA HUERTA

META: Reconocer las nociones y las relaciones entre las matemáticas y la naturaleza

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES:

La naturaleza muestra múltiples ejemplos de aproximación a los conceptos matemáticos, aunque nunca sean exactos, son innumerables los ejemplos que revelan las directrices de la arquitectura natural. Es por esta razón, que ustedes como observadores naturales deben comenzar a construir el conocimiento matemático a partir de la observación de la naturaleza. Proceso que ha llevado al hombre a construir grandes cosas, tales como: las estructuras, el arte, la aeronáutica, las calles, el velcro, los acueductos… en fin, una serie de inventos que se derivaron del estudio, observación y transformación de la naturaleza. Es sólo pensar en las sabias palabras del genio Galileo Galilei quien afirmaba:

> *La Filosofía está escrita en ese gran libro que tenemos ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se puede entender la lengua, a conocer los caracteres con que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender una sólo palabra; sin ellos es como girar vanamente en un obscuro laberinto. (1981, p. 62-63).*

La situación que deben entonces enfrentar es la observación detallada del entorno ofrecido por el sendero ecológico y escoger algunas plantas con las cuales puedan reconstruir conocimiento matemático.

MATERIALES: Una cámara fotográfica o cualquier dispositivo con cámara y colores.

DURACIÓN: 1 hora y media.

ACTIVIDADES A REALIZAR

1. Debe dar un paseo por un sitio donde existan diferentes plantas y escoger la planta que más le llame la atención y capturar la imagen. Además, la debe dibujar y colorear, en el siguiente recuadro.

2. Identifique y describa todo lo relacionado con su planta. Considere todas las características físicas(morfología) que esta tiene.

3. Debe formular 4 o más preguntas sobre esa planta y cuya respuesta pueda ser planteada a través de las matemáticas. ***Sugerencias: Utilicen sus experiencia y conocimientos previos.***

4. Explique, de acuerdo con sus propios conocimientos, ¿Cómo se puede relacionar las matemáticas con las plantas?

5. ¿Cómo les pareció esta primera experiencia?, aporten sugerencias para mejorarla.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?

SOMOS INVESTIGADORES

META: Desarrollar competencias investigativas por medio del método científico.

¿CÓMO PLANTEAR PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN?

Tomado de escuela de Ciencias Humanas Guía 50a / 22.07.2003 / 1ª versión

¿Qué hay que hacer? Einstein decía: “hacer nuevas preguntas o considerar anteriores desde otro punto de vista requiere creatividad”. La creatividad, empero, no es sólo un don natural: es el fruto del trabajo y la disciplina. Como en todo trabajo creativo, para plantear preguntas no hay fórmulas de validez universal; sin embargo, hay estrategias que Ud. puede probar:

1. El hábito del por qué. Si su novio o novia le dice: “ya no más”, inmediatamente Ud. le pregunta: ¿por qué? La realidad es como una novia o novio caprichoso; por alguna razón, decidió que las manzanas no caen para arriba y que sólo hay dos sexos y no cinco. ¿Por qué? Haga de la realidad una especie de compañero sentimental; preocúpese por sus caprichos, desarrolle el hábito de preguntarle porqué. Un día sin porqués es un día perdido; una asignatura sin porqués es una asignatura perdida.

2. La exploración del tema. En esta fase Ud. efectúa el “reconocimiento del terreno”; es su oportunidad para explorar de una manera amplia el tema de interés. La exploración se basa en el estudio sistemático de los textos escogidos para tal fin, pero no excluye otro tipo de fuentes: tablas estadísticas, medios masivos, bases de datos, estudios de caso, etc.

3. La identificación del problema. Una vez haya precisado el porqué, es hora de plantear el problema que va a investigar. Ya la fase exploratoria debe haberle suscitado inquietudes. Piense ahora en el asunto, eche mano de todo lo que sabe y pregúntese: ¿Qué vacíos hay en las explicaciones contenidas en los textos? ¿Qué argumentos no son convincentes y por qué? ¿Qué aspecto del tema no es profundizado en ningún texto? ¿Qué planteamientos importantes no han sido desarrollados por los autores? Estas y otras preguntas análogas pueden orientarlo. Tómese su tiempo; reflexione, examine el asunto desde distintos ángulos, tome apuntes y deje que sus ideas vayan madurando. Una vez tenga el problema, revíselo: podría tratarse de un falso problema. A esta categoría suelen pertenecer los problemas centrados en cuestiones terminológicas (¿El sur queda abajo o arriba?) y los problemas sin solución (Si Dios es la causa de Todo, ¿qué causó a Dios?).

4. La formulación de la pregunta. Ahora que tiene claro su problema de investigación, formule la pregunta de la manera más concisa posible. Fíjese que la pregunta sintetice el núcleo del problema y que sea comprensible para el lector. Verifique si la pregunta es viable, es decir, si puede ser investigada en un lapso razonable.

Formule la pregunta de tal modo que la respuesta no sea un simple sí o no. No pregunte, por ejemplo: “¿Es posible establecer el impacto de la violencia en el sector agrícola desde 1980?”. Pregunte: “¿Cuál ha sido el impacto de la violencia en el sector agrícola desde 1980?” Evite formular preguntas en forma de dilemas del tipo “¿El neoliberalismo aumenta la pobreza o la disminuye?” Decida qué quiere preguntar. Tampoco pregunte por estados mentales de otras personas: “¿Por qué Tolomeo pensó que la tierra está en el centro del universo?” Por más que Ud. se esfuerce, nunca podrá averiguarlo.

Evite plantear preguntas sobre estados futuros de cosas: “¿Puede la biotecnología eliminar los problemas de salud pública en el próximo siglo?” El futuro es, por definición, inaccesible a la investigación empírica. Absténgase de formular preguntas totalizantes: “¿Cuál es el sentido de la existencia?” “¿Cómo funciona el universo y sus alrededores?”; o preguntas disciplinares clásicas: “¿Qué es la filosofía?” “¿Cuál es el origen de la sociedad?” Recuerde que su capacidad de trabajo tiene un límite y que preguntas como éstas son muy difíciles de resolver de manera plausible en una investigación.

DURACIÓN: 1 hora y media.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD:

Teniendo como la base la lectura anterior, debe formular una pregunta bien definida que permita relacionar las matemáticas con su planta seleccionada. Primero, deberá conocer el trabajo de los compañeros, con el fin de tener mayores ideas y socializar cada aporte dado. Esta socialización se realizará durante 30 minutos por medio de WhatsApp y una video conferencia.

A continuación, se muestran algunas preguntas que les permiten tomar como referencia o punto de partida para elaborar la de ustedes, deben responder estas preguntas teniendo en cuenta la planta seleccionada.

- ✓ ¿Qué concepto se le aplica al crecimiento de ésta planta?
- ✓ ¿Cómo es la forma de sus pétalos, hojas?
- ✓ ¿los pétalos u hojas, crecen de forma separada, juntas, están distantes?
- ✓ ¿Se puede encontrar matemáticas en esta planta?
- ✓ ¿Con qué ángulo está situada la planta tomando como base el suelo?
- ✓ ¿Cuánto cree que es el promedio semanal de crecimiento ésta planta o al mes?
- ✓ ¿Cuál es el ángulo de la hoja al tallo de la planta?
- ✓ ¿Qué procedimientos se le aplicaría para explicar el proceso de crecimiento?
- ✓ ¿Bajo qué condiciones ambientales vive la planta?(temperatura, terreno, altura, etc)
- ✓ ¿Qué debemos hacer para determinar el tamaño de la planta?

- ¿Cuántas flores puede dar esta planta, si la planta genera flores (angioesperma)?
- ¿Hasta qué tamaño puede crecer?
- ¿Qué forma geométrica tiene las hojas y/o flores de la planta?
- ¿Cuántas hojas tiene, y en que parte de la planta se encuentran?

PROCEDIMIENTO

1. ¿Cree que las preguntas elaboradas proporcionadas cumplen con el tipo de preguntas que pide el texto? Sí, no, por qué

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

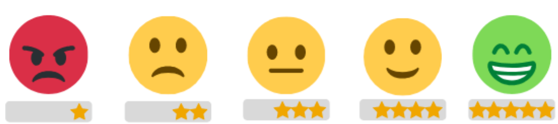
2. Realice una pregunta sobre la relación de las matemáticas y su planta con el conector interrogativo: por qué. Si desean y pueden ir al lugar y volver a observar su planta.

3. Indagar sobre varios temas o conceptos de la geometría que puedan ser empleados para estudiar su planta, cópielos y mencione por qué ayudarían a su estudio.

4. Identifique un problema relacionado con la planta seleccionada:

5. Formule la pregunta. Teniendo en cuenta el problema identificado en el ítem anterior.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



PLANTAS Y FRACTALES

META: Plantea las relaciones entre las plantas y los fractales.

Retome sobre su pregunta y replantee la pregunta definitiva que oriente su trabajo de investigación:

Preguntas de investigación orientadoras, que deben ser resueltas:

1. ¿Qué conceptos de los fractales, vistos anteriormente, se pueden relacionar con el crecimiento natural y desarrollo de la planta y sus hojas?

2. ¿Cómo se puede determinar el crecimiento de la planta seleccionada, para ello utilice los conceptos de fractales vistos?

3. ¿Qué patrón crees que sigue el crecimiento de la planta seleccionada(dirección, divisiones de las ramas) ?

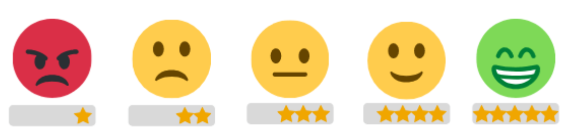
4. ¿Cómo podemos identificar la forma geométrica de las hojas de la planta escogida?

5. ¿Cómo podemos hallar el área de una de las hojas en esta planta?

6. ¿Cómo se puede relacionar la geometría y el proceso de crecimiento y maduración de la planta escogida?

7. **REDACTA LA PREGUNTA DEFINITIVA DE INVESTIGACIÓN:**

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

"AL SENDERO DEBO REGRESAR Y EL ÁREA FOLIAR VOY A DETERMINAR"

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES:

En esta guía, deberán tomar algunos datos de la planta que han escogido, para terminar de responder la pregunta que se han hecho de investigación.

De lo que se trata es de tomar algunos datos geométricos de las hojas de su planta escogida, como el largo de la hoja, su ancho máximo y su área foliar.

MATERIALES: Compás, regla, hoja milimetrada y hoja para calcar.

DURACIÓN: 1 hora y media.

PROCEDIMIENTO A REALIZAR

1° Paso:

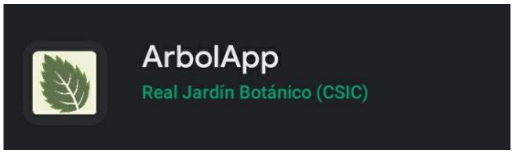
Dirígete al Sendero Ecológico (Jardín de tu casa) y observa las diferentes especies de plantas.

2° Paso:

Realiza un mapa donde se muestre la ubicación y posición de las plantas observadas.

3° Paso:

Dibujar la especie de plantas seleccionada, describir el nombre científico y común, además de su utilidad, para ello puede indagar con personas de tu comunidad, libros, internet o las apps LIKETHAT, PL@NTNET y ARBOLAPP.



DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

DIBUJO	DESCRIPCIÓN

4° Paso:

Con base al paso 3, responde:

¿Cuál planta le llamo más la atención?

____
____

¿Por qué le llamo más la atención?

____
____
____

5° Paso:

De la planta que llamó su atención escoja al azar diferentes hojas de su planta, cálquenlas en la hoja para calcar (**SIN DAÑARLAS)**. Aproximadamente calquen 30 hojas de cada ubicación y de variados tamaños, para obtener 60 hojas calcadas.

6°Paso:

Ya calcadas las hojas de su planta, con la regla y con ayuda del compás midan el largo y el ancho máximo de las hojas calcadas. Mirar imagen de ayuda.

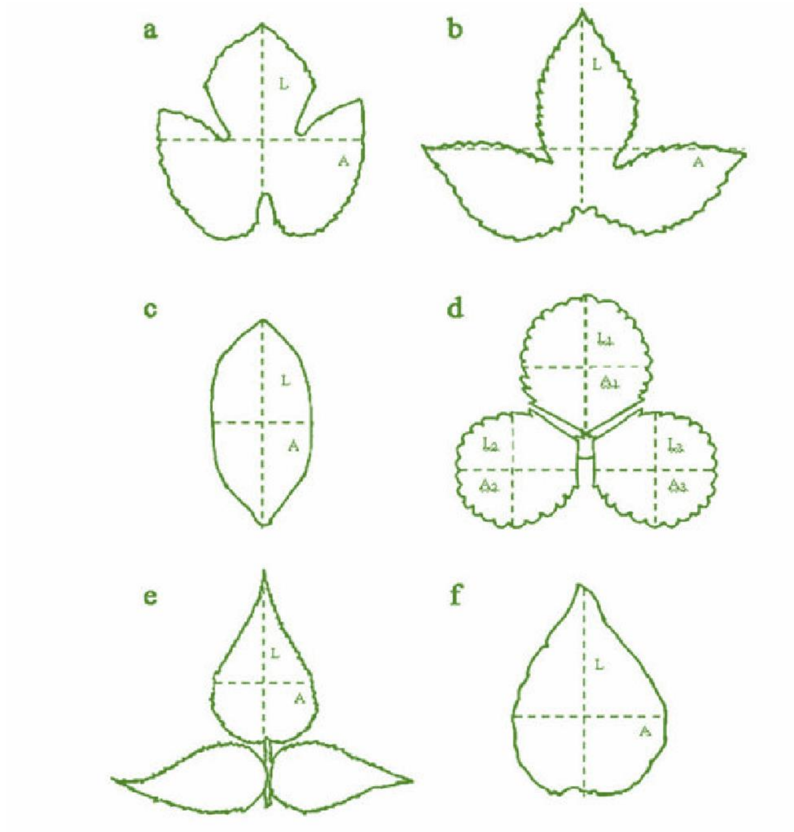
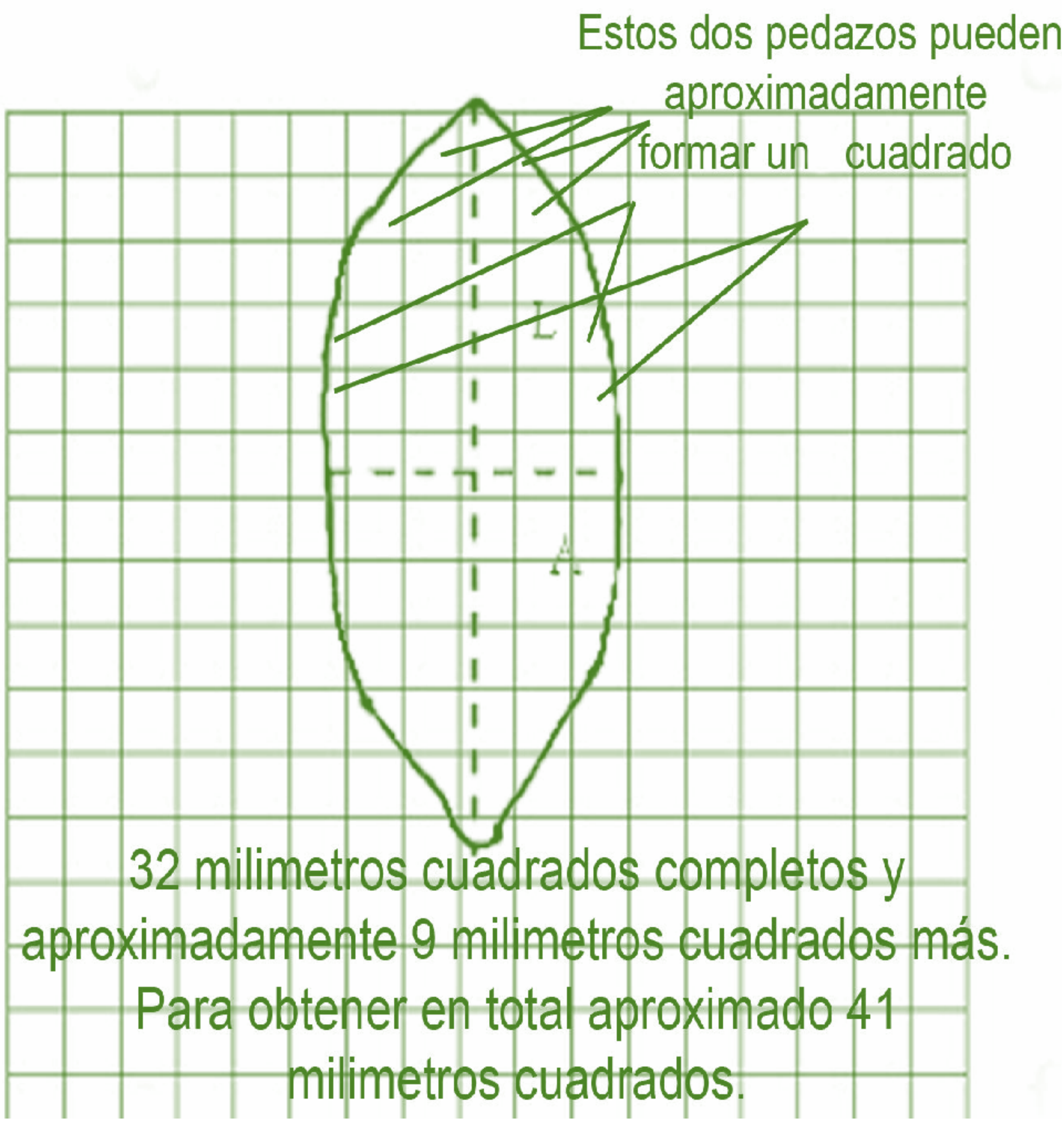


Imagen extraída de: Casierra, Peña & Peña Olmos (2008, p. 98).

7°Paso:

Pasen a la hoja milimetrada cada hoja calcada y, estimen el número de milímetros cuadrados en el interior de cada hoja. Mirar imagen de ayuda.


Estos dos pedazos pueden aproximadamente formar un cuadrado
L
A
32 milimetros cuadrados completos y aproximadamente 9 milimetros cuadrados más. Para obtener en total aproximado 41 milimetros cuadrados.

8° Paso:

Completar la siguiente tabla

Plan 1. Ubicada en:			
Número de hojas	Largo en cm	Ancho Máximo en cm	Área en cm^2
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Plan 2. Ubicada en:			
Número de hojas	Largo en cm	Ancho Máximo en cm	Área en cm^2
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Nota: Para pasar los milímetros cuadrados a centímetros cuadrados se necesita utilizar la siguiente regla escala $1cm^2 = 100mm^2$. En nuestro ejemplo necesito saber cuánto es 27 milímetros cuadrados entonces procedo a hacerlo de la siguiente manera:

$$1cm^2 = 100mm^2$$

$$x = 27mm^2$$

$$x = \frac{27mm^2 . 1cm^2}{100mm^2}$$

$$x = 0{,}27cm^2$$

9° Paso:

Calcular el promedio de las 30 áreas determinadas de las hojas tomadas. Con el objetivo de encontrar una medida aproximada de la misma.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?

DIMENSION FRACTAL DE UNA HOJA

META: Calcular la dimensión fractal de una hoja e identificar la importancia de está en la posible clasificación taxonómica.

DURACIÓN: 6 horas.

RECORDEMOS:

FRACTAL: La palabra fractal fue acuñado en 1975 por el matemático Benoit Mandelbrot. Tomando esta palabra del latín fractus o frangere, lo que sugiere "fragmentada, rota, discontinua e irregular (Rivera y Lopez; 2011)

DIMENSIÓN FRACTAL: En un sentido genérico es un número que sirva para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera (Rivera, 2011, p.269).

MÉTODO BOX-COUNTING: El Método Box-Counting es una de las formas de determinar la dimensión fractal de un objeto, mediante la medición de las irregularidades del borde con cuadriculas de diferentes tamaños. Esto se puede realizar de manera manual o por software comerciales. Este método es el más conocido, debido a su facilidad de implementación. Consiste en dividir en mitad la imagen, con cuadrados de tamaños diferentes y contar la cantidad de cuadrados necesarios para cubrir toda la forma presente en la imagen, tal como se representa en la figura. Matemáticamente se calcula la Dimensión Fractal (Df) de la siguiente manera

$$D_f = \frac{ln(n)}{ln(N)}$$

Donde n es el número de divisiones por lado, y N es el número de cuadrados que contiene la imagen (cuadrado de color amarillo)

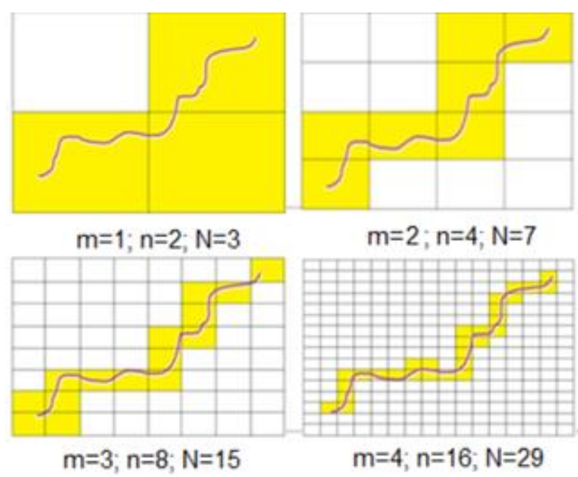
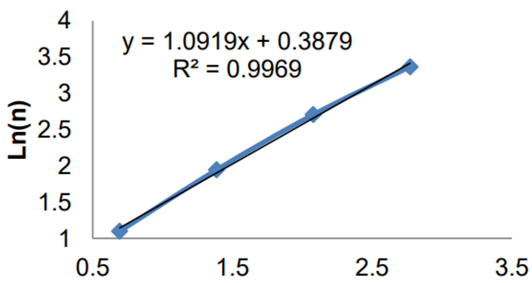


Ilustración 2. Método Box-Counting. tomado de Estudio fractal de la superficie de la hoja de la especie vegetal Copaifera sp. haciendo



$$D_f = \frac{ln(n)}{ln(N)} = 1{,}0919$$

DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES:

Para el desarrollo del presente taller debe tener como instrumentos de trabajo regla, lápiz, una hoja de yerbabuena y una hoja de la planta que selecciono.

1. Dibuje la silueta de una hoja de yerbabuena en el primer recuadro y en el segundo recuadro trace la silueta de la planta seleccionada.

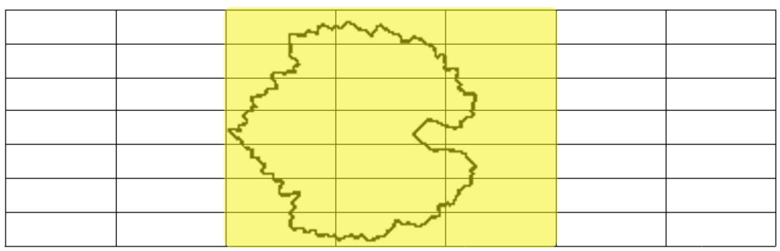
SILUETA HOJA DE YERBABUENA

SILUETA DE TU HOJA

2. Divida los recuadros en los que están las siluetas de las hojas en 49 partes iguales, y cuente en cuántos de estos rectángulos está incluida parte de la silueta de la hoja. Después completar

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\, ln\, (N) =$ $ln\, ln\, (\ )$	$ln\, ln\, (N)$ $=ln\, ln\, (\ )$
YERBABUENA				
TU PLANTA				

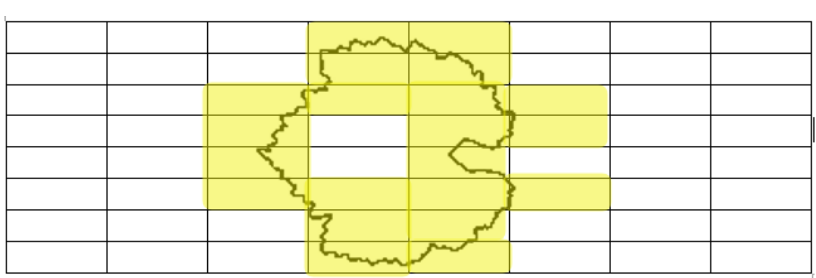
EJEMPLO:



3. Divida los recuadros en los que están las siluetas de las hojas en 64 partes iguales, y cuente en cuantas de estos rectángulos está incluido parte de la silueta de la hoja. Después complete

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\, ln\, (N) =$ $ln\, ln\, (\ )$	$ln\, ln\, (N)$ $=ln\, ln\, (\ )$
YERBABUENA				
TU PLANTA				

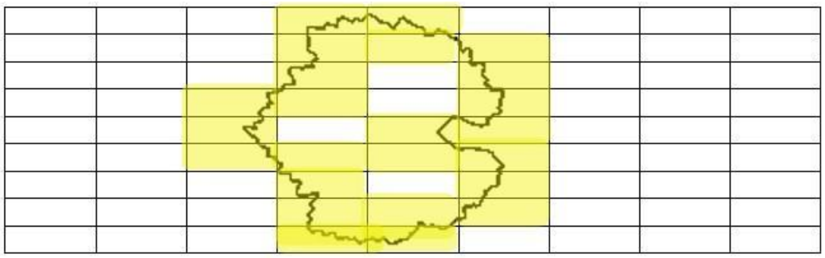
EJEMPLO:



4. Divida los recuadros en los que están las siluetas de las hojas en 81 partes iguales, y cuente en cuantas de estos rectángulos está incluido parte de la silueta de la hoja. Después complete

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\, ln\,(N) =$ $ln\, ln\,(\ )$	$ln\, ln\,(N)$ $= ln\, ln\,(\ )$
YERBABUENA				
TU PLANTA				

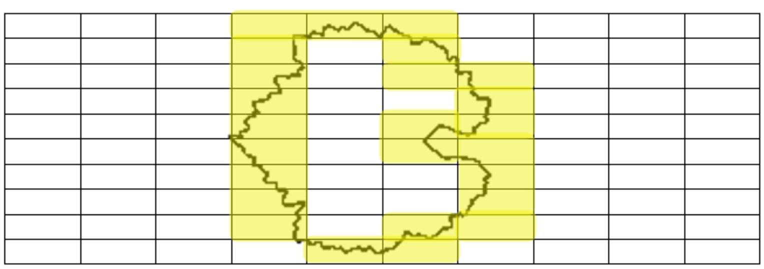
EJEMPLO:



5. Divida los recuadros en los que están las siluetas de las hojas en 100 partes iguales, y cuente en cuantas de estos rectángulos está incluido parte de la silueta de la hoja. Después complete

	N (número de divisiones por lado)	n (número de cuadrados que contiene de la hoja)	$ln\, ln\,(N) =$ $ln\, ln\,(\ )$	$ln\, ln\,(N)$ $= ln\, ln\,(\ )$
YERBABUENA				
TU PLANTA				

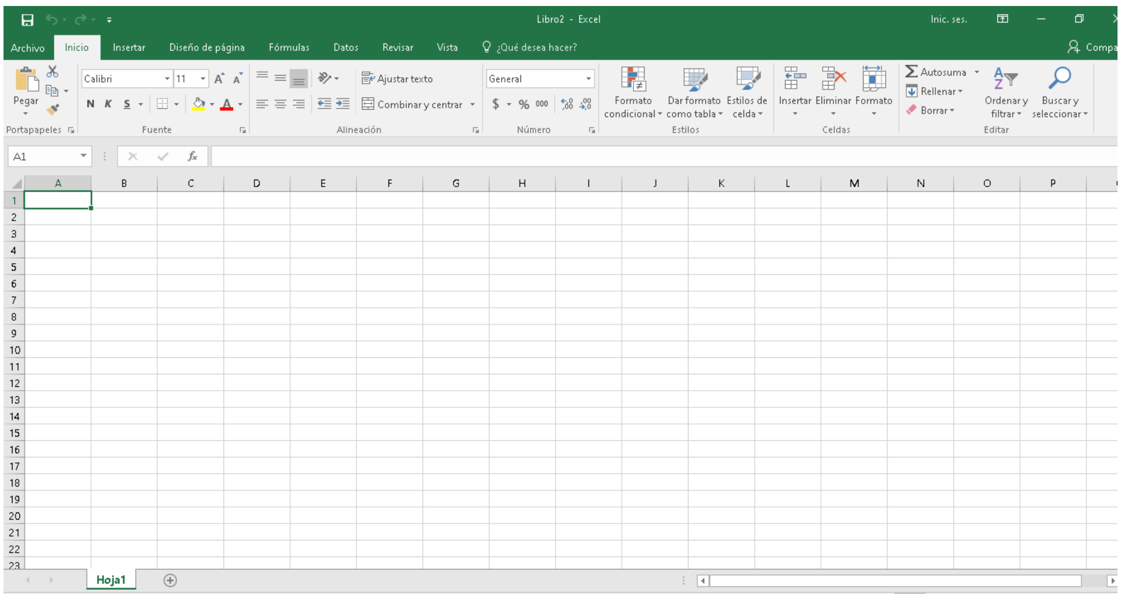
EJEMPLO:



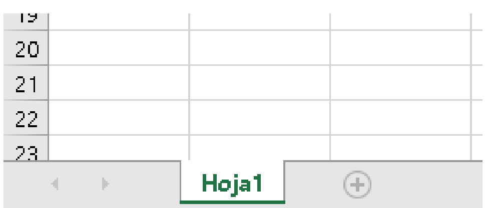
6. Complete la tabla vacía, con los datos obtenidos anteriormente

$ln\, ln\,(N)$	$ln\, ln\,(n)$
2,89	1,94
2,99	2,07
3,17	2,19
3,21	2,3
$ln\, ln\,(N)$	$ln\, ln\,(n)$

7. Abra el software Excel. Encontrará una plataforma con la que se muestra abajo:

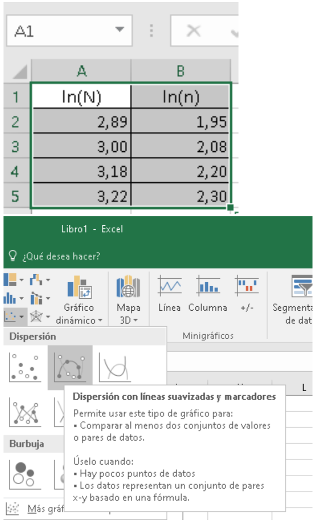


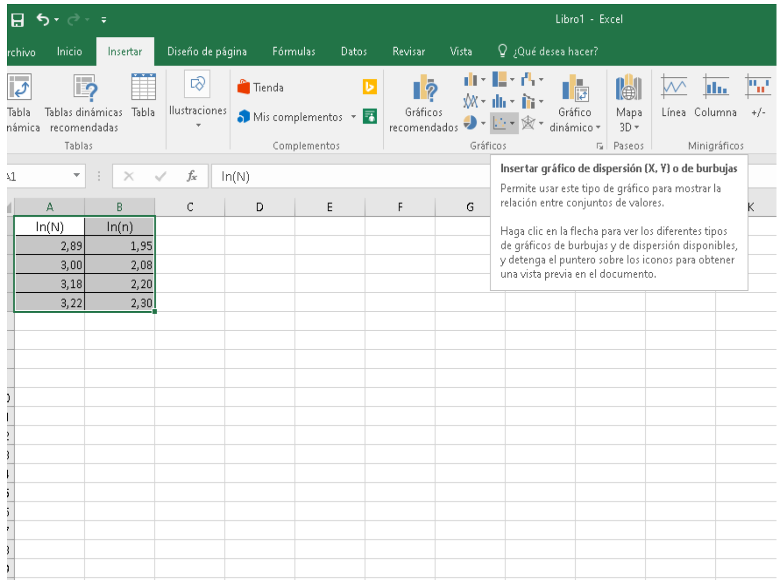
8. Deben copiar los datos obtenidos en el punto 6, como el Ln(N) y Ln (n) obtenido a partir del estudio de su planta. En la hoja 1 de Excel (ver imagen abajo) copiar los datos, utilizando la columna A y la columna B para este propósito. Mirar imágenes abajo:



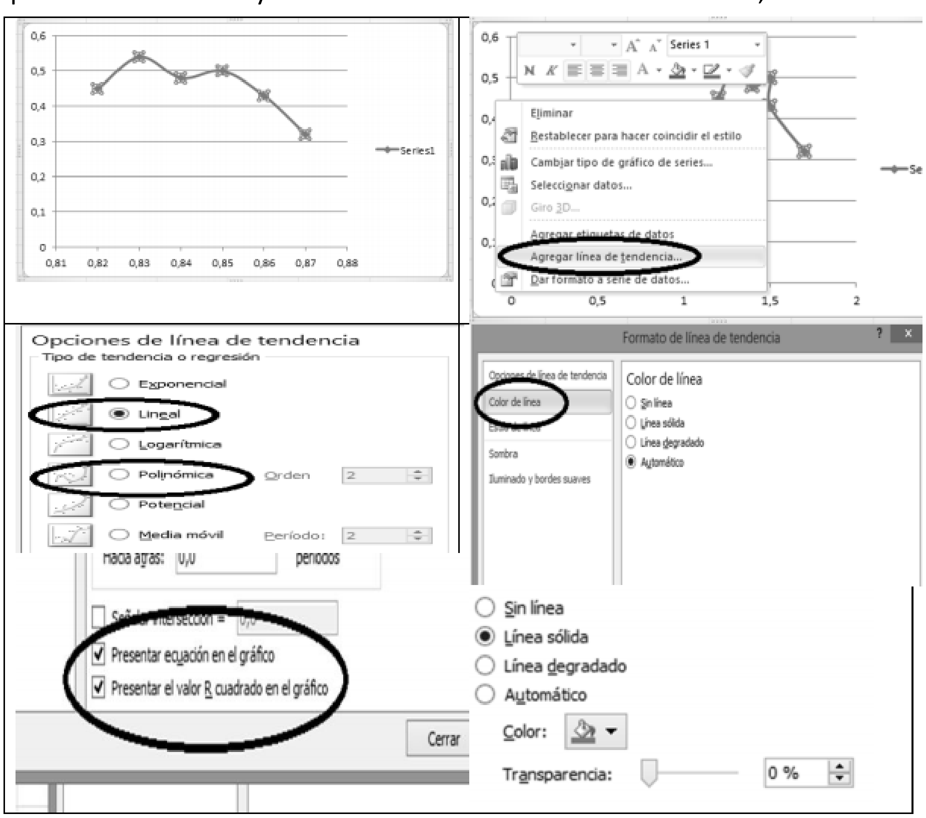
	A	B
1	ln(N)	ln(n)
2	2,89	1,95
3	3,00	2,08
4	3,18	2,20
5	3,22	2,30

9. Con el mouse seleccione todos los valores suministrados y vaya a la herramienta insertar, luego dele clic a la opción dispersión y elija el icono: conocido como dispersión con líneas suavizadas y marcadas, instantáneamente te saldrá la gráfica correspondiente. (Ver imágenes abajo).





10. Con el mouse dele clic a la gráfica, observe que todos los puntos quedaron seleccionados (ver imágenes). Dele clic derecho y le saldrá un menú de opciones escoja la opción agregar línea de tendencia, y escoja la opción lineal en primer lugar y luego polinómica. Esto de acuerdo con su dispersión. Si desea pregúntele a su maestro. Luego, en el mismo recuadro subraye las opciones: presentar ecuación en el gráfico y presentar el valor R cuadrado en el gráfico. (Ver imágenes). Luego, elijan la opción color de la línea, señalando la opción línea sólida (ver imágenes), te aparecerá la opción de color y elije uno de tu preferencia. Luego vayan a la opción estilo de línea y solo cambien el ancho a 2.25. Por último, denle cerrar.



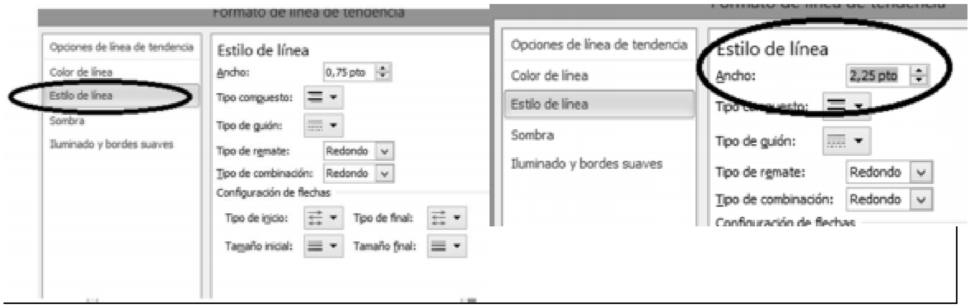
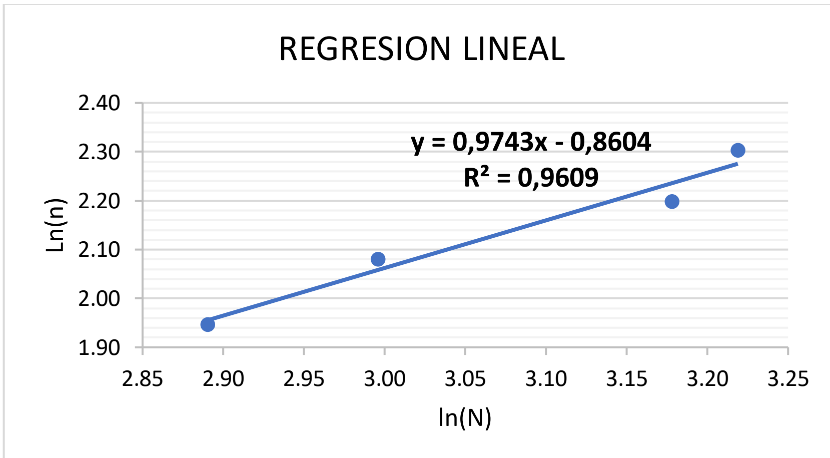


Ilustración 3. Procedimiento Excel. tomado de Zapata 2014

El resultado final debe quedar similar al que muestra a continuación:



11. Ahora con base en la información anterior defina cuál es la fórmula de Dimensión fractal de su hoja. Teniendo en cuenta que el coeficiente de correlación mide la dispersión de los puntos con respecto a la línea recta o la línea curva; es decir, que tan alejados están los datos de esta tendencia. Entre más cercano a 1 la tendencia se conservará y la fórmula dirá que a futuro la dimensión fractal de la hoja será bajo esa fórmula y entre menos alejado a 1, no habrá ningún patrón a predecirse así que la dimensión fractal será impredecible.

PLANTA	DIMENSION FRACTAL	FÓRMULA DEFINITIVA	R^2
YERBABUENA			

12. Se realizará la socialización de los resultados obtenidos al calcular la dimensión fractal de las dos hojas con el fin de determinar si existen semejanzas o diferencias notables con los resultados de los compañeros. Cada estudiante compartirá las dimensiones fractales obtenidas y la formula que generaliza esta medida. Esta socialización se realizará por medio de WhatsApp o Videoconferencia.

13. Responda:

a) ¿Podemos afirmar que las hojas de las plantas estudiadas presentan comportamiento fractal? Justifique su respuesta
b) ¿Por qué la dimensión fractal de la yerbabuena obtenida por cada uno de los compañeros es similar? teniendo en cuenta que pertenecen a plantas de diferentes lugares?
c) ¿Podría ser la dimensión fractal un criterio para clasificar las plantas? ¿porque?
d) ¿Cómo podría utilizar la dimensión fractal de las hojas en la labor agrícola de su familia o comunidad?

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?

ÁRBOLES FRACTALES

META: Identifica el patrón fractal del crecimiento de algunos árboles.

DURACIÓN: 3 HORAS

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES:

1. Consultar:
   A. ¿Cómo es un árbol un fractal?
   B. ¿Qué tipo de patrón fractal existe en un árbol?
   C. Enumere otras tres cosas naturales que son del mismo tipo de patrón fractal que un árbol.

2. Use una regla para medir la distancia en milímetros entre la parte inferior del árbol. (marcado A y el primer punto de ramificación B). Registre su medida en la tabla debajo "Distancia". Haga esto para todas las secciones del árbol.

SECCIÓN	NOMBRE DE LA SECCIÓN	DISTANCIA (MM)	COCIENTE ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES	RAZON ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES
A a B	AB	65	EJEMPLO: AB/BC : $\frac{65}{45} = 1.4$	$\frac{1.4}{1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
B a C	BC			
C a D	CD			
D a E	DE			
E a F	EF			
F a G	FG			

G a H	GH			

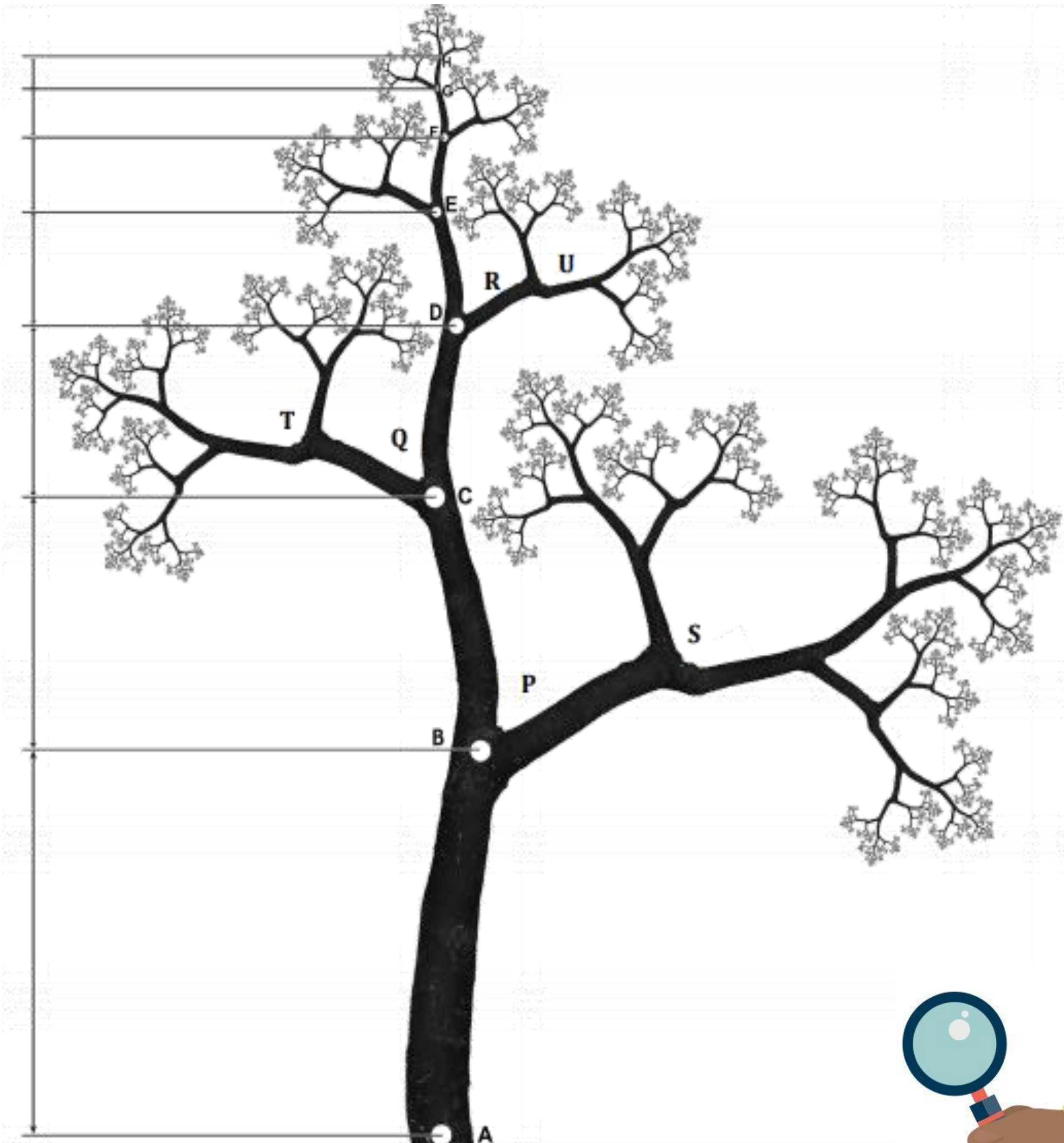


Ilustración 4. Árbol fractal. tomado dehttps://fractalfoundation.org/resources/fractivities/fractal-trees/

A continuación, queremos ver cómo se compara el tamaño entre las ramas de una rama a la siguiente. Para hacerlo, calculamos el cociente entre las longitudes de las ramas.

3. En "Cociente de secciones adyacentes", escriba la longitud de una rama, por ejemplo AB, dividida por la longitud de la siguiente rama, BC, y haga los cálculos. El cociente nos dice cuánto más grande es la rama que la siguiente rama más pequeña. Entonces, si AB fuera dos veces más largo que BC, el cociente sería 2.

4. Finalmente, escribe la razón de las distancias. En el caso anterior, con AB y BC, la relación sería $7:5$. Si AB fuera solo una vez y media más grande que BC, el cociente sería 1.5, y la relación sería $1.5:1$, o $3:2$. Usa tu calculadora para calcular el resto de los cocientes en la tabla.

5. ¿Qué patrón ves?

ETIQUETA	ÁNGULO
P	
Q	
R	
S	
T	
U	

6. ¿Es más fácil medir las distancias de las ramas en milímetros en lugar de pulgadas? Si es así, ¿por qué?

7. Usa un transportador para medir los ángulos entre las ramas. Mida los ángulos $(P, Q, R, S, T\ y\ U)$ y complete los valores en la tabla a la derecha.

A. ¿Qué notas sobre los diversos ángulos en el árbol?

B. ¿Cuántos tipos de ángulos puedes encontrar en el árbol?

8. Aplique el mismo procedimiento a la planta que usted selecciono al inicio de la guía, etiquete las secciones de la planta , compare la longitud de las secciones, estudie los ángulos de sus ramas y determine si sigue un patrón fractal.

SECCIÓN	NOMBRE DE LA SECCIÓN	DISTANCIA (MM)	COCIENTE ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES	RAZON ENTRE LAS SECCIONES ADYACENTES

ETIQUETA	ÁNGULO

Escriba en el siguiente recuadro las conclusiones obtenidas:

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?

L-SYSTEM Y HOUDINI

META: Identifica los elementos y las funciones básicas del programa Houdini.

DURACIÓN: 3 HORAS

INTRODUCCIÓN:

HOUDINI: Es una aplicación de animación 3D y efectos especiales desarrollada por Side Effects Software , una compañía de veinticinco años con sede en Toronto. Houdini fue diseñado para artistas que trabajan en animación 3D y efectos visuales para cine, televisión, videojuegos y realidad virtual. Houdini reúne estos mundos en una única plataforma poderosa.

Link de descargar: https://www.sidefx.com/download/

Tutorial de descarga: https://www.youtube.com/watch?v=c-yRsWObwMg

L-SYSTEMS: Sistema de Lindenmayer es una gramática formal (un conjunto de reglas y símbolos) principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas; puede modelar también la morfología de una variedad de organismos. Los sistemas-L también pueden utilizarse para generar fractales auto-similares como los sistemas de función iterada.

L-SYSTEM Y LA GEOMETRIA DE LA TORTUGA

El código de L-SYSTEM se interpretará en la estructura de objetos 3D mapeando cada alfabeto de la cadena en la dirección y operación de una tortuga que viaja en 3D espacio como se muestra en la figura.

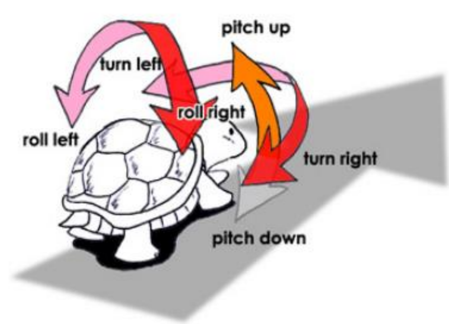


Ilustración 6. Tortuga viajando en el espacio 3D. Tomado de Real-time 3D Plant Structure Modeling by L-System with Actual Measurement Parameters

Una planta real generalmente consta de muchas partes, como ramas, troncos, hojas y flores. Para simplificar la tarea de modelado sin perder gran parte de la realidad, nos centraremos solo en ramas y troncos, e ignoraremos el resto. Comenzamos observando la característica de auto-similitud de la planta, luego tomamos un par de mediciones reales como se describe en la figura y más abajo.

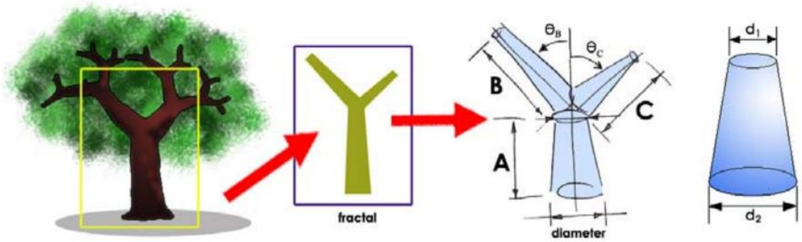


Ilustración 7. Modelando árboles.. Tomado de Real-time 3D Plant Structure Modeling by L-System with Actual Measurement Parameters

Definimos la gramática utilizada con la planta de ejemplo de la siguiente manera:

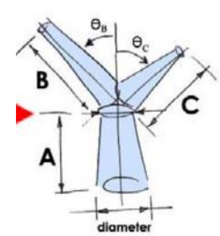
Axioma: F

Reglas de producción: $F \rightarrow GG\,[-GF]\,[+F]$

Ángulo Filotactico: 45

Angulo de las ramas: 45

Los parámetros se definen de la siguiente manera (siguiendo un proceso similar al taller de árboles fractales)



Relación de longitud: La proporción entre la longitud de la rama principal y la secundaria. Del árbol de ejemplo en la figura , las proporciones entre la longitud de la rama del árbol real se transfieren a dos fracciones, $B\ /\ A$ y $C\ /\ A$, que son 1 y $1/2$.

La regla de producción se define como $F \rightarrow GG\,[-GF]\,[+F]$, correspondiente a ellos, mientras que las ramas A, B y C están representadas por las cadenas GG, $-GF$ y $+F$. El número de alfabetos en una cadena equivalente se asigna a cada longitud de rama, longitud $A = 2$; longitud $B = 2$; y longitud $C = 1$. Por el examen, esta regla de producción produce la proporción del árbol real.

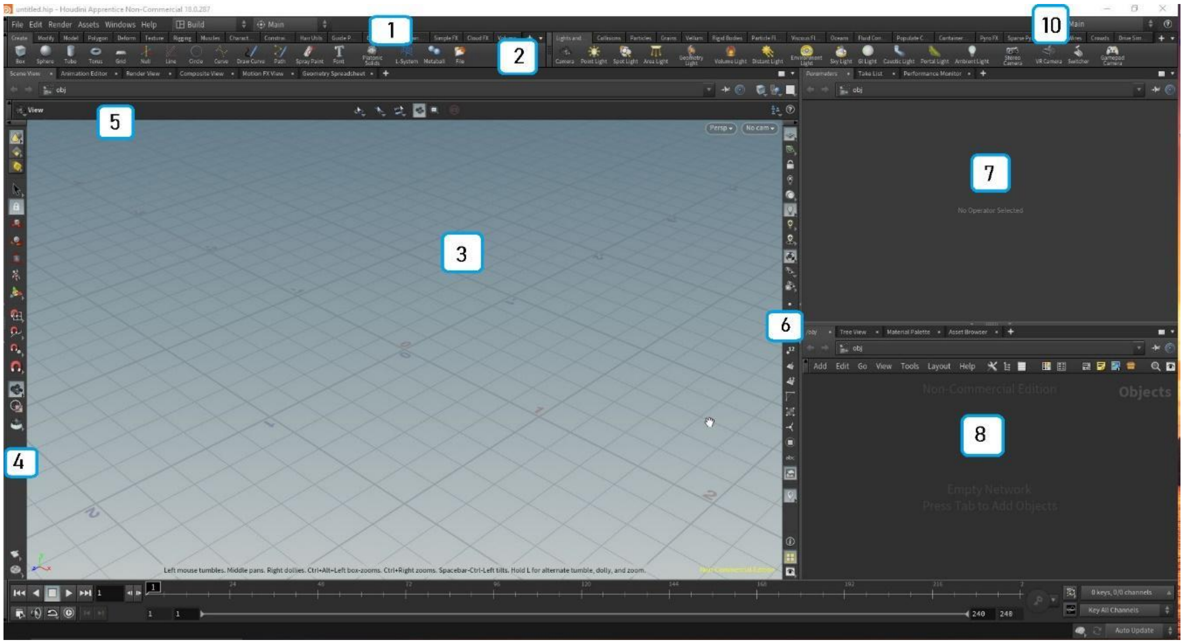
Ángulo de ramificación (Θ): el ángulo entre la rama principal y cada rama secundaria.

Ángulo Filotactico (Φ): El ángulo entre el plano de las ramas secundarias (patrón auto-similar) y el plano de la rama primaria.

Diámetro: El parámetro utilizado para ajustar el tamaño del diámetro superior de acuerdo con el diámetro inferior de cada rama.

MODELAR PLANTAS EN HOUDINI

A. Ingresamos a Houdini, y nos encontraremos con el siguiente interfaz.



1. Menús principales
Los menús principales en la parte superior son siempre los mismos y brindan acceso rápido a la funcionalidad común, como importar archivos y administrar renders.

2. Estante
El estante contiene una gran variedad de herramientas útiles para trabajar de forma interactiva en la vista de escena. Puede crear sus propias herramientas personalizadas aquí para acceder rápidamente.

3. Vista de la escena 3D
El panel Vista de escena muestra una representación 3D del archivo de escena actual. Puede cambiar el estilo de sombreado y aumentar o disminuir la calidad de visualización. Los controles en el encabezado del panel le permiten cambiar el diseño de la ventana gráfica y el estilo de sombreado.

4. Caja de herramientas
La caja de herramientas es una colección de herramientas de uso muy común, como seleccionar, mover, rotar y escalar, así como alternar como modo de inspección y ajuste.

5. Barra de herramientas de operación
La barra de herramientas en la parte superior de la vista de escena muestra controles importantes para el nodo seleccionado actualmente. Puede usar estos controles si trabaja en la vista con el editor de parámetros minimizado.

6. Opciones de visualización
Los botones de íconos en el lado derecho de la vista les brindan acceso rápido a las opciones de visualización más utilizadas. Puede hacer clic en el botón de opciones de visualización en esta barra de herramientas para abrir la ventana de opciones de visualización completa.

7. Editor de parámetros

Este panel le permite editar los parámetros del nodo seleccionado actualmente para cambiar cómo funciona.

8. Editor de red

Este panel muestra los nodos en la red actual. Puede crear nodos, seleccionarlos para ver sus parámetros en el editor de parámetros y conectarlos.

9. Playbar

La barra de reproducción tiene controles de reproducción y la línea de tiempo, que le permite desplazarse por los cuadros de animación y muestra qué cuadros tienen teclas.

1. **Botón de ayuda y toma los controles**

Haga clic en el botón Ayuda para abrir el navegador de ayuda en línea en un panel lateral. Esto es muy útil para ver la ayuda mientras continúa trabajando en Houdini. Consulte la página de tomas para obtener información sobre los controles de toma.

11. Línea de estado

La línea en la parte inferior de la ventana principal muestra el estado y las actualizaciones de progreso mientras trabaja.

12. Controles de cocción

Estos controles le permiten desactivar la actualización automática de la vista de escena si su escena es extremadamente compleja y lenta de actualizar. Vea cocinar para más información.

B. Seleccionar la herramienta L-System

A...	Hacer esto
Coloque el L-System en cualquier lugar de la escena.	1 Haga clic en la herramienta L-System en la pestaña Crear. 2 Mueva el cursor a la vista de escena. **Nota** Puede mantener presionado Alt para separar el Sistema L del plano de construcción. 3 Haga clic para colocar el L-System en cualquier lugar de la vista de escena y presione Enter para confirmar su selección. Si presiona Enter sin hacer clic, Houdini coloca el L-System en el origen.
Coloque el sistema L en el origen	Presione ^ Ctrl + en la herramienta L-System en el estante.

C. Propiedades de los fractales

Hay varios factores que se combinan para organizar las estructuras de las plantas y contribuir a su belleza. Éstos incluyen:

- ✓ Simetría
- ✓ auto-similitud
- ✓ algoritmos de desarrollo

Con los sistemas L, nos interesan principalmente los dos últimos. La autosimilitud implica una estructura fractal subyacente que se proporciona a través de cadenas de sistemas L. Benoit Mandelbrot describe la autosimilitud de la siguiente manera:

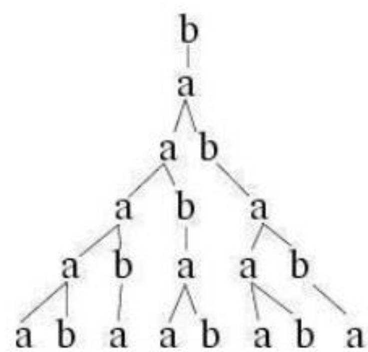
"Cuando cada pieza de una forma es geométricamente similar a la totalidad, tanto la forma como la cascada que la generan se denominan autosimilares".

Los sistemas L proporcionan una gramática para describir el crecimiento de estructuras auto-similares en el tiempo. Las reglas del sistema L determinan las estructuras de crecimiento subyacentes de forma análoga a la forma en que se cree que el ADN determina el crecimiento biológico. Este crecimiento se basa en el principio de autosimilitud para proporcionar descripciones extremadamente compactas de superficies complejas.

D. Reescribir

El concepto central de los sistemas L es la reescritura. Esto funciona reemplazando recursivamente un estado inicial (el iniciador) con geometría reescrita (el generador), reducida y desplazada para tener los mismos puntos finales que los del intervalo que se reemplaza.

En 1968, Astrid Lindenmayer introdujo un mecanismo de reescritura de cadenas denominado "L-systems". La gramática de los sistemas L es única en el sentido de que el método de aplicación de producciones se aplica en paralelo y reemplaza simultáneamente todas las letras en una "palabra" dada.



El ejemplo más simple de una gramática de reescritura es donde se usan dos "palabras" o cadenas, construidas a partir de las dos letras: ay b, que pueden ocurrir muchas veces en una cadena. Cada letra está asociada con una regla de reescritura. La regla $a = ab$ significa que la letra a debe ser reemplazada por la cadena ab, y la regla $b = a$ significa que la letra b debe ser reemplazada por a.

Si comenzamos el proceso con la letra b(la premisa) y la seguimos a tiempo, vemos que surge un cierto patrón siguiendo las reglas de reescritura, como el que se presenta en la imagen.

E. Sintaxis de la regla de producción

La forma general de una regla del sistema L es:

```
[Contexto Izquierdo <] símbolo [> Contexto Derecho] [: condición]
= reemplazo [: probabilidad]
```

Dónde…

Contexto Izquierdo: Una cadena opcional que debe preceder al símbolo para que esta regla coincida.

Símbolo: El símbolo a reemplazar. Por ejemplo, si el símbolo es A, las ocurrencias de A en la cadena inicial se reemplazarán con reemplazo (si esta regla coincide).

Contexto Derecho: Una cadena opcional que debe seguir el símbolo para que esta regla coincida.

Condición: Una expresión opcional que debe ser verdadera para que esta regla coincida.

Reemplazo: La cadena que reemplazará el símbolo (si esta regla coincide).

Probabilidad: La posibilidad opcional (entre 0 y 1) de que esta regla se ejecute. Por ejemplo, usar 0.8significa que esta regla se ejecutará el 80% del tiempo.

F. Comandos de tortuga

COMANDO	FUNCIÓN
F	Tortuga avanza un paso y dibuja una línea
f	Tortuga hacia adelante sin dibujar
$+/-$	Girar a la derecha, Girar a la izquierda
J, K, M	Entrada del subcontexto 1,2 y 3. Conexión para hojas
T(g):	Aplica el vector de tropismo (gravedad)
[]	Empuje, Estado de tortuga pop (crear rama)
/, \	Rotar en sentido horario, en sentido anti horario
&^	Levantar, bajar
~	Lanzar, rodar, rotar grados aleatorios
" ! ;	Multiplicar espesor, ángulo

Con estas reglas simples, podemos encontrar fácilmente una cadena que hace que la tortuga dibuje una forma como la letra "L". Por ejemplo, suponiendo que la tortuga esté inicialmente hacia arriba, usaríamos la siguiente cadena para crear la letra "L":

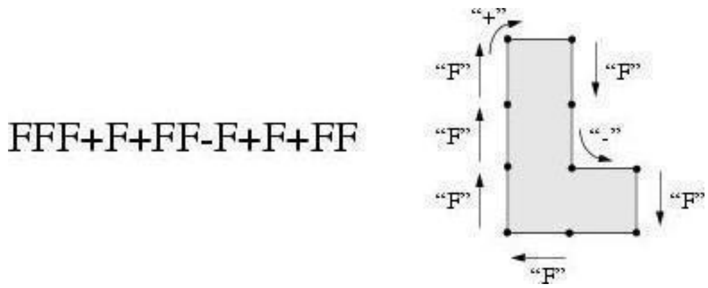


Ilustración 10. Comando tortuga. Tutorial L-System. tomado de https://www.sidefx.com/docs/houdini/nodes/sop/lsystem.html

G. Reescribiendo cadenas de comando de tortuga

Al ejecutar iterativamente una cadena de comando de tortuga a través de reglas de reescritura, puede generar una geometría sorprendentemente compleja. El poder de la autorreferencia en las reglas de reescritura puede crear figuras extremadamente complejas.

Como un ejemplo muy simple de autorreferencia, considere un sistema L con la cadena inicial A y la regla $A = F + A$. La regla significa "Donde sea que vea 'A', reemplácelo con '$F\ +\ A'$". Debido a que el reemplazo contendrá dentro de él el activador de la regla, cada generación hará que la cadena crezca en un efecto en cascada:

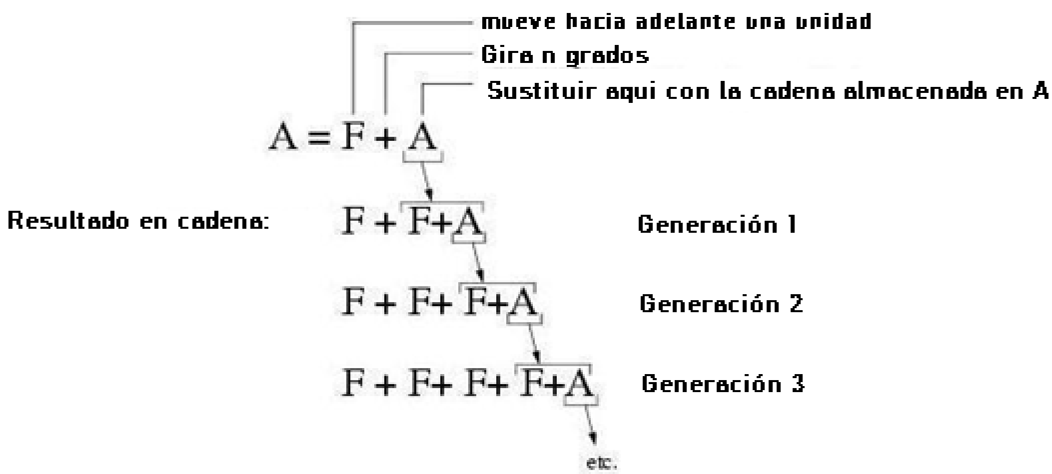


Ilustración 11. Comando tortuga. Tutorial L-System. tomado de https://www.sidefx.com/docs/houdini/nodes/sop/lsystem.html

Esto genera una lista creciente de comandos repetidos de "avanzar, luego girar". Con un ángulo de giro inferior a 90 y un número suficiente de generaciones, este sistema L se aproximará a un arco o círculo. Podrías usar este comportamiento como la base para rizar una hoja de papel o rizar la cola de un escorpión. O bien, puede aleatorizar el ángulo de giro y crear una línea ondulada, que podría usar como base para un rayo.

(Asegúrese de no confundir la cadena de comando de la tortuga $F + A$ con la declaración matemática F más A. En el contexto de los sistemas L, el +símbolo significa "girar", no "agregar").

Otro ejemplo: la siguiente figura se llama isla de Koch cuadrática. Comenzando con estos valores:

H. Ramas

Los sistemas descritos hasta ahora generan una sola línea continua. Para describir cosas como los árboles, necesitamos una forma de crear ramas.

En los sistemas L, crea ramas con corchetes ($[y\,]$). Cualquier comando de tortuga que coloque entre corchetes se ejecuta por separado de la cadena principal por una nueva tortuga.

Por ejemplo, los comandos de tortuga $F\ [+F]\ F\ [+F]\ [-F]$se interpretan como:

1. Avanzar.
2. Ramifique una nueva tortuga y haga que gire a la derecha y luego avance.
3. Avanzar.
4. Ramifique una nueva tortuga y haga que gire a la derecha y luego avance.
5. Ramifique una nueva tortuga y haga que gire a la izquierda y luego avance.

Esto crea la siguiente figura:

F [+F] F [+F] [-F]

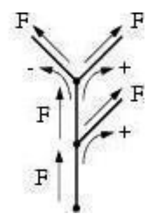


Ilustración 12Comando tortuga. Tutorial L-System. tomado de https://www.sidefx.com/docs/houdini/nodes/sop/lsystem.html

Otro ejemplo: la cadena de comando $F\ [+F]\ [-F]\ F\ [+F]\ -FF$ crea la siguiente figura:

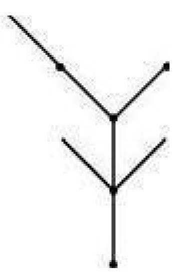


Ilustración 13. Ejemplo cadena de comando. Comando tortuga. Tutorial L-System. tomado de https://www.sidefx.com/docs/houdini/nodes/sop/lsystem.html

G. 3D

Los sistemas descritos hasta ahora generan geometría plana.

Para mover la tortuga en 3D, use los comandos (inclinación hacia &arriba), ^(inclinación hacia abajo), \\(rodar en sentido horario) y /(rodar en sentido anti-horario).

Por ejemplo, la premisa inicial $FFFA$ y la regla $A =$ " $[\&FFFA]$ //// $[\&FFFA]$ //// $[\&FFFA]$.

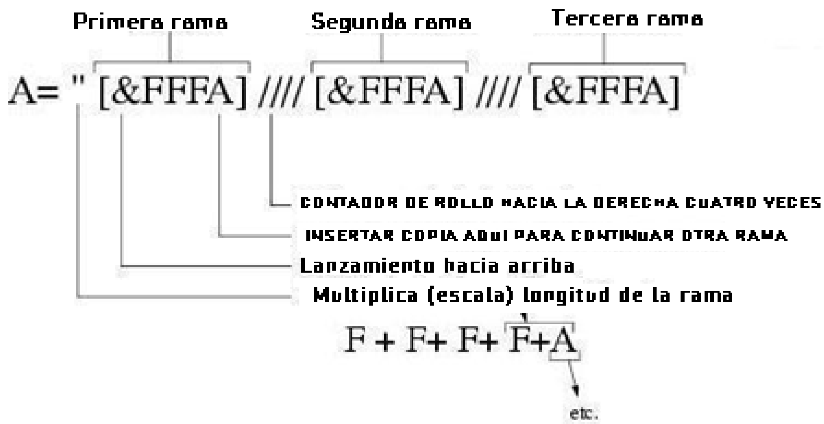
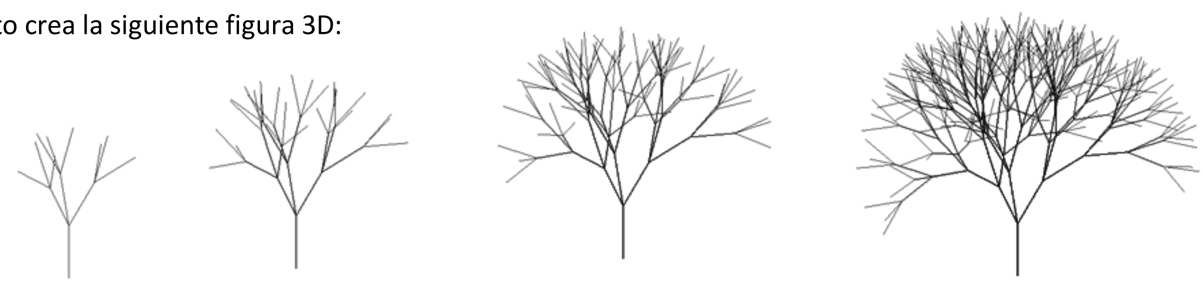


Ilustración 14Comando tortuga. Tutorial L-System. tomado de https://www.sidefx.com/docs/houdini/nodes/sop/lsystem.html

Esto crea la siguiente figura 3D:



La regla crea tres ramas en cada generación. Los comandos pitch up (&) separan las ramas de la vertical. Los comandos roll (/) hacen que las ramas salgan en diferentes direcciones. (Tenga Aen cuenta que al final de cada rama se garantiza que crecerán nuevas copias de la regla desde los extremos de las ramas).

El comando hace que los F comandos tengan la mitad de longitud en cada generación, lo que hace que las ramas se reduzcan aún más.

H. Use múltiples reglas del sistema L

En la sección anterior usamos la regla $A =$ " $[\&FFFA]$ //// $[\&FFFA]$ //// $[\&FFFA]$.

Obviamente esta regla tiene redundancia. Dado que los sistemas L se tratan de reemplazar símbolos con cadenas, simplemente podemos reemplazar las cadenas repetidas con un nuevo símbolo y luego crear una nueva regla para ese símbolo:

Regla 1 $\quad A =$ " $[B]$ //// $[B]$ //// $[B]$

Regla 2 $B = \&FFFA$

Debido a que las ramas ahora están definidas en un solo lugar, si desea cambiar las instrucciones de la rama, solo necesita editar una cadena.

Tenga en cuenta que el sistema de dos reglas tomará el doble de generaciones para producir el mismo resultado. Esto se debe a que cada generación realiza una sustitución de regla.

Entonces, mientras que la regla única $A =$ “ $[\&FFFA]\,////\,[\&FFFA]\,////\,[\&FFFA]$ crece expandiéndose A en cada generación, las reglas duales de $A =$ " $[B]\,////\,[B]\,////\,[B]$ y $B = \&FFFA$ funcionan alternando entre reemplazar A con " $[B]\,////\,[B]\,////\,[B]$ y reemplazar B con $\&FFFA$.

I. Referencia de comando de tortuga

Normalmente, los símbolos de tortuga usan la longitud / ángulo / grosor actual, etc. para determinar su efecto. Puede proporcionar argumentos explícitos entre paréntesis para anular los valores normales utilizados por el comando tortuga.

La siguiente lista muestra los argumentos entre corchetes. Recuerde que simplemente puede usar el comando de un solo carácter sin los argumentos y Houdini simplemente usará los valores normales.

Vea las funciones y variables locales a continuación para ver qué funciones y variables puede usar en expresiones de argumento dentro de los corchetes.

VARIABLES LOCALES	FUNCIÓN
a	El valor del parámetro ángulo.
b	El valor del parámetro b.
c	El valor del parámetro c.
d	El valor del parámetro d.
g	La edad de la regla actual, inicialmente 0.
i	El desplazamiento en la cadena actual del sistema L donde se aplica la regla.
t	El recuento de iteraciones, inicialmente 0.
x,y,z	Posición actual de la tortuga en el espacio.
A	Una longitud de arco desde la raíz del árbol hasta el punto actual.
L	Incremento de longitud actual en el punto.
T	El valor del parámetro Gravedad

U	Mapa de color U valor
V	Mapa de color V valor
W	Ancho en el punto actual

J. Usar geometría modelada en un sistema L

Houdini te permite crear una copia de algo de geometría en la ubicación de la tortuga usando ciertos comandos. Puede usar esto para crear hojas y flores en un arbusto del sistema L, por ejemplo.

Conecte la salida de la geometría que desea estampar a una de las entradas del nodo del sistema L.

Use el comando correspondiente (J, K o M) en una cadena de comando de tortuga para insertar la geometría.

Entrada	**Comando tortuga**
1	J
2	K
3	METRO

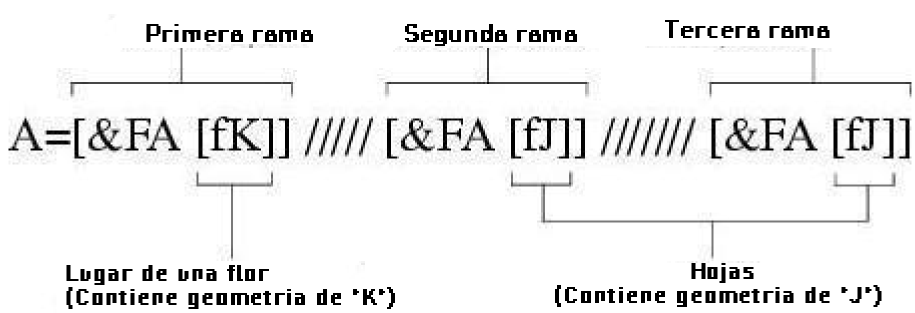
Si conecta una superficie de hoja a la entrada 1 de los sistemas L y una flor a la entrada 2, puede usar lo siguiente para crear un arbusto con hojas y flores:

Premisa A

Regla 1 $A = [\&FA\,[fK]]\ /////\ [\&FA\,[fJ]]\ ///////\ [\&FA\,[fJ]]$

Regla 2 $F = S/////$

Regla 3 $S = F$



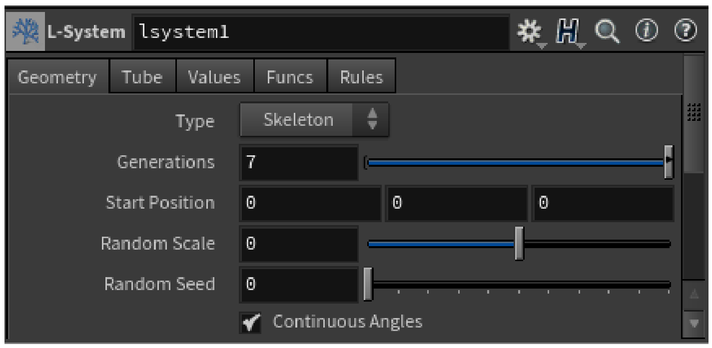
La regla 1 precede a los comandos K y J con f(avanzar sin dibujar) para compensar un poco la geometría. De lo contrario, la hoja se uniría en su centro, en lugar del borde.

K. Parámetros

1. GEOMETRIA

Tipo: El tipo de geometría para crear a medida que la tortuga se mueve.

- ✓ Esqueleto: Dibuja polilíneas.
- ✓ Tubo: Dibujar tubos.



Generaciones: El número de veces que se repite la sustitución de reglas. Si especifica un número fraccionario y los ángulos continuos y / o la longitud continua están activados (a continuación), Houdini escala la geometría generada por la última sustitución para proporcionar un crecimiento uniforme entre generaciones.

Posición de salida: Esta es la posición del punto de partida para la tortuga.

Escala aleatoria : Si no es cero, escala aleatoriamente todas las longitudes especificadas por F y otras funciones de tortuga similares.

Semilla aleatoria: La semilla a utilizar para el generador de números aleatorios. Al variar esto en un sistema L usando reglas aleatorias (Ie: escala aleatoria, ~ o reglas probabilísticas) se pueden generar diferentes instancias del sistema L.

Aplicar color: Si se establece, el sistema L generará un atributo de color en cada punto. El valor de color se encontrará mirando hacia arriba en el archivo de imagen en las posiciones actuales de U y V. El U&V actual se altera con las operaciones 'y # tortuga.

2. TUBO

Filas: El número de filas para dividir los tubos. Un valor de 3 hará que los tubos sean barridos con triángulos.

Cols: El número de columnas para dividir los tubos. Un valor de 4 significa que una F creará 4 secciones transversales.

Tensión: Qué tan rectos deben barrer los tubos hasta su punto de destino.

Mezcla de rama: Cuánto debe heredar una nueva rama de una dirección de ramas viejas.

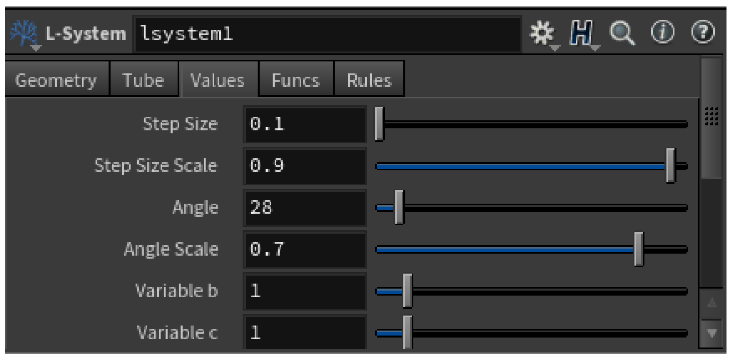
Grosor: Ancho predeterminado de los tubos.

Escala de espesor: ¡Cuánto cuesta! La operación afectará el grosor.

Aplicar coordenadas de textura de tubo: Si se marca, los tubos generarán coordenadas de textura UV.

Incremento vertical: La cantidad que cada tubo incrementará la coordenada de textura V.

3. VALORES



Numero de pie: El tamaño predeterminado de un movimiento, como F, comando.

Escala de tamaño de paso: El número utilizado por el "comando.

Ángulo: El ángulo predeterminado para un ángulo, como /, comando. Esto también se convierte en la variable a en la expresión.

Escala de ángulo: El número utilizado por; mando.

Variable b: El valor de la variable de expresión b.

Variable c: El valor de la variable de expresión c.

Variable d: El valor de la variable de expresión d.

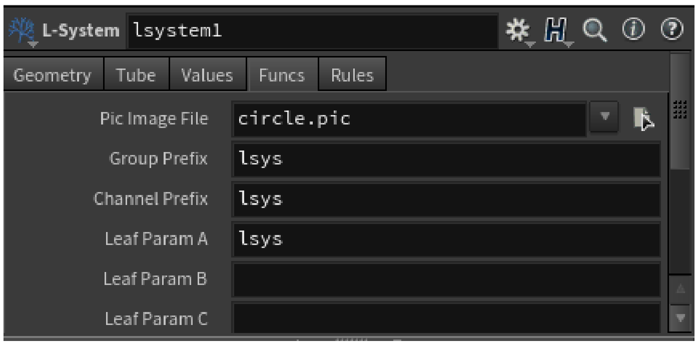
Gravedad: La cantidad de tropismo del comando T. También se convierte en el valor de la variable de expresión T.

Numero de variables: Este multiparm permite la asignación de un número arbitrario de nuevas variables de expresión.

Nombre de la variable: El nombre de la variable de expresión. Este es un personaje único. Consulte la sección Variables locales para ver qué variables ya están reservadas.

Valor variable: El valor de la variable de expresión.

4. FUNCS



Pic Image File El archivo de imagen para usar con la función de expresión pic ().

Prefijo de grupo El prefijo utilizado por el comando g.

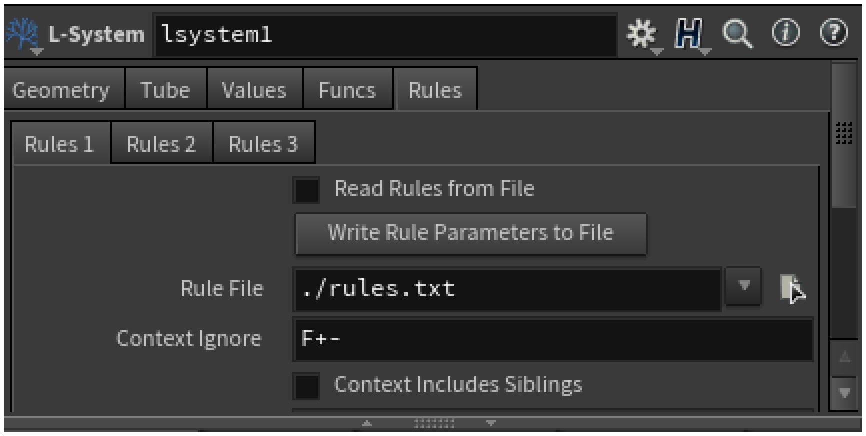
Prefijo de canal El prefijo utilizado por la función de expresión chan ().

Param de hoja A Este es el nombre del parámetro de sello con el que se estampará la hoja. El valor del sello proviene de la operación J, K o M. Se puede leer en sentido ascendente utilizando la función stamp ().

Hoja Param B Este es el nombre del parámetro de sello con el que se estampará la hoja. El valor del sello proviene de la operación J, K o M. Se puede leer en sentido ascendente utilizando la función stamp ().

Parámetros de hoja C Este es el nombre del parámetro de sello con el que se estampará la hoja. El valor del sello proviene de la operación J, K o M. Se puede leer en sentido ascendente utilizando la función stamp ().

5. REGLAS



Leer reglas del archivo: Si esto se establece, los campos de la regla se ignoran. En cambio, el archivo de reglas se lee y se usa como las reglas.

Escribir parámetros de regla para archivar: Esto escribirá todas las reglas actuales en el archivo de reglas.

Archivo de reglas: El nombre del archivo a utilizar como fuente de reglas. Este archivo debe tener una línea por regla. Las líneas en blanco y las que comienzan con '#' se ignorarán, por lo que se pueden agregar comentarios al archivo de reglas con '#'.

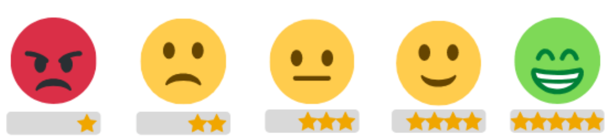
Ignorar contexto: Esta es una lista de símbolos. Serán ignorados al tratar de determinar los contextos.

El contexto incluye hermanos: Por defecto, el contexto de cada rama solo incluye los símbolos en esa rama. Se omitirán las subramas o ramas principales. Dada la regla $A > B = F$, $A[B]$ no se resolverá ya que B está en una sub-rama. $A[Q]B$ se resolverá porque $[Q]$se ignora el. Si cambia el contexto Ignorar para tener [], este efecto se elimina y A[Q]B no se resolverá, pero lo A[B] hará. La bandera Contexto incluye hermanos restaura el comportamiento del contexto anterior a Houdini 10 de las ramas hermanas incluidas. Por ejemplo, $[A]Q[B]$ se resolverá si esta bandera está activada, pero no se resolverá si no está activada.

Premisa : El estado inicial del sistema L. Este es el estado del sistema L en la generación 0.

Regla # : Una regla para aplicar al sistema L. La aplicación de la palanca desactivará la regla, eliminándola del procedimiento de generación.

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?



MODELANDO NUESTRA PLANTA EN

META: Modelar una planta utilizando el algoritmo L-SYSTEM.

DURACIÓN: 3 HORAS

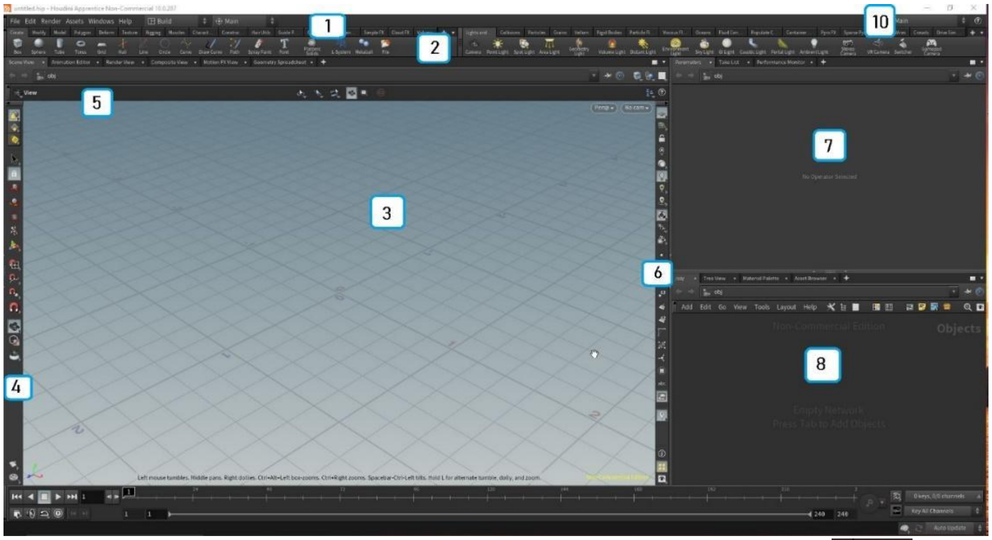
DURACIÓN: 4 HORAS

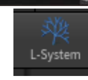
DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES:

En esta guía, aprenderás a manejar algunas funciones de la herramienta HOUDINI que es un software que proporciona un funcionamiento fácil y estable para modelar objetos de una forma agradable y confortable. El programa cuenta con la opción de modelar utilizando L-System. Este programa permite ser instalado de una forma fácil, presenta un interfaz amigable y cuenta con una versión gratuita. El reto que deberás emprender será modelar tu planta con el software Houdini , de manera que se pueda simplificar su forma utilizando conceptos de fractales.

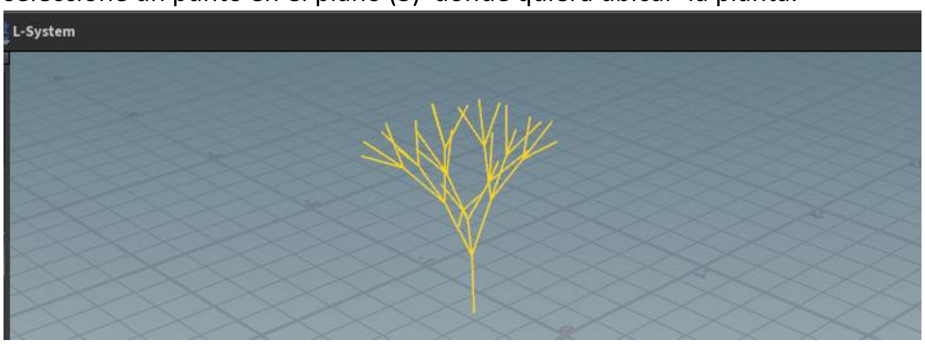
PROCEDIMIENTO PARA MODELAR TU PLANTA:

1. Abrir el programa Houdini
2. Deberá aparecer un interfaz como este

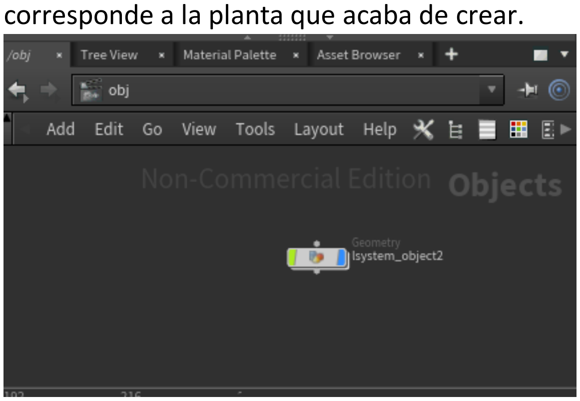


3. Vaya a la parte superior (2) y selecciona la opción de L-system 

y después seleccione un punto en el plano (3) donde quiera ubicar la planta.

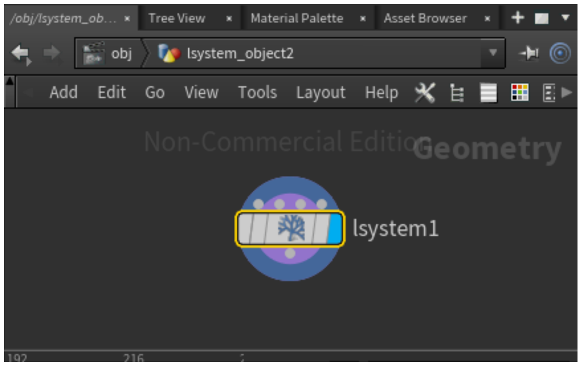


4. Diríjase a la sección 8 y haga doble click sobre el icono Geometry(lsystem-object) que corresponde a la planta que acaba de crear.

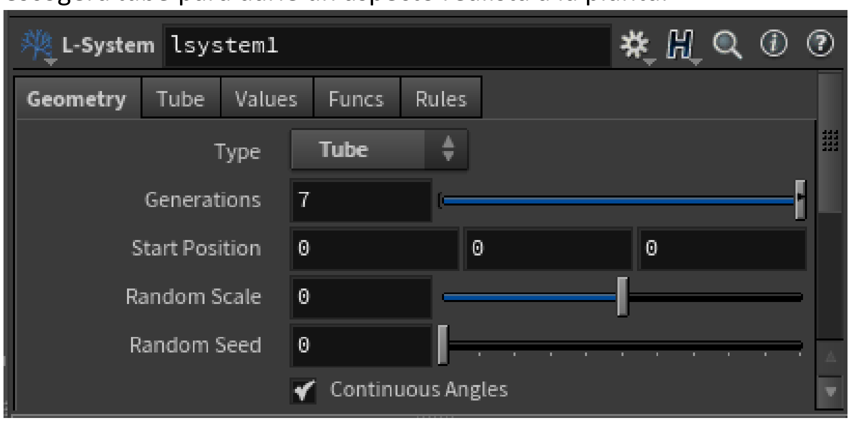


UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

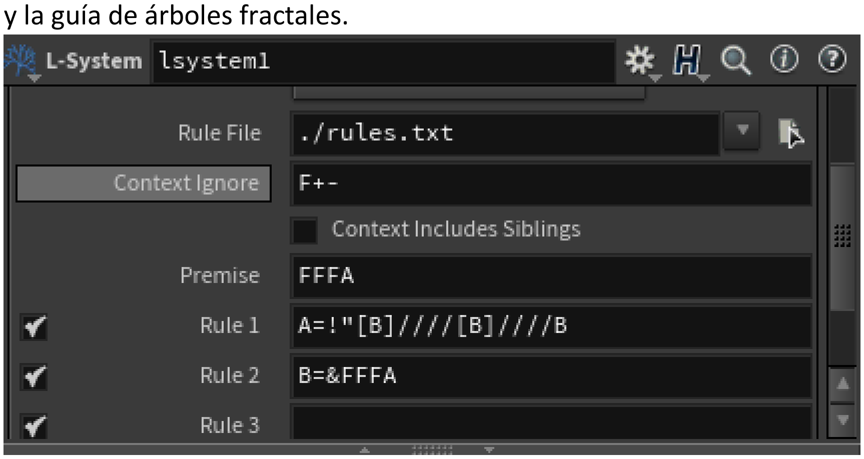
5. Después de haber dado doble click debe obtener una representación como la que se muestra en la siguiente figura.



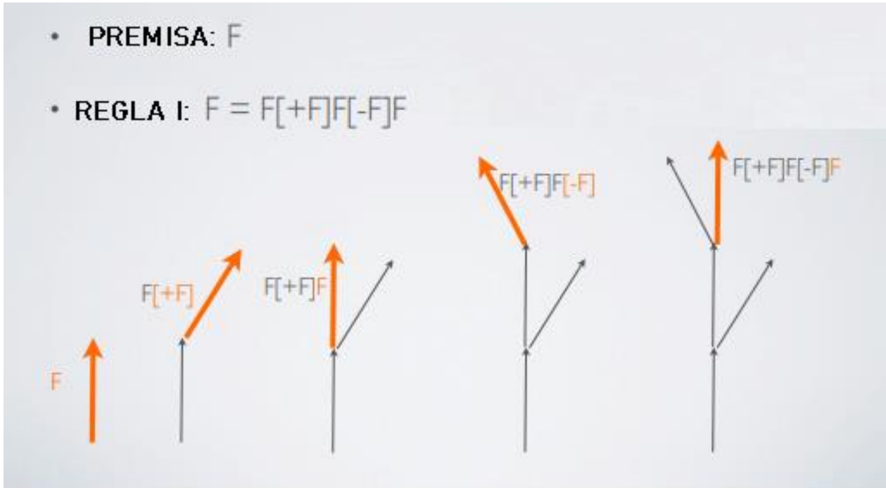
6. Luego diríjase a la sección 7, y seleccione geometría, en donde en la opción *type* escogerá *tube* para darle un aspecto realista a la planta.



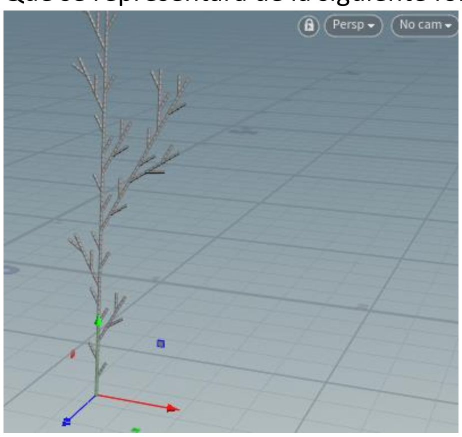
7. Diríjase a la sección rules en donde ingresara la premisa y la regla de formación de la planta a modelar, teniendo como referencia la guía anterior sobre el algoritmo L-system y la guía de árboles fractales.



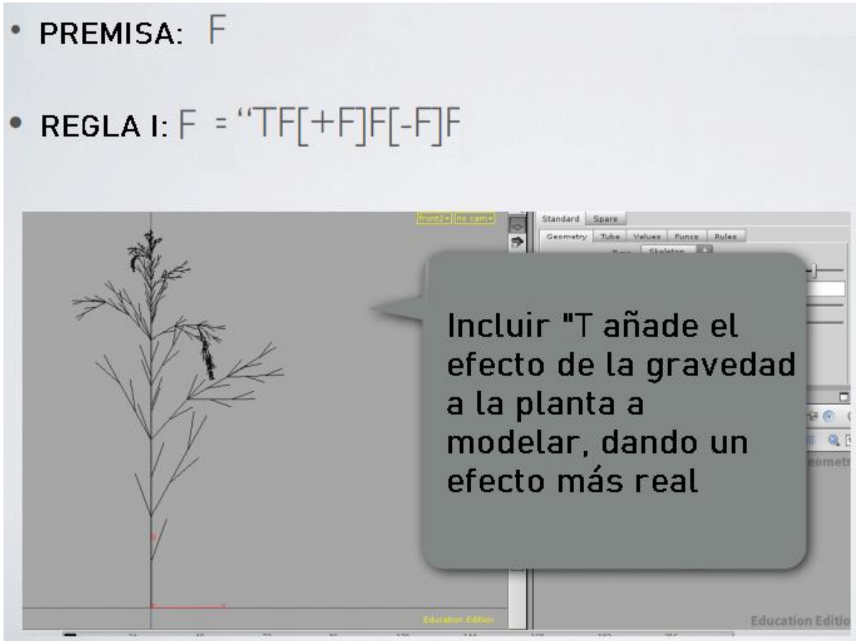
Ejemplo:



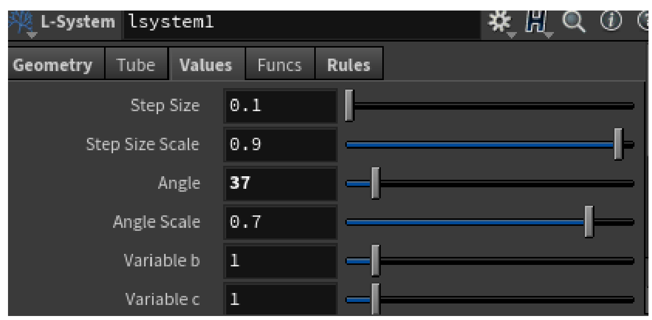
Que se representara de la siguiente forma

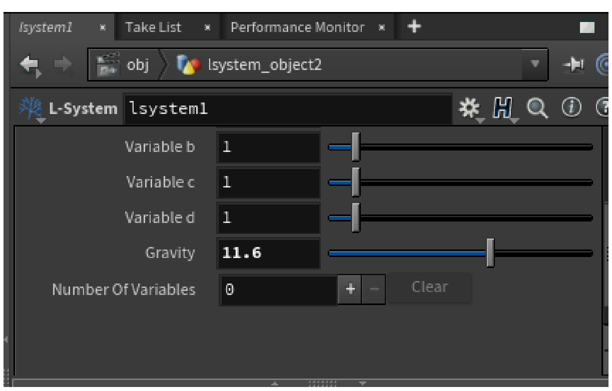


8. Si tu planta presenta efectos visibles de la gravedad puedes incluir esta variable, utilizando el código “T,

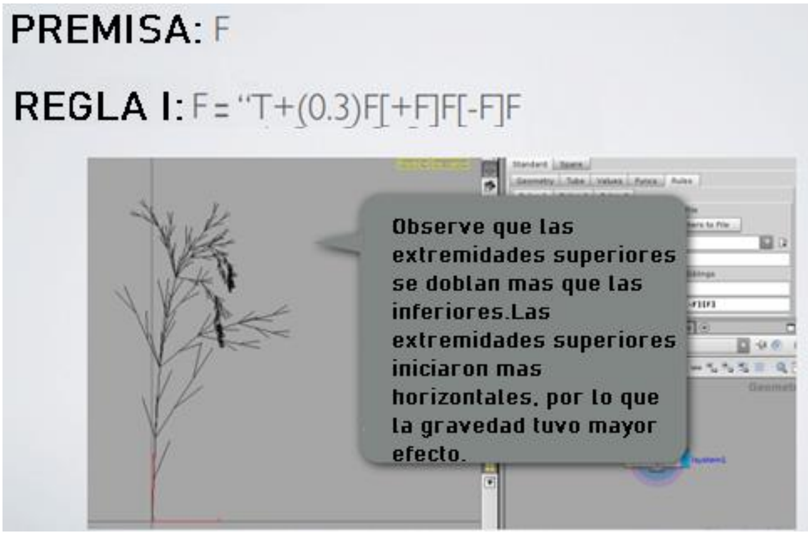


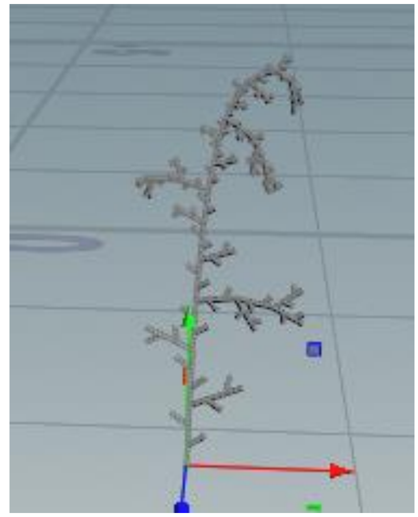
Después diríjase a la sección ***values*** y cambie el valor de la gravedad teniendo en cuenta la planta elegida. También pueden cambiar el valor del Angulo que forman las ramas con el tallo, para guardar mayor similitud con la planta escogida.



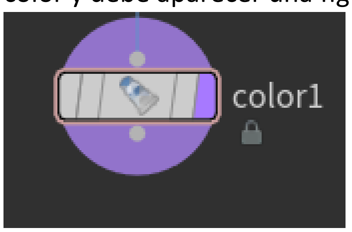


9. Si desea generar una curvatura en el tallo de la planta, anteponga un valor entre 0 y 1, antes de la premisa (en el ejemplo F) entre más cercano sea a 1 la curva es más pronunciada.

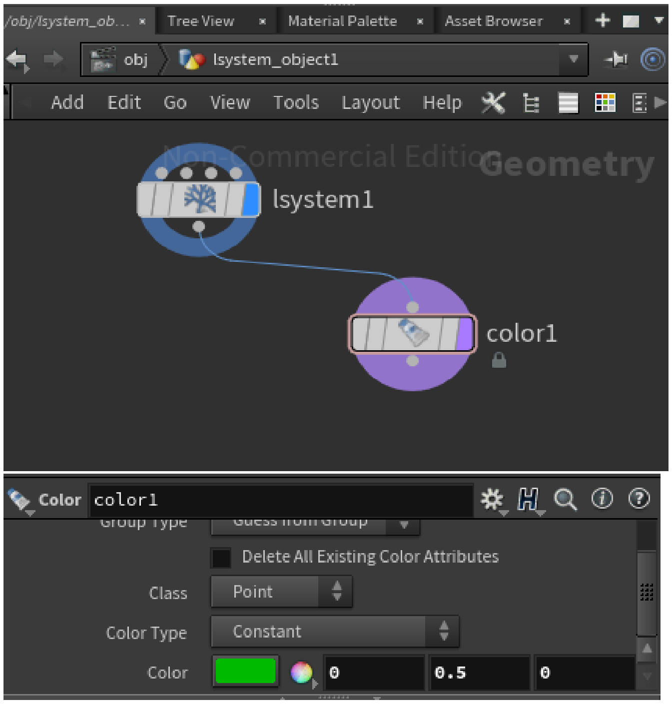


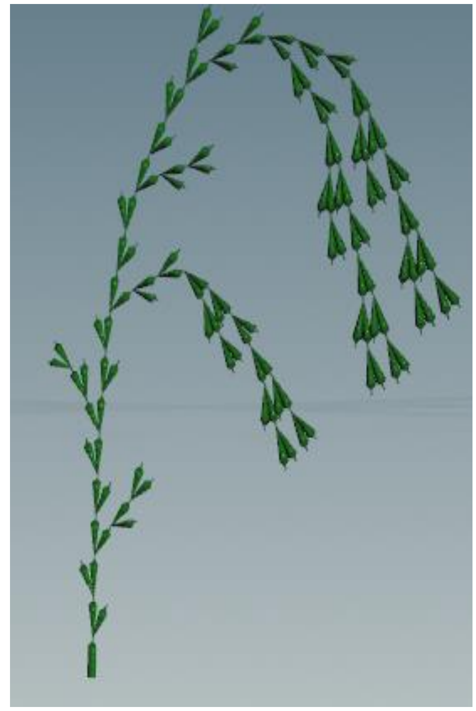


10. Para darle color a nuestra planta, debemos dar click derecho en la sección 8, escriba color y debe aparecer una figura como la siguiente



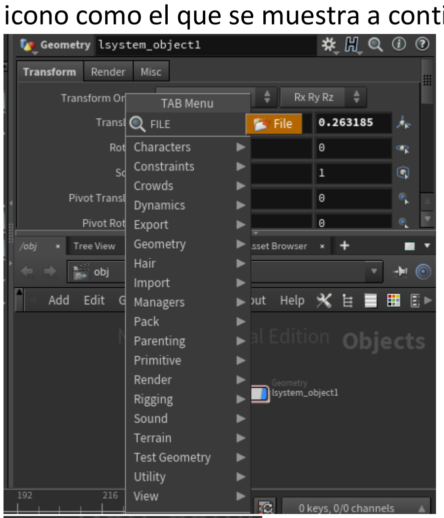
La cual debe de unir con el símbolo de L-system como se muestra a continuación. Finalmente seleccione en la sección 7 el color que desea. En nuestro ejemplo obtenemos el resultado que se muestra en la imagen de la derecha.



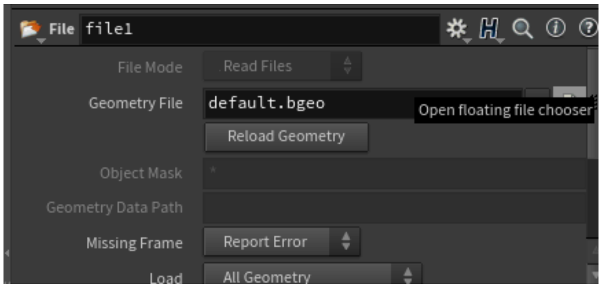


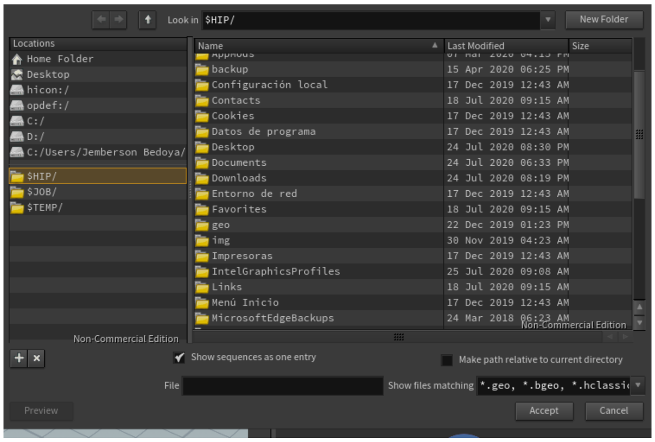
11. Ahora vamos añadir flores a nuestra planta. Houdini cuenta con una biblioteca de tipos de hojas y flores , las cuales podemos utilizar, siguiendo el procedimiento:

A. Damos click derecho en la sección 8, escribimos *file* y pulsamos enter. Debe aparecer un icono como el que se muestra a continuación:



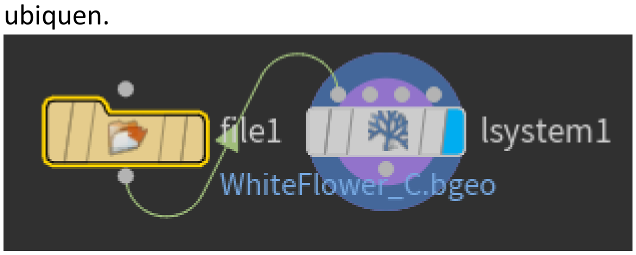
B. Damos doble click sobre el icono de Geometry file 1, e inmediatamente vaya a la sección 7 y de click sobre el icono al lado de default.bgeo





C. Buscamos y abrimos la carpeta *Geo,* seleccionamos la flor que deseemos entre la colección de hojas y flores que tiene el programa.

D. Después volvemos a la sección 8, y unimos el icono de l-system y el de la flor, esta unión recibe el nombre de J, K,L o M. Dependiendo en cuales de los cuatro puntos superiores se ubiquen.



E. Para incluirlo en el árbol volvemos a reglas en la sección 8, Y en las divisiones que decidamos hayan flores , escribimos &J(depende de la letra asignada por el sistema)

¿CÓMO TE SENTISTE AL DESARROLLAR LA GUÍA?