Neiva, 06 de julio de 2018

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Norfy Fanory Vargas Sandoval, con C.C. No. 33.751.035 de Neiva, y Gustavo Adolfo Caldón Gómez, con C.C. No. 1075.238.810 de Neiva, autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado: Una Propuesta para el aprendizaje del concepto de fracción en el grado cuarto, presentado y aprobado en el año 2.018 como requisito para optar al título de: Magister en estudios interdisciplinarios de la complejidad.

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Norfy Fanory Vargas Sandoval

Firma: ______________________________

Gustavo Adolfo Caldón Gómez:

Firma: ______________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:

Una propuesta para el aprendizaje del concepto de fracción en el grado cuarto.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Vargas Sandoval Caldón Gómez	Norfy Fanory Gustavo Adolfo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

Magister en estudios interdisciplinarios de la complejidad

FACULTAD:

Facultad de ciencias exactas y naturales

PROGRAMA O POSGRADO:

Maestría en estudios interdisciplinarios de la complejidad

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2018 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 109

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas_X__ Fotografías_X__ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Complejidad	Complexity	6. Contexto	Context
2. Neuropedagogía	Neuropedagogy	7. Motivación	Motivation
3. Fracción	Fraction	8. Educación	Education
4. Números racionales	Rational numbers	9. Estrategia	Strategy
5. Resolución de problemas	Problem resolution	10. Aprendizaje	Learning

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En el siguiente trabajo se presenta una breve propuesta didáctica, la cual contiene actividades que consideran los sistemas de representación, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico en los contextos continuo y discreto, con el propósito de dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción en los estudiantes de grado cuarto del colegio Aspaen Gimnasio Yumana de Neiva. A cada grupo de estudiantes se le aplicará una prueba diagnóstica seguida por el desarrollo de tres actividades didácticas de clase donde se utiliza como herramienta pedagógica la resolución de problemas e implementación de la teoría de la complejidad y la neuropedagogía en el aprendizaje de dicha temática, y al analizar cada actividad se evaluará la comprensión de la temática a través de diversas situaciones problemas de manera individual y grupal. Después de realizar un análisis cualitativo de las actividades diarias, con respecto a la prueba inicial se destaca significativamente el déficit que poseen en la comprensión lectora de algunas estudiantes frente a las situaciones del contexto, además la importancia de resaltar la relación docente – estudiante en el aula, ya que debe ser amena y fluida la clase, asimismo el proceso complejo de aprendizaje por el cual pasan las estudiantes se caracteriza por ser independiente en el cada una de ellas, ya que es un proceso autónomo y organizado; finalmente tiene propuesto un alto nivel de motivación por parte de los estudiantes participantes, al igual que una verdadera apropiación y utilización del tema en las diversas situaciones de la vida.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In the following paperwork a brief didactic proposal is presented which contains activities that are considered by representation systems, diagrams, natural language and symbolic language in discrete and continuous contexts with the purpose of making the teaching and learning the concept of fraction process more dynamic in Aspaen Gimnasio Yumana school 4th student's graders. To each students group will be applied a diagnostic test followed by three class didactic activities where resolution of problems and the implementation of the complexity and neuropedagogy theory in the learning of the topic mention before will be used as a tool, and by analyzing each activity the comprehension of the topic will be evaluated through different situations in an individual and cooperative way. After developing a qualitative analysis of the regular activities with regards to the initial test a significant deficit in the reading comprehension is highlighted in the students regarding the context, furthermore the importance of highlighting the relationship between the teacher and the student in the classroom since the class has to be joyful and neat, likewise the complex learning process by which the students are going through is characterized by being independent in each particular case since it is an autonomous and organized process; Finally, the group of students taking part of the research are highly motivated as well as a truly appropriation of the topic in diverse life situations.

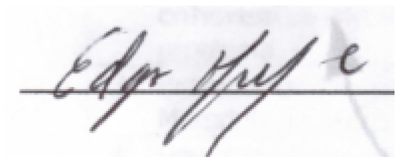
APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Christian Camilo Cortes

Firma:

Nombre Jurado: Edgar Montealegre Cárdenas

Firma:



UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN EL GRADO CUARTO

NORFY FANORY VARGAS SANDOVAL
Código: 20162153771
norfyfanoryvargas@hotmail.com
GUSTAVO ADOLFO CALDÓN GOMEZ
Código: 20162153770
gustavocaldong@gmail.com

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD
NEIVA
Junio 2018

UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN EL GRADO CUARTO

NORFY FANORY VARGAS SANDOVAL
Código: 20162153771
norfyfanoryvargas@hotmail.com
GUSTAVO ADOLFO CALDÓN GOMEZ
Código: 20162153770
gustavocaldong@gmail.com

Asesor:
Ph.D. Mauro Montealegre

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD
NEIVA
2018

Índice general

Índice de figuras

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta una breve propuesta didáctica, la cual contiene actividades que consideran los sistemas de representación, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico en los contextos continuo y discreto, con el propósito de dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción en los estudiantes de grado cuarto del colegio Aspaen Gimnasio Yumana de Neiva. A cada grupo de estudiantes se le aplicará una prueba diagnóstica seguida por el desarrollo de tres actividades de clase donde se utiliza como herramienta pedagógica la resolución de problemas e implementación de la teoría de la complejidad y la neuropedagogía en el aprendizaje de dicha temática, y al finalizar cada actividad se evaluará la compresnsión de la temática a través de diversas situaciones problemas de manera individual y grupal. Después de realizar un análisis cualitativo de las actividades diarias, con respecto a la prueba inicial se tiene propuesto un alto nivel de motivación por parte de los estudiantes participantes, al igual que una verdadera apropiación y utilización del tema en las diversas situaciones de la vida.

Palabras claves

Complejidad, educación, fracción, números racionales, aprendizaje, resolución de problemas, neuropedagogía, estrategia.

Capítulo 1

Introducción

Desde la antigüedad las matemáticas nacen como herramienta para satisfacer las necesidades de la sociedad y es por ello, que se convierte en una de las áreas del conocimiento más importante para el desarrollo del ser humano; constituyéndose la base de los avances de las diferentes ciencias. Debido a la magna importancia, su aprendizaje presenta grandes dificultades en la escuela, principalmente en un tema fundamental para la aritmética, como lo son las fracciones; contenido matemático que empieza trabajarse desde la básica primaria y termina utilizándose hasta la secundaría; y, es está la razón por la cual se conocen diversas investigaciones pedagógicas y metodológicas que trabajan la resolución de problemas para apoyar la enseñanza y aprendizaje del conjunto numérico de los racionales.

Gran parte de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las fracciones es debido a que en la actualidad aún nos encontramos con una educación tradicionalista, donde a pesar de que se han desarrollado distintas estrategias y teorías a partir de diversas investigaciones respecto al tema, se continúa sólo enseñando conceptos y algoritmos mecánicamente, que no permiten que el estudiante construya sus propios conocimientos, se enfrente a retos cognitivos y consolide sus procesos mentales; que son caminos que acceden al verdadero aprendizaje. Por tal razón, nos permitimos implementar como estrategia pedagógica la resolución de problemas incluyendo la teoría de la complejidad y la neuropedagogía en el proceso de enseñanza de los racionales. Trabajar de esta manera dicho aprendizaje implica una transformación total en la educación matemática, pues lleva a una nueva forma de pensar, ya que hace necesario reconstruir una comunicación entre las diferentes áreas del conocimiento con el propósito de trabajar de manera integrada y colaborativa, sin olvidar la importancia que debe dar el docente al hecho de vincular en el aula la relación cerebro y aprendizaje, para lograr desde allí en el estudiante una verdadera apropiación del concepto de números racionales.

El documento está estructurado en introducción y capítulos, en el primero se hace referencia a la descripción del proyecto; en el segundo se presentan los objetivos materia de estudio; en el tercero los fundamentos conceptuales en torno al proceso enseñanza - aprendizaje de las fracciones a través de la resolución de problemas y conceptos claves de complejidad educativa y neuropedagogía; en el cuarto se plantea el diseño metodológico, en el quinto muestra una visión general de los resultados en cada una de las actividades propuestas, el sexto las conclusiones y por último las implicaciones que se debe tener en cuenta al implementar la propuesta didáctica.

Capítulo 2

Justificación

Desde la didáctica de la matemática se han abordado diferentes investigaciones relacionadas con los números racionales, han llamado la atención diversos estudiosos de renombre internacional que, mediante la publicación de sus obras, han demostrado la importancia que tiene este conjunto, y de acuerdo a esto, han promovido grandes avances en el manejo y la interpretación de los números racionales. Investigadores como Kieren(1980, 1983, 1991), Y Freudenthal (1983), los cuales trabajaron el concepto de reparto desde dos aspectos que organizan las ideas sobre las fracciones: como fracturantes y comparadores, las primeras hacen referencia a la forma cómo la unidad ha sido dividida en varias partes iguales y la segunda se refiere al proceso de comparar diferentes fracciones.

Por otro lado, en cuanto a las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas; se analiza que se ha desarrollado notablemente por algunos investigadores, así como su aplicabilidad desde el campo de la física, pero en lo que relaciona a este con los números racionales, sólo se encuentra desde el concepto de reparto, donde se pueden desarrollar diferentes propuestas de aprendizaje basado en problemas que permiten la mejor asimilación de sus conceptos y su posterior aplicación en situaciones reales.

Es importante reconocer que la resolución de problemas aporta a la construcción de conceptos, gracias al establecimiento de las relaciones entre ellos, pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo, se hace necesario disponer de herramientas técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas que permitan avanzar en los obstáculos que los estudiantes presentan y que interfieren en el aprendizaje relacionados con los números racionales logrando que sean aprendidos en forma adecuada, y es allí donde se quiere implementar la teoría de la complejidad y la neuropedagogía en dicho proceso, resaltando que el papel del educador es fundamental para poder desarrollar las actividades matemáticas, para aclarar dudas y nutrir los conceptos ya aprendidos. De allí que la atención se centre no solo en el proceso de brindarle al estudiante diferentes estrategias en la resolución de problemas, sino generar diversos procesos de reflexión que lo conduzcan a elaborar sus propias estrategias de trabajo y su forma de pensar o abordar situaciones.

Teniendo en cuenta los conceptos e ideales anteriores, se construye finalmente una propuesta didáctica para la enseñanza de los números racionales considerando el enfoque del archipielago de las fracciones que constituye el significado de más amplio uso en la enseñanza de la fracción y a partir del cual pueden construirse los demás conceptos. Esta propuesta contiene actividades de inicio, desarrollo y cierre que corresponden a una secuencia óptima de enseñanza para la formación de conceptos implementando la complejidad, la resolución de problemas y la neuropedagogía en su desarrollo. Dicho proyecto de investigación se desarrollará con estudiantes de grado cuarto de primaria de dos instituciones educativas una del sector privado y otra del sector público, con el propósito de evaluar los procesos de asimilación del concepto de número racional.

Por tales motivos, este estudio asumió el compromiso de formular y resolver el siguiente interrogante investigativo. ¿Qué estrategias pedagógicas desde la complejidad, la neuropedagogía y la resolución de problemas; se pueden implementar en el aprendizaje del concepto de fracción en las estudiantes de grado cuarto del colegio Aspaen Gimnasio Yumana de la ciudad de Neiva?

Capítulo 3

Objetivos

3.1. General

La teoría de la complejidad y las neurociencias en el empoderamiento y uso contextualizado de las fracciones entre los estudiantes de grado cuarto del colegio Aspaen Gimnasio Yumaná, enfocados en la resolución de problemas.

3.2. Específicos

✔ Identificar las nociones referentes a las fracciones que presentan los estudiantes al iniciar el proceso de investigación.

✔ Realizar un seguimiento de los procesos de razonamientos desarrollados por los estudiantes durante la implementación de esta propuesta didáctica.

✔ Evaluar el impacto de la metáfora del archipielago de los fraccionarios en la resolución de problemas.

✔ Evaluar desde la neuropedagogía el aprendizaje significativo de las fracciones.

- ✔ Interrelacionar sinergias entre las competencias lógico-matemáticas involucradas con "idea de fracción" hasta un apreciable nivel versus interdisciplinariedad que han estructurado los sujetos de aprendizaje al terminar esta investigación.

Capítulo 4

Marco teórico

El presente estudio se ubica en el conjunto de investigaciones que estudian los procesos de aprendizaje de resolución de problemas en las matemáticas situación estudiada en profundidad para diferentes conceptos matemáticos, relacionada con la formación en el proceso de las fracciones e identificar los obstáculos que se presentan en los estudiantes en el proceso de adecuar estos conocimientos a situaciones que involucren el desarrollo de actividades o estrategias nuevas, que permitan dar solución a situaciones problémicas.

4.1. Aspectos históricos del concepto de fracción

Existen varios conjuntos numéricos, algunos son subconjuntos de los otros, entre los principales tenemos a los complejos, imaginarios, reales, racionales, enteros, naturales y racionales, estos últimos, los vamos a ver a continuación con mayor detalle, empezando con la definición y luego una muy breve historia.

El número racional se define como una pareja de números enteros llamados numerador y denominador, en donde en la relación a/b, b sea diferente de 0. Se escribirá así: a/b donde m es el numerador y el denominador. Según Kieren (1988), “los números racionales”son los números expresables como razón o cociente de dos números enteros y por consiguiente, entre ellos contamos con todas las fracciones, porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones, esto es, los decimales finitos y los periódicos. (Tamayo et al., 2011).

Otro autor que también propone el concepto de Fracción es Freudenthal (1983), asumiendo que el término “fracción”parece pasado de moda, los números racionales son objetos matemáticos desde un punto de vista más actual, para él existe cierta diferencia entre “fracciónz “número racional”, las *fracciones* son el recurso fenomenológico del número racional, mientras que “fracción”, está relacionada con romper o fracturar, el “número racional.está relacionado con “razón”, mas no en el sentido de la razón sino en el de proporción, de medida. Además, la noción “parte-todo”, ya que afirma que es limitada no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente, ya que bajo este enfoque sólo podrían reconocerse como fracciones, las que son fracciones propias (el numerador es menor que el denominador).

Es interesante anotar que a los racionales positivos se les llama fraccionarios, además, Vasco (1994), propone el “Archipiélago Fraccionario”, La comparación es realizada tomando el conjunto de los racionales como un archipiélago que como su nombre lo indica no tiene una sola isla, sino varias. Según Vasco (1994), el Archipiélago Fraccionario, se define como:

> *La isla principal del Archipiélago Fraccionario era una Isla en donde vivían unos monstruos muy peligrosos que se llaman “monstruos achicadoresz otros que se llaman “monstruos agrandadores”. Además, allá vivía un monstruo que no le hacía nada a nadie, que se llama “el monstruo mansito”. Así, cuando visitemos esa isla, debemos considerar a los fraccionarios como operadores o transformadores ampliadores o reductores, pero me gusta más llamarlos “monstruos agrandadores y achicadores”. El monstruo mansito sería como un operador que no opera, o un transformador que no transforma, a veces llamado por los matemáticos “operador idéntico”, pero sin decirnos idéntico a quién. (pp.46)*

En cuanto a la historia, comenzaremos mencionando que Diofanto en el siglo III, d. C., fue el primero de los matemáticos griegos que trató las fracciones como números.

La cultura de los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1. En la escritura, la fracción la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido, y debajo, o al lado, ponían el denominador; el numerador no se ponía por ser siempre 1. Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persiste hasta la época medieval. Según Tamayo et al. (2011), "para los antiguos egipcios, el problema de expresar las partes de un todo fue el motor de la invención de los fraccionarios, como la necesidad de medir cantidades continuas porque los números naturales resultaban insuficientes."(p. 210).

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, más conocido como **Fibonacci**, famoso entre otros trabajos por la serie de Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal (vínculo) para separar numerador y denominador en las fracciones.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. De acuerdo con Tamayo et al. (2011), "las matemáticas árabes tienen un auge importante en el manejo de los números racionales e introducen una notación más actual."(p. 210).

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los expresaba de una forma complicada; así para 123,456 escribía 123(0) 4(1) 5(2) 6(3). Según **Freudenthal** (1994), "en las propuestas de Stevin, las fracciones decimales se conectan estrechamente a un sistema decimal de medida."(p. 49).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, más concretamente en 1792.

La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal. La escritura fraccionaria tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes como *el tiempo, da lugar a la notación decimal. (Centeno, 1988, citado en Tamayo et al., 2011).*

El concepto de fracción desde su origen histórico respondió a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: el problema de distribuir 1, 2, 6 ó 7 hogazas de pan entre 10 personas, es una de las situaciones aparentemente resueltas en el Papiro de Rhind (también conocido como papiro de Ahmes, quien lo copió en 1650 A.C), como una de las referencias históricas más antiguas de la aparición de este concepto. (Méndez, 2003, citado en Tamayo et al., 2011)

Con relación a las operaciones, Freudenthal (1994), nos dice que “en la didáctica tradicional de las fracciones, la multiplicación está vinculada al patrón rectangular antes que al operador fracción.”(p. 48), por otro lado, más atrás menciona que le parece molesto que “tres veces”sea una operación natural, igual como lo es “1/3 de”, lo cual da a entender que para la multiplicación de fracciones se puede reemplazar “m/n de”por “m/n veces.”(p. 42).

Thomas Kieren desde los años setenta ha venido investigando acerca de los diferentes significados que le son asociados a la fracción, en 1976 realizó una publicación, en la que advierte de al menos siete interpretaciones de los números racionales. Esta polisemia es la razón principal de las dificultades de aprendizaje, tanto relacionadas con el concepto como con las operaciones. (Fandiño, 2009)

Kieren[1] (1976, p. 133), en un análisis de los números racionales, sugiere siete interpretaciones para los fraccionarios y los números racionales: (Fracciones - Decimales - Pares ordenados <clases equivalentes> - Medidas - Cocientes - Operadores - Razones). Sin embargo, más adelante Kieren (1983, p. 137) menciona cinco sub-constructos, a saber: (Parte todo - Razón - Cociente - Medida - Operador).

De acuerdo con Kieren (1976), los sub-constructos “parte-todo y razón.$^{\text{es}}$tán estrechamente relacionados, éstos han formado las bases tradicionales y modernas para el desarrollo del significado de fracción. En el sub-constructo “parte-todo”, algo entero es roto en partes iguales. Este sub-constructo enfoca la atención de los racionales como elementos en el álge-

[1]El texto citado de Kieren se encuentra en inglés, la traducción es realizada por el investigador

bra de funciones. Para una mayor claridad y comprensión en cuanto a los constructos de Kieren, citaremos a Obando (s. f.), él hace mención a la fracción como relación parte-todo de la siguiente manera:

La fracción, como relación Parte-Todo, puede ser definida como una "nueva cantidad"que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte. Las magnitudes involucradas pueden ser continuas o discretas, y por consiguiente, las unidades (el todo) simples? o compuestas respectivamente. (p. 61).

Figura 4.1: La fracción como porcentaje, razón, cociente y medidor.

Además, Obando menciona a los números racionales como medida, de la siguiente forma:

Se entiende por fracción decimal a aquellas fracciones en las cuales el denominador es una potencia de 10. Éstas pueden ser notadas de dos formas: en la notación de fracciones

(fracciones de la forma $1/10^n$*, con n = 1, 2, 3, ...) o en la notación decimal (es decir, en la notación de los puntos o las comas:* $a, b_1, b_2, b_3, b_4 ... b_n$ *con bi = 0, 1, 2, ..., 9).*

Otro sub-constructo, es el cociente indicado, que permite interpretar la fracción a/b como el cociente entre dos cantidades a y b. Esta es quizás la interpretación más común para las fracciones. El nombre de cociente indicado expresa que la división no se realiza a través del algoritmo convencional, sino que la fracción es el cociente.

Teniendo en cuenta el modelo propuesto por Kieren (1983), la propuesta del archipiélago fraccionario planteado por Vasco (1994), Obando recoge algunos aspectos relacionados con las implicaciones didácticas, tales como:

- ✔ El concepto de unidad es vital para la comprensión de los racionales, cuando el estudiante pierde el segmento unidad o la distancia unidad, no puede relacionar de manera correcta los otros aspectos como la parte, en la noción parte todo o los puntos en los que ha de dividir la recta, como es el caso de la recta numérica.

- ✔ Se hace necesario estudiar los racionales desde sus diferentes representaciones, de tal manera que el estudiante pueda encontrar diferentes maneras de identificar el concepto.

Se puede pensar en abordar la enseñanza desde dos ejes fundamentales sobre los cuales organizar la enseñanza de los números racionales: desde la relación Parte - Todo y desde el operador fraccionario. El primero favorece las situaciones aditivas, mientras que el segundo las situaciones multiplicativas. Sobre ambos ejes se pueden sustentar trabajos en las demás interpretaciones, incluida la familia de las razones, para así rescatar las posibilidades que cada una de ellas ofrece en cuanto a la conceptualización de las fracciones y, en última instancia, de los números racionales.

4.2. Pensamiento complejo en la educación matemática

Para abordar en el tema es necesario recordar que el profesor observa con inquietud en el aula de clase que los alumnos de su curso parecen polarizarse en dos grupos: aquellos con un adecuado rendimiento y otros con uno deficiente. Bajo la mirada lineal, esto no tiene una explicación simple, pues sería esperable un espectro amplio de rendimientos, acorde a las capacidades de cada alumno. Sin embargo, bajo la perspectiva de los Sistemas Complejos, esta polarización se explica porque los alumnos buenos estarían inmersos en un círculo virtuoso (bucle con realimentación positiva incrementante), mientras que los alumnos con un rendimiento pobre serían parte de un círculo vicioso (bucle con realimentación positiva decreciente). En efecto, aquellos alumnos que comienzan el curso con una predisposición positiva y que rinden bien, se motivan adecuadamente, aprenderán los contenidos y eso les permitirá estar mejor preparados para seguir bien el resto del curso, **Maldonado, (2014)**. Por otra parte, aquellos alumnos que comienzan mal están peor preparados para continuar con el aprendizaje de los contenidos del resto del curso. Al mismo tiempo, este ejemplo sugiere que este sistema educativo se auto organiza, sin control ni intervención externa.

Por ello, debemos analizar cómo esas reglas influyen en la interacción entre agentes y qué tipo de propiedad emergente crearán. Aquí radica justamente el problema con los fenómenos emergentes: se puede reconocerlos e identificar sus características solamente una vez que estos ocurren. El problema es que ese análisis ex-post nos dice poco respecto a cómo debemos intervenir a los agentes para que emerja el comportamiento que deseamos. En el ejemplo de la bandada, si se desea que ésta vuele en cierta dirección, no se le puede decir a cada pájaro que tome esa dirección, ya que estos mantienen solamente una posición relativa respecto a los otros, construyendo colectivamente una trayectoria de vuelo que resulta una propiedad emergente de la agregación de los comportamientos individuales. Por ello, en principio, se debería intervenir las reglas de comportamiento individual. Sin embargo, la pregunta es cómo se debe alterar dichas reglas para lograr que la bandada vuele en cierta dirección. Lo mismo sucede en nuestro ejemplo con los alumnos: el profesor debería diseñar la intervención para que los alumnos cooperen entre sí y aprendan, pero eso es una propiedad emergente. Luego, se puede pensar que el profesor debe diseñar reglas que incentiven a que los buenos alumnos ayuden a los de menor rendimiento y, a su vez, que estos acepten trabajar. Sin embargo, la consecuencia de intervenir las reglas de comportamiento individual de los alumnos para que se alineen con dicho objetivo, no se sabrá hasta que se haya efectuado la acción y observado los resultados obtenidos en el sistema. La complejidad del fenómeno no está tan solo en la gran cantidad de variables que intervienen, sino que también en la forma en que estas interactúan entre sí; el cual se puede entender mejor a través de un cambio de paradigma ligado a los Sistemas Complejos.

Siguiendo con el ejemplo del profesor, si se ha esforzado en aplicar diversas estrategias para mejorar el rendimiento de todos sus alumnos y aun así no observa una mejoría global y pareciera que se ha exacerbado el disímil rendimiento entre alumnos, ¿Qué estará ocurriendo? Probablemente la primera estrategia del profesor está basada en una mirada del proceso educativo como si fuera una expresión de la Teoría de la Información (SHANNON, 1948), en la cual hay un emisor, un receptor, un canal de comunicación y un mensaje que se procura entregar evitando al máximo cualquier interferencia o ruido.

Los Sistemas Complejos no sólo explican mejor, sino que pueden dar pistas para diseñar intervenciones educativas más certeras. Si los procesos educativos corresponden a fenómenos complejos, esto no hará necesariamente más difícil la intervención o reducirá las expectativas de éxito, pero reconocer eso permitirá que dicha intervención sea menos ingenua y pondrá límites realistas a los resultados esperados.

El fracaso de dicha intervención podría asociarse a que el profesor no reconoce estar en presencia de una propiedad emergente. Es cierto que el profesor entiende que el aprendizaje se crea en buena medida a partir de la interacción entre los alumnos y por eso trata de intervenir a nivel macro. Sin embargo, dicha interacción se basa en las reglas de comportamiento individual de cada agente, o sea, ocurre a nivel micro.

4.3. Sistemas emergentes en la educación

También, se debe considerar que el fenómeno de aprendizaje es una propiedad emergente tanto a nivel individual (estudiante) como a nivel colectivo (conjunto de estudiantes del curso). En el plano individual, sabemos que las neuronas cerebrales, fuente de nuestras capacidades cognitivas e intelectuales, son dispositivos muy simples. Se limitan a ponderar ciertas entradas (estímulos), luego estas entradas ponderadas se suman y si dicha suma excede un umbral, se gatilla una salida que es un estímulo para una entrada de otra neurona (Rumelhart, McClelland y PDP research group, 1986). Pareciera difícil pensar que un dispositivo (agente) tan sencillo fuera capaz de realizar alguna función superior o que tenga características interesantes (aprendizaje). Sin embargo, de a interacción de miles de millones de neuronas emergen propiedades tales como aprendizaje e inteligencia. Nótese que estas propiedades no son inherentes a una neurona en particular, sino que a la interconexión de un conjunto de muchas de estas. Luego, debemos reconocer que el aprendizaje en un individuo se basa en estas **propiedades emergentes** de sus neuronas cerebrales.

Por lo tanto, la expectativa de éxito se basó en compartir los contenidos de la manera más constructiva, observando cualquier perturbación. En las estrategias del docente se puede observar la bien difundida tendencia a aplicar un paradigma lineal de causa-efecto para tratar de entender los procesos educativos. En esa lógica, hay un sistema simple al cual se quiere entregar a mayor cantidad de información sin pérdida de esta, a lo que posteriormente se agrega la variable motivacional, entre muchas variables que el educador podría intentar integrar para tener mejor expectativa de éxito. Estas estrategias corresponden a un paradigma que trata de explicar un sistema integrando el máximo de parámetros de observación, y que pretende controlarlos para así llegar a los resultados planificados. Sin embargo, no logra dar cuenta de la complejidad intrínseca del sistema, es decir, esta explicación intenta complicar un sistema desde una mirada simple, pero sin comprender toda su complejidad inherente. Es cierto que para escribir adecuadamente a un sistema debemos considerar la mayoría de sus variables; pero también es muy importante tener en cuenta la forma en que dichas variables se relacionan entre sí.

Se tiene una situación en el aula de clase, puesto que el fenomeno emergente a nivel neuronal actúa de tal forma que los estudiantes con un mejor desempeño academico se reunan y desarrollen la actividad propuestas a diferencia de los estudiantes que no les interesa la materia.

Por ello, La perspectiva propuesta en este trabajo brinda una nueva manera de comprender los fenómenos educativos, complementando la mirada tradicional. Lejos de pensar que la educación se ciña por fenómenos lineales. No obstante, este camino no es fácil, aunque puede verse auxiliado por la ayuda de herramientas tales como MbA (WILENSKY; RAND, 2007). En la educación, la aplicación de MbA requiere tanto experiencia en modelaje como conocimiento del fenómeno educativo. Esto último alienta el llamado al trabajo **interdisciplinario** entre investigadores en ciencias de la educación y en análisis de sistemas complejos.

Para no correr riesgo y hablar de un modelo lineal es conveniente complementar dicha mirada con la perspectiva de los Sistemas Complejos. De hecho, comúnmente al pensar aplicando solamente el paradigma lineal, se puede caer en la trampa de centrarse en identificar un único foco de análisis e intervención en educación. Por lo tanto, al hablar en sistemas complejos, atendemos a la íntima relación (acaso diálogo) entre los niveles micro y macro, proponiendo intervenciones en ambos niveles, pero sin pretender resultados exactos y lineales, sino que propuestas que tengan una mayor probabilidad de ocurrencia.

Ahora, abordando específicamente el fenómeno educacional, si se considera los procesos de aula como expresiones de comportamiento complejo, es esperable también que distintas intervenciones tengan resultados completamente diferentes, originados en la sensibilidad que tienen los sistemas y, muy particularmente, aquellos compuestos por seres humanos. Tan sólo como ejemplo, al analizar la motivación de un alumno, se ve que tiene una expresión individual, depende de distintos factores, como los padres, la convivencia social en la que se encuentre inmerso. Finalmente, a lo largo de este escrito se ha pretendido evidenciar que los procesos implicados en la educación podrían analizarse a través de una nueva mirada de distintos fenómenos de la naturaleza a través de un nuevo marco ligado a los Sistemas Complejos. Este marco permite abrazar la complejidad inherente al fenómeno y, así, promover las acciones más adecuadas para los fines del proyecto educativo.

4.4. Neurociencia, neuropedagogía y educación

Hablar de innovación o transformación en la educación y de la práctica pedagógica implica comprender que es lo que realmente debe ser transformado; es decir, que no se trata solo de las habilidades cognitivas y razonables con las que está dotado el ser humano, sino también de habilidades emocionales, sociales, morales, físicas y espirituales, todas ellas pertenecientes al más noble órgano del cuerpo “el cerebro”. De allí debe partir dicha transformación y no solo del cerebro del alumno, sino que principalmente en el cerebro del educador.

El proceso de aprendizaje involucra todo el cuerpo y el cerebro, reconociendo éste como el único órgano del cuerpo humano que tiene la capacidad de aprender y enseñarse así mismo, debido a que al estar conformado por casi 100 mil millones de neuronas conectadas entre sí, forman un sistema de comunicación entre ellas, llamada Sinapsis que permite que el cerebro aprenda segundo tras segundo y con una capacidad de captar dicho aprendizaje de diferentes maneras y por diferentes vías; ya que se encuentra diseñado naturalmente para aprender. De esta forma el cerebro se convierte en un ente clave para lograr un verdadero aprendizaje y por tal razón, se debe direccionar a que el docente conozca de manera más amplia el cerebro, cómo es, cómo aprende, cómo procesa, registra y evoca una información; para que a partir de este conocimiento pueda mejorar las propuestas y experiencias de aprendizaje que se dan en el aula; planteando diferentes estrategias que ofrezcan al alumno varias oportunidades para aprender.

Teniendo en cuenta el aporte de la neurociencia en el proceso educativo, se hace necesario una restructuración en cada una de las prácticas pedagógicas en el aula si se quiere vincular el aprendizaje y el cerebro. Es de esta forma que emerge notablemente una nueva línea de pensamiento y acción la neuroeducación que tiene como objetivo acercar a los agentes educativos hacia los conocimientos relacionados con el cerebro y el aprendizaje; considerándose desde allí la unión entre la pedagogía, la psicología cognitiva y las neurociencias, indispensable para la innovación y la transformación en las instituciones educativas y para el fortalecimiento de la calidad de la educación. De igual forma, renace desde la experiencia en el aula la Neuropedagogía una disciplina tanto biológica como social, que propone el estudio del cerebro humano entendido como un órgano capaz de ser modificado por los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es así como la neurociencia se centra en descifrar el lenguaje del cerebro y la neuropedagogía en comunicar dicho lenguaje.

La neuropedagogía es una ciencia naciente, cuyo objetivo es el estudio de la educación y el cerebro humano, entendido como un órgano social, que puede ser modificado por la práctica pedagógica. Es decir, es de gran envergadura que los docentes, entiendan como mínimo los principios básicos de su fundamentación, que se encuentra en las siguientes teorías:

- **Teorías Monádicas**

  El cerebro monádico percibe la inteligencia como una sola, y no acepta la existencia de distintas inteligencias. Es decir, el cerebro monádico era un todo por ello que se entendía una sola forma de instrucción.

  El principal investigador de esta teoría fue el anatomista Francis Joseph Gall (1758 - 1828). Las razones por las cuales inició esta investigación no se tenía conocimiento sobre ninguna de las estructuras cerebrales. Esto estudia la mente y el carácter de una persona por su forma del cráneo. Consistía en medir la inteligencia general, donde los diferentes puntos estaban clasificados para la edad en la que los niños podían resolverlo. La puntuación de un niño, basada en un número de respuestas correctas, marcaba la llamada "edad mental"del niño y la cual, dividida entre la edad cronológica, permitía obtener un índice (el cociente intelectual), que multiplicado por cien sigue siendo la medida típica de los test de inteligencia general. (2008, pag.56). Ver Figura 4.2

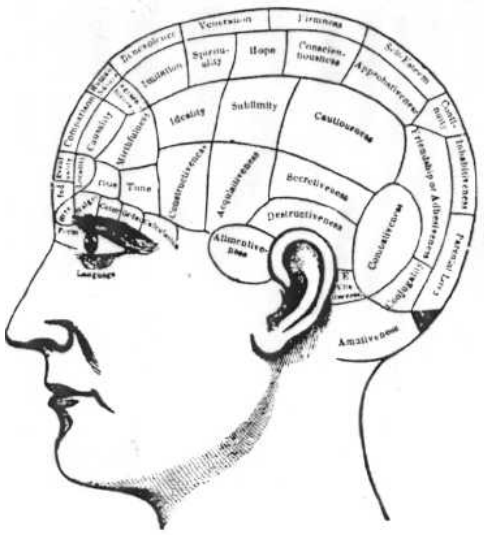


Figura 4.2: Teoría Monádica

En conclusión, debido a la falta de investigaciones sobre el estudio del cerebro y sus estructuras, Josehp se basó en medir la inteligencia de los niños dependiendo a la forma del cráneo.

- **Teorías Diádicas**

  Las teorías diádicas sobre el cerebro humano plantean que cada uno de los hemisferios cerebrales percibe, memoriza, procesa, conceptualiza, interpreta de forma independiente, siendo el hemisferio izquierdo mucho más eficaz en el proceso del lenguaje, la escritura y el cálculo, y el derecho en otras tareas complejas relacionadas con la imaginación, la intuición, la percepción y la fantasía. (Jiménez, 2006, p8.

  Es decir, el cerebro se divide en dos hemisferios, que actúan mandando órdenes a diversas partes del cuerpo en el hemisferio correspondiente.

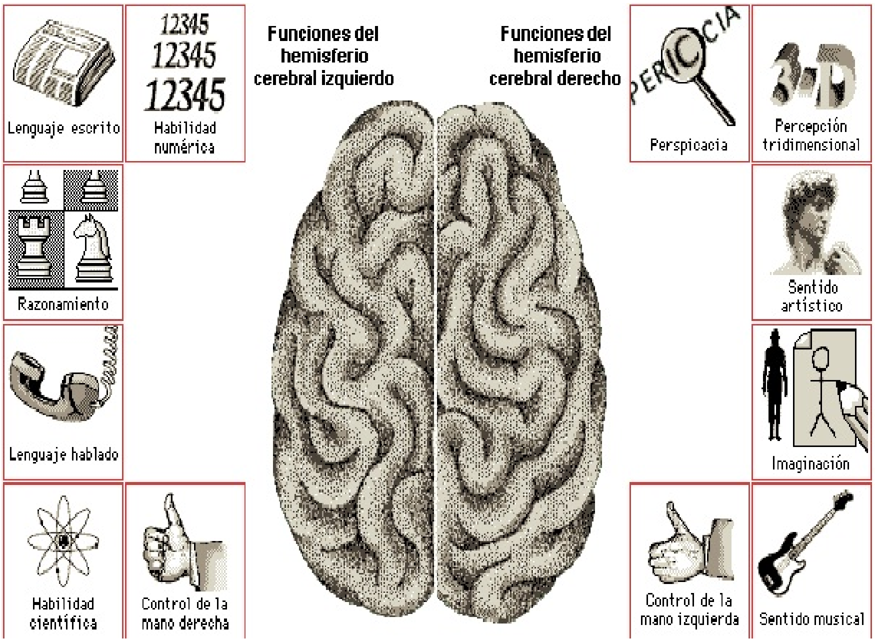


Figura 4.3: Teoría Diádicas

- **Teorías Triádicas**

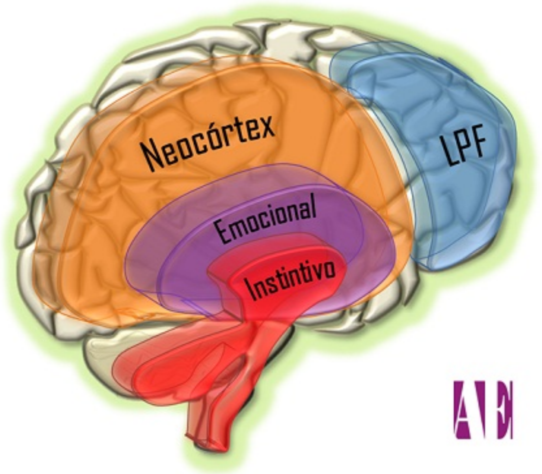


Figura 4.4: Teoría Triádica

Esta teoría propone una articulación entre la Inteligencia Componencial (analítica) quien desarrolla la habilidad de adquirir y almacenar información, la habilidad de aprender a tener nuevos conocimientos que cada día pueda experimentar nuevas cosas que le llamen la atención, que es la lógica analítica; la Inteligencia Experimental (creativa) que implica afrontar tareas novedosas. La capacidad de llegar a ser eficiente y automática en el pensamiento y la solución de problemas. La inteligencia implica el pensamiento creativo en la solución de problemas nuevos y la capacidad de automatización, es decir, convertir con rapidez las nuevas soluciones en procesos de rutina que se puedan aplicar sin mucho esfuerzo cognoscitivo; y, la Inteligencia Contextual (práctica) que es la adaptación al medio ambiente. Adaptarse al propio medio ambiente: implica renunciar a un entorno a favor de otro. Transformación del medio ambiente o modelamiento: intentar modelar el ambiente de tal forma que se adapte a nuestra estructura.

4.5. Antecedentes

1. **Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas. Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (1998)**.

   Cómo compilado de las conferencias que se realizaron en el Primer Simposio Internacional De Educación Matemática realizada en 1993, y organizada por el Centro De Investigación De La Matemáticas De La Universidad de los Andes, este documento resalta la importancia y aportes de cada una de las conferencias, realizadas por los autores, que presentan a la educación matemática como un área del conocimiento, desde el punto de vista tecnológico, así como el conocimiento de la teoría y su aplicación a la práctica, resaltando también el área desde la perspectiva científica, en la que la investigación se desarrolla con aplicaciones prácticas. En el que se informó al grupo de docentes de matemáticas que la enseñanza de esta área es, de hecho, un proceso de investigación, con resultados teóricos y prácticos relevantes para los problemas educativos del país.

Se estructura de la siguiente manera: en la primera parte, se hace una reflexión acerca de la historia de la investigación en educación matemática y de algunos de sus temas de actualidad; donde se presenta la evolución que la educación matemática ha tenido en España. Posteriormente se presenta la relación de algunas de las líneas de investigación en educación matemática que se han trabajado en Colombia. La segunda parte presenta dos temas de gran actualidad en la educación matemática: la resolución de problemas y la evaluación. Estos textos son producto de las discusiones que los autores tuvieron con un grupo de investigadores colombianos. En la tercera y última parte se hace una reflexión sobre los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y algunas técnicas sencillas de evaluación que un profesor puede introducir en su quehacer docente.

Como aspectos específicos, se pueden reconocer el señalamiento donde resaltan el error dentro del proceso de aprendizaje de la matemáticas, se determina entonces que el error puede contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje; que este no aparece por azar sino que surge en un marco conceptual basado sobre conocimientos adquiridos previamente y finalmente se indica que todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de error, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente. Hay que admitir como consecuencia de las reflexiones anteriores que, a partir del error, el estudiante puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el estudiante expresa un alcance incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al docente colaborar en el completar este conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

De acuerdo con la clasificación y los diferentes orígenes que se plantean en cuanto al error en la enseñanza y evaluación de las matemáticas, permitieron visualizar acerca de las posibles categorías y representación del error, a la hora de plasmarlo en la recolección de información de campo y a contribuir a un análisis clasificatorio.

Gracias a este antecedente, sumado a esto el mayor provecho que se saca de este documento, es la redirección a otros documentos, ya que los autores realizan un compendio de diferentes investigaciones realizadas en 4 países Europeos en los que se revisa la importancia, clasificación, determinación y características del error en la matemáticas, permitiendo así que se cuente con más referencias a las cuales acudir para revisar y contribuir a la fundamentación del presente trabajo de investigación.

2. **Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Bruno D'Amore-Relime, Número Especial, 2006, pp. 177-195.**

   El autor intentó mostrar una consecuencia que algunas veces se evidencia en las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión de una representación semiótica a otra, cuyo sentido deriva de una práctica compartida. El pasaje de la representación de un objeto matemático a otra, por medio de Transformaciones, de una parte, conserva el significado del objeto mismo, pero, en ocasiones, puede cambiar su sentido. Este hecho está aquí detalladamente evidenciado por medio de un ejemplo, pero insertándose en el seno de un amplio marco teórico que pone en juego los objetos matemáticos, sus significados y sus representaciones. Si se analizan las representaciones semióticas diferentes que han emergido en esta actividad, relativas al mismo evento.

   Cada una de las representaciones semióticas precedentes es el significante "aguas abajo" del mismo significado "aguas arriba" (Duval, 2003). El sentido compartido a propósito de aquello que se estaba construyendo estaba presente idénticamente y por tanto la práctica matemática efectuada y así descrita ha llevado a transformaciones semióticas cuyos resultados finales fueron fácilmente aceptados.

   No parecen necesarias largas conclusiones. Urge sólo evidenciar cómo el sentido de un objeto matemático sea algo mucho más complejo respecto a la pareja usual (objeto, representaciones del objeto); existen relaciones semióticas entre las parejas de este tipo: (objeto, representación del objeto) - (objeto, otra representación del objeto), relaciones derivadas de transformaciones semióticas entre las representaciones del mismo objeto, pero que tienen el resultado de hacer perder el sentido del objeto de partida. Si bien, tanto el objeto como las transformaciones semióticas son el resultado de prácticas compartidas, los resultados de las transformaciones pueden necesitar de otras atribuciones de sentido gracias a otras prácticas compartidas. Lo que enriquece de mayor interés todo estudio sobre ontología y conocimiento.

Sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido, como múltiple. Entonces, ¿cuál es la naturaleza del objeto matemático? No parece que haya otra respuesta que no sea la estructura, formal, gramatical (en sentido epistemológico), y al mismo tiempo la estructura, mental, global, (en sentido psicológico) que los sujetos construimos en nuestros cerebros a medida que se enriquecen nuestras experiencias. Es obvio que estas observaciones abren las puertas a futuros desarrollos en los cuales las ideas que parecen diversas confluyen por el contrario en el intento de dar una explicación a los fenómenos de atribución de sentido.

3. **Valdemoros M., Olguin E. (2009) Reparto con Fracciones: Estrategias de resolución**

   Es un estudio de caso, centrado en las estrategias de resolución de problemas de reparto con fracciones utilizadas por niños, la escuela elegida se ubica en la zona centro de la ciudad de México. Para la realización del trabajo de campo se seleccionó un grupo de cuarto grado de primaria conformado por 11 niños de ambos sexos con edades entre los 9 y 10 años.

   En el diseño metodológico la investigación se centró en 3 sesiones; las cuales permitirían identificar las principales estrategias desarrolladas por los alumnos en la resolución de problemas de reparto con fracciones y detectar las dificultades que presentaban los niños en la resolución de los problemas.

Se iniciaron las sesiones por medio de observaciones en el aula que permitieran identificar los contenidos enseñados por el docente y sobre cuales prioriza a la hora de abordar las fracciones. Acompañada de la observación se implementó un cuestionario, el cual permite evidenciar las nociones previas en los estudiantes respecto al significado de fracción como relación parte-todo y como cociente, para determinar las estrategias de resolución de problemas, posteriormente se realizaron entrevistas semiestructuradas, las cuales fueron videograbadas. La fundamentación teórica está basada en la semántica de las fracciones, partiendo de los constructos de **Kieren** (1983) donde se afirma que en la expresión a/b se adquieren cinco significados los cuales denomina subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo. Define la relación parte-todo como un todo que es cortado en partes iguales, usando la idea de fracción para cuantificar la relación entre el todo y un número designado de partes; relacionándose con cada uno de los otros cuatro sub-constructos, identificando una unidad apropiada a cada circunstancia (Kieren, citado en Olguín Trejo, E., Valdemoros Álvarez, M. (2010).

En cuanto a los resultados arrojados en la investigación se encuentra que la enseñanza está focalizada en el manejo de algoritmos más que en el desarrollo de diferentes estrategias de resolución de problemas, ya que es el maestro quien dirige la resolución de problemas y no permite que el estudiante realice un razonamiento de los problemas y de su posible solución. Los estudiantes demuestran dominio en cuanto al reparto, pero se siguen evidenciando dificultades en la interpretación y manejo de las fracciones.

Esta investigación resultó ser pertinente como antecedente en cuanto permitió reconocer algunos aspectos procedimentales del estudio, que pudieran ser replicados para recoger información pertinente en el reconocimiento de los errores y dificultades.

4. **Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales Mariela Lilibeth Herrera Ruiz (2010)**

   En la presente investigación, realizada con estudiantes de 3ª año de educación media en los cuales se deseaba indagar y describir los conflictos cognitivos que se presentan en los estudiantes al resolver situaciones con los números irracionales, para ello se proponen los tres siguientes objetivos específicos:

   - Diagnosticar las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los números irracionales.
   - Diagnosticar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.
   - Describir los obstáculos que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.

   Esta investigación se enmarca en la teoría propuesta por Socas (1997) en su tesis doctoral sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, las dimensiones afectivas descritas por Gómez (2000), la teoría de obstáculos de Brousseau (1976) y la teoría de errores de Radatz (1979).

   Se realiza la clasificación propuesta por Socas (1997) en cuanto a las dificultades presentadas en matemáticas; en cuanto a los errores, se plantea la clasificación propuesta por Radatz (1979) y la categoriza en cinco clases; En cuanto a los tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se retoman los planteados por Brousseau (1976) quien distingue tres, dependiendo de su origen:

   - De origen epistemológico, se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos, no quiere decir que se deben reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido;

- De origen didáctico, resultado de elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza;
- De origen ontogénico o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño.

En cuanto al diseño metodológico la investigación se centró en el análisis de los cuadernos de los estudiantes, evaluaciones escritas y la aplicación de un cuestionario, a partir de un enfoque cualitativo, enfocada en un estudio de caso, ya que la información es brindada directamente por el estudiante. En cuanto a los resultados se evidencia que los errores presentados por los estudiantes no son producto de situaciones espontáneas, ellos son la evidencia de que hay presentes en ellos "los conflictos cognitivos que surgen de dificultades y obstáculos"Herrera Ruiz, M. (2010).

En la investigación se plantea a partir de este diagnóstico, la necesidad de implementar en el aula estrategias pedagógicas que permitan identificar las dificultades presentes en los estudiantes, de tal manera que se generen posteriormente intervenciones didácticas.

Este estudio se constituye en un referente importante, a partir de la diferenciación que se hace de dificultades, errores y obstáculos recogiendo los aportes teóricos de Socas, Radatz y Brousseau y como estos permiten tener un concepto integral en cuanto a errores y dificultades. A partir de este estudio se pudo asumir para el presente estudio la clasificación propuesta por Radatz, ya que retoma diferentes dimensiones que no se ciñen a lo didáctico, sino que también reconocen aspectos como la complejidad del lenguaje matemático, a la aplicación de reglas, al manejo del espacio y a conceptos previos.

5. **Dos casos referidos al reparto con fracciones. Olguín E.M., Valdemoros M. (2011)**

La presente investigación plantea la identificación de las diferentes estrategias en la resolución de problemas de reparto de fracciones, a partir de la cual se quiere conocer cuáles son los procesos empleados en la resolución de problemas y cómo a partir de éstos, se realiza la construcción del número fraccionario.

Se fundamenta en los desarrollos teóricos de Kieren (1983), donde la partición y la equivalencia son dos mecanismos constructivos que permiten al niño construir los cinco significados asignables a la fracción, a los cuales identifica como sub-constructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo, este último, según las autoras, va relacionado con los otros cuatro significados de la fracción y es definido como un todo que ha sido cortado, prevaleciendo en esta situación la equidad e igualdad?; Olguín, E., Valdemoros, M.(2011).

Este aspecto permitió obtener elementos que aportarán a la identificación de las categorías iniciales de análisis, de tal manera que cuando se hiciera la clasificación de los errores presentados por los estudiantes, se pudiera tener en cuenta los constructos de Kieren y las posibles dificultades que presentan los estudiantes para su comprensión.

Como fundamentos teóricos para la identificación de las diferentes estrategias en la resolución de problemas con fracciones, desarrolladas por los estudiantes se apoya en las investigaciones realizadas por:

- Empson, Junk, Domínguez *y* Turner (2005) identifican la estrategia de coordinación de un solo artículo. Charles *y* Nason (2000) identificaron la estrategia fundante del cociente partitivo (Perera, 2001).
- En cuanto a estrategias utilizadas al resolver problemas de reparto con fracciones, Lamon (1996) apoyándose en Behr analiza las estrategias de partición de los niños en términos de las marcas y cortes, quien ha identificado la estrategia de marcar todo.
- La investigación efectuada por Mamede, Nunes *y* Bryant (2005) aseveran que en las fracciones en situaciones de cociente, el denominador señala el número de personas del reparto y el numerador el número de partes que les corresponde a

cada persona. Olguín, E., Valdemoros, M (2011).

En cuanto a la identificación de las diferentes estrategias empleadas por los estudiantes Valdemoros (1993, 2004), pone en práctica el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal), en situaciones fraccionarias, en el cual se pueden identificar los planos constituyentes del lenguaje: el plano semántico, el plano sintáctico, el plano de la "traducción"de un lenguaje a otro lenguaje o a un sistema simbólico, el plano de la escritura numérica y el plano de la lectura. Olguín, E., Valdemoros, M (2011).

La identificación de estos planos es de total pertinencia para esta investigación ya que a través de dicho modelo se pueden reconocer las dificultades que presentan los niños cuando resuelven situaciones asociadas al reparto de las fracciones. A través de los cuales se pueden identificar los diferentes procesos y dificultades que se presentan en los niños a la hora de abordar la resolución de problemas con fracciones.

La investigación es desarrollada en una escuela del sistema público localizada en el área urbana de la ciudad de México, en la cual los niños pertenecientes a cuarto grado con 9 años de edad, empleando instrumentos como cuestionarios, observación de aula y entrevistas individuales.

Un aspecto importante y que se concluye en esta investigación es que se hace necesario identificar cómo influye la enseñanza recibida en el desarrollo de estrategias que los niños implementan en resolución de problemas de reparto con fracciones. En cuanto a los instrumentos, el cuestionario permitió realizar una aproximación a los conceptos e ideas previas de los estudiantes. Dada la metodología de estudio de casos, se seleccionaron dos casos típicos para identificar las estrategias empleadas en la resolución de problemas, tal es el caso de Mario que empleó únicamente la estrategia: Divide cada unidad en el mismo número de personas, en tanto Miriam empleó la estrategia: Divide cada unidad en el mismo número de personas, pero, además, utilizó la estrategia: En su respuesta numérica, da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto.

6. **Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5º grado. Carlos Eduardo Vasco Uribe (2014)**[2]

   La didáctica de las matemáticas y el desarrollo de competencias

   En este caso, el investigador realiza un discurso ameno y entendible en una de sus conferencias mencionando tres tareas difíciles y retadoras para la pedagogía y la didáctica de cada área, en particular, la de las matemáticas: describir con cuidado cada competencia y sus niveles de desarrollo; planear formas de enseñar que fomenten el desarrollo de esa competencia, y evaluar el nivel de competencia que van alcanzando los estudiantes. Estas tareas son muy difíciles en todas las áreas; en la "educación matemática",que a veces se llama también "didáctica de las matemáticas", o "matemática educativa", para hacer un buen trabajo en nuestra área uno tendría que saber pedagogía y didáctica; tendría que saber algo de psicología, de sociología, de antropología y de lingüística; y como si fuera poco, tendría que saber matemáticas, historia de las matemáticas y epistemología de las matemáticas. Resalta que ojalá supiera uno también algo de lógica, de informática y de neurociencias. Es imposible para una sola persona haber terminado siquiera dos o tres pregrados en estas áreas, y mucho menos tener maestrías o doctorados en más de una de ellas. Por eso no puede ser un trabajo factible para una o dos personas. Hay que tener un grupo de trabajo diversificado y entusiasta y varios asesores y asesoras de distintas especialidades, muy calificados pero capaces de trabajar en equipo con personas que saben mucho menos.

   Un primer problema difícil de resolver es que las matemáticas, como ciencias formales que estudian los modelos mentales y las teorías, tienen una epistemología muy distinta

[2] Conferencia en el acto de lanzamiento de la fase piloto del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria en Barranquilla. Universidad del Norte, Barranquilla, junio 22 de 2010.

de la de las ciencias que tienen una relación directa con la realidad. El Dr. Carlo Federici, mi maestro, llamaba a las ciencias naturales y a las ciencias sociales y humanas "ciencias fácticas", para diferenciarlas de las ciencias formales, como las matemáticas y la lógica. Por ejemplo, si usted hace una conjetura en física, eso quiere decir que usted tiene su modelo mental, su teoría muy precisa con sus leyes y sus fórmulas; echa a andar su modelo, y con la ayuda de la teoría predice que va a pasar tal y tal cosa. Pero si lo que usted predijo no sucede en la realidad, peor para el modelo y la teoría: hay que cambiarlos o descartarlos. En cambio, en matemáticas, si usted se inventa un buen modelo y una buena teoría, y resulta que eso no sirve para nada en la realidad externa y no predice ningún resultado que pueda verificarse o refutarse en esa realidad, peor para la realidad.

Por todo lo anterior, si integramos nuestras competencias matemáticas con las ciudadanas; con las científicas, tanto en las ciencias sociales como en las naturales, con las competencias lingüísticas, las comunicativas, las interpretativas las argumentativas, con este proyecto podremos fortalecer en todos los niños y las niñas sus capacidades matemáticas y apoyarlos para elevar su nivel de competencia, y no solamente en los niños y niñas que estudian en los colegios privados, o en los que son una élite intelectual y sacan buenas calificaciones, sino en todos los niños y niñas de todas las extracciones sociales. Claro que no les auguro que este proyecto sea fácil. Esta conferencia de apertura intenta apenas darles un impulso inicial para que tengan una visión amplia del trabajo del proyecto y se animen a trabajar en esta competencia matemática para el manejo de los números de medir. Sabemos que nos queda pendiente una tarea muy difícil: encontrar maneras viables de evaluar el nivel de competencias al que van llegando nuestros estudiantes. Ya vimos que las preguntas cerradas de escogencia múltiple no pueden evaluar las competencias propositivas y que es muy difícil escribir buenas preguntas de competencias interpretativas y argumentativas para distintas culturas y regiones del país.

Pero lo que el ICFES no puede lograr con exámenes escritos, tal vez nosotros sí podamos lograrlo con métodos más flexibles y comprensivos para valorar y evaluar el progreso de nuestros estudiantes. Ese problema de la evaluación del nivel de competencia queda abierto, y no lo vamos a resolver ni en este proyecto ni en el siguiente. Pero a medida que vamos aprendiendo a describir cuidadosamente las competencias y sus niveles, y en la medida en que vamos progresando en diseñar estrategias para desarrollar algunas competencias, iremos aprendiendo más y más sobre cómo evaluar el nivel de competencia al que van llegando nuestros estudiantes. Trabajamos En la descripción fina de cada competencia; a la planeación de cómo enseñar para desarrollarla; al diseño de las situaciones problema que pueden contribuir a fortalecer las tres patas del modelo de esa competencia. Comencemos con el manejo competente de los números de medir, y "entremos en reversa", al diseño de situaciones problema potentes e interesantes. Vamos a explorar con los niños y niñas esa isla del Archipiélago Fraccionario en la que viven los monstruos achicadores y agrandadores, y conectémonos por medio de puentes y carreteras con las otras islas del archipiélago que tal vez conocemos mejor.

Podemos comprobar que los estudiantes sí tienen ese conocimiento que les hemos enseñado, pero solo lo sabríamos si les hiciéramos repetidas preguntas para sacarles las respuestas con tirabuzón. Así nos daríamos cuenta de que sí tienen ese conocimiento inerte e inactivo, pero que no lo usan, o no les gusta, o se sienten mal en usarlo, o no detectan la ocasión de utilizarlo; por eso no son competentes en matemáticas. Pero si logramos pasar ese conocimiento de inactivo a activo, de inerte a actuante, estamos desarrollando sus competencias matemáticas. El que rechace sin más el discurso de las competencias se resigna a que nuestro sistema educativo siga produciendo egresados incompetentes. En cambio, los que nos apropiarnos del discurso de competencia para volverlo más fino y potente, para buscar maneras de enseñar las matemáticas para el desarrollo de competencias, podemos contribuir positivamente a potenciar las capacidades del país. Enseñemos para hacer activo o actuante ese conocimiento que está dormido e inerte en el cerebro de los niños. Cada año nos quejamos de que después de diez años de hablarles de racionales, quebrados o fracciones, aun en la universidad no los conocen bien, les tienen miedo, y creen que no los pueden utilizar. Si superamos esa situación, comenzando desde ahora, expandimos las fronteras del aula y la institución educativa hacia la ciudad, el país, Latinoamérica y el mundo.

Capítulo 5

Diseño metodológico

Este estudio obedece a un enfoque cualitativo con un alcance interpretativo donde se pretende aplicar una serie de actividades en los cuales se consideran los sistemas de representación, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico en los contextos continuo y discreto, con el propósito de dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción en los estudiante, para finalizar con una propuesta de actividades basadas en los errores evidenciados y que permitan fortalecer dichos conceptos a través de la resolución de problemas.

En cuanto al procedimiento, retomando la crítica que se hace a las investigaciones en educación matemática que siguen manteniéndose los enfoques tradicionales, se requiere de miradas más comprensivas. Los procedimientos "rígidos"de recolección de datos y contrastación de hipótesis si bien son rigurosos, en algunos casos y de acuerdo con el objeto de estudio reducen desde la mirada cuantitativa el alcance y la comprensión que puedan tener, aspecto que se tuvo en cuenta en el presente estudio.

Los métodos experimentales y cuantitativos no capturan **la complejidad del hecho educativo** (2012), el sentimiento de que reducen el objeto de estudio o de que sus resultados carecen de interés, y en ocasiones la impotencia y la falta de imaginación, son motivos que llevan a muchos investigadores a abandonar las técnicas tradicionales de recogida de datos y contrastación y a elaborar y utilizar otras nuevas, más "ajustadas al objeto de estudio"que suelen argumentar como principio común. Derivado de la naturaleza del objeto de estudio de la presente investigación, se asume un modelo cualitativo, dada la complejidad del aula y los diversos factores que allí convergen.

En tal sentido, en primera instancia buscamos identificar los errores que se evidencian en los estudiantes durante la resolución de problemas que implementen las fracciones, empleando como contexto el ambiente natural del aula, en donde los estudiantes a partir de la comprensión de las temáticas abordadas en clase proceden a resolver situaciones que permitan recoger datos para el presente estudio, basados en los constructos de Kieren (1983).

El trabajo de campo se realizará en varios momentos y en el Colegio Aspaen Gimnasio Yumaná, de carácter privado, de tal manera que se pueda evidenciar la frecuencia en la aparición de los errores, y los resultados independientes, además, ya que la recurrencia determinaría la existencia de un error y no un hecho ocurrido al azar.

Posteriormente se infiere a partir de los errores encontrados y de las argumentaciones que hacen los estudiantes, las posibles dificultades asociadas a la comprensión del concepto de número racional. Diseñando actividades, en las cuales a partir de los errores detectados en los estudiantes en el proceso de solución de dichas situaciones problema durante la prueba diagnóstica con respecto a los conceptos a trabajar. Las cuales están enfocadas a la resolución de problemas, la ubicación de su contexto socio - cultural, la utilización del juego, la imaginación y la fantasía sin desligar la realidad misma del estudiante, que le permitan relacionar la multiplicidad de significados que presentan los racionales con su vida cotidiana, al igual que la apropiación de dicho aprendizaje y con su manera de percibir, memorizar, procesar y conceptualizar las situaciones presentadas, facilitando una relación de lo altamente matemático con lo simplemente cotidiano; proporcionando desde allí en el alumno la capacidad de análisis, de contextualización e interpretación situaciones que involucren los números racionales.

Es de anotar que en el planteamiento de las situaciones problema desde contextos representativos para los estudiantes, se plantea también un espacio para la argumentación de lo que el estudiante hizo y como resolvió la situación problema propuesta, ya que a partir de esa argumentación se logra evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de números racionales. Donde el análisis de dichas dificultades se realizará teniendo en cuenta las categorizaciones realizadas por Fandiño (2009).

5.1. Tipo de investigación

Para la siguiente investigación, la metodología propuesta es de tipo cualitativo directo, ya que se realiza un estudio de tipo descriptivo con metodología del aprendizaje basado en solución de problemas, haciendo referencia a la identificación de las tendencias entendidas como los enfoques, los diseños metodológicos, las temáticas de interés y los instrumentos más utilizados por los estudiantes.

5.2. Estudiantes

Se aplicaron las pruebas didácticas a un grupo de 38 niñas de grado 4 de primaria del Colegio Aspaen Gimnasio Yumaná, del sector privado, las niñas se encuentran entre las edades de 9 y 10 años.

5.3. Procedimiento

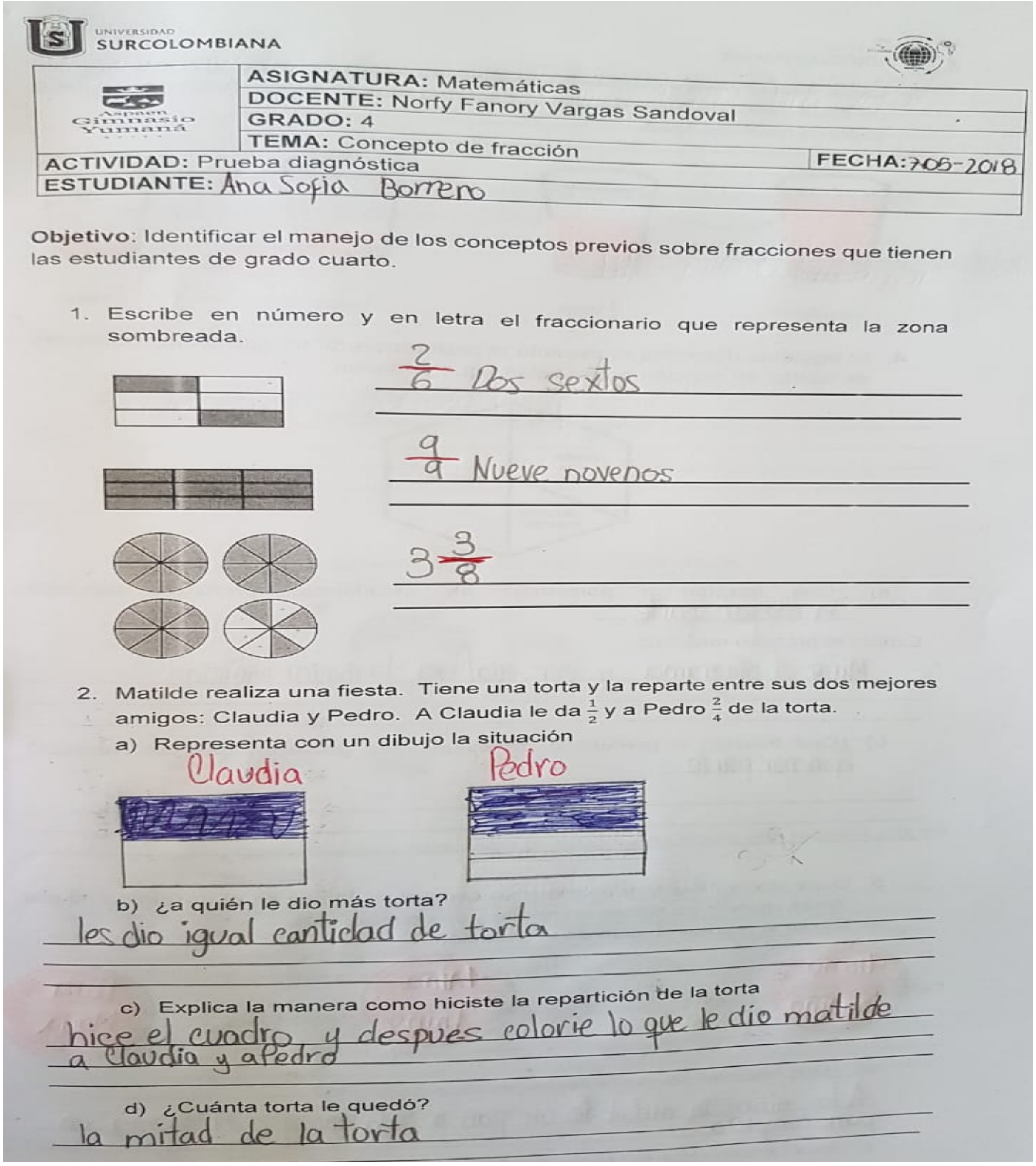
El trabajo en el aula se inició con la aplicación de una prueba diagnóstica escrita de 7 preguntas donde se recogen los aspectos básicos y más importantes sobre el concepto de los números fraccionarios (Ver prueba diagnóstica anexo 5.1). La duración de la aplicación de esta prueba fue de aproximadamente 50 minutos, la apreciación que se tuvo de las estudiantes era de inseguridad y preocupación por no manejar los procesos para desarrollar varios de los puntos allí planteados. Los resultados que se obtuvieron se presentan más adelante en el aparte de análisis de resultados.

Teniendo en cuenta las falencias presentadas por las estudiantes según los resultados de las pruebas en cuanto al manejo de los conceptos de fracción, se realizaron tres actividades didácticas organizadas de la siguiente forma:

- Actividad 1: Concepto de fracción como Parte - Todo y como operador. (ver anexo)
- Actividad 2: Concepto de fracción como cociente y como razón. (ver anexo)
- Actividad 3: Concepto de fracción porcentaje. (ver anexo)

Cada una de las actividades tuvieron una duración de dos horas y se llevaron a cabo en dos momentos, iniciando con el reconocimiento de los presaberes de las estudiantes frente al tema, luego el descubrimiento y construcción de cada uno de los conceptos con el apoyo del material concreto, el trabajo colaborativo y el acompañamiento constante del docente; finalmente el afianzamiento de los conceptos se trabajó en la resolución de problemas relacionados con el contexto de manera individual y grupal, con la ayuda y guía de la docente cuando fuera necesario.

5.4. Instrumentos



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Gimnasio Yumaná

ASIGNATURA: Matemáticas
DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval
GRADO: 4
TEMA: Concepto de fracción
ACTIVIDAD: Prueba diagnóstica FECHA: 7-05-2018
ESTUDIANTE: Ana Sofia Borrero

Objetivo: Identificar el manejo de los conceptos previos sobre fracciones que tienen las estudiantes de grado cuarto.

1. Escribe en número y en letra el fraccionario que representa la zona sombreada.

$\frac{2}{6}$ Dos sextos

$\frac{9}{9}$ Nueve novenos

$3\frac{3}{8}$

2. Matilde realiza una fiesta. Tiene una torta y la reparte entre sus dos mejores amigos: Claudia y Pedro. A Claudia le da $\frac{1}{2}$ y a Pedro $\frac{2}{4}$ de la torta.

a) Representa con un dibujo la situación

Claudia Pedro

b) ¿a quién le dio más torta?

les dio igual cantidad de torta

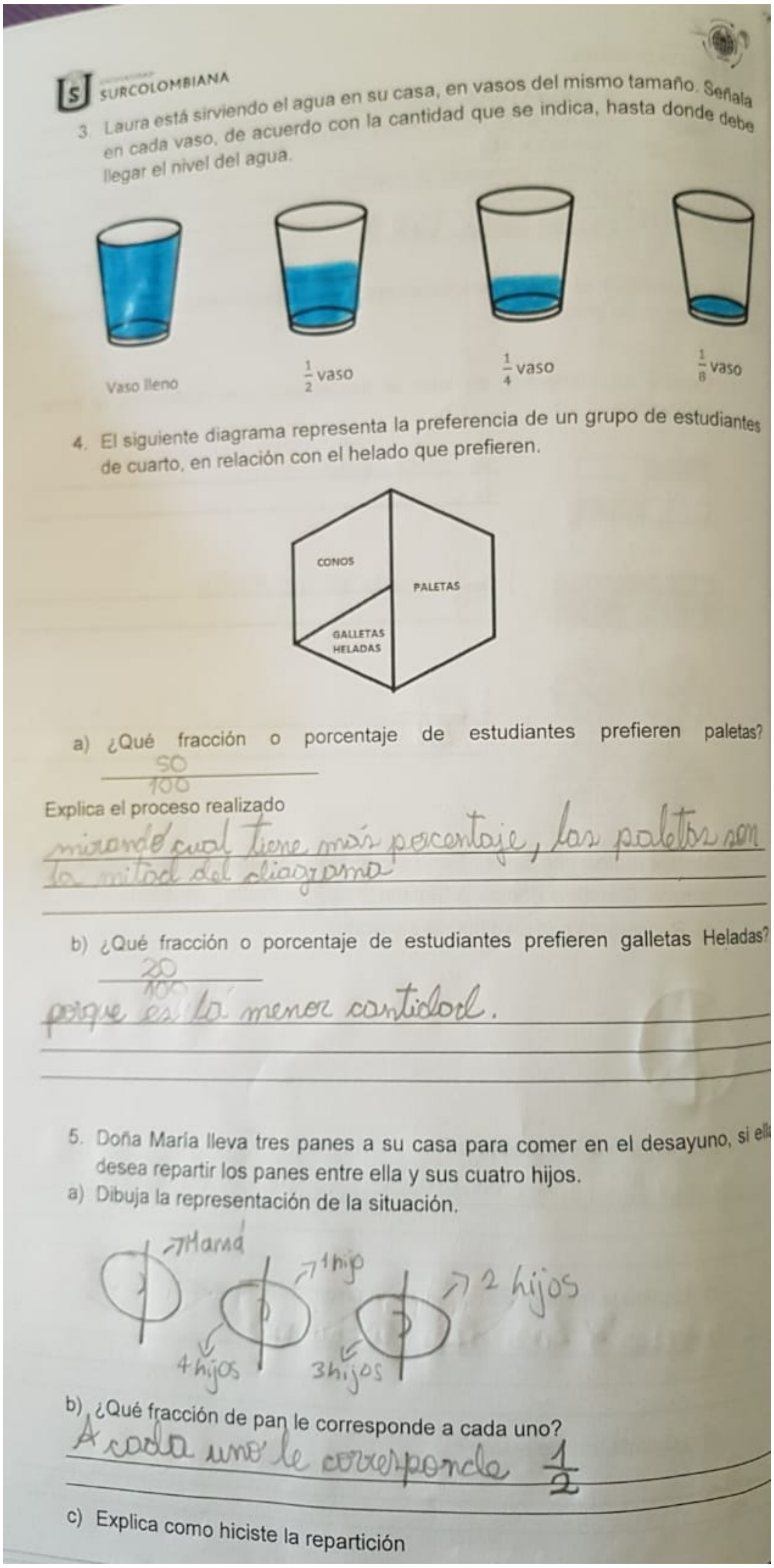
c) Explica la manera como hiciste la repartición de la torta

hice el cuadro y despues colorie lo que le dio matilde a Claudia y a Pedro

d) ¿Cuánta torta le quedó?

la mitad de la torta

Figura 5.1: Prueba de Diagnóstico 1



SURCOLOMBIANA

3. Laura está sirviendo el agua en su casa, en vasos del mismo tamaño. Señala en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta donde debe llegar el nivel del agua.

Vaso lleno | $\frac{1}{2}$ vaso | $\frac{1}{4}$ vaso | $\frac{1}{8}$ vaso

4. El siguiente diagrama representa la preferencia de un grupo de estudiantes de cuarto, en relación con el helado que prefieren.

CONOS
PALETAS
GALLETAS HELADAS

a) ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren paletas? $\frac{50}{100}$

Explica el proceso realizado

mirando cual tiene más porcentaje, las paletas son la mitad del diagrama

b) ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren galletas Heladas? $\frac{20}{100}$

porque es la menor cantidad.

5. Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro hijos.

a) Dibuja la representación de la situación.

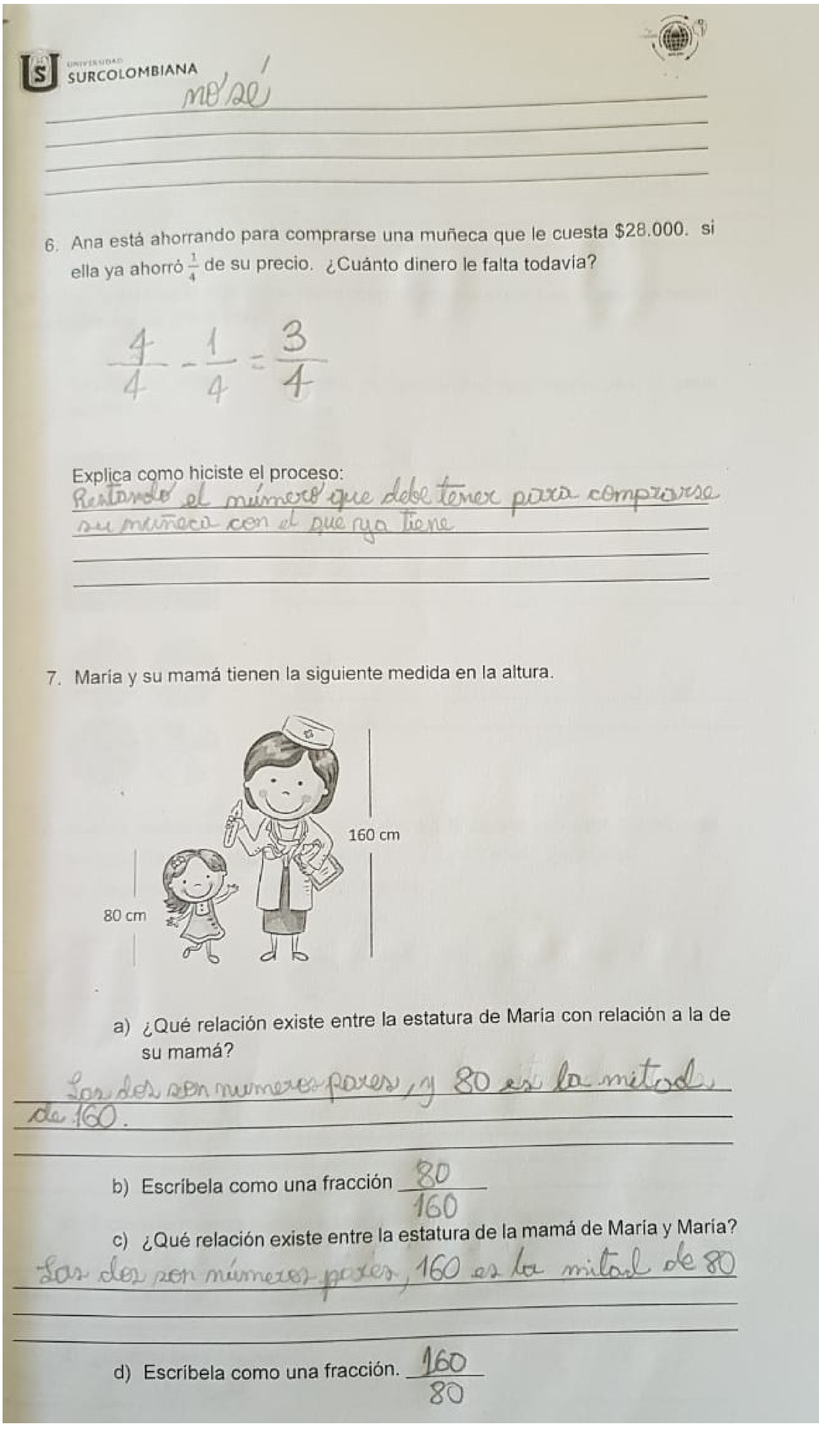
Mamá
1 hijo
2 hijos
4 hijos
3 hijos

b) ¿Qué fracción de pan le corresponde a cada uno?

A cada uno le corresponde $\frac{1}{2}$

c) Explica como hiciste la repartición

Figura 5.2: Prueba de Diagnóstico 1.1



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

no sé

6. Ana está ahorrando para comprarse una muñeca que le cuesta $28.000. si ella ya ahorró $\frac{1}{4}$ de su precio. ¿Cuánto dinero le falta todavía?

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Explica como hiciste el proceso:
Restando el número que debe tener para comprarse su muñeca con el que ya tiene

7. María y su mamá tienen la siguiente medida en la altura.

160 cm

80 cm

a) ¿Qué relación existe entre la estatura de María con relación a la de su mamá?

Los dos son numeros pares, y 80 es la mitad de 160.

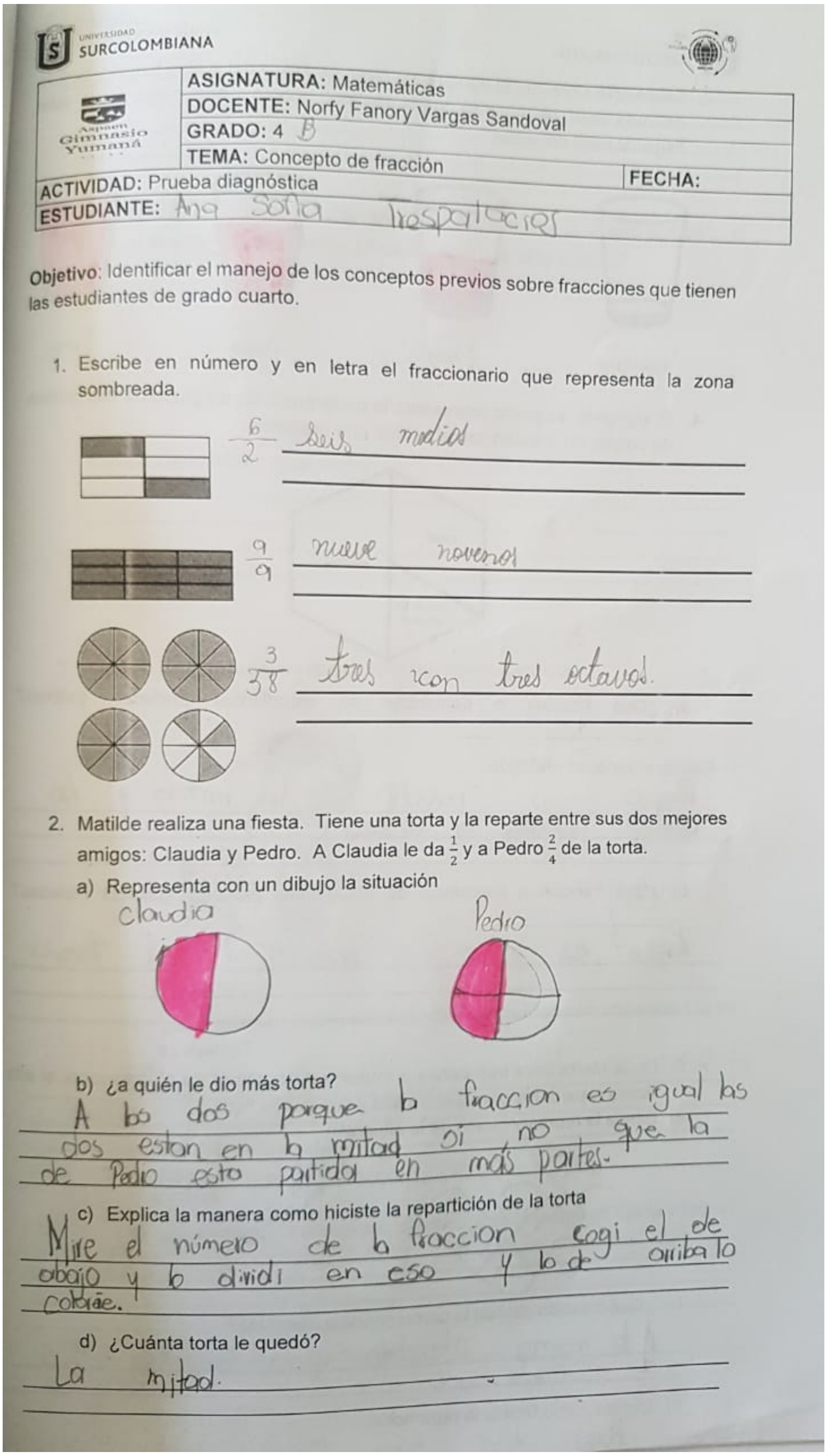
b) Escríbela como una fracción $\frac{80}{160}$

c) ¿Qué relación existe entre la estatura de la mamá de María y María?

Los dos son números pares, 160 es la mitad de 80

d) Escríbela como una fracción. $\frac{160}{80}$

Figura 5.3: Prueba de Diagnóstico 1.2



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Aspaen Gimnasio Yumaná

ASIGNATURA: Matemáticas
DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval
GRADO: 4 B
TEMA: Concepto de fracción
ACTIVIDAD: Prueba diagnóstica
FECHA:
ESTUDIANTE: Ana Sofia Trespalacios

Objetivo: Identificar el manejo de los conceptos previos sobre fracciones que tienen las estudiantes de grado cuarto.

1. Escribe en número y en letra el fraccionario que representa la zona sombreada.

$\frac{6}{2}$ seis medios

$\frac{9}{9}$ nueve novenos

$3\frac{3}{8}$ tres con tres octavos.

2. Matilde realiza una fiesta. Tiene una torta y la reparte entre sus dos mejores amigos: Claudia y Pedro. A Claudia le da $\frac{1}{2}$ y a Pedro $\frac{2}{4}$ de la torta.

a) Representa con un dibujo la situación

Claudia

Pedro

b) ¿a quién le dio más torta?

A los dos porque la fraccion es igual las dos estan en la mitad si no que la de Pedro esta partida en más partes.

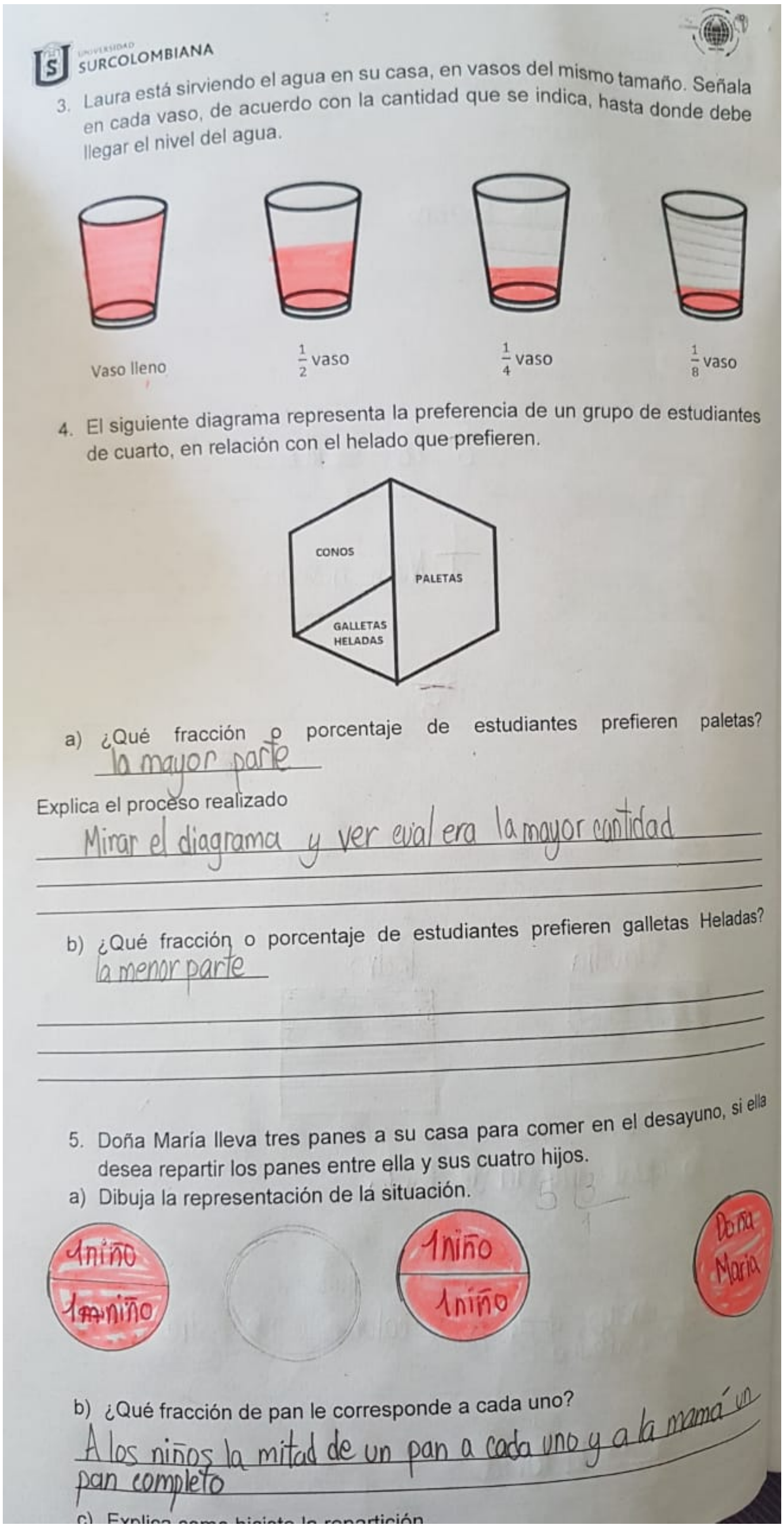
c) Explica la manera como hiciste la repartición de la torta

Mire el número de la fraccion cogi el de abajo y lo dividi en eso y lo de arriba lo colorée.

d) ¿Cuánta torta le quedó?

La mitad.

Figura 5.4: Prueba de Diagnóstico 1.3



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

3. Laura está sirviendo el agua en su casa, en vasos del mismo tamaño. Señala en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta donde debe llegar el nivel del agua.

Vaso lleno | $\frac{1}{2}$ vaso | $\frac{1}{4}$ vaso | $\frac{1}{8}$ vaso

4. El siguiente diagrama representa la preferencia de un grupo de estudiantes de cuarto, en relación con el helado que prefieren.

CONOS
PALETAS
GALLETAS HELADAS

a) ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren paletas?

la mayor parte

Explica el proceso realizado

Mirar el diagrama y ver cual era la mayor cantidad

b) ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren galletas Heladas?

la menor parte

5. Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro hijos.

a) Dibuja la representación de la situación.

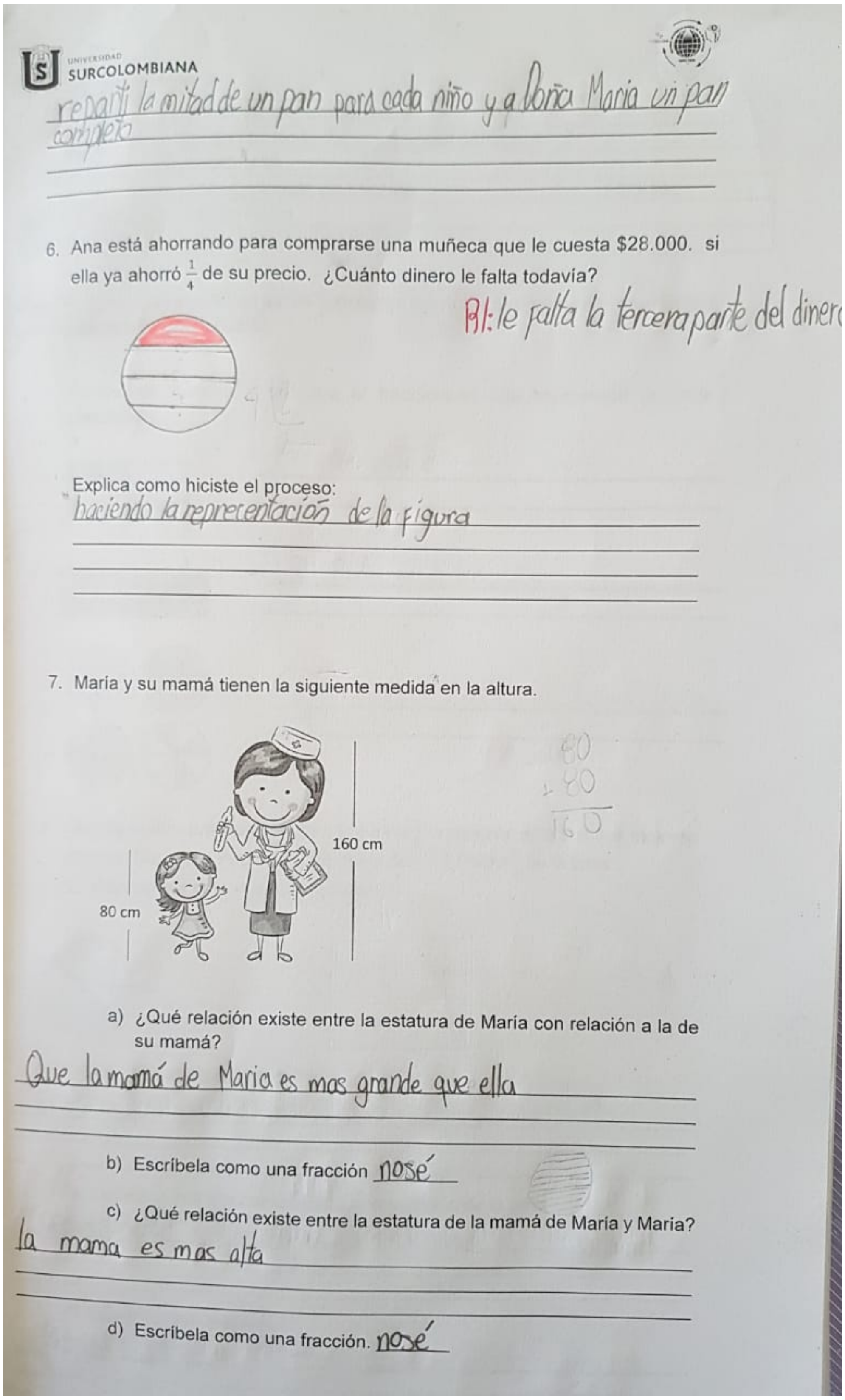
1niño
1niño
1niño
1niño
Doña María

b) ¿Qué fracción de pan le corresponde a cada uno?

A los niños la mitad de un pan a cada uno y a la mamá un pan completo

c) Explica como hiciste la repartición

Figura 5.5: Prueba de Diagnóstico 1.4



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

reparti la mitad de un pan para cada niño y a Doña Maria un pan completo

6. Ana está ahorrando para comprarse una muñeca que le cuesta $28.000. si ella ya ahorró $\frac{1}{4}$ de su precio. ¿Cuánto dinero le falta todavía?

R/: le falta la tercera parte del dinero

Explica como hiciste el proceso:

haciendo la reprecentación de la figura

7. María y su mamá tienen la siguiente medida en la altura.

$$\begin{array}{r} 80 \\ +80 \\ \hline 160 \end{array}$$

a) ¿Qué relación existe entre la estatura de María con relación a la de su mamá?

Que la mamá de Maria es mas grande que ella

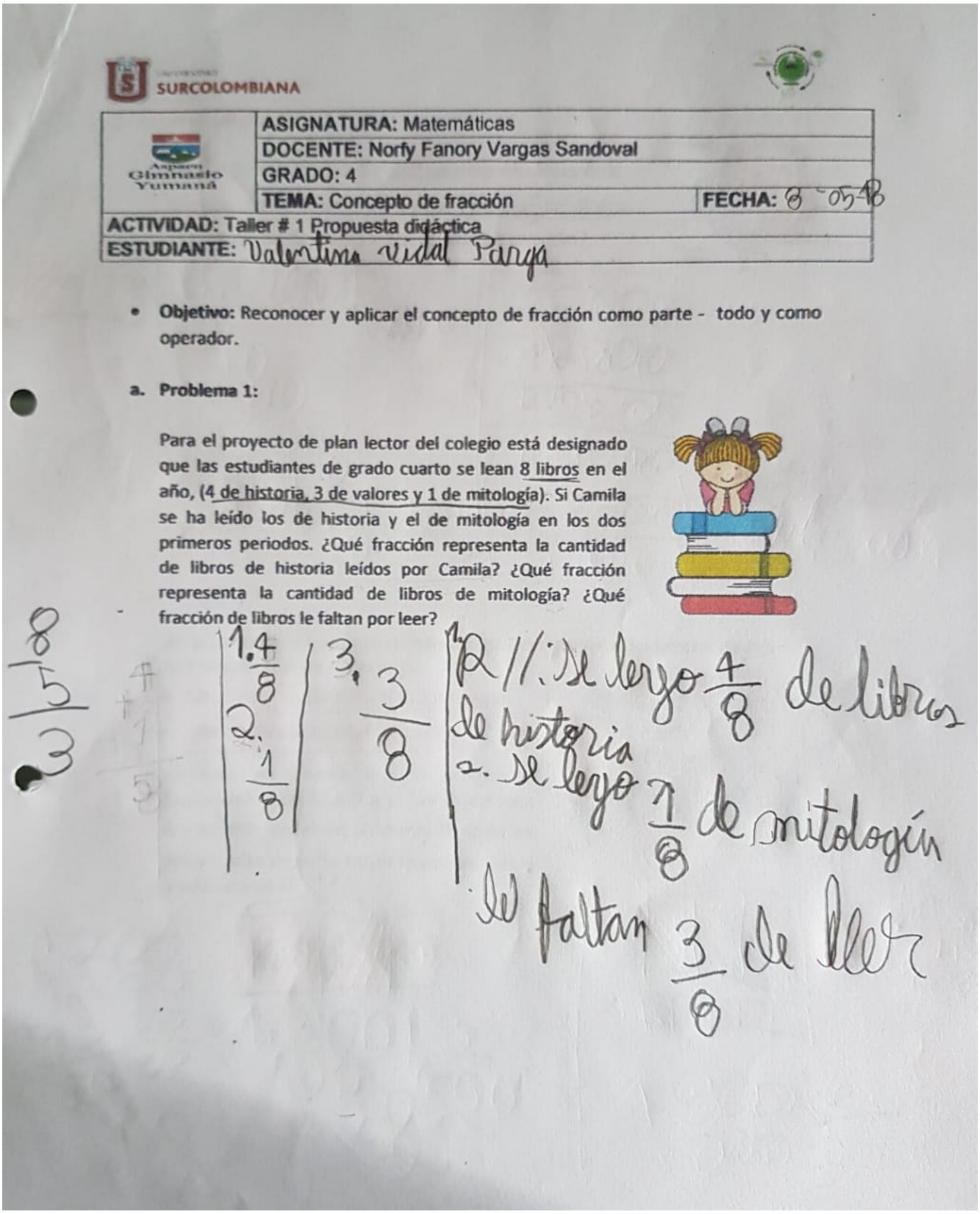
b) Escríbela como una fracción nosé

c) ¿Qué relación existe entre la estatura de la mamá de María y María?

la mama es mas alta

d) Escríbela como una fracción. nosé

Figura 5.6: Prueba de Diagnóstico 1.5



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Aspaen Gimnasio Yumaná	**ASIGNATURA:** Matemáticas
	DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval
	GRADO: 4
	TEMA: Concepto de fracción — **FECHA:** 8 - 05 - 18
ACTIVIDAD: Taller # 1 Propuesta didáctica	
ESTUDIANTE: Valentina vidal Parga	

- **Objetivo:** Reconocer y aplicar el concepto de fracción como parte - todo y como operador.

a. Problema 1:

Para el proyecto de plan lector del colegio está designado que las estudiantes de grado cuarto se lean 8 libros en el año, (4 de historia, 3 de valores y 1 de mitología). Si Camila se ha leído los de historia y el de mitología en los dos primeros periodos. ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de historia leídos por Camila? ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de mitología? ¿Qué fracción de libros le faltan por leer?

1. $\frac{4}{8}$

2. $\frac{1}{8}$

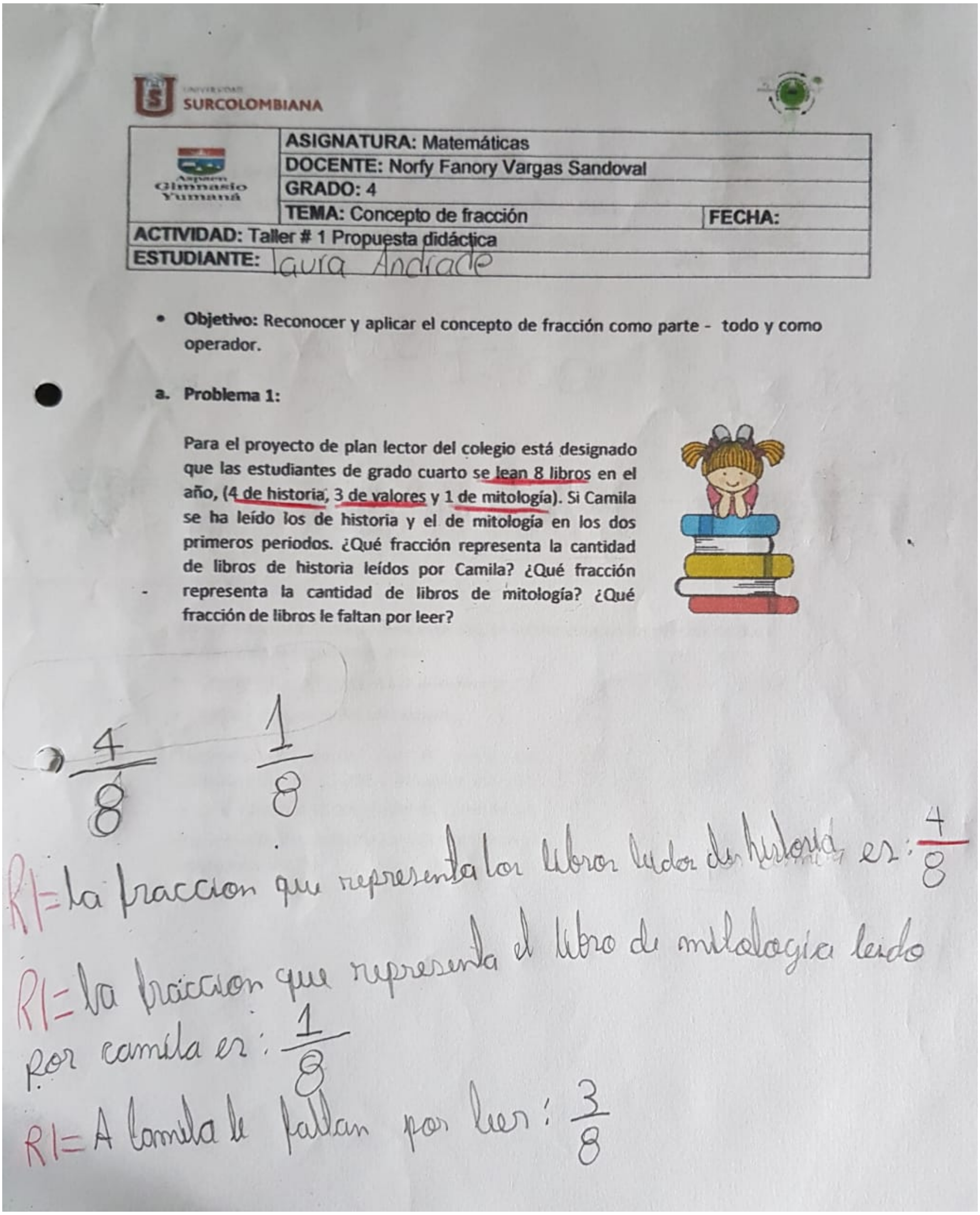
3. $\frac{3}{8}$

R//: se leyo $\frac{4}{8}$ de libros de historia

2. se leyo $\frac{1}{8}$ de mitologín

le faltan $\frac{3}{8}$ de leer

Figura 5.7: Prueba 1



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

ASIGNATURA: Matemáticas	
DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval	
GRADO: 4	
TEMA: Concepto de fracción	FECHA:
ACTIVIDAD: Taller # 1 Propuesta didáctica	
ESTUDIANTE: laura Andrade	

- **Objetivo:** Reconocer y aplicar el concepto de fracción como parte - todo y como operador.

a. **Problema 1:**

Para el proyecto de plan lector del colegio está designado que las estudiantes de grado cuarto se lean 8 libros en el año, (4 de historia, 3 de valores y 1 de mitología). Si Camila se ha leído los de historia y el de mitología en los dos primeros periodos. ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de historia leídos por Camila? ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de mitología? ¿Qué fracción de libros le faltan por leer?

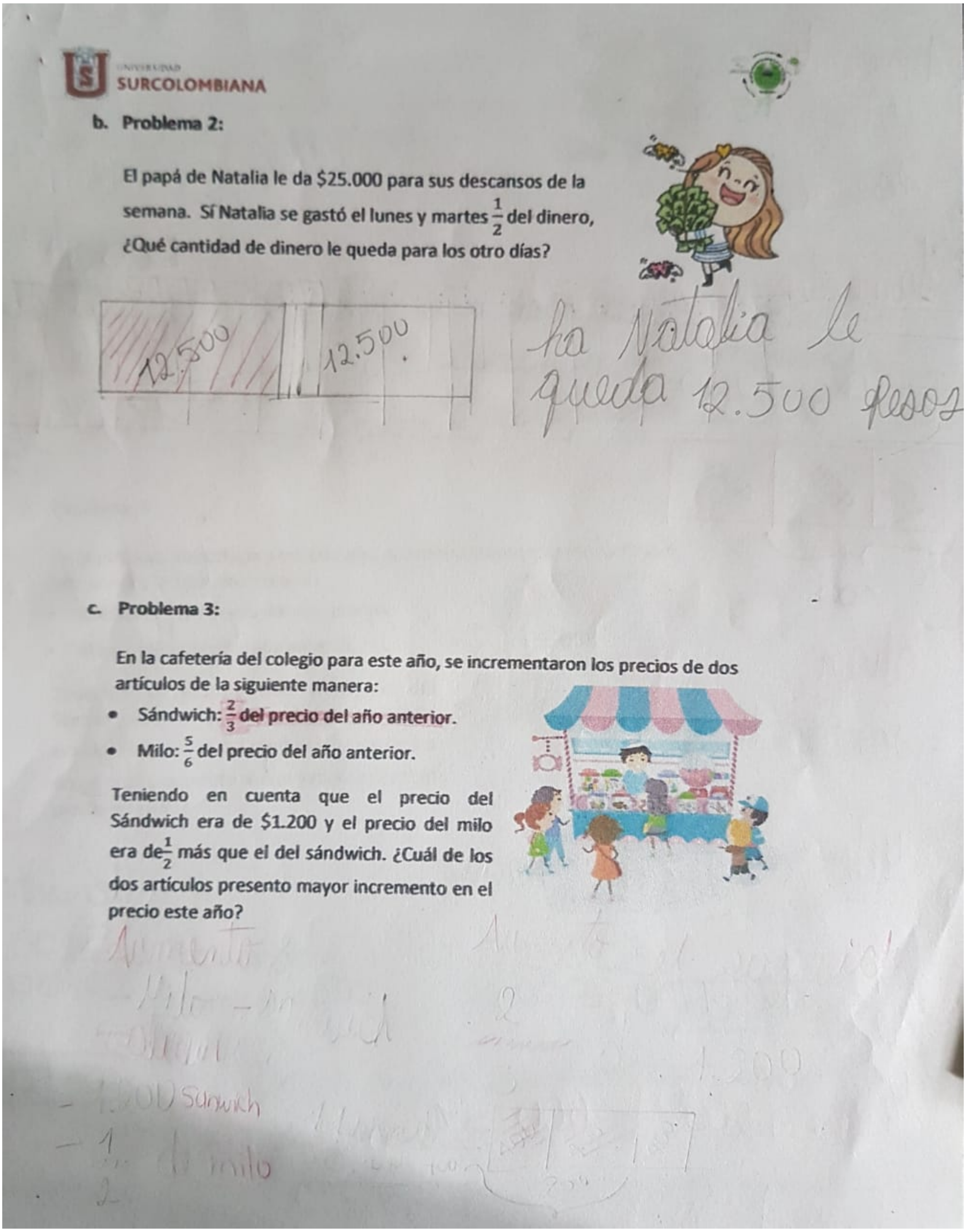
$\frac{4}{8}$ $\frac{1}{8}$

R/= la fraccion que representa los libros leidos de historia es: $\frac{4}{8}$

R/= la fraccion que representa el libro de mitologia leido por camila es: $\frac{1}{8}$

R/= A camila le faltan por leer: $\frac{3}{8}$

Figura 5.8: Prueba 1.1



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

b. Problema 2:

El papá de Natalia le da $25.000 para sus descansos de la semana. Sí Natalia se gastó el lunes y martes $\frac{1}{2}$ del dinero, ¿Qué cantidad de dinero le queda para los otro días?

12.500 | 12.500

La Natalia le queda 12.500 pesos

c. Problema 3:

En la cafetería del colegio para este año, se incrementaron los precios de dos artículos de la siguiente manera:

- Sándwich: $\frac{2}{3}$ del precio del año anterior.
- Milo: $\frac{5}{6}$ del precio del año anterior.

Teniendo en cuenta que el precio del Sándwich era de $1.200 y el precio del milo era de $\frac{1}{2}$ más que el del sándwich. ¿Cuál de los dos artículos presento mayor incremento en el precio este año?

Aumento

1.200 Sanwich

$\frac{1}{2}$ de milo

Figura 5.9: Prueba 1.2

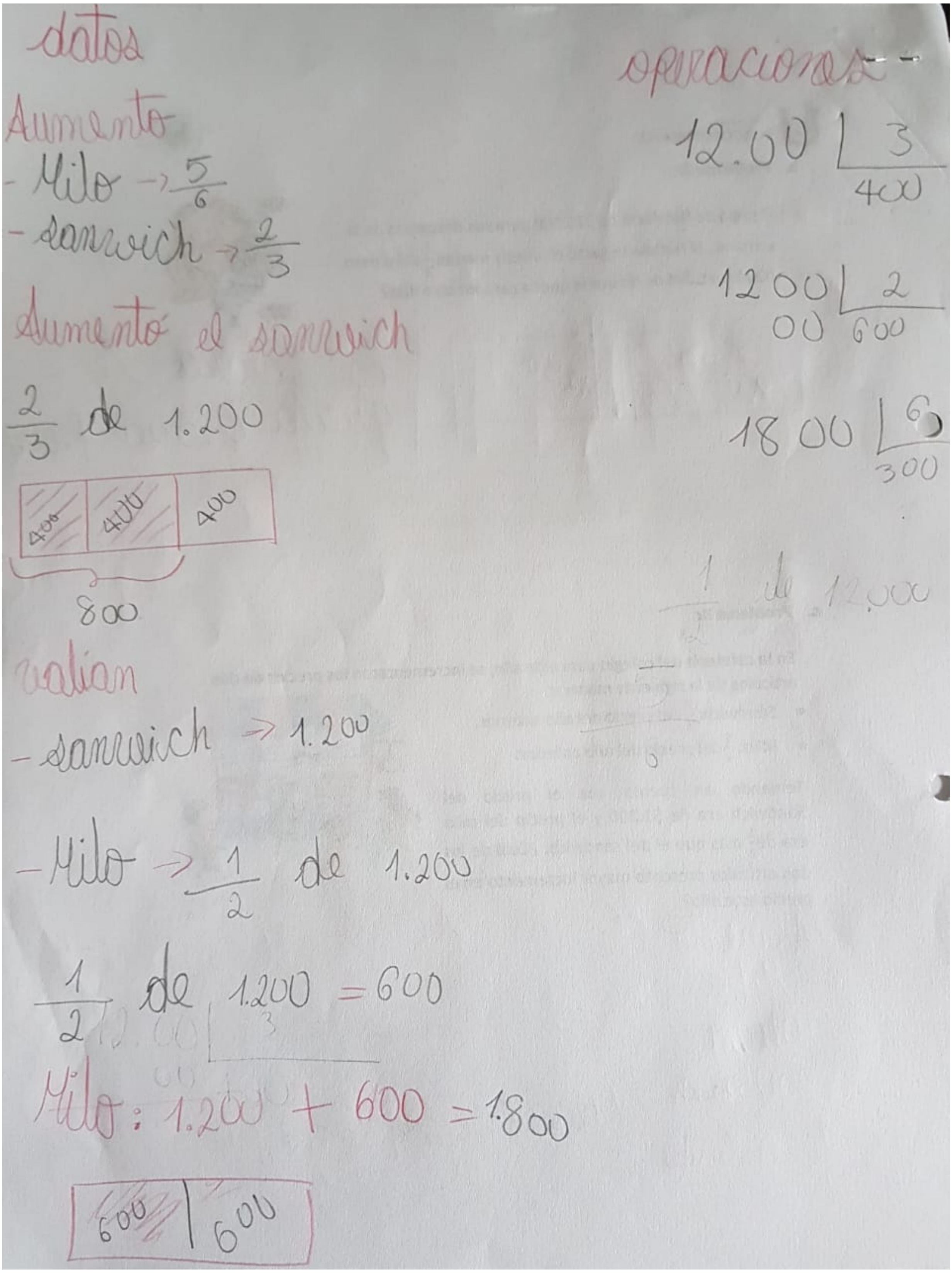
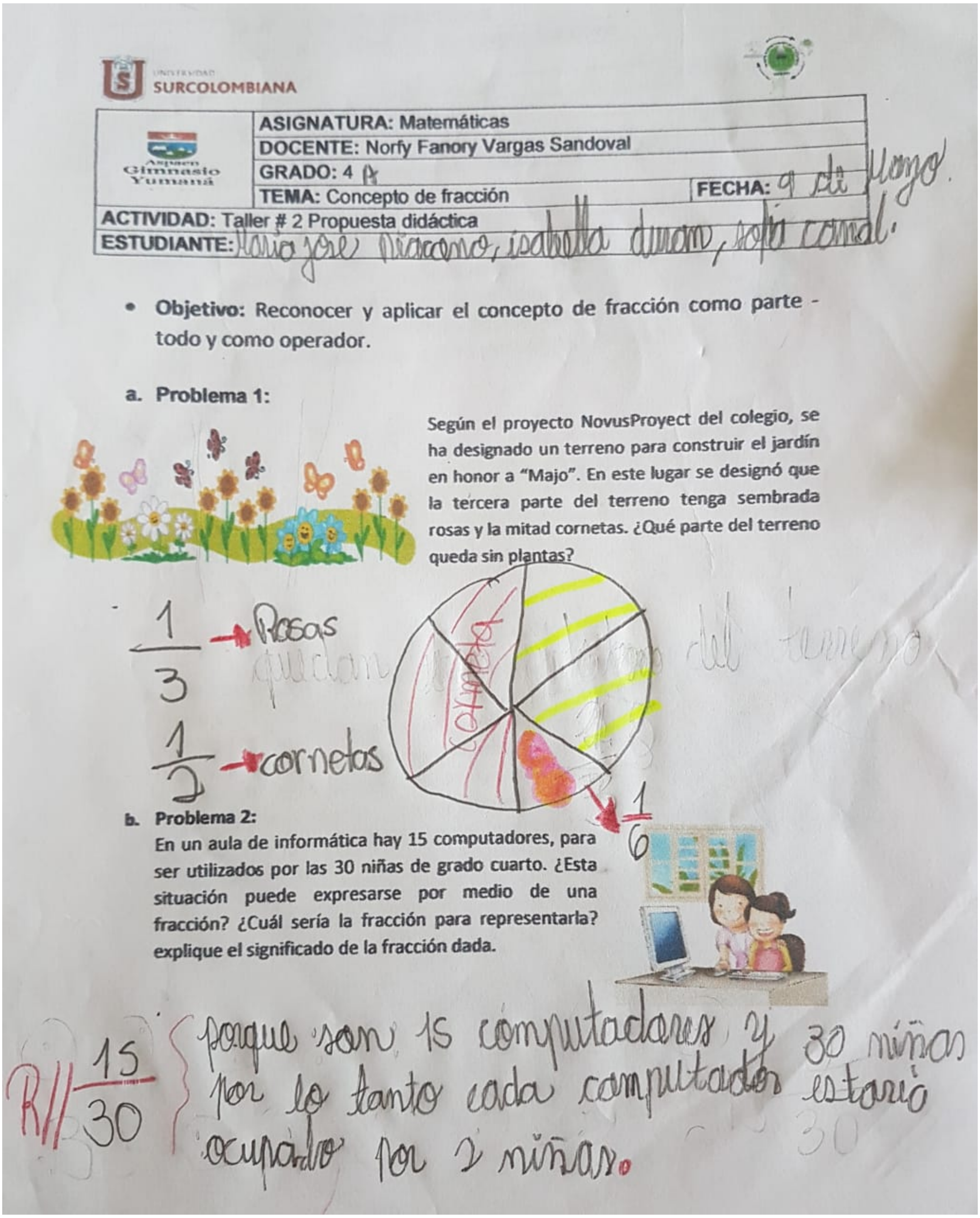


Figura 5.10: Prueba 1.3



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Aspaen Gimnasio Yumaná

ASIGNATURA: Matemáticas	
DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval	
GRADO: 4 A	
TEMA: Concepto de fracción	FECHA: 9 de Mayo.
ACTIVIDAD: Taller # 2 Propuesta didáctica	
ESTUDIANTE: Maria josé Naranjo, isabella duran, sofia corral.	

- **Objetivo:** Reconocer y aplicar el concepto de fracción como parte - todo y como operador.

a. Problema 1:

Según el proyecto NovusProyect del colegio, se ha designado un terreno para construir el jardín en honor a "Majo". En este lugar se designó que la tercera parte del terreno tenga sembrada rosas y la mitad cornetas. ¿Qué parte del terreno queda sin plantas?

$\frac{1}{3}$ → Rosas

$\frac{1}{2}$ → cornetas

cornetas

$\frac{1}{6}$

b. Problema 2:

En un aula de informática hay 15 computadores, para ser utilizados por las 30 niñas de grado cuarto. ¿Esta situación puede expresarse por medio de una fracción? ¿Cuál sería la fracción para representarla? explique el significado de la fracción dada.

R// $\frac{15}{30}$ { porque son 15 computadores y 30 niñas por lo tanto cada computador estaría ocupado por 2 niñas.

Figura 5.11: Prueba 2

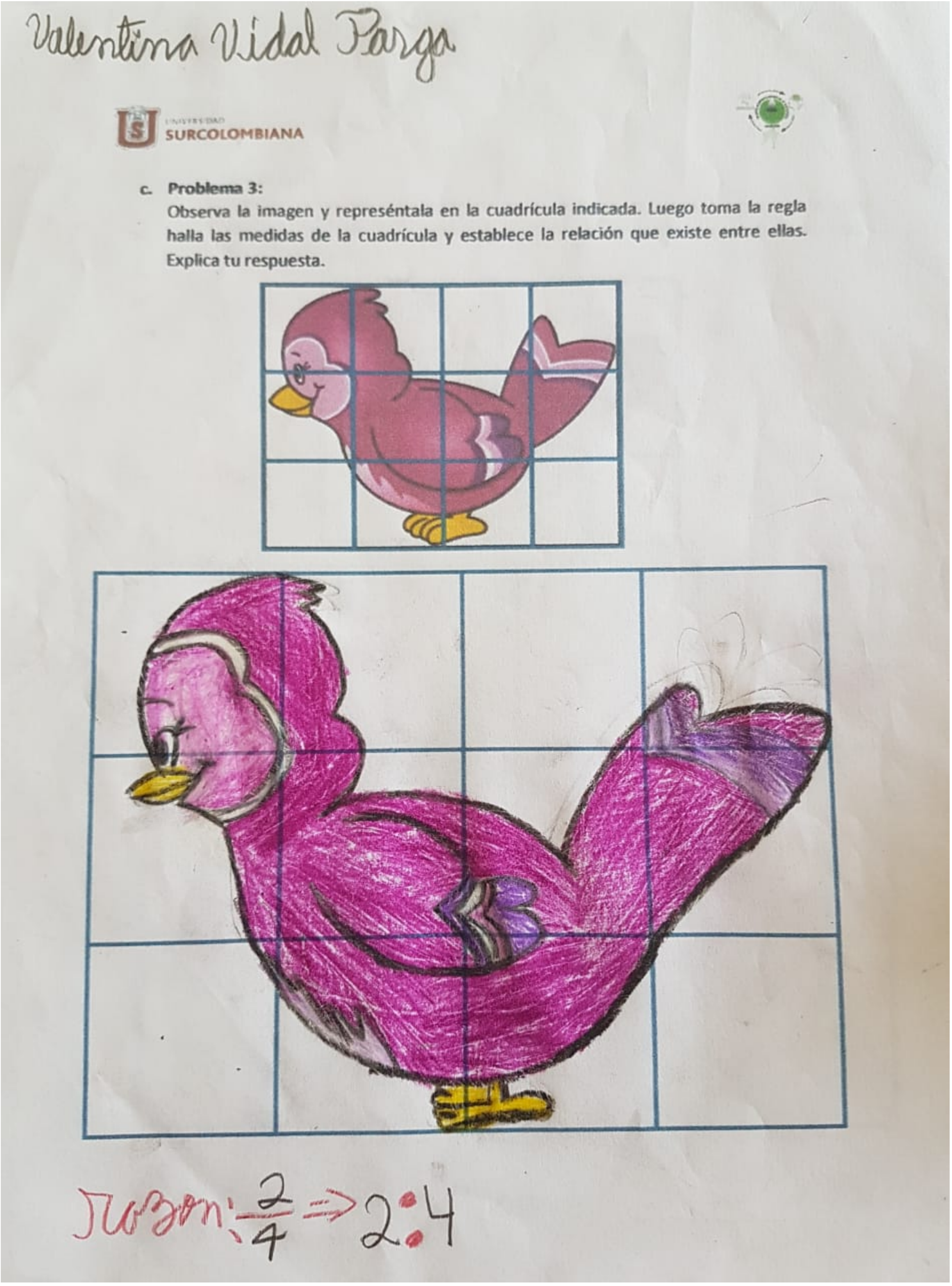
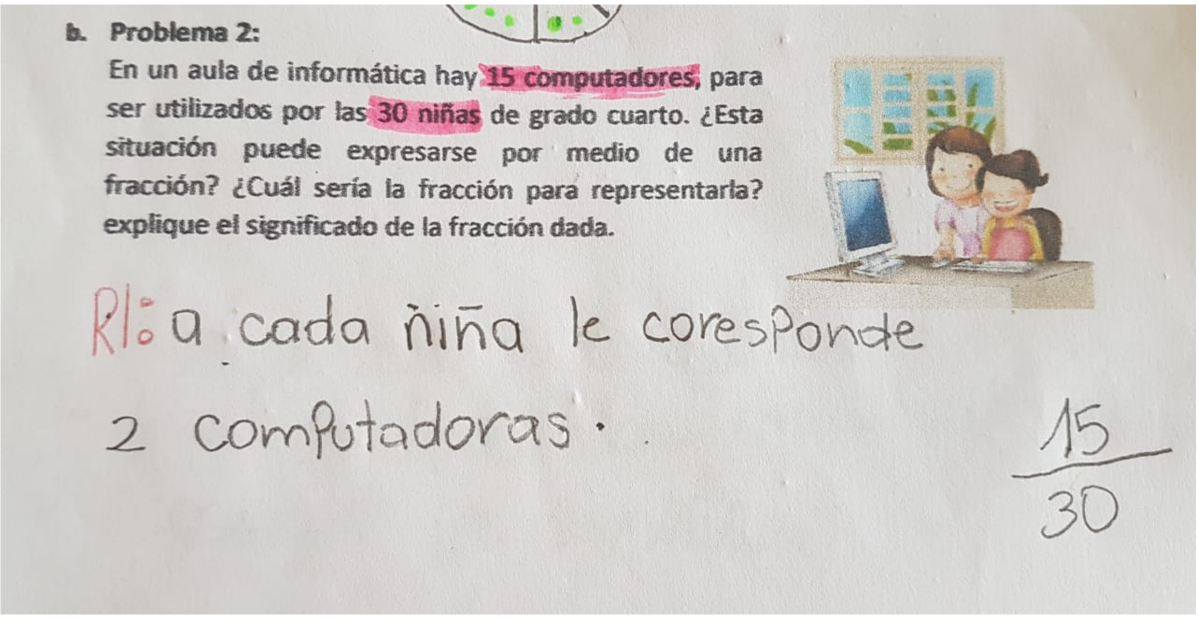


Figura 5.12: Prueba 2.1

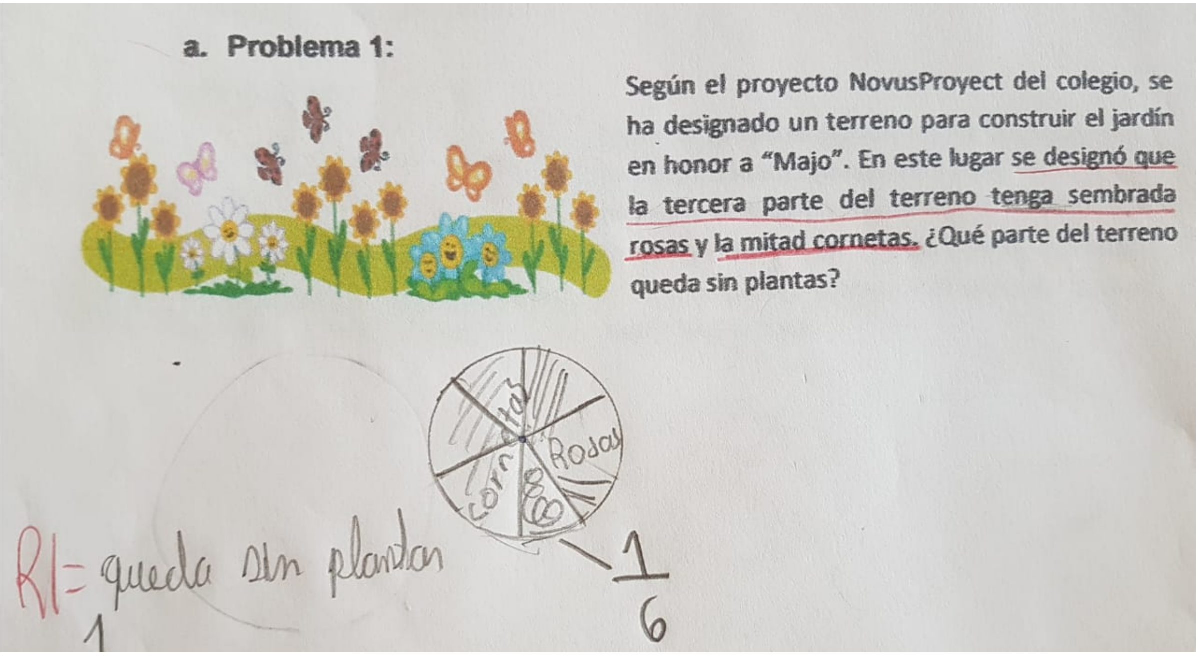


b. **Problema 2:**
En un aula de informática hay 15 computadores, para ser utilizados por las 30 niñas de grado cuarto. ¿Esta situación puede expresarse por medio de una fracción? ¿Cuál sería la fracción para representarla? explique el significado de la fracción dada.

Rl: a cada niña le coresponde 2 computadoras.

$\frac{15}{30}$

Figura 5.13: Prueba 2.2



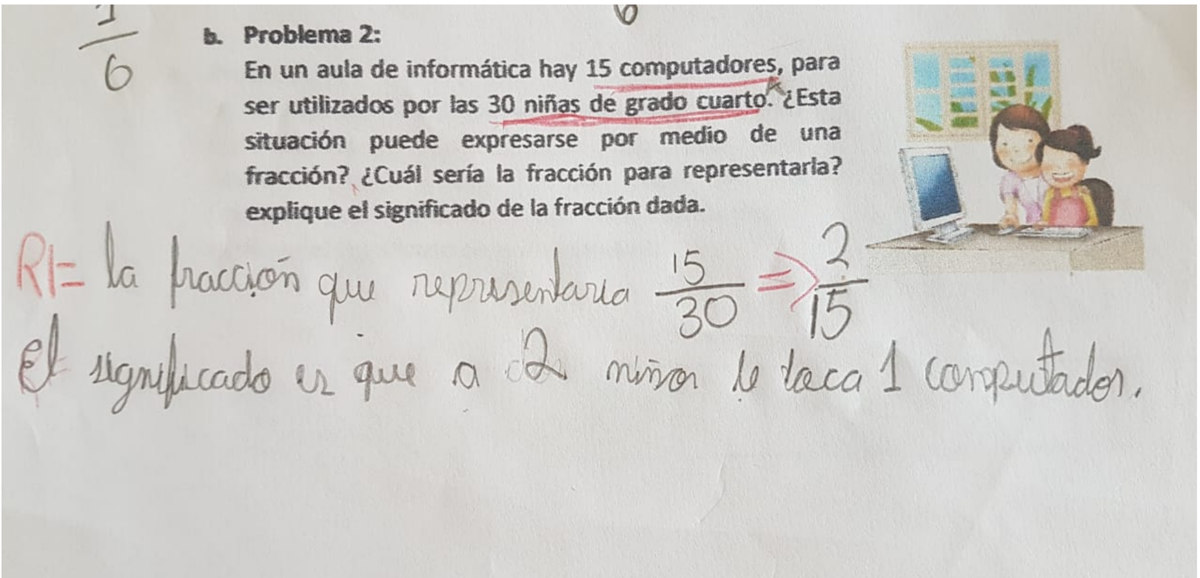
a. **Problema 1:**

Según el proyecto NovusProyect del colegio, se ha designado un terreno para construir el jardín en honor a "Majo". En este lugar se designó que la tercera parte del terreno tenga sembrada rosas y la mitad cornetas. ¿Qué parte del terreno queda sin plantas?

Rl= queda sin plantas

$\frac{1}{6}$

Figura 5.14: Prueba 2.3



$\frac{1}{6}$

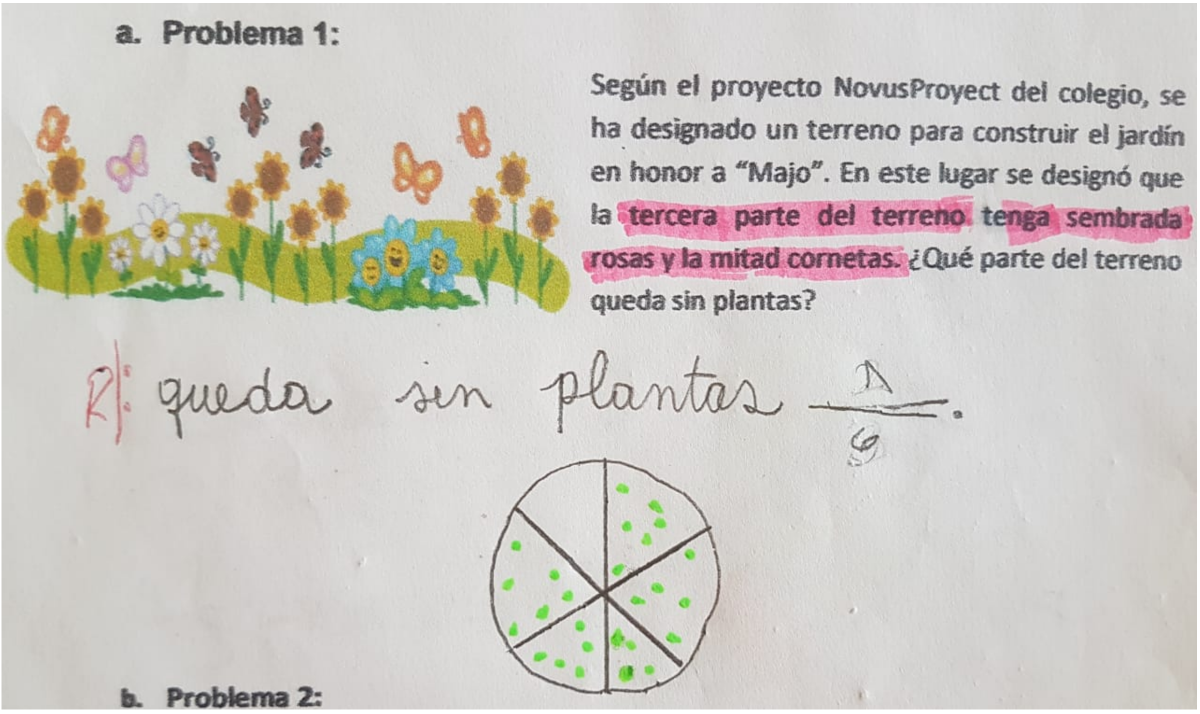
b. **Problema 2:**

En un aula de informática hay 15 computadores, para ser utilizados por las 30 niñas de grado cuarto. ¿Esta situación puede expresarse por medio de una fracción? ¿Cuál sería la fracción para representarla? explique el significado de la fracción dada.

R/= la fracción que representaria $\frac{15}{30} \Rightarrow \frac{2}{15}$

El significado es que a 2 niños le toca 1 computador.

Figura 5.15: Prueba 2.4



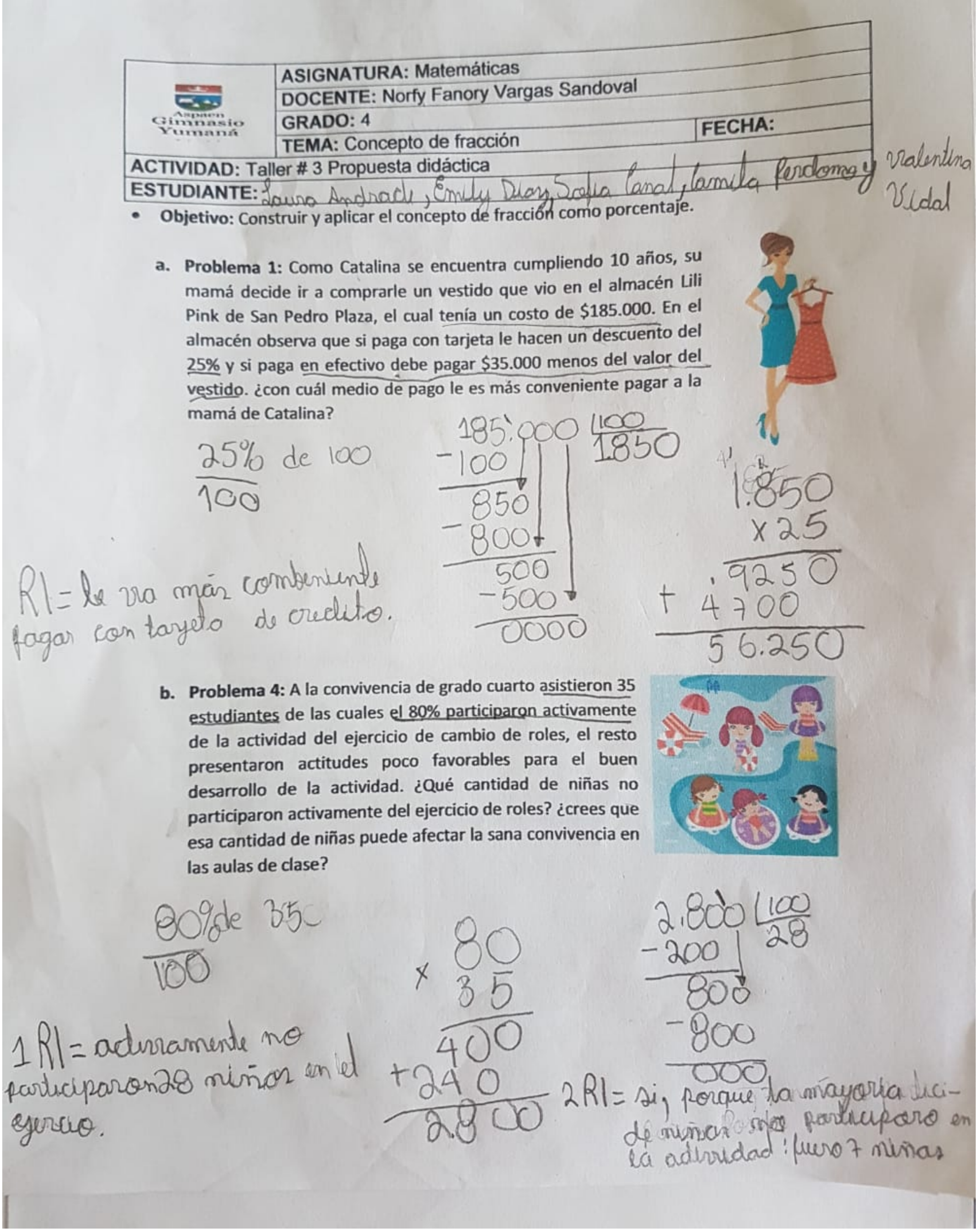
a. **Problema 1:**

Según el proyecto NovusProyect del colegio, se ha designado un terreno para construir el jardín en honor a "Majo". En este lugar se designó que la tercera parte del terreno tenga sembrada rosas y la mitad cornetas. ¿Qué parte del terreno queda sin plantas?

R/: queda sin plantas $\frac{1}{6}$.

b. **Problema 2:**

Figura 5.16: Prueba 2.5



Aspaen Gimnasio Yumaná	**ASIGNATURA:** Matemáticas	
	DOCENTE: Norfy Fanory Vargas Sandoval	
	GRADO: 4	**FECHA:**
	TEMA: Concepto de fracción	
ACTIVIDAD: Taller # 3 Propuesta didáctica		
ESTUDIANTE: Laura Andrade, Emily Diaz, Sofia Canal, Camila Perdomo y Valentina Vidal		

- **Objetivo:** Construir y aplicar el concepto de fracción como porcentaje.

a. **Problema 1:** Como Catalina se encuentra cumpliendo 10 años, su mamá decide ir a comprarle un vestido que vio en el almacén Lili Pink de San Pedro Plaza, el cual tenía un costo de $185.000. En el almacén observa que si paga con tarjeta le hacen un descuento del 25% y si paga en efectivo debe pagar $35.000 menos del valor del vestido. ¿con cuál medio de pago le es más conveniente pagar a la mamá de Catalina?

25% de 100
100

185.000 |100
1850
-100
850
-800
500
-500
0000

1.850
x25
9250
+4700
56.250

R1= le va más combeniente pagar con tarjeta de credito.

b. **Problema 4:** A la convivencia de grado cuarto asistieron 35 estudiantes de las cuales el 80% participaron activamente de la actividad del ejercicio de cambio de roles, el resto presentaron actitudes poco favorables para el buen desarrollo de la actividad. ¿Qué cantidad de niñas no participaron activamente del ejercicio de roles? ¿crees que esa cantidad de niñas puede afectar la sana convivencia en las aulas de clase?

80% de 35
100

x 80
35
400
+240
2800

2.800 |100
28
-200
800
-800
000

1 R1= activamente no participaron 28 niñas en el ejercicio.

2 R1= si, porque la mayoria de niñas si participaron en la actividad fueron 7 niñas

Figura 5.17: Prueba 3

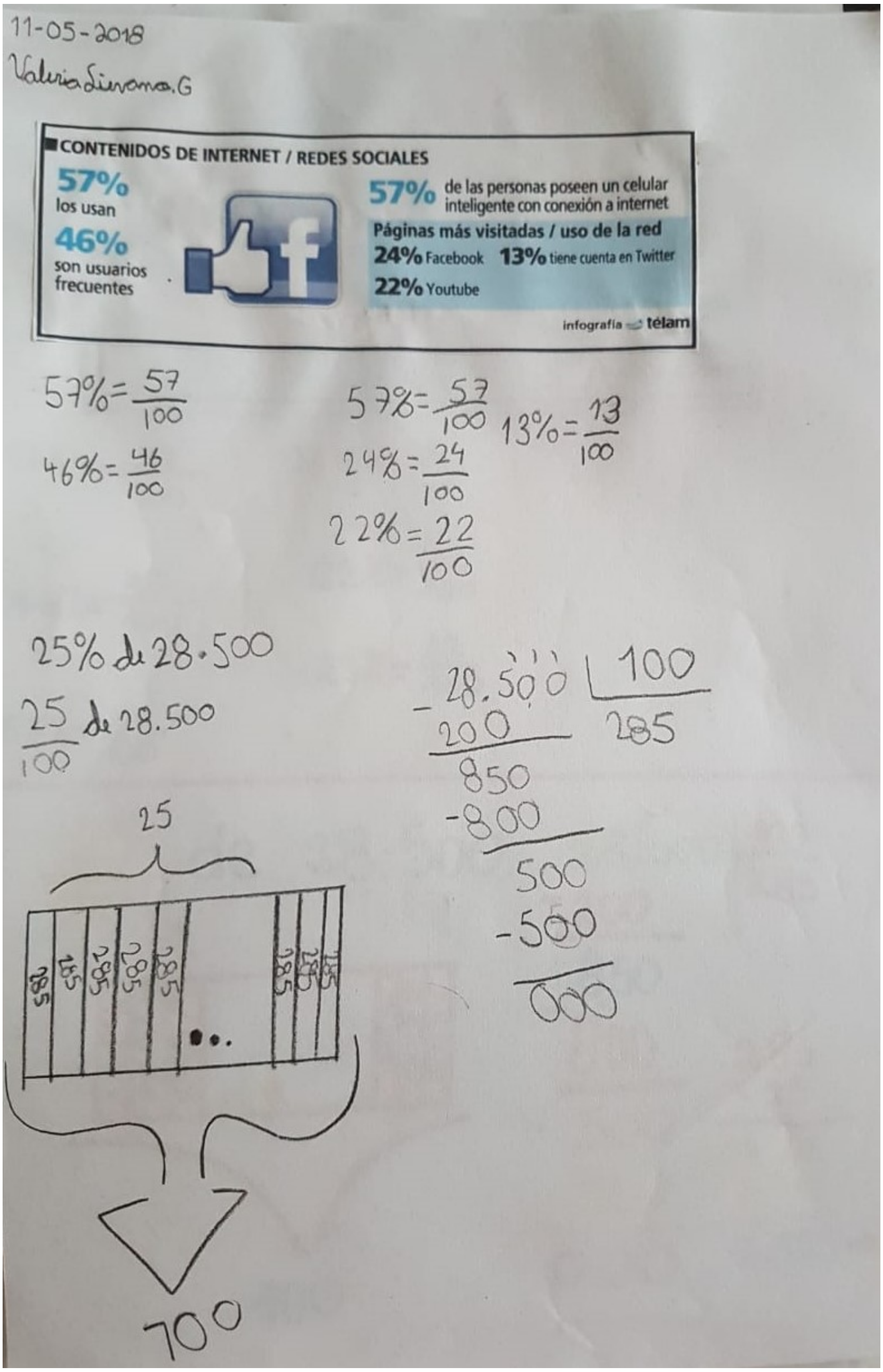


Figura 5.18: Prueba 3.1

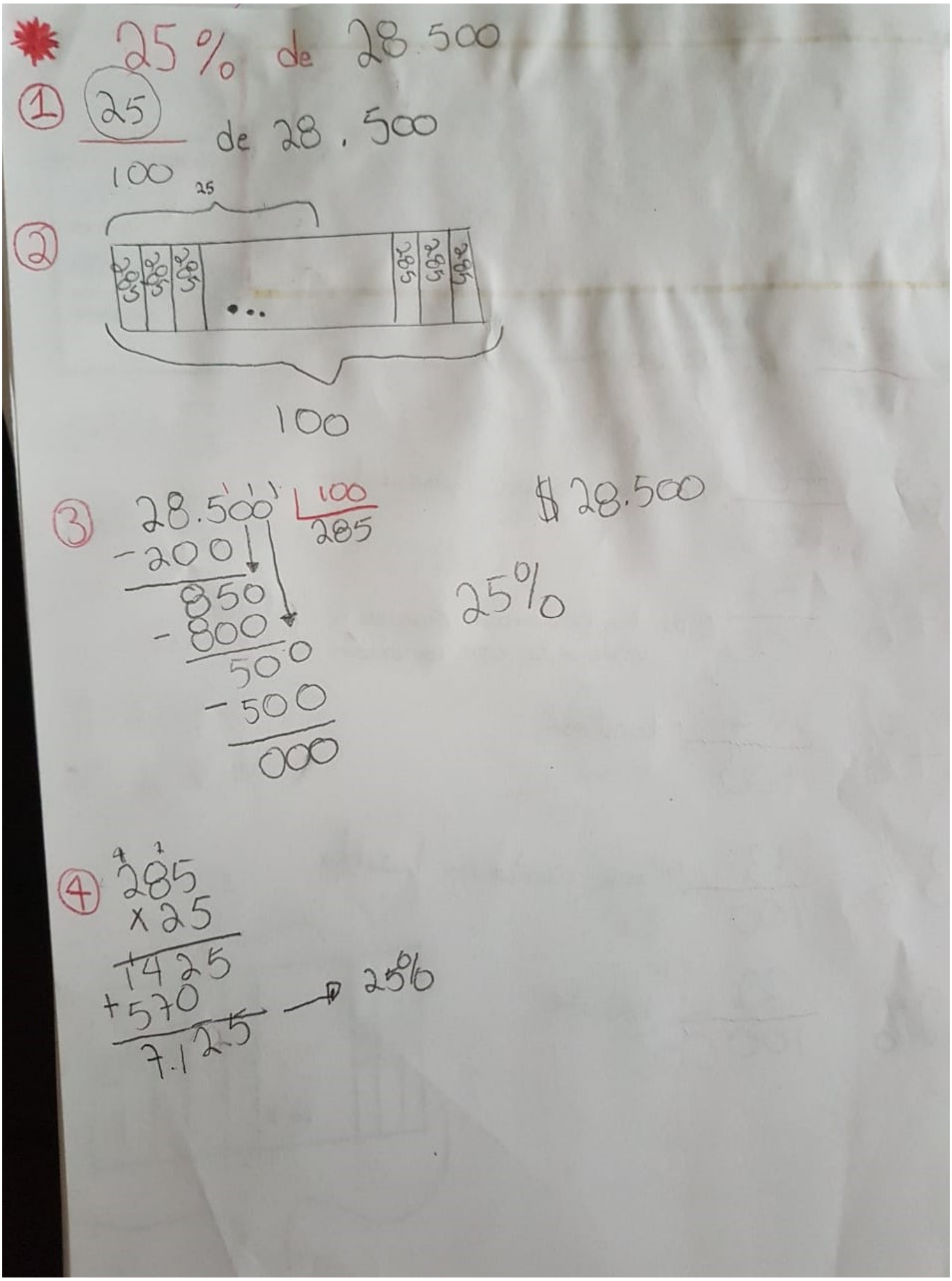


Figura 5.19: Prueba 3.2

5.5. Análisis de resultados

5.5.1. Prueba diagnóstica

Resultados de la prueba diagnóstica

Para realizar el reconocimiento de los preconceptos que tienen las estudiantes frente a las fracciones, se desarrolló una prueba diagnóstica de 7 puntos a 38 estudiantes del colegio Aspaen Gimnasio Yumana.

1. Escribe en número y en letra el fraccionario que representa la zona sombreada.

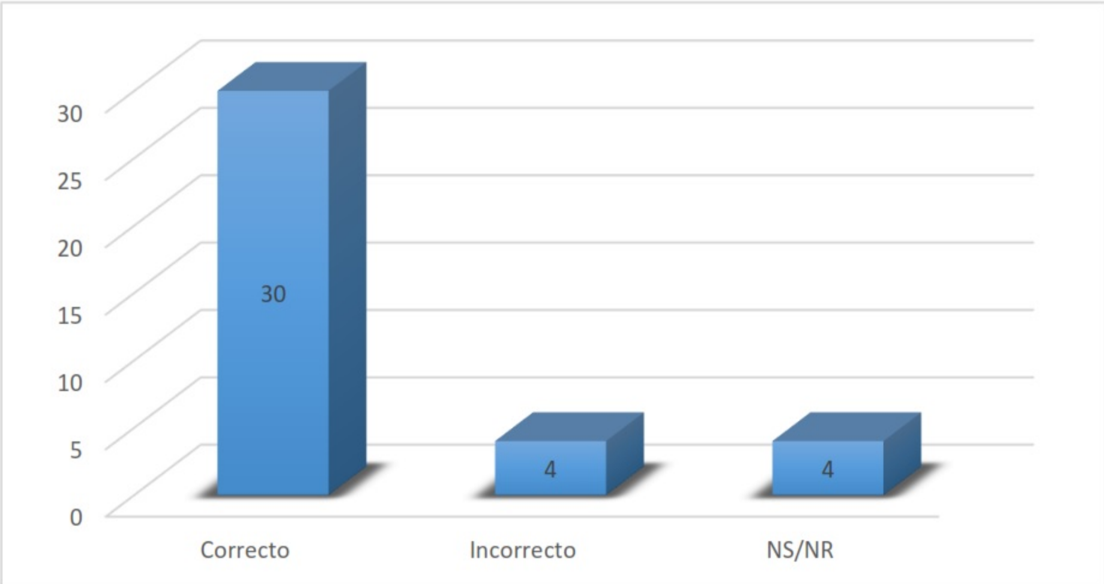


Figura 5.20: Problema de diagnóstico 1

La clasificación de los errores observados durante la investigación los podemos resaltar de la siguiente manera: Realiza operaciones y usa notaciones de la aritmética en forma defectuosa.

Muy pocas estudiantes interpretan y usan inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de número racional.

Plantea una ecuación que no corresponde con el enunciado de un problema aritmético.

Además, las estudiantes tienen en su gran mayoría bien definido el concepto gráfico del número fraccionario.

2. Matilde realiza una fiesta. Tiene una torta y la reparte entre sus dos mejores amigos: Claudia y Pedro. A Claudia le da $\frac{1}{2}$ y a Pedro $\frac{2}{4}$ de la torta.

    - Opción a: Representa con un dibujo la situación
    - Opción b: ¿a quién le dio más torta?
    - Opción c: ¿Cuánta torta le quedó?

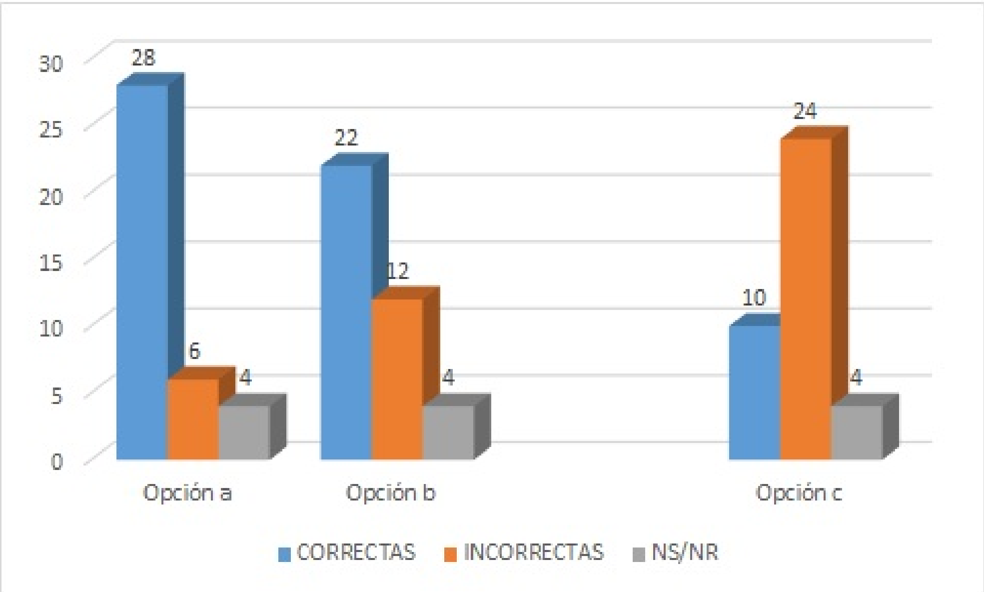


Figura 5.21: Problema de diagnóstico 2

En un alto número de estudiantes pueden identificar el concepto de fracción mediante una representación gráfica; presentan un conocimiento inadecuado de conceptos matemáticos en el momento de interpretar una situación problema.

3. Laura está sirviendo el agua en su casa, en vasos del mismo tamaño. Señala en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta donde debe llegar el nivel del agua.

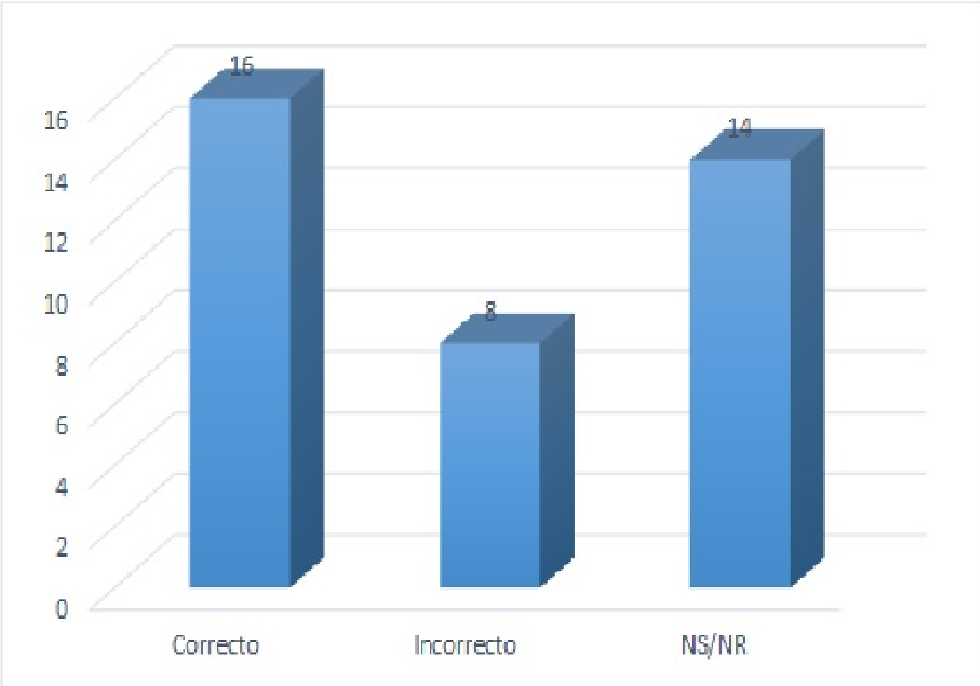


Figura 5.22: Problema de diagnóstico 3

Los errores e inseguridad debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Al justificar su respuesta se puede ver en la gráfica que la estudiante no agota el todo y adicionalmente plantea en su justificación el hecho de partir la unidad no evidencia una solidez del preconcepto.

No poseen la comprensión lectora frente a una situación problema, la interpretación es base fundamental del proceso de aprendizaje de cualquier área académica.

4. El siguiente diagrama representa la preferencia de un grupo de estudiantes de cuarto, en relación con el helado que prefieren.

   - Opción a: ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren paletas?
   - Opción b: ¿Qué fracción o porcentaje de estudiantes prefieren galletas Heladas?

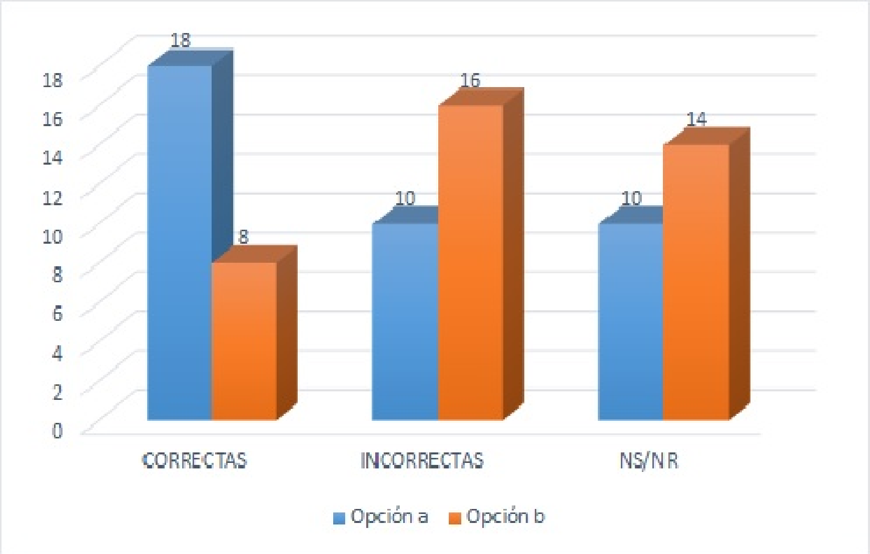


Figura 5.23: Problema de diagnóstico 4

Presenta un conocimiento inadecuado de conceptos matemáticos que no permiten la solución de diversas situaciones problema.

Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. En el problema propuesta se plantea al estudiante una situación donde se hace necesario la comprensión del problema y la interpretación del mismo ya que a partir de este se puede dar solución, se evidencia como el estudiante manifiesta el hecho de no saber cómo hacerlo lo cual implica un desconocimiento por parte de el de los diferentes registros semióticos y sus respectivas conversiones a la hora de abordar el concepto de numero racional.

5. Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro hijos.

   - Opción a: Dibuja la representación de la situación.
   - Opción b: ¿Qué fracción de pan le corresponde a cada uno?

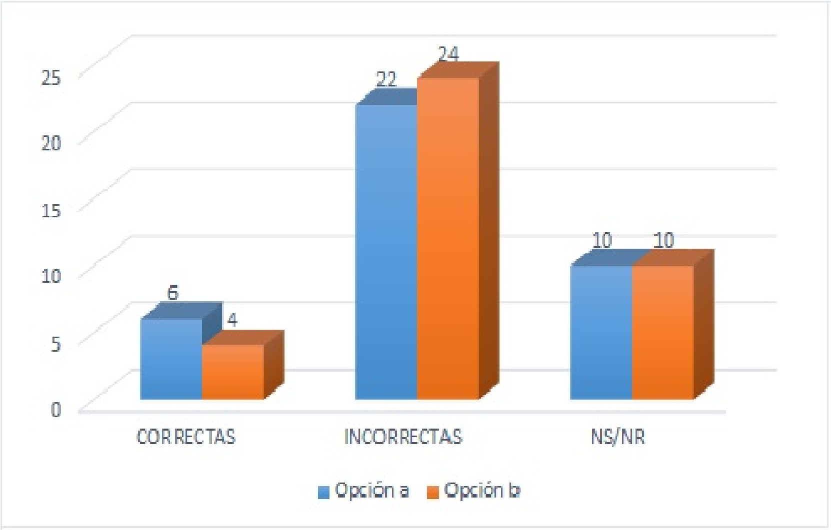


Figura 5.24: Problema de diagnóstico 5

Al analizar la situacion se observa como el estudiante establece la relacion entre la cantidad de panes y el numero de personas, pero el error se evidencia en que no han construido el concepto de "fracción", centrado en las relaciones "parte-todo", lo cual se puede tambien observar en las dos opciones del mismo problema planteado.

Lo dicho anteriormente se observa como el estudiante sigue sin construir la relacion parte todo, pero si establece la relacion entre el numero de panes y el numero de personas . Al no agotar el todo aun no se ha construido el concepto de fracción ya que siempre deja un sobrante.

Finalmente es importante de resaltar es que un alto número de estudiantes no reconocen el concepto de fracción dentro de la situación, lo cual lleva a la confusión y desespero durante la solución de la prueba.

6. Ana está ahorrando para comprarse una muñeca que le cuesta \$28.000. si ella ya ahorró $\frac{1}{4}$ de su precio. ¿Cuánto dinero le falta todavía?

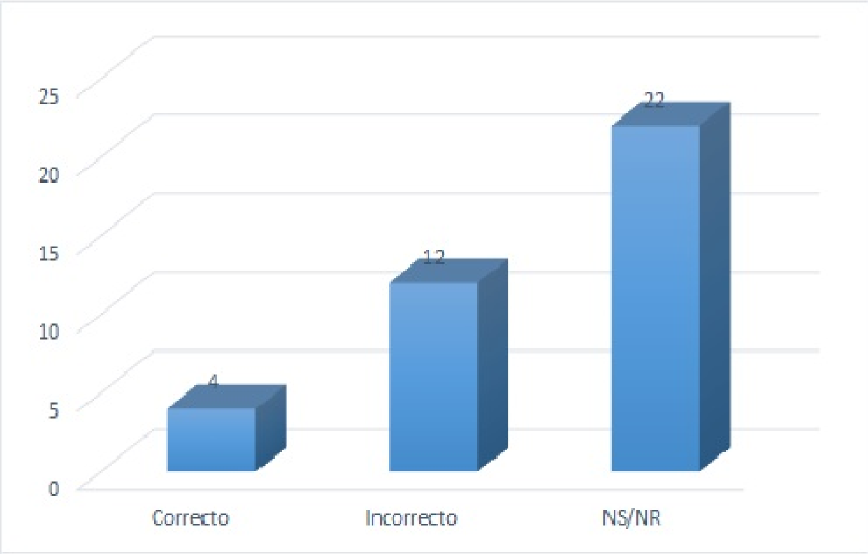


Figura 5.25: Problema de diagnóstico 6

Cuando los estudiantes se enfrentaron a las situaciones problema, optaron por asumir dos posturas; una de ellas, el reconocer que no comprendían el problema o que los datos no daban elementos suficientes para saber qué operación había que hacer para resolver el problema.

Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunas estudiantes,presentando dificultades y produciendo errores.

7. María y su mamá tienen la siguiente medida en la altura. Ver figura 5.6

   - Opción a: ¿Qué relación existe entre la estatura de María con relación a la de su mamá?
   - Opción b: ¿Qué relación existe entre la estatura de la mamá de María y María?

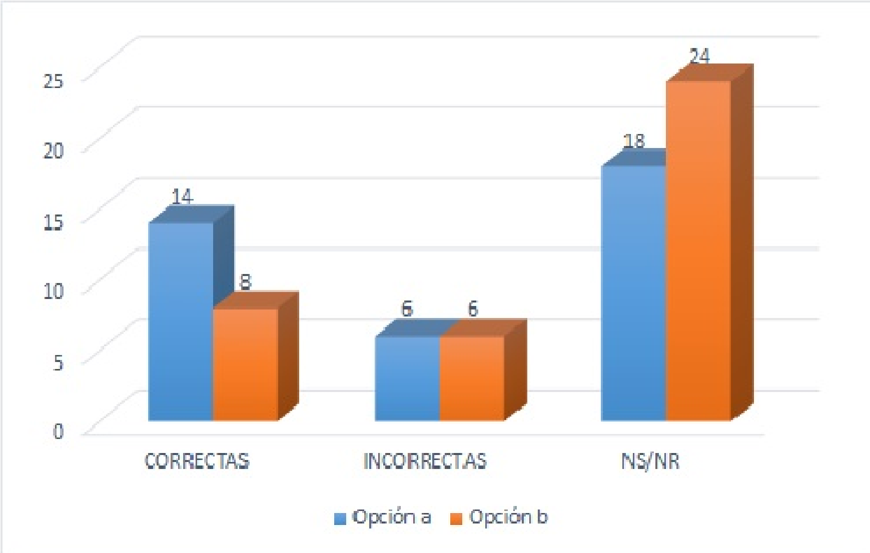


Figura 5.26: Problema de diagnóstico 7

Otro de los aspectos importantes en el desarrollo de las nociones asociadas al proceso de medida es la comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad y el número necesario para medir la cantidad dada, esto quiere decir que cuanto menor sea la unidad de medida, tantas más veces será preciso repetirla, hasta llegar a un total. En este sentido, la base de todo proceso de medida es en primera instancia la identificación de la unidad con que se mide, es decir, cierta idea de subdivisión expresada en función de cierta unidad de medida, que es repetida sobre la totalidad de la magnitud que se esté considerando.

Análisis de resultados de la prueba diagnóstica

Teniendo en cuenta los resultados arrojados por la prueba diagnóstica se obtiene se presenta una evaluación de acuerdo con los niveles de dominio, según la conferencia: "Matemáticas atractivas, útiles y creativas". Mauro Montealegre. (2016)

ASPECTO	PROCESO
Afectivo	La apreciación que se tuvo de las estudiantes era de inseguridad y preocupación por no reconocer varios de los puntos allí planteados. El apoyo grupal como fundamento el resolución de inquietudes frente a los problemas planteados.
Cognitivo	En la parte de representación y análisis 78.9 % de las estudiantes reconocen adecuadamente las fracciones como parte - todo gráficamente; sin embargo, cuando se enfrentan a problemas aplicativos con fracciones como parte - todo, cociente y operador, en promedio sólo aproximadamente un 43.3 % de las estudiantes tienen un desenvolvimiento adecuado en los procesos de solución. Por otro lado, en promedio un 56.1 % de las estudiantes no reconocen ni aplican los conceptos de fracción como porcentaje y razón a situaciones problema.
Tendencias de acción	Las estudiantes se mostraron receptivas al momento de la prueba, con altas espectativas a la solución de la misma. Durante el desarrollo varias estudiantes presentaron inquietudes y dudas frente a algunas preguntas especificas del diagnóstico. En un porcentaje mínimo de estudiantes presentaron gran habilidad frente al tema evaluado.

Cuadro 5.1: Análisis prueba diagnóstica

5.5.2. Actividad didáctica 1

Resultados de la actividad didáctica 1

De acuerdo con el análisis de resultados de la prueba diagnóstica se plantea la primera actividad didáctica con la implementación del diagrama de Freudenthal que tiene como objetivo la construcción y aplicación de los conceptos de fracción como Parte - Todo y como operador.

(a) Problema 1. Para el proyecto de plan lector del colegio está designado que las estudiantes de grado cuarto se lean 8 libros en el año, (4 de historia, 3 de valores y 1 de mitología). Si Camila se ha leído los de historia y el de mitología en los dos primeros periodos. ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de historia leídos por Camila? ¿Qué fracción representa la cantidad de libros de mitología? ¿Qué fracción de libros le faltan por leer?

Veáse fígura 5.8

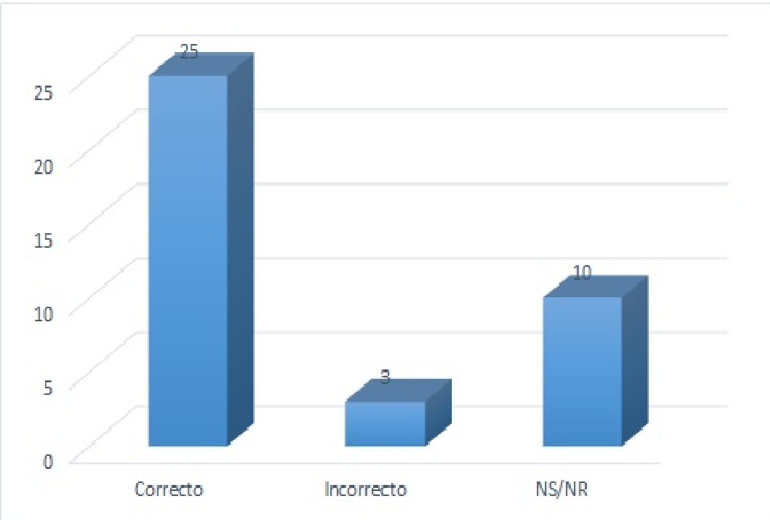


Figura 5.27: Problema 1.1

(b) Problema 2. El papá de Natalia le da \$25.000 para sus descansos de la semana. Sí Natalia se gastó el lunes y martes $\frac{1}{2}$ del dinero, ¿Qué cantidad de dinero le queda para los otro días?

Veáse fígura 5.9

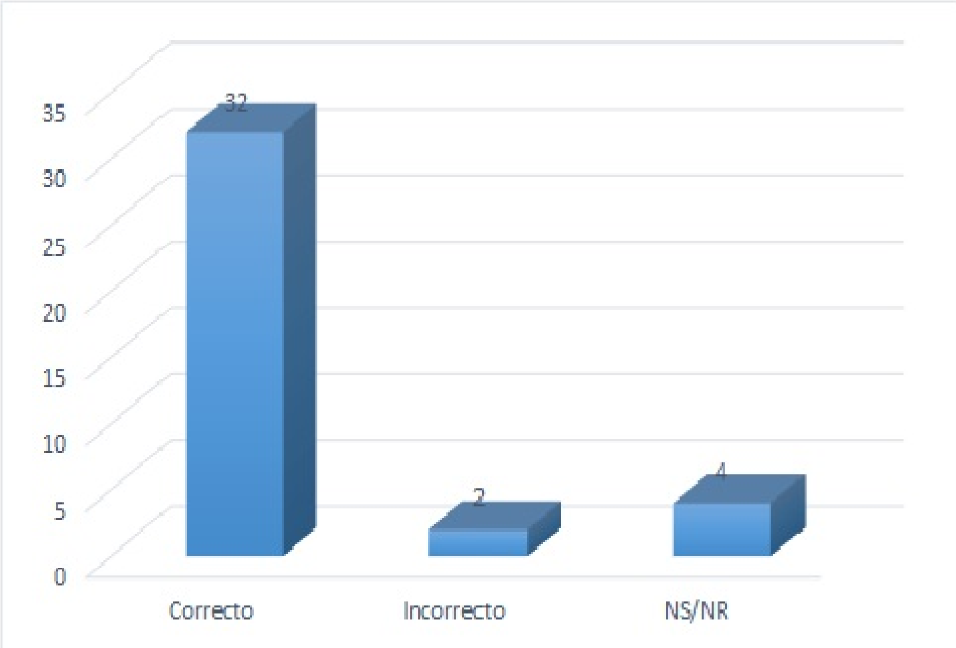


Figura 5.28: Problema 1.2

(c) Problema 3. En la cafetería del colegio para este año, se incrementaron los precios de dos artículos de la siguiente manera:

- Sándwich: $\frac{2}{3}$ del precio del año anterior.
- Milo:$\frac{5}{6}$ del precio del año anterior.

Teniendo en cuenta que el precio del Sándwich era de $1.200 y el precio del milo era de $1.800. ¿Cuál de los dos artículos presento mayor incremento en el precio este año?

Veáse fígura 5.9

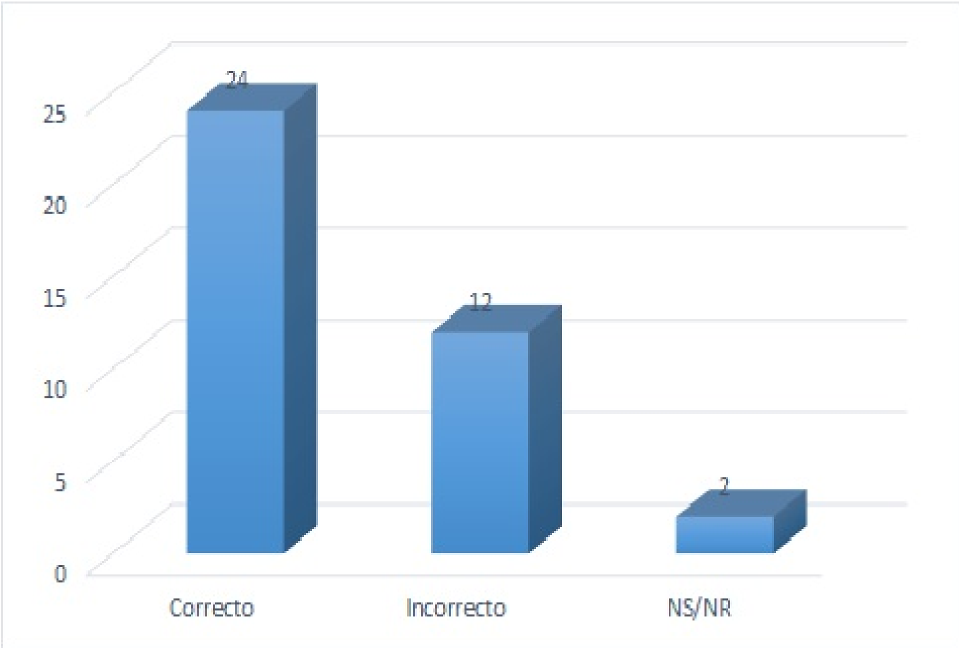


Figura 5.29: Problema 1.3

De los resultados obtenidos se tiene los siguientes niveles de dominio, propuestos en la conferencia "Matemáticas atractivas, útiles y creativas". Mauro Montealegre (2016).

ASPECTO	PROCESO
Afectivo	En el primer momento de la actividad didáctica con la manipulación del material concreto (papeles de colores, recortes, tijeras, marcadores) para desarrollar la temática utilizando el muero de las fracciones, el 100 % estudiantes se mostraron muy animadas, participativas y alegres, con espíritu colaborativo con sus compañeras y receptivas a cada observación. En el momento de aplicar los conceptos mediante las tres situaciones problemas del contexto en forma individual, el 85,96 % de las estudiantes los desarrollaron completamente; con alegría, disposición y con convencimiento de la posible solución planteada.
Tendencias de Acción	Durante el desarrollo de toda la actividad se evidenció en las estudiantes buena recepción ante la temática trabajada, altas expectativas frente a lo desarrollar, disposición en la búsqueda de estrategias para encontrar las posibles soluciones asociadas a cada una de las situaciones, sin mostrar frustración frente al inconveniente del no saber cómo solucionar los problemas propuestos.

Cuadro 5.2: Análisis propuesta didáctica 1

Cognitivo	**Problema 1.** El 65,7 % de las estudiantes contestaron correctamente el problema propuesto, realizando representaciones semióticas de la situación y asociando preconceptos con el contexto de la vida cotidiana planteado. Un 7 % desarrollaron el problema, pero no llegaron a la respuesta correcta y un 26 % de las estudiantes no realizaron análisis ni llegaron a una posible solución. **Problema 2 - 3.** En estas dos situaciones se observa que en promedio el 73.6 % de las estudiantes comprenden el concepto de fracción como operador, analizan las situaciones y realizan procesos matemáticos coherentes que le permiten llegar a una solución eficiente del problema propuesto. Por otro lado, se presta atención a que un 18.4 % de las estudiantes proponen diferentes estrategias de solución, pero no concretan los resultados obtenidos o realizan procesos erróneos; y, aproximadamente solo un 7.8 % de las estudiantes no logran comprender realmente lo que plantea la situación problema y no proponen un proceso que les permita llegar a un producto final. Realizando la retroalimentación con las estudiantes sobre la forma como se desarrollaron cada una de las situaciones, es claro que la falla en la solución acertada de los problemas se debe en gran parte a la mala comprensión lectora y a la falta de organización en los procesos de pensamiento en el momento que enfrentarse al planteamiento de métodos que le permitan llegar un posible resultado.

Cuadro 5.3: Análisis propuesta didáctica 1

Análisis de resultados de la actividad didáctica 1

Teniendo en cuenta la participación y desempeño de las estudiantes durante el desarrollo de la primera actividad de la propuesta didáctica, se tienen los siguientes niveles de desempeño.

COMPLEJIDAD	INDICADORES
Receptivo	El desarrollo del primer momento de la actividad contó con una participación, disposición y apropiación constante por parte de las estudiantes, su manipulación del material concreto con el que se trabajó el tema de fracciones como parte - todo y como operador fue eficiente y eficaz. En el segundo momento donde se ponía en práctica la comprensión de la temática sólo un 14.46 % de las estudiantes demostraron un desempeño muy básico, se evidenció baja autonomía y poca manejo y aplicabilidad de los conceptos trabajados en la actividad, sin embargo, mostraron gran motivación para lograr concluir exitosamente la tarea asignada.
Básico	Las estudiantes muestran manejo en la resolución de problemas sencillos del contexto, presentan claridad en los conceptos pues al iniciar la actividad se empezó con los preconceptos previos de cada una de ellas. Finalmente se tiene en promedio un 71 % de estudiantes que realiza las actividades asignadas de manera satisfactoria y un 28 % que continúan presentando dificultades la aplicación de los conceptos en ya adquiridos en la resolución de problemas, se evidencia que gran parte de esa dificultad se debe al no saber interpretar el texto y por ende no lograron darle solución a los mismos.

Cuadro 5.4: Propuesta didáctica 1

COMPLEJIDAD	INDICADORES
Autonómo	Debido a la confianza en el aprendizaje de los conceptos trabajados la gran mayoría de las estudiantes presentan autonomía en la solución de las situaciones problemas planteados; así mismo algunas propones posibles soluciones de manera creativa y crítica en cada una de las situaciones creando un juicio propio frente a las situaciones.
Estratégico	Se observa en forma más evidente en algunas estudiantes el mayor dominio del tema impulsándolas a innovar en la forma de llegar a la solución de cada una de las situaciones problemas y de igual forma se ven impulsadas a querer dar a conocer a sus otras compañeras los diferentes métodos que descubrieron para dar solución.

Cuadro 5.5: Propuesta didáctica 1

5.5.3. Actividad didáctica 2

Considerando que en la segunda actividad propuesta se trabajó los conceptos de fracción como cociente y como razón, a través del trabajo colaborativo de las estudiantes se obtiene el siguiente análisis:

Resultados de la actividad didáctica 2.

Después de la aplicación y análisis de la propuesta didáctica 1, se plantea una segunda actividad donde se propone trabajar los conceptos de fracción como cociente y como razón.

(a) **Problema 1.** Según el proyecto NovusProyect del colegio, se ha designado un terreno para construir el jardín en honor a "Majo". En este lugar se designó que la tercera parte del terreno tenga sembrada rosas y la mitad cornetas. ¿Qué parte del terreno queda sin plantas?

Veáse fígura 5.11

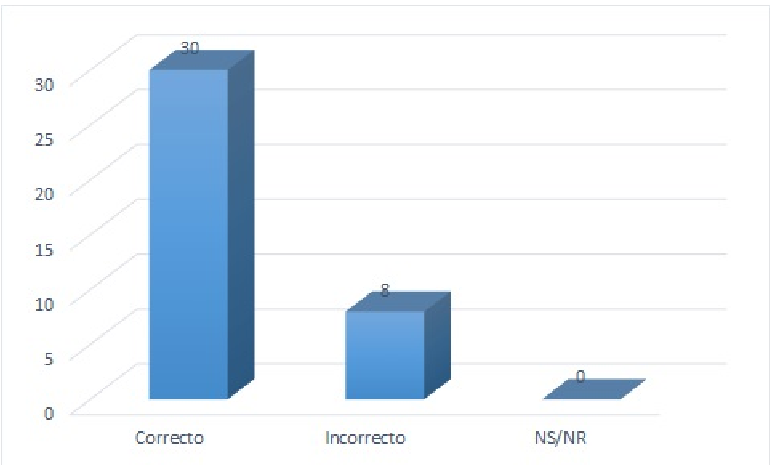


Figura 5.30: Problema 2.1

(b) **Problema 2**. En un aula de informática hay 15 computadores, para ser utilizados por las 30 niñas de grado cuarto. ¿Esta situación puede expresarse por medio de una fracción? ¿Cuál sería la fracción para representarla? explique el significado de la fracción dada.

Veáse fígura 5.11

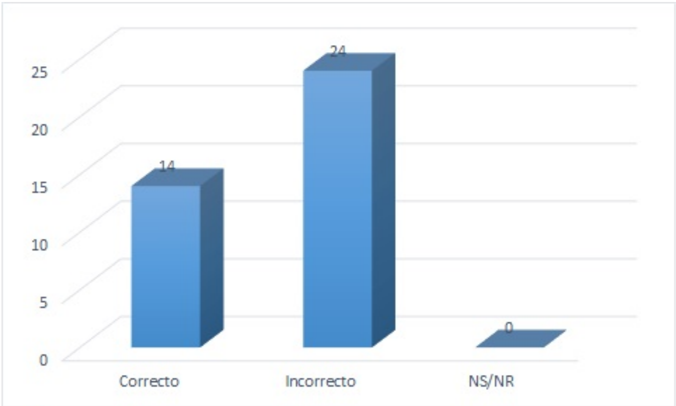


Figura 5.31: Problema 2.2

(c) *Problema 3.* Observa la imagen y represéntala en la cuadrícula indicada. Luego establece la relación que pueda existir. (véase figura 5.12)

Veáse fígura 5.12

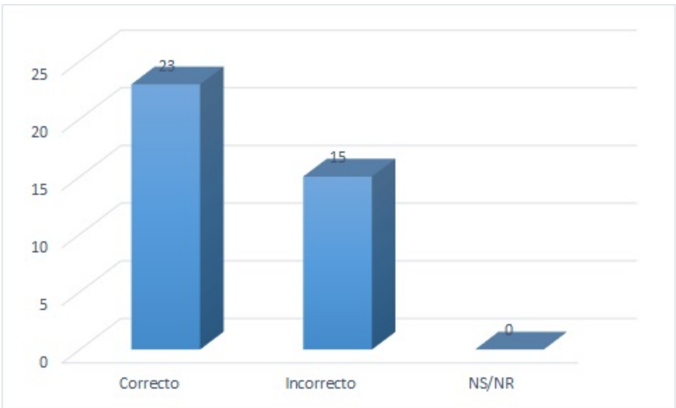


Figura 5.32: Problema 2.3

De acuerdo con los resultados obtenidos en la actividad didáctica 2, se tiene el siguiente análisis.

ASPECTO	PROCESO
Afectivo	En el primer momento de la actividad se puede analizar que poner a la estudiante a interactuar con el ambiente en el que se desenvuelve y propiciar a partir de allí el descubrimiento y construcción de los conceptos de fracción como cociente y como razón, permite que en ellas se realice un aprendizaje significativo del mismo, ya que la invita a reconocer en su medio el uso que se da diariamente de dichos conceptos. A la hora ya enfrentarse a la aplicación de los conceptos en situaciones del contexto en forma grupal, se evidencia buen manejo de sus emociones y valores, se muestran solidarias con sus compañeras ayudándose entre sí para llegar a la compresión de las situaciones planteadas.
Cognitivo	**Problema 1.** Teniendo en cuenta que esta situación se enfoca en la apropiación del concepto de fracción como cociente, es importante resaltar que se observa manejo de la temática por parte de las estudiantes ya que aproximadamente un 78.9 % de ellas dieron solución asertiva al problema propuesto, que aproximadamente solo un 21.05 % no llegaron a la respuesta correcta; sin embargo, de gran envergadura reconocer que este grupo de estudiantes propusieron diferentes métodos de solución para llegar a un resultado final.

Cuadro 5.6: Propuesta didáctica 2

	Problema 2 y 3. Observando el desarrollo de estas dos situaciones referentes al concepto de fracción como razón, podemos considerar continuar implementando actividades didácticas que involucren el manejo de material concreto para fortalecer esta temática, ya que a pesar de que se vio un avance en comparación con la prueba diagnóstica se observa un promedio del 50 % aproximadamente de estudiantes a pesar de que reconocen el concepto no lo aplican adecuadamente a las situaciones problemas propuestas. De igual forma se considera importante para el trabajo de este tema implementar estrategias que le permita al estudiante crear, descubrir y construir el concepto; puesto que en la tercera situación donde se utilizó el dibujo por medio de la cuadrícula se notó una mayor apropiación del tema en el momento de establecer relaciones frente a la escala utilizada.
Tendencias de acción	El 100 % de las estudiantes se mostraron dinámicas y participativas tanto en las actividades de construcción de los conceptos trabajados como en la aplicación de los mismos. Se evidencia en el desarrollo de las situaciones problemas que las estudiantes plantaron diferentes estrategias para dar posibles soluciones sin importar si eran correctas o no.

Cuadro 5.7: Propuesta didáctica 2

Análisis de resultados de la actividad didáctica 2.

Teniendo en cuenta la participación y desempeño de las estudiantes durante el desarrollo de la segunda actividad de la propuesta didáctica, se tienen los siguientes niveles de desempeño.

COMPLEJIDAD	INDICADORES
Receptivo	Se evidencia que en promedio un 78 % de las estudiantes aproximadamente presentan dominio del tema observándose una participación cooperativa en cada una de las actividades obteniendo como resultado un desempeño alto y operativo en la solución de las diversas situaciones problemas de fracción como cociente. Sin embargo, se evidencia que se debe continuar profundizando en el aprendizaje del concepto de razón, ya que un 50 % de las estudiantes muestran poderío frente a la aplicabilidad tema a situaciones del contexto y el otro 50 % a pesar muestran compresión del mismo, tiene dificultades al momento de aplicarlo.
Básico	Durante el trabajo cooperativo se evidencia que resuelven problemas sencillos del contexto, además, se fomentan discuciones para formular una nueva solución a la situación problema implicada; finalmente, se realizan las actividades asignadas.
Autonómo	Al plantearse la actividad como trabajo cooperativo se observa autonomía y manejo de los conceptos en los grupos de trabajo para darle solución a las situaciones problema. Se crea un nuevo criterio individual y grupal en las estudiantes de acuerdo a la cotidianidad de los procesos de aprendizaje.
Estratégico	En su gran mayoría las estudiantes mostraron un avance significativo en la creatividad e innovación como estrategia en la resolución de problemas.

Cuadro 5.8: Propuesta didáctica 2

5.5.4. Actividad didáctica 3

Resultados de la actividad didáctica 3.

Después de la aplicación y análisis de la propuesta didáctica 2, se plantea una tercera actividad donde se propone trabajar el concepto de fracción como porcentaje.

(a) **Problema 1.** Como Catalina se encuentra cumpliendo 10 años, su mamá decide ir a comprarle un vestido que vio en el almacén Lili Pink de San Pedro Plaza, el cual tenía un costo de $185.000. En el almacén observa que si paga con tarjeta le hacen un descuento del 25 % y si paga en efectivo debe pagar $35.000 menos del valor del vestido. ¿con cuál medio de pago le es más conveniente pagar a la mamá de Catalina?

Veáse fíguras 5.17

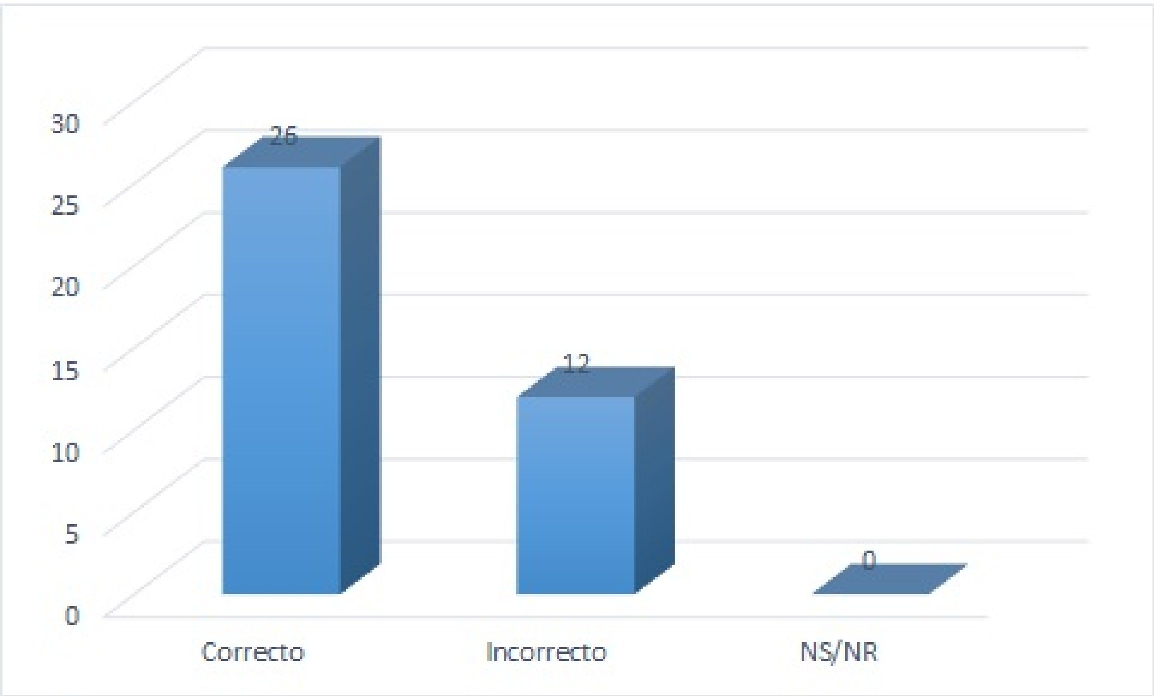


Figura 5.33: Problema 3.1

(b) **Problema 2.** A la convivencia de grado cuarto asistieron 35 estudiantes de las cuales el 80 % participaron activamente de la actividad del ejercicio de cambio de roles, el resto presentaron actitudes poco favorables para el buen desarrollo de la actividad. ¿Qué cantidad de niñas no participaron activamente del ejercicio de roles? ¿crees que esa cantidad de niñas puede afectar la sana convivencia en las aulas de clase?

Veáse fígura 5.18

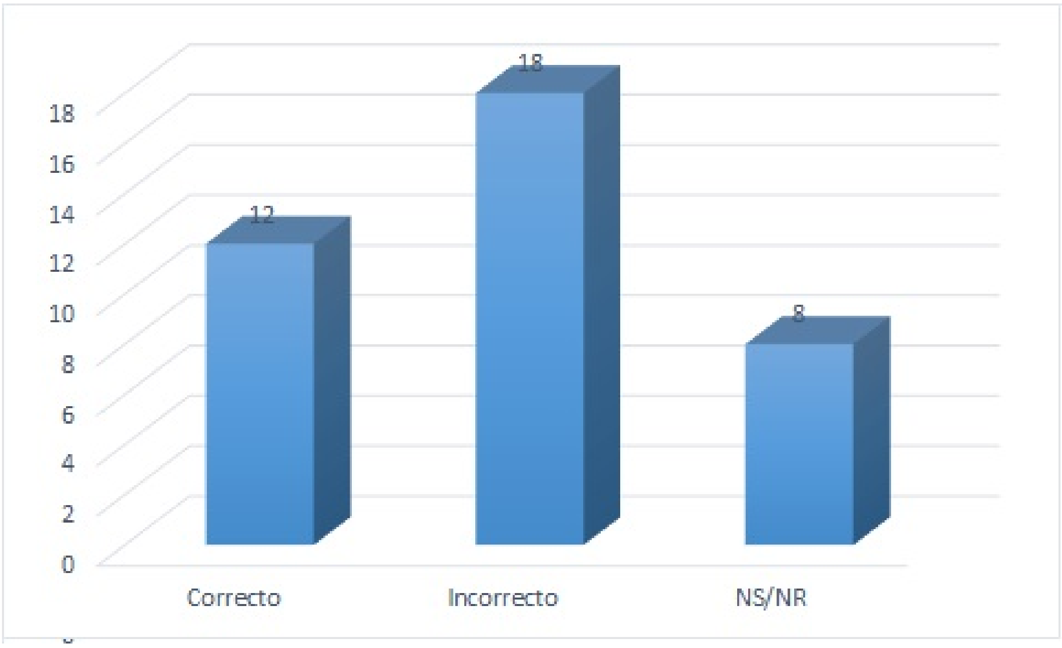


Figura 5.34: Problema 3.2

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las situaciones problemas planteadas con porcentajes, se tiene el siguiente análisis:

ASPECTO	PROCESO
Afectivo	Durante el desarrollo de esta actividad se evidencia un interés constante de las estudiantes frente al nuevo tema, lo cual las lleva a estar más atentas y participativas. En el momento de la aplicación de la temática en situaciones del contexto, se observa su espíritu colaborativo con entre compañeras con el fin de ayudarse para poder comprender los problemas y así lograr darle solución a cada uno de estos. .
Cognitivo	En las situaciones problemas planteadas para verificar si el aprendizaje del concepto de fracción como porcentaje fue significativo, podemos observar en un primer momento un avance muy significativo un promedio de 68.4 % aproximadamente de estudiantes lograron aplicar eficientemente el tema en una situación específica; sin embargo, en la segunda situación podemos analizar que a pesar de que tiene el concepto claro aún se presenta dificultad en la compresión del texto de la situación planteada para así lograr organizar los procesos a realizar para alcanzar un resultado asertivo. Es importante resaltar que en el desarrollo de este taller se vio fortalecido del trabajo colaborativo, pues las estudiantes organizaron grupalmente sus ideas y concretaron entre ellas para llegar a posibles soluciones. Al finalizar la actividad en el ´ultimo problema se visualiza como el estudiante solo recurre a la división como estrategia de solución y no verifica si la respuesta obtenida es válida o no y si a partir de esta se encuentra la solución al problema planteado, lo cual permite verificar lo dicho.
Tendencias de acción.	En su totalidad las estudiantes mostraron dominio de la temática, se evidenció en el trabajo en grupo la búsqueda constante de estrategias y métodos para lograr llegar a las posibles.

Cuadro 5.9: Propuesta didáctica 3

Análisis de resultados de la actividad didáctica 3.

Reconociendo que el concepto de fracción como porcentaje es una temática nueva para las estudiantes, se planteó una actividad didáctica cooperativa enfocada solo a dicho tema; la cual, arroja los siguientes resultados:

COMPLEJIDAD	INDICADORES
Receptivo	Durante esta actividad se evidencia gran interés por la comprensión del nuevo concepto de fracción como porcentaje por la participación activa del grupo, ya que se realizó la actividad como trabajo colaborativo.
Básico	Se encuentra un bajo porcentaje de estudiantes que no desarrollan la actividad correctamente o que presentan dificultades en la resolución de problemas sencillos del contexto. Debido a que no manejan los conceptos básicos del tema. Realizan correctamente en su gran mayoría las actividades asignadas.
Autonómo	En la solución de problemas y al plantearse la actividad como trabajo cooperativo se observa autonomía y manejo de los conceptos en los grupos para el desarrollo de la actividad al darle solución a las situaciones problema. Se fortalece un nuevo criterio individual y grupal en las estudiantes de acuerdo a la cotidianidad de los procesos de aprendizaje.
Estratégico	En su gran mayoría las estudiantes mostraron un avance significativo en la creatividad e innovación como estrategia en la resolución de problemas. El Compromiso creativo nuevamente alienta el ejercicio de la autonomía de los miembros de la Institución para asumir obligaciones académicas en búsqueda del bien común.

Cuadro 5.10: Propuesta didáctica 3

Capítulo 6

Conclusiones

Teniendo en cuenta los objetivos del estudio, en donde se pretendía reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a resolver problemas con las fracciones, se reconoce que de acuerdo con Rico (1995), las podemos clasificar las dificultades presentadas en las estudiantes al resolver problemas que requieren las fracciones:

(a) Algunas dificultades de los estudiantes pueden deberse a dificultades en el manejo del lenguaje matemático, esto se demuestra en las dificultades de comprensión de los problemas, la falta de comprensión semántica de las situaciones lleva generalmente a errores, debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje formal.

(b) Para el caso de las situaciones presentadas en donde había un manejo espacial, relacionado con formas geométricas o particiones dentro de una forma circular, el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunas estudiantes.

(c) Algunas dificultades se presentan debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, en este aspecto se centraron gran parte de los errores de las estudiantes, debido a la complejidad que genera en ellas mismas los números racionales. También se incluyen en este tipo de errores, la dificultad en el manejo de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

(d) Los resultados obtenidos al observar los procesos de empoderamiento de las estudiantes muestran la importancia de recuperar para la enseñanza de los números racionales los aspectos relacionados con la medida, el tipo de magnitud y el tipo de unidad. Un trabajo desde la fracción como relación parte - todo, fundamentado en los tres aspectos antes señalados, permitió avanzar en las estudiantes procesos de aprendizaje constructivos y autónomos, en lo relativo a las relaciones de orden, la relación de equivalencia y la operación aditiva en los números racionales. Pero, de otra parte, la investigación también mostró la insuficiencia que hay desde esta perspectiva de las fracciones como relación parte - todo para conceptualizar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales.

(e) Los docentes tenemos tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos, como el de número, están implícitamente claros para los estudiantes y son compartidos por la comunidad de la clase. Los estudiantes construyen aunque no nos lo propongamos explícitamente, nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas. El profesor debe estar atento a observar las conexiones a través del archipielago de las fracciones explicitadas por sus estudiantes. De esta manera, puede reforzar aquéllas que presentan más ventaja para avanzar en la comprensión y buscar modos de refutar las que son inapropiadas.

    Si pretendemos que la noción de fracción se asimile de forma significativa, debemos contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los estudiantes han de integrar diferentes conjuntos numéricos, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en profundidad de los procesos infinitos.

    El concepto de número racional no puede construirse por medio de un enfoque que demande de los estudiantes únicamente un entendimiento superficial de algunos puntos aislados, como podría ser la asimilación de reglas para la lectura, escritura y las operaciones con estos números. La obtención de significados en el terreno geométrico puede ayudar a los alumnos a avanzar en la comprensión de la geometría como algo separado del álgebra.

(f) Cuando las estudiantes de grado cuarto ordenan fracciones utilizan como estrategia básica el muro de las fracciones, el valor relativo de fracción como medida. Muy pocas estudiantes se sirven de otras estrategias como la comparación con fracciones intermedias conocidas o la equivalencia de fracciones.

(g) Hemos detectado dificultades con el modelo asociadas a la complejidad de la percepción visual de la cantidad.

(h) El apoyo familiar como eje fundamental del aprendizaje de las estudiantes, la constante motivacón conlleva a que el concepto de fracción sea vivenciado y aplicado fuera del aula de clase, por lo cual, lo convierte en un aprendizaje significativo.

6.1. Algunas recomendaciones

(a) El análisis de los episodios resueltos de los talleres desarrollados por los estudiantes abre algunas reflexiones acerca de la comprensión de la naturaleza de la fracción que logran nuestros estudiantes. Por una parte surge inseguridad de los preconceptos adquiridos, la no manipulación cotidiana del lenguaje matemático, lo cual conlleva a considerar una cantidad de cifras no acordes al pensamiento desarrollado a esa edad.

(b) La transversalidad de las demás asignaturas pueden agilizar el proceso de lectura y comprensión de las situaciones presentadas, la dificultad no sólo se presenta en el área de matemáticas, lleva un trasfondo significativo en las bases del conocimiento del niño, que con la ayuda de todo el ente institucional refuerza la calidad y el mejoramiento de la misma.

(c) La necesidad de implementar la metáfora del "archipielago de las fracciones", y "el muro de las fracciones", se describe en la manera de una representación que sin lugar a dudas influida por el uso de la tecnología, conlleva a una concepción operatoria de la matemática. Esta visión es producto del tipo de actividades que se desarrollan en el aula, sin que se oriente la enseñanza a la construcción de significados de los conceptos matemáticos. La matemática es , para muchas estudiantes, la ciencia que permite hacer cálculos. Se debe cambiar esta percepción del concepto, llevándola más a la practica, a situaciones reales; el apoyo familiar como parte fundamental de la consolidación del aprendizaje.

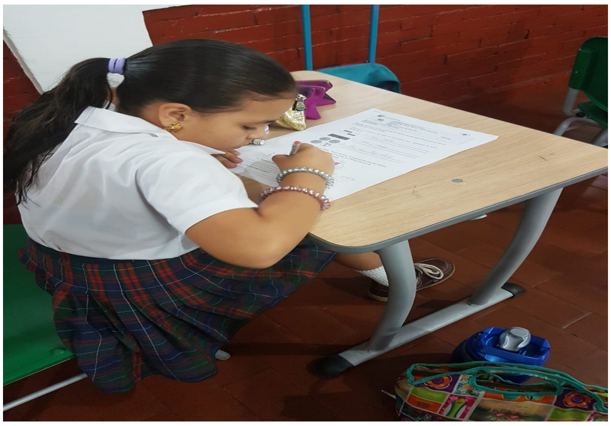
Capítulo 7

Anexos

Para dar inicio a nuestras pruebas, fue necesario empezar con una actividad de diagnóstico, en la cual, encontramos diferentes falencias en los preconceptos adquiridos.

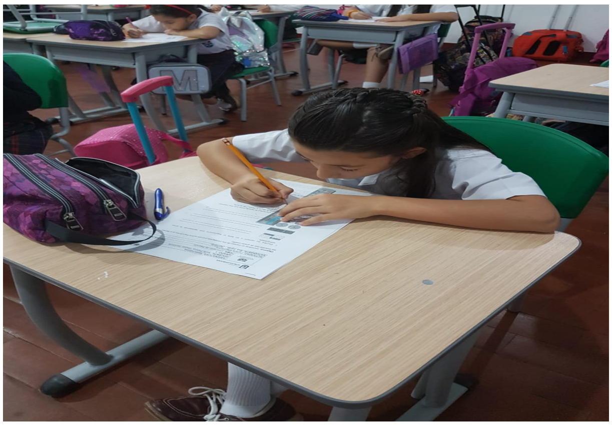
De acuerdo a la anterior prueba las estudiantes respondieron individualmente la actividad.

7.0.1. Evidencias pruebas de diagnóstico



(a)

1



(b)

2

Figura 7.1: Evidencias Diagnóstico 1

(a)

5

(b)

6

Figura 7.2: Evidencias Diagnóstico 1.1

(a)

7

(b)

8

Figura 7.3: Evidencias Diagnóstico 1.2

7.0.2. Evidencias prueba aplicada número 1.

(a)

1

(b)

2

Figura 7.4: Evidencias Prueba 1

(a)

3

(b)

4

Figura 7.5: Evidencias Prueba 1.1

(a)

5

(b)

6

Figura 7.6: Evidencias Prueba 1.2

(a)

7

(b)

8

Figura 7.7: Evidencias Prueba 1.3

(a)

9

(b)

10

Figura 7.8: Evidencias Prueba 1.4

Figura 7.9: Evidencias Prueba 1.5

7.0.3. Evidencias prueba aplicada número 2

(a) 1 (b) 2

Figura 7.10: Evidencias Prueba 2

(a) 3 (b) 4

Figura 7.11: Evidencias Prueba 2.1


(a)
5


(b)
6

Figura 7.12: Evidencias Prueba 2.2


(a)
7


(b)
8

Figura 7.13: Evidencias Prueba 2.3

(a) 9

(b) 10

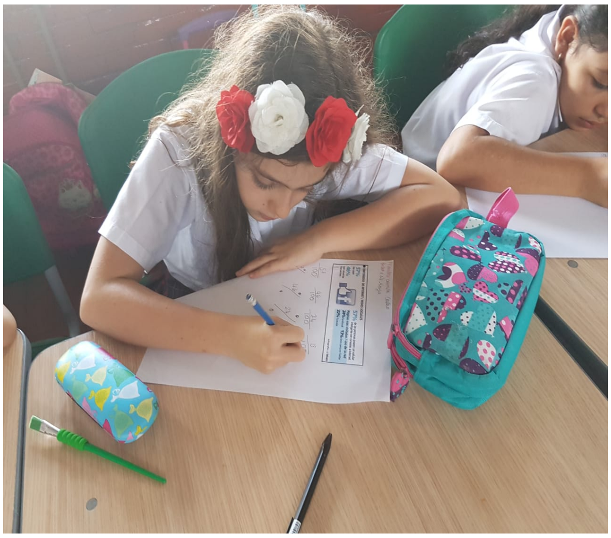
Figura 7.14: Evidencias Prueba 2.4

(a) 11

(b) 12

Figura 7.15: Evidencias Prueba 2.5

7.0.4. Evidencias prueba aplicada número 3



(a)

1

(b)

2

Figura 7.16: Evidencias Prueba 3

(a)

3

(b)

4

Figura 7.17: Evidencias Prueba 3.1


(a)
5


(b)
6

Figura 7.18: Evidencias Prueba 3.2


(a)
7


(b)
8

Figura 7.19: Evidencias Prueba 3.3

(a)

9

(b)

10

Figura 7.20: Evidencias Prueba 3.4

(a)

11

(b)

12

Figura 7.21: Evidencias Prueba 3.5

Capítulo 8

Bibliografía

A continuación enunciamos algunos de los libros, ensayos y artículos que se han tenido en cuenta en el desarrollo del marco teórico o estado del arte del presente trabajo de grado:

- BERLEKAMP, E.; CONWAY, J.; GUY, R. Winning ways for your mathematical plays, games in particular, 2, London: Academic Press, 1982.

- Blanco, L.J. (1991). Didáctica de las matemáticas II (Didáctica de la Geometría). Recuperado el 29 de octubre de 2011 de

  $http://www1.unex.es/eweb/ljblanco/.../Principiosbasicos(Dienes-Pallascio)$

- Cabas, Rafael A. y López César G. (2005). La enseñanza aprendizaje de las fracciones desde la aplicación de la secuencia de actividades de Thompson adecuada como un programa virtual dinámico. Colegio CAFAM, IED Instituto Técnico Industrial Piloto. Bogotá, D.C. Recuperado el 22 de mayo de 2011

- Cárdenas, María L. y Rivas, José F. (2004). La teoría de la complejidad y su influencia en la escuela. Revista de Teoría y didáctica de las ciencias sociales. Mérida, Venezuela.

- Colom, C. Antonio J. (2005). Teoría del Caos y Práctica Educativa, Revista Galega Do Ensino. Universidad de Les Iles Balears.

- CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2006, Año 1, Número 1. LAS IDEAS DE PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

- Espejo, Roberto (2012). Algunos aspectos de la educación compleja, Polis. Universidad de Paris, Paris, Francia.

- Fandiño Pinilla, M.I (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: editorial magisterio.

- Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje de los modelos de aprendizaje de los racionales. Tesis Doctoral. México: Civestav ? Matemática Educativo.

- Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En: F. Hitt (Ed), didáctica, investigaciones en Matemática Educativa (173 ? 196). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Franco, Santiago (2012). Enseñanza y aprendizaje del concepto de número racional en estudiantes de grado séptimo, utilizando entornos informáticos. En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1051-1055). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001

- Freudenthal, H. (1994). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México: CINVESTAV-IPN. Freitas, M. P. y Ventura, M. C. (2007). Resolución de problemas con utilización de conocimientos del mundo real. Acta latinoamericana de matemática educativa, 20, 287-293. Comité latinoamericano de matemática educativa.

- GILBERT, N.; TROITZSCH, K. Simulation for the social scientist. Buckingham, England: Open University Press, 1999.

- Hiebert, J. A. Y Carpenter, T. P. (1992). ?Learning and teaching with understanding?. En: Grouws, D. A. (Edit.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company, New York.

- Herrera, M. L. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. Acta latinoamericana de matemática educativa, 23, 247-257. Comité latinoamericano de matemática educativa

- Kieren, T. (1983). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), Recent research on number learning (pp. 125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.

- Maldonado, Carlos Eduardo (2013). ¿Qué es eso de pedagogía y educación en complejidad?.Debate teórico Metodológico

- Maldonado, Carlos Eduardo (2014). ¿QUÉ ES UN SISTEMA COMPLEJO?. Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia, vol. 14, núm. 29, pp.71-93. Universidad El Bosque Bogotá, Colombia

- Meel, David. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa, volumen 6, Núm. 3, pp 221 - 271.

- Meza, Armando; Barrios, Antonio (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de Octubre de 2010). Bogotá, Colombia.

◆ Milevicich, L. y Lois, A. (2010). La resolución de situaciones problemáticas en la formación de profesores. Acta latinoamericana de matemática educativa, 23, 1127- 1136. Comité latinoamericano de matemática educativa.

◆ Obando, G., y Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Revista Educación y Pedagogía.

◆ Obando, G.; Vanegas, M. D. y Vásquez, N. L. (s. f.). Módulo 1. Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. Serie Didáctica de las Matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia.

◆ Obando, Gilberto (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista EMA, 8(2), pp. 157-182

◆ Olguín, E.M. y Valdemoros, M.E. (2009). Reparto con fracciones: estrategias de resolución. Acta latinoamericana de matemática educativa, 22, 789-799. Comité latinoamericano de matemática educativa.

◆ Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

◆ Rumelhart, McClelland y PDP research group, 1986. Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition. Volumen 2. Psychological and Biological Models. Universidad de California, San Diego.

◆ Tamayo, O. et al. (2011). La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Manizales: Artes Gráficas Tizan Ltda.

◆ Vasco, C. (1989). Dos nuevos grupos piagetianos en la lógica elemental. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 17(64), 29-39. Revista

Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2014) 17 (1): 59 - 81. Recepción: mayo 6, 2012 / Aceptación: marzo 30, 2013.

- Vasco, C. E. (1994) Archipiélago Fraccionario. Lineamientos curriculares

- WILENSKY, U.; Y RAND, W. Making models match: Replicating agent-based models. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, v. 10, p. 42, 2007.

Capítulo 9

Webgrafía

- Becerra, Dilcia; Becerra, Aura M.; Rodriguez, Omaira C.; Nocua, Blanca E.Suárez Jose de J. Fracciones, juego y aprendizaje. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 22 de mayo de 2011 de

  http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110449_archivo.pdf

- Gómez, P; Kilpatrick, J y Rico, L. (1998). Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas.

  Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

- Kieren, T. (1998). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Recuperado de

  http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=cvJ0l6VpEwUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=..

- Penalva, M. Carmen y TORREGROSA Germán. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Alicante, España. Recuperado el 12 de mayo de 2011 de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/PenalvaC01-2631.PDF

- Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Cap. V, 125-154. En Rico, L et al: la educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: horsori. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095380.
- http://aprende.colombiaaprende.edu.co/cainicio
- http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/metodo_singapur.pdf
- http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=221695
- http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106625_archivo.pdf
- http://journals.openedition.org/polis/322
- http://www.librosmaravillosos.com/hombrecalculaba/pdf/El%20Hombre%20que...
- http://www.todoesciencia.gov.co/rodolfo-llinas