



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 15 de octubre de 2020

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Natalia Son Vargas, con C.C. No.1075303497,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o Revisión bibliográfica titulado “Introducción a la teoría de catástrofes elementales” presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de Matemático;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Introducción a la teoría de catástrofes elementales

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Son Vargas	Natalia

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro
Hernández Ramírez	Juan David

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Polanía Quiza	Luis Arturo

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Matemático

**FACULTAD:** Ciencias Exactas y Naturales

**PROGRAMA O POSGRADO:** Matemática Aplicada

**CIUDAD:**

**AÑO DE PRESENTACIÓN:**

**NÚMERO DE PÁGINAS:**

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una X):

Diagramas\_\_\_Fotografías\_\_\_Grabaciones en discos\_\_\_Ilustraciones en general\_X\_Grabados\_\_\_  
Láminas\_\_\_Litografías\_\_\_Mapas\_\_\_Música impresa\_\_\_Planos\_\_\_Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_Tablas  
o Cuadros\_X\_



**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: PDF

**MATERIAL ANEXO:** Ninguno

**PREMIO O DISTINCIÓN** (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*): Ninguno

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Catástrofes elementales	elementary catastrophes
2. despliegue universal	universal unfolding
3. variedad	manifold
4. conjunto de bifurcación	bifurcation set

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

Las catástrofes ocurren cuando se presenta un cambio discontinuo en un fenómeno al variar sus parámetros de control, René Thom a quien se le atribuye la formulación de esta teoría, describe esta discontinuidad en la evolución de los fenómenos a través de un teorema donde clasifica estas discontinuidades en siete catástrofes elementales.

Este trabajo de grado se centra en el estudio de las catástrofes de bifurcación y catástrofes elementales según René Thom, donde sus objetivos son identificar el campo ideal de las catástrofes de bifurcación e interpretar la existencia de un potencial y una perturbación en la teoría de catástrofes elementales. Para cumplir con estos objetivos propuestos se hace una revisión bibliográfica de la teoría de catástrofes.

Como resultado de esta revisión se obtiene una introducción a la teoría de catástrofes elementales donde se concluye que las catástrofes de bifurcación ocurren cuando un atractor entra en competencia consigo mismo después de una variación continua y que el campo ideal en el que se desarrollan es en los reales de  $n$  variables. Además, se deduce que los potenciales ayudan a entender el comportamiento de los sistemas ya que estos están relacionados con los equilibrios y que una pequeña perturbación no tiene efecto alguno en un despliegue universal de una catástrofe elemental.



**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

Catastrophes occur when there is a discontinuous change in a phenomenon by varying its control parameters, René Thom, who is credited with formulating this theory, describes this discontinuity in the evolution of phenomena through a theorem where he classifies these discontinuities in seven elementary catastrophes.

This degree work focuses on the study of bifurcation catastrophes and elementary catastrophes according to René Thom, where its objectives are to identify the ideal field of bifurcation catastrophes and interpret the existence of a potential and a disturbance in the theory of elementary catastrophes. To meet these proposed objectives, a bibliographic review of the theory of catastrophes is made.

As a result of this review, an introduction to the theory of elementary catastrophes is obtained, where it is concluded that bifurcation catastrophes occur when an attractor enters into competition with itself after continuous variation and that the ideal field in which it develops is in the real of  $n$  variables. Furthermore, it follows that the potentials help to understand the behavior of systems and that these are related to equilibria and that a small disturbance has no effect on a universal unfolding of an elemental catastrophe.

**APROBACIÓN DE LA TESIS**

Nombre Jurado: Mauro Montealegre Cárdenas

Firma:

Nombre Jurado: Juan David Hernández Ramírez

Firma:



# Introducción a la teoría de catástrofes elementales

Natalia Son Vargas

Director(a):  
M.Sc. LUIS ARTURO POLANÍA QUIZA

Programa de Matemática Aplicada  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Surcolombiana  
Neiva (Huila), Colombia  
2020



# Introducción a la teoría de catástrofes elementales

Natalia Son Vargas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Matemático**

Director(a):  
M. Sc. POLANÍA QUIZA, LUIS ARTURO

Programa de Matemática Aplicada  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Surcolombiana  
Neiva (Huila), Colombia  
2020



Lo único que debemos hacer es adquirir plena conciencia del poder que poseemos y no olvidarnos de que nadie puede hacer nada sin el pueblo, que nadie puede hacer tampoco nada que no quiera el pueblo. ¡Sólo basta que los pueblos nos decidamos a ser dueños de nuestros propios destinos! Todo lo demás es cuestión de enfrentar al destino

Eva Perón

## Resumen

Las catástrofes ocurren cuando se presenta un cambio discontinuo en un fenómeno al variar sus parámetros de control, René Thom a quien se le atribuye la formulación de esta teoría, describe esta discontinuidad en la evolución de los fenómenos a través de un teorema donde clasifica estas discontinuidades en siete catástrofes elementales.

Este trabajo de grado se centra en el estudio de las catástrofes de bifurcación y catástrofes elementales según René Thom, donde sus objetivos son identificar el campo ideal de las catástrofes de bifurcación e interpretar la existencia de un potencial y una perturbación en la teoría de catástrofes elementales. Para cumplir con estos objetivos propuestos se hace una revisión bibliográfica de la teoría de catástrofes.

Como resultado de esta revisión se obtiene una introducción a la teoría de catástrofes elementales donde se concluye que las catástrofes de bifurcación ocurren cuando un atractor entra en competencia consigo mismo después de una variación continua y que el campo ideal en el que se desarrollan es en los reales de  $n$  variables. Además, se deduce que los potenciales ayudan a entender el comportamiento de los sistemas ya que estos están relacionados con los equilibrios y que una pequeña perturbación no tiene efecto alguno en un despliegue universal de una catástrofe elemental.

**Palabras clave:** Catástrofes elementales, despliegue universal, variedad, conjunto de bifurcación.

## Abstract

Catastrophes occur when there is a discontinuous change in a phenomenon by varying its control parameters, René Thom, who is credited with formulating this theory, describes this discontinuity in the evolution of phenomena through a theorem where he classifies these discontinuities in seven elementary catastrophes.

This degree work focuses on the study of bifurcation catastrophes and elementary catastrophes according to René Thom, where its objectives are to identify the ideal field of bifurcation catastrophes and interpret the existence of a potential and a disturbance in the theory of elementary catastrophes. To meet these proposed objectives, a bibliographic review of the theory of catastrophes is made.

As a result of this review, an introduction to the theory of elementary catastrophes is obtained, where it is concluded that bifurcation catastrophes occur when an attractor enters into competition with itself after continuous variation and that the ideal field in which it develops

is in the real of  $n$  variables. Furthermore, it follows that the potentials help to understand the behavior of systems and that these are related to equilibria and that a small disturbance has no effect on a universal unfolding of an elemental catastrophe.

**Keywords: elementary catastrophes, universal unfolding, manifold, bifurcation set.**

# Introducción

Este trabajo de grado trata de hacer una revisión bibliográfica de la teoría de catástrofes, centrandolo su estudio específicamente en las catástrofes de bifurcación y en las catástrofes elementales cuya clasificación fue hecha por René Thom en su teorema. Las catástrofes de bifurcación ocurren cuando un atractor entra en competencia consigo mismo, es decir, cuando el mínimo en un punto único deja de ser estable y las catástrofes elementales son discontinuidades que se presentan cuando se varía continuamente un fenómeno bajo ciertas condiciones.

Los objetivos que tiene este estudio son conocer o identificar el campo ideal para estudiar las catástrofes de bifurcación que se encuentran dentro de las catástrofes elementales e interpretar la existencia de un potencial y una perturbación en este tipo de catástrofes. Como resultado de esta investigación se obtiene el texto *introducción a la teoría de catástrofes elementales*, que surge de la recopilación de bibliografía sobre teoría de catástrofes; de acuerdo a lo que se había mencionado anteriormente este estudio se centra en las catástrofes de bifurcación y en las catástrofes elementales ambas plasmadas en el pensamiento de René Thom descrito en su libro [7].

Este trabajo inicia con el capítulo que habla de algunos conceptos básicos, el cual se ha denominado como *Preliminares*; estos conceptos son los siguientes: variedades, sistemas dinámicos, estabilidad estructural de puntos críticos y familia de funciones, teoría de singularidades y una breve introducción a la teoría de catástrofes y René Thom. Estos conceptos son importantes para la comprensión de este trabajo, ya que se estarán abordando a lo largo de este.

Se sigue con el capítulo *Conceptos sobre la teoría de Catástrofe según René Thom*, donde se habla sobre conjuntos de catástrofes y competencia de régimen, el despliegue universal de una singularidad de codimensión finita y corrancho. El tercer capítulo enuncia y demuestra el teorema de las siete catástrofes elementales, en este resultado Thom lo que hace es describir las discontinuidades en la evolución de fenómenos de codimensión menor o igual a cuatro con corrancho uno y dos. Este capítulo junto con el anterior son claves para el desarrollo de los objetivos de este estudio, pues en estos es donde se habla de catástrofes de bifurcación, perturbaciones y las siete catástrofes elementales.

Finalmente, se encuentra el capítulo *Geometría de catástrofes de corrancho uno y dos* el cual trata de mostrar el comportamiento cualitativo de estas catástrofes.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>vi</b>
<b>Introducción</b>	<b>viii</b>
	<b>Página</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Variedad . . . . .	3
1.2 Sistemas dinámicos . . . . .	5
1.2.1 Atractor . . . . .	5
1.3 Singularidades . . . . .	5
1.3.1 Germen . . . . .	5
1.3.2 Espacio Jet . . . . .	6
1.3.3 Germen $k$ determinado . . . . .	6
1.3.4 Puntos críticos . . . . .	8
1.3.5 Lema de Morse . . . . .	8
1.4 Estabilidad estructural de puntos críticos y familia de funciones potenciales .	14
1.4.1 Estabilidad estructural de puntos críticos . . . . .	15
1.4.2 Familias de funciones potenciales . . . . .	15
1.5 Teoría de catástrofes y René Thom: Una introducción . . . . .	16
<b>2 Conceptos sobre teoría de catástrofes según René Thom</b>	<b>18</b>
2.1 Despliegue universal de una singularidad de codimensión finita . . . . .	18
2.2 Conjunto de catástrofe y puntos regulares . . . . .	20
2.3 Clasificación de catástrofes y competencia de regímenes locales . . . . .	21
2.4 Corrago . . . . .	23
<b>3 Teorema de las siete catástrofes elementales</b>	<b>25</b>
<b>4 Geometría de catástrofes de corrago uno y dos</b>	<b>32</b>
4.1 Catástrofes de corrago uno . . . . .	32
4.1.1 Codimensión cero . . . . .	32
4.1.2 Codimensión uno . . . . .	33
4.1.3 Codimensión dos . . . . .	34
4.1.4 Codimensión tres . . . . .	38

---

4.1.5	Codimensión cuatro . . . . .	39
4.2	Catástrofes de corranco dos . . . . .	42
4.2.1	Codimensión tres . . . . .	42
4.2.2	Codimensión cuatro . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

**Notación:** Para una mejor comprensión, en éste trabajo se usa la siguiente notación.

1.  $O$  = origen
2.  $C_p^\infty(M)$  = anillo de mapas diferenciables  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  en  $p$  con valores reales
3.  $\varepsilon(n)$  = anillo de germenos diferenciables  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ .
4.  $m(n) = \{f : f \in \varepsilon(n) | f(0) = 0\}$  es un ideal maximal
5.  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$  = es el ideal generado por  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  con  $i = 1, \dots, n$
6.  $j^k(f)$  o  $J^k f(0)$  = es el k-jet de  $f$
7.  $J^r(n, p)$  = es el conjuntos de todos los k-jets
8.  $Df|_{x_0}$  = Derivadas parciales de la función  $f$  evaluada en  $x_0$
9.  $cod(\eta)$  = codimensión de la singularidad  $\eta$
10.  $Hf$  = matriz hessiana de la función  $f$

# 1 Preliminares

El presente capítulo se realiza una pequeña contextualización de los conceptos claves para entender la teoría de catástrofes elementales. En la primera sección abordamos las variedades que hacen parte de la topología diferencial, acá explicaremos lo que es una variedad, una carta, un atlas y subvariedades diferenciables.

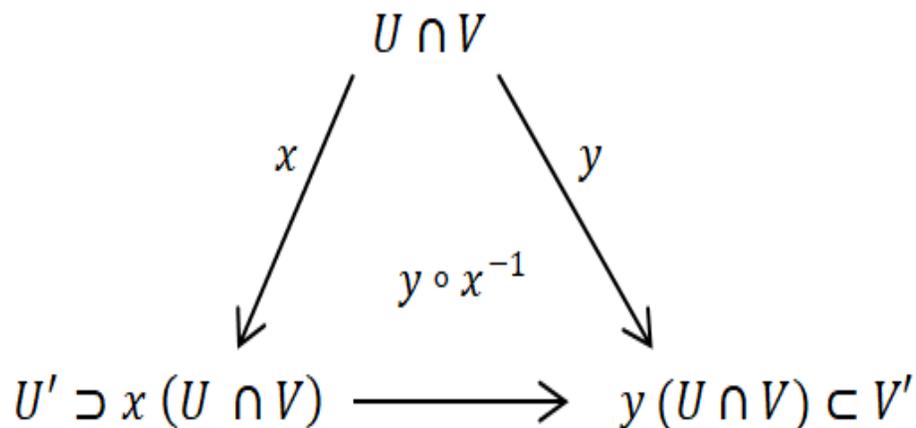
En la segunda sección de este capítulo definiremos los sistemas dinámicos y atractores en una variedad según la concepción de René Thom. En la tercera sección hablaremos de germen, espacios jet, germen k-determinado, puntos críticos, lema de Morse, estabilidad estructural de puntos críticos y familias de funciones potenciales y en la última sección se hará una breve introducción de la teoría de catástrofes y René Thom.

## 1.1. Variedad

Una variedad  $n$  dimensional  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff que localmente se parece al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  de  $n$ -tuplas reales  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es decir, con una base contable para la topología que es localmente homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Esto es, para cada punto  $p$  que pertenece a  $M$ , existe una vecindad abierta de  $p$  y un homeomorfismo  $x : U \rightarrow U'$  en el subconjunto abierto  $U'$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Un homeomorfismo  $x : U \rightarrow U'$  de un subconjunto abierto  $U$  de  $M$  en el subconjunto abierto  $U'$  de  $\mathbb{R}^n$  se le denomina como **carta** de una variedad, a la imagen de cada elemento de  $M$ ,  $x(m) = (x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m))$  que pertenece a  $\mathbb{R}^n$  se le llama el **conjunto de coordenadas** de  $m$  respecto a la carta dada y a  $U$  se le denomina **dominio de la carta**. Una colección de cartas  $h_\alpha$  con  $\alpha$  que pertenece a  $A$  ( $h_\alpha | \alpha \in A$ ), con dominios  $U_\alpha$  y  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$  se le conoce como **atlas** de una variedad.

Sea  $x, y$  dos cartas cualesquiera de  $M$ , ambas homeomorfismos cuyos dominios  $U$  y  $V$  tengan intersección no vacía  $U \cap V \neq \emptyset$  y resulta que  $x(U \cap V)$  y  $y(U \cap V)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $y \circ x^{-1}$  es un homeomorfismo entre subconjuntos abiertos el cual se conoce como **transformación de cartas**, como se puede ver en la Fig. 1-1:



**Figura 1-1:** Transformación de cartas

Consideremos un mapeo diferenciable entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  como un mapeo en  $C^\infty$ , es decir, un mapeo cuyas derivadas parciales existen y son continuas, ya que  $x \circ x^{-1} = Id$  y  $(r \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}) = r \circ x^{-1}$  donde  $r$  es una carta de  $M$  y  $r \circ y^{-1}$  al igual que  $r \circ x^{-1}$  son una transformación de cartas, se sigue que  $(y \circ x^{-1})^{-1} = x \circ y^{-1}$ , por lo que las inversas de las transformaciones de carta también son diferenciables, luego, son difeomorfismos.

Un atlas de una variedad es **diferenciable** si todas sus transformaciones de carta son diferenciables y además todo atlas diferenciable esta contenido en un atlas **maximal** diferenciable, dicho de otra manera, sea  $\mathcal{N}$  un atlas diferenciable en una variedad  $M$ , entonces el atlas  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{N})$  contiene las cartas para las cuales cada transformación de carta con una carta de  $\mathcal{N}$  es diferenciable. El atlas  $\mathcal{D}$  es entonces diferenciable, ya que uno puede escribir localmente una transformación de carta en  $\mathcal{D}$  como una composición de cartas de transformaciones de cartas para una carta de  $\mathcal{N}$  y la diferenciable es una propiedad local. Como un elemento en la familia de atlas diferenciables, el atlas  $\mathcal{D}$  puede no ampliarse mediante la adición de atlas y es el atlas diferenciable mas grande contenido en  $\mathcal{N}$ .

Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica junto con una estructura diferenciable, esto es, que contiene una atlas diferenciable maximal. Un subconjunto  $F$  de  $M^{n+k}$  es llamado una **subvariedad diferenciable**  $n$  dimensional de  $M$ , si para cada punto  $p$  que pertenece a  $F$  existe una carta  $x$  al rededor de  $p$ ,  $x : U \rightarrow U'$  tal que  $U'$  es subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+k}$ , así que  $x(F \cap \mathbb{R}^n)$ . El número  $k = \dim M - \dim F$  es llamado la codimensión de la subvariedad.

## 1.2. Sistemas dinámicos

Según René Thom [7], sea  $X$  un campo vectorial en una variedad  $M$ . Cuando este campo es de clase  $C^1$ , el sistema diferencial  $\frac{dm}{dt} = x(m)$  tiene soluciones con la siguiente propiedad de locales únicos:

Existe una y sólo una curva de solución en el producto  $M \times \mathbb{R}$  de  $M$  con el eje tiempo a través de cada punto  $y$  que pertenece a  $M$ .

### 1.2.1. Atractor

Sea  $(M, X)$  un sistema dinámico definido por el campo vectorial  $X$  sobre la variedad  $M$ , un atractor  $C$  del sistema es un conjunto cerrado invariante bajo  $X$  que cumple las siguientes tres condiciones

1. Existe una vecindad invariante abierta  $U$  de  $C$ , llamada la cuenca del atractor  $C$ , de modo que cada trayectoria que comienza de un punto de  $U$  tiene a  $C$  como su conjunto límite.
2. Toda trayectoria cuyo conjunto límite  $\alpha$  contiene un punto de  $C$  esta contenido en  $C$
3.  $C$  es indescomponible, esto es, cada una de sus trayectorias de  $C$  son densas.

Un atractor  $C$  de un campo  $X$  se llama **estructuralmente estable** si para cada campo  $X_1$  suficientemente cerca a  $X$  hay un atractor  $C_1$  y un homeomorfismo  $h$  de una vecindad de  $C$  en una vecindad de  $C_1$ , lanzando trayectorias de  $X$  en  $X_1$ . De otra forma se puede decir que un sistema dinámico  $X$  en  $M$  es estructuralmente si una perturbación suficientemente pequeña del campo  $X$  no altera la naturaleza cualitativa del sistema.

## 1.3. Singularidades

Conceptos como germen, espacio jet, germen  $k$  determinado y algunos resultado que hacen parte de la teoría de singularidades son utilizados en la teoría de catástrofes elementales. A continuación daremos estas nociones básicas

### 1.3.1. Germen

Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables;  $U$  y  $V$  subconjuntos de  $M$  son entornos abiertos de un punto  $p \in M$ , tal que  $f$  y  $g$  con  $f : U \rightarrow N$  y  $g : V \rightarrow N$  son mapeos diferenciables. Decimos que  $f$  y  $g$  tienen el mismo germen en  $p$  que pertenece a  $M$  ( $p \in M$ ), si existe un conjunto abierto  $X$  no vacío, donde  $f$  restringido  $X$  es igual a  $g$  restringido  $X$  ( $f|_X = g|_X$ ). Entonces lo anterior es una relación de equivalencia en el conjunto de mapeos diferenciables

definidas en algún entorno de  $p$ , llamaremos  $C_p^\infty(M, N)$  al conjunto de equivalencias y cada clase sera un germen.

### 1.3.2. Espacio Jet

Sea  $C^m(n, p)$  el conjunto de todos los mapeos diferenciables  $m$  veces, donde  $f$  es un mapeo diferenciable que va desde la variedad diferenciable  $M = \mathbb{R}^n$  hasta la variedad diferenciable  $N = \mathbb{R}^p$  ( $f : M \rightarrow N$ ) ( $m$  y  $p$  pertenecen a los naturales) con  $f$  evaluado en el origen igual al origen ( $f(O) = O$ ). Llamamos  $f, g$  que pertenece a  $C^m(n, p)$  equivalentes de orden  $k$  en  $O$ , si en  $O$  que pertenece a  $\mathbb{R}^n$  ( $O \in \mathbb{R}^n$ ) sus expansiones de Taylor hasta e incluyendo los términos de grado  $k$  ( $\leq k$ ) son idénticas. El  $k$ -jet es la clase de equivalencia de  $f$ .

Tomando los valores de las derivadas parciales en  $O$  como las coordenadas del jet, entonces  $J^k(n, p)$  se convierte en el espacio Euclidiano, por lo que el  $k$ -jet se puede realizar mediante un conjunto de polinomios truncados de grado menor o igual a  $k$ .

Ahora para un mapeo  $f$  diferenciable,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene:

$$j^k f = \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} D^r f \Big|_O X^r \text{ con } X \in \mathbb{R},$$

y para un mapeo  $f$  diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  los  $n$  términos de la serie de Taylor se convierten en:

$$\frac{1}{r!} \sum \frac{\partial^n f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_r}} \Big|_O X_{i_1} \dots X_{i_r} \text{ donde } X_{i_1}, \dots, X_{i_r} \in \mathbb{R}^n,$$

donde la suma esta sobre todas las sucesiones  $i_1, \dots, i_r$  con  $0 \leq i_n \leq n$  para cada  $n$ .

### 1.3.3. Germen $k$ determinado

Antes de definir que es un germen  $k$  determinado es importante conocer cuando dos germenes son equivalentes a derecha, su definición es la siguiente:

**Definición 1.1** *Dos germenes  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son **equivalentes a derecha** si existe un difeomorfismo local  $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $y(O) = O$  tal que  $g(x) = f(y(x))$  en una vecindad de  $O$ .*

Un germen  $f \in \varepsilon(n)$  es llamado  **$k$  determinado** si cada germen  $g \in \varepsilon(n)$ , con el mismo  $k$ -jet que  $f$ , es equivalente a derecha a  $f$ . Si existe  $k \in \mathbb{N}$  talque  $f \in \varepsilon(n)$  esta  $k$  determinado, decimos que  $f$  esta **finitamente determinado**.

Cuando se dice que  $f$  esta  $k$  determinado es mucha mas una exposici3n sobre el polinomio  $j^k f$  que sobre  $f$ .

A continuaci3n se enunciara un teorema que determina cuando  $f$  esta  $k$  determinado:

**Teorema 1.1** *Sea  $f \in \varepsilon(n)$  y sea  $m(n)^k \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle + m(n)^{k+1}$  entonces  $f$  es  $k$  determinado.*

Su demostraci3n la encontramos en [2] (p3ginas 95-97)

La hip3tesis de este teorema tambi3n se puede escribir de la siguiente manera:

$$m(n)^k \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \text{ modulo } m(n)^{k+1}.$$

Si la hip3tesis se escribe como  $m(n)^k \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle + m(n)m(n)^k$  entonces el lema de Nakayama implica que

$$m(n)^k \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle.$$

Luego, esta condici3n es equivalente a la hip3tesis del teorema.

### Observaci3n:

1. El **lema de Nakayama** dice lo siguiente: "Sea  $R$  un anillo conmutativo el cual tiene un 3nico ideal maximal  $m$ . Suponga que  $A$  es un  $R$ -modulo generado finitamente, entonces  $m.A = A = 0$ .

En consecuencia, con el mismo supuesto, sea  $B, C$   $R$ -m3dulos tal que  $A, B \subset C$  entonces  $A \subset B + m.A \rightarrow A \subset B$ ".

La demostraci3n del lema y su consecuencia se encuentra en [2] (p3ginas 35,36).

Para la demostraci3n del teorema de las siete cat3strofes elementales, utilizaremos el siguiente corolario. Solo se dar3 su enunciado, la demostraci3n se puede encontrar en [2] (p3gina 100 )

**Corolario 1.1** *Si  $m(n)^k \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \rightarrow f$  es  $K$  determinado  $\rightarrow m(n)^{k+1} \subset m(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$ .*

### 1.3.4. Puntos críticos

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo suave. Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto crítico de  $f$  si

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} = 0$$

Existen dos tipos de puntos críticos, están los degenerados y los no degenerados. Los puntos críticos no degenerados se definen de la siguiente manera:

**Definición 1.2** Un **punto crítico no degenerado**  $x_0$  en  $f$  ocurre cuando  $D^2f|_{x_0}$  es una forma cuadrática no degenerada, esto es, su rango es igual al número de variables  $n$ , lo que es equivalente a que la matriz Hessiana  $Hf|_{x_0} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_0}$  sea no singular, es decir, el determinante de la matriz Hessiana es distinto a cero.

Los **puntos críticos degenerados** son el caso contrario por lo que su matriz Hessiana  $Hf|_{x_0}$  es singular, esto quiere decir que el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero.

Los puntos críticos no degenerados son aislados, es decir, no están suficientemente cerca de ellos otros puntos críticos.

### 1.3.5. Lema de Morse

Antes de enunciar y demostrar el lema de Morse, explicaremos las formas cuadradas, el enunciado del teorema de la función inversa y un lema necesario para la demostración del lema de Morse.

#### Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  es una expresión

$$q(x) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j \text{ con } i, j = 1, \dots, n.$$

que también se puede expresar como un producto matricial, donde  $x = [x_1, \dots, x_n]$  es el vector fila cuya transpuesta es

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Y llamaremos  $A = (\lambda_{ij})$  la matriz de la forma cuadrática y entonces  $q(x) = xAx^T$ . Si reemplazamos  $A$  por  $\frac{1}{2}(A + A^T) = M$ , la forma cuadrática permanece sin cambios y  $M$  es simétrica en el sentido que  $M = M^T$ . Por lo tanto cada forma cuadrática puede escribirse como  $q(x) = xMx^T$  para  $M$  simétrica y asumiremos que es el caso.

Cada forma cuadrática en  $n$  variables se puede reducir mediante una transformación lineal no singular de las variables a la forma  $d_1y_1^2 + \dots + d_ny_n^2$

El primer paso es alcanzar una forma con  $\lambda_{11} \neq 0$ . Si hay algún término  $\lambda_{ii} \neq 0$  entonces la transformación lineal que intercambia  $x_1$  y  $x_i$  logra esto. Si todos sus términos diagonales son cero entonces algún término fuera de la diagonal  $\lambda_{ij}$  ( $i \neq j$ ) es no cero, y por simetría  $\lambda_{ji} \neq 0$ , entonces la forma es

$$q(x) = 2\lambda_{ij}x_ix_j + \text{términos que involucran otras variables}$$

Ahora, si  $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$ ,  $y_j = \frac{1}{2}(x_i - x_j)$  y el resto de  $x_k$  sin cambios ( $y_k = x_k$ ), obtenemos un término  $2\lambda_{ij}y_i^2 - 2\lambda_{ij}y_j^2$  donde los coeficientes diagonales son distintos de cero y el argumento anterior se aplica.

Hecho esto, podemos volver a la anterior notación y asumiremos que  $\lambda_{11} \neq 0$ , luego

$$q(x) = \lambda_{11} \left( \sum_{i,j} \mu_{ij} x_i x_j \right); \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}},$$

los términos en los cuales  $x_1$  ocurre son:

$$x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_1 x_j = \left( x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \right)^2 - \left( \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \right)^2,$$

luego, decimos que

$$y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \text{ y } y_i = x_i \text{ para } i > 1,$$

una transformación lineal no singular se convierte

$$q(y) = \lambda_{11} y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \dots, y_n),$$

donde  $\tilde{q}$  es una forma cuadrática en variables  $y_2, \dots, y_n$  donde al repetir el proceso las veces necesarias nos da el resultado.

Si reemplazamos  $x_i$  por  $z_i = \frac{x_i}{\sqrt{|d_i|}}$  con  $|d_i| \neq 0$ , conduce a una expresión del tipo similar pero con solo los coeficientes  $0, 1, -1$ . Cambiando el orden para obtener los 1 primero, luego

los  $-1$  y descartando los  $0$ , obtenemos el resultado de que cualquier forma cuadrática en  $n$  variables puede por una transformación lineal no singular de las variables volverse  $z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_s^2$  donde  $s \leq n$ . El número  $s$  es llamado el **rango** de la forma cuadrática.

### Teorema de la función inversa y Enunciado del Lema

Antes de enunciar y demostrar el teorema de la función inversa, mostraremos el siguiente teorema que sera útil en nuestra demostración.

**Teorema 1.2** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si el máximo (o mínimo) de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ocurre en un punto  $a$  en el interior de  $A$  y  $D_i f(a)$ , existe, entonces  $D_i f(a) = 0$ .*

**Demostración:** Sea  $g_i(x) = f(a^1, \dots, x, \dots, a^n)$ . Claramente  $g_i$  tiene un máximo (o mínimo) en  $a^i$  y  $g_i$  es definida en un intervalo abierto que contiene  $a^i$ .

**Teorema 1.3 (Teorema de la función inversa:)** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) un mapeo suave donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $u \in U$ . Si el mapa lineal  $Df|_x$  es no singular, entonces  $f$  es un difeomorfismo local en  $x$  (note que  $Df|_x$  es no singular si y sólo si  $\det Df|_x \neq 0$ ).*

**Demostración:** Sea  $\lambda$  la transformación lineal de  $Df(x)$ . Luego  $\lambda$  no es singular ya que  $\det Df|_x \neq 0$ . Ahora  $D(\lambda \circ f)(x) = D(\lambda^{-1}) = \lambda^{-1} \circ Df(x)$  es la transformación lineal identidad. Si el teorema es cierto para  $\lambda^{-1} \circ f$ , claramente lo es para  $f$ . Por tanto podemos asumir desde el principio que  $\lambda$  es la identidad, siempre que  $f(x+h) = f(x)$ ; tenemos

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - \lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1$$

pero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Esto significa que no podemos tener  $f(u) = f(x)$  para  $u$  arbitrariamente pequeño cercano, pero desigual a  $x$ . Por lo tanto, existe un rectángulo  $V$  que contiene a  $x$  en su interior, tal que

(1)  $f(u) \neq f(x)$  si  $u \in V$  y  $u \neq x$ .

Dado que  $f$  es continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a  $x$ , también podemos suponer que

(2)  $\det Df|_u \neq 0$  para  $u \in V$ .

$$(3) |D_j f^i(u) - D_j f^i(x)| < \frac{1}{2n^2} \text{ para } i, j \text{ y } u \in V.$$

Note que (3) y el lema 1-1 que dice lo siguiente:

**Lema 1.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable. Si hay un número  $M$  tal que  $|D_j f^i(x)| \leq M$  para todo  $x$  en el interior de  $A$ , entonces  $|f(x) - f(y)| \leq n^2 M |x - y|$  para todo  $x, y \in A$ .*

Aplicado a  $g(u) = f(u) - u$  implica para  $u_1, u_2 \in V$  que

$$|f(u_1) - u_1 - (f(u_2) - u_2)| \leq \frac{1}{2}|u_1 - u_2|,$$

ya que

$$|u_1 - u_2| - |f(u_1) - f(u_2)| \leq |f(u_1) - u_1 - (f(u_2) - u_2)| \leq \frac{1}{2}|u_1 - u_2|,$$

obtenemos

$$(4) |u_1 - u_2| \leq 2|f(u_1) - f(u_2)| \text{ para } u_1, u_2 \in V$$

Ahora  $f(\text{limite de } V)$  es un conjunto compacto que, por (1) no contiene  $f(x)$ . Por lo tanto hay un número  $d > 0$  talque  $|f(x) - f(u)| \geq d$  para  $x \in \text{limite de } V$ . Sea  $W = \{y : |y - f(x)| < \frac{d}{2}\}$ . Si  $y \in W$  y  $x \in \text{limite de } V$ , entonces

$$(5) |y - f(x)| < |y - f(u)|$$

Demostraremos que para cualquier  $y \in W$  hay una  $u$  única en el interior de  $V$  talque  $f(u) = y$ . Para probar esto, considere la función  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(u) = |y - f(u)|^2 = \sum_{i=1}^n (y^i - f^i(u))^2.$$

Esta función es continua y por lo tanto tiene un mínimo en  $V$ . Si  $u \in \text{limite de } V$ , entonces por (5), tenemos  $g(x) < g(u)$ . Por lo tanto, el mínimo de  $g$  no ocurre en el limite de  $V$ . Por Teorema 1.2, hay un punto  $u \in \text{interior de } V$  talque  $D_j g(u) = 0$  para todo  $j$ , esto es

$$\sum_{i=1}^n 2(y^i - f^i(u)) D_j f^i(u) = 0, \text{ para todo } j.$$

Por (2) la matriz tiene determinante no cero. Por lo tanto, debemos tener  $y^i - f^i(u) = 0$  para todo  $i$ , esto es  $y = f(u)$ .

Esto prueba la existencia de  $u$ . La unidad se sigue inmediatamente de (4).

Si  $U = (\text{interior de } V) \cap f^{-1}(W)$  hemos demostrado que la función  $f : U \rightarrow W$  tiene una inversa  $f^{-1} : W \rightarrow U$ . Podemos reescribir (4) como

$$(6) |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2| \text{ para } y_1, y_2 \in W.$$

Esto demuestra que  $f^{-1}$  es continua. Solo queda la prueba de que  $f^{-1}$  es diferenciable en  $y = f(u)$  con derivada  $\mu^{-1}$ .

Para  $u_1 \in U$ , tenemos

$$f(u_1) = f(u) + \mu(u_1 - u) + \varphi(u_1 - u),$$

donde

$$\lim_{u_1 \rightarrow u} \frac{|\varphi(u_1 - u)|}{|u_1 - u|} = 0.$$

Por lo tanto

$$\mu^{-1}(f(u_1) - f(u)) = u_1 - u + \mu^{-1}(\varphi(u_1 - u)).$$

Dado que todo  $y_1 \in W$  tiene la forma  $f(u_1)$  para algún  $u_1 \in U$ , esto se puede escribir

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))$$

y, por lo tanto basta con mostrar que

$$\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Ahora

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}.$$

Dado que  $f^{-1}$  es continua  $f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y)$  como  $y_1 \rightarrow y$ . Dado que, por (6), el segundo factor es menor que 2, el producto también se acerca a 0.

**Lema 1.2** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo suave en una vecindad de  $O$  con  $f(O) = 0$ . Entonces en una vecindad posiblemente mas pequeña existen funciones  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = \sum_{i=1}^n x_i g_i$  donde cada  $g_i$  es suave y  $g_i(O) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_O$ . (Su demostración se encuentra en [5] página. 54)

### Lema de Morse

**Lema 1.3** Sea  $u$  un punto crítico no degenerado del mapeo suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces, hay un sistema de coordenadas local  $y_1, \dots, y_n$  en una vecindad  $U$  de  $u$  con  $y_i(u) = 0$  para todo  $i$ , talque

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_t^2 + y_{t+1}^2 + \dots + y_n^2 \text{ para todo } u \in U$$

### Demostración:

Trasladaremos el origen a  $u$  por lo que asumiremos que  $u = 0$  y  $f(u) = f(0) = 0$ , luego, por el lema 1.2  $f(x)$  se puede escribir de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x) \text{ en alguna vecindad de } 0.$$

Donde  $0$  es un punto crítico tenemos  $g_i(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0 = 0$ . Por lo tanto usando el lema 1.2 de nuevo, existen funciones suaves  $h_{ij}$  talque

$$g_i(x) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x) \text{ y podemos escribir } f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x) \quad (1.2.1)$$

Si reemplazamos  $h_{ij}$  por  $H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$  y diferenciamos parcialmente dos veces (1.2.1), tenemos que  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0 = 2H_{ij}(0)$  y por lo tanto la matriz

$$[H_{ij}(0)] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \end{array} \right]$$

no es singular ya que  $0$  es un punto crítico no degenerado. Hay una transformación no singular de las funciones de coordenadas que nos da la expresión deseada para  $f$  en una vecindad quizás mas pequeña de  $0$ , para ver esto, simplemente imitamos la prueba de diagonalización habitual para formas cuadráticas.

Ahora, procederemos por inducción. Supongamos que existen coordenadas locales  $u_1^2, \dots, u_n^2$  en una vecindad  $U_1$  de  $0$  tal que

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n) \text{ donde } H_{ij} = H_{ji} \quad (7)$$

Podemos hacer un cambio lineal en las coordenadas  $r$  para diagonalizar  $\sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(0)$ . En particular, como  $H_{ij}(0)$  no es singular, los términos de la diagonal son distintos de cero, así podemos asumir que  $H_{rr}(0) \neq 0$ . Sea  $g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|}$ , por el teorema 1.3 esta es suave en alguna vecindad  $U_2$  de 0 contenida en  $U_1$ . Cambiamos ahora coordenadas a  $(v_1, \dots, v_n)$  definidas por

$$v_i = u_i \ (i \neq r) \text{ y } v_r = g(u_1, \dots, u_n) \left( u_r + \sum_{i > r} \frac{u_i H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right), \quad (8)$$

la matriz jacobiana en 0 no es singular. En consecuencia usando el teorema de la función inversa  $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (v_1, \dots, v_n)$  es un difeomorfismo local en alguna vecindad mas pequeña  $U_3$  de 0. En otras palabras  $(v_1, \dots, v_n)$  servirán como coordenada.

Considérese ahora

$$u_r u_r H_{rr}(u_1, \dots, u_n) + 2 \sum_{j=r+1}^n u_j u_r H_{jr}(u_1, \dots, u_n), \quad (9)$$

que consta de los términos de la ecuación (7) con  $i$  o  $j = r$ . Al comparar (7) con (8) vemos que la expresión es igual a

$$\pm v_r v_r - \frac{1}{H_{rr}} \left( \sum_{i > r} u_r H_{ir}(u_1, \dots, u_n) \right)^2,$$

donde el signo mas o menos proviene del hecho que  $H_{rr} = \pm g^2$ , donde usamos mas si  $H_{rr}$  es positivo y menos si  $H_{rr}$  es negativo. De esto vemos que la ecuación (7) se escribe

$$f(v_1, \dots, v_n) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 + \sum_{i,j \geq r+1} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n),$$

para nuevas coordenadas  $H'_{ij}$  simétricas. Así, hemos pasado inductivamente de  $r$  a  $r + 1$  en la ecuación (7). Por lo tanto es cierta para  $r = n + 1$  lo que demuestra el teorema.

## 1.4. Estabilidad estructural de puntos críticos y familia de funciones potenciales

Para poder hablar de estabilidad estructural en una familia de funciones potenciales, se tiene que definir estabilidad estructural en un mapeo  $f$ , función potencial y finalmente familia de funciones potenciales.

### 1.4.1. Estabilidad estructural de puntos críticos

Para la definición de cuando una función  $f$  es estructuralmente estable, utilizamos la definición de cuando dos mapeos son equivalentes.

**Definición 1.3** *Dos mapeos  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son equivalentes al rededor de  $x_0$  si existe un difeomorfismo local  $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  alrededor de  $x_0$  y una constante  $\gamma$  talque  $g(x) = f(y(x)) + \gamma$*

Consideraremos el efecto de una pequeña perturbación. Sea  $f$  un mapeo cuyo punto crítico  $x_0$  es de Morse, esto es, un punto crítico no degenerado por lo tanto  $Df|_{x_0} = 0$  y  $\det Hf|_{x_0} \neq 0$ . Ahora sea  $g$  un mapeo suave pequeño, en el sentido de que todas sus derivadas parciales son pequeñas para  $x$  en una vecindad fija del punto crítico  $x_0$ , luego deberíamos tener  $\det H(f + g)|_{x_0} \neq 0$ .

Decimos ahora que  $f$  es **estructuralmente estable** si para mapeos suaves pequeños  $g$ , el punto crítico  $f$  y  $f + g$  tienen el mismo tipo, en otras palabras  $f$  y  $f + g$  son equivalentes después de una adecuada traslación de  $x_0$ . Por lo que cerca a un punto crítico no degenerado o Morse cualquier función es estructuralmente estable.

### 1.4.2. Familias de funciones potenciales

El concepto de potencial fue establecido por Laplace a principios del siglo *XVIII* donde resumió en una sola cantidad todas las fuerzas que actuaban sobre un objeto. Si el objeto cambiaba de movimiento a medida que evolucionaba esto quería decir que se desplazaba a una posición mínima de potencial, de aquí la relación de un potencial con el equilibrio de sistemas.

Sea  $V_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función potencial cuando los parámetros de control externo  $c \in \mathbb{R}^n$  permanecen fijos en el cual  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) representa el espacio de estados interno descrito por las variables de estado. Ahora sea  $\mathbb{R}^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) el espacio de control (o parámetros) y como los parámetros de control  $c \in \mathbb{R}^k$  varían continuamente, un cambio de la función potencial  $V_c$  conduce a cada estado del sistema mismo. Luego para cada punto  $c$  existe un mapa suave, continuo y diferencial  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  que construye una familia de funciones potenciales en  $\mathbb{R}^n$  caracterizadas por  $\mathbb{R}^k$  y el cual se denomina el despliegue de  $V_c$ .

Una familia de funciones potenciales es **estructuralmente estable** si  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  es equivalente a cualquier familia  $V + p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $p$  es una familia suficientemente pequeña  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  por lo tanto dos familias  $V, V + p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  son equivalentes si existe  $e, y, \gamma$  definidos en una vecindad de  $O \in \mathbb{R}^n$  tal que  $p(x, c) = V(y_c(x), e(c)) + \gamma(c)$  para todo  $(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  en esta vecindad. En el que  $e, y, \gamma$  siguen:

- a. Un difeomorfismo  $e : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

- b. Un mapa suave  $y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que para todo  $(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  el mapa  $y_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo
- c. Un mapa suave  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Esta noción de equivalencia proviene de la definición de equivalencia de dos funciones donde  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son equivalentes al rededor de  $O$  si existe un difeomorfismo local  $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y existe una constante  $\gamma$  que ajusta el valor de la función en  $O$  tal que  $g(x) = f(y(x)) + \gamma$  en una vecindad de  $O$ .

El difeomorfismo  $y$  se convierte en una familia de difeomorfismos  $y_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $c \in \mathbb{R}^k$ , el cual varia suavemente con  $c$ ; la constante  $\gamma$  se convierte en una familia de constantes que varia suavemente con  $c$ .

## 1.5. Teoría de catástrofes y René Thom: Una introducción

René Thom (1923 – 2002) fue un matemático y filosofo francés que se formo en el campo de la topología y quien en 1958 gracias a su trabajo sobre la teoría de cobordismo gano una medalla fields. Thom al igual que Newton fue determinista y un crítico de los partidarios del indeterminismo en la teoría del caos, especialmente de Ilya Prigogine quien era un defensor de esta corriente y quien la expreso a través de sus trabajos sobre la termodinámica de los sistemas alejados del equilibrio a la que llamo estructuras disipativas. Paradójicamente la teoría tiene similitud con la teoría del caos en que ambas parten a lo universal de lo particular, esto se debe a que la teoría de catástrofes se origina de la idea del despliegue universal de una singularidad, según Thom una singularidad es algo que concreta toda la estructura global en una estructura local.

En el ámbito de la teoría de catástrofes René Thom fue quien formuló esta teoría, pero fue Zeeman quien dio su denominación teórica. Después de su trabajo de cobordismo, Thom empezó a trabajar en lo que hoy se conoce como la teoría de catástrofes a través del estudio de las relaciones entre el calculo de variaciones y las singularidades de mapeo suave de Whitney y de Morse. Los orígenes de la teoría de catástrofes formalmente se encuentran en la teoría de singularidades y en la teoría de bifurcaciones de sistemas dinámicos de Andronov y Poincare, donde, una catástrofe es un conjunto de bifurcación de una singularidad degenerada de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Una noción mas simple se puede dar de la siguiente manera: Una catástrofe es un cambio brusco y discontinuo después de una variación de los parámetros de control, donde el trabajo de esta teoría es describir las discontinuidades en la evolución de los fenómenos. Este fenómeno Thom lo describió en el teorema de clasificación de las siete catástrofes elementales

---

que consiste en la identificación de estas catástrofes las cuales tienen codimensión inferior o igual a cuatro y que demostraremos mas adelante.

## 2 Conceptos sobre teoría de catástrofes según René Thom

En éste capítulo se presenta la definición de despliegue universal de una singularidad de codimensión finita, corrancho, conjunto de catástrofe y puntos regulares; y la clasificación de catástrofes y competencia de regímenes locales según René Thom en su libro [7]. Este capítulo es importante para llegar a uno de nuestros objetivos sobre las catástrofes de bifurcación elementales.

### 2.1. Despliegue universal de una singularidad de codimensión finita

Un germen  $F \in m(n+k)$  se dice que es un despliegue de  $f \in m(n)$  si  $F|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = f$ , en otras palabras  $F(x, 0) = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ . La codimensión del despliegue  $F$  es  $k$ .

Decimos que  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ( $n, p \in \mathbb{N}$ ) son mapas que tienen el mismo tipo topológico, es decir, los jets de orden  $r$  de estos mapas son el mismo, por lo que existen homeomorfismos  $h$  y  $h_1$  del espacio rango e imagen tal que  $h(O) = O, h_1(O) = O$ , el diagrama conmuta como en la Fig. 2-1 y supondremos que el jefe de  $f$  es determinado.

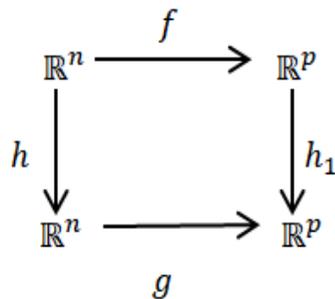


Figura 2-1: Diagrama de los mapas  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  que tienen el mismo tipo topológico.

Un jet es estructuralmente estable cuando cualquier perturbación pequeña del mapa  $f$  es topológicamente equivalente a  $f$  y no es estructuralmente estable en los siguientes dos casos:

1. Las perturbaciones arbitrariamente pequeñas de  $f$  dan lugar a un número infinito de tipos topológicos. En este caso se dice que  $f$  tiene una codimensión infinita y el jet no es determinado.
2. Cuando estas perturbaciones dan lugar a un solo número finito de tipos topológicos,  $f$  tiene codimensión finita y el jet es determinado. La codimensión es  $q$ , donde se puede incrustar el mapa en una familia de deformaciones parametrizadas por  $q$  variable para que el germen  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  así definido sea estructuralmente estable con respecto a las perturbaciones que dejan el espacio del parámetro invariante.

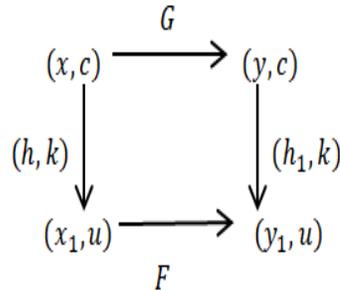
Ya con esto podemos dar una definición de despliegue universal de codimensión finita:

**Definición 2.1** Sea  $y = f(x)$  el germen de un mapa diferenciable  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  cuyo jet en el origen tiene una singularidad de codimensión  $q$ , entonces el **desarrollo universal de la singularidad** es una familia

$$y = f(x) + \sum u_j g_j(x) = F(x, u),$$

parametrizado por  $q$  variables  $u$ , con la siguiente propiedad:

Para cada deformación  $G(x, c) = y$ ,  $G(x, 0) = f(x)$  de  $f$ , existen homeomorfismos  $h$  y  $h_1$  y un mapa  $c \rightarrow u$  tal que el diagrama conmuta como en la Fig.2-2



**Figura 2-2:** Diagrama de definición del despliegue universal.

La codimensión de un germen  $\eta$  se puede hallar de la siguiente manera:

$$cod(\eta) = dim(m(n) / \langle \partial \eta / \partial x \rangle)$$

**Ejemplo:** La codimensión de  $x^4$  esta dada de la siguiente manera:

$$\text{cod}(x^4) = \dim(m(1)/\langle x^3 \rangle) = \dim(\langle x, x^2, x^3, x^4, \dots \rangle / \langle x^3, x^4, x^5, \dots \rangle) = 2,$$

y la base de  $(m(1)/\langle x^3 \rangle)$  es  $x, x^2$ .

Luego, el despliegue de  $x^4$  es

$$F(x, a, b) = x^4 + ax^2 + bx.$$

Para calcular la codimensión en casos simples de funciones de dos variables se puede usar el triángulo de Siersma como sigue:

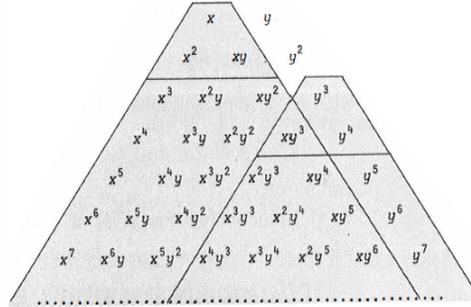
Considere

$$f(x, y) = x^2 + y^4,$$

calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

Ahora omitiremos los factores numéricos y procedemos a dibujar las sombras de  $x$  e  $y^3$  en un diagrama como se muestra en la Fig. 2-3:



**Figura 2-3:** Triángulo de Siersma. Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 162), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

Luego, se cuenta la cantidad de monomios sin sombrear, en este caso son dos y esta es la codimensión. Su despliegue es

$$F(x, y, a, b) = x^2 + y^4 + ay^2 + by.$$

## 2.2. Conjunto de catástrofe y puntos regulares

Los puntos **regulares**  $r$  son aquellos en los que en una vecindad  $b_\epsilon(r)$  con  $\epsilon > 0$ ,  $r$  no difiere de sus puntos vecinos, Thom en [7] definió los puntos regulares como un subconjunto abierto

en  $M$  al cual denotaremos por  $S$  y definió al subconjunto complementario  $M - S$  como un subconjunto cerrado de una variedad  $M$  al cual denotaremos por  $K$ , donde el tipo topológico de sus singularidades y estructura local se determinan por la dinámica subyacente definida en la variedad  $M$ , la evolución del sistema sera definida por un campo vectorial  $X$  en  $M$  el cual define la dinámica macroscópica.

El conjunto complementario de  $S$  es el conjunto de puntos  $m \in M$  tales que representan cierta discontinuidad en cada vecindad  $b_\epsilon(m)$  y a aquellos se les denomina puntos **catastróficos** y estos pertenecen al conjunto de catástrofe  $K$ .

Los puntos de catástrofes se dividen en dos: puntos de catástrofes ordinarios y puntos de catástrofes esenciales. Los puntos de catástrofes **ordinarios**  $p$  son tales que al intersectar  $K$  y la bola  $b_\epsilon(p)$  tienen como modelo un poliedro semianalítico incrustado no vacío sin punto interior y además las restricciones de los procesos a las bolas abiertas  $b_\epsilon(p)$  son todas isomorfas para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Los puntos de catástrofes  $x$  que estén suficientemente cerca a  $p$  también satisfacen las mismas condiciones de  $p$ ; el conjunto  $K$  es semianalítico y no nulo en una vecindad de  $x$ , por lo que existe una estructura canónica  $K \cap b_r(x)$ , la cual establece un isomorfismo de los procesos locales, esto es, hay dos procesos del mismo tipo sobre dos conjuntos abiertos, por lo tanto los puntos de catástrofes ordinarios forman un subconjunto abierto en el conjunto  $K$  de catástrofes.

Un punto de catástrofe **esencial**  $e$  es aquel que no es ordinario. Los puntos esenciales  $e$  forman un subconjunto cerrado  $C$  de puntos de catástrofes  $K$ , un punto de este tipo no puede ser aislado en el conjunto de catástrofes  $K$  ya que el proceso restringido a cualquier  $b_\epsilon(e)$  cambia su clase de isomorfismo cuando  $\epsilon$  es muy pequeño, esto implica que el límite de  $b_\epsilon(e)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  se encuentra con nuevas catástrofes esenciales: las que pertenecen al cierre del conjunto de catástrofes ordinarias y los que tienen alguna vecindad que contiene solo catástrofes esenciales.

## 2.3. Clasificación de catástrofes y competencia de regímenes locales

las catástrofes se pueden clasificar de dos formas: la primera es según su dominio de existencia y la cuenca de un atractor y la segunda si esta es una catástrofe de conflicto o de bifurcación.

Según su dominio de existencia y la cuenca de un atractor:

Se considera  $W$  un subconjunto del dominio del espacio base donde el sistema dinámico  $(M, X)$  definido por el campo vectorial  $X$  en la variedad  $M$  en  $y \in W$  es un estado acotado definido por un atractor estructuralmente estable  $c(y)$ , el punto  $y$  es un punto regular

y todos los puntos regulares que se pueden unir a  $y$  por caminos que se encuentran en el conjunto de puntos regulares forman el dominio  $W$  que se conoce como el **dominio de existencia** del atractor, luego este conjunto de puntos regulares es un subconjunto abierto del espacio base; **la cuenca de un atractor** también es un subconjunto abierto, pero a diferencia del anterior es de la variedad  $M$  de estados internos. En cada vecindad  $W$  de un punto de catástrofe ordinario  $p \in K$  hay como mínimo dos atractores  $c_1, c_2$  cuyos dominios de existencia se encuentran en  $W$  y que su competencia es posible solo cuando las cuencas de estos tengan una frontera en común en la variedad  $M$ .

Antes de hablar de la clasificación de cuando una catástrofe es de conflicto o de bifurcación, tendremos en cuenta la siguiente definición:

**Definición 2.2** *La convención de Maxwell consiste en que cuando varios atractores estables  $c_i$  compiten en un punto  $x$  del espacio base  $W$ , el estado elegido es uno  $c_{i_0}$  de potencial  $V(c_{i_0})$  mínimo, esto es:*

$$V(c_{i_0}) \leq V(c_i) \text{ con } i \neq i_0.$$

*Cabe aclarar que acá no interesa la validez cualitativa de la convención, si no que nos permita describir la estructura topológica de los puntos de catástrofe en la vecindad de una singularidad del potencial  $V(c)$  donde un atractor sufre bifurcación.*

Cuando los atractores involucrados en una catástrofe entran en competencia en la vecindad del punto dado con uno o varios atractores se habla de una **catástrofe de conflicto**, la convención de Maxwell dice que un punto de catástrofe  $x$  es de conflicto si el mínimo absoluto del potencial  $V(m, x)$  se logra en al menos dos puntos  $c$  y  $c'$ . Si se habla de una **catástrofe de bifurcación** se remite a cuando un atractor entra en competencia consigo mismo después de una variación continua, el ejemplo mas simple de este tipo de catástrofe es la catástrofe de Riemann-Hugoniot o cúspide; la convención de Maxwell dice que un punto  $x$  es de bifurcación cuando el mínimo logrado en un único punto  $m_0$  deja de ser estable.

Una singularidad de bifurcación para un punto aislado solo ocurre cuando el punto crítico a desplegar es en si mismo estable en el sentido de ser un mínimo (degenerado) del potencial  $V$ . Cuando la codimensión es una hay solo dos catástrofes: La de Riemann-Hugoniot o cúspide y la catástrofe mariposa. En codimensión dos, Thom en [7] (páginas 90-93) habla de una catástrofe que se le conoce como doble cúspide según Zeeman, pero que no entraremos en detalle debido a que solo nos interesa las catástrofes de bifurcación elementales.

Sea  $W$  un subconjunto del espacio base  $\mathbb{R}^4$  con el sistema dinámico  $(M, X)$  y donde para cada  $x \in W$ ,  $X(x)$  es un campo vectorial en la variedad  $M$  que depende diferencialmente

de  $x$ , los **regímenes locales** estables en un punto  $x$  de  $W$  son definidos por los atractores estructuralmente estables de  $X$ , esto es, por los mínimos del potencial  $V$ . Luego en un punto regular  $x$  tendrá varios mínimos de los que solo uno puede dominar a lo anterior se le conoce como **competencia** entre regímenes locales, esta competencia la definirá la convención de Maxwell.

## 2.4. Corrago

Sea  $M = \mathbb{R}^n$  una variedad  $n$ -dimensional y  $O$  un punto singular de  $f : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  entonces la expansión de la serie de Taylor en  $O$  empieza con una forma cuadrática  $Q(x_i)$  de rango  $n - m$ , donde el entero  $m$  se le llamará el corrago de la singularidad  $O$ .

Una definición mas detallada del corrago de una singularidad se da de la siguiente manera: si  $O$  es un punto critico no degenerado de  $f$ , es decir  $Hf|_O$  es no singular y su rango es igual a las variables de la familia de funciones, entonces el rango de la singularidad  $O$  en  $f$  sera  $n$ , luego el corrago de esta singularidad es cero. Ahora, si  $O$  es un punto crítico degenerado entonces  $Hf|_O$  es de rango  $n - m$ , donde  $m$  son los valores propios de  $Hf|_O$  que desaparecen simultáneamente en  $(x_0, c_0) = O \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^k$ . Luego  $f$  se puede dividir en una parte  $\tilde{f}$  degenerada y una parte Morse, usando el **Lema "splitting"** para una nueva coordenada  $y \in \mathbb{R}^n$ , el lema dice lo siguiente:

**Lema "splitting"**: Sea  $f : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo suave y denotamos un punto en  $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^k$  para  $(x, c) = (x_1, \dots, x_{n-m}; c_1, \dots, c_k)$ . Si  $Hf|_{(x,c)}$  tiene corrago  $m$  en  $(x, c) = (O, O)$ , entonces  $f$  es equivalente a derecha a la familia de funciones:

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_m, c) \pm y_{m+1}^2 \pm \dots \pm y_{m-n}^2$$

La demostración de este lema se encuentra en [5] (páginas 95-97). Este lema no proporciona información sobre la forma de la familias de funciones degeneradas  $\tilde{f}$  sino que esta familia tiene términos de tercer orden o de mas alto grado de  $y_i$  en la expansión de Taylor en el origen  $O \in \mathbb{R}^m$ . El corrago mide el número de direcciones independiente en las que se degenera  $f$ .

Lo que quiere decir este lema es que el comportamiento de  $f$  cerca de un punto crítico degenerado se puede encontrar al estudiar una familia de funciones  $\tilde{f}$  que involucran un numero de variables igual al corrago de  $Hf$  que por lo tanto es el corrago de la singularidad en  $f$ . La utilidad del corrago de una familia de funciones es que si sus variables son muchas pero su corrago es  $m$  entonces para su estudio se requiere una familia de funciones de  $m$  variables.

Si el corranco de la singularidad en  $f$  es igual a  $m$  entonces la codimensión es mayor o igual  $\binom{m+1}{2}$ , esto es,  $\text{cod}(f) \geq \binom{m+1}{2}$ .

# 3 Teorema de las siete catástrofes elementales

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el teorema de las siete catástrofes elementales, la manera como Thom describió las discontinuidades en la evolución de fenómenos con variables de control menor o igual a cuatro.

Si  $\eta$  es una singularidad de codimensión  $\leq 4$ , sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{cod}(\eta) \leq 4 &\iff \dim(m(n)/\langle \partial\eta/\partial x \rangle) \leq 4 \\ \implies m(n)^5 \subset \langle \partial\eta/\partial x \rangle &\implies m(n)^6 \subset m(n) \langle \partial\eta/\partial x \rangle \\ &\implies \eta \text{ es 6-determinado (Por Cor. 1.1)} \end{aligned}$$

y su corrancho es  $\leq 2$ , un despliegue  $\eta$  sera equivalente a un germen  $\mu(x, y) + q(z_1, z_2, \dots)$  donde  $q$  es una forma cuadrática.

El teorema clasifica la forma que  $\mu$  puede tomar salvo equivalencia como  $\eta$  esta 6-determinada,  $\mu$  sera equivalente a un polinomio de grado a lo sumo 6.

**Teorema 3.1** *Cualquier mapeo suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que tenga un punto crítico en el origen y que tenga codimensión  $\leq 4$  es equivalente a la derecha a uno de los siguientes.*

Nombre	Codimensión	f	Despliegue universal
Morse	0	$x^2$	$x^2$
Pliegue	1	$x^3$	$x^3 + ax$
Cúspide	2	$x^4$	$x^4 + ax^2 + bx$
Cola de golondrina	3	$x^5$	$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$
Mariposa	4	$x^6$	$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$
Omblogo Hiperbólico	3	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + axy - bx - cy$
Omblogo elíptico	3	$x^3 - 3xy^2$	$x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) - bx - cy$
Omblogo Parabólico	4	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 - cx - dy$

**Tabla 3-1:** Las siete catástrofes elementales.

(donde  $a, b, c, d$  son variables de control y  $x$  e  $y$  variables de estado)

**Observación:** La función Morse  $x^2$  no es una función catástrofe; las otras siete son las catástrofes de René Thom.

**Demostración:**

**Corrango uno**

Tomando el  $n$ -jet de  $f(x)$

$$f(x) = \alpha x^n + h(x),$$

donde  $h(x)$  es una función de orden  $n + 1$  en sentido de que sus primeras  $n$  derivadas desaparecen en  $O$  y

$$\alpha = \frac{1}{k!} D^n f \Big|_0 \neq 0,$$

luego

$$h(x) = x^n q(x),$$

debido al siguiente lema:

**Lema 3.1** *Sea  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave tal que  $q(0) = Dq|_0 = \dots = D^k q|_0 = 0$ . Entonces en una vecindad de  $0$ , existe una función  $L$  tal que  $q(x) = x^k L(x)$  y  $L(0) = 0$ .*

**Demostración:** Usamos inducción sobre  $k$ . Cuando  $k = 0$ , debido al lema 1.2, tenemos

$$q(x) = xL(x),$$

para  $k \neq 0$  usamos el mismo lema para mostrar que

$$q(x) = xL_1(x) \text{ donde } L_1(x) \text{ es suave.}$$

Diferenciando esta relación  $m$  veces obtenemos

$$D^m q|_x = x D^m L_1|_x + m D^{m-1} L_1|_x,$$

con  $x = 0$  deducimos que

$$L_1(0) = DL_1|_0 = \dots = D^{k-1} L_1|_0 = 0.$$

Inductivamente

$$L_1(x) = x^{k-1} L(x) \text{ donde } L \text{ es suave y } L(0) = 0,$$

entonces

$$q(x) = x^k L(x),$$

lo cual queda demostrado.

Volviendo a la demostración del teorema para corrancho uno, se tiene

$$f(x) = \alpha x^n + x^n q(x) = x^n(\alpha + q(x)) = \pm x^n |\alpha + q(x)|$$

donde el signo es de  $\alpha$ , siempre que  $x$  se encuentre en un vecindario  $V$  de 0 lo suficientemente pequeño como para que  $|q(x)| < |\alpha|$ . Si  $x$  se encuentra en  $V$ , entonces  $|\alpha + q(x)| \neq 0$ .

Definamos  $g(x) = x|\alpha + q(x)|^{1/n}$  donde la raíz  $n$  es la única positiva. Probaremos que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo local, para probarlo utilizaremos el Teorema 1.3 (visto en la sección 1.3), es decir, miraremos si  $g$  es suave y si  $\det Dg|_0 \neq 0$ . Claramente  $g$  es suave, ahora vamos a mirar si  $\det Dg|_0 \neq 0$  y para esto vamos a hallar  $Dg|_0$

$$\begin{aligned} Dg|_0 &= \left[ x \frac{1}{n} |\alpha + q(x)|^{\frac{1}{n}-1} Dq(x)|_x + |\alpha + q(x)|^{\frac{1}{n}} \right]_0 \\ &= |\alpha + q(0)|^{\frac{1}{n}} \\ &= |\alpha|^{\frac{1}{n}} \neq 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\det Dg|_0 \neq 0$  y por el teorema de la función inversa,  $g$  es un difeomorfismo local. Luego

$$f(x) = \pm g(x)^n.$$

Por lo tanto, el cambio de coordenadas  $x = g(x)$  pone  $f$  en la forma  $\pm x^n$ .

Ahora, como la codimensión es  $\leq 4$ , entonces  $n = 2, 3, 4, 5, 6$

$$\pm x^2, x^3, \pm x^4, x^5, \pm x^6.$$

### Corrancho dos

Implica que  $\text{cod}(\eta) \geq \binom{3}{2} = 3$ , luego  $\text{cod}(\eta)$  es 3 o 4.

Como corrancho  $\eta = 2$  entonces en este caso es de doble generación y para encontrar la forma de la función se debe considerar términos de mayor grado que cuadráticos tanto en  $x$  como en  $y$  simultáneamente; luego sea  $P(x, y) = j^3(\eta)$  un polinomio homogéneo de grado 3, es decir

$$P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

tiene forma cúbica y por lo tanto admite una descomposición en  $\mathbb{C}$

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y),$$

donde existen cuatro posibilidades

1. Los tres vectores  $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$  son parejas linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$
2. Los dos primeros vectores son linealmente independientes y el tercero es un múltiplo del segundo. Aquí

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$$

con  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  linealmente independientes. Debido a que  $P$  es real, los factores y por lo tanto  $(a_i, b_i)$  pueden elegirse reales.

3. Todos los  $(a_i, b_i)$  son independientes pero distintos de cero, entonces

$$P(x, y) = (ax + by)^3, \quad a, b \in \mathbb{R}^2$$

4.  $P(x, y) = 0$

**Caso 1.** Se divide en dos.

a) Suponemos que todos  $(a_i, b_i)$  son reales; escogemos  $(a_1x + b_1y)$  para  $x$  y  $(a_2x, b_2y)$  para  $y$  como nuevas coordenadas. Escribiendo  $\sim$  para denotar equivalencia a la derecha.

$$P(x, y) \sim xy(ax + by),$$

cambiando  $(x, y)$  a  $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$  obtenemos

$$xy(ax + by) \sim (ab)^{-1}xy(x + y),$$

cambiando  $(x, y)$  a  $ab^{\frac{1}{3}}(x, y)$  obtenemos

$$(ab)^{-1}xy(x + y) \sim xy(x + y),$$

cambiando  $(x, y)$  a  $(x + y, x - y)$  obtenemos

$$xy(x + y) \sim 2x(x^2 - y^2),$$

cambiando  $(x, y)$  a  $2^{-\frac{1}{3}}(x, y)$  obtenemos

$$2x(x^2 - y^2) \sim x(x^2 - y^2) = x^3 - xy^2,$$

finalmente  $P(x, y) \sim x^3 - xy^2$ .

Si  $m(2)^3 \subset m(2)\langle \partial P / \partial x \rangle$ , entonces  $P(x, y)$  es 3-determinado (Teorema 1.1), luego

$$\langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle \subset \langle x, y \rangle \langle x^2, xy, y^2 \rangle = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$$

Luego como  $x^3 - xy^2$  es 3-determinado y  $P(x, y) \sim x^3 - xy^2$  entonces  $P(x, y)$  es 3-determinado, esto implica que

$$\eta \sim x^3 - xy^2 \text{ (Ombligo elíptico).}$$

b) Suponemos que dos  $(a_i, b_i)$  son complejos conjugados, entonces

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(\overline{a_2}x + \overline{b_2}y).$$

El producto  $(a_2x + b_2y)(\overline{a_2}x + \overline{b_2}y)$  es una forma cuadrática definida positiva, por lo tanto mediante cambio de coordenadas lineales se puede transformar en  $x^2 + y^2$  y

$$P(x, y) \sim (ax + by)(x^2 + y^2),$$

por rotación de coordenadas  $(ax + by)$  puede ser transformada en  $cx$ , donde  $c \neq 0$ , entonces

$$P(x, y) \sim cx(x^2 + y^2),$$

cambiando  $(x, y)$  a  $c^{-\frac{1}{3}}(x, y)$  obtenemos

$$cx(x^2 + y^2) \sim x(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2,$$

luego  $x^3 + xy^2 \sim x^3 + y^3$ , esto se debe a que si

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2 \sim x^3 + xy^2,$$

$x^3 + y^3$  es además 3-determinado, esto es

$$m(2)^3 \subset m(2) \langle \partial P / \partial x \rangle \langle x^3, x^2y, y^2x, y^3 \rangle \subset \langle x, y \rangle \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, xy^2, yx^2, y^3 \rangle,$$

por lo que  $P(x, y)$  es 3-determinado (Teorema 1.1), luego  $\eta \sim x^3 + y^3$  (ombligo hiperbólico).

**Caso 2.** Considere

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2,$$

haciendo cambio de coordenadas como

$$(a_1x + b_1y) = y \quad \text{y} \quad (a_2x + b_2y) = x,$$

entonces

$$P(x, y) \sim yx^2,$$

veremos si es  $k$ -determinado (Teorema 1.1), luego

$$m(2)^k \subset \langle x, y \rangle \langle x^2, xy \rangle = \langle x^3, x^2y, xy^2 \rangle.$$

Así  $m(2)^k \not\subseteq m(n)\langle \partial P/\partial x \rangle$  ya que el ideal  $\langle x^2, xy \rangle$  no contiene ninguna potencia de  $y$ , luego no esta  $k$ -determinado, por lo tanto  $P(x, y)$  no esta finitamente determinado. Pero  $\eta$  esta 6-determinado y por lo tanto debe existir un  $jet$  que no es equivalente a derecha a  $x^2y$ .

Supongamos que  $k$  es el número más grande para el cual

$$j^k \eta \sim x^2y.$$

Sin perdida  $j^k \eta = x^2y$  y  $j^{k+1} \eta = x^2y + h(x, y)$  donde  $h$  es un polinomio homogéneo de grado  $k + 1$ , con  $k \geq 3$ . Transformamos  $\eta$  con un difeomorfismo de la forma

$$\Phi : (x, y) \longrightarrow (x + \phi, y + \varphi)$$

donde  $\phi$  y  $\varphi$  son homogéneos de grado  $k - 1 \geq 2$ .

El jacobiano  $\Phi$  en el origen es la identidad. Obtenemos

$$\begin{aligned} j^{k+1} \eta \circ \Phi &= j^{k+1}((x + \phi)^2(y + \varphi)) + h(x + \phi, y + \varphi) \\ &= j^{k+1}(x^2 + 2x\phi + \phi^2)(y + \varphi) + h(x, y) \\ &= j^{k+1}(x^2y + 2xy\phi + \phi^2y + x^2\varphi + 2x\phi\varphi + \phi^2\varphi) + h(x, y) \\ &= j^{k+1}(x^2y + 2xy\phi + x^2\varphi) + h(x, y). \end{aligned}$$

Eligiendo los polinomios  $\phi$  y  $\varphi$  podemos cancelar los términos de  $h$  que son múltiplos de  $xy$  o  $x^2$ , y de este modo tendremos

$$Q(x, y) = j^{k+1} \eta \circ \Phi = x^2y + ay^{k+1}, \text{ donde } a \neq 0 \text{ y } k \geq 3.$$

Vamos a ver si es  $(k + 1)$ -determinado

$$m(2)^{k+1} \subset \langle x, y \rangle \langle x^2 + y^k, xy \rangle = \langle x^3 + xy^k, xy^2, yx^2, y^{k+1} \rangle.$$

En consecuencia,  $Q(x, y)$  esta  $(k + 1)$ -determinado (Teorema 1.1) y

$$\eta \sim x^2y + ay^{k+1} \sim x^2y \pm y^{k+1},$$

si  $k \geq 4$  entonces

$$\text{cod}(\eta) = \dim \left( \frac{m(2)}{\langle \partial Q \rangle} \right) = \dim \left( \frac{m(2)}{\langle x^2 \pm y^k, xy \rangle} \right),$$

luego como  $\langle xy, x^2 \pm y^k \rangle \not\subseteq \langle x^2, y^k, xy \rangle$ , entonces

$$\dim \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x^2, y^k, xy \rangle} \right) < \dim \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\langle xy, x^2 \pm y^k \rangle} \right) = \text{cod}(\eta),$$

Si  $k = 4$

$$\begin{aligned} \dim \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x^2, y^4, xy \rangle} \right) &= \dim \left( \frac{\langle x, y, xy, x^2, y^2, x^3, y^3, x^2y, xy^2 \rangle}{\langle xy, x^2, y^4, x^3, x^2y, x^4, y^4 \rangle} \right) \\ &= 4. \end{aligned}$$

luego

$$\dim \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, y, x^2 + y^k \rangle} \right) \leq 5,$$

entonces si  $k \geq 4$ ,  $\text{cod}(\eta) \geq 5$ .

por lo tanto  $k = 3$  y  $x^2y + y^4 \sim x^2y - y^4$  (ombligo parabólico)

### Caso 3.

Considere

$$P(x, y) = (ax + by)^3 \sim x^3,$$

sin pérdida, sea  $j^3\eta = x^3$  entonces  $j^4\eta = x^3 + h(x, y)$  donde  $h$  es de grado 4. Podemos ver

$$\begin{aligned} \dim(j^3m(2)) &= 9 \\ \dim(j^3\langle \partial\eta \rangle) &= \dim(j^3\langle x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle) \end{aligned}$$

donde  $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$  son de grado 3.

Luego, como  $\langle x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle \not\subseteq \langle x^2, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle$  entonces

$$\dim \left( j^3\langle x^2, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle \right) = 3.$$

Por lo tanto,

$$\dim \left( j^3\langle x^2, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle \right) \leq 4,$$

luego

$$\dim \left( j^3 \frac{m(2)}{\langle \partial\eta \rangle} \right) \geq 5 > 4,$$

este caso no satisface  $\text{cod}(\eta) \leq 4$ .

**Caso 4.**  $P = 0$  implica que  $\eta \in m(2)^4$  por lo tanto  $\langle \partial\eta \rangle \subset m(2)^3$  y

$$\dim \left( \frac{m(2)}{m(2)^3} \right) = 5,$$

y este caso se excluye.

Así queda demostrado el teorema.

# 4 Geometría de catástrofes de corrancho uno y dos

A continuación vamos a estudiar las diversas estructuras geométricas de las siete catástrofes elementales de René Thom a través de un método en el cual la forma de la función cerca de un punto de la variedad de catástrofe es el objeto principal.

Para mirar la geometría tendremos que tener en cuenta lo siguiente:

- La variedad de catástrofe  $M$  es el subconjunto de la familia de funciones potenciales  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , definida por

$$DV(x, c) = 0,$$

este es el conjunto de todos los puntos críticos de todos los potenciales  $V_c$  de la familia  $V$

- El mapa de catástrofe  $\chi$  es la restricción a  $M$  de la proyección natural  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  para el cual  $\pi(x, c) = c$ .
- El conjunto de singularidad  $S$  es el conjunto de puntos singulares en  $M$  de  $\chi$  en que  $\chi$  es singular.
- La imagen  $\chi(S)$  en  $\mathbb{R}^k$  es llamada el conjunto de bifurcación  $K$ .

## 4.1. Catástrofes de corrancho uno

Las catástrofes de corrancho uno son aquellas que necesitan para su estudio funciones de una sola variable, en este caso la variable sera  $x$ . A continuación, mostraremos la geometría de este tipo de catástrofes y las dividiremos según su codimensión.

### 4.1.1. Codimensión cero

Las funciones de codimensión cero son funciones cuyo mínimo absoluto es estructuralmente estable y por lo tanto se define como un mínimo cuadrático:

$$V(x) = x^2.$$

Este tipo de funciones no son catástrofes.

### 4.1.2. Codimensión uno

#### Catástrofe pliegue

Su despliegue universal es :

$$V(x, a) = \frac{1}{3}x^3 + ax, \text{ o , } V(x, a) = x^3 + ax.$$

La variedad  $M$  de la catástrofe esta dada por

$$\frac{d}{dx}V(x, a) = x^2 + a = 0.$$

Esto sugiere que usemos la coordenada  $x$  como una carta para  $M$ , siendo el punto general de  $M$

$$(x, a) = (x, -x^2).$$

Para analizar el conjunto de bifurcación utilizaremos el 3-jet de la función para puntos pertenecientes al conjunto singular denotado  $S$ . Tenemos que:

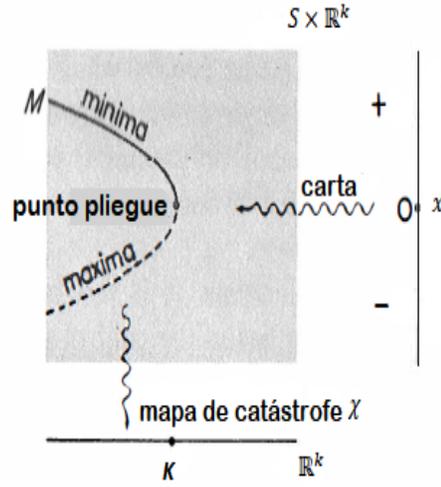
$$V(x + X, a) = \frac{1}{3}X^3 + xX^2 + (x^2 + a)X + \left(\frac{1}{3}x^3 + ax\right).$$

Como  $(x, a) = (x, -x^2) \in S$ , se sigue que

$$V(x + X, a) = \frac{1}{3}X^3 + xX^2 + 0X - \frac{3}{2}x^3.$$

Luego, el término cuadrático  $xX^2$  es no degenerado si  $x \neq 0$ , pero es degenerado si  $x = 0$ . Así el conjunto singular esta dado por  $x = 0$ , luego  $S = (0, 0)$  a este punto se le conoce como el punto pliegue. Cuando  $x > 0$  el término cuadrático es positivo y  $V(x, a)$  tiene un mínimo, cuando  $x < 0$  es un punto máximo.

Toda la geometría se resume en la Figura 4-1 donde la catástrofe es la parábola, el conjunto de bifurcación  $K$  es un solo punto:



**Figura 4-1:** Geometría catástrofe pliegue. Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 174), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

### 4.1.3. Codimensión dos

#### Catástrofe cúspide o Riemann-Hugoniot

Su despliegue universal es :

$$V(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \text{ o } V(x, a, b) = x^4 + ax^2 + bx,$$

La variedad  $M$  de la catástrofe esta dada por

$$\frac{d}{dx}V(x, a, b) = x^3 + ax + b = 0.$$

Usando la carta  $(x, a)$  como una carta en  $M$  siendo el punto general de  $M$

$$(x, a, b) = (x, a, -ax - x^3).$$

Ahora al igual que el anterior hallaremos su 4-jet, el cual es:

$$V(x + X, a) = \frac{1}{4}X^4 + xX^3 + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2}\right)X^2 + (x^3 + ax + b)X + \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx\right),$$

como  $(x, a, b) = (x, a, -ax - x^3) \in S$  entonces:

$$V(x + X, a) = \frac{1}{4}X^4 + xX^3 + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2}\right)X^2 + 0X + \left(-\frac{1}{2}ax^2 - \frac{3}{4}x^4\right).$$

Sea  $p, q, r$  los coeficientes de los términos cuadráticos, cúbicos y cuárticos, entonces:

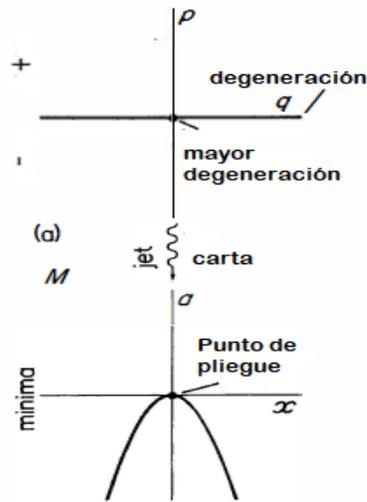
$$p(x, a) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2}, \quad q(x, a) = x, \quad r(x, a) = \frac{1}{4}$$

Esto sugiere que cambiemos la carta y usemos las coordenadas  $(p, q)$  como una carta en  $M$  con  $(x, a) = (q, 2p - 3q^2)$ . Expresando la anterior carta en término de esta, siendo el punto general de  $M$

$$(q, 2p - 3q^2, -2pq + 2q^3)$$

Luego el término cuadrático del 4-jet es degenerado cuando  $p = 0$  y este representa al eje  $q$  en el espacio  $(p, q)$ . La imagen de este tipo de punto en  $M$  es un pliegue, expresados en términos de la carta  $(x, a)$  pues cuando  $p = 0$  tenemos que  $q = x$  y como  $a = -3q^2$  entonces  $a = -3x^2$ . Ahora cuando  $p$  es no degenerado tenemos un punto de mínimo local cuando  $p > 0$  y un máximo cuando  $p < 0$ .

Si  $p = 0$  necesariamente analizamos los términos cúbicos, pues cuando esto sucede los términos cúbicos determinan el tipo de punto crítico siempre que  $q \neq 0$ . Cuando  $p, q = 0$  entonces el tipo de punto crítico es determinado por el punto  $X^4$ . Todo esto se resume en la siguiente figura:

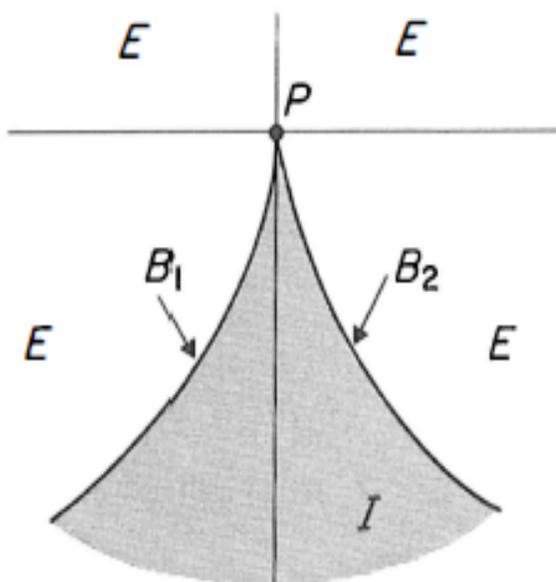


**Figura 4-2:** Tipo de punto crítico cuando  $p = 0$ . Adaptado de *Catastrophe Theory and Its Applications* (p. 175), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

La imagen en  $M$  de la línea  $p = 0$  esta dada por  $a = -3x^2$ , por lo tanto  $(x, a, b) = (x, a, -ax - x^3) = (x, -3x^2, 2x^3)$ , luego el conjunto de bifurcación es la imagen de esto en  $\mathbb{R}^k$ , es decir el conjunto de puntos  $(-3x^2, 2x^3) = (a, b)$ . Resolviendo las ecuaciones  $a = -3x^2$  y  $b = 2x^3$  tenemos que  $4a^3 + 27b^2 = 0$  la cual es el determinante de la variedad  $M$  y donde el conjunto de bifurcación esta definido.

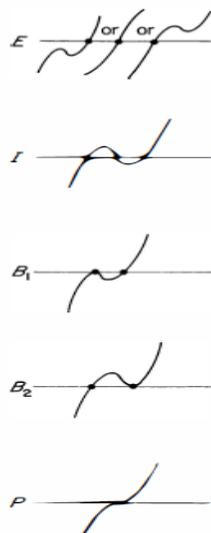
Ahora graficaremos  $\mathbb{R}^k$  y el conjunto de bifurcación el cual sera dividido de la siguiente manera:

- Si  $4a^3 + 27b^2 < 0$ , hay tres raíces reales distintas y llamaremos a esta región como  $I$ .
- Si  $4a^3 + 27b^2 = 0$ , hay tres raíces reales donde dos de ellas coinciden cuando  $a = b \neq 0$ , llamaremos a la región  $B_1$  cuando coincide en la raíz mas pequeña y  $B_2$  cuando coincide en la mas grande. Cuando  $a = b = 0$  sus tres raíces coinciden y es el punto  $p = (0, 0)$ .
- si  $4a^3 + 27b^2 > 0$ , hay una raíz real y dos complejas, esta región es  $E$ .



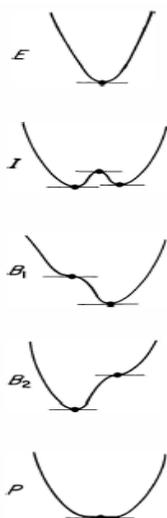
**Figura 4-3:** Conjunto de bifurcación cuspide. Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 79), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

Los puntos de las anteriores regiones se grafican como Fig. 4-4:



**Figura 4-4:** Raíces en el plano  $(a, b)$ . Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 79), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

y sus funciones potenciales de estos toman la forma de Fig. 4-5:

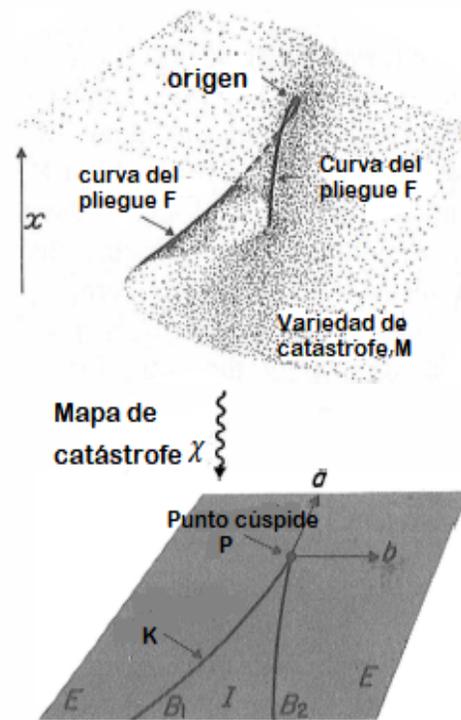


**Figura 4-5:** Funciones potenciales correspondientes a las regiones en el plano  $(a, b)$ . Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 80), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

Fuera de esta parábola semicúbica podemos ver que hay solo un mínimo y por lo tanto solo un régimen posible, en el interior que denominamos región  $I$  hay dos mínimos que definen la competencia, esto demuestra que no puede haber un régimen continuo dentro de la parábola; la cúspide da origen a un estrato de conflicto (un estrato de conflicto es un conjunto de

familias potenciales que tiene dos mínimos absolutos iguales  $c_1, c_2$ , en un lado del estrato  $V(c_1) < V(c_2)$  mientras que en el otro  $V(c_1) > V(c_2)$  la imagen inversa da lugar a un punto de catástrofe que separa a los regímenes  $c_1, c_2$  y separa las regiones denominadas por cada uno de los mínimos  $c_1, c_2$ . Usando la convención de Maxwell el estrato de conflicto es definido por  $V(c_1) = V(c_2)$ , este fenómeno es conocido en la dinámica de gases como la formación de una **onda de choque** y fue estudiado por **Hugoniot**, la posibilidad de tal discontinuidad había sido predicha por **Riemann**.

La geometría de la catástrofe se ilustra en Fig. 4-6, donde podemos notar como una carta revela la estructura de  $M$  como la imagen del plano.



**Figura 4-6:** Geometría catástrofe cúspide. Adaptado de *Cathastrophe Theory and Its Applications* (p. 80), por T. Poston e I. Stewart, 1978, Pitman.

#### 4.1.4. Codimensión tres

##### Catástrofe cola de golondrina

El despliegue universal de esta es:

$$V(x, a, b, c) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx, \text{ o } V(x, a, b) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx.$$

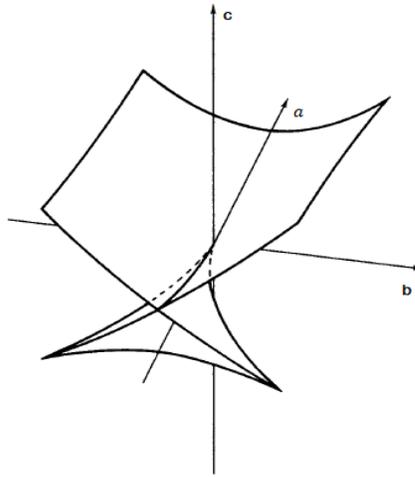
La variedad  $M$  de la catástrofe esta dada por

$$\frac{d}{dx}V(x, a, b, c) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

Luego, se realiza el mismo procedimiento que en las anteriores catástrofes donde obtenemos que el conjunto de bifurcación se parametriza por  $q, r$  (donde  $q, r$  son las coordenadas cúbicas y cuárticas del 5-jet) de la siguiente forma:

$$(a, b, c) = (3q - 6r^2, -6rq + 8r^3, 3qr^2 - 3r^4),$$

y se espera encontrar una línea de cúspides a lo largo de la curva parametrizada  $r$  cuando  $q = 0$  es decir cuando hay mayor degeneración. Esto ocurre en la curva  $(-6r^2, 8r^3, -3r^4)$ . El gráfico del conjunto de bifurcación  $K$  es como se muestra en Fig. 4-7:



**Figura 4-7:** Conjunto de bifurcación de la catástrofe cola de golondrina. Adaptado de *Differentiable Germs and Catastrophes* (p. 153), por T. Bröcker y L. Lander, 1975, Cambridge University Press.

En análisis del conjunto bifurcación podemos ver como empezando con  $a < 0$  y luego aumentando  $a$ , el triángulo curvilíneo de la cola de golondrina se encoge y coincide con el origen  $a = 0$ . Además que hay una línea de auto intersección que es de forma parabólica y que su ecuación viene dada por  $c = \frac{a^2}{4}$ .

#### 4.1.5. Codimensión cuatro

##### La mariposa

El despliegue universal de esta es:

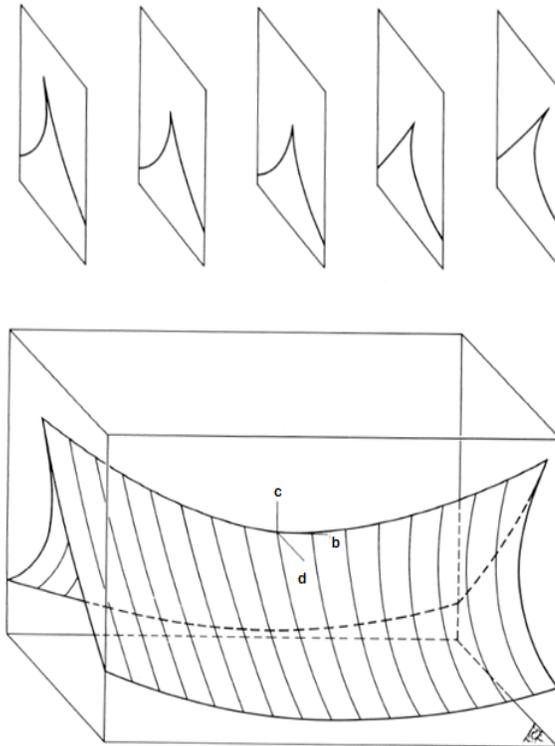
$$V(x, a, b, c, d) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx, \text{ o, } V(x, a, b, c) = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx.$$

La variedad  $M$  de la catástrofe esta dada por

$$\frac{d}{dx}V(x, a, b, c, d) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Podemos imaginar la hipersuperficie en el espacio tiempo  $\mathbb{R}^4$   $(a, b, c, d)$  es el discriminante de la variedad de catástrofe. La catástrofe se mapea en  $\mathbb{R}^k$  de una manera complicada, introduciendo auto intersecciones y otras singularidades de tipo correspondiente y el conjunto de bifurcación se dibuja mejor como una familia bidimensional de secciones bidimensionales. A continuación se va a graficar como se ven estas secciones que corresponden a varios valores de  $a$  y  $b$  vistos en el plano  $(c, d)$ .

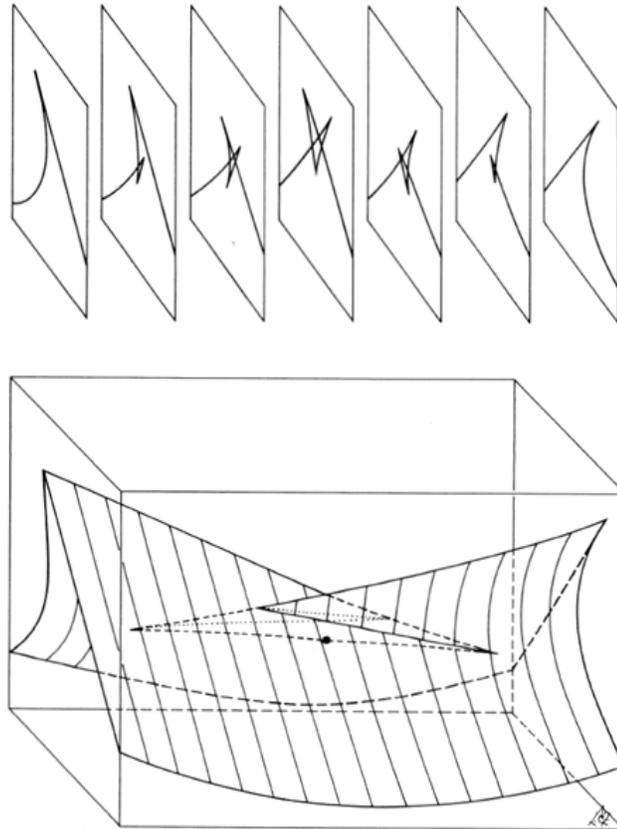
Para  $a > 0$  la sección se parece a una bifurcación de catástrofe cúspide establecida con controles  $c$  y  $d$ , variando  $b$  tiene el efecto de balancear toda la imagen de lado a lado. La dirección depende del signo de  $b$  como se ve en la Fig. 4-8.



**Figura 4-8:** Conjunto de bifurcación cuando  $a > 0$ . Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 70), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

Para  $a = 0$  la curva tiene un punto de curvatura infinita en el origen. Para  $a < 0$  emergen dos cúspides en una configuración que se asemeja a la cola de golondrina pero se extiende a la tercera dimensión cuando  $b$  varía. El plano de simetría  $c = d = 0$  corta la superficie en una

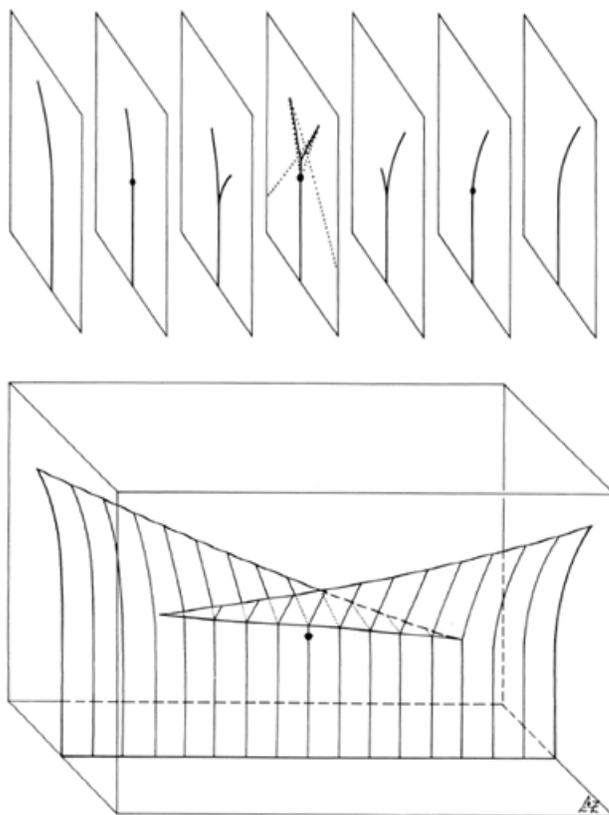
curva con tres cúspides y sin punto de inflexión, es decir, una curva en forma de mariposa en la que hay tres puntos de auto intersección.



**Figura 4-9:** Conjunto de bifurcación cuando  $a < 0$ . Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 71), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

Según René Thom la ecuación de la variedad de catástrofe tiene cinco raíces reales en el cuadrilátero curvilíneo dentro de la curva mariposa, por lo que puede haber conflicto entre tres regímenes, la única configuración posible de la división entre tres regímenes es descrita y graficada de la siguiente manera, tres superficies de separación dejan un punto triple y termina en dos cúspides (Riemann-Hugoniot) y un punto doble. Esta variación se describe cualitativamente así:

Para  $a > 0$  hay una onda de choque superficial cuyo límite es una curva de Riemann-Hugoniot y para  $a < 0$  la onda de choque da a luz a un borde triple como se ve en la Fig.4-10.



**Figura 4-10:** Onda de choque cuando  $a < 0$ . Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 72), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

## 4.2. Catástrofes de corrago dos

René Thom las llama ombligos.

### 4.2.1. Codimensión tres

#### Ombligo elíptico

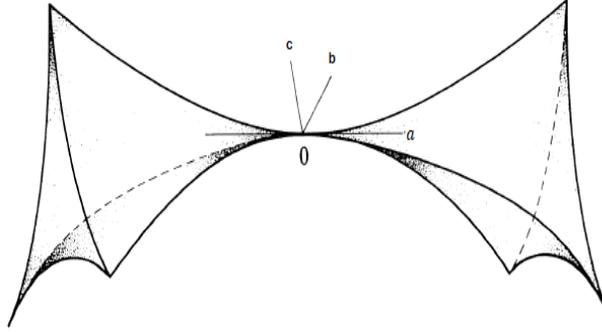
El despliegue universal de esta catástrofe es

$$V(x, y, a, b, c) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) - bx - cy.$$

La variedad  $M$  de la catástrofe viene dada por la pareja de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, a, b, c) &= 3x^2 - 3y^2 + 2ax - b = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, a, b, c) &= -6xy + 2axy - c = 0. \end{aligned}$$

La ecuación  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$  determina el conjunto de singularidad en  $M$ . Este conjunto es difeomorfo a un cono ya que se usan cartas. El conjunto bifurcación es la imagen bajo proyección de este cono en  $M$ ; Fig. 4-11.



**Figura 4-11:** Conjunto de bifurcación del ombligo elíptico. Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 80), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

### Ombligo hiperbólico

El despliegue universal de esta catástrofe es

$$V(x, y, a, b, c) = x^3 + y^3 + axy - bx - cy.$$

La variedad  $M$  de la catástrofe viene dada por la pareja de ecuaciones

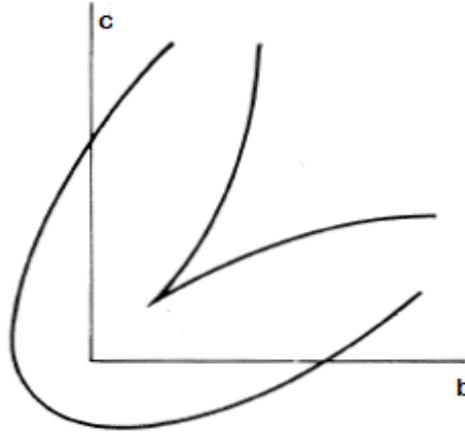
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, a, b, c) &= 3x^2 + ay - b = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, a, b, c) &= 3y^2 + ax - c = 0, \end{aligned}$$

haciendo el mismo procedimiento que la anterior tenemos que se degenera en el caso  $4pr = q^2$  ( $p, r, q$  son las coordenadas cuadráticas del 3-jet) o en las coordenadas  $(x, y, a)$  en  $36xy = a^2$ . Luego parametrizando el cono con  $a = 6\alpha$ ,  $x = \alpha\epsilon$  y  $y = \frac{\alpha}{\epsilon}$  el conjunto singularidad  $S$  en  $M$  se parametriza de la siguiente manera:

$$\left( \alpha\epsilon, \frac{\alpha}{\epsilon}, 6\alpha, 3\alpha^2\epsilon^2 + 6\frac{\alpha^2}{\epsilon}, 3\frac{\alpha^2}{\epsilon^2} + 6\alpha^2\epsilon \right),$$

por lo tanto el conjunto bifurcación  $K$  se parametriza de la siguiente manera

$$\left( 6\alpha, 3\alpha^2\epsilon^2 + 6\frac{\alpha^2}{\epsilon}, 3\frac{\alpha^2}{\epsilon^2} + 6\alpha^2\epsilon \right).$$



**Figura 4-12:** Sección cuando  $\alpha = 1$  del conjunto bifurcación. Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 77), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

## 4.2.2. Codimensión cuatro

### Omblijo parabólico

El despliegue universal de esta catástrofe es

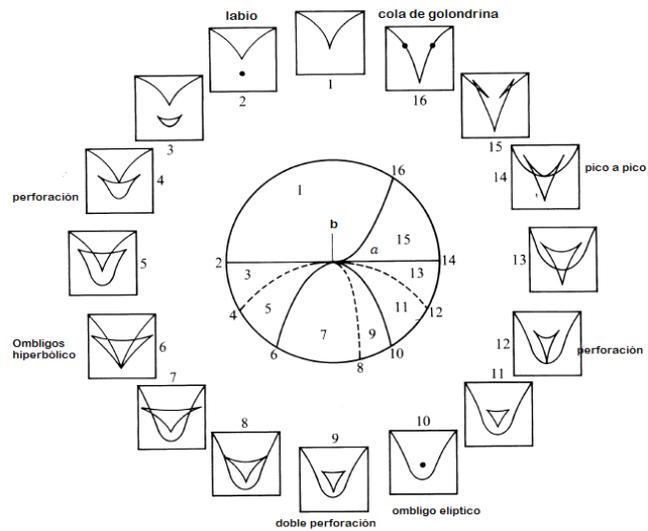
$$V(x, y, a, b, c, d) = x^2y + \frac{1}{4}y^4 + ax^2 + by^2 - cx - dy.$$

La variedad  $M$  de la catástrofe viene dada por la pareja de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, a, b, c, d) &= 2xy + 2ax - c = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, a, b, c, d) &= x^2 + y^3 + 2by - d = 0. \end{aligned}$$

La parte cuadrática del 4-jet se degenera en términos de  $p, q, r$  cuando  $4pr = q^2$  o en términos de  $(x, y, a, b)$  cuando  $4x^2 = 6y^3 + 4by + 6ay^2 + 4ab$

La Fig. 4-13 muestra para el círculo unitario en el plano  $(a, b)$  las secciones transversales correspondientes en la dirección  $(c, d)$



**Figura 4-13:** Secciones transversales de  $(c, d)$  en el plano  $(a, b)$ . Adaptado de *Structural Stability and Morphogenesis* (p. 86), por R. Thom, 1975, W.A. BENJAMIN, INC.

## 5 Conclusiones

1. Las catástrofes de bifurcación ocurren cuando un atractor entra en competencia consigo mismo después de una variación continua. En las catástrofes elementales hay dos catástrofes que son de este tipo: la más simple, la catástrofe Riemann-Hugoniot o mejor conocida como cúspide y la catástrofe mariposa, luego, el campo ideal en el que se desarrollan este tipo de catástrofes es en los reales de  $n$  variables.
2. La teoría de catástrofes elementales está basada en potenciales que representan un germen de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}$  que es finitamente diferenciable y constituye el despliegue universal. Estos potenciales están relacionados con los equilibrios de sistemas y nos ayudan a entender el comportamiento de las catástrofes.
3. A diferencia de cualquier otro despliegue de un germen  $f$ , el despliegue universal de  $f$  posee una propiedad de estabilidad estructural que no permite que una pequeña perturbación tenga efecto alguno en el sistema en un sentido topológico.

# Bibliografía

- [1] BRÖCKER TH. y JÄNICH K. *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press, 1982.
- [2] BRÖCKER TH. y LANDER L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge University Press, 1975.
- [3] HIRSH MORRIS W., *Differential topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1976.
- [4] ISAMI HIDENORY, *Applications of catastrophe theory to structural instabilities*, december 1985.
- [5] POSTON T. y STEWART I., *Catastrophe theory and Its applications*, Pitman london-San Francisco-Melbourne, 1978.
- [6] STEWART I., *Catastrophe theory*, Math Chronicle, 5, 1977, pág. 140-165.
- [7] THOM R., *Structural Stability and Morphogenesis. An outline of a general theory of model*, W.A BENJAMIN, INC.,1975
- [8] WOODCOCK A.E.R y POSTON I. *A geometrical study of the elementary catastrophe*, Springer-Verlag New York- Heidelberg- Berlín,1974.
- [9] YUNG CHEN LU, *Singularity Theory and an introduction to catastrophe theory*, Springer-Verlag New York- Heidelberg- Berlín,1976.