Neiva, 17 de Septiembre del 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

William Nicolás Perdomo Andrade, con C.C. No. 1075294314,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o Revisión Bibliográfica titulado "Introducción a los espacios de Sóbolev" presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de Matemático. Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Introducción a los espacios de Sóbolev

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Perdomo Andrade	William Nicolás

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cardenas	Mauro
Delgado Rivas	Edinson Oswaldo

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Polanía Quiza	Luis Arturo

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Matemático

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Matemática Aplicada

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019 **NÚMERO DE PÁGINAS: 36**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones_X_Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: PDF

MATERIAL ANEXO: Ninguno

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: Ninguno

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés
1.	_Completez__	_Completez__
2.	Dimensión_	_Dimension_
3.	Derivada distribucional	Distribution Derivative
4.	Espacio Medible	Measurable Space
5.	_Derivada Débil__	Weak Derivative

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El ambiente en el cual estaremos inmersos en este trabajo será netamente analítico, pues así lo amerita el tema a desarrollar acerca de los espacios de Sóbolev, los cuales tienen estructura de espacio de Banach y espacio de Hilbert.

Empezaremos recordando conceptos fundamentales tales como espacio vectorial, espacio normado, espacio métrico, espacio topológico, espacio medible, espacio de Hilbert y espacio de Banach. Pues estos son conceptos base a partir de los cuales se construyen los espacios de Sóbolev; ya que ellos se soportan en los espacios L-p y L-innito denidos sobre un subconjunto de un espacio medible, los que a su vez son espacios de Banach.

Para definir los espacios a trabajar, introducimos teoría de distribuciones, específicacamente las distribuciones de las derivadas débiles (derivada distribucional) de las funciones en espacios L, las cuales se definen cuando las funciones en los espacios L satisfacen la fórmula de integración por partes. Con base en ello, definimos formalmente a los espacios de Sóbolev como espacios de funciones medibles en L-p o L-innito tales que tienen derivadas débiles y estas están también en L-p o L-innito respectivamente.

Habiendo ya denido a los espacios de Sóbolev en general, particularizamos con el espacio de Sóbolev en una dimensión; para luego justificar su comportamiento como espacio de Banach y de espacio de Hilbert, que será el resultado principal de éste trabajo.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The environment in which we will be immersed in this work will be purely analytical, as the theme to develop about S obolev's spaces deserves, which have Banach space structure and Hilbert space structure.

We will begin by remembering fundamental concepts such as vector space, normed space, metric space, topological space, measurable space, Hilbert space and Banach space. For these are basic concepts from which S obolev's spaces are constructed; since they are supported in the L-p and L-innity spaces dened on a subset of a measurable space, which in turn are Banach spaces.

Subset of a measurable space, which in turn are Banach spaces. To dene the spaces to work, we introduce distribution theory, specically the distributions of the weak derivatives (distributional derivative) of the functions in L spaces, which are dened when the functions in the L spaces satisfy the integration formula by parts. Based on this, we formally dene Sóbolev's spaces as spaces of measurable functions in L-p or L-innity such that they have weak derivatives and these are also in L-p or L-innity respectively.

Having already dened Sóbolev's spaces in general, we particularize with Sóbolev's space in one dimension; to then justify their behavior as a Banach space and Hilbert space, which will be the main result of this work.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: Mauro Montealegre Cardenas

Firma: Mauro Montealegre

Nombre Jurado: Edinson Oswaldo Delgado Rivas

Firma: Oswaldo

Introducción a los Espacios de Sóbolev

William Nicolás Perdomo Andrade

Director(a):
Magister LUIS ARTURO POLANÍA QUIZA

Programa de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Surcolombiana
Neiva (Huila), Colombia
16 de Octubre del 2019

Introducción a los Espacios de Sóbolev

William Nicolás Perdomo Andrade

Código: 20131119105

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director(a):
Magister POLANÍA QUIZA, LUIS ARTURO

Programa de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Surcolombiana
Neiva (Huila), Colombia

16 de Octubre del 2019

La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.

Albert Einstein

Resumen

El ambiente en el cual estaremos inmersos en este trabajo será netamente analítico, pues así lo amerita el tema a desarrollar acerca de los espacios de Sóbolev, los cuales tienen estructura de espacio de Banach y espacio de Hilbert.

Empezaremos recordando conceptos fundamentales tales como espacio vectorial, espacio normado, espacio métrico, espacio topológico, espacio medible, espacio de Hilbert y espacio de Banach. Pues estos son conceptos base a partir de los cuales se construyen los espacios de Sóbolev; ya que ellos se soportan en los espacios L-p y L-infinito definidos sobre un subconjunto de un espacio medible, los que a su vez son espacios de Banach.

Para definir los espacios a trabajar, introducimos teoría de distribuciones, específicamente las distribuciones de las derivadas débiles (derivada distribucional) de las funciones en espacios L, las cuales se definen cuando las funciones en los espacios L satisfacen la fórmula de integración por partes. Con base en ello, definimos formalmente a los espacios de Sóbolev como espacios de funciones medibles en L-p o L-infinito tales que tienen derivadas débiles y estas están también en L-p o L-infinito respectivamente.

Habiendo ya definido a los espacios de Sóbolev en general, particularizamos con el espacio de Sóbolev en una dimensión; para luego justificar su comportamiento como espacio de Banach y de espacio de Hilbert, que será el resultado principal de éste trabajo.

Palabras clave: Completez, Dimensión, Derivada distribucional, Espacio Medible, Derivada Débil.

Abstract

The environment in which we will be immersed in this work will be purely analytical, as the theme to develop about Sóbolev's spaces deserves, which have Banach space structure and Hilbert space structure.

We will begin by remembering fundamental concepts such as vector space, normed space, metric space, topological space, measurable space, Hilbert space and Banach space. For these are basic concepts from which Sóbolev's spaces are constructed; since they are supported in the L-p and L-infinity spaces defined on a subset of a measurable space, which in turn are Banach spaces.

subset of a measurable space, which in turn are Banach spaces. To define the spaces to work, we introduce distribution theory, specifically the distributions of the weak derivatives (distributional derivative) of the functions in L spaces, which are defined when the functions in the L spaces satisfy the integration formula by parts. Based on this, we formally define Sóbolev's spaces as spaces of measurable functions in L-p or L-infinity such that they have weak derivatives and these are also in L-p or L-infinity respectively.

Having already defined Sóbolev's spaces in general, we particularize with Sóbolev's space in one dimension; to then justify their behavior as a Banach space and Hilbert space, which will be the main result of this work.

Keywords: Completez, Dimension, distribution derivative, Measurable Space, Weak Derivative.

Contenido

Notación: Para una mejor comprensión, en éste trabajo se usa la siguiente notación. Dado Ω subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $k = 1, 2, 3, ...,$ notamos los siguientes espacios:

1. $K =$ Cuerpo base o campo; el cual puede ser $\mathbb{R}$, ó $\mathbb{C}$.
2. $C(\Omega) = \{f : f \text{ es continua en } \Omega\}$
3. $Supp f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$. Es el soporte de f.
4. $C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : Supp f \text{ es un subconjunto compacto de } \Omega\}$
5. $C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f \text{ es } k - veces \text{ continuamente diferenciable en } \Omega\}$
6. $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$
7. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$. Funciones suaves.
8. $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$. Funciones suaves con soporte compacto en Ω (funciones test).
9. $L_{loc}^1(\Omega) =$ Espacio de funciones medibles (de Lebesgue) localmente integrables sobre cada subconjunto compacto de Ω.
10. μ: denota la medida de un conjunto.
11. $\partial\Omega$: frontera del conjunto Ω.

1 Preliminares

El presente trabajo se realiza sobre una de las líneas más importantes del Análisis Matemático, el Análisis Funcional. Para la compresión óptima del presente trabajo, el primer capítulo se centra en un recorrido clave desde los espacios vectoriales, hasta los espacios de Hilbert, el cual nos muestra conceptos previos para el tema de Espacios de Sóbolev.

En el segundo capítulo se habla de una noción importante para la clasificación de los elementos que pertenecen a los espacios de Sóbolev, se trata de la derivada débil, la cual se define y se muestra un poco su comportamiento.

El tercer capítulo muestra la idea general de lo que es la estructura de espacio de Sóbolev; basado en el concepto de derivada débil se define su estructura, se plantea la aplicación norma y se muestra el espacio de Sóbolev unidimensional sobre el cual se observa que es reflexivo y separable.

Para terminar nuestro trabajo, en el cuarto capítulo se encuentra nuestro objetivo principal. Se muestra el comportamiento de espacio de Banach y de espacio de Hilbert de los espacios de Sóbolev, para ello, primero vemos que todo espacio de Sóbolev es completo con la norma definida y en cierto caso particular, lo podemos dotar de un producto interno.

A continuación, se da inicio al trabajo con el primer capítulo sobre los preliminares.

1.1. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es una estructura algebráica que consta de un conjunto no vacio V definido sobre cierto cuerpo (real o complejo), en el cual actúan dos aplicaciones, suma vectorial, que va del producto cartesiano de V consigo mismo, en él, y multiplicación por escalar, que va del producto cartesiano de K con V, en V. Estas aplicaciones cumplen cuatro propiedades cada una. La estructura de espacio vectorial en V se represeta como $(V, +, \cdot)$.
Todo elemento de un espacio vectorial se le llama Vector.(ver en [1])

Ejemplos:
Como ejemplo común de espacio vectorial, tenemos a los cuerpos base $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$; y como ejemplos más avanzados tenemos:

1. Considerese el espacio de todas las posibles sucesiones $(x_n)_n$ (reales o complejas) para las cuales $\sum_{i=1}^{p} |x_i|^p$ converge a un número real no negativo:

$$l^p = \{x = (x_1, x_2, x_3, ...) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\}.$$

donde para todo $x, y \in l^p$ se cumple que

$$x + y = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...) = (x_n + y_n)_n \in l^p$$

y

$$\alpha x = \alpha(x_n)_n = \alpha(x_1, x_2, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...) = (\alpha x_n)_n \in l^p.$$

para todo $\alpha \in K$.

2. El espacio $C([a, b])$ de todas las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, donde para todo $x, y \in C([a, b])$ se cumple

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

y

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

con $\alpha \in K$

1.2. Espacios Normados

Siguiendo con la línea de estructuras algebráicas, nos corresponde la estructura de espacio normado, el cual se define como una dupla $(X, ||.||)$, donde X es un Espacio Vectorial definido sobre el cuerpo K, y $||.||$ es una aplicación $||.|| : X \longrightarrow K$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $||x|| \geq 0$, para todo $x \in X$. Nótese que $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$; para todo $\alpha \in K$ y $x \in X$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$; para todo $x, y \in X$

En los espacios vectoriales que son normados, se define la convergencia de una sucesión $(x_n)_n$, mediante la aplicación norma como sigue

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||x_n - x|| = 0$$

donde x pertenece al espacio vectorial normado. Visto de una forma equivalente, la sucesión $(x_n)_n$ converge a x si, y solo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $N < n$, entonces $||x_n - x|| < \epsilon$.

Por otro lado, sea $(X, ||.||)$ un espacio normado y $(x_n)_n$ una sucesión de elementos de X. Se dice que $(x_n)_n$ tiene la propiedad de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $N < m, n$, entonces $||x_n - x_m|| < \epsilon$.

De igual importancia, la convergencia de series en espacios normados:
Si $(x_n)_n$ es una sucesión en un espacio normado $(X, ||.||)$, se define la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$, donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Si $(s_n)_n$ es convergente a un elemento $s \in X$, es decir, $\lim_{n \longrightarrow \infty} ||s_n - s|| = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge(tiene suma finita), y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

Ejemplos:
Sea $(X, +, \cdot\,)$ y K un cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial X, K^X es el conjunto de todas las funciones de X con valores en K. Se puede definir en K^X una estructura de espacio vectorial como se sigue:
Sean $f, g \in K^X$ y $\lambda \in K$, entonces:

$$f + g : X \longrightarrow K \text{ como } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : X \longrightarrow K \text{ como } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Veamos ahora un subespacio importante de K^X, el formado por todas las funciones acotadas de K^X, es decir

$$B(X) = \{f \in K^X : sup(|f(x)|) < \infty\} \text{ para todo } x \in X$$

Note que si X es finito, $K^X = B(X)$

Ahora se define la norma en $B(X)$ como sigue:

$$||f||_\infty = sup\{|f(x)|\} \text{ donde } f \in B(X) \text{ y } x \in X$$

Las propiedades de la norma se verifican de forma directa, además con esta norma podemos verificar facilmente que $B(X)$ es un espacio vectorial.

En conclusión $(B(X), ||.||_\infty)$ es un espacio normado con interesantes casos particulares:

1. $X = \{1, ..., n\}$, en este caso $B(X) = K^X$.

2. $X = \mathbb{N}$, como las funciones definidas sobre el espacio $\mathbb{N}$ son las sucesiones, $B(\mathbb{N})$ seria el espacio vectorial de las sucesiones que están acotadas con elementos de K. Usualmente el espacio $(B(\mathbb{N}), ||.||_\infty)$ se denota $l^\infty = \{(x_n)_n \text{ con } x_n \in K : \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n|) < \infty\}$

   Merece la pena destacar algunos subespacios del espacio normado l^∞ :

   φ: formado por sucesiones que sólo tienen un numero finito de elementos no nulos.

   c_0: formado por las suceciones que tienen como límite el elemento $0 \in K$.

   c: formado por las sucesiones que convergen en K.

3. $X = [a, b]$, $K = \mathbb{R}$; en este caso $(B(X), ||.||_\infty)$ es el espacio de las funciones reales y acotadas definidas sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}$, el cual tiene un subespacio interesante formado por las funciones continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ denotado como $C([a, b])$

1.3. Espacios Métricos

Una métrica sobre un conjunto no vacio, es una aplicación la cual define una distancia entre los elementos del conjunto.

Se define un espacio métrico como el par (X, d), donde X es un conjunto y d es la aplicación distancia definida sobre el conjunto, esto es,

$$d : X \times X \longrightarrow K \quad , \quad (x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

donde K es el cuerpo sobre el cual está definido el conjunto X y $x, y \in X$. Tal aplicación d comple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y)$ es un valor en K, finito y no negativo .
2. $d(x, y) = 0$ si, y solo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

para todo $x, y, z \in X$.

Supongamos ahora que está definida una norma sobre un espacio vectorial $(X, +, \cdot)$, entonces podemos definir una métrica d sobre X como $d(x, y) = ||x - y||$. d se llama métrica inducida por la norma. En efecto,

1. $d(x, y) = ||x - y|| \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si, y solo si, $x = y$, pues $d(x, y) = 0 = ||x - y|| \longleftrightarrow x - y = 0 \longleftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = ||x - y|| = || - 1(y - x)|| =| -1 | \, ||y - x|| = d(y, x)$.
4. $d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$.

En conclusión, todo espacio normado es un espacio métrico, es decir, $(X, ||.||)$ implica $(X, d_{||.||})$.

Como todo espacio normado es un espacio métrico, entonces sea $(X, d_{||.||})$ un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión de elementos de X. Se dice que $(x_n)_n$ converge a $x \in X$ cuando $n \longrightarrow \infty$, si, y solo si, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, o dicho de otra forma, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $N < n$, entonces $d(x_n x) < \epsilon$.

De igual forma, se da la propiedad de Cauchy para sucesiones y la convergencia en series.

Un resultado importante de los espacios métricos es la completez. Un espacio (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy de elementos de (X, d), es convergente en (X, d), en el sentido de la métrica inducida por la norma.

Ejemplos:
Como vimos anteriormente, en un espacio normado se puede deducir la métrica a partir de la norma como $d = ||x - y||$ (donde x e y pertenecen a dicho espacio normado), por lo tanto, todo espacio normado es un espacio métrico. Así, los ejemplos que vimos de espacios normados, sirven como ejemplos de espacios métricos. (ver en [2])

1.4. Espacios Topológicos

"La definición de espacio Topológico, que ahora mismo está estandarizada, tardó mucho tiempo en ser formulada. Varios matemáticos -Fréchet, Hausdorff y otros- propusieron distintas definiciones a lo largo de muchos años en las primeras décadas del siglo veinte, pero fue bastante más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que parecía más apropiada."[15]

Definición 1.1 *Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos $A \subset X$ con las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset$ y X están en τ.

2. La unión arbitraria de elementos de τ está en τ.

3. La intersección finita de elemetos de τ está en τ.

Los elementos de una topología sobre un conjunto X se llaman abiertos.[15]

Definición 1.2 *Sea X un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X (llamados elementos bases) tales que:*

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

2. Si x pertenece a la intersecciòn de dos elemntos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemnto básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$. [15]

Definición 1.3 *(Continuidad de una función) Sean X e Y espacios topológicos. una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X. [15]*

Definición 1.4 *(Topología métrica) Si d es una distancia en el conjunto X, la colección de todas las bolas $B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$ y para $x \in X$, es una base para una topología sobre X, denominada topología métrica inducida por d.[15]*

Nótese que los conjuntos abiertos de una espacio métrico (X, d) satisfacen las condiciones de espacio topológico, así, todo espacio métrico es un espacio topológico.

Definición 1.5 *(Compacidad) Un subconjunto de un espacio topológico es compacto cuando:*

1. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice compacto si todo recubrimiento abierto de A contiene un subrecubrimiento finito que contiene a A.

2. Un subconjunto A de un espacio métrico X es compacto, si toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge a un punto de A.

3. *Teorema (Heine-Borel):* Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si, y solo si, es cerrado y acotado. [15]

1.5. Espacios de Banach

"Frecuentemente estamos interesados en que tan grande es una función. Esto conduce naturalmente a la noción de espacios funcionales normados. Hay muchas maneras de definir el tamaño de una función. Supongamos que $R(t)$ es la cantidad de lluvia que cae medida en centímetros cúbicos por hora; podemos estar preocupados por el total de lluvia que cae. Una gran lluvia tiene una gran $\int_{dias} f(t) \cdot dt$. Si uno es un ingeniero estará preocupado por la capacidad del sistema de desague pluvial de una ciudad para drenar el agua de lluvia, uno estará interesado en el máximo valor de $R(t)$, y por lo tanto, una gran lluvia será una con un gran $sup\{R(t)\}$". [14]

Este es uno de los problemas en los que se realza el valor de los espacios funcionales como lo son los espacios de Banach, y su comportamiento que nos abren las puertas a numerosos análisis de funciones.

Definición 1.6 *Sea X un espacio vectorial normado en el cual toda sucesión de elementos de X, que además tiene la propiedad de Cauchy, converge en X; se dice que X es un espacio de Banach, es decir, que el espacio $(X, ||.||)$ es de Banach si es completo con la norma dada. [4]*

Resultados más importante de los espacios de Banach:

1. *Teorema de la aplicación abierta:* Un operador lineal acotado T, que va de un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y, es abierto. Por lo tanto, si T es biyectivo, T^{-1} escontinuo y así acotado.(ver justificación en [10])

2. *Teorema del gráfico cerrado:* Sean X y Y espacios de Banach, y $T : D(T) \longrightarrow Y$ es un operador lineal cerrado, donde $D(T) \subset X$. Entonces si $D(T)$ es cerrado en X, el operador T es acotado.(ver la justificación en [10])

3. *Teorema de Hahn-Banach:* Sea M un subespacio de un espacio vectorial X, p un funcional sublineal en X, y f un funcional lineal en M tal que, para todo $x \in M$, se cumpla que $f(x) \leq p(x)$; entonces existe un funcional lineal F definido en todo X y extendiendo f, tal que $F(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$. (ver la justificación en [2])

Ejemplos:

1. Todos los espacios $(B(X), ||.||_\infty)$ son completos, es decir que todos los espacios $(B(X), ||.||_\infty)$ son de Banach. (ver en [3])

2. El espacio de Banach $(C^1([a, b]), ||.||_\infty)$ el cual se define como:

$$C^1([a, b]) = \{f \in C([a, b]) : \forall t \in [a, b], \exists f'(t), \wedge, f' \in C([a, b])\}$$

   En este espacio se define la norma como sigue:

$$||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

La demostración de que esta norma cumple las propiedades se sigue de la norma $||.||_\infty$. (ver en [10])

3. Los espacios de sucesiones l^p, donde $1 \leq p \leq \infty$, y se definen de la siguiente manera:

$$l^p = \{(x_n)_n \subset K^n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

Donde se define la norma como sigue:

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Note que l^p es un subespacio vectorial de c_0, ya que si $\sum |x_n|^p < \infty$, entonces $|x_n|^p \longrightarrow 0$, luego $x_n \longrightarrow 0$, es decir $x \in c_0$ (tenga en cuenta, para evitar confuciones, que $x \in l^p$ con $x = (x_n)_n$ y $(x_n)_n \subset K^n$, es decir $x_n \in K^n$). (ver en [2])

1.6. Espacios Medibles

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se define la medida del conjunto A, como una aplicación que asigna un número real positivo a dicho conjunto, la cual manifiesta propiedades interesantes.

Definición 1.7 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es σ-elemental cuando existe una sucesión de conjuntos elementales $(A_k)_k$, los cuales son disjuntos, tales que:*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

su medida se define como: $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$. [7]

Definición 1.8 *(Medida exterior de Lebesgue) Para cada subconjunto E del espacio $\mathbb{R}^n$, definimos la medida exterior de E como:*

$$m_e(E) = Inf\{m(U) : E \subset U\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los conjuntos σ-elementales U que contienen al conjunto E. [7]

Definición 1.9 *(Conjuntos medibles) Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es medible, si para cada número $\epsilon > 0$ existe un conjunto σ-elemental U tal que:*

$$E \subset U \qquad \text{y} \qquad m_e(U - E) < \epsilon. \text{ [7]}$$

Definición 1.10 *Una clase de conjuntos $\sum$ se llama una σ-álgebra, si verifica las siguientes condiciones:*

1) $\emptyset \in \sum$.

2) La unión de cualquier sucesión $(E_k)_k$ de miembros de $\sum$, es un miembro de $\sum$.

3) El complemento de cada miembro de $\sum$, es un elemento de $\sum$. [7]

Definición 1.11 *La σ-álgebra $B = \sigma(I)$, donde I son las clases formadas por todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$, se llama σ-álgebra de Borel. Los miembros de B se llaman conjuntos borelianos. [7]*

Definición 1.12 *Diremos que f es una función medible si para cada número $a \in \mathbb{R}$, el conjunto donde f es mayor que a, es un subconjunto medible del espacio $\mathbb{R}^n$; es decir, si para cada número real a, se verifica:*

$$\{f > a\} \in M$$

donde M es el espacio de todos los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^n$. [7]

1.6.1. Definición (en casi todo punto)

Si todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ con la posible excepción de un conjunto de medida nula, poseen cierta propiedad $P(x)$, entonces diremos que P es verdadera en casi todo punto.
Esta propiedad se aplica a las funciones medibles de forma tal que si f es una función medible y $f = g$ en casi todo punton entonces g es medible.[7]

Definición 1.13 *Sea $(f_k)_k$ una sucesión de funciones; converge en medida a la función medible f sobre el conjunto E, si para todo $\delta > 0$, la medida de $E(|f_k - f| \geq \delta)$ tiende a cero cuando $k \longrightarrow \infty$. [7]*

Definición 1.14 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, y f una función medible no negativa sobre E, para toda descomposición del conjunto E como unión finita de conjuntos disjuntos $E_1, E_2, ..., E_N$, calculamos la suma:*

$$(1) \sum_{i=1}^{N} V_i m(E_i)$$

donde V_i es el ínfimo de los valores que toma la función f sobre el conjunto E_i.

El supremo de tales sumas se llama la integral de f sobre E y se denota de las siguientes formas:

$$\int_E f \qquad \int_E f dx \qquad \int_E f(x)dx$$

de manera que

$$\int_E f(x)dx = Sup \sum_{i=1}^{N} V_i m(E_i). \text{ [7]}$$

1.6.2. Teorema de Beppo Levi (convergencia dominada)

El siguiente teorema es uno de los principales teoremas que involucra la integral de lebesge, y es de gran ayuda al trabajar los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ ya que podemos permutar los simbolos "$\int$", y "lím"

Teorema (Beppo Levi): Sea $f_1 \leq f_2 \leq ...$ una sucesión creciente de funciones no negativas. si f es el límite puntual de la sucesión $(f_k)_k$, entonces:

$$\int_E f = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_E f_k$$

o

$$\int_E \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_E f_k$$

(Véase la demostración en [7])

<u>Nota:</u> El teorema de la "convergencia dominada"se comporta de manera análoga al teorema anterior, sin embargo, no es necesario que la sucesión sea monótona.

1.6.3. El espacio $L^p(\Omega)$

Los siguientes espacios son importantes para nuestro tema central, ya que es uno de los pilares sobre los cuales se construye toda la teoría de espacios de Sóbolev. Así entonces, veamos su construcción.

Sea Ω un subconjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}^n$, con medida positiva. Sea $1 \leq p < \infty$, se consideran los conjuntos de funciones:

$$l^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow K : f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(t)|^p dt < \infty\}$$

Se define el número real:

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Tengamos en cuenta que la aplicación $f \longrightarrow ||f||_p$ no es una norma de $l^p(\Omega)$, ya que $||f||_p = 0$, es decir

$$\int_\Omega |f(t)|^p dt = 0$$

no implica que $f = 0$, sino que $f(t) = 0$ en casi todo punto $t \in \Omega$.

Ya que podemos considerar a la función f que es nula en casi todo punto de Ω como si fuera la función nula, al hacer esto, estamos estableciendo una relación binaria de equivalencia entre dos funciones que son iguales en casi todo punto (p.c.t.p) del conjunto Ω, definida así,

$$f \sim g \longleftrightarrow f(t) = g(t) \text{ p.c.t.p. } t \in \Omega \text{ y } \forall f, g \in l^p(\Omega).$$

Veamos que esto es cierto, pues para que la relación sea de equivalencia, "$\sim$"debe ser reflexiva, simétrica y transitiva. En efecto, veamos que se cumplen.

Reflexividad: Todo elemento de $l^p(\Omega)$ se relaciona consigo mismo, es decir que para toda $f \in l^p(\Omega)$, $f \sim f$, pues $f(t) = f(t)$ $\forall t \in \Omega$.

Simetría: Sean $f, g \in l^p(\Omega)$ arbitrarios, se tiene que $f \sim g \longrightarrow g \sim f$. Por definición de "$\sim$", $f \sim g \longleftrightarrow f(t) = g(t)$ p.c.t.p. $t \in \Omega$, luego por la simetría de la relación "=", tenemos que $g(t) = f(t)$, pero de nuevo, por la definición de la relación "$\sim$", se sigue que, $g(t) = f(t) \longleftrightarrow g \sim f$.

Transitividad: Para todos $f, g, h \in l^p(\Omega)$ se cumple que $f \sim g, \wedge, g \sim h \longrightarrow f \sim h$; en efecto, pues por definición de "$\sim$", $f \sim g, \wedge, g \sim h \longleftrightarrow f(t) = g(t), \wedge, g(t) = h(t)$ p.c.t.p. $t \in \Omega$. Ahora por transitividad de "=", tenemos que $f(t) = h(t)$, y esto, por definición de "$\sim$", a su vez implica que $f \sim h$.

Luego, la relación "$\sim$", es en efecto una relación de equivalencia que particiona $l^p(\Omega)$ en clases. Esto es, para cualquier $f \in l^p(\Omega)$, la clase $[f]$ a la que f pertenece se da como:

$$[f] = \{g \in l^p(\Omega) : g \sim f\} = \{g \in l^p(\Omega) : g(t) = f(t) \text{ p.c.t.p. } t \in \Omega\}$$

El conjunto $l^p(\Omega)/\sim$ formado por estas clases de equivalencia se llama *espacio de Lebesgue* $L^p(\Omega)$, para el cual, $||f||_p$ si es una norma en realidad.

1.6.4. El espacio $L^\infty(\Omega)$

Al igual que los anteriores espacios, los espacios $L^\infty(\Omega)$ forman parte de la base para los espacios de Sóbolev; su comportamiento y elementos que lo conforman conllevan caracteristicas favorables para cientos de analisis funcionales.

Dada una función real medible f, se dice que está esencialmente acotada, si existe un número real M tal que

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0$$

M se dice cota superior esencial de f. El conjunto

$$l^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es esencialmente acotada } \}$$

es un espacio vectorial. Se define el supremo esencial de f como el ínfimo de las cotas superiores esenciales, es decir

$$Inf\{M > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

simbolizado como $SupEss(f)$. Vemos que el $SupEss(f)$ cumple las propiedades para ser una norma excepto la primera propiedad cuando se da la igualdad; así que de nuevo consideramos las clases binarias de equivalencia como anteriormente lo hicimos. Luego $l^\infty(\Omega)/\sim = L^\infty(\Omega)$ es un *Espacio de Lebesgue*, y la aplicación

$$[f] \longrightarrow ||[f]||_\infty = SupEss(f)$$

está bien definida y es una norma.

Nótese que los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ son espacios de Banach.

1.7. Espacios de Hilbert

Si X es un espacio con producto interno, podemos inmediatamente definir una norma en terminos del producto interno. una vez obtenida la norma, obtenemos una métrica en el espacio. Una importante facultad se obtiene de los espacios que son completos con ésta métrica. (traducido de [2])

Definición 1.15 *Dados dos vectores $x, y \in K^n$, se define el producto escalar de x e y como*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \forall i = 1, 2, ..., n$$

Tal aplicación $<,>: X \times X \longrightarrow K$, cumple las siguientes propiedades:

1) $< \alpha u + v, y > = \alpha < u, y > + < v, y >$

2) $< x, \alpha u + v > = \bar{\alpha} < x, u > + < x, v >$

3) $< y, x > = \overline{< x, y >}$

4) Si $x \in X$, y $x \neq 0$, entonces $< x, x > 0$.

con $\alpha \in K$ y $v, u, x, y \in X$. [13]

Definición 1.16 *Llamamos espacios pre-Hilbertiano a un espacio vectorial X dotado con un producto escalar de la forma $<,>: X \times X \longrightarrow K$.*

El espacio vectorial X se convierte en un espacio normado con la norma

$$||x|| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$$

donde las propiedades de la norma se satisfacen exitosamente.

Todo espacio pre-Hilbertiano es un espacio normado con la norma asociada a su producto escalar, ademas si dicho espacio es completo con esta norma, se dice que él es un *Espacio de Hilbert*.
Por otro lado, si X es un espacio pre-Hilbertiano, se tiene

1) $| < x, y > | \leq ||x||.||y||$ (desigualdad de Cauchy-Schwarrtz)

2) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ (igualdad del paralelogramo) [10]

1.7.1. Teorema (Jordan-Von Neuman)

Éste teorema es importante, porque como ya sabemos, si tenemos un espacio con producto interno, podemos inducir una norma en dicho espacio, pero ¿podemos obtener un producto interno de una norma?; pues si la norma cumple la igualdad del paralelogramo puede obtenerse el producto interno.

Teorema: Si X es un espacio normado, son equivalentes:

1) X es un espacio pre-Hilbertiano, es decir, existe un producto escalar $<,>$ en X tal que $||x||^2 = < x, x >$, para todo $x \in X$.

2) La norma de X satisface la igualdad del paralelogramo. [5]

Lema 1.1 *Si en un espacio X con producto interno $<,>$, $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, entonces $< x_n, y_n > \longrightarrow < x, y >$. [5]*

1.7.2. Ejemplos

1. Uno de los ejemplos mas representativos de los espacios de Hilbert es el espacio l^p cuando $p = 2$; es decir:

$$l^2 = \{(x_n)_n \subset K^n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

   con la norma

$$||x||_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

   es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$$

2. Otro clásico ejemplo es el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ dotado del producto interno

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   siendo $x = (x_1, x_2, ...)$ y $y = (y_1, y_2, ...)$ los vectores en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

3. El espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$ con cuadrade integrable,

$$L^2(\Omega) = \{x : \Omega \longrightarrow K | x \text{ es medible, } \int_{\Omega} |x(t)|^2 dt < \infty\}$$

   se obtiene el producto interno por medio de

$$< x, y >= \int_{\Omega} x(t)\overline{y(t)} dt, \text{ donde } x, y \in L^2(\Omega)$$

(Para apreciar mejor estos ejemplos, véase [2])

2 Introducción a las Derivadas Débiles

En éste capítulo se presenta la noción de derivada débil, la cual está ligada a la formula de integración por partes, ya que así se define y tiene sentido. Ésta sección es de vital importancia, ya que los espacios de Sóbolev se definen mediante las funciones que se caracterizan por satisfacer la derivación débil.

Comencemos notando que para toda $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ se define un funcional lineal de la forma $\Lambda_f : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

Este mapeo lineal es una *distribución*. La expresión anterior esta bien definida para toda función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, ya que ϕ tiene soporte compacto y esta desaparece fuera de él. Ahora veamos que este operador es en efecto lineal; dado $E \subset \Omega$ compacto, para cada función *test* ϕ, tal que $Supp(\phi) \subset E$, se tiene la estimación

$$|\Lambda_f(\phi)| = \left| \int_E f(x)\phi(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx. \max_{x\in E} |\phi(x)| \leq C||\phi||_{C^0}$$

donde $C = \int_E |f(x)|dx$

Ahora asumamos que f es continuamente diferenciable, es decir

$$f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

es continua, por lo tanto localmente integrable; entonces f' determina un funcional lineal en $C_0^\infty(\Omega)$ definido como:

$$\Lambda_{f'}(\phi) = \int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)dx$$

además, si $Supp(\phi) \subset E$, entonces

$$|\Lambda_{f'}(\phi)| \leq \left(\int_E f(x)dx \right) ||\phi||_{C^1}$$

Y esto se puede aplicar a derivadas de orden superior.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(\Omega)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se da por la integración por partes que

$$\int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)dx$$

no hay termino límite, ya que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y su soporte se anula cerca de $\partial\Omega$.

Entonces, sea $f \in C^k(\Omega)$, y sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N}^n \cup \{0\})$ un multi-índice tal que el orden del multi-índice $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ es a lo mucho k. Cada multi-índice determina el operador diferencial parcial de orden $|\alpha|$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f$$

donde la coordenada del multi-índice indica cuantas veces es diferenciable la función con respecto a su variable correspondiente. El orden del multi-índice indica el número total de veces que se deriva parcialmente.

De acuerdo con esto, la sucesiva integración por partes queda de la forma

$$\int_\Omega D^\alpha f \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \phi dx$$

Observe que el lado izquierdo tiene sentido bajo el supuesto $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Tenga en cuenta que $D^\alpha f$ también define un funcional lineal definido de la forma

$$\Lambda_{D^\alpha f}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \phi(x) dx$$

2.1. Derivada Débil

Definición 2.1 *Asumamos que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Entonces si existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\Lambda_{D^\alpha f} = \Lambda_g$, es decir*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \phi(x) dx \qquad \text{para toda función } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

decimos que g es la *derivada débil* (de orden α) de f.[9]

Denotamos $D^0 f = D^{(0,0,...,0)} f = f$. Si $|\alpha| = 1$, entonces

$$Df = (D_1 f, D_2 f, ... D_n f)$$

es el gradiente débil de f. Aquí

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = D^{(0,...,1,..,0)} f$$

(La j-ésima componente es 1).

Nótese que las derivadas clásicas se definen como límites puntuales de cocientes de diferencia, pero las derivadas débiles se definen como funciones que satisfacen la fórmula de integración por partes. [9]

Observaciones:

1) Si $f \in C^k(\Omega)$, entonces las derivadas clásicas hasta el orden k son también las derivadas débiles correspondientes de f. En otras palabras, las derivadas débiles garantizan las derivadas clásicas.

2) Si $f = 0$ en casi todo punto de un conjunto abierto, entonces $D^\alpha f = 0$ en casi todo punto del mismo conjunto.

2.2. Unicidad de la derivada débil

Lema 2.1 *Una α-ésima derivada parcial débil de f, si existe, se define de forma única hasta un conjunto de medida cero. [9]*

Demostración:
supongamos que $v, v' \in L^1_{loc}(\Omega)$ son ambas α-ésimas derivadas parciales débiles de f, esto es

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v' \phi dx$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esto implica

$$(*) \qquad\qquad (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (v - v')\phi dx = 0$$

lo que nos dice que $v = v'$. En efecto, sea $\Omega' \subset \Omega$ (es decir, Ω' es abierto y $\overline{\Omega'}$ es compacto en Ω, pues está acotado por el mismo Ω). El espacio $C_0^\infty(\Omega')$ es denso en $L^p(\Omega')$, es decir, $\overline{C_0^\infty(\Omega')} = L^p(\Omega')$, por lo que existirá una sucesión de funciones $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega')$ y suponiendo que ϕ_i converge a un elemento de $L^p(\Omega')$, digamos $\phi_i \longrightarrow Sgn(v - v')$ cuando $i \longrightarrow \infty$ en casi todo punto de Ω', donde la función Sgn es la función signo, la cual es una función impar.

La identidad (*) y el teorema de la convergencia dominada, nos dice que:

$$0 = \lim_{i \longrightarrow \infty} \int_{\Omega'} (v - v')\phi_i dx = \int_{\Omega'} \lim_{i \longrightarrow \infty} (v - v')\phi_i = \int_{\Omega'} (v - v') Sgn(v - v') dx = \int_{\Omega'} |v - v'| dx$$

esto implica que $v = v'$ en casi todo punto de Ω' para cada $\Omega' \subset \Omega$. Así $v = v'$ en casi todo punto de Ω.

Corolario: Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisface $\displaystyle\int_\Omega f\phi dx = 0$ para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de Ω. Esta es una forma integral de decir que una función es cero en casi todo punto. (ver justificación en [9])

3 Espacios de Sóbolev

En este capítulo empezamos con el tema central de este trabajo, los espacios de Sóbolev, los cuales son espacios vectoriales de funciones con derivadas débiles, de la forma como se sigue a continuación.

3.1. Definición:

Dado un Ω subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El espacio de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste de funciones $f \in L^p(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α, con $|\alpha| \leq k$, la derivada débil $D^\alpha f$ existe y $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$. Esto es,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

Si $f \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos las normas

$$||f||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ con } 1 \leq p < \infty$$

y

$$||f||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} SupEss_\Omega |D^\alpha f|$$

respectivamente. [11]

Observaciones:

1) De la misma forma que en los espacios $L^p(\Omega)$, identificamos las funciones en $W^{k,p}(\Omega)$, las cuales son iguales en casi todo punto.

2) Podemos definir la norma de $W^{k,p}(\Omega)$ de forma distinta. La norma $||.||_{W^{k,p}(\Omega)}$ es equivalente con la norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)}$$

y $||.||_{W^{k,\infty}(\Omega)}$ es equivalente con

$$\max_{|\alpha|\leq k}||D^{\alpha}f||_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

3) Para $k=1$ usamos la norma

$$||f||_{W^{1,p}(\Omega)} = (||f||^p_{L^p} + ||Df||^p_{L^p})^{1/p} = \left(\int_{\Omega}|f|^p dx + \int_{\Omega}|Df|^p dx\right)^{1/p}$$

y

$$||f||_{W^{1,\infty}(\Omega)} = SupEss_{\Omega}|f| + SupEss_{\Omega}|Df|. \text{ [10]}$$

<u>Conclusión:</u>Los espacios de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$ son subespacios de los espacios de funciones $L^p(\Omega)$; por lo tanto heredan todas las propiedades de estos.

3.2. El espacio de Sóbolev $W^{1,p}(I)$

Dado $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo abierto, y sea $p\in\mathbb{R}$ con $0\leq p\leq\infty$ se define el espacio

$$W^{1,p}(I) = \{f\in L^p(I) : \exists g\in L^p(I), \text{ con } \textstyle\int_I f\phi' = -\int_I g\phi, \forall\phi\in C^1_0(I)\}$$

donde ϕ' es la derivada de la función ϕ que esta en dimensión 1.

Proposición: El espacio $W^{1,p}(I)$ es reflexivo y separable para $1\leq p\leq\infty$.

Demostración: Consideramos el espacio producto

$$X = \prod_{|\alpha|\leq k} L^p(\Omega) = [L^p(\Omega)]^M$$

donde $M = card\{\alpha\in\mathbb{N}^n : |\alpha|\leq k\}$. X es un espacio de Banach con la norma (producto):

$$||U||_X = \left(\sum_{|\alpha|\leq k}||f_{\alpha}||_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, \text{ con } 0\leq p<\infty$$

$$||U||_X = \max_{|\alpha|\leq k}||f_{\alpha}||_{L^p(\Omega)}, \text{ con } p=\infty$$

donde $U=(f_{\alpha})_{|\alpha|\leq k}\in X$. Entonces X es reflexivo o separable si, y sólo si, $L^p(\Omega)$ es reflexivo o separable, pero ya sabemos que todo espacio $L^p(\Omega)$ es reflexivo y separable y también lo es el producto cartesiano finito de él con él mismo.
Sea la aplicación lineal

$$j: W^{1,p}(\Omega)\longrightarrow X \qquad\qquad j(f) = (D^{\alpha}f)_{|\alpha|\leq k}\in X$$

X es reflexivo y la aplicación j es una isometria inyectiva. Por tanto $j(W^{1,p}(\Omega))$ es cerrado en X, luego $j(W^{1,p}(\Omega))$ es reflexivo, en conclusión $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo.
Usando el mismo razonamiento se dice que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

4 Espacios de Sóbolev como espacios de Banach y de Hilbert

En este capítulo mostramos dos de los comportamientos más interesantes de los espacios de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$, como lo son: su estructura de espacio de Banach, completo con la norma definida subyacente de los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ respectivamente, y su estructura de espacio de Hilbert, que es evidente cuando $p = 2$, el cual se convierte en un espacio de funciones de cuadrado integrable.

4.1. El espacio de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$ como espacio de Banach

Una de las propiedades más utiles de los espacios normados es la completitud, y por supuesto los espacios de Sóbolev gozan de esta ventajosa propiedad. Gracias a esto podemos decir que los espacios de Sóbolev son cerrados bajo los límites de sucesiones de cauchy.

Una suceción $(f_i)_i$ de funciones $f_i \in W^{k,p}(\Omega)$, con $i = 1, 2, 3, ...$, se dice que converge a la función $f \in W^{k,p}(\Omega)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe i_ϵ tal que,

$$||f_i - f||_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon, \text{ con } i_\epsilon \leq i$$

o lo que es igual

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} ||f_i - f||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

De igual forma una sucesión $(f_i)_i$ tiene la propiedad de Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$, si para todo $\epsilon > 0$ existe i_ϵ tal que

$$||f_i - f_j||_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon, \text{ con } i_\epsilon \leq i, j$$

Teorema 4.1 *El espacio de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$, $k = 1, 2, ...,$ es un espacio de Banach.*

Demostración: Se dice que un espacio es de Banach cuando es completo respecto a la norma, así que primero veremos que la norma $||.||_{W^{k,p}(\Omega)}$ esta bien definida. En efecto, verificando las propiedades de norma:

1) $||f||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff f = 0$ en casi todo punto de Ω. $||f||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ implica que $||f||_{L^p(\Omega)} = 0$ y esto implica que $f = 0$ en casi todo punto de Ω, ya que

$$0 = ||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \iff \int_\Omega |f(x)|^p dx = 0 \iff f = 0, \text{ cuando } 1 \leq p < \infty.$$

y

$$0 = ||f||_{L^p(\Omega)} = SupEss_\Omega(f) \iff f = 0, \text{ cuando } p = \infty.$$

Por otro lado, $f = 0$ en casi todo punto de Ω implica

$$\int_\Omega D^\alpha f \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \phi dx = 0$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esto, y el *2.3. Corolario* implican que $D^\alpha f = 0$ en casi todo punto de Ω y para todo α, con $|\alpha| \leq k$.
La desigualdad (la norma es mayor que cero) se sigue de que la aplicación es positiva, ya que la norma de $W^{k,p}(\Omega)$ se desprende de la norma de $L^p(\Omega)$.

2) $||\lambda f||_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|.||f||_{W^{k,p}(\Omega)}$, se satisface gracias a la norma de $L^p(\Omega)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) La desigualdad del triangulo para $1 \leq p \leq \infty$ se sigue de la desigualdad elemental $(a+b)^m \leq a^m + b^m$, con $a, b \geq 0$ y $0 < m \leq 1$ y de la desigualdad de Minkowski, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
||f+g||_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f + D^\alpha g||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} (||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)} + ||D^\alpha g||_{L^p(\Omega)})^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha g||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\
&= ||f||_{W^{k,p}(\Omega)} + ||g||_{W^{k,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ya con esto tenemos claro de que $||.||_{W^{k,p}(\Omega)}$ cumple todas las propiedades de norma.

Ahora, sea $(f_i)_i$ una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$. Como

$$||D^\alpha f_i - D^\alpha f_j||_{L^p(\Omega)} \leq ||f_i - f_j||_{W^{k,p}(\Omega)}, \text{ con } |\alpha| \leq k$$

se sigue que $(D^\alpha f_i)_i$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ con $|\alpha| \leq k$. La completez de $L^p(\Omega)$ implica que existe $f^\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha f_i \longrightarrow f^\alpha$ en $L^p(\Omega)$.
En particular, $f_i \longrightarrow f^{(0,0,\ldots,0)} = f \in L^p(\Omega)$, ya que cada función en $W^{k,p}(\Omega)$, es una función de $L^p(\Omega)$.

Por ultimo debemos ver que la derivada parcial débil α-ésima de f existe y pertenece a $L^p(\Omega)$, es decir que $D^\alpha f = f^\alpha$, con $|\alpha| \leq k$. Para ello se plantea

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi dx = \lim_{i \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_i D^\alpha \phi dx$$

del lado derecho de la igualdad, por el *Teorema de Beppo Levi(convergencia dominada)* y por la definición de la derivada débil(ya que cada $f_i \in W^{k,p}(\Omega)$), tenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{i \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_i D^\alpha \phi dx &= \lim_{i \longrightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f_i \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lim_{i \longrightarrow \infty} D^\alpha f_i \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \phi dx \end{aligned}$$

luego,

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \phi dx$$

Por tanto, f^α es la α-ésima derivada parcial débil de f; dicho de otra forma, es cierto que $D^\alpha f = f^\alpha$, así entonces $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, el cual hereda todas las propiedades que tienen dichos espacios como por ejemplo, cumplir con el teorema de la aplicación abierta y el teorema de Hahn-Banach.

4.2. El espacio de Sóbolev $W^{k,2}(\Omega)$ como espacio de Hilbert

Otro de los tipos de espacios de Sóbolev más importantes sin duda son los de funciones cuadrado integrables, esto es, los $W^{k,2}(\Omega)$, que serán denotados $H^k(\Omega)$. Estos espacios son espacios de Hilbert separables.

Estructura de espacio de Hilbert:

El espacio $W^{k,2}(\Omega)$ se define como:

$$W^{k,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}$$

donde su norma será:

$$||f||_{W^{k,2}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

De donde se puede definir un producto interno de la siguiente forma

$$< f, g >_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} < D^\alpha f, D^\alpha g >_{L^2(\Omega)}$$

donde $< D^\alpha f, D^\alpha g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega D^\alpha f D^\alpha g dx$.

Observese que

$$||f||_{W^{k,2}(\Omega)} = (f|f)^2_{W^{k,2}(\Omega)}.$$

Veamos que la relación $< f, g >_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} < D^\alpha f, D^\alpha g >_{L^2(\Omega)}$ es en realidad un producto interno. En efecto, para ello nótese que cumple las propiedades de producto interno,

$$\begin{aligned}
1)\ < au + v, y > &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha (au + v) D^\alpha y dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega (D^\alpha au + D^\alpha v) D^\alpha y dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega (aD^\alpha u D^\alpha y + D^\alpha v D^\alpha y) dx \\
&= a \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha y dx + \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha y dx \\
&= a < u, y > + < v, y >
\end{aligned}$$

Las propiedades 2) y 3) se verifican de la misma forma. Ahora bien, para la propiedad 4), como está definido el producto interno $< f, f >_{W^{k,2}(\Omega)} = ||f||^{1/2}_{W^{k,2}(\Omega)}$, es claro que se tiene $< f, f >_{W^{k,2}(\Omega)} > 0$, por ser la aplicación norma positiva.

Por lo tanto, la relación que se definio, es en efecto un producto interno en $W^{k,2}(\Omega)$, con $a \in K$ y para toda $u, v, y, f \in W^{k,2}(\Omega)$; y como ya vimos que los espacios de Sóbolev son completos, se concluye que $W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

5 Conclusiones

1. La derivada distribucional, en la cual se apoya la noción de derivada débil, permite el echo de que D^α sea un operador lineal, que ventajosamente usamos al probar las propiedades para confirmar el producto interno en los espacios $W^{k,2}(\Omega)$.

2. Se puede observar que hay dos estructuras de espacios de Sóbolev; una definida sobre el espacio $L^p(\Omega)$ (con $1 \leq p < \infty$) y la otra definida sobre el espacio $L^\infty(\Omega)$. Ésto se da ya que cada uno de los espacios L se definen de forma distinta.

3. Los espacios de Sóbolev en genral, es decir $W^{k,p}(\Omega)$ (con $1 \leq p \leq \infty$), no garantizan que sean espacios de Hilbert, ya que para definir el producto interno, neceitamos una norma que se defina como un cuadrado integrable y ésto solo lo satisface la norma del espacio particular de Sóbolev $W^{k,2}(\Omega)$.

4. Puesto en palabras y no en lenguaje matemático, los espacios de Sóbolev se estructuran a partir de funciones de los espacios $L^\infty(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, donde sus derivadas débiles pertenecen también a estos espacios.

5. Al ser los espacios de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$ espacios de Banach y espacios de Hilbert, heredan todas las propiedades que conllevan estos espacios, tales como las propiedades geométricas de los espacios de Hilbert, y cumplir satisfactoriamente el teorema de Hahn-Banach.

Bibliografía

[1] APOSTOL TOM M. *Calculus I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*, Editorial Reverté, Reimpresión digital 2014.

[2] BACHMAN GEORGE y NARICI LAURENCE, *Functional Analysis*, Departament of Mathematics, Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn (New York).

[3] BERNAL GONZÁLES LUIS y DOMÍNGUEZ BENAVIDES TOMÁS, *Espacios Vectoriales Topológicos y Espacios Funcionales*, Universidad de Sevilla, Departamento de Análisis Matemático, Sevilla, 2012.

[4] Brezis Haim, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext.

[5] Cabello Píñar Juan Carlos, *Análisis Funcional*, Granada, 2009.

[6] *Espacios Métricos*, Universidad de Buenos Aires, Abril de 2017.

[7] Fava Norberto y Zó Felipe, *Medida e Integral de Lebesgue*, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2013.

[8] Fuster E. Llorens, *Análisis Funcional*, 14 de Diciembre de 2016.

[9] KINNUNEN JUHA, *Sobolev Spaces*, Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[10] Kreyszig Erwin, *Introductory Functional Analysis with Aplications*, University of Windsor.

[11] Legasa Ríos Mikel, *Espacios de Sóbolev y Formulación Variacional de Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas*, Universidad del País Vasco, Leioa, Julio de 2016.

[12] LESMES C. JAIME y ABUABARA TEÓFILO, *Elementos del Análisis funcional*, Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Bogotá, DC.

[13] Losada Almonacid Alexander y Delgado Rivas Edinson Oswaldo, *Tópicos sobre espacios de Hilbert, Teoría Wavelets y Método Wavelet Haar en la Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinadias de Orden Superior*, Universidad Surcolombiana, Facultad de Educación, Programa de Licenciatura en Matemáticas, Neiva (Huila), Enero de 2012.

[14] MATEMÁTICA APLICADA II, Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario, Notas de clase, Segundo cuatrimestre 2011

[15] MUNKRES JAMES R., *Topología*, Segunda edición, Massachusetts Institute of Technology, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.

[16] Payá Albert Rafael, *Apuntes de Análisis Funcional*, Universidad de Granada, Departamento de Análisis Matemático.

[17] Rudin Walter, *Functional Analysis*, Second Edition, University of Wisconsin, International Editions 1991.