



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 17 septiembre 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Ingrid Tatiana Cumbe Morales, con C.C. No. 1.110.549.853,

Allison María Ramírez Fierro, con C.C. No. 1.075.248.287,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado Dinámica de Modelos Difusivos Depredador-Presa Tipo Holling II presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de Matemático;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Ingrid Tatiana Cumbe Morales.

Firma: Allison María Ramírez Fierro

Vigilada Mineducación



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Dinámica de Modelos Difusivos Depredador Presa Tipo Holling II

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cumbe Morales	Ingrid Tatiana
Ramírez Fierro	Allison María

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cortes García	Christian Camilo

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cortes García	Christian Camilo

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Matemático

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Matemáticas Aplicada

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2018

NÚMERO DE PÁGINAS: 62

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas x Fotografías Grabaciones en discos Ilustraciones en general x Grabados
Láminas Litografías Mapas Música impresa Planos Retratos Sin ilustraciones Tablas
o Cuadros x



SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Modelo depredador-presa	Predator-prey model
2. Bifurcaciones	Bifurcation
3. Diferencias finitas	Finite differences
4. Difusivo	Diffusive
5. Ondas viajeras	Traveling waves

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se analiza la dinámica entre presas y depredadores, mediante un modelo tipo Gause con respuesta funcional tipo Holling II. De igual forma se realiza un análisis cualitativo de dicho modelo al agregar un término difusivo, unidimensional, tanto para las presas como depredadores cuando sus soluciones son transportadas por medio de ondas viajeras.

Por último se determinan patrones cuando el modelo en cuestión presenta términos difusivos bidimensionales, y mediante una base de datos, se realiza una simulación, al ajustar los datos obtenidos al modelo de tal forma que se presenta la dinámica del modelo cuando se le agregan términos difusivos unidimensionales y bidimensionales



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work it is presented an analysis of the dynamics among prey and predators, by a predator-prey model with a functional response type Holling II. In addition a qualitative analysis of this model is carried out by adding a diffusive and one-dimensional term, both for the prey and predators when their solutions are transported by the traveling waves method.

Finally, the patterns are determined when the model used, presents the two-dimensional diffusive terms, and through a database provided by the Hudson Bay company, a simulation is carried out, to adjust the data to the system. As a result, it leads to the dynamics of the model when the one-dimensional and two-dimensional diffusive terms are added.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauro Montealegre Cárdenas

Firma: *Mauro Montealegre*

Nombre Jurado: Juan Leonardo Carvajal Pérez

Firma: *Juan Leonardo Carvajal*



Universidad Surcolombiana

Facultad de Ciencias Exactas y
Naturales

Programa de Matemáticas
Aplicada

Dinámica de Modelos Difusivos
Depredador – Presa Tipo Holling
II

Allison Maria Ramirez Fierro
Ingrid Tatiana Cumbe Morales

Neiva, Huila
2018



Universidad Surcolombiana

Facultad de Ciencias Exactas y
Naturales

Programa de Matemáticas
Aplicada

Dinámica de Modelos Difusivos
Depredador – Presa Tipo Holling
II

*Trabajo presentado como requisito de
grado para optar al título de Matemático*

Allison Maria Ramirez Fierro
Ingrid Tatiana Cumbe Morales

Asesor:
Christian Camilo Cortes García

Neiva, Huila
2018

Este proyecto es dedicado a mi padre, el cual siempre me ha brindado su apoyo incondicional, ha sabido guiarme en los momentos más difíciles y a pesar de las circunstancias siempre ha sido mi fortaleza y la razón de seguir adelante, también quiero agradecer a mi madre, la cual con su amor incondicional, ha sido el motivo de continuar día a día, y a mis hermanos, quienes me han brindado palabras de apoyo y han hecho hasta lo imposible para brindarme su ayuda.

I.T.C.M.

Este proyecto se lo dedico especialmente a mi mama Patricia Fierro, que siempre me apoya, y me guía para salir adelante y alcanzar todas mis metas, por su amor y paciencia, por los valores que me ha dado, por ser una gran mujer y ser un ejemplo de vida. A mi hermana Julieth Tatiana Fierro, por acompañarme siempre, por ser una vos de aliento y creer en mí. También a mi abuela, Elia Trujillo por ser tan especial, por sus consejos, por su amor y por ser una mujer impecable que me ha inculcado fuerza para lograr mis metas y por ser la unión de nuestra familia. Y a mi abuelo, Cesar Fierro que me cuida y apoya desde el cielo.

A.M.R.F.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar queremos agradecer a Dios por bendecirnos y acompañarnos a lo largo de nuestra carrera y permitirnos culminarla logrando alcanzar esta gran meta. También por los aprendizajes obtenidos y experiencias adquiridas durante estos años.

Le damos gracias a nuestros padres, Patricia Fierro, Alcira Morales e Hipolito Cumbe por ayarnos en cada momento, por los valores que nos han inculcado y por habernos dado la oportunidad de tener una buena educación y sobretodo por darnos un gran ejemplo de vida.

A nuestros hermanos, Julieth Tatiana Fierro; Jackeline Cumbe, Magnolia Cumbe y Guillermo Cumbe por ser parte importante de nuestras vidas, por apoyarnos y ayudarnos a no decaer a pesar de los obstáculos, y por estar siempre a nuestro lado.

A nuestras familias por ser una voz de aliento, animándonos y apoyándonos para alcanzar esta meta.

A nuestros amigos, Sebastian Cuellar, Wendy Caceres, Jhonatan Chantre y Sergio Tovar por confiar y creer en nosotras, por la amistad, apoyo, consejos y compañía durante nuestra etapa universitaria, y hacer de ella un trayecto de vivencias que nunca olvidaremos.

A la Universidad Surcolombiana por darnos la oportunidad de estudiar y ser un profesional.

A nuestros profesores por las enseñanzas y aprendizajes obtenidos durante nuestra formación profesional.

Finalmente queremos agradecer de todo corazón a nuestro asesor de proyecto de grado Christian Camilo Cortes por su esfuerzo y dedicación durante este proceso, pues con su dirección, conocimiento, enseñanza y colaboración permitió el desarrollo de este proyecto.

*"Si quisiéramos obtener la certeza sin dudas
y la verdad sin errores, habríamos de basar
nuestros conocimientos en las matemáticas".*

Francis Bacon.

En este trabajo se realiza un análisis de la dinámica entre presas y depredadores, mediante un modelo depredador-presa con respuesta funcional tipo Holling II. De igual forma se hace un análisis cualitativo de dicho modelo al agregar un término difusivo, unidimensional, tanto para las presas como depredadores cuando sus soluciones son transportadas por medio del método de ondas viajeras.

Por ultimo, se determinan patrones cuando el modelo en cuestión presenta términos difusivos bidimensionales, y mediante una base de datos suministrada por la compañía Hudson Bay, se realiza una simulación, al ajustar los datos obtenidos al sistema, de tal forma que se presenta la dinámica del modelo cuando se le agregan términos difusivos unidimensionales y bidimensionales.

ABSTRACT

In this work it is presented an analysis of the dynamics among prey and predators, by a predator-prey model with a functional response type Holling II. In addition a qualitative analysis of this model is carried out by adding a diffusive and one-dimensional term, both for the prey and predators when their solutions are transported by the traveling waves method.

Finally, the patterns are determined when the model used, presents the two-dimensional diffusive terms, and through a database provided by the Hudson Bay company, a simulation is carried out, to adjust the data to the system. As a result, it leads to the dynamics of the model when the one-dimensional and two-dimensional diffusive terms are added.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	9
1. Sistemas Dinámicos Continuos	11
1.1. Sistemas Lineales	13
1.2. Sistemas No Lineales	17
1.3. Bifurcaciones	17
2. Modelo Depredador-Presa Tipo Holling II	25
2.1. Descripción Del Modelo	25
2.2. Análisis Del Modelo	26
2.3. Análisis De Bifurcación	29
3. Modelo Depredador-Presa Tipo Holling II con Término Difusivo Unidimensional	32
3.1. Modelo Con Término Difusivo Para Los Depredadores	32
3.2. Modelo Con Término Difusivo Para Las Presas Y Depredadores	40
4. Modelo Depredador-Presa Tipo Holling II con Término Difusivo Bidimensional	43
4.1. Presentación Del Modelo	43
4.2. Solución Numérica	43
4.3. Simulación De Patrones	46
5. Simulación	51
Anexos	54
Bibliografía	61

En los últimos años un tema de gran importancia ha sido el estudio de la dinámica de poblaciones, pues permiten describir y entender cómo evoluciona una población con el paso del tiempo, para ello se utilizan modelos matemáticos que son herramientas científicas que permiten modelar y comprender el comportamiento de las poblaciones.

La primera contribución en la dinámica de poblaciones fue hecha por Thomas Malthus quien propuso el primer modelo de crecimiento de poblaciones, basado en la hipótesis de que el crecimiento de la población es proporcional a su tamaño, modelo el cual es apropiado para poblaciones pequeñas y se puede escribir mediante la siguiente forma

$$\dot{u} = \alpha u,$$

con u el tamaño de la población de una especie en un tiempo $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ la tasa de crecimiento de la población.

Posteriormente, en 1837 el matemático Pierre Verhulst propone una mejora al modelo de Malthus al agregar un término no lineal al modelo, pues considero el entorno y la capacidad de carga del ambiente para ajustar el modelo y hacerlo apropiado para poblaciones grandes, dando lugar al modelo de crecimiento logístico el cual se enuncia de la siguiente forma

$$\dot{u} = \alpha \left(1 - \frac{u}{K}\right) u,$$

con $K > 0$ la capacidad de carga de la población.

Más tarde, Lotka y Volterra proponen un modelo el cual estudia la interacción entre dos especies, donde una es el depredador y otra la presa, conocido como el modelo depredador-presa descrito de la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = au - buv \\ \dot{v} = cv - dv, \end{cases}$$

con a, b, c y d constantes positivas, u y v , las poblaciones de las presas y depredadores respectivamente.

Asimismo con el paso del tiempo, fueron surgiendo modelos de población más sofisticados, los cuales consideran diversos aspectos en la dinámica de población, como la difusión, la respuesta funcional y variedad de características que influyen en mejora y captación de la realidad de estos modelos de población. Un modelo de este tipo, es el modelo de Gause, que incorpora respuesta funcional tipo Holling II y difusión espacial, de la forma

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ v_t = D_2 v_{xx} + \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases}$$

con r, b, m, e, d constantes positivas, $D_1 \Delta u = D_1 u_{xx} + D_1 u_{yy}$ y $D_2 \Delta v = D_2 v_{xx} + D_2 v_{yy}$ el operador Laplaciano de espacio bidimensional, D_1 y D_2 son los coeficientes de difusión de las presas y depredadores respectivamente.

En este trabajo se estudia la estabilidad de un sistema dinámico continuo no lineal difusivo depredador-presa con respuesta funcional tipo Holling II. Para ello, se presentan cinco capítulos descritos a continuación:

En el primer capítulo al seguir los documentos dados en [2], [3], [5], [6], se presenta un estudio de los sistemas dinámicos continuos, mostrándose los lineamientos y conceptos básicos en la teoría de estos sistemas.

En el segundo capítulo al usar los lineamientos que se presentan en el capítulo anterior y de [10], se realiza la descripción y análisis cualitativo del modelo depredador-presa tipo Holling II con crecimiento logístico en la presa.

En el tercer capítulo se presenta un análisis del modelo del capítulo anterior, al agregar un término difusivo unidimensional tanto para las presas como depredadores, cuando sus soluciones son transportadas a través del método de ondas viajeras.

En el cuarto capítulo al seguir el documento dado en [10], y a partir de algunos parámetros y condiciones dadas, se determinan una serie de patrones cuando el modelo anterior presenta términos difusivos bidimensionales.

Por último en el quinto capítulo al usar lo presentado en capítulos anteriores, se elabora una simulación en Matlab 2014b con una base de datos suministrada por la compañía Hudson Bay en los años 1900 a 1920; dicha información se ajusta al modelo estudiado y se presenta la dinámica de este, cuando se le agregan términos difusivos unidimensionales y bidimensionales.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

Un sistema dinámico es una formulación matemática determinística o probabilística, el cual expresa la dinámica de un fenómeno a medida que avanza a lo largo del tiempo. Matemáticamente un sistema dinámico es una tripla (X, T, φ) , donde X representa el espacio de estado o espacio de fases el cual explica el fenómeno, T es el tiempo el en cual evoluciona y $\varphi : X \times T \rightarrow X$, es un operador de evolución el cual cumple las siguientes condiciones:

- i. $\varphi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$.
- ii. $\varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s)$, para todo $x \in X$ y $t, s \in T$.
- iii. $\varphi(\varphi(x, t), -t) = \varphi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$ y $t \in T$.

Para el caso en que $T = \mathbb{R}$ se habla de un sistema dinámico continuo, y cuando $T = \mathbb{N}$ se denomina un sistema dinámico.

Una ecuación diferencial de la forma,

$$\dot{X} = f(X)$$

con $X \subset \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, es un sistema dinámico continuo, con solución $\varphi(x, t)$ caracterizada

$$\frac{d\varphi}{dt}(x, t) = f(\varphi(x, t))$$

Por ejemplo, el modelo Gause tipo depredador-presa representado de la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = xg(x) - yp(x) \\ \dot{y} = y(-\gamma + q(x)), \end{cases} \quad (1.1)$$

es un sistema dinámico continuo donde $g(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ son funciones de clase C^1 que satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Existe $K > 0$, tal que $g(x) > 0$ si $0 \leq x < K$, $g(K) = 0$, y $g(x) < 0$ si $x > K$.
- ii) $p(0) = 0$, $p'(x) > 0$,
- iii) $q(0) = 0$, $q'(x) > 0$.

Definición 1.1. Un punto $x_0 \in X$ es de equilibrio si $f(x_0) = 0$ para todo $t \in T$.

Definición 1.2. Una órbita que comienza en x_0 es un subconjunto ordenado del espacio de estado X , definido como,

$$O_r(x_0) = \{x \in X : x = \varphi(x_0, t), \text{ para todo } t \in T \text{ de tal forma que } \varphi(x_0, t) \text{ este definida}\}$$

Definición 1.3. Una órbita homoclínica es una órbita que comienza en un punto de equilibrio $x_0 \in X$ y termina en x_0 como se observa en la Figura 1.1.

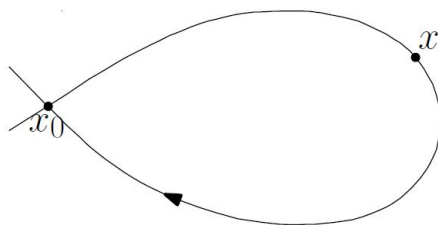


Figura 1.1: Órbita homoclínica.

Definición 1.4. Una órbita heteroclínica es una órbita que relaciona más de un punto de equilibrio, es decir que conecta dos o más puntos de equilibrio simultáneamente como lo observado en la Figura 1.2.

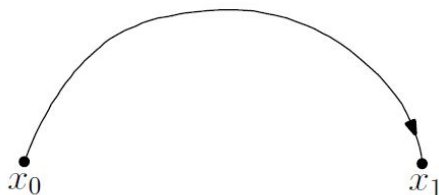


Figura 1.2: Órbita heteroclínica.

Definición 1.5. Una órbita es periódica cuando existe un $T_0 > 0$ tal que para todo x_0 , $\varphi(x_0, t) = \varphi(x_0, t + T_0)$ para todo $t \in T$.

Definición 1.6. Una órbita o trayectoria es cerrada si $\varphi(x_0, t_1) = \varphi(x_0, t_2)$ para todo $t \in T$ con $t_1 \neq t_2$.

Definición 1.7. Un ciclo es una órbita periódica L_0 tal que para todo $x_0 \in L_0$, satisface $\varphi(x_0, t) = \varphi(x_0, t + T_0)$ para todo $t \in T$ y algún $T_0 > 0$.

Definición 1.8. Un ciclo límite es un ciclo de un sistema dinámico, en una vecindad donde no hay otros ciclos.

Por ejemplo, el sistema (1.1) tiene un ciclo límite si se cumple el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [5], sección 4:

Teorema 1.1. *El sistema (1.1) con valores iniciales $x(0) \geq 0$, $y(0) \geq 0$. Si*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0,$$

en $0 \leq x < x^*$ y $x^* < x \leq K$, entonces el sistema tiene exactamente un ciclo límite que es globalmente asintóticamente estable con respecto al conjunto $\{(x, y) | x > 0; y > 0\} \setminus \{E^*\}$, donde $E^* = (x^*, y^*)$ es un equilibrio interior único del sistema.

1.1. Sistemas Lineales

Un sistema lineal es un conjunto finito de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + b_1 \\ \dot{X}_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + b_2 \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dot{X}_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + b_n \end{aligned},$$

el cual se puede escribir en notación vectorial de la siguiente manera:

$$\dot{X} = AX + b,$$

donde

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$, con $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ una función vectorial, y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ llamada matriz de coeficientes.}$$

Si $b \neq 0$; el sistema $\dot{X} = AX + b$ se denomina sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo, si $b \equiv 0$; el sistema

$$\dot{X} = AX$$

se denomina sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo.

El comportamiento cualitativo de estos sistemas es de suma importancia, pues la descripción de estos, conduce a un esquema de clasificación de gran utilidad; pues a partir de los valores propios y el signo de ellos, los sistemas lineales se clasifican en diferentes tipos.

Clasificación de los sistemas lineales bidimensionales.

El polinomio característico de la matriz A esta dado por,

$$\det(A - \lambda I_2)$$

donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$, con $a + d$ la traza de la matriz A , denotada por $\text{Tr}A$ y $ad - bc$ el determinante de A , el cual se representa por $\text{Det}A$. Por tanto el polinomio característico de A se reescribe de la forma,

$$\lambda^2 - \text{Tr}A\lambda + \text{Det}A$$

donde las raíces o cero del polinomio son los valores propios de la matriz de A , esto es,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}A \pm \sqrt{(\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A}}{2},$$

de donde se infiere que los valores de A son:

- Reales y distintos si $(\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A > 0$.
- Complejos conjugados si $(\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A < 0$.
- Reales repetidos si $(\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A = 0$, de donde se obtiene $\text{Det}A = \frac{(\text{Tr}A)^2}{4}$ que corresponde a una parábola en el plano $\text{Tr}A - \text{Det}A$ con vértice en el origen $(0, 0)$ que abre hacia arriba.

La dinámica del sistema lineal a través del punto de equilibrio $(0, 0)$ es representada de la siguiente forma:

- i. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, el punto de equilibrio es un nodo atractor o sumidero real estable, con $\text{Tr}A$ negativa.
- ii. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio es una fuente real o nodo inestable y la $\text{Tr}A$ es positiva.
- iii. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, el punto de equilibrio es un punto silla y es inestable, en este caso la $\text{Tr}A$ es cualquier real y $\text{Det}A$ es negativo.
- iv. $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$, el punto de equilibrio es un nodo degenerado o nodo impropio, con $\text{Tr}A$ negativa y $\text{Det}A$ cero, por lo tanto, el equilibrio es estable.
- v. $0 = \lambda_2 < \lambda_1$, el punto de equilibrio es un nodo impropio, pero la $\text{Tr}A$ es positiva y por consiguiente el equilibrio es inestable.
- vi. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$, en este caso el punto de equilibrio es un sumidero espiral o foco atractor, la $\text{Tr}A$ es negativa y el equilibrio es asintóticamente estable y también hiperbólico.

- vii. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$, el punto de equilibrio es una fuente espiral o foco inestable, con $\text{Tr}A$ positiva y $\text{Det}A$ positivo
- viii. $\lambda = \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, el punto de equilibrio es un centro. El origen $(0, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable, y tampoco es hiperbólico pues $\text{Re}(\lambda) = 0$.
- ix. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, en este caso el nodo (punto de equilibrio) es estable si $\lambda < 0$, es decir, si $\text{Tr}A < 0$ e inestable si $\text{Tr}A > 0$.

Las condiciones del i al ix se pueden observar en la Figura 1.3

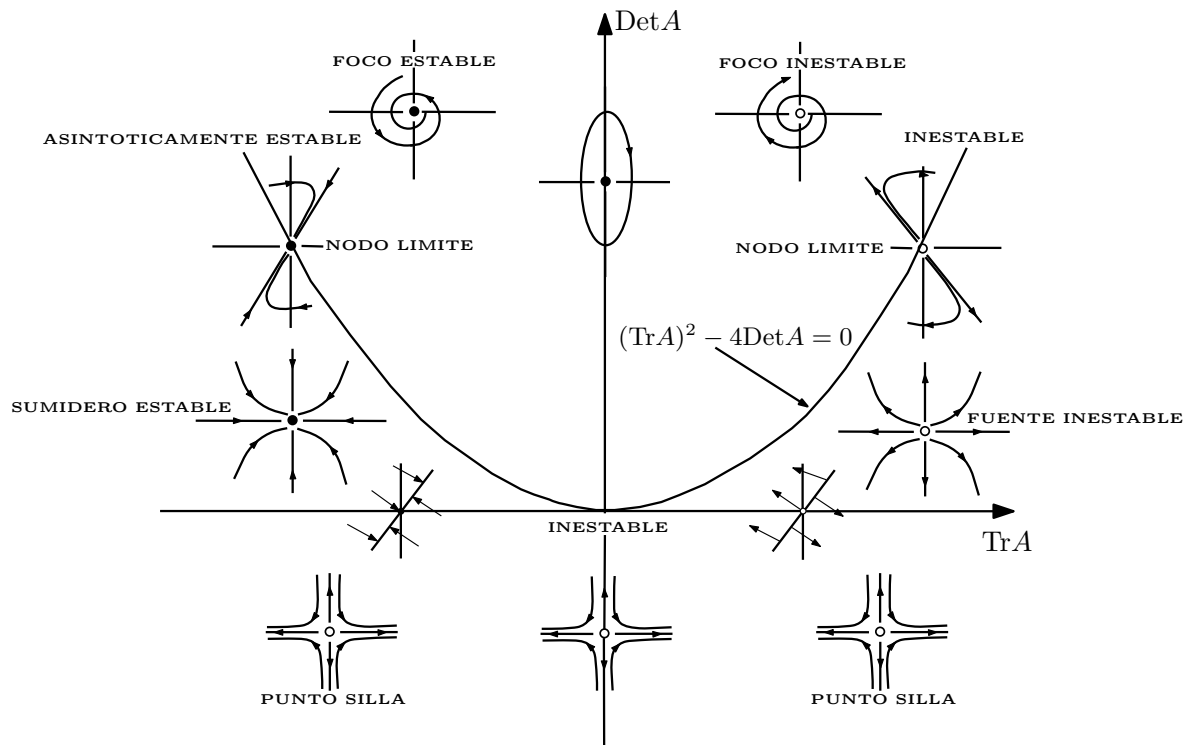


Figura 1.3: Plano $\text{Tr}A - \text{Det}A$, donde (\bullet) denota que el origen es estable y (\circ) , denota que el equilibrio es inestable.

Clasificación de los sistemas lineales tridimensionales.

Al igual que en caso bidimensional la naturaleza del sistema se determina de los valores propios. Por ello, se obtiene el polinomio característico que para este caso es una función cúbica, por lo tanto habrá tres valores propios (que pueden no ser todos distintos si hay raíces repetidas). Además, siempre se encontrara un valor propio real, y los otros pueden ser reales o un par de valores propios complejos conjugados. Por consiguiente se tiene,

- i. $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$, el punto de equilibrio en el origen es un sumidero y todas las soluciones tienden al origen al incrementar el tiempo.
- ii. $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_{2,3}$ complejos con parte real negativa, en este caso el punto de equilibrio es un sumidero espiral y las soluciones son: una solución de línea recta que tiende

al origen y un plano de soluciones que se mueve en espiral hacia a dicho punto de equilibrio como lo observado en la Figura 1.4.

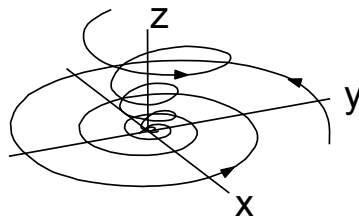


Figura 1.4: Sumidero espiral.

- iii. $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$, el punto de equilibrio en el origen es una fuente y todas las soluciones se alejan de él.
- iv. $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_{2,3}$ complejos con parte real positiva, entonces el punto de equilibrio es una fuente espiral. Por lo tanto, una solución de línea recta se alejara del punto de equilibrio y un plano de soluciones en forma de espiral se alejara de este como se observa en la Figura 1.5.

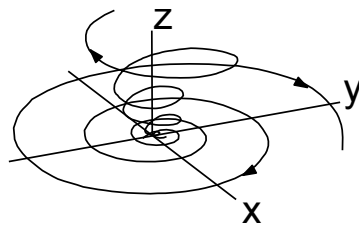


Figura 1.5: Fuente espiral.

- v. $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_3 > \lambda_2 < 0$, el punto de equilibrio es una silla, con una línea recta de soluciones que se alejan del origen y un plano de soluciones que tienden hacia él.
- vi. $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_3 > \lambda_2 > 0$, en este caso el punto de equilibrio es una silla, entonces habrá un plano de soluciones que tiende alejarse del origen y una línea recta de soluciones que tienden hacia el origen cuando el tiempo aumenta.
- vii. $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_{2,3}$ complejos conjugados con parte real positiva. El punto de equilibrio es una silla con una línea recta de soluciones que tienden al punto de equilibrio y un plano de soluciones que se alejan de él. Todas las otras soluciones son una combinación de estos comportamientos por lo que se mueven en espiral alrededor de la línea recta de soluciones como se muestra en la Figura 1.6.
- viii. $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_{2,3}$ complejos conjugados con parte real negativa, en este caso, el punto de equilibrio es una silla con una línea recta de soluciones que tienden alejarse del origen y un plano de soluciones que se mueve en espiral hacia éste. Toda otra solución se mueve en espiral alrededor de la línea recta de soluciones mientras se aleja del origen.

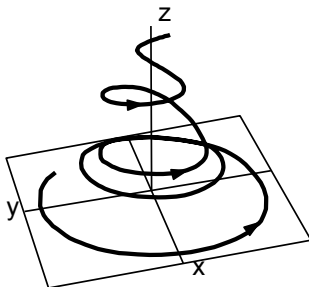


Figura 1.6: Punto silla con un valor propio real y un par de valores complejos conjugados.

1.2. Sistemas No Lineales

Un sistema no lineal es de la forma

$$\dot{x} = f(x)$$

donde f es una función no lineal con punto de equilibrio hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^n$, esto es, si la parte real de todos los valores propios de la matriz Jacobiana, es decir la matriz que linealiza el sistema es distinta de cero ($\text{Re}\lambda \neq 0$). La estabilidad de este punto de equilibrio se puede determinar mediante el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en [4]:

Teorema 1.2. (Hartman Grobman). *Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ entre las vecindades U de x_0 y V de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$H \circ \varphi(x, t) = e^{tA} \circ H$$

donde $A = Df(x_0)$ la matriz Jacobiana.

1.3. Bifurcaciones

Un sistema de la forma,

$$\dot{x} = f(x, \alpha);$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ el parámetro, presenta una bifurcación cuando para un $\alpha = \alpha_0$ el sistema resulta no ser topológicamente equivalente. Dos sistemas dinámicos (\mathbb{R}^n, φ) y (\mathbb{R}^n, ψ) son topológicamente equivalentes cuando existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que manda órbitas del primer sistema en órbitas de segundo sistema preservándose la orientación y la dirección del tiempo.

Las bifurcaciones se caracterizan en locales y globales.

Bifurcaciones Locales

Son aquellas que se analizan a través del comportamiento local del punto de equilibrio.

Por ejemplo,

- **Bifurcación Silla-Nodo.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (1.2)$$

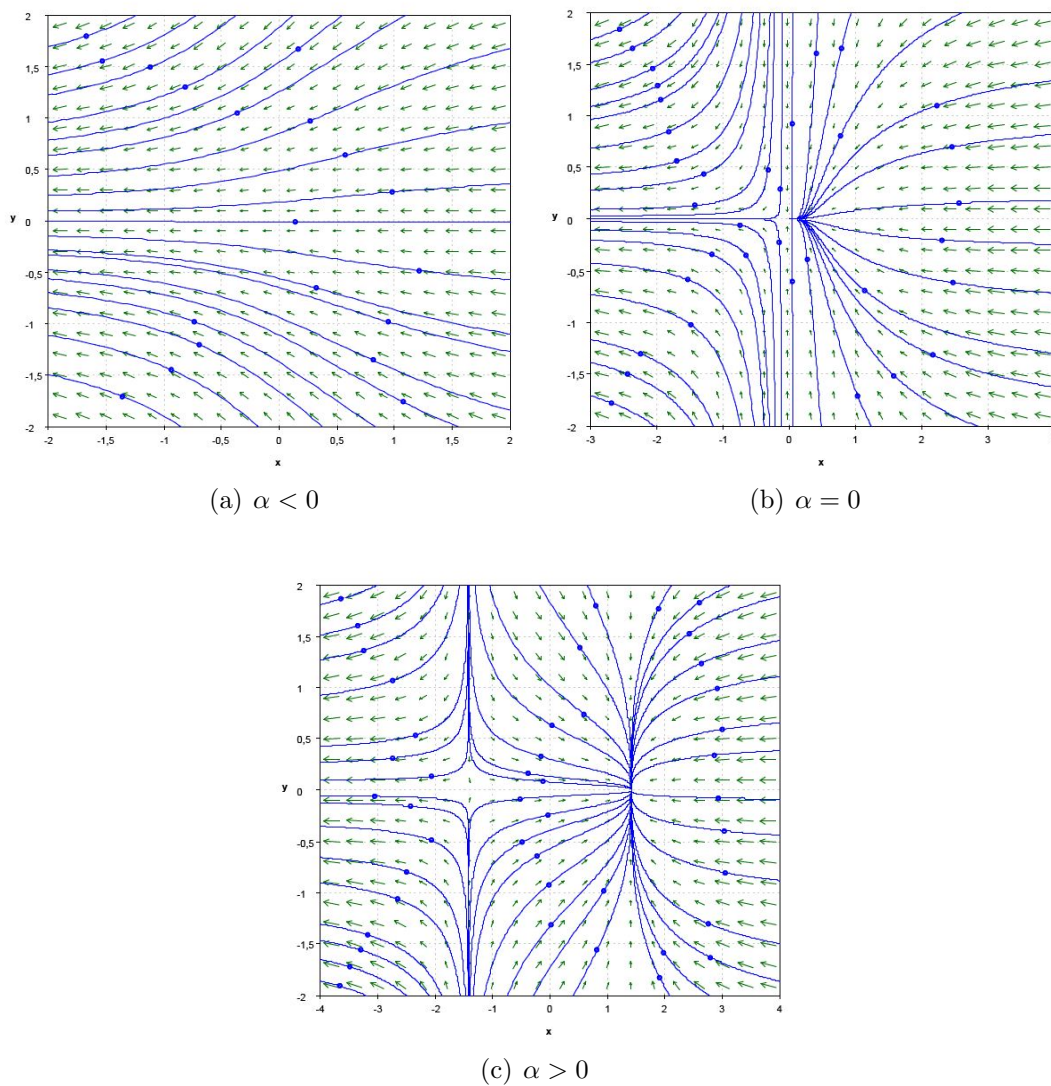


Figura 1.7: Retrato de fase del sistema 1.2.

Los puntos de equilibrio del sistema 1.2 están dados por $x_0 = (\sqrt{\alpha}, 0)$ y $x_1 = (-\sqrt{\alpha}, 0)$, tales que: si $\alpha < 0$ no existen puntos de equilibrio pues $\sqrt{\alpha}$

es un término imaginario, si $\alpha = 0$ ocurre una variación drástica del sistema pues el punto de equilibrio $x_0 = (0, 0)$ es no hiperbólico siendo este semiestable por la derecha, y si $\alpha > 0$ se presentan 2 puntos de equilibrio, $x_0 = (\sqrt{\alpha}, 0)$ un nodo asintóticamente estable y $x_1 = (-\sqrt{\alpha}, 0)$ un punto silla como lo observado en la Figura 1.7.

- **Bifurcación Transcrítica.** Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (1.3)$$

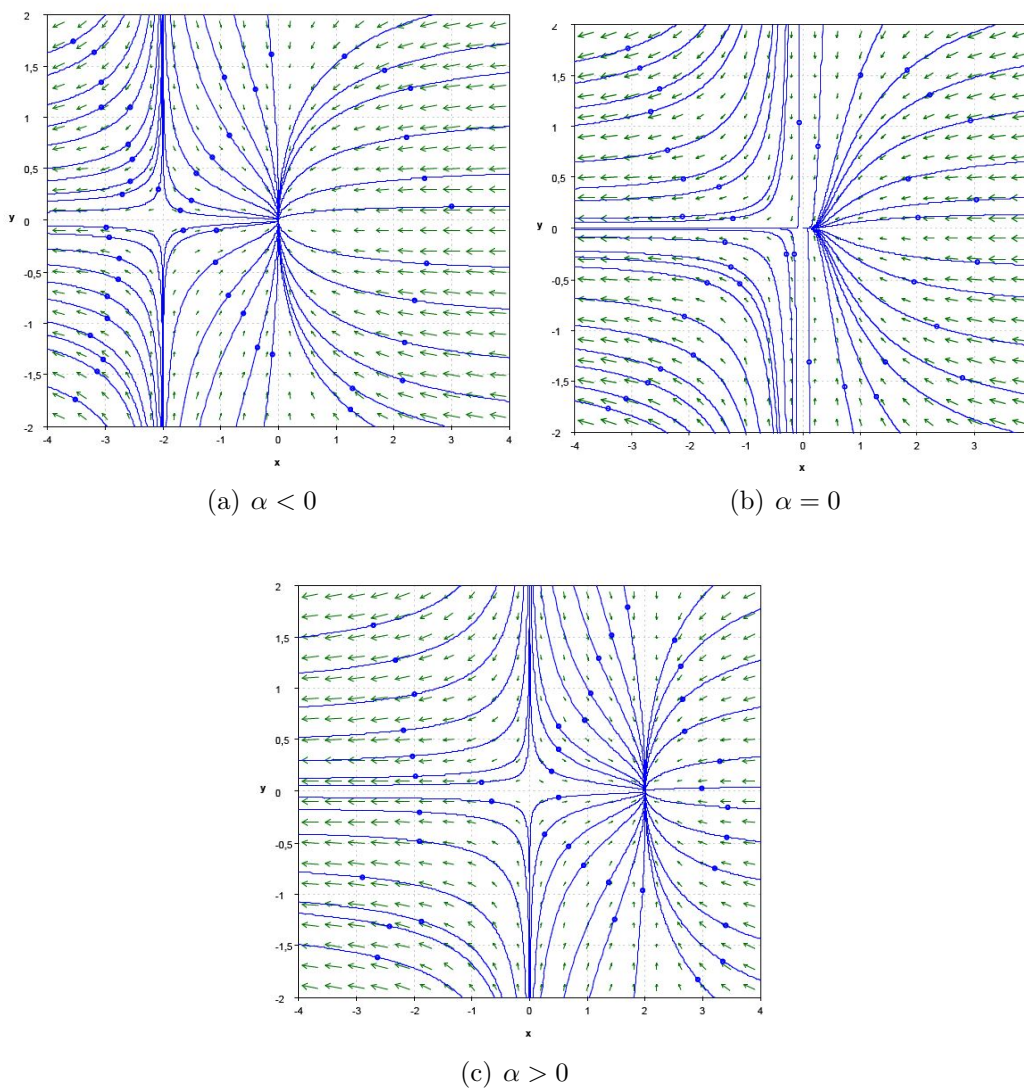


Figura 1.8: Retrato de fase del sistema 1.3.

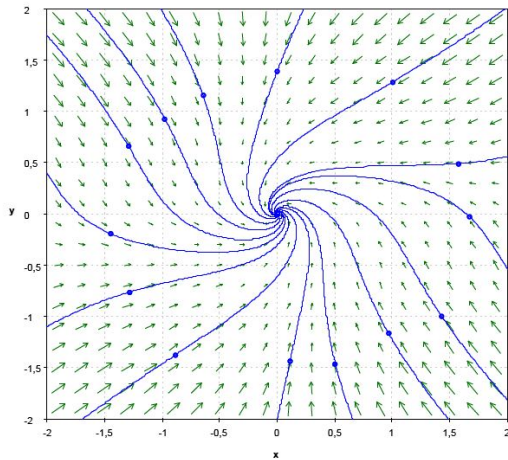
El sistema 1.3 presenta dos puntos de equilibrio dados por $x_0 = (0, 0)$ y $x_1 = (\alpha, 0)$, donde su estabilidad depende del parámetro $\alpha = 0$, de forma que: si $\alpha < 0$ se

presentan 2 puntos de equilibrio; $x_0 = (0, 0)$ un nodo asintóticamente estable y $x_1 = (\alpha, 0)$ un punto silla, si $\alpha = 0$ ocurre un cambio drástico en la estabilidad del sistema, pues existe solo un punto de equilibrio $x_0 = (\alpha, 0) = (0, 0)$ el cual es no hiperbólico, y si $\alpha > 0$ se presentan 2 puntos de equilibrio; $x_0 = (0, 0)$ un punto silla y $x_1 = (\alpha, 0)$ un nodo estable como se muestra en la Figura 1.8.

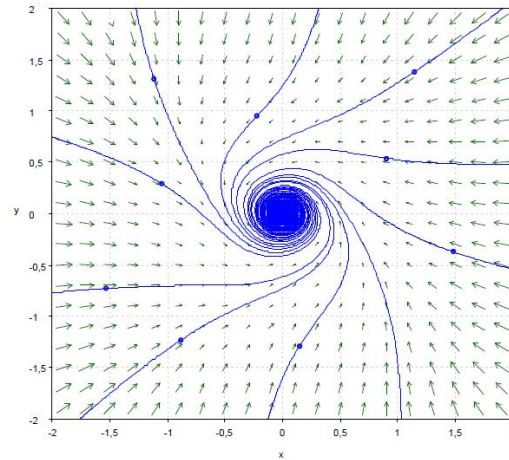
■ **Bifuración de Hopf.** Se presentan 2 casos.

• **Bifuración de Hopf Supercrítica.** Considere el siguiente sistema

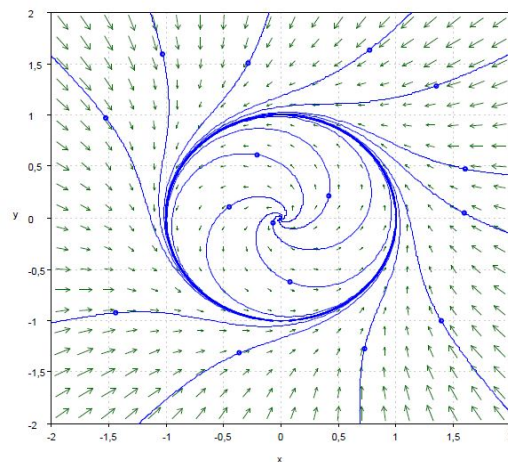
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (1.4)$$



(a) $\alpha < 0$



(b) $\alpha = 0$



(c) $\alpha > 0$

Figura 1.9: Retrato de fase del sistema 1.4.

Si $\alpha < 0$ el sistema 1.4 presenta un punto de equilibrio, el cual es un foco estable, si $\alpha < 0$ el punto de equilibrio es no hiperbólico y si $\alpha > 0$ se presenta un punto de equilibrio el cual es un foco inestable, presentándose un ciclo límite estable como lo observado en la Figura 1.9

- **Bifurcación de Hopf Subcrítica.** Análogamente para el sistema parametrizado

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y + y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (1.5)$$

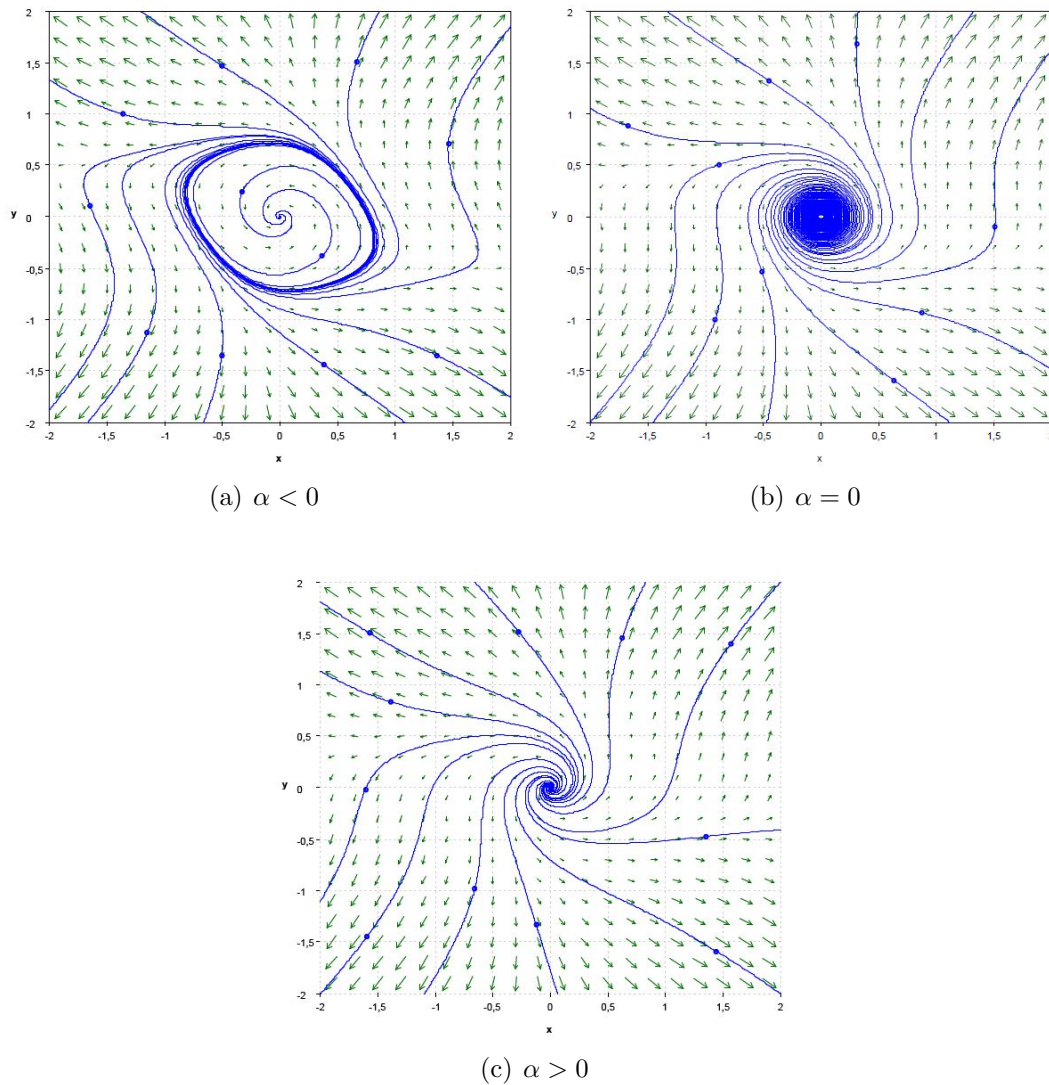


Figura 1.10: Retrato de fase del sistema 1.5.

Si $\alpha < 0$ el punto de equilibrio para el sistema 1.5 es un foco estable y se presenta ciclo límite inestable, si $\alpha = 0$ es un punto de equilibrio no

hiperbólico, y $\alpha > 0$ el punto de equilibrio es un foco inestable como se observa en la Figura 1.10

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ presenta una bifurcación de Hopf cuando cumple la hipótesis del siguiente teorema, probado [6]:

Teorema 1.3. (Bifurcación de Hopf.) *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Suponga que existe (x_0, μ_0) tal que:

- i. $f(x_0, \mu_0) = 0$ (Condición de equilibrio).
- ii. $D_x f(x_0, \mu_0)$ posee un único par de valores propios en el eje imaginario $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta$ y el resto están fuera de él (Condición de bifurcación).
- iii. $\frac{d}{d\mu}(\text{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0$ (Condición de transversalidad o de control).

Entonces existe un ciclo límite en (x_0, μ_0) con solución periódica, con una pequeña amplitud de periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\beta}$.

Bifurcaciones Globales

Son aquellas en las que se analiza la presencia de órbitas homoclínica o heteroclínicas en el sistema.

Estas bifurcaciones son:

- **Homoclínicas:** Estudia la aparición de una órbita homoclínica.

Por ejemplo, considere el sistema parametrizado

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + \alpha + x) \\ \dot{y} = x(1 + \alpha + x) + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (1.6)$$

si $\alpha < 0$, presentan 2 de puntos de equilibrio; un punto silla y un nodo estable, pero si $\alpha = 0$ hay una órbita homoclínica para un punto de equilibrio no hiperbólico, y para $\alpha > 0$ los puntos de equilibrio desaparecen como lo observado en la Figura 1.11

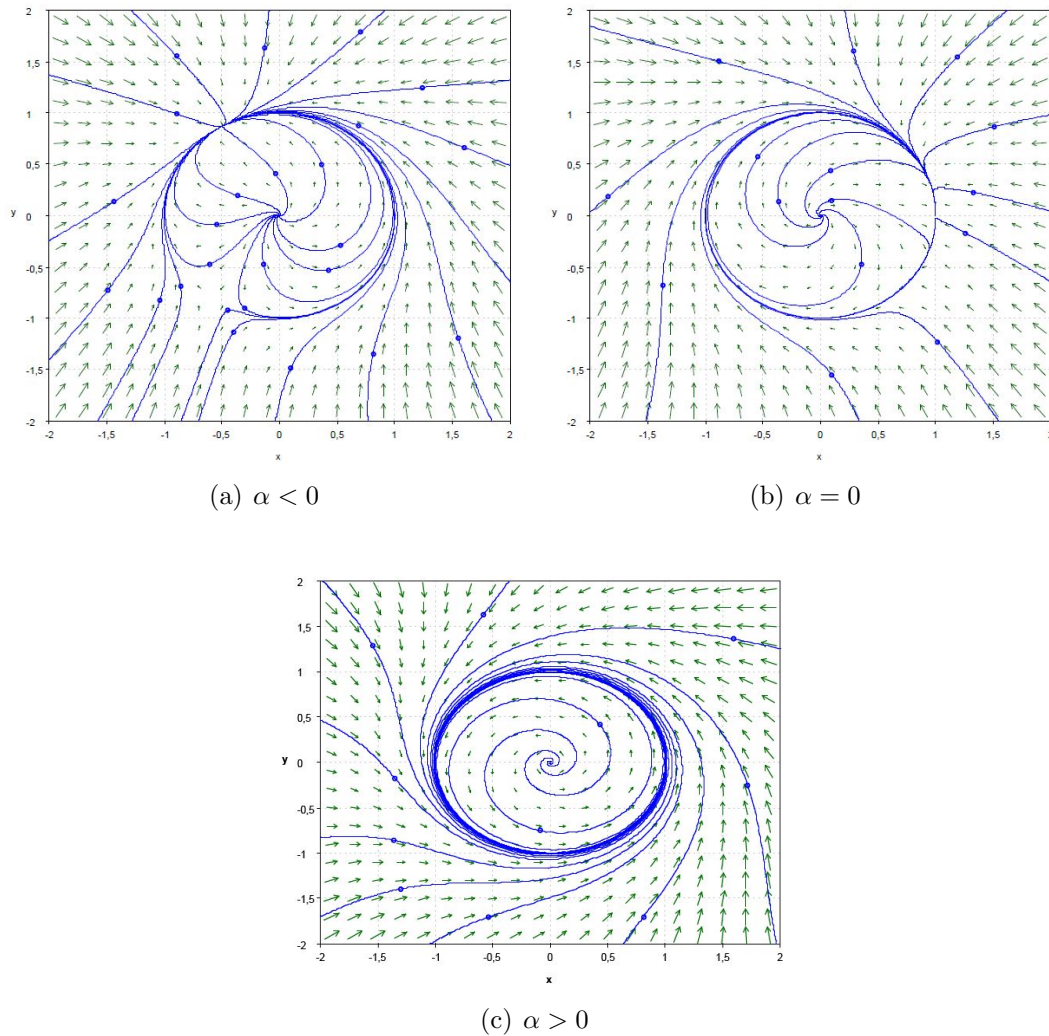


Figura 1.11: Retrato de fase del sistema 1.6.

- **Heteroclinicas:** Estudia la presencia de una órbita heteroclínica.

Por ejemplo, considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - \alpha xy \\ \dot{y} = xy + \alpha(1 - x^2), \end{cases} \quad (1.7)$$

para $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$ se presentan 2 puntos de equilibrio los cuales son puntos silla, si $\alpha = 0$ los puntos silla están conectados mediante una órbita, es decir que se presenta una órbita heteroclínica como se observa en la Figura 1.12

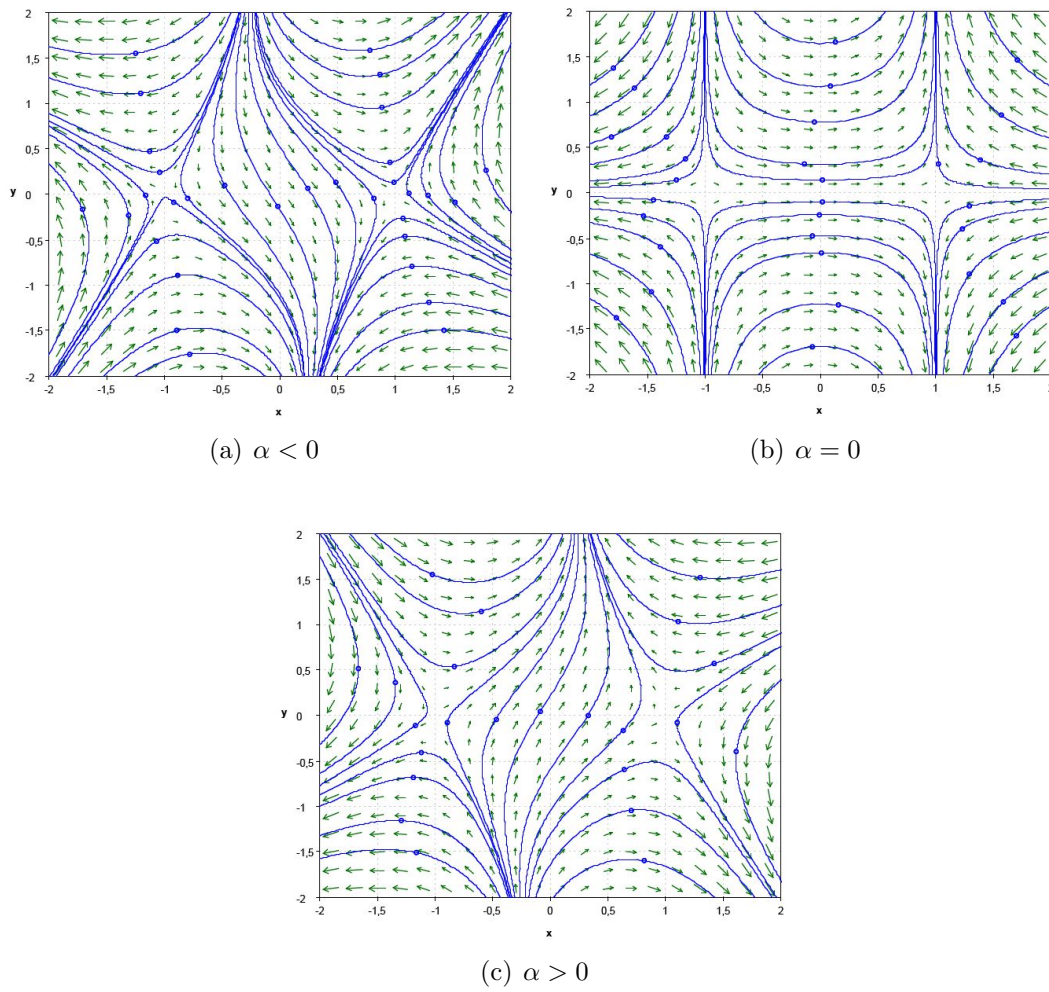


Figura 1.12: Retrato de fase del sistema 1.7.

CAPÍTULO 2

MODELO DEPREDADOR-PRESA TIPO HOLLING II

En este capítulo se realiza un análisis cualitativo del modelo depredador-presa con respuesta funcional de tipo Holling II.

2.1. Descripción Del Modelo

Sean $u \geq 0$ y $v \geq 0$ las poblaciones de presas y depredadores respectivamente, cuya dinámica de población es representada por

$$\begin{cases} \dot{u} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ \dot{v} = \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde

- $ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ describe el crecimiento logístico de las presas en ausencia de los depredadores, con $r > 0$ la tasa de crecimiento intrínseca de las presas y $K > 0$ la capacidad de carga de las presas.
- $-\frac{buv}{1 + eu}$ disminución en las presas al interactuar con los depredadores, donde $b > 0$ es la tasa de encuentro entre las dos especies y $e > 0$ la constante de saturación de las presas.
- $\frac{muv}{1 + eu}$ aumento en la población de los depredadores al interactuar con las presas, donde $m > 0$ es la tasa de encuentro entre las dos especies.
- $-dv$ decrecimiento de los depredadores en ausencia de las presas con $d > 0$ la tasa de muerte de los depredadores.

2.2. Análisis Del Modelo

El sistema (2.1) presenta tres puntos de equilibrio dados por $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (K, 0)$ y un punto interior

$$E_* = (u_*, v_*) = \left(\frac{d}{m - de}, \frac{rm[mK - d(eK + 1)]}{bK(m - de)^2} \right).$$

El cual cumple las siguientes condiciones

$$m > de \quad y \quad mK > d(eK + 1). \quad (2.2)$$

La matriz Jacobiana de (2.1) evaluada en el punto de equilibrio E_1 es dada por

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

con

$$\text{Det}A(E_1) = -rd < 0.$$

Por el Teorema 1.2, el punto E_1 es localmente un punto silla.

De igual forma, la matriz Jacobiana del sistema (2.1) asociada al punto E_2 está dada por:

$$A(E_2) = \begin{pmatrix} -r & \frac{-bK}{1 + eK} \\ 0 & \frac{mK}{1 + eK} - d \end{pmatrix},$$

con polinomio característico

$$\lambda^2 - \left(-r + \frac{mK}{1 + eK} - d \right) \lambda + \left(-r \left(d - \frac{mK}{1 + eK} \right) \right) = 0$$

y valores propios: $\lambda_1 = -r < 0$ y $\lambda_2 = \frac{mK - d(1 + eK)}{1 + eK}$. Si $K < \frac{d}{m - de}$ entonces $\lambda_2 < 0$ y por el Teorema 1.2 el punto E_2 es localmente un nodo estable, y para $K > \frac{d}{m - de}$ se tiene $\lambda_2 > 0$ entonces, por el Teorema 1.2 el punto E_2 es localmente un punto silla.

Por último, la matriz Jacobiana del modelo (2.1) evaluada en el punto de equilibrio E_* está dada por:

$$A = A(E_*) = \begin{pmatrix} \frac{rd[(eK + 1)(m - de) - 2m]}{mK(m - de)} & \frac{-bd}{m} \\ \frac{r[mK - d(eK + 1)]}{bK} & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\text{Tr}A = \frac{rd((eK + 1)(m - de) - 2m)}{mK(m - de)}, \quad \text{Det}A = \frac{rd(mK - d(eK + 1))}{mK}$$

y,

$$\begin{aligned} \Delta &= (\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A \\ &= \left(\frac{rd((eK + 1)(m - de) - 2m)}{mK(m - de)} \right)^2 - 4 \frac{rd(mK - d(eK + 1))}{mK} \end{aligned}$$

De (2.2), el $\text{Det}A > 0$ y por lo tanto E_* no es localmente un punto silla. Asimismo de (2.2), la $\text{Tr}A > 0$ si $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$ y $\text{Tr}A < 0$ si $K < \frac{de + m}{e(m - ed)}$.

En consecuencia de esto, se tiene el siguiente Lema:

Lema 2.1. *El sistema (2.1) siempre tiene dos puntos de equilibrio $E_1 = (0, 0)$ y $E_2 = (K, 0)$. Si (2.2) se cumple, entonces el modelo (2.1) posee un punto de equilibrio interior $E_* = (u_*, v_*)$. Por lo tanto se pueden concluir las condiciones de estabilidad local de estos puntos de equilibrio de la siguiente manera:*

- El punto $(0, 0)$ es un punto silla.
- El punto $(K, 0)$ es:
 - Silla; si $K > \frac{d}{m - de}$.
 - Nodo estable; si $K < \frac{d}{m - de}$.
- El punto (u_*, v_*) es:
 - Espiral inestable; si $\Delta < 0$ y $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$.
 - Espiral estable; si $\Delta < 0$ y $K < \frac{de + m}{e(m - ed)}$.
 - Nodo estable; si $\Delta = 0$, ó, $\Delta > 0$ y $K < \frac{de + m}{e(m - ed)}$.
 - Nodo inestable; si $\Delta = 0$, ó, $\Delta > 0$ y $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$.

Por otro lado el sistema (2.1) presenta un ciclo límite estable cuando E_* es una espiral inestable como lo enunciado en el siguiente Lema:

Lema 2.2. *Si $\Delta < 0$ y $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$ entonces E_* es una espiral inestable y existe un único ciclo límite globalmente asintóticamente estable para el modelo (2.1) en el primer cuadrante.*

Demostración. Por el Lema 2.1, E_* es una espiral inestable.

Sea

$$g(u) = r - \frac{ru}{K}, \quad g'(u) = -\frac{r}{K}, \quad p(u) = \frac{bu}{1+eu},$$

$$p'(u) = \frac{b}{(1+eu)^2}, \quad \gamma = d, \quad q(u) = \frac{mu}{1+eu}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{ug'(u) + g(u) - ug(u)\frac{p'(u)}{p(u)}}{-\gamma + q(u)} \right) &= \frac{d}{du} \left(\frac{-\frac{ru}{K} + r \left(1 - \frac{u}{K}\right) - r \left(1 - \frac{u}{K}\right) \left(\frac{1}{1+eu}\right)}{-d + \frac{mu}{1+eu}} \right) \\ &= -\frac{d}{du} \left(\frac{-\frac{2reu^2}{K} + \frac{ru}{K} - reu}{u - \frac{d}{m-de}} \right) \\ &= -\frac{d}{du} \left(\frac{\frac{2reu^2}{K} + \frac{ru}{K} - reu}{u - u_*} \right) \\ &= -\left(\frac{2reu^2}{K} - \frac{4reuu_*}{K} - \frac{ru_*}{K} + reu_* \right). \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.1 se debe verificar

$$\frac{d}{du} \left(\frac{ug'(u) + g(u) - ug(u)\frac{p'(u)}{p(u)}}{-\gamma + q(u)} \right) \leq 0. \quad (2.3)$$

En efecto, (2.3) se mantiene siempre que $\left(-\frac{2reu^2}{K} + \frac{4reuu_*}{K} + \frac{ru_*}{K} - reu_*\right) \leq 0$.

Sea $H(u) = -\frac{2reu^2}{K} + \frac{4reuu_*}{K} + \frac{ru_*}{K} - reu_*$, una parábola que abre hacia abajo, con discriminante

$$\Delta H(u) = \frac{8r^2eu_*}{K^2}(2eu_* + 1 - eK).$$

Como $K > \frac{de+m}{e(m-ed)}$ se deduce $u_* \leq \frac{eK-1}{2e}$, entonces $2eu_* + 1 - eK \leq 0$, luego $\Delta H(u) \leq 0$ y $H(u)$ tiene como máximo una raíz real, lo que indica que $H(u) \leq 0$, manteniéndose la desigualdad. En consecuencia, para el sistema (2.1) existe al menos un único ciclo límite globalmente asintóticamente estable. \square

2.3. Análisis De Bifurcación

Debido a que el sistema (2.1) presenta tres puntos de equilibrio y un ciclo límite, se analiza en que situaciones estos elementos colisionan entre sí, para formar bifurcaciones.

En primera instancia, el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf al colisionar el punto E_* con el ciclo límite, esto es, cuando $\text{Tr}A = \frac{rd((eK + 1)(m - de) - 2m)}{mK(m - de)} = 0$, equivalente a $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ como se observa en el siguiente Lema:

Lema 2.3. Si $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$, entonces el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf con periodo

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{rd(mK - d(eK + 1))}{mK}}}$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.3 se deben garantizar las condiciones:

- i. Condición de equilibrio.
- ii. Condición de bifurcación.
- iii. Condición de transversalidad o de control.

En efecto, sea $\mu_0 = K$ entonces, $x_0 = \left(\frac{d}{m - de}, \frac{m^2 r}{b(de + m)(m - de)} \right)$, es decir que el sistema (2.1) evaluado en (x_0, μ_0) es igual a cero (condición de equilibrio).

Además, se sabe que $\lambda^2 - \text{Tr}A\lambda + \text{Det}A = 0$, de donde $\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}A \pm \sqrt{\text{Tr}A^2 - 4\text{Det}A}}{2}$.

Pero $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$, entonces $\text{Tr}A = 0$ y $\text{Det}A > 0$, por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4\text{Det}A}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4\frac{rd(mK - d(eK + 1))}{mK}}}{2} = \pm i\sqrt{\frac{rd(mK - d(eK + 1))}{mK}}$$

Por ende, se presentan un par de valores imaginarios puros (condición de bifurcación).

Nótese que $\text{Re}(\lambda(\mu)) = \text{Tr}A$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dK} (\text{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=K} &= \frac{d}{dK} \left(\frac{rd((eK + 1)(m - de) - 2m)}{mK(m - de)} \right) |_{\mu=K} \\ &= \frac{e^2(m - de)(dr(de - m) + 2m)}{m(de + m)^2}. \end{aligned}$$

Luego, como $m > de$ y $m, d, e, r > 0$ entonces, (condición de transversalidad)

$$\frac{d}{dK} (\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=K} \neq 0.$$

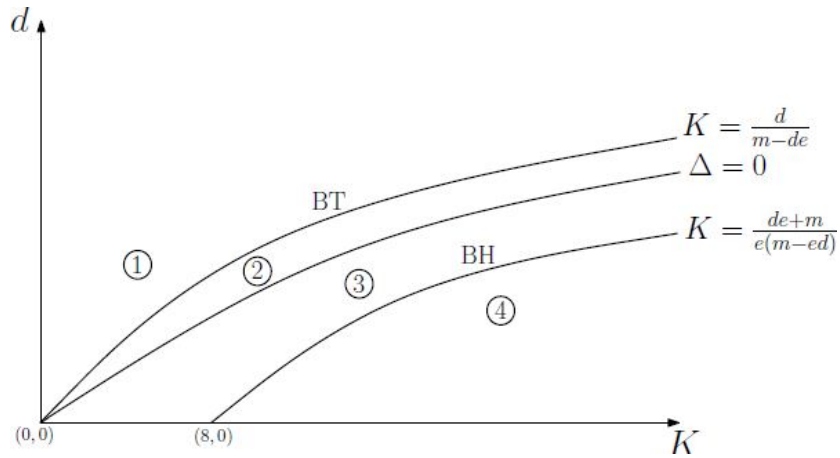
□

Por otro lado, al colisionar el punto E_* con el punto E_2 , esto es, cuando $K = \frac{d}{m - de}$, el sistema (2.1) presenta una bifurcación transcítica.

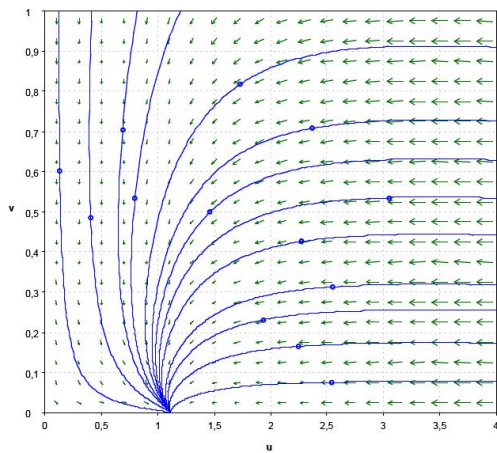
Por lo tanto, el sistema (2.1) presentan 3 curvas de bifurcación dadas por: $K = \frac{d}{m - de}$, $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ y $\Delta = 0$. como lo observado en la Figura 2.1a.

Se observa que las curvas $\Delta = 0$ y $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ de la Figura 2.1a se encuentran únicamente en el punto $(0, 0)$, puesto que, $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ equivalente a $\operatorname{Tr}A = 0$ y como $\Delta = 0$ implica $\operatorname{Det}A = 0$ con lo cual E_* sería un punto silla, lo que es contradictorio. Por lo tanto estas dos curvas nunca se cruzan en el primer cuadrante, lo que implica que las curvas $K = \frac{d}{m - de}$ y $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ no se cruzan en ningún momento.

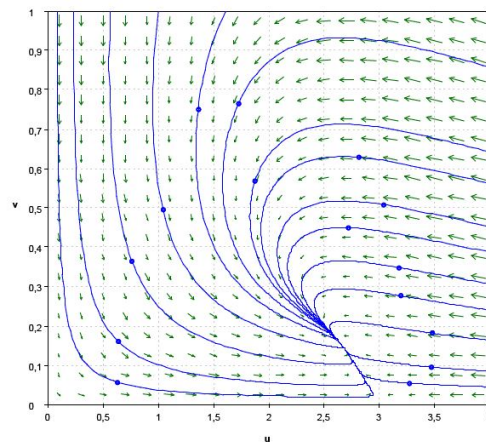
En la Figura 2.1 se observan las curvas de bifurcación del modelo (2.1) con sus retratos de fase, el cual en la Región 1 se presenta un nodo estable, y a medida que se aproxima la curva $K = \frac{d}{m - de}$ se observa la aparición de un punto de equilibrio formándose un nodo estable como se nota en la Región 2. De igual forma como se ve en la Región 3 al aproximarse los parámetros a la curva $\Delta = 0$ aparece un foco estable, y a medida que se acerca la curva $K = \frac{de + m}{e(m - ed)}$ se presenta un ciclo límite estable como se muestra en la Región 4.



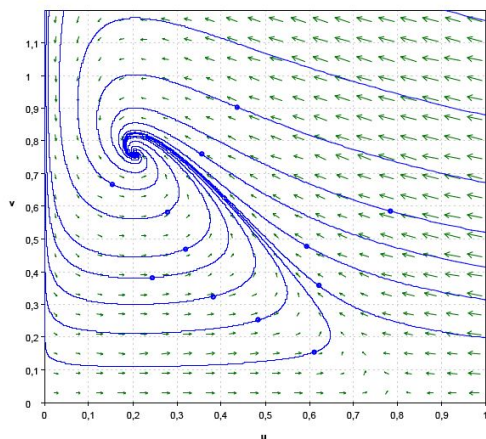
(a) Plano K-d



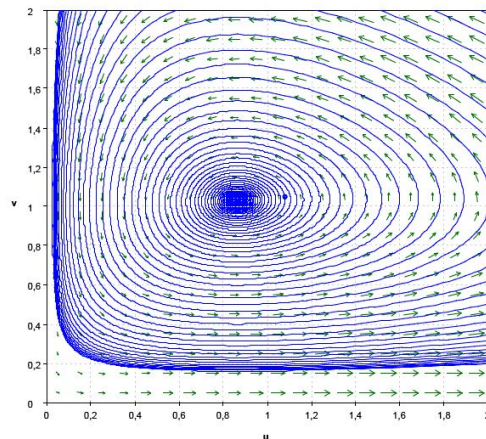
(b) Región 1.



(c) Región 2.



(d) Región 3.



(e) Región 4.

Figura 2.1: Curvas de bifurcación y retratos de fase del modelo (2.1), con parámetros fijos $r = 1$, $b = 1$, $m = 0.5$ y $e = 0.125$, y parámetros de bifurcación: (b) $K = 1.12$ y $d = 1.2$; (c) $K = 3$ y $d = 1$; (d) $K = 0.8$ y $d = 0.1$; (e) $K = 12$ y $d = 0.39$, donde BT=Bifurcación Transcrítica y BH=Bifurcación de Hopf.

CAPÍTULO 3

MODELO DE PREDADOR-PRESA TIPO HOLLING II CON TÉRMINO DIFUSIVO UNIDIMENSIONAL

En este capítulo se realiza un análisis cualitativo del modelo difusivo depredador-presa tipo Holling II cuando se convierte a ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de ondas viajeras.

3.1. Modelo Con Término Difusivo Para Los Depredadores

Cuando la población de los depredadores, $v(x, t)$ se distribuye en un determinado espacio, el modelo (2.1) se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u_t = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ v_t = D_2 v_{xx} + \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases} \quad (3.1)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ y $D_2 v_{xx}$ la ecuación unidimensional de difusión, que describe la distribución de los depredadores, donde $D_2 \geq 0$ es el coeficiente de difusión de los depredadores.

Considere,

$$w = \frac{bv}{d}, \quad \tilde{t} = dt, \quad \tilde{x} = \sqrt{\frac{d}{D_2}} x. \quad (3.2)$$

Del modelo (3.1) se tiene la ecuación diferencial

$$u_t = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu}, \quad (3.3)$$

donde, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \cdot \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = du_{\tilde{t}}$

(3.4)

Al usar (3.2) y (3.4) en (3.3) la ecuación se reescribe en:

$$du_{\tilde{t}} = \frac{ru(K-u)}{K} - \frac{bu\left(\frac{d}{b}w\right)}{1+eu}$$

$$u_{\tilde{t}} = \frac{ru}{dK}(K-u) - \frac{bu\left(\frac{d}{b}w\right)}{d(1+eu)}$$

$$u_{\tilde{t}} = \frac{ru}{dK}(K-u) - \frac{uw}{1+eu}$$
(3.5)

Por otra parte, de (3.1) se tiene

$$v_t = D_2 v_{xx} + \frac{muw}{1+eu} - dv,$$
(3.6)

donde, $v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tilde{t}} \cdot \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{d^2}{b} w_{\tilde{t}}$.

(3.7)

Luego,

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{d}{b} \sqrt{\frac{d}{D_2}} w_{\tilde{x}}$$

$$y, \quad v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{b} \sqrt{\frac{d}{D_2}} w_{\tilde{x}} \right)$$

$$= \frac{d}{b} \sqrt{\frac{d}{D_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}} \right) \right)$$

$$= \frac{d^2}{bD_2} w_{\tilde{x}\tilde{x}}.$$
(3.8)

Al reemplazar (3.7) y (3.8) en (3.6) se tiene:

$$\frac{d^2}{b} w_{\tilde{t}} = D_2 \left(\frac{d^2}{bD_2} w_{xx} \right) + \frac{mu\left(\frac{d}{b}w\right)}{1+eu} - \frac{d^2}{b} w$$

$$w_{\tilde{t}} = w_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{muw}{d(1+eu)} - w.$$
(3.9)

Por lo tanto, de (3.5), (3.9) y al considerar $\tilde{t} = t$, y , $\tilde{x} = x$, el sistema (3.1) se reduce a:

$$\begin{cases} u_t = \frac{ru}{dK}(K - u) - \frac{uw}{1 + eu} \\ w_t = w_{xx} + \frac{muw}{d(1 + eu)} - w, \end{cases} \quad (3.10)$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.10) están dados por los puntos de equilibrio del sistema (2.1) los cuales son: $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (K, 0)$ y $E_* = (u_*, v_*)$.

Una forma de analizar la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es convertirlo a sistema ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de ondas viajeras. Este método se conoce cuando el sistema es reemplazado por

$$(u(x, t), w(x, t)) = (u(s), w(s)), \quad (3.11)$$

donde $s = x + ct$, y $c > 0$ es la velocidad de onda.

Al usar (3.11) en (3.10) el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} cu_s = \frac{ru}{dK}(K - u) - \frac{uw}{1 + eu} \\ cw_s = w_{ss} + \left(\frac{mu}{d(1 + eu)} - 1 \right) w, \end{cases} \quad (3.12)$$

el cual, al cambiar las variables $s = c\sigma$ y $\epsilon = \frac{1}{c^2}$, se reescribe el sistema (3.12) de la siguiente forma

$$\begin{cases} u_\sigma = \frac{ru}{dK}(K - u) - \frac{uw}{1 + eu} \\ w_\sigma = \epsilon w_{\sigma\sigma} + \left(\frac{mu}{d(1 + eu)} - 1 \right) w \end{cases} \quad (3.13)$$

Al tomar $\epsilon \searrow 0$ en (3.13), el sistema se reduce a

$$\begin{cases} u_\sigma = \frac{ru}{dK}(K - u) - \frac{uw}{1 + eu} \\ w_\sigma = \frac{muw}{d(1 + eu)} - w, \end{cases}$$

Si (2.2) y $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$ se mantienen, el sistema (2.1) tiene una única solución de ciclo de límite estable con período \bar{T} . Por lo tanto, al ser c^2 lo suficientemente grande, (3.12) debe tener una solución periódica con período $c\bar{T}$.

Por otro lado, al reescribir el sistema (3.12) como un sistema equivalente en \mathbb{R}^3 se tiene

$$\begin{cases} u_s = \frac{r}{cdK}u(K-u) - \frac{uw}{c(1+eu)} \\ w_s = z \\ z_s = cz + \left(1 - \frac{mu}{d(1+eu)}\right)w, \end{cases} \quad (3.14)$$

con puntos de equilibrio: $\bar{E}_1 = (0, 0, 0)$, $\bar{E}_2 = (K, 0, 0)$ y si (2.2) se cumple, el modelo tiene un punto interior $\bar{E}_* = (u_*, w_*, 0)$,

donde

$$w_* = \frac{rm[mK - d(eK + 1)]}{dK(m - de)^2}.$$

Obsérvese que \bar{E}_1 es localmente un punto silla, pues la matriz Jacobiana del sistema (3.14) evaluada en el punto de equilibrio \bar{E}_1 esta dada por

$$A(\bar{E}_1) = \begin{pmatrix} \frac{r}{cd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene:

$$-\lambda^3 + \left(\frac{r}{cd} + c\right)\lambda^2 - \left(\frac{r}{d} - 1\right)\lambda - \frac{r}{cd} = 0$$

con valores propios: $\lambda_1 = \frac{r}{cd} > 0$, $\lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} > 0$ y $\lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} < 0$, pues $c - \sqrt{c^2 + 4} < 0$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2 el punto E_1 es localmente un punto silla.

De igual forma, el punto \bar{E}_2 es localmente un punto silla puesto que la matriz Jacobiana del sistema (3.14) evaluada en el punto \bar{E}_2 está dada de la siguiente forma

$$A(\bar{E}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{cd} & -\frac{K}{c(eK + 1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{mK}{d(eK + 1)} & c \end{pmatrix},$$

de la cual se tiene:

$$-\lambda^3 - \left(\frac{r}{cd} - c\right)\lambda^2 + \left(\frac{r}{d} + 1 - \frac{mK}{d(1 + eK)}\right)\lambda + \frac{r}{cd} - \frac{rmK}{cd^2(1 + eK)} = 0,$$

con valores propios: $\lambda_1 = -\frac{r}{cd}$, $\lambda_2 = \frac{c + i\sqrt{4\left(\frac{mK}{d(eK+1)} - 1\right) - c^2}}{2}$ y $\lambda_3 = \frac{c - i\sqrt{4\left(\frac{mK}{d(eK+1)} - 1\right) - c^2}}{2}$, así, por el Teorema 1.2 el punto E_2 es un punto silla. Para el punto de equilibrio \bar{E}_* se tienen los siguientes resultados:

Lema 3.1. Si (2.2) y $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$ se mantienen, entonces,

$$M := \frac{r}{mK} \left[\left(e + \frac{m}{d} \right) u_* - eK \right] \quad y \quad N := \frac{r}{mK} \left(\frac{m}{d} - e \right) (u_* - K).$$

Además, si

$$\frac{d}{m} \left(\frac{k}{u_*} - 1 \right) < \frac{K}{K - 2u_*}$$

se cumple, entonces cuando el parámetro $\frac{m}{d}$ cruza el lugar de bifurcación $c^2 = M + \frac{N}{M}$ en algunos $\frac{m_0}{d_0}$ en el plano $\frac{m}{d} - c^2$; el punto de equilibrio \bar{E}_* del sistema (3.14) se somete a una bifurcación de Hopf a una pequeña amplitud de solución periódica de período,

$$T \left(\frac{m}{d}, 1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{-M}} + O \left(\frac{m}{d} - \frac{m_0}{d_0} \right).$$

Esta solución periódica corresponde a una pequeña amplitud de solución de ondas de (3.10).

Demostración. Sea la matriz Jacobiana del sistema (3.14) en el punto de equilibrio $\bar{E}_* = (u, w_*, 0)$,

$$A(\bar{E}_*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \frac{r}{mK} \left[\left(e + \frac{m}{d} \right) u_* - eK \right] & -\frac{d}{cm} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{r}{dK} \left(1 - K \left(\frac{m}{d} - e \right) \right) & 0 & c \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene el polinomio característico:

$$F(\lambda, \beta) := -\lambda^3 + \left(c - \frac{M}{c} \right) \lambda^2 + M\lambda - \frac{N}{c} \quad (3.15)$$

con $\beta = \frac{m}{d}$. Luego la bifurcación de Hopf ocurre cuando hay un par de raíces imaginarias. Para esto, al sustituir $\lambda = i\varphi$ en (3.14) y al reunir términos, se tiene:

$$\varphi^2 = -M, \quad \varphi^2 = \frac{N}{M - c^2}$$

Por lo tanto, existe un par de valores propios imaginarios si los parámetros β y c satisfacen la condición:

$$c^2 = M + \frac{N}{M}. \quad (3.16)$$

Al considerar $\lambda = \lambda(\beta)$ como una función de β y al diferenciar (3.15) implícitamente con respecto a β se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_\beta &= -\frac{\frac{\partial f(\lambda, \beta)}{\partial \beta}}{\frac{\partial f(\lambda, \beta)}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{M'}{c}\lambda^2 - M'\lambda + \frac{N'}{c}}{-3\lambda^2 + 2\left(c - \frac{M}{c}\right)\lambda + M} \\ &= \frac{M'\lambda^2 - cM'\lambda + N'}{-3c\lambda^2 + 2(c^2 - M)\lambda + cM}\end{aligned}$$

donde $M' = M_\beta$ y $N' = N_\beta$. Ahora, al sustituir $\lambda = i\varphi$ en la ecuación anterior y al notar $\lambda^2 = -\varphi^2 = M$, y al usar (3.16), se tiene:

$$\lambda_\beta = \frac{MM' - cM'i\varphi + N'}{-2cM + 2(c^2 - M)i\varphi}.$$

Después, al racionalizar se tiene que,

$$\operatorname{Re}(\lambda_\beta) = \frac{-Mc\left(MM' - \frac{N}{M}M' + N'\right)}{2(Mc)^2 - 2(c^2 - M)^2M}.$$

Observé que $M < 0$ si $K > \frac{de + m}{e(m - ed)}$; así, el signo de $\operatorname{Re}(\lambda_\beta)$ es determinado por el signo de $MM' - \frac{N}{M}M' + N'$. Por lo tanto se concluye que el signo de $\operatorname{Re}(\lambda_\beta)$ es el opuesto de $\operatorname{Re}(c_\beta^2)$ para $M < 0$.

Al reescribir M y N en función de u_* se tiene:

$$N = \frac{r}{mK} \left(1 - \frac{u_*}{1 + eu_*}\right) (u_* - K) \quad y \quad M = \frac{r}{dK} (2u_* - K) - N$$

Como $M < 0$, entonces $\frac{r}{dK}(2u_* - K) < N < 0$, lo implica que $2u_* - K < 0$.

Ahora, al derivar estas dos ecuaciones respecto a u_* se tiene:

$$N_{u_*} = \frac{r}{dK} \left[1 + \frac{(K - u_*)}{(1 + eu_*)^2} - \frac{u_*}{1 + eu_*}\right] > 0 \quad y \quad M_{u_*} = 2\frac{r}{dK} - N_{u_*}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}-NM_{u_*} + N_{u_*}M &= -N\left(2\frac{r}{dK} - N_{u_*}\right) + N_{u_*}\left[\frac{r}{dK}(2u_* - K) - N\right] \\ &= \frac{r}{dK} [N_{u_*}(2u_* - K) - 2N],\end{aligned}$$

entonces, si $\frac{d}{m} \left(\frac{K}{u_*} - 1\right) < \frac{K}{K - 2u_*}$ se obtiene $2u_* - K < 0$, así,

$$\begin{aligned}
(2u_* - k)N_{u_*} - 2N &= (2u_* - k)\frac{r}{dK} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{k}{u_*} - 1\right) + 1\right] - 2\alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) (u_* - k) \\
&= \frac{r}{dK} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[(2u_* - k) \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{k}{u_*} - 1\right) + 1\right) - 2(u_* - k)\right] \\
&= \frac{r}{dK} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[(2u_* - k)\frac{1}{\beta} \left(\frac{k}{u_*} - 1\right) + k\right] > 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Por lo tanto, $-NM_{u_*} + N_{u_*}M > 0$.

Al usar $\frac{du_*}{d\beta} = \frac{-1}{(\beta - 1)^2} = \frac{-u_*}{\beta - 1} < 0$ se tiene:

$$-NM_{\beta} + N_{\beta}M = (-NM_{u_*} + N_{u_*}M) \frac{du_*}{d\beta} < 0 \tag{3.18}$$

Por ende de (3.17) se obtiene que

$$(2u_* - K)N_{u_*} > 2N > 2\frac{r}{dK}(2u_* - K),$$

de donde $N_{u_*} < 2\frac{r}{dK}$, por lo cual $M_{u_*} > 0$ y

$$M_{\beta} = N_{u_*} \frac{du_*}{d\beta} < 0. \tag{3.19}$$

Luego, de (3.18) y (3.19) se tiene:

$$c_{\beta}^2 = M_{\beta} + \frac{N_{\beta}M - NM_{\beta}}{M^2} < 0$$

Así, $\text{Re}(\lambda_{\beta}) > 0$. Esto muestra que un par de raíces conjugadas pasan transversalmente desde la mitad izquierda del plano al medio plano derecho a medida que el parámetro $\beta = \frac{m}{d}$ pasa el lugar de la bifurcación $c^2 = M + \frac{N}{M}$ en algún $\frac{m_0}{d_0}$. Ahora, por el Teorema 1.3, el sistema (3.14) se somete a una bifurcación de Hopf a una pequeña amplitud de solución periódica. □

De igual forma el sistema (3.14) presenta una bifurcación transcítica cuando colisiona el punto \bar{E}_* con el punto \bar{E}_2 , es decir, cuando $K = \frac{d}{m - de}$.

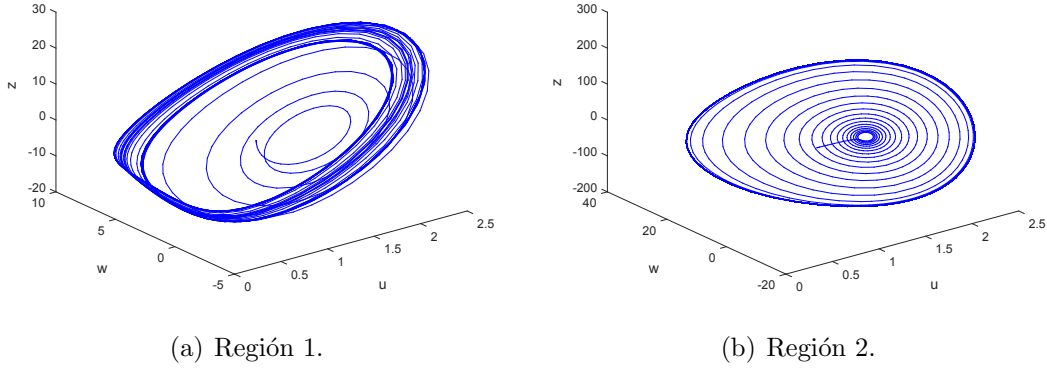


Figura 3.1: Retrato de fase del modelo (3.14), con parámetros fijos $d = 0.32$, $c = 0.67$, $K = 1.5$ y $e = 0.125$, y parámetros de bifurcación m, r : (a) $r = 1$ y $m = 8$; (b) $r = 10$ y $m = 28$.

En la Figura 3.1 se presentan los retratos de fase del modelo (3.14), donde en la Región 1 se observa la presencia de un foco estable, pero a medida que los parámetros aumentan se forma un ciclo límite estable como se muestra en la Región 2.

Por último las soluciones positivas del sistema (3.10) que satisfacen las condiciones de valor límite

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (u(s), w(s)) = (K, 0) \quad , \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} (u(s), w(s)) = (u_*, v_*) \quad (3.20)$$

son soluciones de órbitas heteroclínicas punto a punto del sistema (3.12) y también son una solución, de tipo de ondas viajeras del sistema (3.10) que conecta los puntos de equilibrio E_2 y E_* . En consecuencia de esto, se tiene el siguiente Lema:

Lema 3.2. Si $c \in \left(0, 2\sqrt{\frac{mK}{d(eK+1)} - 1}\right)$, entonces no existen las ondas viajeras que satisfacen (3.20).

Demostración. Los valores propios de sistema (3.14) para el punto de equilibrio $\overline{E_2}$ están dados por

$$\lambda_1 = -\frac{r}{cd}, \quad \lambda_2 = \frac{c + i\sqrt{4\left(\frac{mK}{d(eK+1)} - 1\right) - c^2}}{2} \quad y \quad \lambda_3 = \frac{c - i\sqrt{4\left(\frac{mK}{d(eK+1)} - 1\right) - c^2}}{2}.$$

Observé que la órbita heteroclínica c de (3.14) que conecta $\overline{E_2}$ y $\overline{E_*}$, oscila alrededor de $v = 0$, para s negativo con $|s|$ lo suficientemente grande. Suponga que c es una órbita heteroclínica del sistema (3.14) que cumple las condiciones de (3.20), entonces c satisface

$$\begin{aligned} w_s &= z \\ z_s &= cz + \left(1 - \frac{mu}{d(1+eu)}\right) w. \end{aligned}$$

En una pequeña vecindad del punto $\overline{E_2}$, y al usar las coordenadas polares $w = r \sen \theta$ y $z = r \cos \theta$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= z^2 - cvz + \left(\frac{mu}{d(1+eu)} - 1 \right) w \\ &= \cos^2 \theta - c \sen \theta \cdot \cos \theta + \left(\frac{mu}{d(1+eu)} - 1 \right) \sen^2 \theta, \end{aligned}$$

como $\frac{mK}{d(ek+1)} - 1 > 0$, para cualquier $c \in \left(0, \sqrt{\frac{mK}{d(ek+1)} - 1} \right)$, entonces, sea ϵ tan pequeño, de modo que $0 < \epsilon < \left(\frac{mk}{d(ek+1)} - 1 \right) - \frac{c^2}{4}$; y puesto que $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = K$, se puede elegir $s_c > 0$ tal que

$$\left(\frac{mK}{d(ek+1)} - 1 \right) - \epsilon < \frac{mu}{d(1+eu)} - 1 < \left(\frac{mK}{d(ek+1)} - 1 \right) + \epsilon, \quad \text{para todo } s < s_c.$$

Por lo tanto, para $s < s_c$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &> \cos^2 \theta - c \sen \theta \cdot \cos \theta + \left[\left(\frac{mK}{d(ek+1)} - 1 \right) - \epsilon \right] \sen^2 \theta \\ &= \left(\cos^2 \theta - \frac{c}{2} \right)^2 + \left[\left(\frac{mK}{d(ek+1)} - 1 \right) - \frac{c^2}{4} \right] \sen^2 \theta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Luego, como (3.21) es una función periódica de θ y distinta de cero, la cual está limitada por $\bar{\theta} > 0$, entonces, si $s < s_c$ se tiene $\frac{d\theta}{ds} > \bar{\theta} > 0$ lo que implica que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \theta = -\infty$ y $v = r \sen \theta$, así, $v(s)$ es negativo para algún $s < -s_c$, lo cual contradice que la solución de onda sea positiva. □

3.2. Modelo Con Término Difusivo Para Las Presas Y Depredadores

Cuando las poblaciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$ se distribuyen aleatoriamente en un determinado espacio, esto es, cuando se propagan en un medio sin ninguna dirección, el modelo (2.1) se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{buv}{1+eu} \\ v_t = D_2 v_{xx} + \frac{muv}{1+eu} - dv, \end{cases} \tag{3.22}$$

con $x \in \mathbb{R}$, donde $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $D_1 u_{xx}$ ecuación unidimensional de difusión, que describe la dispersión de las presas, con $D_1 \geq 0$ es el coeficiente de difusión de las presas.

Al Usar el método de ondas viajeras, de (3.11) se tiene:

$$(u(x, t), v(x, t)) = (u(s), v(s)). \quad (3.23)$$

entonces

$$u_{xx} = u_{ss}, \quad v_{xx} = v_{ss}, \quad u_t = cu_s, \quad v_t = cv_s. \quad (3.24)$$

Al reemplazar (3.23) y (3.24) en (3.22), se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} cu_s = D_1 u_{ss} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ cv_s = D_2 v_{ss} + \frac{muv}{1 + eu} - dv. \end{cases} \quad (3.25)$$

Sea $z = \frac{s}{c}$, entonces se tiene:

$$u_s = \frac{u_z}{c}, \quad v_s = \frac{v_z}{c}, \quad u_{ss} = \frac{u_{zz}}{c^2}, \quad v_{ss} = \frac{v_{zz}}{c^2}. \quad (3.26)$$

Al sustituir (3.26) en (3.25), el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} u_z = \frac{D_1}{c^2} u_{zz} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ v_z = \frac{D_2}{c^2} v_{zz} + \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases} \quad (3.27)$$

al considerar $\varepsilon = \frac{D_1}{c^2}$ y $\mu = \frac{D_2}{D_1}$ entonces:

$$\begin{cases} u_z = \varepsilon u_{zz} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ v_z = \varepsilon \mu v_{zz} + \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases} \quad (3.28)$$

Por lo tanto, al reescribir el modelo (3.28) como un sistema equivalente en \mathbb{R}^4 se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = u_1 \\ \varepsilon \frac{du_1}{dz} = u_1 - ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{buv}{1 + eu} \\ \frac{dv}{dz} = v_1 \\ \varepsilon \frac{dv_1}{dz} = \frac{v_1}{\mu} - \frac{muv}{\mu(1 + eu)} + \frac{dv}{\mu}. \end{cases} \quad (3.29)$$

con una perturbación $z = \varepsilon\xi$ en el modelo (3.29) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\xi} = \varepsilon u_1 \\ \frac{du_1}{d\xi} = u_1 - ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{buv}{1+eu} \\ \frac{dv}{d\xi} = \varepsilon v_1 \\ \frac{dv_1}{d\xi} = \frac{v_1}{\mu} - \frac{muv}{\mu(1+eu)} + \frac{dv}{\mu}, \end{array} \right. \quad (3.30)$$

para $\varepsilon > 0$ los puntos de equilibrio del sistema (3.30) son: $\widehat{E}_1 = (0, 0, 0, 0)$, $\widehat{E}_2 = (K, 0, 0, 0)$ y un punto interior $\widehat{E}_* = \left(0, \frac{d}{m-de}, 0, \frac{rm[mK - d(eK + 1)]}{bK(m-de)^2}\right)$, si (2.2) se mantiene. Puntos de equilibrio los cuales son independientes de μ y ε .

Para $\varepsilon = 0$ los equilibrios están dados por la variedad bidimensional,

$$M_0 = \left\{ (u, u_1, v, v_1) : u_1 = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1+eu}, v_1 = \frac{muv}{1+eu} - dv \right\}$$

al reducir el sistema (3.27) en M_0 , es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dz} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1+eu} \\ \frac{dv}{dz} = \frac{muv}{1+eu} - dv, \end{array} \right.$$

cuyo análisis de estabilidad es análogo al modelo (2.1).

CAPÍTULO 4

MODELO DE PREDADOR-PRESA TIPO HOLLING II CON TÉRMINO DIFUSIVO BIDIMENSIONAL

En este capítulo se presentan una serie de patrones del modelo difusivo depredador-presa tipo Holling II bidimensional.

4.1. Presentación Del Modelo

Cuando las poblaciones $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$ se distribuyen con respecto a dos variables espaciales x, y el modelo (3.22) se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{buv}{1 + eu} \\ v_t = D_2 \Delta v + \frac{muv}{1 + eu} - dv, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde, $D_1 \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ y $D_2 \Delta v = v_{xx} + v_{yy}$ son ecuaciones bidimensionales de difusión con $x, y \in \mathbb{R}$

4.2. Solución Numérica

Para construir el método de diferencia finita en el espacio de una dimensión, se toma una subdivisión uniforme del intervalo $\Omega = [A, B]$, con $0 \leq A < B$ y puntos de cuadrícula $x_i = ih + A$, con $i = 0, \dots, J$, e incremento de espacio $h = \frac{(B - A)}{J}$.

Para las aproximaciones bidimensionales, se usa una subdivisión uniforme del cuadrado $\Omega = [A, B] \times [A, B]$ con puntos de cuadrícula $(x_i, y_i) = (ih + A, jh + A)$, $i, j = 0, \dots, J$.

Considere,

$$\tilde{J} = \begin{cases} J & \text{si } d = 1 \\ (J + 1)^2 & \text{si } d = 2, \end{cases} \quad (4.2)$$

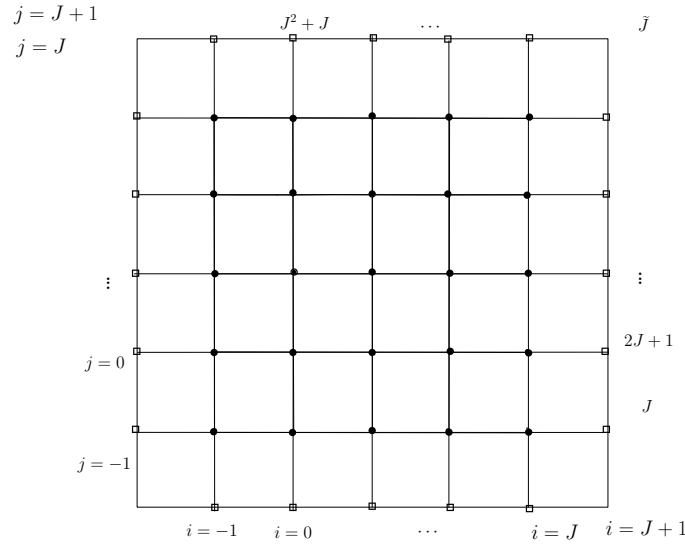


Figura 4.1: Malla bidimensional con nodos (•) y nodos ficticios (□) .

de forma que en ambas dimensiones, se tiene $2(\tilde{J} + 1)$ incógnitas para resolver y en la Figura 4.1 se observa la malla para el caso bidimensional.

De igual forma se toma una subdivisión uniforme del intervalo de tiempo $[0, T]$ con niveles de tiempo $t_n = n\Delta t$, $n = 1, \dots, N$, lo que implica que incremento del tiempo está dado por $\Delta t = \frac{T}{N}$.

La solución aproximada $\vec{u} = (u, v)^T$ de (4.1) en una dimensión en el punto (x_i, t_n) se denota $\vec{U}_i^n = (U_i^n, V_i^n)^T$, y para dos dimensiones se denota $\vec{U}_{i,j}^n = (U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)^T$ en el punto (x_i, y_n, t_n) .

Por otro lado, los nodos en la malla bidimensional están numerados de manera natural, es decir, numerados consecutivamente de izquierda a derecha comenzando con la fila inferior, desde $k = 0, 1, \dots, \tilde{J}$. La relación entre la numeración natural de los nodos y la indexación (i, j) está dada por

$$\vec{U}_k^n = \vec{U}_{i,j}^n \quad \text{donde } k = i + j(J + 1) \quad \text{para } i, j = 0, \dots, J. \quad (4.3)$$

La indexación (i, j) de las aproximaciones se usa para expresar el esquema de diferencias finitas, mientras que la indexación basada en la numeración natural de los nodos se usa en los sistemas lineales resultantes. Estos dos sistemas de indexación coinciden en el caso unidimensional. Dos métodos semi-implícitos (en el tiempo) de diferencias finitas se presentan en el esquema. Estos métodos se denominan semi-implícitos porque en el

lado derecho del esquema se tienen aproximaciones en el tiempo actual t_n y en el tiempo anterior t_{n-1} , y ambos métodos conducen a un sistema escaso, con bandas, lineal de ecuaciones algebraicas.

Para aproximar el sistema (4.1) con métodos estables de diferencia finita, se reemplaza las respuestas funcionales

$$h(\eta) = h_1(\eta) = \frac{\eta}{1 + \left| \frac{e}{b}\eta \right|} \quad \text{con } \eta = bu$$

por respuestas funcionales modificadas de la forma,

$$\hat{h}(x) = \hat{h}_1(x) = \frac{x}{1 + \left| \frac{e}{b}x \right|},$$

y también se modifica la expresión de crecimiento logístico a través de

$$rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) \longrightarrow rx \left(1 - \left| \frac{x}{K} \right| \right).$$

Para simplificar las diferencias directas en el tiempo, la aproximación de la diferencia central del laplaciano en una dimensión y la aproximación de la diferencia central de cinco puntos del laplaciano en dos dimensiones se usa la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \partial_n \psi^n &= \frac{(\psi^n - \psi^{n-1})}{\Delta t}, \\ \Delta h x_{i,j} &= \frac{(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 4x_{i,j})}{h^2}. \end{aligned}$$

El símbolo h se usa para el operador Laplaciano discreto tanto para el caso de una dimensión como dos dimensiones, puesto que el contexto dejará en claro de cual se está hablando.

Sea $f(u, v) = ru \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{buv}{1 + eu}$ y $g(u, v) = \frac{mvv}{1 + ev} - dv$ funciones cinéticas discretas.

Por otra parte se presenta un esquema lineal unidimensional de forma general como se muestra a continuación:

Para $n = 1, \dots, N$ y $i = 0, \dots, J$ se tiene $\{U_i^n, V_i^n\}$ de forma que:

$$\begin{cases} \partial_n U_i^n = \Delta_h U_i^n + \hat{f}(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}) \\ \partial_n V_i^n = \delta \Delta_h V_i^n + \hat{g}(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}), \end{cases} \quad (4.4)$$

con aproximaciones iniciales dadas por: $U_i^0 := u_o(x_i)$, $V_i^0 := v_o(x_i)$

Por otro lado se presenta el esquema lineal bidimensional de manera general de siguiente la forma:

Para $n = 1, \dots, N$ y $i, j = 0, \dots, J$ se tiene $\{u_{i,j}^n, v_{i,j}^n\}$ tal que:

$$\begin{cases} \partial_n U_{i,j}^n = \Delta_h U_{i,j}^n + \hat{f}(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}) \\ \partial_n V_{i,j}^n = \delta \Delta_h V_{i,j}^n + \hat{g}(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}), \end{cases} \quad (4.5)$$

con aproximaciones iniciales dadas por: $U_{i,j}^0 := u_o(x_i, y_j)$, $V_{i,j}^0 := v_o(x_i, y_j)$

Para ambos casos, también se necesita una serie de condiciones auxiliares que se aproximan a las condiciones de contorno de flujo cero de las ecuaciones continuas, como se explica en [7], Apéndice A.

Los esquemas implican una aproximación de la cinética de reacción con términos en el tiempo actual t_n y tiempo anterior t_{n-1} . La cinética en una dimensión correspondiente a 4.4 es:

$$\hat{f}(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}) = f_1(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}) = U_i^n - U_i^n |U_i^{n-1}| - V_i^n \hat{h}(bU_i^{n-1})$$

$$\hat{g}(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}) = g_1(\vec{U}_i^n, \vec{U}_i^{n-1}) = mV_i^n \hat{h}(bU_i^{n-1}) - dV_i^n,$$

y para dos dimensiones, la cinética correspondiente a 4.5 se da análogamente por:

$$\hat{f}(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}) = f_1(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}) = U_{i,j}^n - U_{i,j}^n |U_{i,j}^{n-1}| - V_{i,j}^n \hat{h}(bU_{i,j}^{n-1})$$

$$\hat{g}(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}) = g_1(\vec{U}_{i,j}^n, \vec{U}_{i,j}^{n-1}) = mV_{i,j}^n \hat{h}(bU_{i,j}^{n-1}) - dV_{i,j}^n$$

El esquema se puede expresar como $2(J+1)$ ecuaciones lineales, con la siguiente forma de matriz de bloques con 'numeración natural' de los nodos:

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & C_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^n \\ \vec{V}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{U}^{n-1} \\ \vec{V}^{n-1} \end{pmatrix}, 1 \leq n \leq N$$

donde

$$\vec{U}^n = (U_0^n, \dots, U_j^n)^T, \quad \vec{V}^n = (V_0^n, \dots, V_j^n)^T$$

con las matriz de coeficientes constantes L y las matrices de coeficientes A_{n-1} , B_{n-1} y C_{n-1} , las soluciones en el tiempo t_{n-1} , como se explica en [7], Apéndice B.

4.3. Simulación De Patrones

Los patrones que representan la distribución de las presas y depredadores del modelo (4.1) con parámetros: $r = 1$, $K = 1$, $b = 2.5$, $e = 2.5$, $m = 5$ y $d = 0.6$, se observan en las Figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

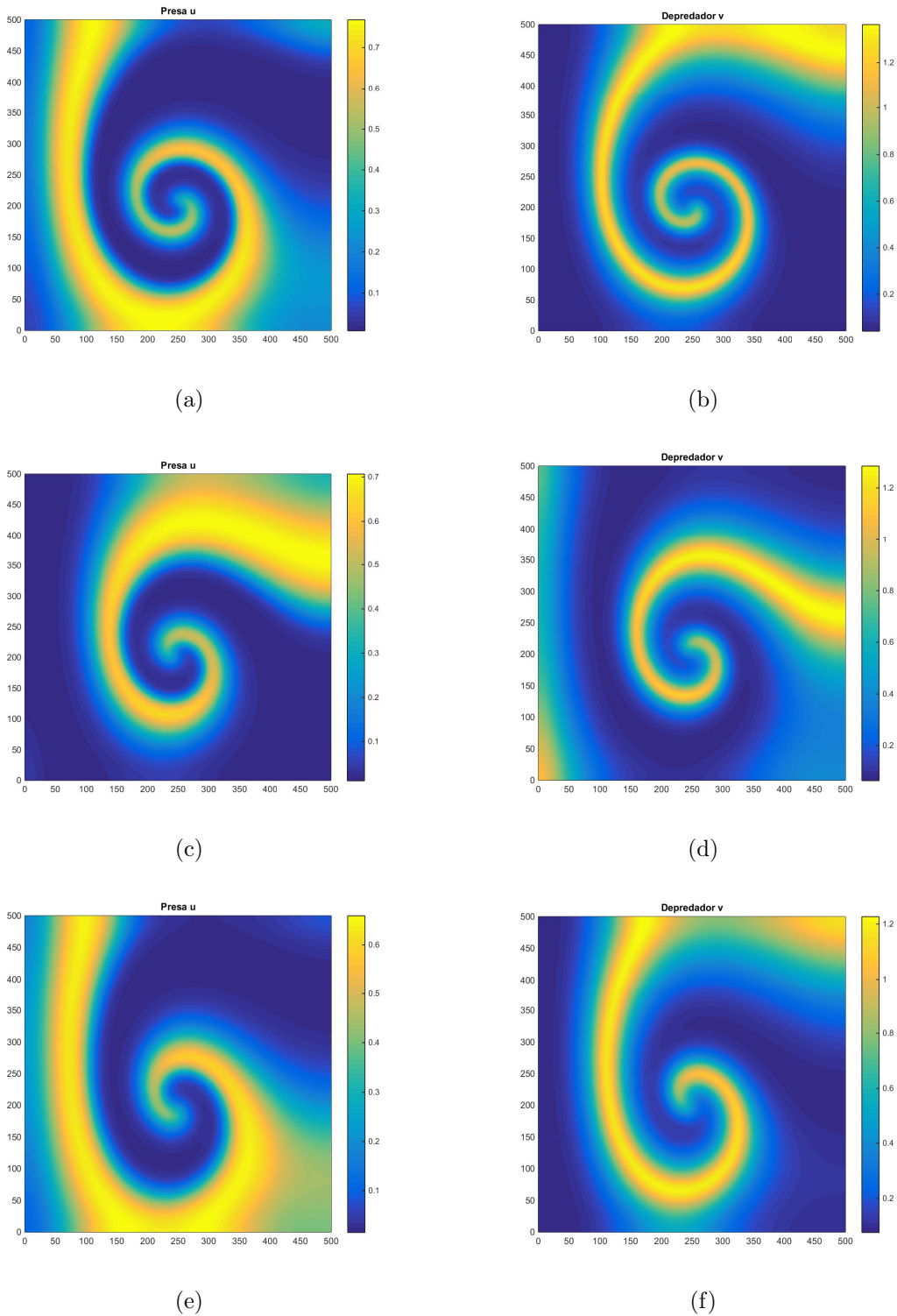


Figura 4.2: Densidades de presas y depredadores aproximadas bidimensionalmente en un tiempo $T = 150$, con condición inicial $u(X, Y, 0) = 6/35 - 2 * 10^{-7} * (X - 0.1 * Y - 225) * (X - 0.1 * Y - 675)$, $v(X, Y, 0) = 116/245 - 3 * 10^{-5} * (X - 450) - 1.2 * 10^{-4} * (Y - 150)$ y parámetros fijos: $D_1 = 1$, $D_2 = 10$, $r = 1$, $b = 2.5$, $e = 2.5$, $m = 5$ y $d = 0.6$, con un incremento Δt : (a)-(b) $\Delta t = 1/10$; (c)-(d) $\Delta t = 1/24$; (e)-(f) $\Delta t = 1/384$.

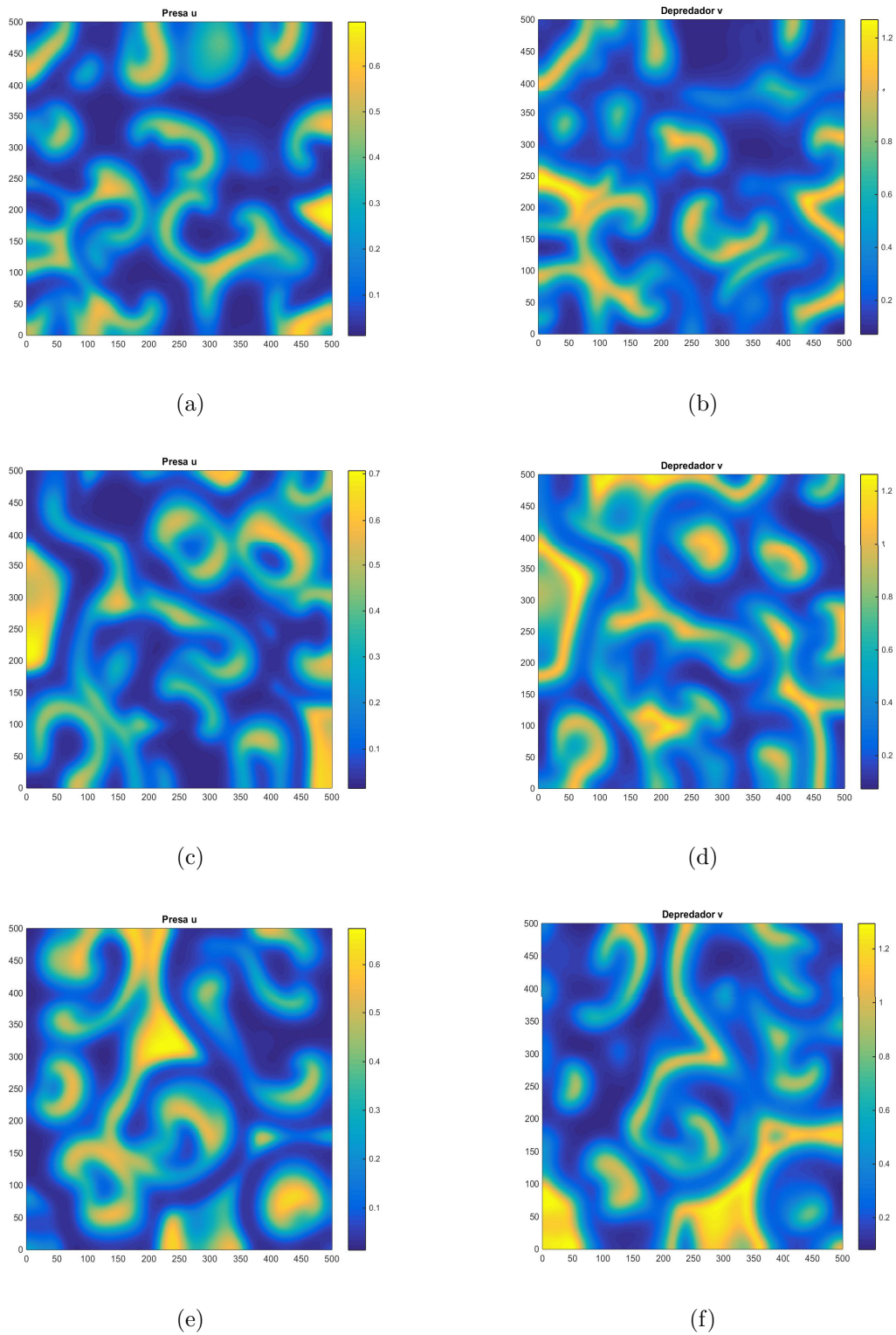


Figura 4.3: Densidades de presas y depredadores aproximadas bidimensionalmente con parámetros fijos y condición inicial como en la Figura 4.2 y un tiempo T : (a)-(b) $T = 1000$; (c)-(d) $T = 800$; (e)-(f) 600.

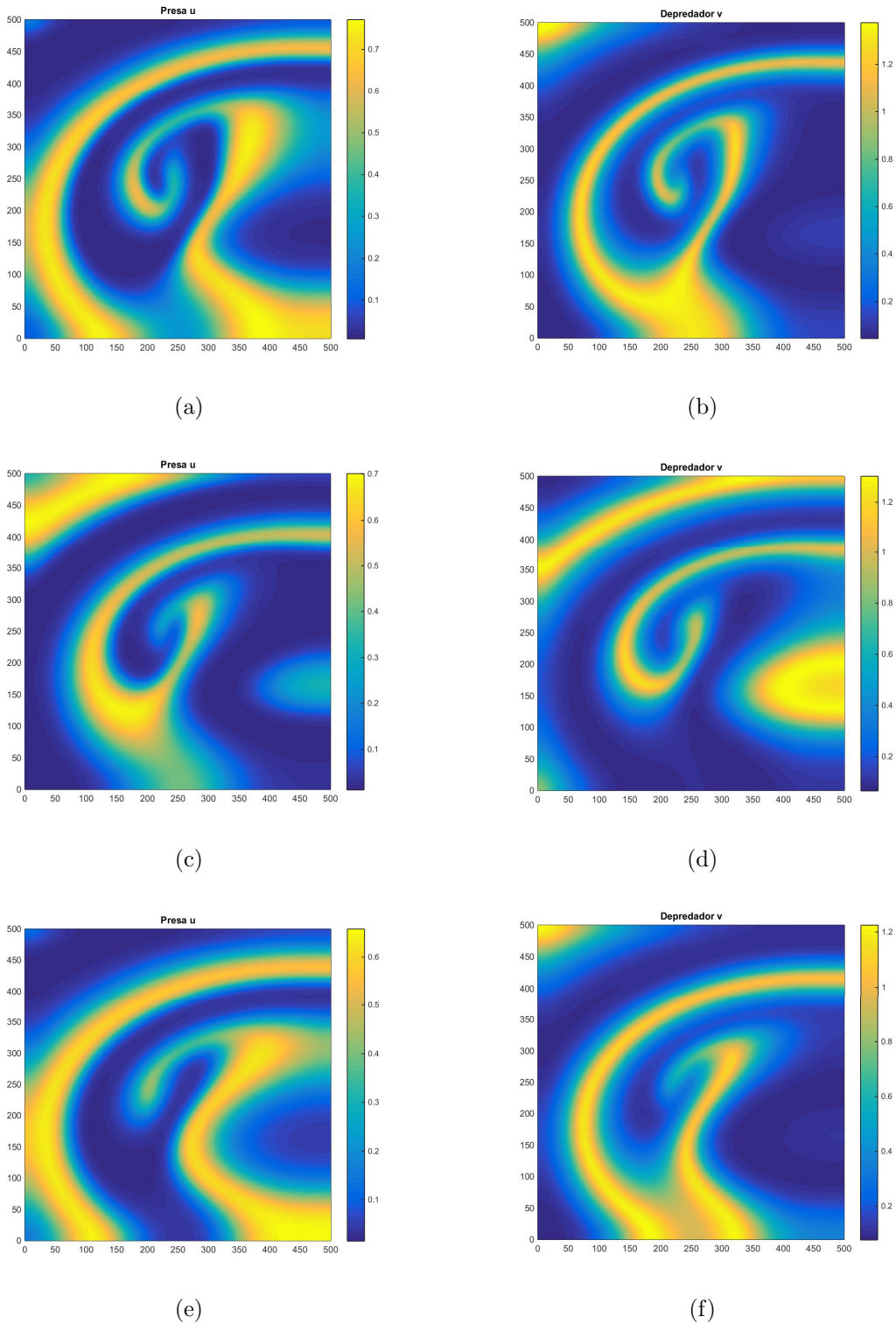


Figura 4.4: Densidades de presas y depredadores aproximadas bidimensionalmente con parámetros fijos y tiempo T como en la Figura 4.2 y condición inicial $u(X, Y, 0) = 6/35 - 2 * 10^{-7} * (X - 180) * (X - 720) - 6 * 10^{-7} * (Y - 90) * (Y - 210)$, $v(X, Y, 0) = 116/245 - 3 * 10^{-5} * (X - 450) - 6 * 10^{-5} * (Y - 135)$ y un incremento Δt : (a)-(b) $\Delta t = 1/10$; (c)-(d) $\Delta t = 1/24$; (e)-(f) $\Delta t = 1/384$.

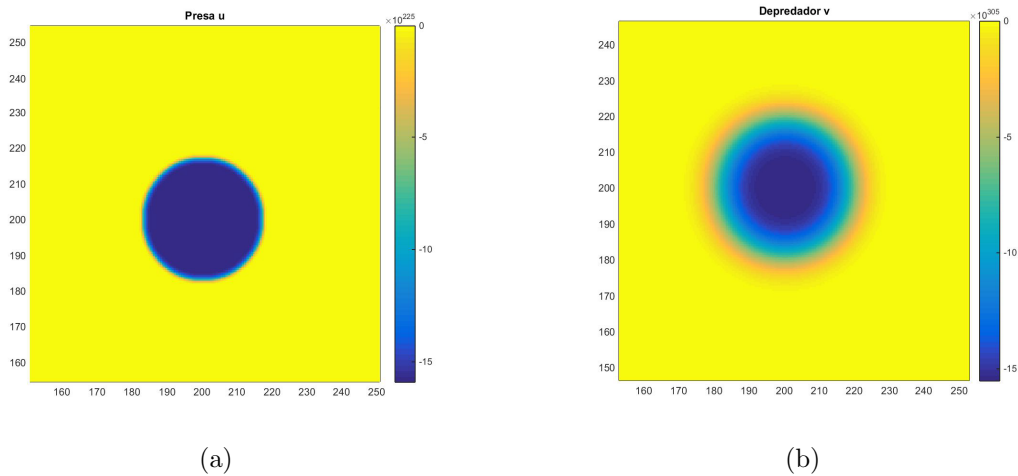


Figura 4.5: Densidades de presas y depredadores aproximadas bidimensionalmente con parámetros $r = 1, K = 1, b = 1, e = 1.5, m = 1$ y $d = 5$ con tiempo $T = 110$ y condición inicial $u(X, Y, 0) = 1.0, v(X, Y, 0) = 0.2 * (((X - 200).^2 + (Y - 200).^2) < 400) + 0.01 * (0) >= 400)$ y un incremento de espacio $h = 1/2$.

Para los parámetros y condiciones dadas en la Figura 4.5 solo se presenta el patrón observado en dicha Figura, puesto que al variar las condiciones de tiempo T e incremento Δt , entre otras, el sistema (4.1) diverge.

CAPÍTULO 5

SIMULACIÓN

La Tabla 5.1 muestra datos reales de índice de captura de una población de lince y conejos de un bosque, al norte de Canadá, obtenidos por la compañía Hudson Bay entre los años 1900 y 1920.

Tiempo	Conejos	Linces	Tiempo	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1919	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1920	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	-	-	-

Tabla 5.1: Índice de captura de lince y conejos

Al usar la base de datos de la Tabla 5.1 se estiman los parámetros del modelo (2.1) ajustandolos hasta conseguir un comportamiento similar al que se tiene con los datos reales como se observa en la Figura 5.1.

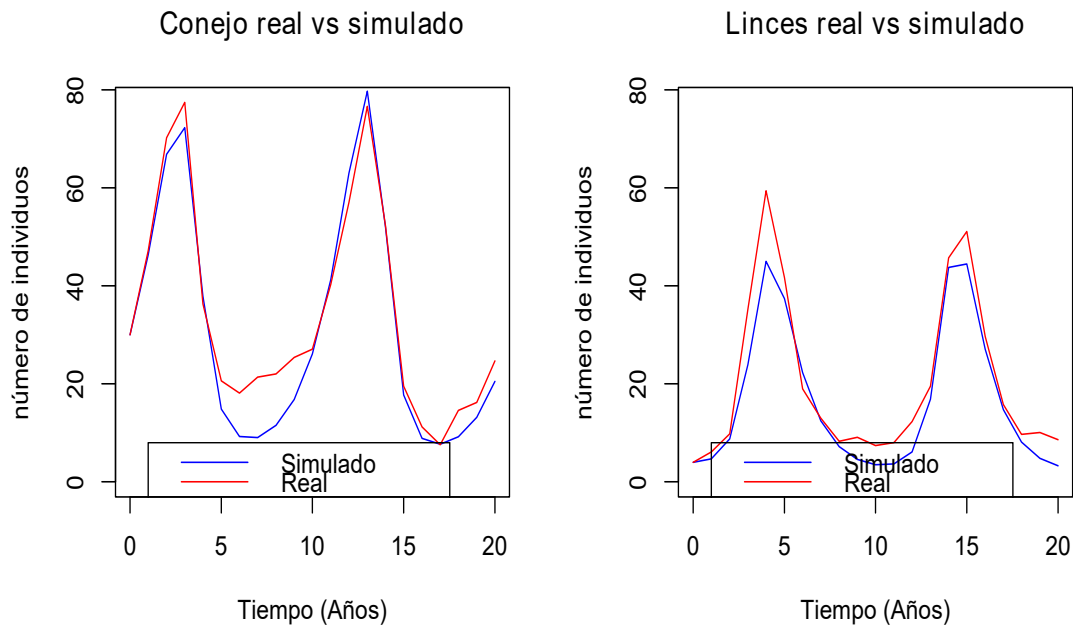


Figura 5.1: Modelo (2.1) real vs simulado.

Se tiene que los valores de los parámetros son:

Parámetro	Valor
r	0.58
K	51438
b	0.036
e	0.001
m	0.027
d	0.82

Tabla 5.2: Parámetros del modelo (2.1).

con un error relativo

$$E_{\text{rconejos}} = 29.99 \quad y \quad E_{\text{rlinces}} = 29.14$$

Al reemplazar los parámetros establecidos en la Tabla 5.2 en el modelo (3.22), el sistema se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + 0.58u \left(1 - \frac{u}{51438}\right) - \frac{0.036uv}{1 + 0.001u} \\ v_t = D_2 v_{xx} + \frac{0.027uv}{1 + 0.001u} - 0.82v, \end{cases} \quad (5.1)$$

La Figura 5.2 representa la distribución de los conejos y los linces con respecto a una variable espacial x .

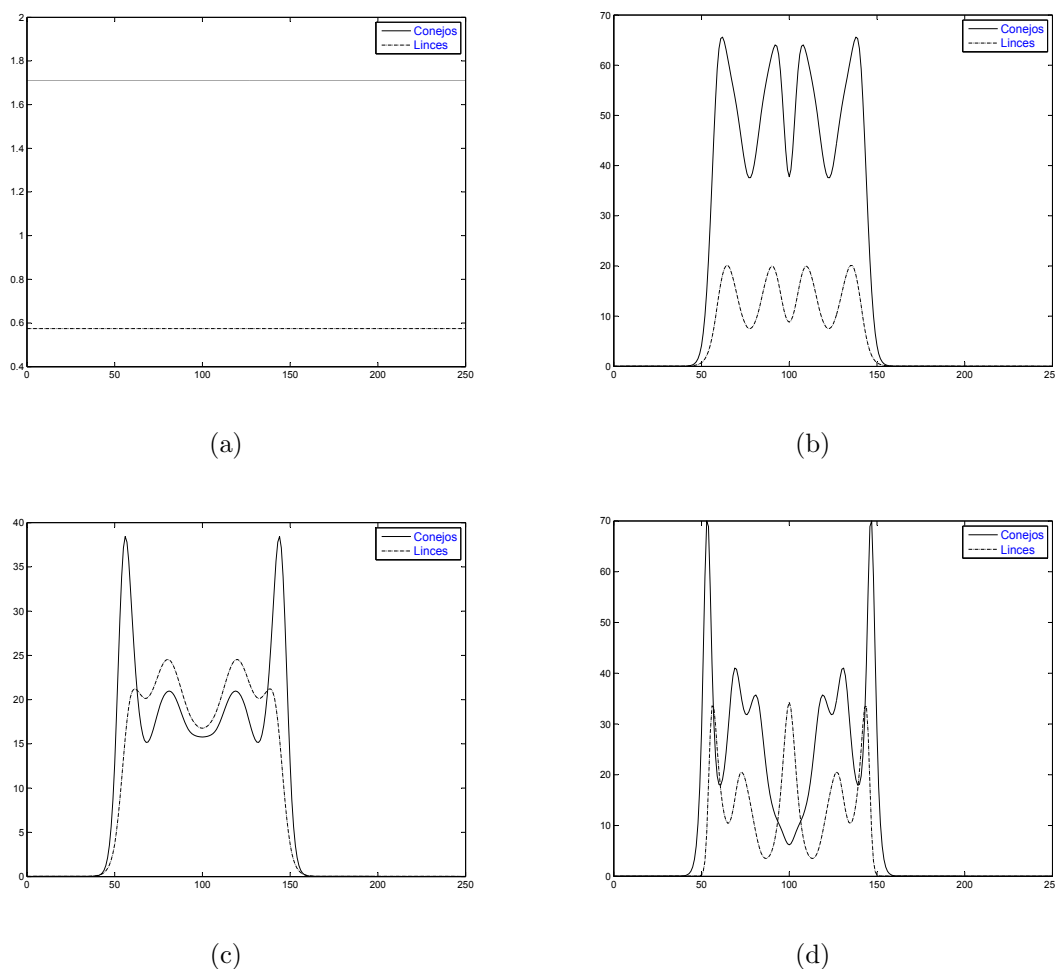


Figura 5.2: Población de conejos y linces del modelo (5.1) aproximadas unidimensionalmente en un tiempo $T = 40$, con coeficientes de difusión fijos $D_1 = 1$ y $D_2 = 10$, con condiciones iniciales $u(x, 0)$ y $v(x, 0)$: (a) $u(x, 0) = 8$ y $v(x, 0) = 4$; (b) $u(x, 0) = \exp(-(x - 100)^2)/30$ y $v(x, 0) = 29/360$; (c) $u(x, 0) = \exp(-(x - 100)^2)/5$ y $v(x, 0) = 2/5$; (d) $u(x, 0) = \exp(-(x - 100)^2)/30$ y $v(x, 0) = \exp(-(x - 100)^2)/360$

De igual forma al usar los parámetros establecidos en la Tabla 5.2 en el modelo (4.1), el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + 0.58u \left(1 - \frac{u}{51438}\right) - \frac{0.036uv}{1 + 0.001u} \\ v_t = D_2 \Delta v + \frac{0.27uv}{1 + 0.001u} - 0.82v, \end{cases} \quad (5.2)$$

La Figura 5.3 representa la distribución de los conejos y los linces con respecto a dos variables espaciales x, y , mostrándose los patrones más significativos para el modelo (5.2).

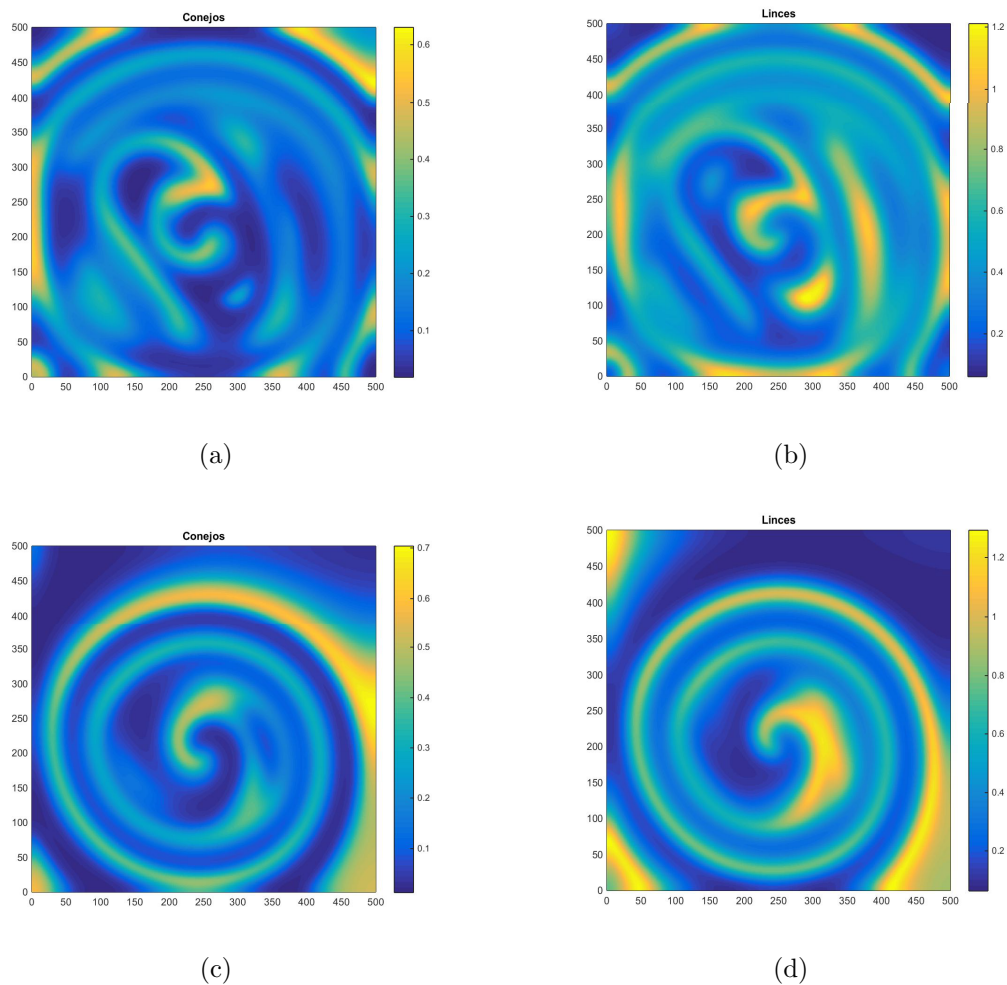


Figura 5.3: Población de conejos y lince del modelo (5.2) aproximadas bidimensionalmente con coeficientes de difusión fijos: D_1 y D_2 , y condición inicial $u(X, Y, 0) = 6/35 - 2 * 10^{-7} * (X - 180) * (X - 720) - 6 * 10^{-7} * (Y - 90) * (Y - 210)$, $v(X, Y, 0) = 116/245 - 3 * 10^{-5} * (X - 450) - 6 * 10^{-5} * (Y - 135)$ para un tiempo T : (a)-(b) $T = 400$; (c)-(d) $T = 300$.

Simulación Del Modelo (3.1)

```

1 r = 1;
2 m = 8;
3 c = 0.67;
4 d = 0.32;
5 K = 1.5;
6 e = 0.125;
7 f = @(t,a) [(r/(c*d*K))*a(1)*(K-a(1)) - (a(1)*a(2))/(c*(1+e*a(1))); a(3);
              c*a(3) + (1 - (m*a(1))/(d*(1+e*a(1))))*a(2)];
8 [t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1 1]); % Runge-Kutta 4th/5th order ODE
   solver
9 plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3),'b')
10 xlabel('u'),
11 ylabel('w'),
12 zlabel('z');

```

Simulación Del Modelo Con Término Difusivo Unidimensional Por El Método De Diferencias Finitas

```

1 %D Metodo de diferencias finitas aplicado al sistema difusivo depredador
   -
2 %presa dado por:
3 %ut=Du*uxx+ru(1-u/K)-auv/(1+eu)
4 %vt=Dv*vxx+buv/(1+eu)-cv
5 %EJEMPLO
6 %Du=1
7 %Dv=10.0
8 %r=1
9 %a=2.5
10 %e=2.5
11 %b=5.0
12 %c=0.6
13 %Malla a=0

```

```

14 %Malla b=500
15 %h=1
16 %T=40
17 %Incremento t =1/24
18 %u(x,0)=exp(-(x-100).^2)/5
19 %v(x,0)=2/5
20 %Insertar parametros
21 Du = input('Digite parametro Du = ');
22 Dv = input('Digite parametro Dv v = ');
23 r = input('Digite parametro r = ');
24 K = input('Digite parametro K = ');
25 d = input('Digite parametro a = ');
26 e = input('Digite parametro e = ');
27 f = input('Digite parametro b = ');
28 c = input('Digite parametro c = ');
29 a = input('Digite a en la malla [a,b]^2 = ');
30 b = input('Digite b en la malla [a,b]^2 = ');
31 h = input('Ingrese incremento de espacio h = ');
32 T = input('Tiempo maximo iterado T = ');
33 delt = input('Digite incremento para el tiempo t = ');
34 %Condiciones iniciales
35 u0 = input('Condicion inicial u(x,0)= ', 's');
36 v0 = input('Condicion inicial v(x,0)= ', 's');
37 %Asignacion de algunas constantes
38 mu=delt/(h^2);
39 J=round((b-a)/h);
40 n = J+1;
41 N=round(T/delt);
42 %Inicio del metodo
43 u=zeros(n,1); v=zeros(n,1); F=zeros(n,1); G=zeros(n,1); indexI=zeros(n,1)
44 ;
45 y1=zeros(n,1); y2=zeros(n,1); z1=zeros(n,1); z2=zeros(n,1); hhat=zeros(n
46 ,1);
47 x=zeros(n,1); B1=sparse(n,n); B2=sparse(n,n); L=sparse(n,n); Lower1=
48 sparse(n,n);
49 Lower2=sparse(n,n); Upper1=sparse(n,n); Upper2=sparse(n,n);
50 %Datos iniciales
51 indexI=[1:n]';
52 x=(indexI-1)*h+a; %valor de x en la malla
53 u = eval(u0).*ones(n,1); v = eval(v0).*ones(n,1);
54 %Construccion de la matriz L (sin el factor 1/h^2)
55 L=sparse(1,2,-2,n,n);
56 L=L+sparse(n,n-1,-2,n,n);
57 L=L+sparse(2:n-1,3:n,-1,n,n);
58 L=L+sparse(2:n-1,1:n-2,-1,n,n);
59 L=L+sparse(1:n,1:n,2,n,n);
60 %Construccion de matrices B1 & B2
61 B1=sparse(1:n,1:n,1,n,n) + Du*mu*L;
62 B2=sparse(1:n,1:n,1,n,n) + Dv*mu*L;
63 %Factorizacin LU de B1 y B2
64 [Lower1,Upper1]=lu(B1);
65 [Lower2,Upper2]=lu(B2);
66 %Procedimiento de paso de tiempo
67 for nt=1:N
68     %Funcional Holling

```

```

66     hhat = u./(1 + e*abs(u));
67     %Sistema sin difusion
68     F = r.*u - r*u.*abs(u)./K - d.*v.*hhat;
69     G = f.*v.*hhat - c.*v;
70     y1 = u + delt*F;
71     y2 = v + delt*G;
72     %Sustitucion directa para resolver Lower1*z1=y1 para z1
73     z1 = Lower1\y1;
74     %Sustitucion hacia atrs para resolver Upper1*u=z1 para u
75     u = Upper1\z1;
76     %Sustitucion directa para resolver Lower2*z2=y2 for z2
77     z2 = Lower2\y2;
78     %Sustitucion hacia atrs para resolver Upper2*v=z2 para v
79     v = Upper2\z2;
80 end
81 %Solucin en el tiempo T = N*delt
82 plot(x,u, 'k'); hold on; plot(x,v, 'k-.')
83
84 lgd = legend({'Conejos', 'Linces'}, 'FontSize',12, 'TextColor', 'blue');

```

Simulación Del Modelo Con Término Difusivo Bidimensional Por El Método De Diferencias Finitas

```

1 %2D Metodo de diferencias finitas aplicado al sistema difusivo depredador
  -
2 %presa dado por:
3 %ut=Du*nabla(u)+ru(1-u/K)-auv/(1+eu)
4 %vt=Dv*nabla(v)+buv/(1+eu)-cv
5 %EJEMPLO
6 %Du=1
7 %Dv=10.0
8 %r=1
9 %a=2.5
10 %e=2.5
11 %b=5.0
12 %c=0.6
13 %Malla a=0
14 %Malla b=500
15 %h=1
16 %T=150
17 %Incremento t =1/24
18 %u(X,Y,0)=6/35-2E-7*(X-0.1*Y-225).*(X-0.1*Y-675)
19 %v(X,Y,0)=116/245-3E-5*(X-450)-1.2E-4*(Y-150)
20 %Insertar parametros
21 Du = input('Digite parametro difusivo para u = ');
22 Dv = input('Digite parametro difusivo para v = ');
23 r = input('Digite parametro r = ');
24 K = input('Digite parametro K = ');
25 d = input('Digite parametro a = ');
26 e = input('Digite parametro e = ');
27 f = input('Digite parametro b = ');
28 c = input('Digite parametro c = ');

```

```

29 a = input('Digite a en la malla [a,b]^2 = ');
30 b = input('Digite b en la malla [a,b]^2 = ');
31 h = input('Ingrese incremento de espacio h = ');
32 T = input('Tiempo maximo iterado T = ');
33 delt = input('Digite incremento para el tiempo t = ');
34 %Condiciones iniciales
35 U0 = input('Digite la condicion inicial u(X,Y,0) = ','s'); %see notes
36 V0 = input('Digite la condicion inicial v(X,Y,0) = ','s'); % in text
37 %Asignacion de algunas constantes
38 mu=delt/(h^2);
39 J=round((b-a)/h);
40 dimJ=J+1;
41 n = (dimJ)^2; %numero de nodos para cada variable dependiente
42 N=round(T/delt);
43 %Inicio del metodo
44 u=zeros(n,1); v=zeros(n,1); F=zeros(n,1); G=zeros(n,1);
45 y1=zeros(n,1); y2=zeros(n,1); U_grid=zeros(dimJ,dimJ);
46 V_grid=zeros(dimJ,dimJ); B=sparse(n,n); L=sparse(n,n);
47 %Datos iniciales
48 indexI=1:dimJ;
49 x=(indexI-1)*h+a;
50 [X,Y]=meshgrid(x,x);
51 U0 = eval(U0).*ones(dimJ,dimJ); V0 = eval(V0).*ones(dimJ,dimJ);
52 %Cambio de orientacin de los datos iniciales y conversion en vector 1-D
53 U0=U0'; V0=V0'; u=U0(:); v=V0(:);
54 %Construccion de la matriz L (sin factor 1/h^2)
55 L(1,1)=3; L(1,2)=-3/2; L(J+1,J+1)=6; L(J+1,J)=-3;
56 L=L+sparse(2:J,3:J+1,-1,n,n);
57 L=L+sparse(2:J,2:J,4,n,n);
58 L=L+sparse(2:J,1:J-1,-1,n,n);
59 L(1,J+2)=-3/2; L(J+1,2*J+2)=-3;
60 L=L+sparse(2:J,J+3:2*J+1,-2,n,n);
61 L(n-J,n-J)=6; L(n-J,n-J+1)=-3;
62 L(n,n)=3; L(n,n-1)=-3/2;
63 L=L+sparse(n-J+1:n-1,n-J+2:n,-1,n,n);
64 L=L+sparse(n-J+1:n-1,n-J+1:n-1,4,n,n);
65 L=L+sparse(n-J+1:n-1,n-J:n-2,-1,n,n);
66 L(n-J,n-(2*J+1))=-3; L(n,n-dimJ)=-3/2;
67 L=L+sparse(n-J+1:n-1,n-2*J:n-(J+2),-2,n,n);
68 L=L+sparse(J+2:n-dimJ,2*J+3:n,-1,n,n);
69 L=L+sparse(J+2:n-dimJ,1:n-2*dimJ,-1,n,n);
70 L=L+sparse(J+2:n-dimJ,J+2:n-dimJ,4,n,n);
71 L=L+sparse(J+2:n-(J+2),J+3:n-dimJ,-1,n,n);
72 L=L+sparse(J+2:dimJ:n-(2*J+1),J+3:dimJ:n-2*J,-1,n,n);
73 L=L+sparse(2*J+2:dimJ:n-2*dimJ,2*J+3:dimJ:n-(2*J+1),1,n,n);
74 L=L+sparse(J+3:n-dimJ,J+2:n-(J+2),-1,n,n);
75 L=L+sparse(2*J+2:dimJ:n-dimJ,2*J+1:dimJ:n-(J+2),-1,n,n);
76 L=L+sparse(2*J+3:dimJ:n-(2*J+1),2*J+2:dimJ:n-2*dimJ,1,n,n);
77 %Construccion de las matrices B1 y B2
78 B1=sparse(1:n,1:n,1,n,n)+Du*mu*L;
79 B2=sparse(1:n,1:n,1,n,n)+Dv*mu*L;
80 %Procedimiento de paso de tiempo
81 for nt=1:N
82     %Funcional Holling
83     hhat = u./(1 + e*abs(u));

```

```

84     %Sistema sin difusion
85     F = r.*u - r*u.*abs(u)./K - d.*v.*hhat;
86     G = f.*v.*hhat - c.*v;
87     y1 = u + delt*F;
88     y2 = v + delt*G;
89     %Resuelve u & v usando GMRES
90     [u, flagu, relresu, iteru]=gmres(B1,y1,[],1e-6,[],[],[],u);
91     if flagu~=0 flagu, relresu, iteru, error('GMRES no converge'), end
92     [v, flagv, relresv, iterv]=gmres(B2,y2,[],1e-6,[],[],v);
93     if flagv~=0 flagv, relresv, iterv, error('GMRES no converge'), end
94 end
95 %Reordenar vectores de solucin 1-D en cuadruculas de solucin 2-D
96 V_grid=reshape(v, dimJ, dimJ); U_grid=reshape(u, dimJ, dimJ);
97 %Cuadruculas de solucin en la entrada ij (matriz)
98 V_grid=V_grid'; U_grid=U_grid';
99 %Grafica solucion u & v
100 figure; pcolor(X,Y,U_grid); shading flat; colorbar; axis square xy; title('
    Presa u')
101 figure; pcolor(X,Y,V_grid); shading flat; colorbar; axis square xy; title('
    Depredador v')

```

Simulación Modelo Real vs Simulado

```

1  install.packages("deSolve")
2  library(deSolve)
3
4  #####DATOS REALES TOMADOS LINCES VS CONEJOS
5  datau<-c(30,
6          47.2,70.2,77.4,36.3,20.6,18.1,21.4,22,25.4,27.1,40.3,57,76.6,52.3,19.5,11.2,7.6,
7          14.6,16.2,24.7)
8  timeu<-c(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20)
9  datav<-c
10         (4,6.1,9.8,35.2,59.4,41.7,19,13,8.3,9.1,7.4,8,12.3,19.5,45.7,51.1,29.7,
11         15.8,9.7,10.1,8.6)
12 timev<-c(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20)
13 #####MODELO DEPREDADOR - PRESA
14 UV <- function(t, x, parametros){
15   with(as.list(c(parametros, x)),{
16     dU <- r*U*(1-U/K)-a*U*V/(1+e*U)
17     dV <- b*U*V/(1+e*U)-c*V
18     derivadas <- c(dU, dV)
19     return(list(derivadas))})}
20 #####DATOS INICIALES
21 parametros <- c(r=0.58, K=51438, a=0.036, e=0.001, b=0.027, c=0.82)
22 v_iniciales <- c(U=30, V=4)
23 dt <- seq(0, 20, 1)
24 simulacion.uv <- as.data.frame(ode(y=v_iniciales, times=dt, func=UV,
25   parms=parametros))
26 attach(simulacion.uv)

```

```
27 ###GRAFICA
28 par(mfrow=c(1,2))
29 plot(dt, U, type="l", col="blue", ylim=c(0, max(datau)), xlab="Tiempo (
    Aos)", ylab="Nmero de individuos")
30 lines(timeu, datau, type="l", col="red")
31 title("Conejos.")
32 legend(1, 8, legend=c("Simulado", "Real"), col=c("blue", "red"), lty=rep
    (1, 3))
33 plot(dt, V, type="l", col="blue", ylim=c(0, max(datau)), xlab="Tiempo (
    Aos)", ylab="Nmero de individuos")
34 lines(timev, datav, type="l", col="red")
35 title("Linces.")
36 legend(1, 8, legend=c("Simulado", "Real"), col=c("blue", "red"), lty=rep
    (1, 3))
37
38 ###ERROR
39
40 sum(abs(datau-U)^2)/20
41
42 sum(abs(datav-V)^2)/20
```


- [1] CHUFEN WU, YONG YANG, PEIXUAN WENG. *Traveling waves in a diffusive predator-prey system of Holling type: Point-to-point and point-to-periodic heteroclinic orbits*. *Chaos, Solitons Fractals* 48:43–53, 2013
- [2] PAUL BLANCHARD, ROBERT L. DEVANEY, GLEN R. HALL. *Ecuaciones Diferenciales*. Universidad de Boston. 10
- [3] LUIS ARTURO POLANÍA QUIZA *Un Enfoque Cualitativo a las EDO'S y Teoría Wavelets*. Universidad Surcolombiana - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Neiva-Colombia. 10
- [4] JORGE SOTOMAYOR *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, Brasil, 1979. 17
- [5] YANG KUANG, H. I. FREEDMAN. *Uniqueness of Limit Cycles in Cause-Type Models of Predator-Prey Systems*. *Mathematical Biosciences* 88:67-84, New York, 1988. 10, 13
- [6] YURI A. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition. *Applied Mathematical Sciences Volume 112*, New York. 10, 22
- [7] MARCUS R. GARVIE. *Finite-Difference Schemes for Reaction-Diffusion Equations Modeling Predator-Prey Interactions in MATLAB*. *Bulletin of Mathematical Biology* (2007) 69: 931–956. 46
- [8] ANNA GHAZARYAN, VAHAGN MANUKIAN, STEPHEN SCHECTER. *Travelling Waves in the Holling-Tanner Model with Weak Diffusion*. Royal Society Publishing. 2015.
- [9] WAN-TONG LI, SHI-LIANG WU *Traveling waves in a diffusive predator-prey model with holling type-III functional response*. *Science Direct Chaos, Solitons and Fractals* 37: 476–486, 2008.
- [10] FENG RAO, YUN KANG, WAN-TONG LI, SHI-LIANG WU *The complex dynamics of a diffusive prey-predator model with an Allee effect in prey*. *Science Direct, Ecological Complexity* 28: 123–144, 2016. 10

-
- [11] XIUJUAN WU, YONG LUO, YIZHENG HU *Traveling Waves in a Diffusive Predator-Prey Model Incorporating a Prey Refuge*. Mathematics and Information Science, 2014.
- [12] RUI PENG, MINGXIN WANG *An analysis of a predator-prey model with both diffusion and migration*. Mathematical and Computer Modelling, 51, 1064 - 1070, 2010.